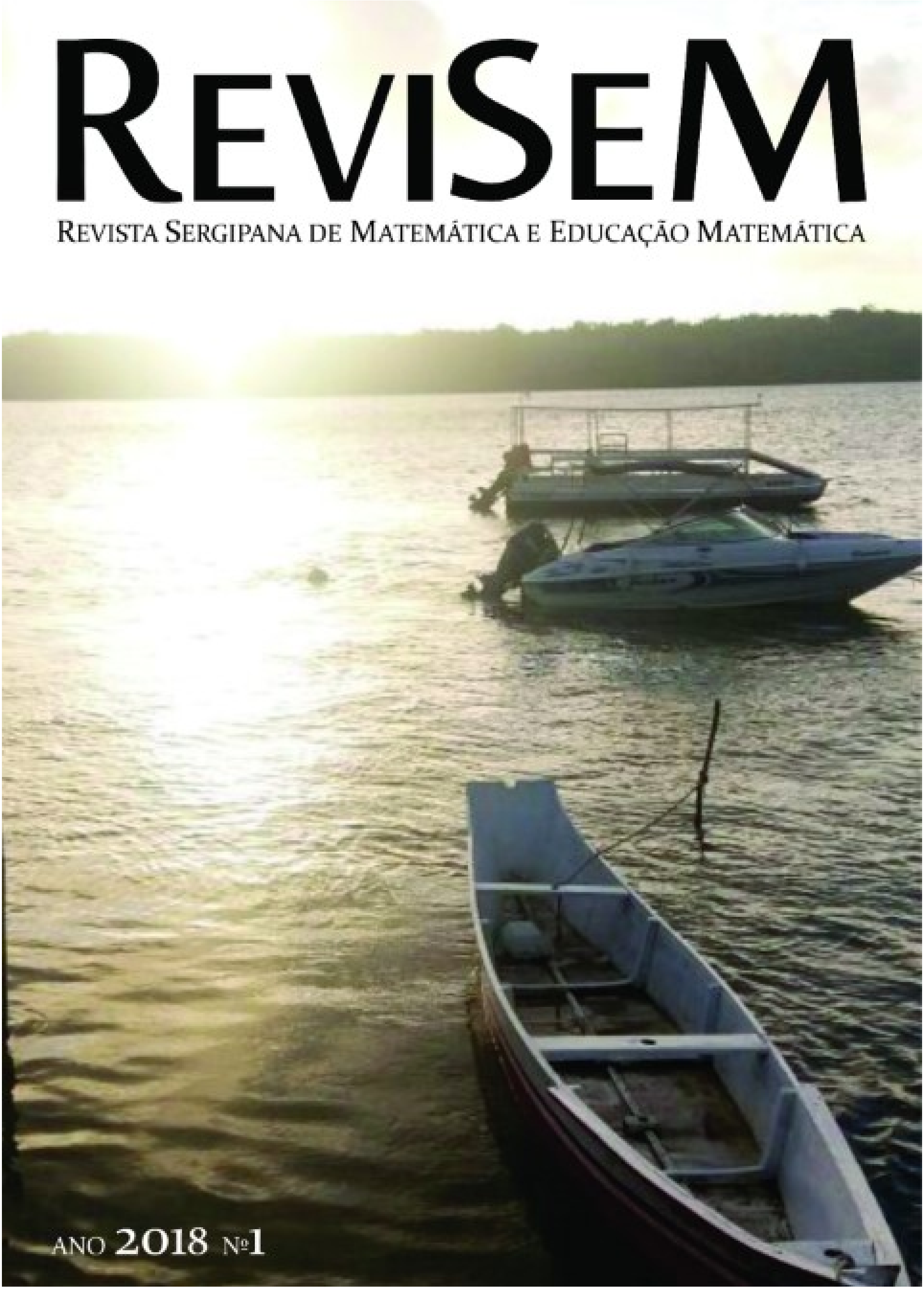
REVISEM

REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



ANO 2018 Nº1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática : REVISEM [recurso eletrônico] / Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe. – Vol. 3, n.1 (2018)- . – Itabaiana, SE, 2016-

Semestral.

ISSN 2525-5444

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal de Sergipe. Departamento de Matemática.

CDU 51:37

SUMÁRIO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

SEQUÊNCIA DE ENSINO: UMA PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA INTEGRAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM NO 9º ANO

Flaviana dos Santos Silva
Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC
fssilva@uesc.br

Jonathas Silva Pitanga
Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC
jonathas_pitanga@hotmail.com

Resumo

O conteúdo de Função Afim é um componente curricular do 9° ano do ensino fundamental, ou seja, do quarto ciclo de ensino e é notório que causa muita dificuldade entre os estudantes. Sendo assim, cabe ao professor pesquisar e oportunizar atividades desafiadoras para que o aluno consiga compreender, verificando suas semelhanças e desta forma facilitar a compreensão dos seus conceitos, suas propriedades, bem como as especificidades das relações em suas aplicações. Pensando nisso, o objetivo geral desde artigo é apresentar uma sequência de ensino utilizando o GeoGebra como um recurso didático a partir de uma situação problema que leve o aluno a explorar o conteúdo antes da apropriação do mesmo. O embasamento teórico foi articulado com as teorias da abordagem instrumental de Rabardel, dos registros de representação da semiótica e da resolução de problema em Matemática. Com os resultados, foi possível elaborar uma situação problema composta de 04 questões, empregando o *software GeoGebra* no estudo das Função Afim. A situação problema é direcionada a professores de Matemática, graduandos, ou para profissionais da Educação. Logo, foi possível evidenciar que é importante o professor trazer situações problemas em sala de aula para tornar a Matemática mais próxima da realidade do aluno.

Palavras-chave: Função Afim. GeoGebra. Resolução de Problemas.

Abstract

The content of related functions is a component of the curriculum of the 9th year of elementary school, that is, in the fourth cycle of education and it is notorious that it causes great difficulty among the students. Thus, it is up to the teacher to research and opportunize challenging activities so that the student can "traffic" between them verifying their similarities and thus facilitate the understanding of their concepts, their properties, as well as the specificities of the relations in their applications. With this in mind, the overall goal of the course work is to investigate the contributions of GeoGebra as a didactic resource from a problem situation that leads the student to explore the content before the appropriation of the same. The theoretical basis was articulated with the theories of the instrumental approach of Rabardel, the records of representation of semiotics and problem solving in Mathematics. As a result, it was possible to elaborate a problem situation with four questions, using GeoGebra theme and software in the study of related functions. The problem situation is directed to Mathematics teachers, undergraduates, or to professionals of Education. Therefore, it was possible to show that it is important for the teacher to bring problems situations in the classroom to make Mathematics closer to the student's reality.

Keywords: Related Functions. GeoGebra. Troubleshooting

INTRODUÇÃO

A atual sociedade vive em constantes transformações tecnológicas e os seres humanos são responsáveis por esses avanços. Diante deste cenário, é necessário que os professores estejam em constante busca pelo conhecimento e apropriação dessas novas ferramentas tecnológicas para aliá-las aos conteúdos programáticos na Educação.

Neste sentido, ensinar e aprender Matemática não são tarefas simples, nem para o professor nem para o aluno. Os obstáculos e dificuldades de aprendizagem nessa área já aparecem desde os primeiros anos da vida escolar dos alunos, desafiando os procedimentos pedagógicos e didáticos adotados pelos professores.

Desta forma, quaisquer esforços para minimizar as dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de Matemática são muito bem vindos, uma vez que a Matemática tem importância social, pois ajuda o aluno a compreender e interpretar de forma crítica as situações reais. Assim, o papel da Matemática e de seus conteúdos vai além dos muros da escola, sendo elementos importantes para a formação do cidadão.

Para atender essa demanda, o conteúdo de Função Afim é trabalhado no 9° ano do Ensino fundamental, ou seja, nos anos finais. Nessa direção, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresenta como objetivo do quarto ciclo, no que se refere ao pensamento algébrico, o de explorar situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> - Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
> - Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (BRASIL, 1998, p. 81).

Sendo assim, cabe ao professor pesquisar e oportunizar atividades desafiadoras para que o aluno consiga "trafegar" entre elas, verificando suas semelhanças e desta forma facilitar a compreensão dos seus conceitos, suas propriedades, bem como, as especificidades das relações em suas aplicações.

Essas dificuldades poderão ser amenizadas ao incorporar nas atividades o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), ou mais precisamente, o *software* GeoGebra.

Inúmeros estudos foram realizados e em seus resultados mostram que o uso das tecnologias em sala de aula permite a investigação do aluno, bem como, a exploração visual de um conteúdo proposto. Na maioria dos trabalhos divulgados sobre o uso do GeoGebra como instrumento auxiliador, são utilizados os comandos mais simples do *software*.

Neste trabalho, entretanto, procurou-se por outras potencialidades, outros modos de usar o *software*, e ser um diferencial no uso do GeoGebra para ensino e aprendizagem da Função Afim.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma sequência de ensino que leve o aluno a explorar o conteúdo de Função Afim antes de sua apresentação formal, utilizando como recurso didático o *software* GeoGebra.

Nesse âmbito, a justificativa de escolha do *software* GeoGebra como recurso tecnológico no ensino da Função Afim em especial, se deu por ser gratuito e não necessitar de conexão à Internet para o seu manuseio, além de se destacar por suas potencialidades e praticidade no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Desse modo, a sequência de ensino é composta por uma situação problema, seguida de uma série de questionamentos que levam o aluno a produzir e interpretar diferentes escritas algébricas; resolver situações problemas por meio de equações, compreendendo os procedimentos envolvidos; e observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre as variáveis.

O embasamento teórico é a Abordagem Instrumental proposta por Rabardel (1995). Além desta teoria, o presente artigo também fará referência à noção de Registros de Representações Semióticas, que foi introduzida em estudos de funcionamento do pensamento por Duval (1993) e por fim será abordada a resolução de problemas em matemática com o propósito de introduzir a proposta da função afim articulada com o problema proposto para a criação da sequência de ensino.

Alguns trabalhos já realizados nos últimos oito anos, evidenciam a importância de abordar esta problemática. Vale destacar a dissertação de Soares (2012), intitulada como "Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções", que teve como objetivo investigar as contribuições do uso do GeoGebra para a aprendizagem de funções. Usou-se como base teórica a Teoria da Aprendizagem Significativa e estudos da Educação Matemática. Foram identificados os conhecimentos prévios dos estudantes sobre funções e em seguida, fez-se uma exploração do tema com o GeoGebra.

O artigo de Rezende, Pesco e Bortolossi (2012), explorou aspectos dinâmicos no ensino de Funções Reais com recursos do GeoGebra. Assim, os recursos interativos do GeoGebra ofereceram um instrumento didático oportuno para explorar os aspectos dinâmicos negligenciados na educação básica. Nesse artigo é apresentado quatro materiais didáticos construídos com o *software* GeoGebra que promoveram essa perspectiva dinâmica.

O trabalho de Scano (2009) apresentou a Função Afim por meio de uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra, o objetivo da pesquisa foi desenvolver uma sequência de ensino para iniciar o estudo com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma Função Afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico.

No artigo de Bazzo (2009), "o uso dos recursos das novas tecnologias, planilha de cálculo e o GeoGebra para o ensino de função no ensino médio", teve como objetivo contribuir no processo do estudo das referidas funções, optou-se pelo uso do aplicativo "Planilha de Cálculo" e do *software* GeoGebra.

Diante do exposto, verifica-se, a importância de trazer uma proposta para integrar o *software* GeoGebra, uma vez que, este apresenta uma sequência de ensino que conta com uma situação problema envolvendo o conteúdo de Função Afim de forma contextualizada, podendo ser utilizada pelos professores de Matemática e graduandos. Além disso, traz a preocupação de inserir a utilização do *software* GeoGebra como ferramenta para auxiliar na construção e análise de gráficos, e assim para formalizar o conteúdo.

APORTE TEORICO

Teoria da Abordagem Instrumental de Rabardel

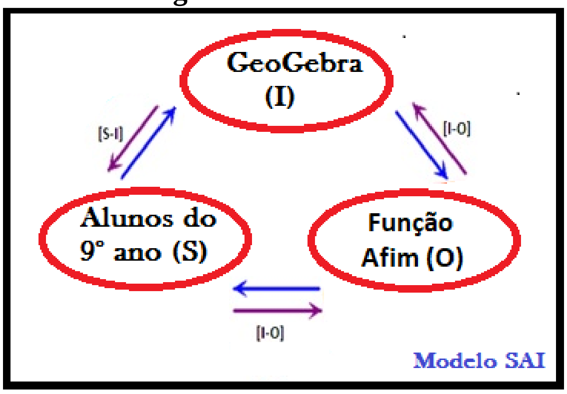
A abordagem instrumental tem como ponto de partida a ideia de que uma ferramenta (artefato) não é automaticamente um instrumento eficaz e prático. Um balde, por exemplo, é um objeto sem significado, salvo quando se tem algo (apropriado à ferramenta) para aprofundar, inserir, moldar, transformando-o assim em um instrumento eficaz.

Da mesma forma, algumas ferramentas são mais apropriadas que outras, dependendo do tipo de utilização a que se propõe. O processo de aprendizagem no qual um artefato torna-se progressivamente um instrumento é chamado de gênese instrumental.

De acordo com Henriques, Attie e Farias (2007, p. 53) essa construção ou gênese instrumental "é um processo complexo aliado às características do artefato - suas potencialidades e suas limitações e às atividades do sujeito - seus conhecimentos, suas experiências anteriores e suas habilidades".

Para a análise de atividades instrumentais preconizadas por Rabardel (1995) e Verillon (1996) propõem o modelo de Situações de Atividades Instrumentais (SAI), mostrado na Figura 1, a seguir, delineando as relações entre o sujeito e o objeto sobre o qual ele age. O objetivo essencial é evidenciar a multiplicidade de interações que intervêm nas atividades instrumentais.

Figura 1– Modelo SAI



Fonte: Adaptação do Autor

A partir desse modelo apresentado, é possível identificar duas dimensões no processo de gênese instrumental: a instrumentação e a instrumentalização, que serão definidas na sequência.

A **instrumentação** consiste na relação entre aluno e Geogebra (S-I), nela o Sujeito desenvolve técnicas de utilização da ferramenta. Portanto, é no processo de instrumentação que se desenvolve os esquemas de uso e de ação instrumental, os quais permitem destacar as potencialidades e entraves do GeoGebra, e as possibilidades de explorar as suas ferramentas. Vale ressaltar que, neste trabalho não há sujeito por não ter ocorrido a aplicação da sequência de ensino proposta.

A **instrumentalização** consiste na relação entre Geogebra e a função (I-O), nela o sujeito atribui à ferramenta uma possibilidade de uso do instrumento para modificar suas propriedades funcionais a fim de resolver seu problema.

Essas relações se definem a partir do momento em que o professor começa a aplicar a situação problema proposta neste artigo. No entanto, pode haver grandes dificuldades por parte dos alunos, portanto, parece conveniente neste momento, o uso de um instrumento que possa auxiliá-los no aprendizado. É neste momento, enfim, que faz sentido a aplicação desta teoria. A par disso, desenvolveu-se uma sequência de ensino como auxílio para estabelecer a relação fundamental do sujeito com o objeto a partir de uma ferramenta que foi o *software GeoGebra*.

Noção de Registros de Representações Semióticas

De acordo com Duval (1995, p. 20) a representação semiótica

> [...] é uma representação construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico, e de outro lado, pela referência do objeto representado. Uma figura geométrica, um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica ou uma representação gráfica, por exemplo, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes. O tratamento dos objetos matemático depende, portanto, das possibilidades de suas representações.

Duval (1995) explica a noção de registro de representação semiótica devem permitir realizar as três atividades cognitivas inerentes a qualquer representação, as quais sejam: em primeiro lugar, *constituir* um traço ou um conjunto de vestígios perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de algo num sistema determinado. Em seguida, *transformar* as representações pelas únicas regras próprias ao sistema, de maneira a obter outras representações que podem constituir uma correspondência de conhecimentos em relação às representações iniciais. Por último, *converter* as representações produzidas num sistema de representações para outro sistema, de tal maneira que este último permita esclarecer outros significados relativos.

