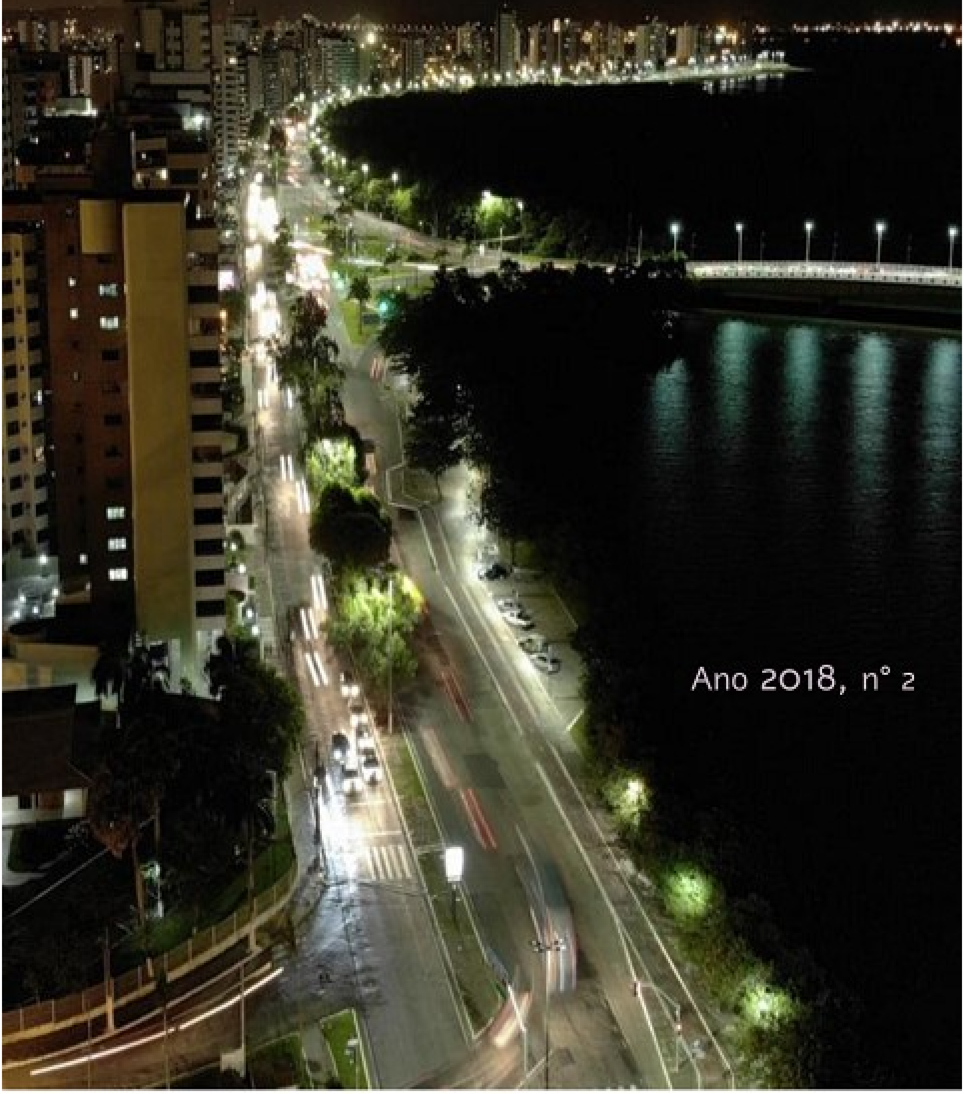
REVISEM

REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



Ano 2018, n° 2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática : REVISEM [recurso eletrônico] / Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe. – Vol. 3, n. 2 (2018)- . – Itabaiana, SE, 2016-

Semestral.

ISSN 2525-5444

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal de Sergipe. Departamento de Matemática.

CDU 51:37

SUMÁRIO

EDITORIAL

É com muito prazer que publicamos a segunda edição do ano de 2018 da Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática – ReviSeM, uma publicação da Universidade Federal de Sergipe (UFS). Esta edição conta com cinco artigos de pesquisadores de diferentes instituições, sendo três da área de Ensino de Matemática e dois da área de Matemática.

Na seção da Educação Matemática dois artigos abordam a Formação de Professores dos anos inicias, um dos artigos dessa edição trata da formação continuada de professores que atuam em escolas do campo, enquanto que outro discute a formação inicial de pedagogas em uma universidade particular da Grande São Paulo.

O artigo intitulado "Percepções de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em escolas do campo acerca da formação continuada" de autoria de Lúcia Maria Batista Fonseca e Arthur Machado Gonçalves Junior teve como objetivo compreender em que termos uma proposta de formação continuada em serviço possibilita a orientação do trabalho didático-pedagógico do professor ao ensinar matemática nos anos iniciais. Enquanto que o texto "Formação inicial em pedagogia: um estudo sobre conhecimentos relativos à proporcionalidade" de Angélica da Fontoura Garcia Silva, Alexsandro Soares Cândido e Ruy César Pietropaolo teve como propósito analisar como futuras pedagogas identificam situações proporcionais e não proporcionais.

Para completar a seção de Educação Matemática, temos o trabalho "Educação Matemática e Transdisciplinaridade: mapeamento de pesquisas recentes". Os autores Jean Paixão de Oliveira, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana e Zulma Elizabete de Freitas Madruga apresentam resultados de uma pesquisa, que teve como objetivo analisar como se apresentam pesquisas que relacionam o ensino de matemática com a transdisciplinaridade.

Na seção da Matemática, o trabalho intitulado "Racionalização de Denominadores" traz dois resultados sobre racionalização de denominadores algébricos e a sua demonstração se dá através de elementos básicos da álgebra do ensino superior.

Os autores Pedro Pessoa e Rodrigo Gondim acreditam que os seus resultados podem ser inclusive estudados como parte de um projeto de Iniciação Científica Jr.

Completando a edição, no artigo de divulgação “Sobre alguns resultados de D’Alembert”, após uma introdução que resume o início da vida e dos estudos daquele matemático, os autores Luiz Adauto Medeiros, Manuel Milla Miranda e Aldo Louredo descrevem contribuições do proficiente matemático francês D’Alembert no estudo das vibrações das cordas elásticas, da análise complexa e das equações diferenciais ordinárias.

A ReviSeM agradece aos autores, avaliadores, comissão científica e demais colaboradores, que contribuíram para que mais uma edição da revista fosse disponibilizada para a comunidade acadêmica e demais interessados em discutir as temáticas pertinentes ao nosso foco de estudo.

Convidamos a todos para explorarem o conteúdo completo dessa edição.

Editores

Marta Élid Amorim
Arlúcio Viana

PERCEPÇÕES DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM ESCOLAS DO CAMPO ACERCA DA FORMAÇÃO CONTINUADA

Lúcia Maria Batista Fonseca
Universidade Federal do Pará – UFPA
luciafonseca64@hotmail.com

Arthur Machado Gonçalves Junior
Universidade Federal do Pará – UFPA
agmj@ufpa.br

Resumo

Neste artigo apresentamos os resultados de uma pesquisa realizada com cinco professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em três escolas públicas localizadas no Campo da cidade de Marabá-Pá. A pesquisa teve como objetivo investigar para compreender em que termos uma proposta de formação continuada em serviço possibilita a orientação do trabalho didático-pedagógico do professor ao ensinar matemática nos anos iniciais. Como sustentação teórica buscamos apoio em: Alarcão (2011), Fiorentini e Nacarato (2005), Freire (1987), Imbernón (2006, 2009), e Tardif (2014). Os procedimentos metodológicos assumidos foram de abordagem qualitativa e para colaborar com o diálogo entre pesquisador e pesquisados, optamos pela pesquisa-ação. Utilizamos os seguintes instrumentos investigativos: questionário, entrevista e vídeos gravados durante a pesquisa. Os momentos formativos se articularam em 4 etapas com dois encontros cada. A pesquisa mostrou-se relevante, segundo os professores a experiência formativa desenvolvida em contexto de trabalho proporcionou outros olhares sobre as ações da sala de aula orientando o ato de ensinar e aprender dos professores ao ensinarem Matemática e dos alunos ao aprenderem Matemática. Contudo, os professores reconhecem que é preciso formar-se continuamente para atender às exigências do ensino.
Palavras-chave: Formação Continuada de Professores. Ensino e Aprendizagem de Matemática. Educação no Campo.

Abstract

In this article we present the results of a survey conducted with five teachers of the early years of elementary school in three public schools located in the city of Marabá-Man. The research aimed to investigate to understand in what terms the proposal for continued training in service enables the orientation of the didactic-pedagogic work of professor to teach mathematics in the initial years. As theoretical support we seek support in: Alarcão (2011), Fiorentini and Nacarato (2005), Freire (1987), Imbernón (2006, 2009), and Tardif (2014). The methodological procedures undertaken were of a qualitative approach and to collaborate with the dialogue between researcher and researched, we decided action research. We use the following investigative instruments: questionnaires, interviews and videos recorded during the survey. The formative moments if articulated in 4 steps with two meetings each. The research showed if relevant, according to the teachers the formative experience developed in context of work provided other perspectives on the actions of the classroom by guiding the Act of teaching and

learning of teachers to teach Mathematics and students to learn Mathematics. However, teachers recognize that we must form continuously to meet the demands of teaching.
Keywords: Continuous Training of Teachers. Teaching and learning of Mathematics. Education in the field.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um recorte de minha dissertação de mestrado profissional que tem como questão de pesquisa: Em que termos uma proposta de formação continuada em serviço pode possibilitar a orientação do trabalho didático-pedagógico do professor ao ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em escolas do campo? Imbuídos desse compromisso investigativo construímos nosso objetivo que consiste em: investigar para compreender em que termos uma proposta de formação continuada em serviço possibilita a orientação do trabalho didático-pedagógico do professor ao ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em escolas do campo.

Essa pesquisa emergiu das minhas vivências e experiências como coordenadora pedagógica e professora formadora de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental das escolas do Campo (Zona Rural) do município de Marabá, Sudeste do Pará. No exercício dessas funções, tive a oportunidade de acompanhar *in lócus*, a prática de sala de aula de alguns professores, onde foi possível detectar um desencontro entre a ação planejada e a executada em sala de aula, e que possivelmente dificulte a aprendizagem dos alunos.

As inquietações foram muitas, principalmente, em relação ao modo que os professores apresentavam a matemática aos alunos, motivo que impulsionou a buscar compreensões mais alargadas sobre os motivos pelos quais discurso e prática não se alinharem, ou seja, os professores sabiam dizer o que fazer, mas não colocavam em prática o discurso professado e anunciado no planejamento.

Neste artigo, discorremos discorro de forma breve sobre a concepção de educação na perspectiva freireana, saberes docentes; formação do professor e o ensino de Matemática, caminhos metodológicos, compreensões construídas acerca do processo formativo e as considerações finais. Para tanto, construímos um percurso investigativo de natureza qualitativa na modalidade pesquisa-ação pelas vantagens de possibilidade de envolvimento entre todos os sujeitos participantes da pesquisa-ação, observando que os “procedimentos a serem escolhidos devem obedecer a prioridades estabelecidas a partir de um diagnóstico da situação no qual os participantes tenham voz e vez”

(THIOLLENT, 2011, p. 14). Neste sentido, o desafio consistiu-se em desenvolver a investigação considerando as possibilidades que a pesquisa qualitativa oferece.

Os materiais empíricos dessa pesquisa foram coletados por meio de áudio e vídeo; entrevistas individuais; questionários; observação das aulas; material produzido pelos professores e diário de campo da pesquisadora.

Os dados foram organizados a partir das ideias de autores que versam sobre professores reflexivos em uma escola reflexiva (ALARCÃO, 2011), formação permanente do professorado (IMBERNÓN, 2009), pedagogia do oprimido (FREIRE, 1987), saberes docentes e formação profissional (TARDIF, 2014), (NACARATO, 2013) a formação do professor que ensina matemática, (FIORENTINI e NACARATO, 2005), cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.

A título de considerações finais, apresento as contribuições da pesquisa no que tange a orientação e organização do trabalho didático-pedagógico a partir da observação, da reflexão, da intervenção e da reorientação das práticas de ensinar e de aprender Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em escolas do Campo.

INICIANDO A CONVERSA

Ao propor uma intervenção no fazer pedagógico de professores dos anos iniciais, que ensinam Matemática em escolas do Campo, abordaremos contribuições de Paulo Freire, no que tange as suas influências significativas no campo educacional desde os anos 1950. Seus escritos ficaram conhecidos por colocar em destaque a necessidade de uma revolução de ensino haja vista, que o modelo que vem sendo desenvolvido nas escolas brasileiras há algum tempo é alvo de reflexões sobre sua validade, pois é um modelo pautado em idéias de transmissão de conhecimentos.

Como sugere Freire (1987, p. 69) “os educandos não são chamados a conhecer, mas a memorizar o conteúdo narrado pelo educador”. O autor definiu um termo para esse tipo de processo que mata o poder criador das pessoas que deveriam estar em transformação, Educação Bancária. Segundo o autor, esse tipo de concepção de educação tem caráter de dominação.

> Na visão “bancária” de educação, o “saber” é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber. Doação que se funda numa das manifestações instrumentais da ideologia da opressão – a

> absolutização da ignorância, que constitui o que chamamos de alienação da ignorância, segundo a qual esta se encontra sempre no outro (FREIRE,1987, p.58).

Todavia, se conduzirmos as observações de acordo com esses ensinamentos, evidenciamos que a formação continuada de professores do Campo, deveria estabelecer um diálogo que estimulasse a consonância com a realidade da comunidade escolar; assim sendo, alteraria o modelo de currículo e ampliaria as necessidades educacionais da população camponesa.

De acordo com Freire, (1987, p. 74), na base da concepção problematizadora está uma compreensão radicalmente diferente do que significa conhecer. Para o autor, o conhecer está tomado de consciência pelos homens em relação ao mundo, pois é no "aprofundamento da tomada de consciência da situação, que os homens se apropriam dela como realidade histórica, por isto mesmo, capaz de ser transformada por eles".

Corroborando com esse pensamento Tardif, (2014, p. 232), defende que os saberes, assim como a subjetividade dos professores devem ser considerados pelo fato deles "organizarem sua prática a partir de suas vivências, de sua história de vida, de sua afetividade e de seus valores", ou seja, seus saberes estão enraizados em suas histórias de vida.

Significa dizer que a história está e sempre esteve ligada ao mundo dos homens enquanto produtores de suas condições concretas de vida e, portanto, tem sua base fincada nas raízes do mundo material, organizado por todos aqueles que compõem a sociedade. Os modos de produção são históricos e devem ser interpretados de maneira que os homens se encontrem em suas relações para se desenvolverem e dar continuidade à espécie. As idéias seriam então o reflexo da imagem construída e organizada por todos aqueles que compõem a sociedade.

Saberes Docentes

Os Saberes Docentes na perspectiva de Tardif (2014) enaltece principalmente a valorização do professor como agente de mudanças, cujas pesquisas versam sobre a evolução e situação da profissão docente, da profissão de professores e os conhecimentos de base da docência. Segundo o autor, as ações dos professores se constituem de forma diferente de qualquer outra profissão, para ele a docência é uma profissão de interações humanas.

> No âmbito dos ofícios e profissões não creio que se possa falar do saber sem relacioná-lo com os condicionantes e com o contexto do trabalho: o saber é sempre o saber de alguém que trabalha alguma coisa no intuito de realizar um objetivo qualquer. Além disso, o saber não é uma coisa que flutua no espaço: o saber dos professores é o saber *deles* e está relacionado com a pessoa e a identidade deles, com a sua experiência de vida e com a sua história profissional, com as suas relações com os alunos em sala de aula e com os outros atores na escola, etc. Por isso, é necessário estuda-lo relacionando-o com esses elementos constitutivos do trabalho docente (TARDIF, 2014, p. 11).

Diante destas afirmações o autor chama a atenção para a necessidade de considerarmos nos processos formativos os saberes vividos pelos professores, como têm construído sua prática docente, as relações que estabelecem com a escola e comunidade, não centralizando o foco somente no conteúdo, na organização didática do fazer pedagógico.

Os saberes mobilizados pelos professores no ambiente de trabalho são provenientes de vários momentos da vida e da formação profissional, os saberes originários dessa experiência parece ser a base de sustentação de todo processo mobilizador do ato de ensinar, é a "reiteração daquilo que se sabe naquilo que se sabe fazer, a fim de produzir sua própria prática profissional" (TARDIF 2014, p. 21).

De acordo com o autor, os "saberes profissionais são os saberes transmitidos pelas instituições de formação de professores", por vezes as instituições deveriam mobilizar os conhecimentos dos professores e do ensino em objetos de pesquisa, haja vista que os saberes da formação profissional são temporais quando os saberes que mobilizam e constituem por meio da experiência das práticas pedagógicas de sala de aula são plurais e heterogêneos, pois estes advêm de diversas fontes: vida pessoal, universidade, formação e materiais de apoio que são personalizados e situados em objeto humano por evitar generalizações e conservar os valores éticos.

> Nessa perspectiva, esses conhecimentos se transformam em saberes destinado à formação cientifica ou erudita dos professores, e, caso sejam incorporados à prática docente, esta pode transformar-se em prática cientifica, em tecnologia da aprendizagem, por exemplo (TARDIF, 2014, p. 37).

Dessa forma, além dos saberes da formação profissional, os saberes disciplinares, curriculares e experienciais compõem o conjunto dos saberes mobilizado no trabalho do professor no dia a dia da escola, ou seja, os saberes que constituem a profissão docente. Tardif (2014), afirma que os saberes disciplinares correspondem à prática docente proveniente da formação inicial e continuada por meio das disciplinas ofertadas pelas instituições de ensino superior.

Entretanto, os saberes disciplinares não são produtos diretos dos professores no desenvolvimento da atividade pedagógica em sala de aula, mas ao mobilizarem a ação docente fazem uso dos saberes produzidos pelos pesquisadores. Neste contexto é fundamental que o professor tenha conhecimento do conteúdo a ser ensinado, pois o saber disciplinar se relaciona na ação direta com a aprendizagem dos alunos.