Diante das definições apresentadas, anteriormente, o *software* GeoGebra permite explorar as diferentes representações de uma função, sendo a representação algébrica, a representação gráfica e na língua materna, isso para que o aluno visualiza de maneiras diferentes o que pode ser a formação, o tratamento e a conversão.

Resolução de Problemas em Matemática

Muitas pesquisas já foram realizadas sobre a resolução de problemas no ensino da Matemática, porém no cotidiano dos professores da área, ainda surgem muitas indagações a respeito do assunto.

Segundo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, é de suma importância que os professores compreendam como trabalhar esta metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico.

Segundo Soares (2012) um problema pode envolver muito mais do que a simples resolução das operações. Deve, sim, possibilitar ao aluno desenvolver estratégias, buscar vários caminhos para solucioná-lo à sua maneira, de acordo com sua realidade e raciocínio.

Desse modo, um bom problema deve:

- Ser desafiador para o aluno;
- Ser real;
- Ser interessante;
- Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- Ter um nível adequado de dificuldade.

Um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver seu pensamento e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado (SOARES, 2012).

Diante do exposto, no item a seguir será apresentado o desenvolvimento da sequência de ensino elaborada.

DESENVOLVIMENTO

Como proposto, nesta seção será apresentada a sequência de ensino que conta com uma situação problema que deve ser apresentada ao aluno antes da formalização do conteúdo estudado.

Para esta proposta, sugere o que o aluno conheça as funções básicas do GeoGebra e de alguns comandos que poderão ser utilizados para a resolução da situação problema proposta e para apropriação do conceito de função afim.

A seguir, algumas questões sugeridas devem ser respondidas com base na situação apresentada, com auxílio ou não do GeoGebra. Cabe aqui salientar, que está sendo levado em consideração que todos os alunos já tenham conhecimento dos comandos mais simples do GeoGebra. Cada questão é apresenta com a seguinte ordem e são compostas pelos seguintes elementos: enunciado, objetivo e a resposta esperada. Na sequência é apresentada a situação problema.

Situação Problema: Maria é uma das representantes de vendas e quer contratar uma empresa de telefonia celular. Ela visitou três operadoras diferentes para analisar qual seria o plano mais econômico para atender suas necessidades profissionais. Os planos das três operadoras estão descritos no Quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Descrição dos planos oferecidos pelas operadoras

Operadora	*Custo mensal fixo (R$)*	*Custo adicional por minuto (R$)*
A	12,00	0,50
B	18,00	0,20
C	0,00	0,80

Fonte: Produção do Autor

De acordo com a descrição dos planos oferecidos pelas operadoras A, B e C, apresentada anteriormente, responda às questões que seguem:

Questão 1. Caso Maria use 25 minutos, quanto ele iria gastar em cada plano? E caso ela use 30 minutos?

Objetivo: Identificar o valor numérico da função afim que determina cada plano.

Resposta esperada: Nesta questão, espera-se que o aluno multiplique o valor dos minutos gastos pelo preço correspondente e some ao valor fixo de cada plano. Desse modo, a resposta esperada é mostrada no Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 – Resposta esperada na Questão 1

Operadora A:	25 minutos → 25 * 0,50 + 12= 24,50
	30 minutos → 30 * 0,50 + 12= 27,00
Operadora B:	25 minutos → 25 * 0,20 + 18= 23,00
	30 minutos → 30* 0,20 + 18= 24,00
Operadora C:	25 minutos → 25 * 0,80 +0= 20,00
	30 minutos → 30 * 0,80 +0= 24,00

Fonte: Produção do Autor

Questão 2. Nestes casos, quem depende de quem? E a independente?

Objetivo: Identificar a variável dependente, que será definida como Imagem e a variável independente, que será definida como Domínio da função.

Resposta esperada: Esta é uma questão de percepção, logo espera-se que o aluno saiba identificar que o valor a ser pago depende da quantidade de minutos utilizados. Desse modo, o Domínio será a quantidade de minutos (números reais maiores ou igual a zero) e a Imagem será o valor em reais.

Questão 3. Indique a expressão que determina o valor gasto para x minutos em cada plano.

Objetivo: identificar a lei de formação da função referente a cada plano.

Resposta esperada: Observando a questão 1, o aluo deve concluir que o cálculo deve ser sempre o mesmo para qualquer valor atribuído, assim basta apenas trocar a quantidade de minutos utilizado por uma variável ‘X’. Desse modo, a resposta esperada para essa questão é apresentada no Quadro 3:

Quadro 3 – Resposta esperada na Questão 3

Operadora A:	x*0,50+12
Operadora B:	x*0,20+18
Operadora C:	x*0,80

Fonte: Produção do Autor

Questão 4. Utilizando o GeoGebra, esboce os gráficos referentes a cada plano e analisando-os responda:

a. Qual a operadora mais vantajosa, caso Maria use 45 minutos?
b. Qual a operadora mais vantajosa, caso Maria use 20 minutos?
c. Qual a operadora mais vantajosa, caso Maria use 15 minutos?
d. Analise qual o plano mais econômico. Observe os minutos utilizados.

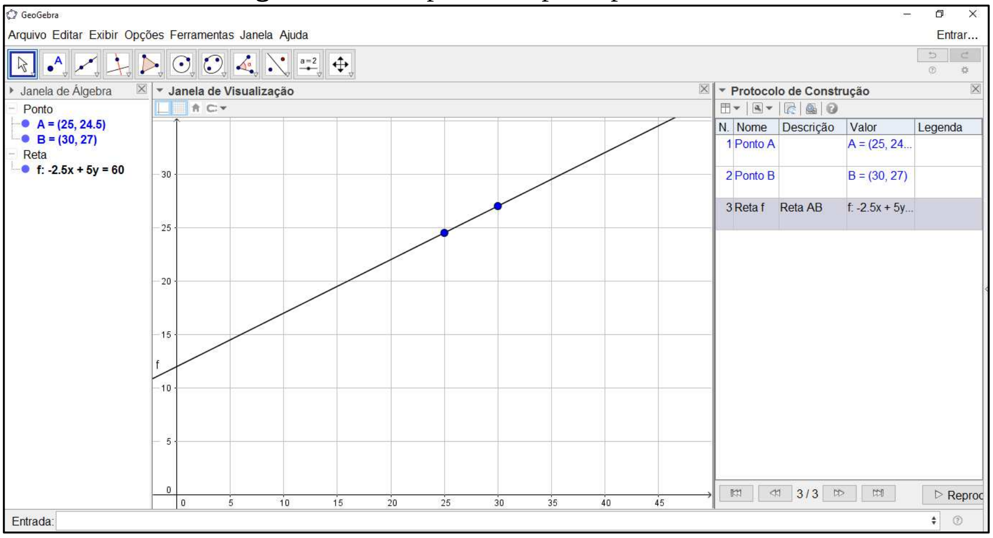
Objetivo: Utilizar o GeoGebra como instrumento para esboçar os gráficos e analisá-los.

Resposta esperada: Como os alunos ainda não sabem o conceito de Função Afim espera-se que eles não utilizam o campo de entrada como ferramenta na hora de esboçar os gráficos. Assim, espera-se que os alunos utilizem das informações adquirida nas respostas anteriores para marcar pontos no plano cartesiano e traçar uma reta que passe pelos pontos referente as variáveis dependentes e independentes dos planos de cada operadora. Em seguida, os alunos deverão analisar os pontos solicitados para identificar qual o plano mais vantajoso em cada caso.

Passo a passo para esboçar os gráficos

Passo 1: Com os valores obtidos na questão 1, marcar os pontos correspondente ao plano da operadora A. Em seguida traçar uma reta que passe pelos pontos, conforme é ilustrado na Figura 2, do seguinte modo:

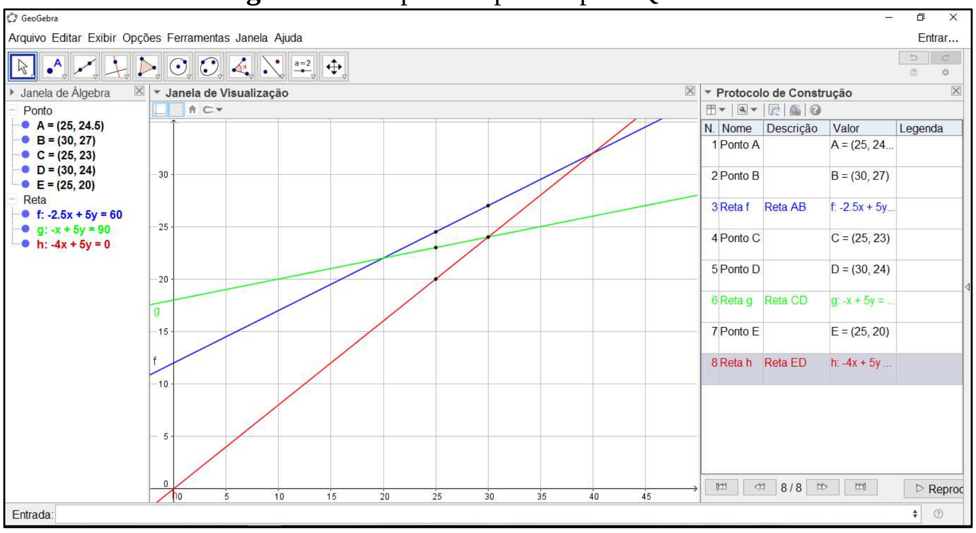
Figura 2 – Reta passando pelos pontos A e B



Fonte: Produção do Autor

Passo 2. Repetir o passo anterior para os planos das operadoras B e C, assim como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Resposta esperada para Questão 4



Fonte: Produção do Autor

Com os gráficos traçados, espera-se que os alunos observem a quantidade de minutos pedida em cada uma das questões e conclua que:

a. Para 40 minutos as operadoras A e C custam o mesmo valor, mas o melhor plano é o da operadora B.

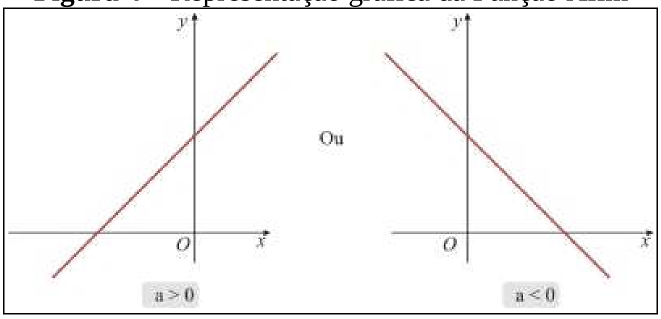
b. Para 20 minutos as operadoras A e B custam o mesmo valor, mas o plano mais vantajoso é o da operadora C.

c. Para 15 minutos cada operadora tem custo diferente e o mais barato é o da operadora C.

d. O plano mais econômico é o da operadora B, se Maria gastar mais que 30 minutos, e o plano da operadora C é melhor se Maria gastar menos que 30 minutos.

Após a aplicação desta situação problema, o professor pode iniciar os conceitos de função afim, fazendo comparação com as respostas encontradas e as definições. O professor pode utilizar a definição: Uma função definida por f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se Função Afim quando existem constantes a, b que pertencem ao conjunto dos números Reais tais que, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A lei que define **Função Afim** é: $f(x)=ax+b$, com a sendo um número real diferente de zero. O gráfico desta função é uma reta não perpendicular ao eixo Ox, conforme ilustra a Figura 4:

Figura 4 – Representação gráfica da Função Afim



Domínio: $D = \mathbb{R}$ Imagem: $Im = \mathbb{R}$

Fonte: Produção do Autor

Diante do exposto, no item a seguir, serão apresentados os resultados e uma breve discussão.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base na sequência de ensino apresentada neste artigo, ficou evidente que o ensino da Função Afim poderá ser contextualizado promovendo a construção do conhecimento referente a este conteúdo e também sobre o *software* GeoGebra.

Os professores também poderão a partir dessa sequência de ensino gerar outras situações cotidianas, motivando os estudantes e despertando o interesse para a Matemática, no sentido de minimizar as dificuldades na aprendizagem de conteúdos de Função Afim.

A Matemática tem importância social ajudando o aluno a compreender e interpretar de forma crítica as situações reais. No entanto, se faz necessário a integração entre a abordagem instrumental, a noção de registro de representações semióticas e a resolução de problemas, para desenvolver uma situação problema relacionada ao cotidiano do aluno.

Neste artigo, a resolução de problema em Matemática é uma alternativa para favorecer a aprendizagem de conceitos da Função Afim, pois exige mais envolvimento dos alunos e dos professores, do que simplesmente adquirir regras para solucionar um exercício pronto.

O uso do *software GeoGebra* pode auxiliar na compreensão das relações entre registros gráficos, simbólicos e algébricos. Além da visualização, o *software* permite explorações diferentes das usualmente presentes no ambiente papel e lápis, tais como, dinamismo, elaboração de conjecturas e das validações experimentais.

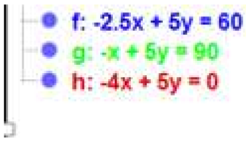
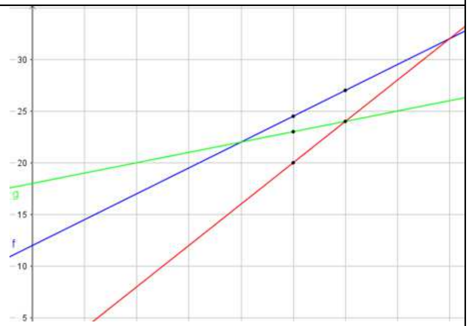
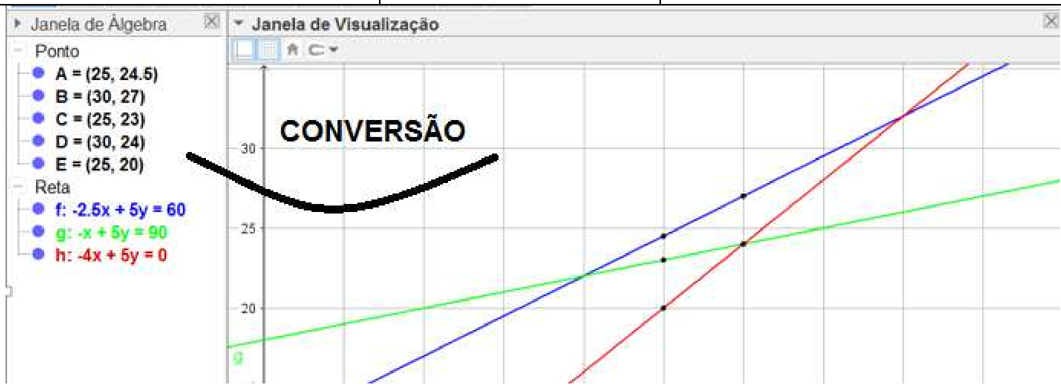
Por meio de uma sequência de ensino pode-se utilizar os conceitos necessários e aplicar em atividades a serem realizadas com o auxílio do *software* que permite aos alunos explorar os comandos e potencialidades para absorver os conteúdos aprendidos nas aulas ou introduzir novos conteúdos.

Durante a elaboração da sequência de ensino composta pela situação problema no Geogebra, foi possível observar muitas potencialidades para serem exploradas pelos alunos e não encontramos entraves no que diz respeito à construção dos gráficos referente às respostas das questões que sugerimos.

Como potencialidades do *software* GeoGebra, destaca-se os comandos da barra de ferramentas, tais como: criar retas passando por dois pontos e segmentos de retas, outra potencialidade é poder visualizar mais de um gráfico por vez. Tudo isso, para construir passo a passo a resposta esperada.