A formação do professor e o ensino de Matemática

Defendemos a formaçao docente construída como processo, que integre as diversas formas de ensinar, que valorize as identidades sociais e toda manifestação cultural, que proporcione a participação e a reflexão individual e coletiva. Individual, porque é nas vivencias do cotidiano que adquire experiencia a sua pratica docente; coletiva, porque é na interação com outros docentes que amplia os conhecimentos e constrói novas práticas. Nosso entendimento acerca do movimento de mudança que deve haver na concepção de formação permanente vai ao encontro das ideias de Imbernón (2009), quando afirma que:

> A mudança no futuro da formação permanente não deve ser a predominante, mas aquela que o professorado assuma ser sujeito da formação, compartindo seus significados com a consciência de que somos sujeitos quando nos diferenciamos trabalhando juntos e desenvolvendo uma identidade profissional (o "eu" pessoal e coletivo que nos permite ser, agir e analisar o que fazemos) e não um mero instrumento na mão de outros (IMBERNÓN, 2009, p. 74).

Assim, partimos do princípio de que a identidade profissional está sempre em construção, não existe saberes prontos e acabados, o que existem são situações diversas, fatores diferentes que impedem ou não, que cada professor assuma a responsabilidade de construir seu próprio percurso. A formação permanente poderá contribuir para melhoria do desenvolvimento profissional, inovando e provocando mudanças na prática educativa, de forma a permitir que os professores se apoderem da autonomia e tornem-se protagonistas no processo formativo.

Uma formação que esteja para além dos modelos impostos, verticalizados e uniformes que não tem possibilitado conexão com a realidade vivida na escola. Em sentido contrário a esses modelos, apoiamos uma formação que seja construída no interior da escola, que considere os professores como agentes construtores de sua identidade profissional, que desenvolva processos de reflexão-ação-reflexão, que leve em conta os saberes utilizados pelos docentes nas ações cotidianas, que tenha como ponto de partida as situações reais de sala de aula, e considere as trocas de experiência, em suma; uma formação colaborativa que privilegie o fazer docente a partir das necessidades explicitadas nas práticas pedagógicas.

Conforme Fiorentini, Nacarato (2005), na atual sociedade do conhecimento não há mais espaço para o profissional trabalhar no isolamento;

> As pesquisas sobre formação de professores apontam a importância da escola e do trabalho colaborativo como instâncias de desenvolvimento profissional, uma vez que estas proporcionam aos professores condições de formação permanente, troca de experiência, busca de inovações e de soluções para os problemas que emergem do cotidiano escolar (FIORENTINI, NACARATO, 2005, p. 176).

Observamos que o desenvolvimento do trabalho colaborativo nos termos descritos pelos autores é um dos desafios a ser enfrentado na implementação da formação permanente que busca a participação docente, pois nossa experiência com o professorado e formadora nas escolas do campo, permite dizer que o trabalho docente se desenvolve de forma isolada, ou seja, os professores trabalham sozinhos em suas salas de aula.

O trabalho colaborativo para a formação permanente é importante, pois para podermos construir novas prática é necessário o diálogo entre os sujeitos envolvidos na tarefa de ensinar e aprender. A nossa concepção é que de forma colaborativa os professores podem enfrentar os problemas da prática, construir conhecimento e portanto a participação na formação de forma consciente é fator basilar. Porém, como sugere Imbernón (2009, p. 55), "para atingir esse grau de participação, será fundamental oferecer aos envolvidos os meios para adaptar continuamente a formação às suas necessidades e aspirações".

Contudo, podemos dizer que os efeitos promovidos pela formação continuada aos professores dos anos iniciais das escolas do Campo são mínimos. O processo de exclusão sofrido pelos professores é muito forte, as políticas públicas têm sido pensadas de forma globalizada e os contextos não têm ocupado o devido lugar; mencionando que de todos os programas e projetos desenvolvidos entre os anos de 2000 a 2017, no município de Marabá, somente três contemplaram os professores dos anos iniciais de escolas do Campo.

Assim, assumimos o desafio de construir uma formação continuada em serviço com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas do Campo que se justifique pela ação reflexiva e contínua, que considere o fazer diário, a observação, a reflexão e a intervenção na ação, um processo formativo imbuído de proposições que possibilitem a troca dos saberes entre professores, que a articulação conjunta venha a se configurar num processo de contribuição permanente ao fazer docente dos professores do Campo.

Para tanto, a competência profissional do professor reflexivo deve emergir da capacidade de encontrar maneiras criativas de exercer o conhecimento diante das condições de atuação, exercendo assim o poder de agente transformador numa sociedade marcada por dificuldades.

O século XX representa o período de mudanças no contexto social, das quais destacamos a comunicação midiática que possibilita uma rede de interação entre os sujeitos, oportunizando outros espaços comunicativos e a pesquisa educacional que apoiada no pensamento e no fazer docente tem buscado contribuir com o desenvolvimento, autonomia e colaboração profissional do professor. Sobre isso, Fiorentini (2005, p.49), afirma que os professores "não ensinam mecanicamente, de acordo com regras preestabelecidas, e que, dentre outras, a ação profissional docente deve estar fundamentada numa ação pedagógica critico reflexiva sobre o contexto em que se desenvolve".

A formação dos professores que ensinam Matemática[1] deve propiciar-lhes condições para enfrentar as dificuldades que se apresentam no ato de ensinar de forma individual e coletiva encontrar mecanismos necessários ao seu desenvolvimento profissional. É preciso provocar no professor a necessidade de reestruturar as bases formativas num esforço profundo com seus pares para alcançar seu conhecimento matemático, pois é "possível os professores aprenderem quando compartilham seriamente suas experiências profissionais e refletem criticamente sobre elas" (FIORENTINI, 2005, p. 50).

[1]Professores que ensinam Matemática, referem-se aos professores polivalentes aqueles que atuam na educação infantil e/ou nas series iniciais do Ensino Fundamental e que ensinam Matemática, apesar de não serem denominados "professores de Matemática", visto não serem especialistas (NACARATO, 2013, p. 20).

Dessa forma, o professor deve se sentir desafiado a buscar na formação continuada e na colaboração com seus pares no interior da escola não apenas o conhecimento necessário ao ensino dos saberes esperados pela sociedade, mas os "valores, respeito mútuo e o bem comum; trabalho colaborativo e cooperativo; relações de cuidado com o outro e com o bem estar social; desenvolvimento social e emocional" (Fiorentini, 2005, p. 90). Contudo, é necessário envolvimento do professor para que haja compreensão da complexidade que envolve o ensino, é preciso um processo formativo que incite o professor a refletir sobre suas práticas pedagógicas e assim possivelmente promova alterações no seu fazer docente.

Nessa mesma direção, Fiorentini, (2005, p. 135) assinala que "o contexto pedagógico é como uma rede de relações, conexões e interconexões em que os elementos constitutivos da pratica pedagógica vão se tecendo juntos em sua totalidade". Portanto, os saberes dos professores são provenientes da formação inicial e continuada, da experiência de vida e das experiências desenvolvida no decorrer de suas práticas diárias, pois é no enfrentamento da realidade produzida pela sala de aula que se articulam os conhecimentos necessários ao fazer docente.

CAMINHOS METODOLÓGICOS

Optamos pela pesquisa qualitativa na modalidade pesquisa-ação. Essa escolha se deu, não só pela necessidade da inserção do pesquisador no meio investigado, mas pela possibilidade de participação efetiva da população pesquisada no processo de geração de conhecimento concebido fundamentalmente como um processo de construção coletiva.

O método desenvolvido nessa pesquisa possibilita ampliação no conhecimento dos pesquisadores e dos envolvidos nas situações problemáticas, considerando que um dos principais objetivos da pesquisa-ação consiste em proporcionar aos "pesquisadores e grupos de participantes os meios de se tornarem capazes de responder com maior eficiência aos problemas da situação em que vivem, em particular e sob a forma de diretrizes de ação transformadora". (THIOLLENT, 2011, p. 14).

Nas escolhas e procedimentos metodológicos, utilizamos um conjunto de passos que nos auxiliou a organizar a investigação como: a organização e o delineamento da pesquisa, objetivos e a relevância dos caminhos percorridos na realização desse trabalho. A pesquisa ocorreu na cidade de Marabá-PA e contou com a participação de cinco professores que ensinam matematica nos anos iniciais do Ensino Fundamental em três escolas localizadas no Campo (Zona Rural). No processo de seleção utilizamos as chamadas "amostras intencionais[2]" a partir de três critérios: ser professor efetivo da rede municipal de ensino; participar da formaçao continuada; ter experiencia mínima de dez anos de docência em escolas do Campo.

Com a intenção de construir uma proposta de formação continuada para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em escolas do Campo, desenvolvemos o seguinte objetivo: Investigar para compreender em que termos uma proposta de formação continuada em serviço pode orientar a organização do trabalho pedagógico de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais em escolas do Campo.

Como estratégia de organização da proposta, optamos por não levar um modelo pronto de formação continuada, e sim construir com os professores uma formaçao a partir de suas práticas com etapas previamente organizadas para alcançar um fim. Dessa forma, as etapas da proposta de formação continuada em serviço foram tomando forma à medida que a investigação se desenvolvia.

Contudo, não é o objetivo dessa pesquisa apontar se os professores desenvolvem ou se já desenvolveram práticas semelhantes, nem tampouco de que o planejado é algo novo, excepcional diminuindo o que eles fazem, e sim de provocá-los a refletirem sobre sua ação docente, pois para Tardif (2014), na maioria das vezes as ações dos professores assumem consequências que não foram previstas e que às vezes não conseguem explicar sua existência.

A primeira etapa formativa *"DIAGNOSE"* emergiu do levantamento dos dados referentes ao contexto escolar: alunos, professores e ambiente escolar. Nessa etapa utilizamos o questionário, entrevista e observação das aulas.

A segunda etapa formativa "*REFLEXÃO SOBRE A AÇÃO"* consistiu nas reflexões sobre as práticas observadas nas aulas, nas quais os professores perceberam que se tivessem dado mais atenção ao planejamento, provavelmente os resultados poderia ter sido diferentes. A ausência de esse movimento reflexivo no fazer dos professores é o que Imbernón (2011, p. 41) chama a atenção, para ele o processo de

[2] "Amostras intencionais" trata-se de um pequeno número de pessoas que são escolhidas intencionalmente em função da relevância que elas apresentam em relação a um determinado assunto. Esse princípio é sistematicamente aplicado no caso da pesquisa-ação. Pessoas ou grupos são escolhidos em função de sua representatividade social dentro da situação considerada (THIOLLENT, 2011, p. 710).

"formação dos professores deve garantir conhecimentos, habilidades e atitudes para desenvolver profissionais reflexivos ou investigadores".

A terceira etapa formativa *"AÇÃO CONJUNTA"*. Nesta etapa ocorreu o desenvolvimento do planejamento a partir das ações refletidas pelo pesquisador e pelos professores, em decorrência das observações das ações práticas observadas em sala de aula. Nesta terceira etapa fomos para sala de aula e colocamos em prática o que havíamos planejado, com vistas a uma nova reflexão, ou seja, reflexão da reflexão sobre a ação.

A quarta etapa formativa *"REFLEXÃO SOBRE A AÇÃO CONJUNTA"* por ter se constituído em um processo de reflexão dos professores e da pesquisadora sobre as experiências decorrentes dessa investigação. Esse momento foi de muito aprendizado para todos os envolvidos. Conforme Alarcão (2011), se a formação continuada sair do nível individual e passar para o nível de formação situada no coletivo do contexto escolar o paradigma de professor reflexivo poderá ser mais valorizado. Neste sentido, os professores perceberam que um processo formativo como esse que observa, investiga, problematiza e reflete sobre o que faz poderá proporcionar o redirecionamento dos saberes docente.

COMPREENSÕES CONSTRUÍDAS ACERCA DO PROCESSO FORMATIVO

Nos deteremos a análise dos dados, visando a compreensão relativa das contribuições da formação continuada em serviço ao fazer pedagógico desses professores. Para preservar a identidade dos participantes desta pesquisa usamos nomes fictícios para identificá-los. As compreensões expressas nas análises se estruturaram a partir das reflexões sobre a importância da Matemática na vida e na ciência como ponto central a descoberta científica e as relações existentes na sociedade.

Do processo de seleção do material empírico emergiram dois eixos de análise e quatro categorias emergentes definidas pelo uso do método indutivo, do geral para o particular. O primeiro eixo refere-se à compreensão dos professores sobre a formação Continuada e suas práticas. Este eixo comporta duas categorias; a) percepções sobre formação continuada; b) práticas pedagógicas. Nele estão representadas as percepções sobre formação continuada, expressa pelos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais em escolas do Campo e a contribuição destas ao fazer docente, de forma a promover o desenvolvimento do ensino. O segundo eixo faz referência aos Saberes Docentes envolvidos na Prática Pedagógica: reflexões sobre a ação docente. Este eixo compreende duas categorias; a) reflexões e percepções dos professores acerca do ensino da Matemática; b) intervenções na ação docente.

Na categoria percepções sobre formação continuada os professores expressaram que a formação continuada os tem orientado na compreensão do que é ser professor porém, não oferece elementos suficientes para o desenvolvimento da prática de sala de aula , elemento central do trabalho docente. Para ilustrar essas percepções, trazemos excertos dos participantes dessa investigação que foram coletados na primeira etapa formativa. Neste sentido, a professora Raquel diz que,

> A formação continuada é muito importante, é por meio dela que os professores se tornam professores ao adquirir conhecimentos da profissão eles desenvolvem os planos de aula com o objetivo de atender as necessidades de aprendizagem dos alunos, é fazendo e refazendo que vamos adquirindo os conhecimentos docentes (RAQUEL, 2016).

A professora evidencia características adquiridas em uma formação continuada eminentemente técnica que serviu somente para construção de plano de aula, ou seja, técnicas a serem aplicadas a prática docente. Entretanto, a formação continuada deveria ser entendida como mecanismo de ampliação dos conhecimentos acerca dos processos que envolvem o ensino e a aprendizagem de forma crítica, capaz de transformar uma certa realidade.

Nesses termos, consideramos que o professor precisa viver um processo permanente de busca pelo conhecimento, de modo a valorizar inclusive os conhecimentos que são mobilizados na prática de sala de aula, afinal o professor não deve ser apenas aplicador dos saberes produzido pelo outro deve sobretudo ser “um sujeito que assume sua prática a partir dos significados que ele mesmo lhe dá, um sujeito que possui conhecimentos e um saber fazer proveniente de sua própria atividade e a partir dos quais ele a estrutura e a orienta” (TARDIF, 2014, p. 230).

Nessa direção, a formação continuada deveria considerar que as práticas dos professores emergem da produção/mobilização dos saberes específicos que provém dessa mesma prática e não somente pelos modelos formativos pré-estabelecidos que tem sido proposto há décadas.

Essa segunda categoria aponta indícios de reflexão crítica dos professores sobre práticas pedagógicas e o entrelaçamento dessas percepções entre teoria e prática como integrante do processo de reflexão da ação docente, observando as contribuições que a reflexão produz na prática pedagógica.

Alarcão (2011), nos ajudou a entender que o processo de reflexão é necessário a ação docente, porém, exige dos professores um certo esforço ao sistematizar os conhecimentos vividos por meio das ações e condições em que são desenvolvidas. Todavia, nesse movimento reflexivo os professores apresentam dificuldades para expressarem suas compreensões sobre as capacidades reflexivas enquanto mecanismo de transformação da ação docente. Para a autora, é necessária a percepção que somente o conhecimento resultante de sua compreensão e de sua interpretação permitirá a visão e a sabedoria necessária para propor mudanças a qualidade do ensino.

Dessa forma, a formação crítico-reflexivo do profissional que desenvolve a docência em escolas do Campo deve ser uma preocupação constante quando pensamos em melhoria do processo de ensino e de aprendizagem, pois a formação pode se caracterizar como um movimento propício a ressignificação das práticas. Pensar a educação do Campo significa pensar em movimento, significados, vivências, construção, coletividade dentre outros.

Nessa lógica, as práticas pedagógicas precisam dar conta de organizar o ensino de forma articulada com a realidade dos sujeitos do Campo, todavia, embora de forma tímida, os professores tem se proposto a vivenciarem práticas inovadoras de ações pedagógicas relacionadas à vivência do homem do Campo. A professora Flora conceitua as práticas pedagógicas como estratégias mediadoras entre o ensino e a aprendizagem adquiridas em contexto formativo.

> Práticas Pedagógicas são as estratégias que aprendo e utilizo no desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, é como se fossem as metodologias, por exemplo, os jogos, gêneros textuais entre outros, ou seja, é o fazer no dia a dia é o desenrolar da aula, são os meios que utilizo para fazer chegar o conhecimento até o aluno (FLORA, 2016).

No entanto, entendemos práticas pedagógicas como as ações realizadas pelos professores na sala de aula, a mediação entre teoria e prática numa perspectiva de ampliação dos conhecimentos didáticos na direção do fazer pedagógico articulado com a realidade do aluno. No relato de Flora é possível identificar a presença de vários mecanismos utilizados para expressar a compreensão sobre práticas pedagógicas, numa tentativa de interligar com o conceito de "saber" atribuído por Tardif (2014, p. 60), quando diz que no desenvolvimento do fazer docente se faz necessário o entrelaçamento entre os "conhecimentos, competências, habilidades e as atitudes". Esse conjunto de saberes auxiliados pela experiência de sala de aula e pelas trocas de saberes entre os outros professores no contexto da escola constituem as práticas pedagógicas.

Nessa conjuntura, Flora apresenta uma definição de práticas pedagógicas associadas ao objeto de ensino como saberes necessários à ação docente que são reconstruídos à medida que vão sendo refletidos no processo de articulação com a realidade da comunidade escolar, de forma a envolver os saberes adquiridos pela formação e pela experiência docente. Conforme Tardif (2014, p. 36), a "relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão dos conhecimentos já constituídos". Assim, é entre os diversos saberes adquiridos na formação profissional e na atuação docente que se estabelece a relação permanente de construção do conhecimento.

O entendimento do que torna uma prática pedagógica critico reflexiva encontra-se distante do acabado, porém, apresenta possibilidades de buscar soluções para questões relacionadas ao fazer docente exigindo uma vigília constante do professor em avaliar como está sendo desenvolvidas as práticas pedagógicas, tarefa central da ação docente. Conforme Alarcão (2011, p. 83), a "reflexão que o professor faz sobre seu ensino é o primeiro passo para quebrar o ato de rotina, possibilitar a análise de opções múltiplas para cada situação e reforçar a sua autonomia frente ao pensamento dominante de uma dada realidade".

Com base nesse entendimento, nas etapas formativas promovemos momentos de estudos de textos com cada professor com a intenção de suscitar reflexões sobre as contribuições da formação continuada na perspectiva da ação-reflexão sobre à "prática" docente, ou seja, uma tentativa de provocação sobre o que fazem. Durante as reflexões os professores identificaram que algumas das práticas por eles desenvolvidas em sala de aula precisariam passar por uma reorganização para que de fato contribua com as aprendizagens dos alunos.

A terceira categoria reflete indícios da fragilidade do ensino de Matemática nos cursos de formação tanto inicial quanto continuada desses professores. A matemática que fora ensinada não correspondia a matemática proposta atualmente, existem outras exigências que o professor não foi preparado para atender. Assim, percebemos que os professores não tem total domínio sobre os conteúdos e por isso sentem dificuldade em ensinar.

De acordo com a manifestação dos professores a formação tem se mantido distante das reais situações que envolvem o objeto de ensino matemático, o curso de pedagogia (formação inicial de todos os sujeitos da investigação) discute questões norteadoras do processo de ensino, mas não aprofunda as questões referentes ao ensino de matemática, estabelecendo uma grande distância entre o saber acadêmico e o saber da profissão, causando conflitos no exercício da prática docente.

Todavia, os saberes dos professores provenientes dos cursos de formação em magistério ao serem mobilizados em sala de aula por meio da pratica docente, revela que o grau de compreensão empregados nos mecanismos envolvidos no ensino da Matemática ainda se mantém em construção. De acordo com Ana *"é muito diferente o que eu estudei sobre matemática durante a formaçao inicial com o que se discute atualmente na formação continuada, eu me sinto desafiada a cada dia e percebo que a cada dia eu aprendo mais um pouco a ser professora".*

Um dos pontos mais desafiadores indicado pelos professores durante a pesquisa foi o ensino de Matemática, todos reconhecem que seus conhecimentos são superficiais e não permite aprofundamento dos conteúdos, motivo pelo qual as aulas muitas vezes se tornam desinteressantes, contradizendo o previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os anos iniciais quando afirma que "a atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade" (BRASIL, 1997, p. 19).

A quarta categoria de análise se estruturou a partir das reflexões sobre a importância da Matemática e tomou como base o planejamento da aula desenvolvida pelos professores e a relação deste, com as práticas utilizadas no ensino de Matemática. De acordo com as observações em sala de aula e as vozes dos professores participantes, as aulas de Matemática não acontecem conforme a orientação curricular.

Com a intenção de provocar os professores a reflexões sobre a importância da Matemática no desenvolvimento cognitivo dos alunos, propomos a problematização das práticas por eles desenvolvidas. Demos ênfase às práticas mediadoras entre o conteúdo matemático e os saberes mobilizados por cada professor no decorrer das aulas. Consideramos relevante, que antes de inferir qualquer comentário ao fazer docente era preciso ouvir o que os professores tinham a dizer sobre os saberes mobilizados na sua prática docente e sua subjetividade enquanto sujeitos do conhecimento.

Dessa forma ao dialogarmos sobre os motivos pelos quais não informaram aos alunos quais as aprendizagens matemáticas que eles deveriam adquirir ou se aproximar com as atividades propostas, os professores apresentaram dificuldades em estabelecer conexão entre o saber dos conteúdos matemáticos e a expectativa de aprendizagem. A professora Raquel**,** observou que *"Representou os números cardinais pela ordem em que se apresentavam e os ordinais pela escrita dos números. Deixa-me pensar estou fazendo confusão na minha cabeça, não tenho certeza, mas acho que era ordem".*

Entretanto, naquela atividade identificamos que a professora apresentava pouco domínio sobre o objeto de ensino podendo ocasionar conflito na aprendizagem matemática dos alunos. Os saberes envolvidos nas práticas dessa professora são saberes advindo de práticas isoladas, individualizadas necessitando que a formação continuada seja realizada de forma colaborativa, com compromisso e "responsabilidade coletiva de forma a transformar a escola num lugar de formação contínua, comunicativa e compartilhada para aumentar o conhecimento profissional, pedagógico e a autonomia participativa" (IMBERNÓN, 2009, p. 59).

Portanto, é necessário considerar as práticas dos professores, problematizá-las, investigá-las e refletí-las, para assim poder encontrar o sentido da formação continuada em sua prática docente. Dessa forma, no processo de reflexão sobre o planejamento foi possível percebermos a ausência de elementos mobilizadores da aprendizagem matemática. Numa ação conjunta decidimos planejar a aula anteriormente desenvolvida como possibilidade de apropriação pelos professores de saberes que viessem aproximar o que ensinam do que se espera que os alunos aprendam.

Durante o planejamento, passamos a refletir sobre o sistema de numeração decimal, objeto matemático que os professores haviam trabalhado como elemento essencial da formação matemática escolar, embora tenhamos a compreensão de que ordenar, comparar, interpretar e escrever números são ações cuja complexidade é desenvolvida ao longo dos anos, competindo ao professor encaminhar os momentos de discussões de modo que todos os alunos descubram as regularidades do sistema de numeração decimal ao realizarem atividades de comparação, produção e interpretação de números, processo pelo qual os alunos criam as hipóteses e avançam em seu conhecimento.

Com a intenção de avançarmos nos conhecimentos do conteúdo matemático, promovemos estudos individuais com os professores sobre o objeto de ensino, pois, nessa etapa é fundamental que as crianças compreendam a lógica do Sistema de Numeração Decimal e saibam que os números existem para ordenar itens contados, registrar quantidades, identificar objetos por meio de códigos, compará-los, antecipar ações não realizadas com operações e, também, para realizar as operações.

Após o estudo do conteúdo Sistema de Numeração Decimal (SND) trabalhado por cada professor, passamos a elaboração do planejamento garantindo os elementos que auxiliam na organização do trabalho docente, como delimitação do conteúdo a ser trabalhado, objetivo de ensino, objetivos de aprendizagens, direitos de aprendizagem, recursos didáticos, tempo de duração da aula, organização metodológica e critérios de avaliação.

Partindo dessa lógica, planejamos para os alunos do ciclo de alfabetização atividades para desenvolver a contagem, ordenação, comparação e quantidade, envolvendo os seguintes materiais: dados, grãos de milho, cartas de baralho, tabuleiros com os numerais e tampinhas de garrafas. Para os alunos do II ciclo, planejamos atividades com ábaco de pino aberto, dados e atividades de escrita, por entendermos que as regularidades do SND são a base para a realização das operações, e ao compreendê-las, permite que o aluno adicione, subtraia, multiplique e divida de acordo com o problema proposto.

Na sequência da aula, desenvolvemos duas atividades com os alunos do ciclo da alfabetização, uma foi o jogo da batalha a outra o jogo cubra e descubra, organizamos os alunos em duplas e distribuímos a mesma quantidade de cartas para cada um, à regra do jogo era inicialmente manter todas as cartas viradas para baixo e a cada carta desvirada o aluno fazia a contagem do numeral nela representado e os alunos que ainda não conheciam o numeral fazia uso de manipulativos para representar a quantidade contida no numeral. Ao finalizarem as duplas faziam a contagem geral para identificar se houve ganhador ou se ficou empate, seguidamente faziam a ordenação e registro dos numerais no caderno, e assim avançavam na aprendizagem do conceito de número, contagem, ordenação e registro.

A escolha da atividade com uso de cartas de baralho se deu por ser uma prática recorrente nas famílias das comunidades onde estão localizadas as escolas participantes da pesquisa, portanto, objeto de conhecimento dos alunos. Convém ressaltar que essas decisões foram sendo tomadas à medida que os professores refletiam sobre a ação passada e se conscientizavam da ação futura. Este momento proporcionou aos professores mais envolvimento acerca dos conhecimentos que deveriam ser adquiridos por cada aluno, por entender que o SND, tem uma característica importante, que o fato dele ser posicional, o valor de cada algarismo depende do lugar que ele ocupa na escrita e que o planejamento é indispensável à aquisição dessas aprendizagens.

É fato que o fazer docente requer conhecimentos e habilidades favoráveis a aprendizagem, de acordo com Jussara:

> A etapa do planejamento foi difícil, me surpreendi com a aula com uso dos materiais manipulativos, percebi que os alunos aprenderam mais, eles manuseavam, acho que ficou mais fácil pra eles compreenderem o conteúdo de SND. Fiquei envergonhada, durante a aula os alunos me chamavam, queriam saber como faziam sei que no final estava suada, para finalizar a aula desenvolvemos uma atividade avaliativa e apenas dois alunos não conseguiram realizar uma das questões. Eu cheguei à conclusão que uma aula planejada faz muita diferença (JUSSARA, 2016).

Esse excerto vem ao encontro das discussões que tivemos em relação a importância do ato de planejar para o desenvolvimento do trabalho docente. É importante que as ações didáticas estejam planejadas e definidas de forma consciente, evidenciando que a sala de aula não se caracteriza como espaço de aprendizagem apenas dos alunos, mas, principalmente dos professores, conforme (FREIRE, 1987, p. 25), “quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”.

A atividade do jogo cobre e descobre, também foi realizada em dupla e para que houvesse aprendizagem optamos por considerar o nível de conhecimento e a afinidade entre os alunos. Para o desenvolvimento da atividade, cada dupla recebeu um tabuleiro com duas sequencias numéricas iguais, dois dados e dois blocos de fichas com a mesma quantidade e de cores diferentes. Na sequência, cada aluno jogava os dados e fazia a adição das quantidades contidas nas faces dos dados, em seguida procurava identificar o numeral correspondente no tabuleiro cobrindo-o com a ficha, quem finalizasse primeiro a sequência ganhava a jogada.

Nessa atividade, o desafio estava em ajustar as aprendizagens matemáticas relacionadas a ordenação da sequência numérica, contagem, antecipação e registro. Ao fazer a contagem de objetos e ao organizar mentalmente esta contagem, primeiro o aluno realiza a classificação para incluir os objetos que podem ser contados. Nesta atividade, os alunos buscaram fazer a associação entre a sequência numérica construída com a sequência dos números contidos na numeração das casas existentes na rua da escola, como forma de atribuir significado ao objeto estudado.

Nessa perspectiva, o professor Adolfo, demonstrou entusiasmo com as aprendizagens acrescentadas a ele e aos alunos por intermédio das atividades com materiais manipulativos, segundo ele:

> Muito interessante à estratégia de contagem por meio de tirinha, percebi que eles (alunos) ajustavam a contagem por meio da sequência e chegavam ao numeral representado nos dados. Embora meus alunos ainda não tenham o domínio dos numerais, percebi que por meio da contagem dos elementos figurativos contidos nas faces dos dados eles se apropriavam da representação de quantidade numérica (Adolfo, 2016).

Nesse contexto,

> Se a capacidade reflexiva é inata no ser humano, ela necessita de contextos que favoreçam seu desenvolvimento, contextos de liberdade e responsabilidade. Não significa que ser reflexivo é uma tarefa fácil, porém, é preciso vencer inércias, é preciso vontade e persistência. É preciso fazer um esforço grande para passar do nível meramente descritivo, narrativo para o nível em que se buscam interpretações articuladas e justificadas (ALARCÃO, 2011, p. 49).

Com os alunos do II ciclo a base da atividade consistiu nas trocas de dez em dez como proposta de ampliação dos conhecimentos dos alunos sobre o sistema de numeração decimal. Com uso do material manipulativo os alunos identificavam o valor posicional de cada troca e faziam a leitura das quantidades representada no ábaco. O ensino com a relação de ordem dos números é necessário, pois favorece aos alunos na compreensão de que o sistema de numeração decimal é representado com a utilização de dois elementos: a base dez e o valor posicional.

A "reflexão" sobre a investigação compreende a etapa final desse processo formativo que foi se constituindo durante o processo investigativo, dessa forma sentimos a necessidade em perceber/compreender os sentidos atribuídos pelos professores quanto às contribuições dessa proposta de formação ao fazer desses docentes. Durante as apresentações a professora Ana, pontuou que:

> Se a formação continuada acontecesse na escola traria uma contribuição maior ao nosso fazer docente, pois estaria discutindo sobre as nossas dificuldades ao ensinar não só a matemática mais as disciplinas de modo geral, eu sinto falta desse tipo de formação. Acho também que o coordenador deveria nos orientar, pois é na escola que

> enfrentamos as dificuldades, temos que estar sempre aprendendo a lidar com as informações (ANA, 2016).

Observamos que a proposta de formação continuada em contexto escolar é necessária, do ponto de vista que se organize a partir dos saberes dos professores num movimento de conhecimento de si mesmo, num processo de reflexão coletiva sobre seus saberes pedagógicos, de conteúdo etc. Nesse sentido, entendemos a importância do coordenador pedagógico como agente mediador das aprendizagens dos professores, é preciso envolvimento diário com os sujeitos do ensino e da aprendizagem.

O coordenador pedagógico deve atuar de forma compartilhada e descentralizada passando a atribuir também como responsabilidade sua, não atribuindo essa responsabilidade somente ao trabalho do professor. Neste sentido, Alarcão (2011, p.87), nos ajudou a entender que a escola para ser reflexiva precisa "refletir sobre a gestão de uma escola reflexiva como uma gestão integrada de pessoas e processos, uma gestão realizada com pessoas e a bem das pessoas".

Dessa forma, é fundamental que o professor esteja inserido numa instituição que atua com seus pares, pois o professor reflexivo está envolvido numa prática coletiva, ele não se envolve apenas com questões de sala de aula por isso é necessário que exista na escola um processo de reflexão sobre a organização escolar articulado ao contexto local. Portanto, a escola pode se apropriar da reflexão coletiva para o aperfeiçoamento de suas ações, visualizando as mudanças necessárias para alcance de seus objetivos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa nos possibilitou o entendimento de que o trabalho coletivo oferece maior segurança ao fazer dos docentes oportunizando lhes experiências que inovam o fazer da sala de aula. Foi fundamental a participação dos professores nas discussões, no planejamento e na aplicação das atividades em sala de aula a relação que eles fizeram sobre as atividades desenvolvidas a partir do olhar sobre alguns aspectos da comunidade com as aprendizagens adquiridas pelos alunos. Esse olhar foi essencial para perceber que o ensino da Matemática quando proposto de forma articulada e planejada pode favorecer tanto a compreensão do professor sobre o objeto de ensino quanto à aprendizagem do aluno.

Com esse propósito, o piloto da formação em serviço desenvolvida nesta pesquisa, tomou como representação as práticas diárias do cotidiano escolar de cinco professores, de forma a problematizá-las e ressignificá-las por meio do processo de ação-reflexão-ação, na intenção de promover a ampliação do desempenho profissional em contexto de ensino e de aprendizagem.

Neste contexto, a escola deve funcionar como um centro aberto às inovações e intervenções dos professores, pois é nesse espaço que acontece a realização de atividades mediadas pelos saberes individuais, mas que pode alcançar a excelência pela interação dos professores envolvidos coletivamente, podendo construir outras formas de pensar novo saber, uma escola reflexiva definida por Alarcão, como “organização que continuadamente se pensa a si própria, na sua missão social e na sua organização e se confronta com o desenrolar da sua atividade num processo heurístico simultaneamente avaliativo e formativo” (Alarcão, 2011, p.90).

Neste sentido, defendemos uma formação continuada para professores das escolas do Campo que parta da realidade da sala de aula de forma a considerar as necessidades dos professores envolvendo estratégias formativas que venham responder às necessidades definidas pela escola. Assim, a formação na escola significa “um trabalho que tem como princípio aprender de forma colaborativa, dialógica, participativa, isto é, analisar, testar, avaliar e modificar em grupo; propiciar uma aprendizagem da colegialidade participativa e não uma colegialidade artificial” (IMBÉRNON, 2009, p. 61).

Neste contexto, compreendemos que os saberes mobilizados pelos professores precisam ser percebidos como molas inovadoras de possibilidades e criação de processos próprios de intervenção na ação pedagógica, para tanto é preciso que se incorpore aos processos educativos de forma natural, rumo à construção da autonomia profissional que deve ser alcançada no confronto com os problemas apresentados no cotidiano escolar.

Portanto tecer algumas percepções sobre o processo de investigação dos fragmentos, das mediações que foram feitas, e dos resultados alcançados em relação as contribuições da formação em serviço para o redimensionamento da prática de professores que ensinam matemática nos anos iniciais em escolas públicas localizadas no Campo, é uma tarefa um tanto difícil por uma série de motivações, dentre elas compreendida as limitações do professor ao ensinar matemática em decorrência dos aspectos sociocultural e de movimentos modernos impulsionados pelas reformas educacionais nas últimas décadas, difícil porque parece que ainda falta o que dizer, mas como toda pesquisa não temos a pretensão de esgotar todas discussões sobre o tema investigado.

Nesses termos, a escola do Campo passa ser foco do processo "ação-reflexão-ação" como unidade básica de mudança, desenvolvimento e melhoria. Nessa perspectiva, a formação em serviço precisa ouvir as vozes dos professores no interior da escola e buscar conhecimentos que os orientem na transformação do seu fazer docente, haja vista, que a formação continuada vem contribuindo para os saberes dos professores, porém não o suficiente, estes ainda apontam indícios de que precisam ampliar os conhecimentos teóricos e práticos e consequentemente ampliarem as compreensões sobre as situações que envolvem o ensino e a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, Isabel. Professores reflexivos em uma escola reflexiva. 8 ed. – Coleção questões da nossa época, v. 8. São Paulo: Cortez, 2011.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. 3. Ed. Brasília: Secretaria, 2001.

FIORENTINI, Dario. NACARATO, Adair Mendes, (orgs.). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática. São Paulo: Musa Editorial, 2005.

FREIRE, Paulo. Pedagogia do oprimido. 38ª. Ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

IMBERNÓN, Francisco – Formaçao docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza. 6. Ed. Coleção Questões da Nossa Época, v. 77. São Paulo, Cortez, 2006

___________Formação permanente do professorado: novas tendências; tradução de Sandra Trabuco Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2009.