Enfim, por meio do instrumento GeoGebra foi possível elaborar uma proposta de situação problema abordando Função Afim, de modo a destacar os conceitos pertinentes a este estudo em diferentes registros de representação, como é ilustrado no Quadros 4, a seguir, em uma das questões apresentadas nesta sequência de ensino que utiliza a resolução de problemas.

Quadro 4 – Representações no *software* GeoGebra

Língua materna	Representação algébrica	Representação gráfica
Chama-se de função polinomial do 1º grau, ou **Função Afim**, a qualquer **função** real dada por uma lei da forma ***f(x) = ax + b***, onde a e b são números reais dados e a≠0.		
		

Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 4 apresentado anteriormente, mostra a análise de uma das questões da situação problema proposta neste artigo. Nele pode-se, observar os conceitos pertinentes a este estudo em diferentes registros de representação.

CONCLUSÃO

Diante do atual cenário que a Educação apresenta, onde se encontra alunos e professores, por vezes descontentes, os primeiros por não conseguirem relacionar o que é estudado nas aulas com o seu cotidiano, e, os outros pelas diversas dificuldades encontradas no exercício de sua profissão. A proposta apresentada neste artigo mostra ser possível um trabalho conjunto, envolvendo professor e alunos, conectados as novas tecnologias, objetivando a construção de conhecimentos significativos e contextualizado com a realidade.

O sucesso da sequência de ensino, bem como da resolução de problemas depende fortemente das atitudes do professor, pois ele é responsável pela escolha do problema, bem como, a elaboração do seu enunciado e do nível de dificuldade que o problema apresenta.

Este artigo apresenta uma proposta de aplicação do conteúdo de Função Afim com alunos do 9º ano. Desse modo, procurou-se elaborar uma sequência de ensino composta de uma situação problema que se aproximasse do contexto real e com possibilidade de ocorrer próximo ao cotidiano dos alunos permitindo a interação entre ambos.

Por fim, a expectativa é que com esta sequência de ensino, o professor ajude o aluno a se apropriar desse conceito. No entanto, espera-se que tanto o professor quanto o aluno tenham contato com outros problemas diferentes. Contudo, essa proposta de sequência de ensino pode ser ampliada para qualquer tipo de função real. Para tal, sugere-se que modifique a situação problema conforme o contexto a ser aplicado. Neste artigo a sequencia apresentada poderá ser empregada apenas como uma sugestão pedagógica ou para criação de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

BAZZO, B. **O uso dos recursos das novas tecnologias, planilha de Cálculo e o GeoGebra para o ensino de Função no Ensino Médio**, 2009. Disponível em: http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2009/2297_1786.pdf Acesso dia 15 de julho de 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso dia 06 de maio de 2017.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J.P.; FARIAS, L.M. **Referencias Teóricas da Didática Francesa:** Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do software Maple. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos, São Paulo: EDUC, 1999 – semestral, 2007.

REZENDE, W, M**. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370 Acesso dia 17 de julho de 2017.

SCANO, F. C. **Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra**. 2009. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SOARES, L. H. **Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções**, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8923 Acesso dia 15 de julho de 2017.

CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE NA PROVA DE MATEMÁTICA DO NOVO ENEM NO PERÍODO 2009-2016

Márcio Urel Rodrigues
Universidade do Estado de Mato Grosso
urelrodrigues@gmail.com

Adriano Rodrigues Nascimento
Universidade do Estado de Mato Grosso
adrianon597@gmail.com

Acelmo de Jesus Brito
Universidade do Estado de Mato Grosso
acelmo@unemat.br

Resumo

Apresentamos, neste artigo, resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi investigar as características da contextualização e da interdisciplinaridade no formato das questões da prova de Matemática do Novo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) no período 2009-2016. A questão investigativa norteadora foi: De que maneira se apresentam a contextualização e a interdisciplinaridade no formato das questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009-2016? Utilizamos a metodologia da pesquisa qualitativa na modalidade documental. O *corpus* foi constituído pelas 360 questões da prova de Matemática do Novo ENEM. Para analisar os dados, utilizamos alguns conceitos da Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin (1977), a qual nos permitiu constatar que 86% das questões das provas de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016 são contextualizadas, e apenas 38% são questões interdisciplinares, relacionando-se com 12 áreas ou disciplinas, sendo Geografia, Física e Biologia as com maior recorrência. Com base nesses dados, constatamos que a contextualização, como princípio norteador do Novo ENEM, tem sido bem explorada na prova de Matemática, no entanto, a interdisciplinaridade precisa ser mais abrangente para ser condizente com seus princípios norteadores.

Palavras-chave: Novo ENEM. Contextualização. Interdisciplinaridade. Ensino de Matemática.

Abstract

We present, in this article, results of a research whose objective was to investigate the characteristics of contextualization and interdisciplinarity in the format of Mathematics Proof Matters of the New ENEM (National High School Exam) in the 2009-2016 period. The guiding investigative question was: In what way are the contextualization and interdisciplinarity presented in the format of Mathematics Proof Matters of the New ENEM in the period 2009-2016? We used the qualitative research methodology in the documentary modality. The corpus was constituted by the 360 questions of the Mathematics test of the New ENEM. To analyze the data, we used some concepts of Content Analysis from Bardin (1977) perspective, which allowed us to verify that 86% of the questions of the Mathematics tests of the New ENEM in the period from 2009 to 2016 are contextualized, and only 38% are interdisciplinary issues that relate to 12 areas or disciplines, being Geography, Physics and Biology with the most recurrence. Base don these data, we find that the contextualization as guiding principle of the New ENEM hás been well explored in the Mathematics proof, however, interdisciplinarity needs to be more comprehensive to be consistent with its guiding principles.

Keywords: New ENEM. Contextualization. Interdisciplinarity. MathematicsTeaching.

INTRODUÇÃO

O presente artigo é produto de um Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, orientado pelo primeiro autor, defendido pelo segundo autor e co-orientado pelo terceiro autor na Universidade do Estado de Mato Grosso – Campus de Barra do Bugres, denominado: *Contextualização e Interdisciplinaridade no Formato das Questões da Prova de Matemática do ENEM no período de 2009-2016*.

O ponto de partida para a elaboração da referida pesquisa foi o artigo apresentado por Rodrigues (2013), envolvendo uma *Análise das questões de Matemática do Novo ENEM (2009 a 2012): reflexões para professores de Matemática*. No referido artigo, o autor procura averiguar se as questões da prova de Matemática do Novo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) apresentadas de 2009 a 2012 estavam distribuídas em conformidade com a Matriz de Referência contida nos aportes metodológicos do Novo ENEM. A partir dele, na presente pesquisa realizamos uma Análise de Conteúdo da contextualização e da interdisciplinaridade na prova de Matemática do novo ENEM no período 2009-2016.

Ressaltamos ainda que a configuração do presente texto teve influência dos professores e pesquisadores participantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEM) da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) – Campus de Barra do Bugres, pois os processos da formação de professores de Matemática têm sido objeto de estudos e pesquisas do referido grupo na área da Educação Matemática no Brasil.

Acreditamos que os dados apresentados e discutidos no presente texto contribuam como aporte teórico-metodológico para estudos na área de formação de professores de Matemática, proporcionando reflexões para professores de Matemática em serviço nas escolas, bem como para os futuros professores de Matemática em processo de formação inicial, a respeito da maneira como a contextualização e a interdisciplinaridade estão presentes nas questões da prova de Matemática do Novo ENEM.

Com essas perspectivas, no primeiro momento do artigo evidenciamos a fundamentação teórica envolvendo a contextualização e a interdisciplinaridade no contexto do Novo ENEM. Em um segundo momento, apresentamos os aspectos metodológicos – opção metodológica, procedimentos utilizados para coletar e analisar os dados. Em um terceiro momento, realizamos a descrição e análise interpretativa dos dados, por meio de um movimento dialógico entre os dados e referenciais teóricos. Em um quarto momento, elencamos nossas compreensões e considerações finais em relação à contextualização e à interdisciplinaridade na prática pedagógica dos professores de Matemática no Ensino Médio.

CONTEXTUALIZAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Recorremos a diversos autores que abordam as possibilidades da contextualização no ensino de Matemática e, em um segundo momento, a interdisciplinaridade no Ensino de Matemática.

D'Ambrósio (2001) enfatiza a importância de se considerar o cotidiano dos alunos no processo de aquisição do conhecimento matemático, pois:

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (D'AMBROSIO, 2001, p. 110).

O referido autor complementa afirmando que a contextualização no ensino de Matemática "é essencial para todos, apesar de alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana e assim justificam sua importância nos currículos" (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 114).

Assim sendo, compreendemos que se precisa ultrapassar a maneira tradicional e descontextualizada com que muitas vezes os conteúdos de Matemática são apresentados aos alunos, pois entendemos que os professores de Matemática devem considerar as demandas do cotidiano e situações-problema presentes na realidade dos alunos.

Para Rodrigues (2013, p. 8), os professores de Matemática do Ensino Médio devem considerar a contextualização como um eixo norteador no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, para que "os alunos possam reconhecer as possibilidades de associar os conteúdos estudados com o contexto em que estão inseridos". O referido pesquisador afirma que "a contextualização é um dos eixos teóricos e faz parte do critério central da elaboração das questões de Matemática do Novo ENEM, conforme recomenda os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio" (RODRIGUES, 2013, p. 8).

Em relação à interdisciplinaridade, consta na Matriz de Referência do Novo ENEM que a interdisciplinaridade é um dos eixos teóricos que estruturam e caracterizam as questões do referido exame. Assim sendo, buscamos, nesse momento, referenciais que elucidassem a interdisciplinaridade na aprendizagem dos alunos, não só no espaço escolar como também na vida social, pois, conforme Rodrigues (2013, p. 10), “a Matemática é uma ferramenta importantíssima para auxiliar o aluno para compreensão do mundo, do qual ele faz parte”.

Segundo Tomaz e David (2008, p. 18), o ensino de Matemática de maneira interdisciplinar procura desenvolver a interligação dos conteúdos matemáticos com a vida do aluno, bem como relacionando esses conhecimentos para resolver problemas oriundos de outras disciplinas. Para as referidas autoras, os educadores matemáticos estão procurando desenvolver projetos objetivando promover a interdisciplinaridade, bem como “procuram por formas de concretizar essa formação ou maneiras de desenvolver projetos e promover a interdisciplinaridade, sem perder de vista os conteúdos matemáticos da Educação Básica”.

De acordo com os PCN, a interdisciplinaridade deve ser compreendida “a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência” (BRASIL, 1999, p.21).

Com base no referencial teórico explicitado e também no objeto do presente texto, entendemos que alguns conteúdos matemáticos são facilmente relacionados às outras áreas do conhecimento e encontrados em problemas do cotidiano, pois o Novo ENEM procura, além da capacidade de associar conceitos, avaliar a aplicação desses conceitos na solução de problemas da realidade, envolvendo diversas áreas do conhecimento.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Utilizamos os pressupostos da pesquisa qualitativa, por ser fundamentalmente interpretativa, na qual o pesquisador faz uma interpretação dos dados. Entre as diferentes modalidades da pesquisa qualitativa, definimos a nossa como um estudo documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), pois utilizamos como fonte de dados diversos documentos oficiais – provas de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

A esse respeito, Appolinário (2009, p. 85) explicita que, “sempre que uma pesquisa se utiliza apenas de fontes documentais (livros, revistas, documentos legais, arquivos em mídia eletrônica), diz-se que a pesquisa possui estratégia documental”.

Para a constituição do *corpus* da pesquisa, em um primeiro momento, acessamos todas as provas de Matemática (cada prova com 45 questões) do Novo ENEM no período de 2009 a 2016. Assim sendo, tivemos acesso às 360 questões das provas de Matemática do Novo ENEM entre 2009 e 2016.

Com o *corpus* da pesquisa constituído, organizamos uma planilha no Excel para levantar as informações referentes às questões de Matemática do Novo ENEM. A planilha elaborada possuía oito colunas (cada coluna representa uma determinada informação) e 360 linhas (cada linha representa as informações para as 360 questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016), onde, de cada questão, retiramos as seguintes informações dos documentos: (i) Ano da questão; (ii) Número da questão; (iii) Conteúdo de Matemática; (iv) Tipo de Conhecimento de Matemática; (v) Competências da Matriz de Referência; (vi) Formato da questão: contextualizada ou situação-problema; (vii) Característica da questão: interdisciplinar: sim ou não; (viii) Qual área ou disciplina a que a Matemática estava relacionada.

Utilizamos a Análise de Conteúdo na perspectiva elucidada por Bardin (1977), como procedimentos de análise de dados visando realizar a descrição e a análise dos dados qualitativos. A referida autora define a Análise de Conteúdo como sendo:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos objetivos e sistemáticos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção destas mensagens (BARDIN, 1977, p. 42).

No movimento de constituição das Categorias de Análise, realizamos diversas idas e vindas ao *corpus* dos dados, proporcionando, assim, um maior refinamento das Categorias de Análise devido às releituras dos dados pesquisados, conforme ressaltado por Bardin (1977, p. 80): “a Análise de Conteúdo assume, ao longo da pesquisa, um movimento de ‘vai e vem’ nos dados”.

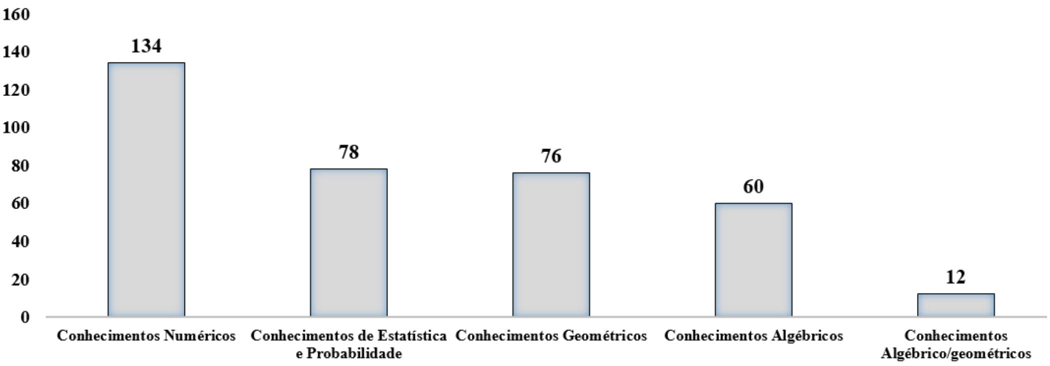
As Categorias de Análise tiveram como pano de fundo a problemática da pesquisa e foram provenientes das Unidades de Registro configuradas a partir dos dados relativos à maneira como se apresentam a contextualização e a interdisciplinaridade no formato das questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE INTERPRETATIVA DOS DADOS

Neste momento, apresentamos a descrição e análise interpretativa dos dados da pesquisa. Ressaltamos que, na apresentação dos resultados, utilizamos gráficos, tabelas e quadros para facilitar a transmissão e visualização das informações. A nossa interpretação objetiva mostrar para os professores de Matemática em serviço nas escolas a importância de trabalhar a contextualização e a interdisciplinaridade nas aulas de Matemática no Ensino Médio, também considerando os pressupostos da Matriz de Referência do Novo ENEM.

Para iniciar a descrição e análise dos dados, explicitamos, a seguir, na Figura 1, a distribuição dos conhecimentos matemáticos nas 360 questões do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

Figura 1 – Distribuição dos Conhecimentos de Matemática - questões do Novo ENEM



Fonte: Elaborada pelos Autores.

Identificamos, na Figura 1, que das 360 questões, 134 envolvem Conhecimentos Numéricos e representam 37,3%; 78 questões envolvem Conhecimentos de Estatística e Probabilidade e representam 21,6%; 46 questões envolvem Conhecimentos Geométricos e representam 21,1%; 60 questões envolvem Conhecimentos Algébricos e representam 16,7%; 12 questões envolvem Conhecimentos Algébrico-Geométricos e representam apenas 3,3%.