NACARATO, Adair Mendes. A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas / organizado por Adair Mendes Nacarato e Maria Auxiliadora Vilela Paiva. 3. ed. Belo Horizonte: Autentica, 2013.

TARDIF, Maurice. Saberes docentes e formação profissional. 17. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

THIOLLENT, Michel. Metodologia da pesquisa-ação. 18ª. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

Submetido em 29 de Setembro de 2017.
Aprovado em 28 de Maio de 2018.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TRANSDISCIPLINARIDADE: MAPEAMENTO DE PESQUISAS RECENTES

Jean Paixão de Oliveira
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
jan26oliveira@hotmail.com

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
eurivalda@uesc.br

Zulma Elizabete de Freitas Madruga
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
betefreitas.m@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa, que teve como objetivo analisar como se apresentam pesquisas que relacionam o ensino de matemática com a transdisciplinaridade. Como abordagem metodológica utilizou-se os procedimentos do Mapeamento na Pesquisa Educacional. Os dados foram constituídos a partir da seleção de quatro teses e duas dissertações publicadas no banco de dados da CAPES. Para a análise, estabelecemos seis categorias: a) referenciais teóricos da pesquisa; b) problemas investigados e interesses de pesquisa; c) metodologias utilizadas; d) principais resultados e contribuições para o avanço do tema na área; e e) perspectivas de continuidade do estudo. Os resultados permitiram identificar aproximações teóricas e metodológicas entre os trabalhos analisados e se evidenciou convergência no que se refere aos estudos acerca da Transdisciplinaridade. Além disso, notou-se que as pesquisas apontaram criação de caderno de questões ou sequências de ensino como possibilidade de ensinar matemática por meio da Transdisciplinaridade.
Palavras-chave: Transdiciplinaridade; Ensino de Matemática; Mapeamento de Pesquisa.

Abstract

This article presents results of a research, whose objective was to analyze how researches are presented that relate the teaching of mathematics with transdisciplinarity. As a methodological approach, the Mapping in Educational Research procedures were used. The data were constituted from the selection of four theses and two dissertations published in the CAPES database. For the analysis, we established six categories: a) theoretical references of the research; b) investigated problems and research interests; c) methodologies used; d) main results and contributions for the advancement of the theme in the area; and e) perspectives of continuity of the study. The results allowed to identify theoretical and methodological approaches between the analyzed works and convergence evidenced with respect to the studies about Transdisciplinarity. In addition, it was noticed that the researches pointed to the creation of a notebook of questions or sequences of teaching as a possibility to teach mathematics through Transdisciplinarity.
Keywords: Transdiciplinarity; Mathematics Teaching; Research Mapping.

INTRODUÇÃO

Pensar em uma educação na perspectiva Transdisciplinar[1] é compreender que a fragmentação do saber e o privilégio por uma didática disciplinar limita o entendimento da realidade para o estudante, não possibilitando ao mesmo o reconhecimento de problemas sociais que surgem diariamente. Para constituir essa perspectiva Transdisciplinar na sala de aula, evidencia-se a necessidade de se buscar metodologias de ensino que venham romper com práticas disciplinares que fragmentam o saber, a exemplo: a didática disciplinar.

Faz-se importante trabalhar nas aulas de Matemática com diversas metodologias de ensino, pois se o professor abordar conteúdos em suas aulas com diferentes metodologias, possibilitará aos estudantes, diferentes formas de aprendizagens (OLIVEIRA; SILVA, 2017). Com isso, aponta-se a Transdisciplinaridade como uma possibilidade metodológica para o ensino de Matemática. Pois ela possibilita uma aproximação entre o social, 'o cognitivo', 'o emocional', os conteúdos disciplinares e as diferentes áreas do saber.

Nesse sentido, a Transdisciplinaridade apresenta-se, como uma possibilidade metodológica de ensino e aprendizagem de Matemática. Considera-se pertinente que o universo de pesquisas educacionais embase esse fazer na sala de aula. Com isso, esta pesquisa tem o objetivo analisar como se apresentam pesquisas que relacionam o ensino de matemática com a transdisciplinaridade.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Diante do cenário educacional e dos currículos escolares formados por disciplinas isoladas, falar em Transdisciplinaridade, é pensar uma educação para o futuro, pautada não mais no modelo atual (definição, exemplos e exercícios).

Nesse sentido, a Transdisciplinaridade vem ganhando destaque desde 1994 com a publicação da "Carta da Transdisciplinaridade", elaborada no primeiro "Congresso Mundial da Transdisciplinaridade", tendo como participantes do comitê de redação Lima de Freitas, Edgar Morin, Basarab Nicolescu.

Para esses autores, a "Transdisciplinaridade não constitui uma nova filosofia, nem uma nova metafísica, nem uma ciência das ciências e muito menos uma nova

---

[1] Para Nicolescu (1999, p. 54) a "transdisciplinaridade é aquilo que transcende as disciplinas, que está *entre*, *através* e *além* das disciplinas". Iremos aprofundar essa discussão no quadro teórico.

postura de religião", artigo 7 da Carta da Transdisciplinaridade (UNESCO, 1994, p. 2). Isso fica evidente ao se pensar a Transdisciplinaridade como o todo e em suas particularidades, o diálogo entre sujeitos e sociedade. A mesma não se configura uma nova ciência, pois se fosse, ela estaria com suas discussões fragmentadas em "caixinhas do conhecimento", contrapondo o princípio transdisciplinar.

Para Patrick (2013, p. 83) Transdisciplinaridade "é uma epistemologia que se integra ao objeto e aos objetivos científicos e com eles se articulam, desembocando em um além das disciplinas científicas, abrindo o campo do conhecimento aos saberes não acadêmico e ao autoconhecimento".

Na perspectiva de Nicolescu (1999, p. 54) a "Transdisciplinaridade é aquilo que transcende as disciplinas, que está *entre*, *através* e *além* das disciplinas". A própria etimologia da palavra trans-disciplinar ('trans' aquilo que atravessa os limites) já nos revela que é algo que ultrapassa o disciplinar. Nesse sentido, ao conceber a Transdisciplinaridade, se está fugindo do paradigma tradicional e do individualismo. Moraes e Navas (2015, p. 39) afirmam que:

> [...] a Transdisciplinaridade implica uma nova fenomenologia complexa do conhecimento humano e confirma o caráter indissociável entre as experiências vividas e o operar das inteligências e das linguagens. Pressupõe também que tanto o conhecimento como a aprendizagem implicam a existência de processos interdependentes, constituídos por uma tessitura funcional em rede, envolvendo aspectos interativos, recursivos, dialógicos, construtivos hologramáticos, assim como socioafetivos, culturais, emergentes e transcendentes, que influenciam nosso sentir/pensar/agir.

Com isso, percebe-se que Patrick (2013), assim como Moraes e Navas (2015) complementam a ideia de Nicolescu (1999) do que vem ser a Transdisciplinaridade, sendo aquilo que está além das disciplinas e rompe o projeto disciplinar, tanto em questões acadêmicas quantos em questões afetivas, sociais e culturais.

Para D' Ambrosio (1997), "a essência da Transdisciplinaridade repousa sobre uma atitude de respeito mútuo e humildade em relação a mitos, religião e conhecimento, rejeitando qualquer tipo de arrogância e prepotência". Sobre isso, D'Ambrosio (1997) afirma que:

> Eliminar a arrogância, a inveja e a prepotência, adotando em seu lugar o respeito, a solidariedade, a cooperação, é o objetivo maior da Transdisciplinaridade. Nossa missão é nada mais do que propor um pacto moral entre todas as pessoas interessadas numa nova perspectiva de futuro para a humanidade. A base dessa perspectiva é a identificação do muito que pode ser ainda transformado. (p. 12).

Com essa perspectiva, os precursores da Transdisciplinaridade sinalizam certa preocupação com o modelo de educação usado na maioria das escolas. Prevalecendo, no sistema atual, uma fragmentação do conhecimento e uma tendência a um projeto disciplinar, que não consegue romper e transcender as fronteiras das disciplinas. Com a Transdisciplinaridade, o conhecimento fragmentado dificilmente poderá dar a seus detentores a capacidade de reconhecer e enfrentar as novas situações que emergem diariamente. Acredita-se que o ensino em uma perspectiva disciplinar não está preocupado com uma formação voltada as dimensões planetárias, criativas, cognitivas, corporais e políticas.

Comunga-se com as ideias de Morin (2000) e se entende que trabalhar em uma perspectiva transdisciplinar nas escolas, é praticar uma ética *da* e *para* a vida, é praticar atividades que desenvolvam as dimensões corporais, emocionais e cognitivas dos alunos, é pensar a vida no planeta e possibilitar a criatividade. É pensar os problemas sociais em nível local e global.

Na busca pelo rompimento da fragmentação do conhecimento e por uma educação que vise eliminar a arrogância disciplinar (D'AMBROSIO, 1997), buscar uma educação multicultural é uma possível direção para o processo educativo frente ao mundo globalizado. Esse novo modelo de pensamento e de expressão (multicultural) irá resultar uma dinâmica de encontros culturais – uma educação multicultural (D' AMBROSIO, 1997).

Pensar em uma educação na perspectiva multicultural é também falar de uma visão voltada ao campo do Programa Etnotatemática desenvolvido por Ubiratan D' Ambrosio. De acordo com o autor o Programa Etnomatemática é:

> [...] um programa de pesquisa em história e filosofia da Matemática, com implicações pedagógicas, que se situa num quadro muito amplo. Seu objetivo maior é dar sentido a modos de saber e de fazer das várias culturas e reconhecer como e por que grupos de indivíduos, organizados como famílias, comunidades, profissões, tribos, nações e povos, executam suas práticas de natureza Matemática, tais como contar, medir, comparar, classificar. A palavra etnomatemática, como eu a concebo, é composta de três raízes: etno, e por etno entendo os diversos ambientes (o social, o cultural, a natureza, e todo mais); matema significando explicar, entender, ensinar, lidar com; tica, que lembra a palavra grega tecné, que se refere a artes, técnicas, maneiras (D'AMBROSIO, 2008, p. 1).

Nesse sentido, esse Programa busca implicações pedagógicas para dar sentidos a modos, culturas e saberes de um povo. Essa mistura de ações e possibilidades de interlocução das realidades culturais buscam romper os paradigmas disciplinares (definição, exemplo e exercício) e busca promover uma educação que vai além dos conteúdos disciplinares, uma educação que busca trabalhar o cognitivo e o afetivo, frente as experiências, os saberes e as culturas.

PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

O presente artigo é de abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Para alcançar o objetivo utilizou-se o mapeamento como princípio metodológico,

> Trata-se de um conjunto de ações que começa com a identificação dos entes ou dados envolvidos com o problema a ser pesquisado, para, a seguir, levantar, classificar e organizar tais dados de forma a tornarem mais aparentes as questões a serem avaliadas, reconhecer padrões, evidências, traços comuns ou peculiares, ou ainda características indicadoras de relações genéricas, tendo como referência o espaço geográfico, o tempo, a história, a cultura, os valores, as crenças e as ideias dos entes envolvidos. (BIEMBENGUT, 2008, p. 74).

Nesse sentido, percebe-se que o mapeamento visa possibilitar a formação de uma imagem da realidade, delimitado por meio de um espaço geográfico, tempo e história.

Para coleta de dados, ou seja, busca de pesquisas que relacionam a matemática com a transdisciplinaridade, optou-se pelo repositório ‘banco de teses e dissertações da CAPES[2]’. Nesta base de dados, realizou-se uma busca de pesquisa recentes, entre os anos de 2007 a 2017.

Iniciou-se o estudo utilizando o termo ‘Transdisciplinaridade’, nessa pesquisa, foram encontrados 744 trabalhos. No intuito de filtrar essa busca, delimitou-se os últimos dez anos, assim, totalizaram 531 trabalhos relacionados. Nesse filtro, os trabalhos contemplam as diferentes áreas do conhecimento, sendo assim, aplicou-se um delineamento na área de ciências exatas e da terra e na área multidisciplinar, com isso, permaneceram 122 trabalhos.

Visto que a ciências exatas e da terra contempla diferentes áreas, optou-se em realizar um novo filtro por área de conhecimento no qual foram selecionadas as áreas: ‘ensino’, ‘ensino de Ciências e Matemática’ e ‘Interdisciplinar’, com isso, totalizaram

[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

63 trabalhos a serem analisados. Desses, percebeu-se que outras áreas do conhecimento estavam envolvidas, visto que, a área de ensino e a interdisciplinaridade davam margens para outras, optou-se por aplicar um novo filtro relacionado a: 'educação Matemática', 'ensino de Ciências e Matemática', 'ensino e aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosóficos científicos', 'ensino e aprendizagem de ciências e Matemática', esse filtro resultou 24 pesquisas.

Apresenta-se a seguir o Quadro 1, onde constam as pesquisas encontradas após o último filtro. Esse quadro foi organizado na seguinte a ordem: 1) teses e dissertação; 2) ordem que os trabalhos foram encontrados no portal da CAPES.

Quadro 1 – Pesquisas encontradas no banco de teses e dissertações da CAPES após o filtro da área de concentração

T/S	Título
T1[3]	CUNHA, A. C.; **A contribuição da Etnomatemática para a manutenção e dinamização da cultura Guarani e Kaiowá na formação inicial de professores indígenas**. 2016. 142 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.
T2	SILVA, J. A. P. da. **O renascimento da relação entre a Arte e a Ciência:** discussões e possibilidades a partir do codex entre Galileo e Cigoli no século XVII. 2013 503 f. Tese (Doutorado em Educação Para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.
T3	PASSOS, C. C. M. **A Transdisciplinaridade e o ensino da Matemática neste contexto no ensino básico:** uma inovação metodológica. 2013. 290 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.
T4	ROCHA, M. V. **Uma contribuição à educação gráfica baseada na teoria da cognição corporificada.** 2016. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.
T5	SOUZA, R. B. **Fatores sócio-político-culturais na formação do professor de Matemática:** análise em dois contextos de formação. 2015. 245 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.
T6	COSTA, L. F. M. **Vivências autoformativas no ensino de Matemática:** vida e formação em escolas ribeirinhas. 2015. 179 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal Do Pará, Belém, 2015.
T7	LIBERAL, SILVIO DE. **A aritmética como núcleo da aula de comércio em Portugal e no Brasil: um estudo histórico-filosófico sob o olhar da etnomatemática e da transdisciplinaridade**' 31/03/2017 149 f. Doutorado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, São Paulo Biblioteca Depositária: UNIAN
T8	JUNIOR, FELICIO GUILARDI. **DOCÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR – a construção da identidade docente em um curso de formação por área do conhecimento: Ciências Naturais e Matemática**' 07/03/2017 163 f. Doutorado em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - UFMT - UFPA - UEA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, Cuiabá Biblioteca Depositária: UFMT - UEA – UFPA.
D1	PAIVA, M. F.; **A Matemática no Ensino Fundamental II:** utilizando conceitos da Astronomia como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.
D2	PASQUALI, S. **Projetos criativos ecoformadores:** uma proposta de ensino de ciências para o estudo da alimentação saudável. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino De Ciências Naturais E Matemática) - Universidade Regional De Blumenau, Blumenau, 2015.
D3	RIBEIRO, K. K. **Cineclube na escola:** uma proposta de alfabetização científica na perspectiva CTSA analisada à luz da pedagogia da complexidade. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Em Ciências e Matemática) Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.
D4	MULINE, L.S. **A prática pedagógica em educação ambiental de professores das séries iniciais de uma escola do município da Serra-ES**: um estudo crítico-reflexivo. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2013.
D5	FACHINI, F. **Ecoformação de professores da educação básica no Programa Novos Talentos da CAPES**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Regional De Blumenau, Blumenau. 2014.

[3] Utiliza-se a letra "T" para teses e "D" para dissertações.

D6	GOMES, A. G. **Museu como espaço educativo não formal de construção de conhecimento científico:** usos e práticas de ensino no sítio de Anchieta-Espírito Santo Vitória 2013. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Em Ciências e Matemática) -Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.
D7	FREITAS, C. S. S.; **As trilhas ecológicas como proposta educativa em espaços educativos não formais**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
D8	FERREIRA, O. R.; **CTS-Astro Astronomia no Enfoque da Ciência, Tecnologia e Sociedade e Estudo de Caso em Educação a Distância**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.
D9	SILVA, C. A. N. **Os projetos de investigação nas aulas de matemática em escolas ribeirinhas na Ilha de Cotijuba**. 2013. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
D10	BARBOSA, L. M. B.; **Projetos transdisciplinares:** uma metodologia para ensinar e aprender na educação básica. 2014. 184 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - Instituição de Ensino: Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, São Paulo, 2014.
D11	ALMEIDA, R. C. de. **Clube de Ciências no ensino Médio público para alfabetização científica:** aspectos pedagógicos à luz da pedagogia da práxis e do movimento CTSA'. 2014 204 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, Vitória, 2014.
D12	HIRANAKA, R. A. B. **A abordagem interdisciplinar nos livros de Ciências do Ensino Fundamental I**' 2015. 141 f. Dissertação. (Mestrado em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
D13	PUKALL, JEANE PITZ. **"(ECO)FORMAÇÃO DE PROFESSORES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: uma experiência a partir de Projetos Criativos Ecoformadores**' 10/02/2017 160 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática Instituição de Ensino: Universidade regional de Blumenau, Blumenau Biblioteca Depositária: FURB.
D14	ANTOS, Eliane de Fatima Prim. **Projetos criativos ecoformadores: contribuições para o processo de alfabetização no 1º ano do ensino fundamental**' 15/05/2017 217 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU, Blumenau Biblioteca Depositária: FURB.
D15	VAL, MAURO LIMA DO. **EDUCAÇÃO AMBIENTAL E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS**' 11/05/2017 80 f. Mestrado em ENSINO DE CIÊNCIAS Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL, São Paulo Biblioteca Depositária: Haddock Lobo.
D16	DARDOT, Jean Paul. **O ENSINO DO PENSAMENTO SISTÊMICO: uma proposta para as licenciaturas em física, matemática, biologia e geografia**' 22/12/2017 278 f. Mestrado Profissional em ENSINO Instituição de Ensino: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte Biblioteca Depositária: PUC Minas.

Fonte: Resultado do levantamento feito no Banco de teses CAPES (2018).

Conforme o Quadro 1, foram encontradas 24 pesquisas que versam sobre Transdisciplinaridade e o ensino de Ciências e Matemática. Como o objetivo deste estudo é analisar a relação entre Transdisciplinaridade e o ensino de Matemática, realizou-se uma análise dos títulos e dos resumos, buscando excluir os trabalhos que versam sobre o ensino de ciências assim como os que não possuem quadro teórico referente à transdisciplinaridade. Além disso, a pesquisa D10 foi excluída por não estar disponível na íntegra, não proporcionando assim uma análise detalhada do estudo. Assim, foram analisados sete trabalhos, sendo cinco teses e duas dissertações os quais compuseram o *corpus* desta pesquisa, como mostra o Quadro 2.

Quadro 2 – Trabalhos encontrados no banco de teses e dissertações da CAPES após a leitura do resumo

T/D	**Titulo**
T3	A Transdisciplinaridade e o ensino da Matemática neste contexto no ensino básico: uma inovação metodológica
T4	Uma contribuição à educação gráfica baseada na teoria da cognição corporificada
T5	Fatores sócio-político-culturais na formação do professor de Matemática: análise em dois contextos de formação
T6	Vivências autoformativas no ensino de Matemática: vida e formação em escolas ribeirinhas
T7	A aritmética como núcleo da aula de comércio em Portugal e no Brasil: um estudo histórico-filosófico sob o olhar da etnomatemática e da transdisciplinaridade
D1	A matemática no Ensino Fundamental II: utilizando conceitos da Astronomia como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem
D9	Os projetos de investigação nas aulas de Matemática em escolas ribeirinhas na Ilha de Cotijuba

Fonte: Resultado do levantamento feito no Banco de teses CAPES (2018).

Para analisar como a Transdisciplinaridade se relaciona com o ensino de Matemática e as contribuições dessas pesquisas para a área, foram estabelecidas de acordo com Madruga e Breda (2017), cinco categorias de análise para estudo, definidas previamente: a) referenciais teóricos da pesquisa; b) problemas investigados/interesses de pesquisa; c) metodologias utilizadas; d) principais resultados e contribuições para o avanço do tema na área e perspectivas de continuidade do estudo.

Com objetivo de tecer considerações sobre as teses e dissertações selecionadas elaborou-se um estudo de cada pesquisa, buscando traçar as aproximações existentes entre elas, utilizando as categorias estabelecidas *a priori*.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O referencial teórico das pesquisas selecionadas

Nas teses e dissertações pesquisadas, a intenção foi analisar como a Transdisciplinaridade se apresenta no ensino de Matemática, para isso, foram feitas leituras minuciosas dos marcos teóricos dos trabalhos encontrados. Verificou-se que os estudos acerca da Transdisciplinaridade, geralmente são utilizados para fundamentar a parte empírica dos estudos, e para explicar as discussões na análise dos dados. Nos trabalhos T6, T5, T3 e D1 os autores abordam a Transdiciplinaridade na perspectiva de Nicolescu (1999) e a definem com tudo o que está entre, através e além das disciplinas. O trabalho T7 relaciona a transdisciplinaridade com a Etnomatématica na perspectiva teórica de D' Ambrosio, no intuito de compreender o percurso histórico-filosófico de investigações interculturais e interdisciplinares. T3 aborda a Transdisciplinaridade segundo Gadotti e Nicolescu, o quadro teórico deste trabalho se difere dos demais, pois o mesmo traz uma abordagem da criação do conceito, desde a fase Disciplinar até a Transdisciplinar.

Destaca-se que a perspectiva teórica elencada por Edgar Morin esteve presente nos seguintes trabalhos: T6, T5 e T3. A perspectiva teórica de Ubiratan D'Ambrosio, foi a mais frequente nas pesquisas, sendo basilares nos estudos desenvolvidos em: T6, T7, D1, T3 e D9. Observou-se que outros autores forneceram fundamentações teóricas para as pesquisas, a exemplo de: Paulo Freire em T6, Nicolescu em D9, T3 e Fazenda em T3. Outros autores com David Mora, Gelsa Knijinik, Alan Bishop e Skovsmose fizeram parte do quadro teórico de alguns desses estudos. Os autores foram citados tanto para se referir a Transdisciplinaridade quanto ao Programa Etnomatemática.

Os problemas investigados e interesses de pesquisa

Nas teses e dissertações analisadas as inquietações são expressas na forma de problemas de pesquisa, o que evidenciou que tais pesquisas partiram de um problema ou questionamento. Para Bicudo (2005, p. 08), pesquisar significa "ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando, suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais [...]". A análise das questões norteadoras permitiu inferir o foco dos autores em duas perspectivas diferentes: a formação inicial ou continuada dos professores e a elaboração de projetos e caderno de atividades em uma proposta Transdisciplinar.

Em relação às teses e dissertações no que tange à formação do professor, fica evidente esse foco nos trabalhos T3, T5 e T6. Como: "Quais são as potencialidades da formação continuada de professores, quando assumidas as dimensões sócio-político-culturais como foco de discussões, sob um olhar do Programa Etnomatemática?" Questão em T5; "Como o professor de Matemática poderia atuar no contexto da Transdisciplinaridade?" Questão em T3; "Em que termos os processos de formação continuada de professores que ensinam Matemática podem viabilizar um ensino que considere, além da ciência, o contexto, a experiência, o conhecimento produzido e as formas vigentes de ensinar e aprender em comunidades ribeirinhas como elementos inerentes à formação de um sujeito local e global simultaneamente?" Questão em (T6).

No que se refere aos estudos voltados à intervenção, seja por meio de elaboração de projetos e caderno de atividades em uma proposta Transdisciplinar tem-se os seguintes estudos: D1, D9 e T4. Esses estudos tiverem suas perguntas norteadoras voltadas a analisar a potencialidade dos projetos ou cadernos de atividades: “Ao avaliar o Caderno que apresenta uma proposta transdisciplinar, quais potencialidades os participantes identificaram que validam, ou não, sua indicação para ser adotada em uma disciplina de Educação Gráfica, ministrada em um segundo semestre do curso de Engenharia Civil?” (T4); “Como um estudo integrado de Matemática e Astronomia pode contribuir na construção dos conhecimentos de Matemática de modo que possibilite um melhor entendimento do mundo aos estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental?” (D1); e, “Que possibilidades de transformação uma ação educacional-escolar de caráter transdisciplinar, construída a partir de projetos de investigação acerca da realidade sociocultural dos estudantes-moradores de uma comunidade ribeirinha traz para a formação escolar desses estudantes, bem como para revitalização de conhecimentos e práticas culturais próprios da comunidade?” (D9).

A pesquisa T7 apresentou uma investigação histórico-filosófica, caracterizando como bibliográfica, onde apresentou o seguinte questionamento: “Quais foram as contribuições da Aula de Comércio, criada em 1759, no Período Pombalino, para o ensino da matemática em território lusitano e brasileiro, tendo a Aritmética como núcleo?” Questão em T7. Percebeu-se neste caso uma pesquisa documental com um viés voltado para um período histórico específico.

Todas as pesquisas, exceto T7, tiveram como objetivo analisar as reflexões dos sujeitos envolvidos promovendo o pensar em uma atitude de respeito mútuo e de humildade em relação à mitos, religião e conhecimento, rejeitando qualquer tipo de arrogância disciplinar, buscando uma valorização da cultura local e global.

Metodologia utilizada nas pesquisas

Observou-se em todas as teses e dissertações a abordagem qualitativa da pesquisa, ressalta-se aqui que na área da Educação Matemática é comum a utilização deste tipo de abordagem.

A pesquisa qualitativa permite visualizar a presença das características apresentadas por Bogdan e Biklen (1994) a saber: a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produto; tendem a analisar seus dados de forma indutiva; os dados coletados são predominantes descritivos; o "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. Dessa forma, os autores utilizaram em suas pesquisas a abordagem qualitativa, considerando todas, ou algumas, das características definidas pelos autores Bogdan e Biklen (1994).

No que tange aos sujeitos da pesquisa, estes foram escolhidos de forma intencional, ou seja, levando em considerações o objeto de estudo. Em alguns estudos, os sujeitos foram os professores (T6, T5 e T3) e nos demais foram os estudantes (T1, T4, D1 e D9). Na maioria dos casos o pesquisador não fez da escola o seu espaço de trabalho, como ambiente de pesquisa, exceto em D1.

Em relação aos instrumentos de produção e coleta de dados, percebeu-se que os mesmos são adequados para os estudos qualitativos realizados. T7 foi a única na qual os instrumentos de coletas de dados foram exclusivamente as fontes documentais, pois tratou-se de uma pesquisa bibliográfica-documental, como assume o autor, tendo como referência materiais publicados, tais como livros, artigos, periódicos e internet, e materiais que ainda não haviam passado por tratamento analítico.

A entrevista aparece na maioria dos trabalhos analisados: T3, T4, T5 e T6. Outra técnica de produção e coleta de dados utilizada foi a observação, essa foi executada em: T1, T5, T6 e D9. Em D1 foi utilizado uma intervenção de ensino.

Na pesquisa qualitativa a entrevista (semiestruturada ou não) é uma fonte eficaz de produção e coleta de dados. Para Fiorentini e Lorenzato (2006) a entrevista semiestruturada possibilita o aprofundamento de fenômenos ou questões específicas, por meio de um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo ser alterada a ordem ou incluídas novas questões que não estavam previstas inicialmente. De acordo com Charmaz (2009) por meio da entrevista, é possível solicitar mais detalhes de uma determinada fala, questionar o participante sobre as suas ideias e ações, voltar a um ponto anterior sempre que necessário e reformular uma ideia emitida pelo participante para checar a sua precisão.

No que tange a observação essa se constitui como uma fonte eficaz de coleta de dados, pois "permite que o observador chegue mais perto da perspectiva dos sujeitos, na medida em que o observador acompanha as experiências diárias dos participantes e o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26).

Das sete pesquisas analisadas, quatro delas adotaram a entrevista como recurso para a coleta de dados e três utilizaram da observação. O estudo em T6 utilizou-se das duas técnicas. Os estudos em T3 e T5 adotaram o diário de campo com instrumento para coleta de dados, e T7 utilizou documentos bibliográficos como fonte dos dados.

Contribuições da Transdisciplinaridade para a área da Educação Matemática e perspectivas de continuidade do estudo

A análise aponta que a utilização da metodologia Transdisciplinar possibilita um ensino com maior compreensão em uma perspectiva local e global, despertando consciência planetária e harmônica para com o outro e o meio ambiente. Além disso, aponta articulações entre as diversas áreas do saber; favorece a prática interdisciplinar e permite experiências envolvendo situações externas ao ambiente escolar; potencializa o desenvolvimento do pensamento matemático e a capacidade de intervir na realidade dos sujeitos envolvidos.

As pesquisas T3, T5 e T6 apresentam convergências, principalmente no que tange à temática central: formação do professor de Matemática. As três apresentam um fundamentação teórica baseada em Nicolescu (1999) e os sujeitos de pesquisa, em todos os casos mencionados, foram professores.

Para T3, a sociedade e a família, como um micro organismo dessa sociedade, estão delegando para a instituição escolar o seu papel de formador e informador de seus filhos. Cabendo somente a escola de Ensino Básico formar cidadãos, o que exige da mesma uma ação educativa revestida, sobretudo, de atividades que utilizem a metodologia transdisciplinar, o que vai permitir novas formas de cooperação no caminho de uma policompetência. Isso exige o abandono de posições acadêmicas prepotentes, unidirecionais, restritivas, primitivas e impeditivas de aberturas novas, de novos olhares.

Em T5, as respostas analisadas revelam, que após terem cursado as disciplinas, os professores em formação apresentam uma ruptura de paradigmas, percebendo que a formação transdisciplinar pode permitir também ultrapassar as limitações da formação disciplinar, para melhor saber responder às necessidades reais da formação de um cidadão.

Corroborando com essas constribuições, os autores de T6 apontam que a formação continuada se realiza de modo reflexivo e dialógico, situado no contexto onde a ação docente acontece. Além disso, alarga as possibilidades de fortalecimento de relações com o saber matemático viabilizando sua corporificação em ações didáticas, possibilitando o desenvolvimento de práticas transdisciplinares e proporcionando uma autoformação ao professor formador.

No caso D1, as tarefas realizadas evidenciam que a Transdisciplinaridade e a interdisciplinaridade possibilitam encontrar respostas para a compreensão de fenômenos naturais e a tomada de atitudes mais responsáveis e democráticas no mundo em que vivemos. Apontou, também, que os alunos participantes, tornaram-se cidadãos críticos e reflexivos, conscientes da necessidade de cuidar do planeta Terra.

D9, evidenciou que os projetos investigativos de caráter transdisciplinar possibilitam o respeito aos estudantes como sujeitos autoprodutores de conhecimento, tendo como consequência a participação ativa dos educandos em seu processo de aprendizagem, além do mais, dão visibilidade, no currículo escolar, aos saberes da tradição "colocando-os em interlocução com os saberes legitimados em nossa sociedade como os saberes científicos" (KNIJNIK, 2001, p. 25), estabelecendo relações profícuas e articulações mútuas entre o saber matemático escolar e os saberes da tradição ribeirinha na Comunidade do Poção, em Cotijuba – PA.

Para T4, os resultados apontaram que o Caderno[4], após as alterações que contemplaram as melhorias sugeridas pelos participantes da pesquisa, tem potencial para ser considerado nas disciplinas iniciais de Educação Gráfica no curso de Engenharia Civil.

Em T7 o autor apresenta algumas contribuições da Aula de Comércio para o ensino da matemática em território lusitano e brasileiro, considerando a Aritmética como núcleo. O autor da pesquisa T7 apresenta a ideias transdisciplinares, afirma que o permitiram compreender o "percurso de investigações interdisciplinares e interculturais, tendo como ponto de partida o estudo da evolução histórica dos acontecimentos e da filosofia que os sustenta" (p. 130). O estudo encontrou sustentação também na Etnomatemática, pois valoriza a cultura, a contextualização e a articulação de informações obtidas por meio de diferentes fontes, segundo o autor, a Etnomatemática possui, além de um caráter antropológico, uma essência política.

De um modo geral, as pesquisas analisadas apontaram que se faz necessário pensar cada vez mais em práticas transdisciplinares, tendo em vista que a didática disciplinar sugere indicativos de não satisfazer as inquietações dos estudantes.

[4] Caderno com tarefas sobre educação gráfica, objetivando discutir alguns elementos da arquitetura Islâmica.

No tocante às pretensões futuras das pesquisas analisadas, Madruga e Breda (2017) afirmam que um pesquisador, ao indicar perspectiva de continuidade de seus estudos significa que o objeto de estudo não se esgotou em uma investigação apenas, ou dela, suscitaram outros aspectos merecedores de pesquisa. O presente mapeamento evidenciou que dentre os estudos analisados, apenas T5 aponta perspectiva de continuidade por meio dos seguintes questionamentos: existe "conhecimento base" a ser considerado na formação do professor? Como conduzir uma formação inicial de professores que articulem fatores transdisciplinar? Para a autora, responder tais questionamentos contribui para o desenvolvimento desse campo de pesquisa.

Alguns estudos, como T7 por exemplo, afirmam que o tema não foi esgotado, e que outros pesquisadores poderiam continuar, com foco para outro viés. Perspectivas como colocadas em T7, apenas estimulam outras pesquisas, mas, além de não especificar qual "lente" poderia ser utilizada, não expõe o interesse do pesquisador em continuar seu estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar como se apresentam pesquisas que relacionam o ensino de matemática com a transdisciplinaridade. Para atingir tal objetivo utilizou-se do Mapeamento na Pesquisa Educacional (BIEMBENGUT, 2008). Foram selecionados e estudados cinco teses e duas dissertações, disponíveis no portal da CAPES.

Percebeu-se que as pesquisas apresentam convergências no que tange a definição de Transdisciplinaridade, como sendo "tudo aquilo que está, entre, através e além das disciplinas" (NICOLESCU, 1999). No entanto, percebeu-se que houve privilégio aos estudos do Programa Etnomatemática, idealizado pelo professor Ubiratan D' Ambrosio.

Quanto aos resultados dos estudos, evidencia-se que:

1) a Transdiciplinaridade pode ser utilizada como uma metodologia para o ensino de Matemática, indo de acordo ao que propõe Oliveira e Silva (2015);

2) a formação continuada realizada de modo reflexivo e dialógico, alarga as possibilidades de fortalecimento de relações com o saber matemático viabilizando sua corporificação em ações didáticas, possibilita o desenvolvimento de práticas transdisciplinares e proporcionando uma autoformação ao professor formador;

3) os projetos investigativos de caráter transdisciplinar possibilitam o respeito aos estudantes como sujeitos autoprodutores de conhecimento. Moraes e Navas (2015) relata que falar em Transdisciplinaridade é uma mescla complexa de sentimentos, ações, decisões é falar de vivências e experiências. Nesse sentido, temos uma convergência entre os resultados encontrados nos estudos que são relacionados a projetos investigativos e o que aponta a literatura.

Por meio da análise das teses e dissertações selecionadas, constatou-se que há poucas pesquisas que relacionam o ensino de Matemática com a metodologia Transdisciplinar. Assim, aponta-se necessário mais investigações para que a Transdisciplinaridade seja disseminada entre os professores nos diferentes níveis de escolaridades, sejam eles do Ensino Fundamental, Médio ou Superior.

Em relação às perspectivas de continuidade destaca-se a necessidade de novas pesquisas na área, com um olhar tanto para a formação do professor quanto para o aluno. Nesse sentido, sugere-se (e tem-se a intenção de realizar) estudos com construções de sequências de ensino e novas metodologias, bem como, trabalhos que foquem na formação do professor que ensinam matemática, relacionando transdisciplinaridade e etnomatemática.

REFERÊNCIAS

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. *Revista Pesquisa Qualitativa*, Rio Claro, n.1, p. 7-26. 2005.

BIEMBENGUT, M. S. *Mapeamento na Pesquisa Educacional*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K**.** *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

CHARMAZ, K. *A construção da teoria fundamentada*. Tradução Joice Elias Costa. 1ª edição. Porto Alegre: Artmed. 2009.

D’ AMBROSIO, U. *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Palas Athena, 1997.