Neste momento, apresentamos uma discussão relacionada ao formato (contextualização ou situação-problema) das questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

Consideramos uma *questão como contextualizada* se ela representar uma situação que pode estar presente no cotidiano dos alunos e for possível interpretar, verificar, analisar para resolver, priorizando o raciocínio lógico e não as fórmulas envolvendo conteúdos matemáticos. Consideramos uma *questão como situações-problema* se a questão, mesmo que possuindo um contexto, não relatar uma situação do dia a dia, sendo o foco o conteúdo matemático em si mesmo, exigindo assim a utilização de fórmulas e cálculos matemáticos para a resolução da questão.

Para exemplificar o movimento de classificação realizado, apresentamos a seguir duas questões (uma contextualizada e uma situação-problema) envolvendo o conteúdo matemático “razão”, relacionado aos Conhecimentos Numéricos da Matriz de Referência do Novo ENEM.

Apresentamos, a seguir, na Figura 2, a Questão 141 da prova de Matemática do Novo ENEM 2016 - Caderno Cinza, classificada como questão contextualizada.

Figura 2 – Questão 141 – Prova de Matemática do Novo ENEM 2016 - Caderno Cinza

Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Resolução:
Marca A: 2/20 = 0,04g/pão;
Marca B: 5/40 = 0,125g/pão;
Marca C: 5/100 = 0,05g/pão;
Marca D: 6/90 = 0,06g/pão;
Marca E: 7/70 = 0,10g/pão.

Com base na resolução da referida questão, podemos constatar que a questão apresentava um contexto presente no cotidiano, ou que fazia parte da realidade dos alunos.

Apresentamos, a seguir, na Figura 3, uma questão classificada como situação-problema na presente pesquisa.

Figura 3 – Questão 160 – Prova de Matemática do Novo ENEM 2016-Caderno Cinza

Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A, d_B, d_C. Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha $\frac{3}{4}$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

a) $d_B < d_A < d_C$
b) $d_B = d_A < d_C$
c) $d_C < d_B = d_A$
d) $d_B < d_C < d_A$
e) $d_C < d_B < d_A$

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Apresentamos, a seguir, na Figura 4, a resolução da Questão 160 da prova de Matemática do Novo ENEM - Caderno Cinza, classificada como situação-problema.

Figura 4 – Resolução da Questão 160 – Prova de Matemática do Novo ENEM 2016 - Caderno Cinza

$$\text{Massa de C}: m_C = x$$
$$\text{Massa de B}: m_B = \frac{3}{4}x$$
$$\text{Massa de A}: m_A = \frac{3}{2} \cdot m_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = \frac{9}{8}x$$

$$\text{Volume de C}: V_C = V$$
$$\text{Volume de B}: V_B = 1{,}2\ V_C = 1{,}2\ V$$
$$\text{Volume de A}: V_A = V_B = 1{,}2\ V$$

$$d_A = \frac{\frac{9}{8}x}{1{,}2\ V} = \frac{\frac{9}{8}x}{\frac{12}{10}V} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{4}{\cancel{12}}} \frac{x}{V} = \frac{15}{16} \frac{x}{V}$$

$$d_B = \frac{\frac{3}{4}x}{1{,}2\ V} = \frac{\frac{3}{4}x}{\frac{12}{10}V} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4} \cdot \frac{10}{\underset{4}{\cancel{12}}} \frac{x}{V} = \frac{10}{16} \frac{x}{V}$$

$$d_C = \frac{x}{V} = \frac{16}{16} \frac{x}{V}$$

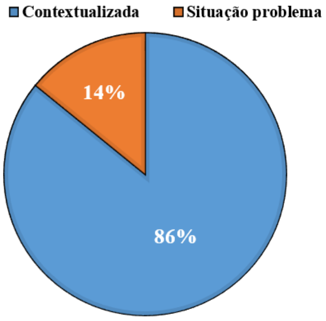
$$\frac{10}{16} \frac{x}{V} < \frac{15}{16} \frac{x}{V} < \frac{16}{16} \frac{x}{V}$$
$$d_B < d_A < d_C$$

Fonte: http://especiais.g1.globo.com/educacao/enem/2016/correcao-provas-enem/#resposta.

Com base na resolução da referida questão, podemos constatar que o foco é o conteúdo matemático em si mesmo, pois exige dos alunos a manipulação de fórmulas e cálculos matemáticos para a resolução da questão.

A partir da classificação realizada das 360 questões quanto ao seu formato – contextualizadas ou situação-problema –, identificamos 309 questões contextualizadas e 51 questões do tipo situações-problema. Assim sendo, apresentamos a seguir, na Figura 5, o percentual das questões contextualizadas e das questões situações-problema nas provas de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

Figura 5 – Questões contextualizadas e situações problemas no Novo ENEM



Fonte: Elaborada pelos Autores.

Com base na Figura 5, constatamos que 86% das questões do Novo ENEM possuem um formato de questões contextualizadas. Assim sendo, podemos inferir que a contextualização se apresenta como um princípio norteador da prova de Matemática do Novo ENEM e, por isso, constituem um desafio para os professores de Matemática em serviço no Ensino Médio, pois o processo ensino-aprendizagem não pode mais se prender a conhecimentos/conteúdos ministrados de forma fragmentada.

Para complementar, apresentamos, a seguir, na Tabela 1, a distribuição das 360 questões contextualizadas e situações-problema nas provas de Matemática do Novo ENEM, ano a ano, no período de 2009 a 2016.

Tabela 1 – Formato das Questões de Matemática do ENEM

ANO	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	Total
Situação-problema	04	02	05	06	07	06	05	16	51
Contextualizada	41	43	40	39	38	39	40	29	309
Total	45	45	45	45	45	45	45	45	360

Fonte: Elaborada pelos Autores.

Ao analisar a Tabela 1, podemos inferir que, na última prova de Matemática do ENEM, tivemos um aumento considerável das questões denominadas de situações-problema. Esse fato contrapõe a tendência dos anos anteriores, que priorizavam mais as questões contextualizadas em relação às questões tecnicistas. Será essa a nova tendência das questões de Matemática do Novo ENEM para os próximos anos? Esse é um questionamento sem respostas, pois só o tempo será capaz de mostrar se é uma tendência ou apenas uma hipótese sem comprovação.

Com base no mapeamento do *corpus* da pesquisa, realizamos uma classificação quanto aos tipos de conhecimentos em Matemática relacionados ao formato das 360 questões da prova de Matemática do ENEM no período de 2009 a 2016, como consta na Tabela 2, a seguir.

Tabela 2 – Formato das Questões do Novo ENEM por Tipo de Conhecimento em Matemática

Tipos de Conhecimentos em Matemática	f	Contextualização	Situação-problema
Conhecimentos Numéricos	134	123	11
Conhecimentos de Estatística e Probabilidade	78	70	8
Conhecimentos Geométricos	76	66	10
Conhecimentos Algébricos	60	44	16
Conhecimentos Algébrico-Geométricos	12	06	06
Total	360	309	51

Fonte: Elaborada pelos Autores.

A partir da Tabela 2, acima apresentada, realizamos a distinção conceitual entre o formato das questões de Matemática do Novo ENEM por meio dos tipos de conhecimento de Matemática.

Em relação aos Conhecimentos Numéricos, identificamos que, das 134 questões envolvendo o referido tipo de conhecimento, 123 questões – o que corresponde a 91,8% – possuíam características da contextualização no formato das questões.

Em relação aos Conhecimentos de Estatística e Probabilidade, identificamos que, das 78 questões envolvendo o referido tipo de conhecimento, 70 questões – o que corresponde a 89,7% – possuíam características da contextualização.

Em relação aos Conhecimentos Geométricos, identificamos que, das 76 questões envolvendo o referido tipo de conhecimento, 66 questões – o que corresponde a 86,8% – possuíam características da contextualização.

Em relação aos Conhecimentos Algébricos, identificamos que, das 60 questões envolvendo o referido tipo de conhecimento, 44 questões – o que corresponde a 73,3% – possuíam características da contextualização.

Em relação aos Conhecimentos Algébrico-Geométricos, identificamos que, das 12 questões envolvendo o referido tipo de conhecimento, 06 questões – o que corresponde a 50% – possuíam características da contextualização.

Com base no explicitado anteriormente, podemos concluir que, em relação à forma como se apresentam os conhecimentos matemáticos do Novo ENEM, podemos perceber que o maior percentual de questões contextualizadas estavam relacionadas aos Conhecimentos Numéricos.

Por meio do mapeamento do *corpus* da pesquisa, realizamos uma classificação das 360 questões quanto ao seu formato – contextualizadas ou situações-problema – em relação às sete Competências da Matriz de Referência do ENEM, como consta na Tabela 3, a seguir.

Tabela 3 – Competências da Matriz de Referência do Novo ENEM no Período 2009-2016

Competências do Novo ENEM	Contextualização	Situação-Problema	Total
Competência 1	36	4	40
Competência 2	70	6	76
Competência 3	39	11	50
Competência 4	44	4	48
Competência 5	50	18	68
Competência 6	50	3	53
Competência 7	20	5	25
Total	309	51	360

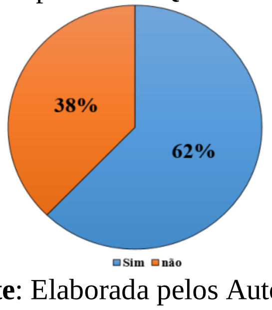
Fonte: Elaborada pelos Autores.

Com base na Tabela 3, acima apresentada, identificamos que todas as sete Competências da Matriz de Referência do Novo ENEM são contempladas pela prova de Matemática. Constatamos ainda que a Competência 6, relacionada aos Conhecimentos de Estatística, é a que possui um maior percentual (94,3%) de questões contextualizadas, e a Competência 5, relacionada aos Conhecimentos Algébricos, é a que possui um menor percentual (73,5%) de questões contextualizadas.

A esse respeito, podemos inferir que o Novo ENEM tem sido um instrumento oficial que tem procurado concretizar a contextualização tratada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, ao invés de utilizar apenas exercícios de algoritmos sem qualquer conexão com a realidade.

Outro aspecto que destacamos na análise dos dados foi uma discussão relacionada à característica interdisciplinar das questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016. Ao analisarmos as últimas 08 provas de Matemática do Novo ENEM, percebemos que 136 questões possuem características de interdisciplinaridade, o que corresponde apenas a 38% das questões, e 224 questões não possuem características interdisciplinares, o que corresponde a 62%, conforme explicitado na Figura 6, apresentada a seguir.

Figura 6 – Característica Interdisciplinar das Questões de Matemática do Novo ENEM

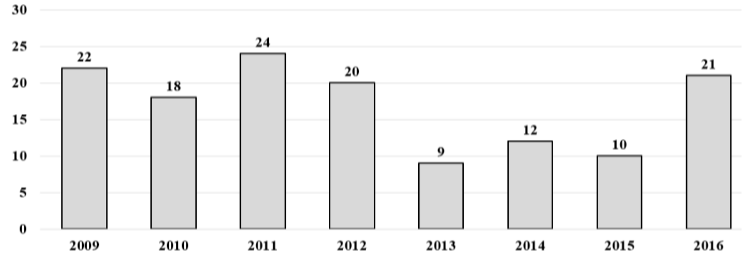


Fonte: Elaborada pelos Autores.

Com base na Figura 6 e também conforme a Matriz de Referência do Novo ENEM, que enfatiza a interdisciplinaridade como um dos eixos teóricos que estruturam e caracterizam as questões do Novo ENEM, constatamos que as 136 questões (38%) da prova de Matemática que possuem características interdisciplinares significam, a nosso ver, um percentual pouco expressivo, diferentemente do eixo temático da contextualização, o qual correspondeu a 86% das questões da prova de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016.

Apresentamos, a seguir, na Figura 7, as 136 questões que possuíam características interdisciplinares nas provas de Matemática do Novo ENEM, ano a ano, no período de 2009 a 2016.

Figura 7 – Interdisciplinaridade na Prova de Matemática do Novo ENEM

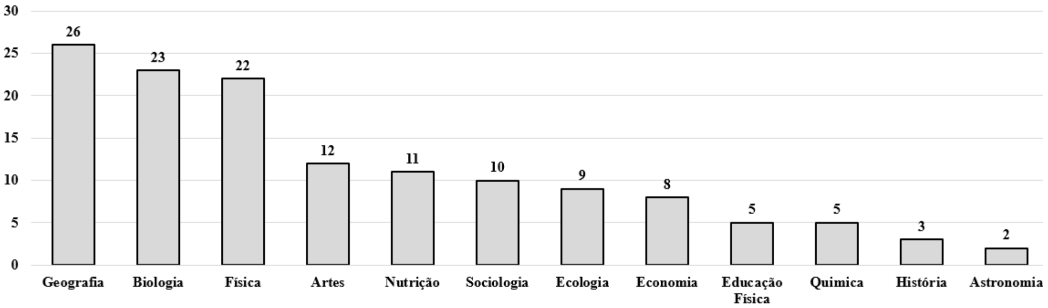


Fonte: Elaborada pelos autores.

Identificamos na Figura 7 que, das 136 questões (38%) com características interdisciplinares, a maior recorrência (24 questões) foi na prova de 2011, e a menor recorrência (09 questões) foi na prova de 2013. Assim sendo, podemos perceber que não existe uma uniformidade na construção das questões, principalmente na ótica da interdisciplinaridade.

Para complementar, apresentamos a seguir, na Figura 8, a distribuição das 136 questões por meio das áreas que possuem relações interdisciplinares com a Matemática.

Figura 8 – Áreas que se relacionam com a Matemática nas Questões do Novo ENEM



Fonte: Elaborada pelos Autores.

Identificamos, com base na Figura 8, que as provas de Matemática do Novo ENEM têm procurado vincular a forma estrutural das questões com conteúdos relacionados a 12 outras áreas do conhecimento. Constatamos ainda que as três principais áreas que possuem características interdisciplinares nas provas de Matemática no Novo ENEM são Geografia, Biologia e Física.

Apresentamos, a seguir, na Figura 9, a Questão 144 da prova de Matemática do Novo ENEM 2013 - Caderno Cinza, classificada como questão interdisciplinar devido à relação existente entre a Matemática e a Geografia.

Figura 9 – Questão 144– Prova de Matemática do Novo ENEM 2013 - Caderno Cinza

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

A) menor que 100 m².
B) entre 100 m² e 300 m².
C) entre 300 m² e 500 m².
D) entre 500 m² e 700 m².
E) maior que 700 m².

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Resolução:
Admitindo-se que o ponto B seja um dos vértices do quadrado (BCDE) da base, no triângulo ABC retângulo em B, temos: Tg 15º = $\frac{BC}{AB} = \frac{BC}{114} \cong 0{,}26 \;\Leftrightarrow BC \cong 29{,}64r^2$. Assim:
A área S do quadrado BCDE, em metros quadrados, é tal que = $BC^2 = (29{,}64)^2 = 878{,}53$.

Essa questão possui uma característica interdisciplinar, pois relaciona a Matemática com a Geografia por meio da localização territorial – construções de outros países.

Apresentamos, a seguir, na Figura 10, a Questão 156 da prova de Matemática do Novo ENEM 2014 - Caderno Amarelo, classificada como questão interdisciplinar, devido à relação existente entre a Matemática e a Física.

Figura 10 – Questão 156 – Prova de Matemática do Novo Enem 2014 - Caderno Amarelo

Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) × consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1 b) 135,0 c) 137,1 d) 138,6 e) 143,1

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Resolução: A conta de luz, com um consumo de 150 kWh, custa: 150 . 0,5 + 4,5 = 79,50 reais
Como a conta sofreu uma redução de 10%, logo, 0,9 . 79,50 = 71,55.
Assim, o consumo será de: X . 0,5 + 3 = 71,55X = 137,1

Como podemos observar, esta questão também possui uma característica interdisciplinar, pois relaciona conceitos matemáticos com a Física.

Continuando, apresentamos, a seguir, na Figura 11, a Questão 171 da prova de Matemática do Novo ENEM 2011 - Caderno Amarelo, classificada como questão interdisciplinar devido à relação existente entre a Matemática e a Biologia.

Figura 11 – Questão 171 – Prova de Matemática do Novo ENEM 2011 - Caderno Amarelo

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

A 4 mil.
B 9 mil.
C 21 mil.
D 35 mil.
E 39 mil.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Resolução:
O acréscimo de 8 mil internações de mulheres corresponde a 25% de 32 mil. Como o acréscimo de internações de homens por AVC ocorre na mesma proporção do de mulheres, tem-se que o número de acréscimo de internações de homens por AVC é 25% de 28 mil, ou seja, 7 mil. Assim sendo, o número de homens internados por AVC nos próximos cinco anos será de 35 mil (28mil + 7 mil).

Essa questão é caracterizada como sendo interdisciplinar porque explicita a relação entre o conceito matemático de porcentagem e a Biologia. Assim, podemos perceber que a questão trabalha de forma indireta aspectos relacionados à saúde, pois aborda algumas preocupações referentes ao Acidente Vascular Cerebral(AVC), que vem aumentando.

Considerando os exemplos explicitados para demonstrar o movimento realizado em cada uma das questões envolvendo a interdisciplinaridade do *corpus* da pesquisa – provas de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016 –, ressaltamos que a Matemática é uma ferramenta importantíssima para auxiliar o aluno na compreensão do mundo do qual ele faz parte. A esse respeito, Fazenda (1991) enfatiza que o conceito de interdisciplinaridade pode ajudar os professores a desenvolverem um ensino de Matemática em conexão com o mundo, pois "o professor de Matemática interdisciplinar é aquele em que a atitude busca responsavelmente caminhos novos e melhores para concretizar o conhecimento, com uma postura reflexiva de que ninguém é dono da verdade” (FAZENDA, 1991, p. 113).

Dessa maneira, salientamos, para os professores de Matemática em serviço no Ensino Médio das escolas, a importância de eles desenvolverem um ensino de Matemática articulado com outras áreas –característica interdisciplinar –para proporcionar uma visão de mundo mais realista e significativa para os alunos, bem como contribuir para melhorar o desempenho dos nossos alunos no ENEM, ao proporcionarem conexões entre os conteúdos de Matemática e outras áreas do conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os procedimentos da Análise de Conteúdo adotados perante o *corpus* da pesquisa (360 questões) nos permitiram compreender a maneira como se apresentaram a contextualização e a interdisciplinaridade no formato das questões da prova de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no período de 2009 a 2016.

Constatamos que a contextualização tem sido bem explorada, pois está presente em 86% das questões das provas. Esse aspecto corrobora os princípios norteadores do Novo ENEM, bem como contribui para o aumento da qualidade da prova, pois se aproxima ainda mais do contexto e da realidade dos alunos do Ensino Médio.

Identificamos, ainda, que apenas 38% das questões da prova possuíam características interdisciplinares, relacionando-se com 12 áreas do conhecimento. Um aspecto importante identificado foi perceber que todas as questões interdisciplinares são, necessariamente, questões contextualizadas.

Apesar de a interdisciplinaridade ser um dos eixos estruturais do referido exame, salientamos que a quantidade de questões interdisciplinares precisa ser mais abrangente para ser condizente com seus pressupostos.

Percebemos que as provas de Matemática do Novo ENEM no período de 2009 a 2016 contemplaram as sete competências contidas na Matriz de Referência do exame, o que nos instiga a refletir a respeito do foco dos conteúdos de Matemática abordados no Ensino Médio. Assim, considerando que a perspectiva deste exame é abordar o ensino de Matemática por meio do desenvolvimento de competências e habilidades voltadas para a formação de cidadãos críticos, capazes de interpretar e tomar decisões, entendemos ser importante relacionar os conteúdos matemáticos com as competências e habilidades contidas na Matriz de Referência do Novo ENEM.

Na nossa visão, pesquisadores, professores de Matemática em serviço no Ensino Médio nas escolas, futuros professores de Matemática e profissionais da Educação em geral precisam acompanhar e analisar os conceitos matemáticos que são mais abordados nas provas de Matemática do Novo ENEM, pois assim eles terão possibilidades de conciliar, em suas práticas pedagógicas, o currículo de Matemática proposto para o Ensino Médio com os aportes metodológicos do Novo ENEM.

REFERÊNCIAS

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de metodologia científica**: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo: Atlas, 2009.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM:** Fundamentação Teórico-Metodológica. Brasília: INEP, 2009.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2001 (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

FAZENDA, I. C. A. (Org.). **Práticas interdisciplinares na escola**. São Paulo: Cortez, 1991.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006. 226 p.

RODRIGUES, M. U. **Análise das questões de matemática do novo ENEM (2009 a2012)**: reflexões para professores de matemática. Curitiba: SBEM, 2013.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M.S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

OS MATERIAIS DE ENSINO E SEUS TRATAMENTOS NOS GRUPOS ESCOLARES DE SERGIPE (1911-1931)

Jéssica Cravo Santos Bernardino
Universidade Federal de Sergipe
jessicacravo@hotmail.com

Resumo

Neste artigo são apresentadas algumas considerações sobre os materiais de ensino prescritos ao ensino dos saberes elementares matemáticos no curso primário sergipano, durante o período de 1911 a 1931, segundo os princípios pedagógicos em voga, isto é, buscou-se compreender se em meio ao processo modernizador republicano que vinha se instaurando em todo o país, foram suscitadas alterações no modo como o ensino primário vinha se instaurando no Estado, a fim de desvendar a funcionalidade de propostas e práticas modernas apontadas na legislação. Para alcançar o propósito do texto foram examinadas fontes de pesquisa como: Regulamentos, Leis, Decretos e Programas de Ensino, que puderam subsidiar a investigação. Como fundamentação teórica, foram adotados autores como Calkins (1886/1950) e Valdemarin (2006), para entendimento do método de ensino intuitivo ou lições de coisas; Souza (2006), Azevedo (2009) e Nascimento (2012), para informações sobre os Grupos Escolares; e Pais (2011), Pinheiro (2013) e Valente (2008), para pincelar informações sobre os materiais. Com base na investigação realizada constatou-se em Sergipe, referências à pedagogia nova, baseada pelo método de ensino intuitivo, tendo por princípios o ensino pelos sentidos, pela realidade e pela intuição como principal instrumento de aprendizagem, e tomando os materiais de ensino como elementos cruciais da instrução, seja para acurar a observação ou para atingir o raciocínio pelo tato e manipulação.
Palavras-chave: Materiais de Ensino. Pedagogia Nova. Método de Ensino Intuitivo. Grupos Escolares Sergipanos.

Abstract

In this article we present some considerations about the teaching materials prescribed for the teaching of elementary mathematical knowledge in the Sergipe primary course during the period from 1911 to 1931, according to the pedagogical principles in vogue, that is, we tried to understand if in the middle of the process Republican modernization that was being established throughout the country, changes were made in the way that primary education was being established in the State, in order to unveil the functionality of modern proposals and practices pointed out in the legislation. In order to achieve the purpose of the text, we have examined research sources such as: Regulations, Laws, Decrees and Teaching Programs, which could subsidize research. As a theoretical basis, authors such as Calkins (1886/1950) and Valdemarin (2006) were adopted, in order to understand the intuitive method of teaching or lessons of things; Souza (2006), Azevedo (2009) and Nascimento (2012), for information on the School Groups; and Pais (2011), Pinheiro (2013) and Valente (2008), to brush information about the materials. Based on research carried out in Sergipe, references to the new pedagogy, based on the intuitive method of teaching, were based on principles of teaching by the senses, reality and intuition as the main learning instrument, and taking teaching materials as elements crucial to instruction, whether to enlighten observation or to achieve reasoning by touch and manipulation.
Keywords: Teaching Materials. New Pedagogy. Intuitive Teaching Method. Sergipanos School Groups.

INTRODUÇÃO

No presente artigo são apresentadas algumas considerações a respeito dos materiais de ensino[1] prescritos para o ensino dos saberes elementares matemáticos (SEM)[2] no curso primário sergipano durante o período de 1911 a 1931, em que são enfatizados seus tratamentos segundo os preceitos pedagógicos da época.

Cabe destacar que a temática exposta contempla recorte de uma pesquisa maior, vinculada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe[3], inserida no âmbito do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT)[4], e buscou contribuir para a produção de conhecimento histórico acerca do ensino primário em Sergipe.

O marco de investigação aqui estabelecido, trata-se, segundo Azevedo (2009), do período de modernização pedagógica no Estado à luz da incorporação do método de ensino intuitivo, no qual os materiais de ensino são prescritos mediante reformas e métodos educacionais empregados pela legislação escolar. Tais movimentações alteram o modo como a educação era estabelecida, de acordo com as finalidades em que os saberes e os materiais eram propostos.

Em acordo com Chervel (1990), de um lado, novos objetos, impostos pela conjuntura política ou pela renovação do sistema educacional, tornam-se objeto de declarações claras e circunstanciadas e, de outro, cada professor é forçado a se lançar por sua própria conta em caminhos que ainda não foram trilhados ou a experimentar as soluções que lhe são aconselhadas.

Dessa maneira, neste artigo buscou-se compreender se em meio ao processo modernizador republicano que vinha se instaurando em todo o país, foram suscitadas

[1] Considerados como todo e qualquer objeto que pode ser utilizado como instrumento facilitador no processo de ensino-aprendizagem dos saberes elementares matemáticos presentes nas matérias/disciplinas Aritmética e Desenho no curso primário sergipano.

[2] Considerados como aqueles conteúdos da matemática escolar presentes para ensino no curso primário.

[3] Pesquisa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, intitulada: "Materiais de Ensino e os Saberes Elementares Matemáticos, Sergipe (1911-1931)", realizado sob a orientação da Profa. Dra. Ivanete Batista dos Santos.

[4] Os integrantes do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), vêm desenvolvendo pesquisas acerca da matemática escolar elementar, que a nível nacional, serve ao projeto "A Constituição dos Saberes Elementares Matemáticos: a Aritmética, a Geometria e o Desenho no curso primário em perspectiva histórico-comparativa, 1890-1970". Para maiores detalhes, acessar: http://www.unifesp.br/centros/ghemat/paginas/about_ghemat.htm

alterações no modo como o ensino primário vinha se instaurando no Estado sergipano, fazendo-se para tal, uso de documentos da legislação.

Por se tratar de uma pesquisa de cunho histórico-bibliográfico em que necessário estabelecer uma ponte entre o presente e o passado, o exame das fontes torna-se prática imprescindível, pois:

> O trabalho historiográfico não é atinente à verdade, mas a certeza. Esta distinção não está situada na dicotomia entre o verdadeiro e o falso, mas entre o acertado e o não acertado, ou melhor, entre os diversos graus de acertos possíveis. Sem referência às fontes, de uma pesquisa sobre a possibilidade de acertar se passa a uma pesquisa sobre o verdadeiro (RAGAZZINI, 2001, p.16).

Além disso, buscou-se também desvendar a "funcionalidade" de propostas e práticas prescritas segundo a legislação, visto que,

> O discurso político e educacional produzido nas últimas décadas do Império, estabelece estreitos vínculos entre as propostas de inovação metodológica e a difusão do ideário liberal republicano, destacando-se a utilização das lições de coisas ou método intuitivo como estratégia de intervenção na sala de aula, locus específico da instrução e da mudança das práticas pedagógicas, adequando a escola ao projeto político modernizador. (VALDEMARIN, 2006, p. 90).

Em meio a tal modernização do ensino, faz-se necessário iniciarmos pela criação e consolidação dos Grupos Escolares em Sergipe, considerados como propulsores iniciais de mudanças para fins da melhoria educacional que se intentava alcançar.

ESPAÇO ESCOLAR DE CIVILIZAÇÃO E INSTRUÇÃO: OS GRUPOS ESCOLARES SERGIPANOS

Segundo Frago e Escolano (1998 *apud* LIMA, 2007), a arquitetura escolar pode ser considerada como uma espécie de discurso que institui, em sua materialidade, um sistema de valores – ordem, disciplina e vigilância – marcos para a aprendizagem sensorial e motora, em que toda uma semiologia cobre diferentes símbolos estéticos, culturais e ideológicos.

Nesse sentido, destaca Carvalho (2003), que tão logo proclamada a República, governantes do Estado de São Paulo investiram na organização de um sistema de ensino modelar, desenvolvido a partir da Escola Modelo (anexa à Escola Normal), inaugurada com a Reforma Caetano de Campos, onde os futuros mestres poderiam ver como as crianças eram manejadas e instruídas, tendo em vista que o modo de aprender era centrado na visibilidade e imitabilidade das práticas pedagógicas, cujo fim era a propagação dos métodos de ensino e práticas de organização da vida escolar.

Assim, o olhar torna-se elemento crucial na instrução do professorado, em que "[...] nessa pedagogia como arte, como saber-fazer, a prática da observação modula a relação ensino-aprendizagem, instaurando o primado da visibilidade" (CARVALHO, 2003, p. 83).

Em consonância a tal reforma, criaram-se Grupos Escolares, vistos como instituições que condensariam a modernidade pedagógica, ofertando ensino seriado, classes homogêneas e reunidas em um mesmo prédio (sob uma única direção), métodos pedagógicos modernos e monumentalidade de edifícios, fazendo a Instrução Pública Primária representar o signo do Progresso.

Em Sergipe, afirma Nascimento (2012), que apesar dos preceitos modernos, durante as duas primeiras décadas do regime republicano, a escola primária de cadeiras isoladas, ou escola singular, continuou a ser o modelo predominante da instrução pública das crianças, sendo essas escolas de dois tipos: a escola elementar e a escola complementar[5].

Segundo Nascimento (2012), uma das distinções entre ambas as escolas está na remuneração dos professores, isto é, a escola complementar contava com professores que recebiam melhores salários em relação ao oferecido aos professores da escola primária elementar.

Entretanto, a implantação efetiva da escola primária nos Grupos Escolares Sergipanos – GES, já a muito ressaltada, deu-se por meio do Decreto N. 563, que vigorou em 12 de Agosto de 1911, estabelecendo uma nova organização para o ensino no Estado. Porém, cabe destacar que "[...] na prática, definiu dois principais modelos adotados doravante: a escola isolada e a escola seriada, funcionando esta última nos grupos escolares" (NASCIMENTO, 2012, p. 213).

Para o autor, os GES também eram vistos como espaço de excelência para a aprendizagem em sentido amplo, pois, além da formação cívica posta em relevo, havia a preocupação de fixar às crianças, "[...] valores relativos ao cumprimento do dever, ao culto da responsabilidade, do amor, do bem, da solidariedade, do respeito às leis, dos valores morais (NASCIMENTO, 2012, p. 229).

[5] As escolas isoladas ou singulares, tratavam-se de escolas de classes autônomas e funcionamento unitário, reservadas, em grande parte, a alunos de bairro muito pobre, já que os grupos escolares estavam dispostos apenas em cidades e capitais. Assim, classificadas em 1ª, 2ª, 3ª, e 4ª entrâncias ou categorias, respectivamente: povoados, vilas, cidades e capitais, "[...] as escolas singulares são destinadas, umas, ao sexo masculino, outras, ao feminino, outras, aos dois sexos, promiscnamente, chamados, neste caso, mixtas" (SERGIPE, 1912, p. 4).

Essa modalidade de escola primária, conforme Souza (2006), foi implantada pela primeira vez em 1893, no estado de São Paulo, e representou uma das mais importantes inovações educacionais ocorridas no final do século XIX, tendo em vista sua repercussão em diversos estados da federação.

> Tratava-se de um modelo de organização do ensino elementar mais racionalizado e padronizado com vistas a atender um grande número de crianças, portanto, uma escola adequada à escolarização em massa e às necessidades da universalização da educação popular. Ao implantá-lo, políticos, intelectuais e educadores paulistas almejavam modernizar a educação e elevar o país ao patamar dos países mais desenvolvidos (SOUZA, 2006, p. 35).