D’ AMBROSIO, U. O Programa Etnomatemática: uma síntese. *ACTA SCIENTIAE*. Rio Grande do Sul, Universidade Luterana do Brasil. v.10, 2008.

FIORENTINI, D.; LORENZATTO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, Autores Associados, 2006.

KNIJNIK, G. Educação Matemática, exclusão social e política de conhecimento. *Bolema*, Rio Claro, UNESP, ano 14, n. 16, 2001.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MADRUGA, Z. E. F.; BREDA, A. Mapeamento de produções recentes sobre Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Revista Eletrônica de Matemática* – REMAT, Bento Gonçalves, RS, v.3, n.1, p.67-81, julho de 2017.

MORAES. M. C.; NAVAS J. M. B. *Transdisciplinaridade, Criatividade e Educação: Fundamentos* ontológicos e epistemológicos. 1ª ed. Campinas,SP: Papirus, 2015.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à educação do futuro.* São Paulo: Cortez, 2000.

NICOLESCU, B. *O manifesto da Transdisciplinaridade*. São Paulo: Triom, 1999.

OLIVEIRA, J. P; SILVA, L. A. da. Ambientes de Aprendizagem utilizados por professores de Amargosa-Ba para o ensino dos conceitos de média, moda e mediana. In: Encontro Baiano de Educação Matemática, 17, 2017, *Anais.* Alagoinhas. UNEB, 2017.

PATRICK. P. *Saúde e Transdisciplinaridade.* São Paulo: Edusp, 2013.

UNESCO. *Carta da transdiciplinaridade*. 1994. Disponível em: https://blogmanamani.files.wordpress.com/2013/08/carta-da-transdisciplinaridade.pdf Acesso em: 01 de novembro de 2016.

Submetido em 16 de Julho de 2018.
Aprovado em 19 de Setembro de 2018.

REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

FORMAÇÃO INICIAL EM PEDAGOGIA: UM ESTUDO SOBRE CONHECIMENTOS RELATIVOS À PROPORCIONALIDADE

Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
angelicafontoura@gmail.com

Alexsandro Soares Cândido
Universidade Paulista – UNIP
alexsandro.candido@pro.fecaf.com.br

Ruy César Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
rpietropaolo@gmail.com

Resumo

O propósito deste artigo é analisar como futuras pedagogas identificam situações proporcionais e não proporcionais. Trata-se de uma pesquisa qualitativa realizada em uma universidade particular da Grande São Paulo. A coleta de dados realizou-se por meio da proposição de duas situações problema apresentadas em um questionário – de caráter diagnóstico. A análise de dados fundamentou-se na investigação de Ball, Thames e Phelps e nos estudos que versam sobre o raciocínio proporcional. As respostas das participantes indicaram que a maioria delas identificou situações proporcionais, todavia não reconheceram a não proporcionalidade. Considera-se que tais limitações poderiam também comprometer outras categorias do conhecimento profissional docente.
Palavras-chave: Educação Matemática. Conhecimentos profissionais. Futuras pedagogas. Formação inicial. Raciocínio proporcional

Abstract

This paper aims to analyze how future tutors identify proportional and non-proportional situations. This is a qualitative research conducted at a private university located in Greater Sao Paulo. Data collection was made through the presentation of two problem-solving situations in a survey-type questionnaire [1]. Data analysis is supported by Ball, Thames and Phelps and on studies that discuss proportional thinking. The participants' replies showed that, in their majority, they identified proportional situations, although they did not recognize non-proportionality. Such limitations are believed to also compromise other categories of teachers' professional knowledge.
Key words: Mathematical Education. Professional knowledge. Future tutors. Initial development. Proportional Reasoning.

[1] The period makes the second hyphen unnecessary, but the semi-colon doesn't.

INTRODUÇÃO

Parece consenso a importância do papel central do professor na organização do trabalho pedagógico, e são grandes as convicções de que o ensino de qualidade está diretamente ligado à atuação desse profissional. Consideramos, assim como Paulo Freire, que a formação do professor é fundamental e permanente: "Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou é marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática" (FREIRE, 1995, p.58).

Nesse contexto, acreditamos ser a formação do professor e sobretudo a inicial, uma etapa importante no processo formativo do educador. Ela não se dá de forma espontânea e demanda, desde a formação inicial do educador que vai ensinar matemática, propostas de ações elaboradas para esse fim. Todavia, estudos como os de Mello (2000, p. 98) já discutiam em 2000 a urgência "da reformulação da teoria e prática da formação de professores no Brasil". A autora afirma que a formação inicial de professores que lecionarão disciplinas específicas na Educação Básica apresenta limitações estruturais, haja vista que, muitas vezes, tal formação não proporciona aos futuros profissionais da educação "integração permanente e contínua entre a teoria e a prática".

Ainda nesse sentido, estudos desenvolvidos por Mengali, Nacarato e Passos (2009), Nacarato (2010) e Passos (2005) demonstram que essa realidade ainda se mantém: mesmo com todos os esforços de Educadores Matemáticos, profissionais da educação e até mesmo de órgãos oficiais, a formação inicial ainda precisa ser repensada. Por essa razão, consideramos que pode se tornar relevante uma investigação que busque analisar os conhecimentos relacionados ao conteúdo, necessários aos futuros profissionais que ensinarão matemática para os anos iniciais da Educação Básica.

Com base nesses argumentos. apresentamos neste artigo a análise do conhecimento profissional docente, sobretudo o conhecimento do conteúdo comum acerca da ideia que envolve situações proporcionais ou não de 30 estudantes de um curso de pedagogia de uma universidade particular da Grande São Paulo. Para realizar esta investigação, analisamos as respostas para duas situações propostas em um questionário – de caráter diagnóstico – apresentado no início de um processo formativo.

Para relatar aqui tal pesquisa, expomos, nesta ordem, a sua relevância por meio da apresentação e da análise de indicações oficiais, resultados de avaliações externas e de investigações na área; a fundamentação teórica utilizada para analisar as informações coletadas; os procedimentos utilizados; a análise e a discussão dos dados coletados; e, finalmente, as considerações finais.

RELEVÂNCIA DA TEMÁTICA ESCOLHIDA

Julgamos ser esta pesquisa relevante, por concordarmos com Lesh, Post e Behr (1988): o raciocínio proporcional é uma forma complexa, que envolve a sensação de covariação e de comparações múltiplas, além da capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. Consideramos, assim como os autores, que esse tipo de raciocínio envolve múltiplas relações e ideias matemáticas, além de análises qualitativa e quantitativa, como inferência e previsão.

Salientamos que Post, Behr e Lesh (1995, p. 91) também sugerem, em decorrência dos resultados de sua pesquisa, que problemas envolvendo os conceitos de razão e proporção sejam introduzidos com a utilização de conhecimentos prévios dos alunos sobre multiplicação e divisão. Além disso, relatam que, para a obtenção do raciocínio proporcional, é necessário que o aluno tenha clara a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais, que compreenda a ideia de covariação.

> Para raciocinar com proporções é preciso ter a flexibilidade mental para abordar problemas por vários ângulos, e ao mesmo tempo, ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes ou “complicados” ou pelo contexto que se insere o problema [...] a pessoa precisa ser capaz de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Isso tem implicação direta no ensino. (POST; BEHR; LESH, 1995, p. 91)

Além de Lesh, Post e Behr (1988), estudos como os de Cramer, Post e Behr (1989) e Post, Behr e Lesh (1995) têm chamado a atenção, desde o final da década de 90, para a importância do raciocínio proporcional. Lesh, Post e Behr (1988) justificam essa relevância por ser este o ponto de chegada da aritmética elementar e o alicerce de estudos posteriores.

Outro argumento para justificar a pertinência deste estudo encontramos nos documentos oficiais de referência curricular, cujas orientações consideram o raciocínio proporcional uma das temáticas centrais do ensino de Matemática e sugerem que ele seja trabalhado com as crianças desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessas orientações, há indicações de sua relevância, argumentando sua utilidade, uma vez que está presente em várias situações do cotidiano e também ligado “[...] à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista" (BRASIL, 1997, p. 38).

O documento federal de orientações curriculares de Matemática – *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) – (BRASIL, 1997) destaca também a Resolução de Problemas como eixo organizador dos processos de ensino e aprendizagem da disciplina. Para os autores desse documento, a atividade matemática não pode ser considerada como um "olhar para coisas prontas e definitivas", pois eles a consideram como construção e apropriação de um conhecimento pelo estudante, do qual ele se servirá para compreender e até, quem sabe, para transformar a realidade. Assim, tal documento considera a resolução de problemas não apenas como o ponto de partida da atividade matemática, mas como um meio de proporcionar os contextos para a construção de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Ademais, Lamon (2005) nos ajuda a entender a complexidade desse tipo de raciocínio, ao apontar algumas habilidades a serem desenvolvidas: compreensão da covariação de grandezas, identificação de situações proporcionais ou não e a percepção da sua utilidade; aquisição de argumentos para justificar sua forma de pensar situações de proporcionalidade.

Além disso, é importante considerar que lecionar Matemática para os anos iniciais será uma das atribuições profissionais das estudantes de Pedagogia participantes deste estudo e, nesse campo, a resolução de problemas tem um papel fundamental. Assim, tomamos como ponto de partida a ideia de que explorar o raciocínio proporcional por meio da resolução de problemas requer do futuro professor um repertório expressivo de conhecimentos que lhe permitam interpretar situações-problema, fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favorecer algumas articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados.

Dessa forma, organizamos uma investigação com o propósito de verificar se os estudantes de um grupo do curso de Pedagogia eram capazes de reconhecer, em situações do cotidiano, se havia ou não proporcionalidade envolvida. Essa proposta se deu no início de um processo formativo que pretendeu discutir e refletir sobre o ensino do raciocínio proporcional. Assim justificamos a escolha do tema "raciocínio proporcional" e do grupo de participantes desta pesquisa, constituído de 30 futuras pedagogas e prováveis professoras da rede pública paulista.

Para elaborar o questionário e proceder à análise das informações coletadas, consideramos as categorias distintas de conhecimentos para o ensino, estabelecidas por Ball, Thames e Phelps (2008). Os autores refinaram as categorias propostas por Shulman (1986) em: conhecimento do conteúdo (comum/horizontal/especializado); conhecimento do conteúdo (e dos estudantes/e do ensino/e do currículo).

Para este estudo, nos ateremos especialmente ao *conhecimento comum do conteúdo.* Segundo os autores, o *conhecimento do conteúdo comum* permite ao professor a utilização correta de termos, representações e notações e a identificação de incorreções ou inadequações, quer em produções dos alunos, quer em materiais didáticos. Assim, procuramos identificar se as professoras participantes de nossa pesquisa possuem tal conhecimento, pois entendemos ser requisito primordial para o desenvolvimento dos demais.

Um exemplo de mobilização do *conhecimento do conteúdo comum* diz respeito à habilidade de o professor (ou futuro professor) reconhecer e resolver situações que envolvam raciocínio proporcional, sejam elas convencionais ou não. A seguir exporemos a forma como desenvolvemos nosso estudo.

Para este estudo, em especial, foi aplicado aos professores um questionário com duas questões – de caráter diagnóstico – que nos permitissem identificar como as futuras pedagogas lidam com situações de proporcionalidade e não proporcionalidade, com base nas ideias de Lamon (2005); Lesh, Post e Behr (1988); Oliveira (2009); Post, Behr e Lesh (1995); Silvestre (2012); e Silvestre e Ponte (2009).

Procuramos analisar os dados aqui destacados, por considerar que eles nos forneceriam informações sobre estratégias utilizadas pelas participantes, antes de um processo formativo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Reiteramos que participaram deste estudo 30 estudantes de um curso de pedagogia. Os dados foram coletados no primeiro encontro de um processo formativo, e, antes de ser discutido qualquer conteúdo, foi solicitado que cada participante resolvesse, individualmente, algumas situações que envolviam proporcionalidade ou não proporcionalidade.

Figura 1: Futuras Professoras respondendo ao questionário

Fonte: Acervo dos pesquisadores

As participantes deste estudo foram convidadas a participar voluntariamente do curso de formação de 20 horas. No contato inicial solicitamos que escolhessem um pseudônimo, visando garantir o anonimato de seus nomes e informações nesta investigação. Essas 30 estudantes residem na região metropolitana de São Paulo, em regiões próximas a Universidade, 5 delas possuem casa própria e as outras moram de aluguel. Elas têm idades que variam entre 18 e 50 anos. Das 30 estudantes, somente 8 possuem alguma experiência profissional na área educacional. Notamos ainda que a maioria – 60% – trabalha em lojas como atendentes e as outras 15% estão desempregadas.

Fundamentados em documentos oficiais, como os PCN (BRASIL, 1997) e em estudos como os de Post, Behr e Lesh (1995) consideramos ser necessário ao ensino do raciocínio proporcional que o futuro professor faça a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais. Nesse contexto, na primeira questão solicitamos que as participantes verificassem se havia raciocínio proporcional em situações rotineiras: elas deveriam assinalar se nas relações ali observadas havia dependência e se poderiam ser diretamente proporcionais (DP) ou não proporcionais (NP). Na segunda situação apresentada, buscamos verificar se as participantes reconheciam e resolviam situações de não proporcionalidade.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Reiteramos que a primeira questão apresentava um quadro (Quadro 1) contendo situações corriqueiras e por meio dele as alunas deveriam identificar se havia dependência entre as grandezas e se elas poderiam ser diretamente proporcionais (DP) ou não proporcionais (NP).

Quadro 1 – questão 1 do questionário preliminar

Dependência - Diretamente proporcionais (DP) ou Não Proporcionais (NP).	DP	NP
a) A quantidade de pães comprados e o preço pago por eles.		
b) A idade de uma pessoa e o número de calça que ela veste.		
c) A idade de uma pessoa e seu peso.		
d) O salário de um vendedor e a quantidade de sapatos que ele vendeu.		
e) A quantidade de ovos para uma receita de bolo e a quantidade de ovos para cinco receitas do mesmo bolo.		
f) O salário de um trabalhador e o número de irmãos que esse trabalhador tem.		
g) A nota de uma avaliação na qual todas as questões têm o mesmo valor e a quantidade de questões certas.		

Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Nas respostas apresentadas, identificamos que 28 alunas responderam corretamente, assinalando (DP) no item “a” e apenas 2 (Mandala e Moama) responderam (NP) para a primeira situação, pois, segundo percebemos, elas não reconheceram a relação proporcional entre quantidade e preço.

No item “b”, 26 participantes assinalaram (NP), enquanto 4 delas (Bynna, Carla, Hortência e Moama) assinalaram incorretamente (DP), pois para elas havia uma relação de proporcionalidade entre idade e número de calça. Já no terceiro item, detectamos que 24 futuras professoras registraram corretamente (NP) nos protocolos e 6 alunas (Bynna, Duda, Groove, Hortência, Moama e Tiana) entendiam que as grandezas idade e peso eram proporcionais, e assim registraram nos protocolos de maneira incorreta (DP). Para o item “d”, 23 participantes apontaram como resposta correta (DP) e 7 (Cami, Duda, Hortência, Pocahontas Mandala, Moama e Vitória) identificaram que salário e vendas não eram proporcionais e assinalaram (NP).Para o quinto item, 25 alunas assinalaram (DP) e as 5 restantes (Babich, Bynna, Fenix, Moama e Vitória) assinalaram (NP) para a relação entre quantidades, ou seja, não identificaram que havia uma relação de proporcionalidade envolvida. Já para o item “f” 28 das estudantes registraram (NP) e 02 (Bynna e Regina) registraram de forma errada (DP), ou seja, que o salário de um trabalhador e o número de irmãos que esse trabalhador tem era proporcional. E, por fim, no item “G” apenas 3 (Babich, Nádia e Vitória) das 30 alunas investigadas optaram por assinalar (NP), não associaram notas de uma avaliação com a quantidade de questões certas.

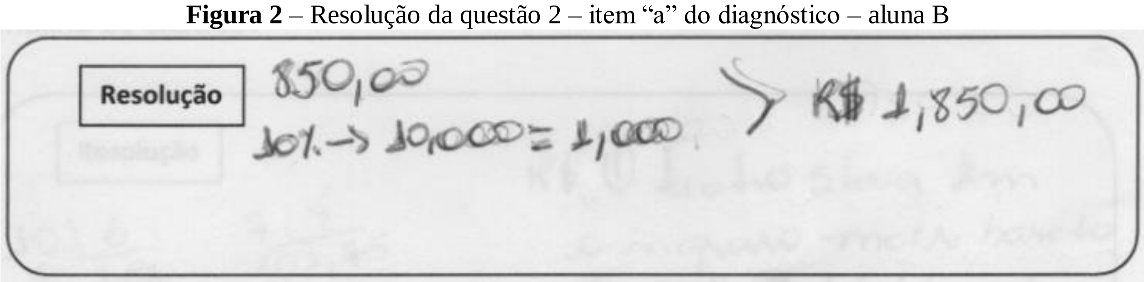
Notamos, ao analisar as respostas das participantes nessas sete perguntas objetivas, alto índice de acertos, ou seja, mais de 87% parecem identificar problemas de proporcionalidade. No entanto, percebemos equívocos de certas alunas e notamos. ainda, haver mais erros nas produções de Bynna, Hortência e Moana, o que nos levou a conjecturar que, como essas estudantes apresentam dificuldades de identificar o raciocínio proporcional na questão 1, provavelmente essas futuras professoras não reconhecem que não basta simplesmente aumentar desordenadamente as grandezas para considerá-la diretamente proporcional.

Para concluir nosso diagnóstico, precisávamos verificar se as participantes reconheciam e resolviam uma situação de não proporcionalidade. A situação apresentada foi a seguinte:

Seu Manuel é vendedor de uma lojinha de conveniência e recebe mensalmente R$ 850,00. Além de seu salário fixo, seu Manuel recebe também 10% por cada venda feita. Responda: a) Quanto o vendedor deverá receber, se vender R$10,000?; b) Essa é uma situação de proporcionalidade, por quê?

Ao analisar os registros das respostas, identificamos que 27 alunas responderam corretamente o valor que o vendedor deveria ganhar (item a). E a maioria optou por resolver a situação aritmeticamente, ou seja, calcular 10% de R$10.000,00 e adicionar esse valor aos R$850,00, referentes ao valor fixo, como apresentado no protocolo a seguir.