Em acordo com a autora, pode-se dizer que a escola primária foi "(re) inventada", e consigo foram instituídas novas finalidades, outra concepção educacional e outra organização de ensino. Mudanças relevantes ocorreram no quadro geral da instrução pública primária no Brasil, tendo como destaque a instauração dos Grupos Escolares, além disso:

> O método individual cedeu lugar ao ensino simultâneo; a escola unitária foi, paulatinamente, substituída pela escola de várias classes e vários professores, o método tradicional cedeu lugar ao método intuitivo, a mulher encontrou no magistério primário uma profissão, os professores e professoras tornaram-se profissionais da educação (SOUZA, 2006, p. 35).

Destaca Azevedo (2009) que em Sergipe, a implantação dos grupos foi iniciada na capital (Aracaju), ocorrida no governo de José Rodrigues da Costa Dória (1908-1911), com a participação do professor paulista Carlos Silveira em 1911, e expandida para outras cidades do Estado, como: Propriá, Vilanova (atual Neópolis), Capela, São Cristóvão, Estância, Boquim, Lagarto e Annápolis (atual Simão Dias), identificadas essas até o ano de 1925, mas que se expandiram continuamente.

Dessa maneira, os Grupos Escolares em Sergipe fizeram parte de um processo modernizador e civilizatório inaugurando a escola dita moderna, onde,

> [...] novas concepções de tempo e espaço aparecem; a cultura da escrita impõe-se na busca por uma suposta superioridade, assim como outros atos cotidianos em que a formação e a difusão de determinados valores e crenças, hábitos e saberes são postos para que sejam trabalhados com os alunos, objetivando-se que através deste, toda a sociedade fosse atingida. (AZEVEDO, 2009, p. 30).

Assim, é possível dizer que a escola moderna se caracteriza, entre outros aspectos, pela reforma de métodos adotados no ensino primário sergipano, realizado "[...] por processos obsoletos e condemnados pela moderna Pedagogia"[6] (SERGIPE, 1911, p. 13).

Destaca Saviani (2005) que, diferente da visão tradicional[7], a concepção pedagógica renovadora apoiava-se numa visão filosófica baseada na existência, na vida e na atividade em que o homem é considerado completo desde seu nascimento e inacabado até morrer.

> Do ponto de vista pedagógico o eixo se deslocou do intelecto para as vivências; do lógico para o psicológico; dos conteúdos para os métodos; do professor para o aluno; do esforço para o interesse; da disciplina para a espontaneidade; da direção do professor para a iniciativa do aluno; da quantidade para a qualidade; de uma pedagogia de inspiração filosófica centrada na ciência lógica para uma pedagogia de inspiração experimental baseada na biologia e na psicologia (SAVIANI, 2005, p. 33).

Nesse sentido, os Grupos Escolares em Sergipe contribuíram para elevar o padrão de qualidade dos serviços públicos, em meio aos novos preceitos, uma vez que antes da instalação de tais grupos, só se encontravam no Estado escolas mal distribuídas, sem obedecer a critérios pedagógicos modernos de ensino, tendo como base métodos tradicionais, isto é, a aprendizagem era fundamentada exclusivamente na memorização, priorizando a abstração, valorizando a repetição ao invés da compreensão, impondo o conteúdo sem a efetiva participação do aluno.

Ressalva Azevedo (2009) que o uso de recursos didáticos modernos e de uma nova metodologia, além de profissionais com melhor formação (professores normalistas), tornaram-se necessários para se estabelecer ideais e valores republicanos. Em conformidade, grande importância é atribuída ao mobiliário e ao material didático, pois, "[...] jamais poderão ser colhidos os benefícios [...] se não forem as escolas dotadas do material pedagógico necessário e indispensável ao ensino prático" (AZEVEDO, 2009, p. 187).

É possível identificar, no que apresenta a citada autora, pedidos e agradecimentos sintéticos de diretores de Grupos Escolares à Diretoria da Instrução Pública, com relação aos materiais de ensino recebidos em respectivos espaços escolares, podendo-se destacar entre

[6] Nesta investigação, optou-se por adotar a grafia original da época na transcrição do que dizem as fontes, a fim de possibilitar ao leitor uma aproximação ao ensino de tempos passados.

[7] "A denominação "concepção pedagógica tradicional" ou "pedagogia tradicional" foi introduzida no final do século XIX com o advento do movimento renovador que para marcar a novidade das propostas que começaram a ser veiculadas, classificam como "tradicional" a concepção até então dominante. Assim, a expressão "concepção tradicional" subsume correntes pedagógicas que se formularam desde a Antiguidade, tendo em comum uma visão filosófica essencialista de homem e uma visão pedagógica centrada no educador (professor), no adulto, no intelecto, nos conteúdos cognitivos transmitidos pelo professor aos alunos, na disciplina, na memorização" (SAVIANI, 2005, p. 31).

estes: réguas, esquadros, mapas do sistema métrico do Brasil, Cartas de Parker, contadores mecânicos, coleções de Desenho de Olavo Freire 1º, 2º, 3º e 4º, entre outros.

Entretanto, nem todos os GES dispuseram do recebimento de materiais de ensino indispensáveis a instrução primária. Mas, de todo modo é possível afirmar que o Governo do Estado procurava, de alguma forma, estabelecer um padrão de escola que, apesar de nem sempre ter possuído condições ideais de funcionamento, respaldava na criação de uma cultura introduzida e cultivada, pois, como bem diz Julia (2001), a cultura escolar permite a análise precisa de relações conflituosas e pacíficas que ela mantém a cada período de sua história, com o conjunto das culturas que lhe são contemporâneas.

MATERIAIS E PEDAGOGIAS: UM ENTRELAÇO SOB DUAS DIREÇÕES

Diante do exposto, pode-se notar que a criação dos grupos escolares esteve diretamente atrelada a um movimento de renovação pedagógica contrário ao caráter abstrato e pouco utilitário da instrução, em que se procurava mudar o modo como o ensino vinha sendo tratado, por um novo método de ensino: “[...] concreto, racional e ativo, denominado *ensino pelo aspecto, lições de coisas* ou *ensino intuitivo*” (VALDEMARIN, 2006, p. 91, *grifos da autora*).

Dessa maneira, para identificar os preceitos pedagógico no Estado sergipano, foi realizado um exame sobre Regulamentos, Leis, Decretos e Programas de Ensino, cujo propósito consistiu em compreender os métodos pedagógicos, para se averiguar o(s) possíveis uso(s) dado aos materiais de ensino dos saberes elementares matemáticos. Assim, as fontes analisadas são destacadas a seguir:

- Regulamento de 1912 – Lei N. 605 de 24 de Setembro de 1912.
- Decreto N. 571 de 19 de Outubro de 1912.
- Programma para o Ensino Primario, especialmente para os Grupos Escholares, 1912.
- Lei N. 663 de 28 de Julho de 1914.
- Programma para o curso primario nos Grupos Escolares e Escolas Isoladas do Estado de Sergipe, 1915.
- Regulamento de 1916 – Decreto N. 630 de 24 de Abril de 1916.
- Programma para o curso primario nos Grupos Escolares e Escolas Isoladas do Estado de Sergipe, 1916.
- Programma para o curso primario nos Grupos Escolares e Escolas Isoladas do Estado, 1917.
- Lei N. 852 de 30 de Outubro de 1923.
- Regulamento de 1924 – Decreto N. 867 de 11 de Março de 1924.
- Programma para o curso primario elementar e superior, 1924.

Com base na legislação oficial apresentada[8], é possível destacar as seguintes recomendações no que se refere aos métodos de ensino preconizados pela pedagogia nova, sintetizadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Recomendações sobre métodos de ensino aos professores de ensino primário

DOCUMENTO	RECORTES
Regulamento de 1912 – Lei N. 605 de 24 de Setembro de 1912.	Art. 72. "O ensino deve ser feito o mais praticamente possivel e pelo processo intuitivo" (SERGIPE, 1912, p. 24).
Decreto N. 571 de 19 de Outubro de 1912.	Art. 86. "O ensino deve ser feito o mais praticamente possivel e pelo processo intuitivo" (SERGIPE, 1912, p. 36).
Lei N. 663 de 28 de Julho de 1914.	Art. 72. "O ensino deve ser feito o mais praticamente possivel e pelo processo intuitivo (...)" (SERGIPE, 1914, p. 25).
Regulamento de 1916 – Decreto N. 630 de 24 de Abril de 1916.	Art. 208. "As licções sobre qualquer materia serão cingidas ao programma e serão praticas, concretas[9], essencialmente empíricas e com exclusão completa de regras abstractas". Paragrapho unico. "As faculdades da creança serão desenvolvidas gradual e harmonicamente por meio de processos intuitivos, tendo o professor sempre em vista desenvolver a observação" (SERGIPE, 1916, p. 244).
Lei N. 852 de 30 de Outubro de 1923.	Art. 1º. IX – "O ensino primario terá por objeto promover o desenvolvimento das faculdades moraes da creança, cultivar-lhe a vontade livre [...] Será, por conseguinte, intuitivo e pratico, por aspecto e por acção, partindo de realidades concretas á deducção, comprovação e generalização das idéas abstractas. Nestas condições, a tarefa do mestre será objectivada por um appello incessante e directo a espontaneidade intellectual, a attenção, comprehensão e raciocinio do alumno, no proposito do adiantamento geral e uniforme das classes." (SERGIPE, 1923, p. 30-31).
Regulamento de 1924 – Decreto N. 867 de 11 de Março de 1924.	Art. 99. "O ensino publico primario terá por objeto promover o desenvolvimento das faculdades moraes e intellectuaes da criança, cultivar-lhe a vontade livre, preparar-lhe um physico sadio e assegurar-lhe os conhecimentos uteis á vida" (SERGIPE, 1924, p. 31).

Fonte: Quadro elaborado a partir dos Decretos, Leis, Regulamentos e Programas, aqui examinados.

[8] As fontes de pesquisa aqui apresentadas foram localizadas na Biblioteca Pública Epifânio Dórea, no Arquivo Público do Estado de Sergipe, no Instituto Histórico e Geográfico de Sergipe e no Diário Oficial do Estado de Sergipe, e disponibilizadas no Repositório de Conteúdo Digital do GHEMAT, isto é, no "[...] repositório virtual e aberto e institucionalizado, especificamente para armazenar fontes diversas, ensaios e pesquisas voltadas para a História da Educação Matemática" (COSTA, 2015, p. 33). Para maiores detalhes, ver: http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769.

[9] Segundo as normativas oficiais de Sergipe, a concepção de concreto pode ser evidenciada pela visualização de figuras/ilustrações e de situações-problema que tratam da vida da criança, isto é, do cotidiano para o âmbito escolar.

Pelo exposto, constata-se que a recomendação era que o ensino fosse realizado de maneira prática e através do processo intuitivo, porém, não traz explicações conceituais sobre o que significavam esses termos.

Assim, na tentativa de compreender o significado de "prática", tomou-se como referência Leme da Silva (2015) com o alerta de ter, tal termo, "[...] nas diferentes vagas pedagógicas e nas distintas apropriações feitas pelos documentos oficiais" (LEME DA SILVA, 2015, p. 33), diversos significados.

No tocante aos saberes geométricos, segundo preceitos do método de ensino intuitivo, é possível inferir dois eixos significativos em que a prática pode ser destacada. Primeiro, na prática de um saber: "[...] a prática do desenho é a observação e reprodução de objetos naturais com suas imperfeições; e a prática da geometria recebe o desenho linear, ou seja, as construções com instrumentos de figuras geométricas, representando a precisão e perfeição" (LEME DA SILVA, 2015, p. 35-36).

Assim, no desenho natural, as coisas são observadas pelas crianças, para visualização e reprodução, desvinculadas da precisão e de propriedades das figuras geométricas e, no desenho linear, a prática está aliada à inserção de instrumentos de construção, como régua e compasso, por exemplo, ou seja, destaca-se a prática do manuseio.

Já no sentido de saber prático:

> Os saberes geométricos associam-se às atividades práticas, nas quais, destacam-se: a atividade de medir, prática articulada com os elementos de agrimensura; a atividade de confeccionar trabalhos manuais, prática relacionada com a formação profissional e ainda a atividade de desenhar, prática que visa exercitar o olho e a mão. (LEME DA SILVA, 2015, p. 50).

Nesse âmbito, o saber está atrelado diretamente à prática do *saber-fazer-com* no dia a dia, de modo a concretizar os saberes na vida comum.

Consoante à ideia referente ao significado de prática, Pinto *et al* (2014) destaca o espírito prático como aquele relacionado aos saberes úteis para a vida:

> [...] para atender necessidades da economia, útil para preparar mão de obra frente aos avanços da industrialização, com predominância das técnicas, hábitos e habilidades para finalidades imediatas, não mais a educação da mente e do raciocínio, mais um saber fazer auxiliado pelas novas linguagens necessárias às novas demandas profissionais (PINTO *et al*, 2014, p. 99).

Com ciência das possibilidades do significado prático do ensino no curso primário, cabe indagar: E o entendimento do ensino intuitivo prescrito?

Para compreender o método prescrito, em diversos documentos analisados eram indicados aos professores primários, adotarem o manual *Primeiras Lições de Coisas*, escrito por Norman Allison Calkins[10] e traduzido por Rui Barbosa, para servir de suporte e apoio no que diz respeito ao método citado.

No supracitado manual, é possível identificar alguns princípios fundamentais, considerados pelo autor como essenciais ao processo de ensino intuitivo. Para Calkins (1886/1950),

> O primeiro passo preparatório para a educação de crianças convém que seja estudar a natureza do espírito e sua condição na puerícia, seus modos naturais de desenvolvimento e os processos melhor adaptados a disciplinar-lhe acertadamente as faculdades (CALKINS, 1886/1950, p. 29).

Nesse sentido, alguns princípios são destacados para o ensino envolta das lições de coisas. Em um desses, destaca o autor que "[...] o mais natural e saudável incentivo para obter, entre crianças, a atenção e aquisição de conhecimentos, é associar a recreação ao ensino" (CALKINS, 1886/1950, p. 30). Talvez, por conta disso seja possível observar, em documento escrito por Helvécio de Andrade, Diretor da Instrução Públicas do Estado de Sergipe, instruções consideradas *Para a bôa macha do ensino primario*, ao prescrever:

> [...] que os professores promovam passeios aos domingos com seus alumnos ao campo ou jardins públicos ou particulares, e aproveitem essas oportunidades [...] Nesses passeios obtem-se bons exercicios de educação dos sentidos intellectuais, avaliando distancias, calculando areas, [...] calculos cuja exactidão ou erro o professor verificará (ANDRADE, 1914, p. 4-5).

Dessa forma, a recomendação era para que os mestres promovessem passeios que possibilitassem ser relacionados aos conteúdos primários, pois, a instrução associada à recreação produziria atenção e prazer na aprendizagem, aguçando a curiosidade e possibilitando ao aluno o avanço do conhecimento em seu próprio cotidiano.

Outro princípio fundamental era que "[...] o processo natural de ensinar deve partir do simples para o complexo; do que se sabe, para o que se ignora; dos fatos, para as causas; das coisas, para os nomes; das idéias, para as palavras; dos princípios, para as regras"

[10] Segundo Valdemarin (2006), o manual de Calkins é apresentado na Exposição Universal de Filadélfia, realizada em 1876, sendo recomendado por Ferdinand Buisson em seu relatório ao governo francês como a melhor coleção de lições de coisas já elaborada, motivando inúmeras traduções, em que, além desta, destacam-se uma versão japonesa em 1877 e duas versões para o espanhol em 1872 e 1879. Em sua 40ª edição, é vertido e adaptado as condições de nosso idioma pelo Conselheiro Ruy Barbosa, em 1886, cujo texto é republicado em 1950 pelo Ministério da Educação e Saúde, no volume 13 das *Obras Completas de Rui Barbosa*.

(CALKINS, 1886/1950, p. 31). Este princípio, em âmbito geral, parece permear as indicações postas no quadro 9.

Além disso, cabe destacar a importância da observação tida na instrução, ou melhor, dos sentidos, pois,

> Os *sentidos* fornecem ao espírito os meios de comunicação com o mundo exterior. Mediante *sensações* logra o entendimento a *percepção* dos objetos circunjacentes. A *percepção* leva a *concepções* ou *idéias*, que a memória retém, ou evoca. A *imaginação* apodera-se das idéias constituídas mediante a *percepção*, combina-as, e imprime-lhes novas formas. O *raciocínio* procede ao exame das idéias por método mais definidos, resultando dessa investigação o *juízo*. Outrossim, das *sensações* procede a percepção; a *atenção*, fixada no que se percebeu, leva a *observação*. Enfim, graças à observação, à comparação e à classificação das experiências e dos fatos, alcançamos o *conhecimento*. (CALKINS, 1886/1950, p. 31).

Assim, notam-se os passos, ou melhor, as "principais forças de inteligência" que, para Calkins (1886/1950), devem ser empregadas a fim de se adquirir o conhecimento e a inteligência, atingindo as faculdades mentais da criança na formação de suas ideias.

Em suma, os procedimentos de ensino apresentados por Calkins (1886/1950), têm início na educação dos sentidos a fim de preparar os alunos para a observação acurada, pois, acredita-se que esta produz ideias claras e distintas que, acrescidas da imaginação e do raciocínio, levam a criança ao desenvolvimento da capacidade de julgamento e de discernimento, com a aprendizagem evoluindo concomitantemente ao desenvolvimento físico e intelectual.

Em acordo com Calkins (1886/1950), a autora Valdemarin (2006), entende o método intuitivo como instrumento pedagógico capaz de reverter a ineficiência do ensino escolar em que "[...] novos materiais, criação de museus pedagógicos, variação de atividades, excursões pedagógicas, estudo do meio etc." (VALDEMARIN, 2006, p. 91), assim, apresentam-se como *locus* de mudanças para adequar a escola ao projeto político modernizador.

Nesse sentido, cabe trazer uma apresentação sobre o primeiro ano de curso primário dos saberes aritméticos, exposta no quadro 2, relatado pelos Programas de 1915, 1916 e 1917, pois, neles o saber era posto de maneira diferenciada dos demais, isto é, os programas não apresentam, de maneira direta e objetiva, os SEM a serem estudados. Ao que parece, eles surgem na descrição de uma lição, estando em meio à prática pedagógica a ser realizada pelo professor primário, a saber:

Quadro 02 – Proposta apresentada pelos Programas de 1915, 1916, 1917 ao Ensino de Aritmética

1º. ANNO	RECOMENDAÇÕES
Primeiros exercicios (Phase preliminar)	Antes do professor levar o menino a *carta de Parker*, ao *contador mecanico* ou de entregar lhe o *caderno de Ramon Roca*, muna-se de collecções de *objectos* iguaes (melhores os coloridos): *sementes, palitos de phosphoro tintos em anilina vermelha, botões, moedas, pedrinhas, etc*. Disponha o mestre na mesa deante da classe alguns *objectos* da mesma especie dos acima indicados, enfileirando-os assim: • • • • • • (Na falta servirão traços de giz no quadro negro)
Primeiro passo – Fevereiro e Março	Diga o mestre, apontando o 1º objeto ou signal: *um*, e toda a classe se attenta responde – um. Passando a 2ª linha: *um, dois*, e todos respondam *um, dois*. Depois a 3ª linha: *um, dois, trez*. Sabendo a creança contar até 3, aumente o Professor o numero de linhas até 6, na mesma ordem. E do mesmo modo ensine-lhes a contar até 6. Depois, do mesmo modo até 9. Sabendo a creança contar bem até 9, disponha o mestre *objectos* diversos em filas; 1ª. fila – 1 *lapis*; 2ª. fila – 2 *canetas*; 3ª. fila – 3 *botões*; 4ª. fila – 4 *palitos*, e assim por deante até 9. Isto feito, pergunte: João, quantos lápis na 1ª. fila? José, quantos palitos na 4ª. fila? Ernesto, quantas canetas na 2ª. fila, e assim por diante, variando a ordem das perguntas, afim de verificar si as creanças assimilaram a idéia do numero. Repita os exercicios variando a forma: Ernesto, conte quatro palitos na quarta fila. *Um, dois, trez*, etc – tantos palitos. E assim com todos os alumnos até que saibam contar até 9. Exercicios para conhecer o valor dos numeros: Um nº. maior do que 4? Um nº. menor do que 3? Um maior que 7? Um menor que 5? De 7 e 5 qual o maior? Qual o menor 3 ou 9? etc, etc.

Fonte: Quadro elaborado a partir dos Programas de 1915, 1916 e 1917, contidos no Acervo da Biblioteca Pública Epifânio Dória e disponibilizados no repositório virtual do GHEMAT.

Assim, nota-se pelo apresentado no quadro 2, que o conteúdo proposto era indicado por meio de uma listagem de procedimentos que deveriam ser seguidos pelo mestre para alcançar a aprendizagem dos alunos, cujos passos são apresentados de maneira semelhante nas duas primeiras fases dos respectivos programas.

Percebe-se que no documento há menção a diversos objetos a serem utilizados na contagem e comparação de quantidades para se construir a ideia de número, como: sementes, palitos, botões, moedas, pedrinhas, lápis, caneta, entre outros.

Verifica-se também, referencias as Cartas de Parker[11] e contadores mecânicos[12], recomendados após a utilização de objetos simples para a contagem. Materiais semelhantes a esses são citados por Valdemarin (2006), difundidos no período de renovação pedagógica, como: “[...] caixas de ensino das cores e das formas, gravuras, coleções, objetos variados de madeira, aros, linhas, papéis etc. em substituição ao velho livro de textos para serem memorizados” (VALDEMARIN, 2006, p. 91).

Assim, materiais como as sementes, os torninhos[13], os pauzinhos, entre outros, apresentavam-se como indispensáveis ao ensino primário, pois, a partir do método adotado,

> [...] as lições são organizadas tendo por critério a importância atribuída a cada um dos sentidos para a aquisição do conhecimento, iniciando-se pelos conteúdos mais adequados à percepção visual e finalizando com aqueles que têm no tato seu suporte cognitivo (VALDEMARIN, 2006, p. 101).

Dessa maneira, com a adoção do método de ensino intuitivo perante a pedagogia moderna, pretendia-se educar a criança a partir de novos padrões intelectuais que se fundamentavam em nova concepção do conhecimento, originado pelas ideias nos sentidos humanos, como enfatiza Calkins (1886/1950), a fim de formar indivíduos que usem menos a memória e mais a razão, e que valorizem a observação e o julgamento próprios como meio de construção do conhecimento e implementação das atividades produtivas. Daí a importância dos materiais, possibilitando uma reelaboração de métodos, conteúdos e procedimentos didáticos.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES: ENTRE PEDAGOGIAS E MATERIAIS

Ao realizar um exame sobre as fontes para se compreender como os materiais de ensino eram indicados nas prescrições legais de Sergipe, foi possível identificar os modos e tratamentos que eram destinados aos materiais.

[11] “Constituem um conjunto de gravuras cujo fim é o de auxiliar o professor a conduzir metodicamente o ensino, sobretudo, das quatro operações fundamentais. Junto de cada gravura, há uma orientação ao professor de como deveria dirigir-se à classe de modo a fazer uso de cada uma delas e avançar no ensino da Aritmética” (VALENTE, 2013, p. 03).

[12] Tratava-se de ábacos, considerando seus diversos modelos e variantes, aparelho didático “[...] de base exclusiva aos exercícios de numeração, sem perder de vista as orientações do método intuitivo” (PAIS, 2011, p. 03).

[13] Em acordo com Pinheiro (2013), os torninhos ou tornos de sapateiros, como eram conhecidos, eram pedaços de madeira em forma de pauzinhos utilizados, por muito tempo, como auxílio para o ensino concreto de Aritmética.

Para se alcançar a modernidade pedagógica, criam-se grupos escolares em diversos estados do país cujo principal intento consistia em modificar as bases pelas quais o ensino era realizado, mediante o emprego de novo método de ensino: o intuitivo.

Assim, na pedagogia nova, o método de ensino intuitivo é indicado tendo como princípios o ensino pelos sentidos, pela realidade e pela intuição como principal instrumento de aprendizagem.

Pela proposta metodológica, o ensino deveria partir da observação, do visual de objetos para o manuseio destes. Por meio das fontes examinadas, é possível afirmar que haviam prescrições para que, em alguns momentos, os professores se munissem de objetos para a visualização dos alunos e, em outros, a indicação era para que os alunos manuseassem os materiais de ensino, repudiando-se o ensino pela memorização e abstração, sem a devida compreensão.

Em suma, é possível destacar que as propostas recomendavam materiais que, com o passar dos anos eram intensificados, cujos exercícios buscavam o aprimoramento da observação e inteligência, e que permitissem a reprodução de construções, móveis e utensílio familiares, aliados ao prazer e satisfação na aprendizagem, isto é, exercícios que permitissem a materialização na prática.

Mas, cabe frisar, que aqui está posto um recorte histórico acerca dos materiais de ensino no primário sergipano, aliado a um método de ensino que servia como base referencial ao modo como a modernidade educacional pudera ser alcançada. Tais exclamações podem ser melhor averiguadas ampliando-se o marco investigado, ou ainda, com a possibilidade de se inventariar fontes que aqui não puderam ser examinas. Entretanto, aqui coube apontar informações sobre pedagogias e materiais, não obstante de pronto e acabado, afinal, isto é história.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, H. de. **Instrucções para a bôa marcha do ensino primário.** Aracaju: Typ. D' O Estado de Sergipe, 1914. Acesso em 17 de Abril de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/133885.

AZEVEDO, C. B. de. **Grupos Escolares em Sergipe (1911-1930):** cultura escolar, civilização e escolarização da infância. Natal, RN: EDUFRN – Editora da UFRN, 2009.

CALKINS, N. A. **Primeiras lições de coisas**. Rio de janeiro: Ministério da Educação e Saúde, 1886/1950. [Volume XIII, tomo I das Obras completas de Rui Barbosa].

CARVALHO, M. M. C. de. Reformas da Instrução Pública. **In:** LOPES, E. M. T. et al. 500 anos de Educação no Brasil. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. vol. 2. **Teoria & Educação**. Porto Alegre, 1990.

COSTA, D. A. da. Repositório. **In:** VALENTE, Wagner Rodrigues (org.) Cadernos de Trabalho. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação.** n. 1. Campinas, SP: SBHE, 2001. Acesso em 28 de Maio de 2014. Disponível em www.rbhe.sbhe.org.br/index.php/rbhe/article/download/273/281

LEME DA SILVA, M. C. Caminhos da pesquisa, caminhos pelos saberes elementares geométricos: a busca da historicidade da *prática* nos estudos da educação matemática no Brasil. **In:** VALENTE, W. R. (orgs.). Prática – Cadernos de Trabalho. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015.

LIMA, G. S. **A Cultura Material Escolar: desvelando a formação da Instrução de Primeiras Letras na Província de Sergipe (1834-1858).** Dissertação de Mestrado em Educação. 159f. Universidade Federal de Sergipe: PPGED/UFS, 2007. Acesso em 22 de Setembro de 2014. Disponível em: https://bdtd.ufs.br/handle/tede/1722

NASCIMENTO, J. C. Notas para uma Reflexão acerca da Escola Primária Republicana em Sergipe (1889-1930). **In:** ARAÚJO, J. C. S.; SOUZA, R. F. de.; PINTO, R. N. Escola Primária na Primeira República (1889-1930): subsídios para uma história comparada. Araraquara, SP: Junqueira&Marin, 2012.

PAIS, L. C. **Difusão de materiais para o ensino primário da aritmética na exposição pedagógica do Rio de Janeiro (1883).** Anais do VI Congresso Brasileiro de História da Educação. Vitória, ES: UFES, 2011. Acesso em 20 de Fevereiro de 2016. Disponível em: http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe6/anais_vi_cbhe/.../1089.doc

PINHEIRO, N. V. L. **Escolas de Práticas Pedagógicas Inovadoras: Intuição, Escolanovismo e Matemática Moderna nos primeiros anos escolares.** Dissertação de Mestrado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência. 155f. Universidade Federal de São Paulo: PPG Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, 2013. Acesso em 07 de Janeiro de 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/104911/Nara_Vilma_Lima_Pinheiro_Disserta%C3%A7%C3%A3o_2013.pdf?sequence=3

PINTO, N. B. *et al.* A Aritmética Prática nos Programas de Ensino Primário do Estado do Paraná (1901-1963). **In:** COSTA, D. A. da.; VALENTE, W. R. (orgs.). Saberes matemático no curso primário: o que, como e por que ensinar? São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014.

SAVIANI, D. As Concepções Pedagógicas na História da Educação Brasileira. **História, Sociedade e Educação no Brasil** – Revista HISTEDBR (1986-2006). São Paulo, SP: Faculdade de Educação/Unicamp, 2006. Acesso em 22 de Abril de 2016. Disponível em: http://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/artigos_frames/artigo_036.html

SOUZA, R. F. de. Espaço da Educação e da Civilização: origens dos grupos escolares no Brasil. **In:** SAVIANI, Dermeval. *et al.* O Legado Educacional do Século XIX. 2. ed. rev. e ampl. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

VALDEMARIN, V. T. O método Intuitivo: os sentidos como janelas e portas que se abrem para um mundo interpretado. **In:** SAVIANI, Dermeval *et al.* O legado educacional do século XIX. 2. ed. e ampl. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

VALENTE, W. R. **O ensino intuitivo de Aritmética e as Cartas de Parker.** V Congresso Brasileiro de História da Educação. Aracaju, SE: UFS, 2008. Acesso em 14 de Junho de 2015. Disponível em: http://sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe5/pdf/528.pdf

Publicações Oficiais

SERGIPE. Regulamento de 1912. Aracaju: Imprensa Official, 1912. Acesso em 07 de Abril de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/124889.

_________. Decreto de N. 571, de 19 de outubro de 1912. Aracaju: Imprensa Official, 1912. Acesso em 09 de Abril de 2015. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/103584.

_________. Programmas para o ensino primário: especialmente os grupos escolares do estado de Sergipe. Aracaju: Typ. D' O Estado de Sergipe, 1912. Acesso em 13 de Abril de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/124884.

__________. Coleção de Leis e Decretos de 1914 - Lei nº 663 de 28 de julho de 1914. Aracaju: Imprensa Official, 1914. Acesso em 24 de Abril de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/103585.

__________. Programmas para o curso primário nos grupos escolares e escolas isoladas do estado de Sergipe, 1915. Aracaju: Typ. D' O Estado de Sergipe, 1915. Acesso em 12 de Maio de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/124882.

__________. Programmas para o curso primário nos grupos escolares e escolas isoladas do estado de Sergipe, 1916. Aracaju: Typ. D' O Estado de Sergipe, 1915. Acesso em 19 de Maio de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/116813.

_________. Decreto N. 630, de 24 de abril de 1916. Aracaju: Imprensa Official, 1916. Acesso em 20 de Maio de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104705.

__________. Programmas para o curso primário nos Grupos Escolares e escolas isoladas do estado de Sergipe. Aracaju: Imprensa Official, 1917. Acesso em 23 de Maio de 2015. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/103591.

__________. Lei nº 852 em 30 outubro de 1923. Aracaju: Imprensa Official, 1923. Acesso em 26 de Maio de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104704.

__________. Programma para o curso primário elementar e superior do Estado de Sergipe, 1924. Aracaju: Imprensa Official, 1924. Acesso em 01 de Junho de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/124883.