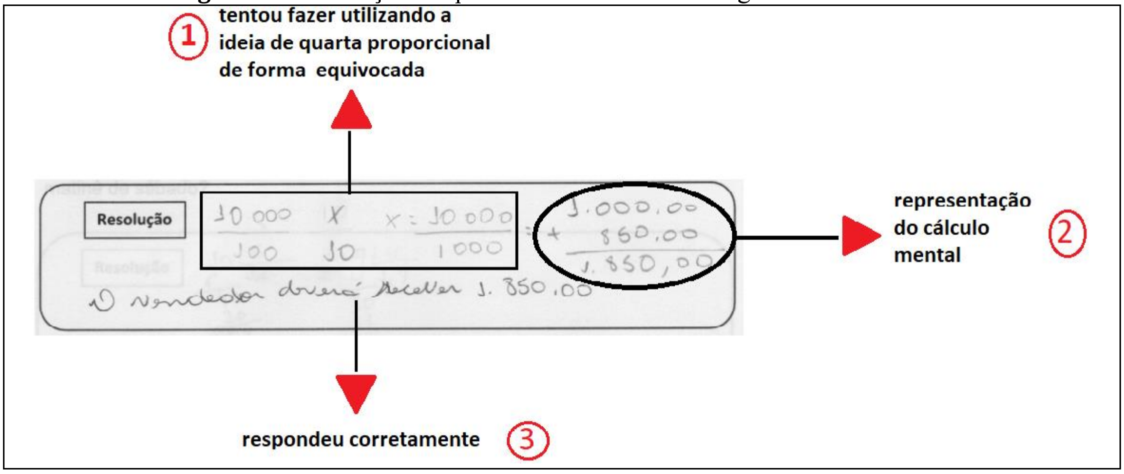
Figura 2 – Resolução da questão 2 – item “a” do diagnóstico – aluna B



Fonte: Acervo dos Pesquisadores

Notamos que, da mesma forma que a aluna B, a maioria das participantes que respondeu corretamente parecia não ter preocupação em representar com a mesma correção, do ponto de vista da matemática, suas resoluções. Dentre elas, é importante destacar as alunas que tentaram utilizar-se da quarta proporcional e não conseguiram representar corretamente o esquema de resolução. Bynna, por exemplo, encontrou o valor correto mentalmente, mas não conseguiu encontrar o valor quando se utilizou do esquema da quarta proporcional.

Figura 3 – Resolução da questão 2 – item "a" do diagnóstico – aluna B



Fonte: Acervo dos pesquisadores

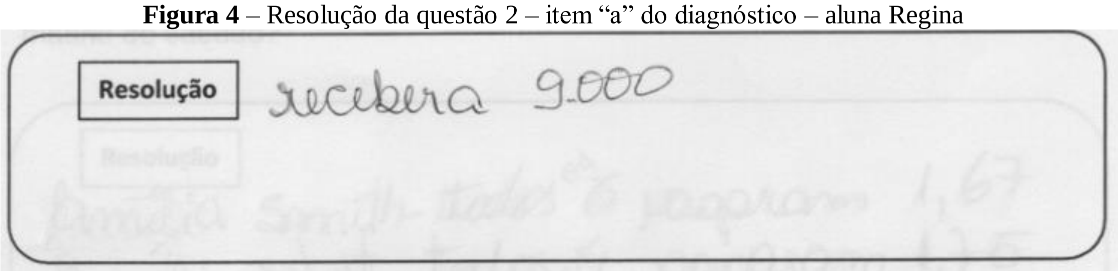
Quando questionamos a aluna sobre o esquema utilizado, ela afirmou:

> *Eu primeiro fiz de cabeça e sabia que 10% daria mil e o total seria mil oitocentos e cinquenta, mas precisava mostrar a conta. Tentei fazer por regra de três aqui* [apontando o dedo para o esquema 1], *mas me compliquei e não consegui, então escrevi a conta que fiz de cabeça* [referindo-se à representação 2] *e escrevi a resposta aqui* [apontando para 3].

Notamos que a aluna, depois de resolver aritmeticamente, tentou representar pelo esquema da quarta proporcional; todavia, parecia não compreender se tratar de duas variáveis de naturezas diferentes ao utilizar propriedades ligadas à álgebra para obter o valor da variável desconhecida por meio da aplicação do produto cruzado.

Além disso, outras duas participantes (Bynna e Regina) não identificaram a não proporcionalidade envolvida, e uma (Margarida) deixou esse item em branco. A seguir apresentamos a resposta de Regina.

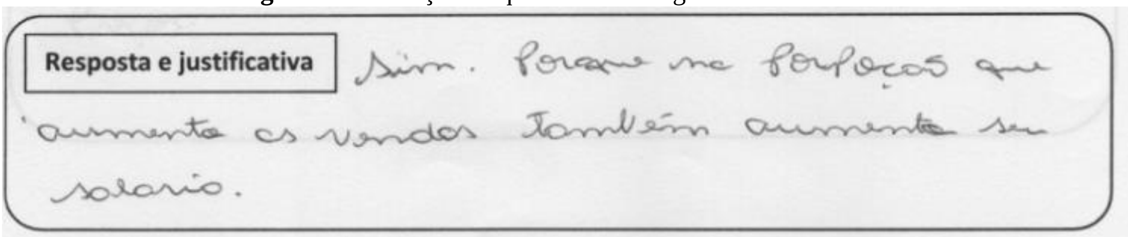
Figura 4 – Resolução da questão 2 – item "a" do diagnóstico – aluna Regina



Fonte: Acervo dos pesquisadores

Para o item “b” não houve nenhum acerto, ou seja, 27 responderam ser uma questão de proporcionalidade, como aponta a estudante B, a seguir.

Figura 5- Resolução da questão 2 do diagnóstico – aluna B



Fonte: Acervo dos Pesquisadores

Percebemos que a futura professora citada, bem como a maioria, sabe resolver aritmeticamente a questão, porém elas associaram à proporcionalidade o simples fato de as duas grandezas aumentarem. Os resultados do diagnóstico para esse item se assemelharam aos de Nunes de Costa (2016), pois, assim como os pesquisadores, identificamos as dificuldades das participantes deste estudo no reconhecimento de situações não proporcionais, ou seja, parece ser limitada sua capacidade de reconhecer como não proporcional uma relação aditiva entre as grandezas.

Tais resultados nos parecem bastante preocupantes uma vez que tanto documentos curriculares como os PCN (BRASIL, 1997), como pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem da área nos mostram da relevância desta temática para o ensino da matemática. Nesse contexto, corroboramos com as ideias de Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (2005) ao discutiram que a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais envolvem aspectos cognitivos complexos que vão além dos procedimentos de cálculo e, nesse sentido, tais conceitos tornam-se centrais quando se almeja a compreensão da Matemática.

Nesse sentido, apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008) ao analisar os resultados aqui apresentados observamos que as limitações no conhecimento comum das ideias que envolvem o conceito de proporcionalidade possivelmente compromenteriam igualmente as demais categorias de conhecimento para o ensino e, nesse contexto coe comprometeria também seu ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver o questionário preliminar, detectamos que apesar de a grande parte das futuras professoras reconhecerem algumas das situações que envolviam proporcionalidade na primeira questão foi possível detectar, no entanto, que elas tiveram dificuldades em lidar com situações não proporcionais em questões abertas. Notamos que, no geral, esse grupo apresentou limitações na tarefa de diferenciar proporcionalidade de não proporcionalidade.

Percebemos ainda que as participantes, possivelmente, teriam dificuldades em sua atividade profissional ao ensinar esse assunto, se não discutíssemos e não retomássemos essas dificuldades, pois o conhecimento comum do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) é condição necessária para o desenvolvimento das demais categorias. Com base nos resultados obtidos, entendemos que seria oportuno, para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, promover novos estudos com situações que as levassem a refletir acerca do reconhecimento de situações proporcionais e não proporcionais.

A partir dos dados aqui apresentados, planejamos um trabalho de formação inicial, levando em conta a necessidade de discutir e refletir de forma colaborativa tanto sobre a aprendizagem do tema por parte do futuro professor como sobre o seu ensino nos anos iniciais. Pretendemos alcançá-los por meio de análise de casos de ensino e vivências de diferentes estratégias e abordagens de ensino.

Em relação à formação inicial, é importante destacar que o futuro professor precisaria ir além da teoria, necessita também ter contato com situações que lhes permitam analisar melhor as dificuldades vividas seus futuros alunos, quando estes iniciam a aprendizagem da proporcionalidade ou quando se utilizam do racicínio proporcional. Todavia para que tudo isso ocorra é necessário que ele seja possuidor do conhecimento comum do conteúdo e, nesse contexto, consideramos ser de fundamental importância a compreensão desse futuro educador de quais situações representam proporcionalidade e não proporcionalidade.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov. 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. v. 03. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CRAMER, K.; POST, T.; BEHR, M. Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher*, v. 82, n. 6, p. 445-452, 1989. Disponível em: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/89_3.html. Acesso em: 10 jan. 2017.

FREIRE, Paulo. A educação na cidade. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

LAMON, S. *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005. Disponível em: <http://samples.sainsburysebooks.co.uk/9781136631863_sample_535985.pdf.> Acesso em: 10 jan. 2017.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Tradução de Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Revisão da tradução de Fátima Álvares, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Reston, VA: Lawrence Erlbaum; National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118. Disponível em: <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_8.html> Acesso em: 10 jan. 2017.

MELLO, G. N. de. Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re)visão radical. *São Paulo Perspec.* [online]. 2000, v. 14, n.1, p.98-110. ISSN 0102-8839. http://dx.doi.org/10.1590/S0102-88392000000100012.

NACARATO, A. M. A Formação Matemática das Professoras das Séries Iniciais: a escrita de si como prática de formação. *Bolema*, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 905-930, 2010.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. A. *Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprende*r. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 158 p.

OLIVEIRA, I. A. F. G. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. *Bolema*, Rio Claro, v. 22, n. 34, p. 57-80, 2009.

PASSOS, C. L. B. Que Geometria Acontece na Sala de Aula? In: MIZUKAMI, Maria da Graça N.; REALI, Aline M. M. R. P*rocessos Formativos da Docência: conteúdos e práticas*. São Carlos: EDUFSCar, 2005. P. 16-44.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

SILVESTRE, A. I. *O desenvolvimento do raciocínio proporcional:* percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade. 2012. 392 f. Tese. (Doutorado em Educação - Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

Submetido em 03 de Agosto de 2018.
Aprovado em 19 de Setembro de 2018.

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Pedro Pessoa
Instituto Federal de Pernambuco - IFPE
pedro.pessoa.mat@gmail.com

Rodrigo Gondim
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
rodrigo.gondim@ufrpe.br

Resumo

Neste pequeno texto trazemos algumas considerações gerais sobre racionalização de denominadores e provamos dois resultados gerais sobre como racionalizar denominadores algébricos. Tais resultados podem ser facilmente entendidos utilizando isomorfismos entre anéis, aqui damos demonstrações elementares, algorítmicas e efetivas. Acreditamos que esse ponto de vista pode ser compartilhado a estudantes mais interessados no ensino médio como complementação de sua formação ou como parte de um projeto de iniciação científica Jr.

Abstract

In this short text we bring some general considerations on rationalization of denominators and we prove two general results on how to rationalize algebraic denominators. Such results can be easily understood by using isomorphisms between rings, here we give elementary, algorithmic and effective demonstrations. We believe that this viewpoint can be shared with most interested students in high school as a complement to their training or as part of a Jr. scientific initiation project.

1 Introdução: Uma pequena reflexão sobre racionalização de denominadores

Todos sabemos que um número racional pode ser expresso como uma fração com numerador e denominador inteiros e coprimos, essa expressão é dita fração irredutível pois não pode ser simplificada. Infelizmente, não há um análogo para os número reais em geral. Digo em geral pois em alguns casos pode-se simplificar um número real “racionalizando seu denominador”. Do ponto de vista prático o processo tornou-se um grande êxito uma vez que seria muito difícil encontrar uma boa aproximação para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ usando uma boa aproximação de $\sqrt{2} \simeq 1,4142$ pois teríamos que fazer $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq \frac{1}{1,4142} = \frac{10000}{14142}$. Por outro lado, utilizando o famoso truque de multiplicar por $\sqrt{2}$, obtemos $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \frac{1,4142}{2} \simeq 0,7071$. Assim, entendemos a necessidade prática de se fazer a chamada racionalização de denominadores para encontrar boas aproximações de certos números irracionais, numa época em que não havia calculadoras nem computadores.

Em primeiro lugar gostaríamos de enfatizar que a nomenclatura "racionalização de denominadores" tem um problema de partida. Denominador é o termo utilizado para se referir à frações, e portanto, números racionais. Por uso comum vamos continuar utilizando-a querendo exprimir o número b em uma expressão do tipo $\frac{a}{b}$ em que ambos, a, b sejam expressões polinomiais de símbolos algébricos conhecidos, utilizando assim adições, subtrações, potências e raízes de qualquer ordem.

As mais famosas fórmulas de racionalização de denominadores se utilizavam de fatorações algébricas clássicas aplicando-as ao caso do denominador possuir uma certa raiz. Assim, temos:

(i) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

(iii) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

(iv) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

(v) $\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}$.

Claramente poderíamos introduzir uma dezena de "novas fórmulas" de racionalização utilizando fatorações menos "famosas", mas não é esse nosso intuito. Seria interessante buscar um princípio geral que regesse todas as possíveis racionalizações. Gostaríamos ainda de salientar que em todos os casos conhecidos o denominador em questão é um radical (ou soma/subtração) de radicais de expressões racionais. Tais números fazem parte de uma classe muito importante de números reais, eles são os números algébricos. Em contrapartida existem ainda, no conjunto dos números reais, números que não são algébricos, eles são chamados transcendentais. Um exemplo muito conhecido de número transcendental é o π, aqui lançamos uma pergunta:

O que significaria racionalizar a expressão $\frac{1}{\pi}$? Isso faz algum sentido?

Não existe nenhum truque extraordinário que possa ser aplicado no caso em que o denominador é um número transcendental, não faz sentido falar em racionalização de denominadores de números transcendentais. De fato, por definição, um número transcendental não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Isso impossibilita a busca de uma racionalização nesse caso. Fim.

Então nos voltamos aos números algébricos, aqueles que são raízes de equações com coeficientes inteiros, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Formalizaremos a definição dessa classe de números no texto, daremos algumas ideias intuitivas sobre como construí-los e finalmente provaremos que:

> *Se $\alpha \in \mathbb{R}^*$ é um número algébrico, então a expressão $\frac{1}{\alpha}$ pode ser racionalizada, isto é, existem números inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ tais que*
>
> $$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Provaremos ainda um resultado mais geral com o qual podemos atacar diversos problemas olímpicos como observado em [1, 4, 7]. Esse resultado pode ser facilmente entendido utilizando-se Álgebra em nível superior, mais precisamente o Teorema do Isomorfismo da teoria básica dos anéis (ver [3]). Nesse texto daremos uma demonstração elementar do resultado utilizando polinômios e sua aritmética (como em [6, 7]). Nossa demonstração é algorítmica e efetiva, durante o texto faremos vários exemplos explícitos mostrando a dificuldade computacional em alguns casos e a importância dos resultados em outros casos. A motivação do estudo do tema foi uma vasta gama de problemas de Olimpíadas e vestibulares que exigiam racionalizações não tradicionais. A fim de deixar o texto autocontido lembraremos alguns resultados clássicos sobre polinômios que muitas vezes são renegados. A teoria aqui apresentada se assemelha fortemente à aritmética dos inteiros sendo o Lema de Bézout nossa ferramenta fundamental (ver [6, 7]).

2 Outras formas de racionalizar

2.1 Um exemplo explícito

Para racionalizar o denominador de uma fração geralmente se usa uma fatoração clássica também denominada produto notável. Porém, há uma infinidade de frações cujo denominador não se adapta aos produtos notáveis. Uma situação que se encaixa neste contexto foi proposta na prova de matemática do vestibular de ingresso para a UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e para a UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco) realizado pela COVEST- COPSET (Comissão de Processos Seletivos e Treinamentos) no ano de 1999 em sua fase 2, problema 03.

Problema 2.1. Considerando $\dfrac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$, determine $41(a+2b+c)$.

É natural tentar associar uma técnica que envolva algum dos produtos notáveis estudados no ensino básico, no intuito de transformar $1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, num número racional. Isto não é natural uma vez que aparece a parcela $3\sqrt[3]{2}$ e não simplesmente $\sqrt[3]{2}$. Uma possibilidade seria estabelecer condições aos racionais a,b e c de modo que:

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \cdot (1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 1. \quad (*)$$

Como $1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ é irracional e na igualdade acima há um produto de dois reais que equivale a 1, então $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ é também irracional pois, do contrário, ocorreria um produto de um racional não-nulo com um irracional que equivaleria a um racional, o que não é possível. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em $(*)$ obtemos

$$(a+2b+6c) + (3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4} = 1.$$

Observe que sendo a, b, c são racionais tais que $a \cdot b \cdot c \neq 0$ e que a soma do lado esquerdo da igualdade acima é igual a $1 \in \mathbb{Q}$, então $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4}$ deve ser racional. Porém a soma de dois irracionais só é racional se somarem zero, ou seja, $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} = -(a+3b+c)\sqrt[3]{4}$. Multiplicando por $\sqrt[3]{2}$, tem-se $(3a+b+2c)\sqrt[3]{4} = -2\cdot(a+3b+c)$. Porém, $(3a+b+2c)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{I}$ e $-2\cdot(a+3b+c) \in \mathbb{Q}$. Logo, se $(3a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+3b+c)\sqrt[3]{4} = 0$, então $(3a+b+2c) = (a+3b+c) = 0$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{c} a+2b+6c=1 \\ 3a+b+2c=0 \\ a+3b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=1-2b-6c \\ 5b+16c=3 \\ b-5c=-1 \end{array}\right. .$$

Tomando $b = 5c-1$ na segunda equação do último sistema acima, obtém-se $5(5c-1)+16c = 3$, ou seja, $c = \dfrac{8}{41}$. Logo, $b = -\dfrac{1}{41}$ e $a = -\dfrac{5}{41}$.