___________. Regulamento de 1924. Aracaju: Imprensa Official, 1924. Acesso em 27 de Maio de 2015. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104709.

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

ALGUNS ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS NA TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Daniela Mota Teixeira
DMAI/Universidade Federal de Sergipe
danymota2010@gmail.com

Resumo

Neste artigo mostraremos a completude de alguns espaços importantes no estudo de equações diferenciais.

Abstract

In this article we will prove the completeness of some important spaces in the study of differential equations.

1 Introdução

A elaboração deste texto foi motivada a partir da diversidade de espaços métricos reconhecidos como completos e que aparecem na teoria das equações diferenciais, tanto clássica quanto moderna.

Dentre as aplicações mais importantes da teoria de espaços métricos em equações diferenciais está o teorema do ponto fixo de Banach. Com efeito, dado um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \\ \varphi(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

podemos transformá-lo em uma equação integral da seguinte forma

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds. \tag{1.2}$$

Para determinar a extistência de (1.2), recorremos a algum teorema de ponto fixo, mais precisamente o teorema do ponto fixo de Banach. Para isso, é definido um operador

$$F : \mathcal{C}(I; B) \longrightarrow \mathcal{C}(I; B)$$

onde o conjunto $\mathcal{C}(I; B)$ é o espaço de aplicações contínuas $\varphi : I \longrightarrow B$. Mas para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach, $\mathcal{C}(I; B)$ deve ser um espaço completo.

Em meio aos muitos trabalhos referentes às aplicações dos espaços presentes neste texto, é interessante citar alguns destes, como os trabalhos de Andrade e Viana [2], Arrieta e Carvalho [1] e Nishiguchi [3]. Dentre os espaços estudados nesse texto, um deles é o X_β, caracterizado do seguinte modo

$$X_\beta = \{u \in \mathcal{C}((0,T];\mathbb{E}) : \|u\|_{X_\beta} = \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} < +\infty\}$$

tal que $\beta > 0$ em que o espaço é um conjunto de aplicações contínuas em $\mathcal{C}((0,T];\mathbb{E})$, no qual $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach.

Em [2], X_β é definido com $\mathbb{E} = L^r(\mathbb{R}^n)$, porém não é mostrado que tal espaço é de Banach. Neste texto, mostraremos que X_β é, de fato, um espaço de Banach.

Já em [1], X_β é denotado por $K(\tau_0)$, em que o mesmo é um conjunto de aplicações contínuas em $\mathcal{C}((0,\tau_0];X^{1+\epsilon})$, onde $\epsilon > 0$ e $X^{1+\epsilon}$ é um espaço de potências fracionárias de um operador e além disso um espaço de Banach. E o objetivo do texto é mostrar um teorema de existência e unicidade para equações do tipo $x' = Ax + f(t,y)$, resultado que pode ser aplicado a equações de Navier-Stokes e equações de calor.

Ao final, consideraremos o espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ (ver Definição 3.1) que é similar àquele tomado em [3], no qual é mostrado sua completude. O objetivo de [3] é estudar uma condição para solucionar problemas de valor inicial em equações diferenciais com retardo. Aqui, estamos interessados em dar detalhes da demonstração da Proposição 2.2 de [3].

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentaremos a notação básica utilizada no texto e alguns resultados do estudo de espaços métricos. Para conhecer as definições iniciais, consultar o livro *Espaços Métricos* [4]. Além disso, incluiremos algumas demonstrações para conveniência do leitor.

Denotaremos por d a métrica e por M o espaço métrico. Adotaremos a notação $\|\cdot\|$ para representar a norma de um espaço vetorial. Além disso, utilizaremos $\mathbb{E}$ para representar o espaço de Banach, que é um espaço vetorial normado e completo.

Proposição 2.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy. E sendo de Cauchy, é limitada.*

Definição 2.2. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação bijetiva $f : M \longrightarrow N$ tal que $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ é denominada isometria.*

Definição 2.3. Um homeomorfismo é uma aplicação bijetiva $f : M \longrightarrow N$ contínua, tal que, sua inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua.

Definição 2.4. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é dita uniformemente contínua quando para todo $\epsilon >$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Definição 2.5. *Um homeomorfismo uniforme é uma bijeção $g : M \longrightarrow N$ unirfomemnte contínua e sua inversa $g^{-1} : N \longrightarrow M$ também é.*

Proposição 2.6. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme. Uma sequência de pontos $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $g : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo uniforme e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Pela Definição 2.4, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

para quaisquer $x, y \in M$. Mas, por hipótese, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < \delta$. Mas a continuidade uniforme implica que $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$. Logo $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, seja $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em N. Mas, pela Definição 2.5, $f^{-1} : N \longrightarrow M$ é uniformemente contínua, o que implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. □

Observação 2.7. Um homemorfismo que é uma isometria é um homeomorfismo uniformemente contínuo. Além disso, dados dois espaços M e N tais M é completo, então a completude de M implica na completude de N.

Observação 2.8. A proposição 2.6 será útil na demonstração do Teorema 3.3.

Definição 2.9. *O espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Definição 2.10. *Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \to M$ uma aplicação. A notação $B_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \to M$ tais que $d(f, \alpha) = \sup_{x\in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.*

Proposição 2.11. *Se o espaço métrico M é completo então $B_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B_\alpha(X;M)$. Fixe $x \in X$ de maneira arbitrária, assim a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M. Por M ser completo, existe para cada $x \in X$, o limite desta sequência. Neste caso, $\lim f_n(x) =: f(x) \in M$.

Como a sequência é de Cauchy, pela Proposição **??**, esta é limitada; então existe $c > 0$ tal que

$$d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Fazendo $n \to \infty$ concluímos que $d(f(x), \alpha(x)) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo $f \in B_\alpha(X;M)$.

Agora, resta provar que $f_n \to f$ uniformemente em X. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$ para qualquer $x \in X$, uma vez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Daí, fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) = d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ para todo $x \in X$. Portanto, $f_n \to f$ uniformemente, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2.12. *Todo subespaço fechado de um espaço de Banach é Banach. Reciprocamente, todo subespaço de Banach de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset \mathbb{E}$ tal que F é fechado. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em F. Mas, como $F \subset \mathbb{E}$ então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$, que por sua vez é completo, logo $x_n \mapsto x \in \mathbb{E}$, que implica que $x \in \overline{F}$. E como F é fechado, temos que $x \in F$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em F. Portanto F é completo.

Reciprocamente, seja F um subespaço de Banach de $\mathbb{E}$. Considere $y \in \overline{F}$, isto é, y é aderente a F, então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F tal que $y_n \mapsto y$. Pela Proposição 2.1, podemos afirmar que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em F, e este é completo, logo $y \in F$. Portanto, F é fechado. $\square$

3 Resultados Principais

Nesta seção será mostrada a completude de alguns espaços importantes no estudo de equações diferenciais. O estudo desses espaços motivaram a elaboração deste artigo e além disso, foram citados na introdução, alguns textos que se utilizaram de tais espaços.

Teorema 3.1. *O conjunto X_β é um espaço de Banach.*

Demonstração. Inicialmente será verificado que a função proposta sobre X_β,

$$\|u\|_{X_\beta} = \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}}$$

é de fato uma norma. Uma vez que, todo espaço normado torna-se um espaço métrico através da definição $d(x,y) = \|x-y\|$. Isto implica que a métrica provém da norma $\|\cdot\|$.

Sejam $u, v \in X_\beta$ e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ temos que

- $\|u\|_{X_\beta} = \sup\limits_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \neq 0.$

- Como $\sup(\lambda f(x)) = \lambda \sup(f(x))$, note que

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{X_\beta} &= \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|\lambda u(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= |\lambda| \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= |\lambda| \|u\|_{X_\beta} \end{aligned}$$

- Uma vez que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$, podemos aplicar tal propriedade para obter

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{X_\beta} &= \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \|u(t)+v(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \sup_{t\in(0,T]} t^\beta \left(\|u(t)\|_{\mathbb{E}} + \|v(t)\|_{\mathbb{E}}\right) \\ &\leq \|u\|_{X_\beta} + \|v\|_{X_\beta} \end{aligned}$$

Portanto, $\|u\|_{X_\beta}$ é uma norma e X_β é um espaço métrico.

Agora, mostraremos que tal espaço é completo. Pela Definição 2.9, tome $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\beta$ de Cauchy e portanto, $\sup\limits_{t\in(0,T]} t^\beta \|u_n(t)\| < +\infty$. Posteriormente, defina $v_n(t) = t^\beta u_n(t) \in B((0,T],\mathbb{E})$ e note que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, com $m, n \geq n_0$, tal que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in(0,T]} \|v_n(t) - v_m(t)\|_{\mathbb{E}} &= \sup_{t\in(0,T]} \|t^\beta u_n(t) - t^\beta u_m(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= \|u_n - u_m\|_{X_\beta} < \epsilon \end{aligned}$$

Logo, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $B((0,T],\mathbb{E})$. Pela Proposição 2.11, pode-se afirmar que $B((0,T],\mathbb{E})$ é completo, uma vez que $\mathbb{E}$ por hipótese é um espaço de Banach e a função α fixada é a função identicamente nula. Daí, pela Definição 2.9, temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $v \in B((0,T],\mathbb{E})$ tal que

$$\sup_{t\in(0,T]} \|v_n(t) - v(t)\|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$, isto é,

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|u_n(t) - t^{-\beta} v(t)\|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

É fácil ver que $u(t) = t^{-\beta} v(t) \in X_\beta$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_\beta} &= \sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|u(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= \sup_{t \in (0,T]} t^{\beta} \|t^{-\beta} v(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &= \sup_{t \in (0,T]} \|v(t)\|_{\mathbb{E}} < +\infty. \end{aligned}$$

Logo, $u(t) = t^{-\beta} v(t) \in X_\beta$ e portanto X_β é um espaço de Banach. □

3.1 Espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$

Esta seção é destinada ao estudo do espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$. Assim, fixaremos algumas notações especiais.

Denotemos por I o intervalo $I = [-r, 0]$ com $r > 0$ e o conjunto de aplicações de I em $\mathbb{E}$ contínuas, denotaremos por $\mathcal{C}(I, \mathbb{E})$. Considere ainda, a seguinte notação $[t_0, t_0 + b] + I := \{t + \theta : t \in [t_0, t_0 + b], \theta \in I\}$.

Definição 3.2. *Seja $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$ tal que*

- *Se $J = [t_0, t_0 + b]$, para algum $b > 0$. Dizemos que a aplicação $x : J + I \longrightarrow \mathbb{E}$ é uma continuação de (t_0, ϕ_0) sempre que $x_{t_0} = \phi_0$ e quando x for contínua em J. Quando $t_0 = 0$, é dito simplesmente que x é uma continuação de ϕ_0. Além disso, se $x_{|J}$ é diferenciável, dizemos que x é uma C^1-continuação.*

- *Para $b > 0$, defina*

$$\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b) = \{x \in \mathcal{C}(J + I, \mathbb{E}) : x \text{ é uma continuação de } (t_0, \phi_0)\}$$

  Chamamos o espaço $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ como o espaço de continuação de comprimento (t_0, ϕ_0).

- *Para $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{E})$ considere a continuação de ϕ do seguinte modo*

$$\overline{\phi} := \begin{cases} \phi(s), & s \in I \\ \phi(0), & s \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Seja* $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$. *Para todo* $b > 0$, *o espaço* $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Considere o espaço $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ e note que o conjunto é um espaço vetorial. Como todo $x \in \mathcal{C}_{0,0}(b)$ é contínuo e limitado, $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ torna-se um espaço vetorial normado munido da métrica do supremo.

Defina o conjunto

$$Y_b := \{y \in \mathcal{C}([0, b], \mathbb{E}); y(0) = 0\}.$$

Note que $Y_b \subset \mathcal{C}([0, b], \mathbb{E})$ é fechado, mas o fato de $\mathcal{C}([0, b], \mathbb{E})$ ser um espaço de Banach, pela Proposição 2.12, Y_b também é Banach.

Além disso, o fato de $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ e Y_b serem isometricamente homeomorfos implica que $\mathcal{C}_{0,0}(b)$ também é um espaço de Banach. Defina o operador $\mathcal{N} : \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b) \longrightarrow \mathcal{C}_{0,0}(b)$, com $b > 0$ e $s \in [0, b] + I$, por

$$\mathcal{N}x(s) = x(t_0 + s) - \overline{\phi}_0(s).$$

Inicialmente será mostrado que $\mathcal{N}x$ é contínuo. Temos que $t \mapsto x(t + \theta)$ é contínuo, $t \in [t_0, t_0 + b]$. Logo, $s \mapsto x(t_0 + s + \theta)$ é conínuo, $s \in [0, b]$. Então,

$$s \mapsto \mathcal{N}x(s + \theta) = x(t_0 + s + \theta) - \overline{\phi_0}(s + \theta)$$

é contínuo, uma vez que $\phi_0 \in \mathcal{C}(I; \mathbb{E})$.

Agora, mostraremos que $\mathcal{N}$ está bem definido. Seja $x \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ e $\theta \in I$, note que

$$(\mathcal{N}x)_0(\theta) = \mathcal{N}x(\theta) = x(t_0 + \theta) - \overline{\phi_0}(\theta) = x_{t_0}(\theta) - \overline{\phi_0}(\theta) = \phi_0(\theta) - \phi(\theta) = 0.$$

Logo, $\mathcal{N}$ está bem definido.

Além disso, será provado que $\mathcal{N}$ é bijetivo. Sejam $x, y \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ tais que $\mathcal{N}x = \mathcal{N}y$ daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}x(s) &= \mathcal{N}y(s) \\ \iff x(t_0 + s) - \overline{\phi}_0(s) &= y(t_0 + s) - \overline{\phi_0}(s) \\ \iff x(t_0 + s) &= y(t_0 + s), \end{aligned}$$

para todo $s \in [0, b] + I$. O que implica que $x = y$ em $s \in [t_0, t_0 + b] + I$. Portanto, $\mathcal{N}$ é injetivo.

Considere $y \in \mathcal{C}_{0,0}(b)$, isto é, $y : [0, b] + I \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $y_0(\theta) = 0$ para todo $\theta \in I$ e $t \mapsto y(t + \theta)$, com $t \in [0, b]$ contínuo. Considere $x \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ de modo que $x(t_0 + t + \theta) = y(t + \theta) + \overline{\phi_0}(t + \theta)$ daí,

$$\mathcal{N}(t + \theta) = x(t - 0 + t + \theta) - \overline{\phi_0}(t + \theta) = y(t + \theta),$$

$\theta \in I$. O que implica que $y = \mathcal{N}x$. Logo, $\mathcal{N}$ é sobrejetivo.

Por último, mostraremos que o operador $\mathcal{N}$ é de fato uma isometria, isto é,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}x - \mathcal{N}y\| &= \sup_{s\in[0,b]+I} \|x(t_0+s) - \overline{\phi_0}(s) - y(t_0+s) + \overline{\phi_0}(s)\| \\ &= \sup_{s\in[0,b]+I} \|x(t_0+s) - y(t_0+s)\| \\ &= \|x-y\|.\end{aligned}$$

com $x, y \in \mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$. Logo, $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ é um isometricamente homeomorfo a $\mathcal{C}_{0,0}(b)$. Portanto, pela Proposição 2.6 , $\mathcal{C}_{t_0,\phi_0}(b)$ é completo. $\square$

Referências

[1] Arrieta, José M.; Carvalho, Alexandre N.: Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 1, 285-310.

[2] de Andrade, Bruno; Viana, Arlúcio: On a fractional reaction-diffusion equation, Z. Angew. Math. Phys. **68** (2017), no. 3, Art. 59, 11 pp.

[3] J. Nishiguchi, A necessary and sufficient condition for well-posedness of initial value problems of retarded functional differential equations, J. Differential Equations **263** (2017), no. 6, 3491–3532.

[4] LIMA, Elon L. *Espaços Métricos*, Elon Lages Lima. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.