Desta forma, o vestibulando encontrará o valor pedido no problema. Porém, dependendo da expressão que se tenha no denominador da fração apresentada, sobretudo no índice da raiz, pode-se ter uma complexidade no sistema de equações lineares obtido. Veja, por exemplo, o seguinte.

Problema 2.2. (Olimpíadas Matemáticas de Moscou - 1982) Simplifique a expressão:

$$L = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}.$$

2.2 Números algébricos e racionalização

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Dizemos que α é algébrico se existirem inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ tais que

$$a_n\alpha^n + \ldots + a_i\alpha + a_0 = 0.$$

Note que podem existir muitas expressões polinomiais desse tipo, assim, convencionou-se escolher aquela de menor grau possível e dividir tudo por a_n e encontrar uma expressão polinomial racional. Denominamos $\mathbb{Q}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais. Um polinômio cujo coeficiente líder é 1 é chamado mônico.

Definição 2.3. *Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é dito algébrico quando existe $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de modo que $f(\alpha) = 0$.*

Definição 2.4. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico e $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$. Se $f(x)$ é o polinômio mônico de menor grau possível tal que $f(\alpha) = 0$, $f(x)$ é dito polinômio mínimo de α.*
Se α é um número algébrico chamamos uma racionalização de $\frac{1}{\alpha}$ uma expressão do tipo

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Observamos que a nossa nomenclatura de racionalização está em consonância com a definição histórica e é baseada na importância histórica associada às boas aproximações. Observamos ainda que se $\alpha \neq 0$, então o polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de α tem termo independente não nulo. Do contrário, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = x \cdot (a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1})$. O que implicaria dizer que $\alpha \neq 0$ é raiz de $a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1}$, contradizendo o fato de $f(x)$ ser mínimo.

Teorema 2.5. *Se $\alpha \in \mathbb{R}^*$ é um número algébrico, então a expressão $\frac{1}{\alpha}$ pode ser racionalizada, isto é, existem números inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ tais que*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0}{b}.$$

Demonstração: Note que se $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = 0$ então $a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = -a_0$, isto é, $\dfrac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n}{-a_0} = 1$. Desta forma, $\dfrac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n}{-a_0} = \dfrac{f(0) - f(\alpha)}{a_0\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. A essa simplificação chamamos racionalização. Ou seja, uma vez que se tenha o polinômio mínimo de α obtém-se α^{-1}. $\square$

Assim, acabamos de provar o Teorema que nos serve também como definição de racionalização. Vejamos o que ocorre nos casos seguintes.

Exemplo 2.6. Vamos racionalizar $\frac{1}{\alpha}$ com $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Se $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, então $\alpha^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$, isto é, $\alpha^2 = 10 + 2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$ logo, $\alpha^2 - 10 = 2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$. Elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade, tem-se

$$(\alpha^2-10)^2 = 4\cdot(6+10+15+2\sqrt{60}+2\sqrt{90}+2\sqrt{150}) \Rightarrow (\alpha^2-10)^2 = 248\sqrt{30}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

Como $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, então $(\alpha^2-10)^2 = 124 + 8\sqrt{30}\alpha$, ou seja, $\alpha^4 - 20\alpha^2 - 8\sqrt{30}\alpha - 24 = 0$. Obtendo assim

$$\frac{\alpha^3 - 20\alpha - 4\sqrt{30}}{24} = \frac{1}{\alpha}.$$

Note ainda que se quisermos usar a ideia do teorema, sendo $(\alpha^2-10)^2 = 124+8\sqrt{30}\alpha$, então $[(\alpha^2-10)^2-124]^2 = 1920\alpha^2$, ou seja, $\alpha^8 + 400\alpha^4 + 576 - 40\alpha^6 - 48\alpha^4 + 960\alpha^2 = 1920\alpha^2$. Assim, $\alpha^8 - 40\alpha^6 + 352\alpha^4 - 960\alpha^2 + 576 = 0$. Em outras palavras

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{\alpha^7 - 40\alpha^5 + 352\alpha^3 - 960\alpha}{576}.$$

Exemplo 2.7. (Voltamos ao Problema 2.1) Seja $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Encontre α^{-1} de modo que não haja raiz não exata no denominador de uma fração.

Sendo $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, então $(\alpha-1)^3 = [\sqrt[3]{2}\cdot(3+\sqrt[3]{2})]^3$. Desenvolvendo esta última igualdade, tem-se $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 2(29 + 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4})$, ou seja, $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$. Substituindo $\alpha - 1 = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ na última igualdade se tem $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(\alpha-1)$, isto é, $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 15\alpha = 41$. O que assegura que α é raiz de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15x - 41$.

Assim,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 15}{41} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}.$$

Observação 2.8. Observamos que em geral, dado um número algébrico não é facil obter o seu polinômio mínimo. Nem sempre os truques com radicais são eficientes.

Na próxima seção trabalharemos com o caso de números algébricos que podem ser escritos polinomialmente em termos de um outro cujo polinômio mínimo é conhecido. Este é o caso na maioria das aplicações. Observamos também que nem todos os números algébricos podem ser descritos por meio das operações algébricas elementares, isto é, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes de qualquer ordem. Isso se deve ao fato que não existem fórmulas fechadas usando radicais para resolver as equações de grau maior ou igual a 5. Esse importante resultado foi primeiramente provado por Abel e é conhecido com Teorema de Abel-Rufinni. Usando a Teoria de Galois é possível encontrar equações explícitas com coeficientes inteiros, de grau maior ou igual a 5 cujas raízes não são descritas por meio de radicais. O leitor que deseje se aprofundar no tema pode consultar [2] e suas referências.

3 Aritmética com polinômios e o teorema principal

3.1 Aritmética com polinômios

As propriedades aritméticas dos polinômios são válidas em qualquer corpo $\mathbb{K}$, por exemplo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Chamamos $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$, esse conjunto é um domínio.

Definição 3.1 (Divisibilidade de polinômios)**.** *Dados dois polinômios f e $g \in \mathbb{K}[x]$, ambos não nulos e não constantes, diz-se que f divide g (indicando por $f|g$) quando existe um polinômio $h \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $g = f \cdot h$. Neste caso, f é dito divisor de g ou ainda, que g é múltiplo de f.*

Os dois resultados seguintes são generalizações naturais da aritmética dos inteiros, suas provas podem seguir as originais, como em [3] ou o leitor pode consultar [5].

Proposição 3.2. *Sejam f, g e h em $\mathbb{K}[x]$ ambos não nulos e não constantes. Tem-se que:*
i) $f|f$ e $f|0$;
ii) Se $f|g$ e $g|h$, então $f|h$;
iii) Se $f|g$ e $f|h$, então $f|(g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h})$ para todo $\tilde{g}$, $\tilde{h} \in \mathbb{K}[x]$.

Teorema 3.3. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x]$, com $g \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $f = g \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial g$.*

Definição 3.4. *Dados dois polinômios $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Um polinômio mônico d em $\mathbb{K}[x] - \{0\}$ é chamado de máximo divisor comum (mdc) de f e g, quando:*

(i) d é divisor comum de f e de g;

(ii) Se $\tilde{d} \in \mathbb{K}[x]$ - $\{0\}$ é tal que $\tilde{d}|f$ e $\tilde{d}|g$, então $\tilde{d}|d$.

Denotamos o mdc(f, g) por (f, g). Ele é o polinômio mônico de maior grau que divide f e g.

Teorema 3.5 (Algoritmo de Euclides)**.** *Sejam* $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$*, com* $\partial(f) > \partial(g)$*. Existe um algoritmo para obter o* (f, g) *através de certo número finito de divisões euclidianas.*

Demonstração: Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_{-1} = f$, $r_0 = g$ e $r_1 = r$. Efetuando as divisões sucessivas de r_i por r_{i+1} onde $i = -1, 0, 1, ..., n$ (onde n é a passagem onde ocorre pela primeira vez o resto zero).

$$r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}.$$

Note que este processo se encerra num determinado número de divisões uma vez que $\partial(r_i) > \partial(r_{i+1})$. Portanto, $r_{n+1} = 0$ para algum n e $r_{n-1} = r_n \cdot q_n$.

Como $r_i = r_{i+1}q_{i+1} + r_{i+2}$, temos que $(r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2})$, pois todo divisor de r_i e r_{i+1} é divisor de r_{i+2} e reciprocamente, todo divisor de r_{i+1} e r_{i+2} é também divisor de r_i. Então

$$(f, g) = (r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2}) = ... = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

□

Corolário 3.6 (Lema de Bézout para polinômios)**.** *Sejam* $d, f, g \in \mathbb{K}[x]$*, de modo que* $d = (f, g)$*, então existem* $h, \tilde{h} \in \mathbb{Q}[x]$ *tais que*

$$f \cdot h + g \cdot \tilde{h} = d.$$

Demonstração: Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_0 = f$, $r_1 = g$ e $r_2 = r$. Suponha que $\partial f > \partial g$. O algoritmo de Euclides pode ser escrito do seguinte modo: divida r_0 por r_1 obtendo assim $r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$ e os coloque no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c} & q_1 & \\ \hline r_0 & r_1 & \\ \hline & r_2 & \end{array}$$

Na segunda etapa, divida r_1 por r_2, obtendo $r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$ e os coloque na coluna da direita do diagrama acima, construindo a formação a seguir: Note que $r_2 = r_0 + (-q_1) \cdot r_1$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & q_1 & q_2 & \\ \hline r_0 & r_1 & r_2 & \\ \hline & r_2 & r_3 & \end{array}$$

e $r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot r_2$, ou seja, $r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot (r_0 - q_1 \cdot r_1) = (-q_2) \cdot r_0 + (1 + q_2 \cdot q_1) \cdot r_1$.

Continuando o processo de divisões sucessivas, obtém-se, na i-ésima primeira divisão, a seguinte disposição:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & q_1 & \dots & & q_i & \\ \hline r_0 & r_1 & \dots & r_{i-1} & r_i & \\ \hline & r_2 & \dots & & r_{i+1} & \end{array} , \qquad \text{onde} \begin{cases} r_i = r_{i-2} - q_{i-1}r_{i-1} \\ r_{i-1} = r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2} \\ \dots \\ r_3 = r_1 - q_2r_2 \\ r_2 = r_0 - q_1r_1 \end{cases} .$$

Substituindo r_{i-1} por $r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}$ na primeira equação, tem-se

$$r_i = r_{i-2} - q_{i-1}(r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}),$$

isto é, $r_i = (-q_{i-1})r_{i-3} + (1 + q_{i-2})r_{i-2}$. Fazendo $t_1 = -q_{i-1}$ e $\tilde{t}_1 = 1 + q_{i-2}$, obtém-se

$$r_i = t_1r_{i-3} + \tilde{t}_1r_{i-2}. \tag{3.1}$$

Agora faça $r_{i-2} = r_{i-4} - q_{i-3}r_{i-3}$ em (3.1) e encontre $r_i = t_1r_{i-4} + (\tilde{t}_1 - t_1q_{i-3})r_{i-3}$. Seja $t_1 = t_2$ e $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 - t_1q_{i-3}$. Assim, $r_i = t_2 \cdot r_{i-4} + \tilde{t}_2r_{i-3}$. Continue o processo e obterá t e $\tilde{t}$ tais que $r_i = t \cdot r_0 + \tilde{t} \cdot r_1$. Suponha que as substituições possíveis de serem efetuadas no sistema acima forneçam h_i, h_{i-1}, $\tilde{h}_i$, $\tilde{h}_{i-1}$ de modo que

$$\begin{cases} r_{i-1} = h_{i-1} \cdot r_0 + \tilde{h}_{i-1} \cdot r_1, \\ r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_1, \end{cases}$$

sendo $r_{i+1} = r_{i-1} - q_ir_i$, então $r_{i+1} = (h_{i-1}r_0 + \tilde{h}_{i-1}r_1) + (h_ir_0 + \tilde{h}_ir_i)(-q_i)$, acarreta em $r_{i+1}(h_{i-1} - q_ih_i)r_0 + (\tilde{h}_{i-1} - q_i\tilde{h}_i)r_i$, onde $h_{i+1} = h_{i-1} - q_ih_i$ e $\tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i\tilde{h}_i$. $\square$

Ainda analisando o esquema do algoritmo estendido em que $r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}$, suponha que $r_{i+2} = 0$. Pelo exposto anteriormente, $r_{i+1} = mdc(r_0, r_1)$.

Pode-se dispor na seguinte formação tabelar, o algoritmo para obter o valor r_i seguindo as seguintes etapas:

1. Preenche-se nas duas primeiras linhas, os valores que permitam obter as combinações r_0 e r_1;

2. Coloca-se na primeira coluna, a partir da segunda linha, os inversos aditivos dos polinômios quocientes, ou seja, $-q_1$, $-q_2$, ...,$-q_i$;

3. Para obter h_i, com $i \geq 1$, faz-se $h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$;

4. Para obter $\tilde{h}_i$, faz-se $\tilde{h}_{i-2} - q_{i-1} \cdot \tilde{h}_{i-1}$;

5. Na última coluna e na mesma linha que está localizado h_i e $\tilde{h}_i$, coloca-se r_i.

$-q_i$	h_i	$\tilde{h}_i$	$r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_i$
	$h_{-2} = 1$	$\tilde{h}_{-2} = 0$	r_0
$-q_1$	$h_{-1} = 0$	$\tilde{h}_{-1} = 1$	r_1
$-q_2$	$h_2 = h_0 - q_1 \cdot h_1$	$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 - q_1 \tilde{h}_1$	r_2
$-q_3$	$h_3 = h_1 - q_2 \cdot h_2$	$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 - q_2 \tilde{h}_2$	r_3
...	...	...	...
$-q_{i-1}$	$h_{i-1} = h_{i-3} - q_{i-2} \cdot h_{i-2}$	$\tilde{h}_{i-1} = \tilde{h}_{i-3} - q_{i-2} \tilde{h}_{i-2}$	r_{i-1}
$-q_i$	$h_i = h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$	$\tilde{h}_i = \tilde{h}_{i-2} - q_{i-1} \tilde{h}_{i-1}$	r_i
$-q_{i+1}$	$h_{i+1} = h_{i-1} - q_i \cdot h_i$	$\tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i$	$r_{i+1} = d = (r_0, r_1)$

Veja o processo descrito no seguinte caso.

Exemplo 3.7. Calcular o *m.d.c.* de $2x^3 - 8$ e $4x^2 - 16$. Em seguida, escreva-o como combinação desses polinômios.

Solução: Calculando o *m.d.c.* dos polinômios:

	$\frac{x}{4}$	$x+2$	
$x^3 - 8$	$4x^2 - 16$	$4x - 8$	
	$4x - 8$	0	

Isto é, 4x − 8 é o polinômio mônico em $\mathbb{Q}$ que representa o m.d.c. Obtendo a combinação:

$-q$	h	$\tilde{h}$	$(x^3 - 8) \cdot h + (4x^2 - 16) \cdot \tilde{h}$
	1	0	$x^3 - 8$
$-\frac{x}{4}$	0	1	$4x^2 - 16$
$-x - 2$	1	$-\frac{x}{4}$	$4x - 8$

Logo, $(x^3-8)\cdot 1+(4x^2-16)\cdot(-\frac{x}{4}) = 4x-8$, ou seja, $(x^3-8)\cdot\frac{1}{4}+(4x^2-16)\cdot(-\frac{x}{16}) = x - 2$.

Definição 3.8. *Um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ é dito irredutível sobre $\mathbb{K}$ quando $f(x)$ não for possível escrevê-lo como um produto de dois polinômios sobre $\mathbb{K}$, ambos com grau maior ou igual a 1 (um).*

Proposição 3.9. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrico então polinômio mínimo de α é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Suponhamos, por absurdo, que $f(x)$ seja redutível em $\mathbb{Q}[x]$. Neste caso, existem $q, q_1 \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot q_1(x)$. Como, por hipótese, $f(\alpha) = 0$, temos então que $f(\alpha) = q(\alpha) \cdot q_1(\alpha) = 0$. Desta forma, temos $q(\alpha) = 0$ ou $q_1(\alpha) = 0$. Uma contradição à minimalidade de $f(x)$. Segue que todo polinômio mínimo é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$. □

3.2 O Teorema principal

Conforme mencionado na Observação 2.8, em geral é difícil obter o polinômio mínimo de um número algébrico. Por outro lado, muitas vezes as expressões irracionais no denominador são polinomiais com relação a um número algébrico mais simples. Verifique todos os exemplos anteriores, somente um deles não é desse tipo.

Teorema 3.10. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Seja $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $g(\alpha) \neq 0$, então existem $h, \tilde{h} \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $gh + f\tilde{h} = 1$.*

Demonstração: Inicialmente, tem-se $(f, g) = 1$ uma vez que f irerutível implica $(f, g) = 1$ ou $(f, g) = f$. Agora suponha que $f(x)|g(x)$. Então, existe $d \neq 0$ em $\mathbb{Q}[x]$ tal que $g(x) = f(x) \cdot d(x)$. Como $f(\alpha) = 0$, então $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot d(\alpha) = 0$, uma contradição ao fato de que $g(\alpha) \neq 0$. Logo $(f, g) = 1$ e, pelo Corolário 3.6, existem polinômios h e $\tilde{h}$ em $\mathbb{Q}[x]$ tais que $gh + f\tilde{h} = d = 1$. □

Corolário 3.11. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Q}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de modo que $g(\alpha) \neq 0$, então existe $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de forma que $g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 1$. Equivalentemente temos $h(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$. Pode-se também escolher $h(x)$ de modo que $\partial h(x) < \partial f(x)$.*

Demonstração: Já sabemos que, $gh + f\tilde{h} = 1$, então $g(\alpha)h(\alpha) + f(\alpha)\tilde{h}(\alpha) = 1$. Porém, como $\alpha \in \mathbb{Q}$ é tal que $f(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) \neq 0$, tem-se que $g(\alpha)h(\alpha) = 1$, desta forma $h(\alpha) \neq 0$. Isto é, $h(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$.

Pode-se supor que $\partial h < \partial f$, pois do contrário, pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $h = f \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial g$. Assim, $gh + f\tilde{h} = g(fq + r) + f\tilde{h} = 1$. Logo, $g(\alpha)r(\alpha) = 1$ e $r(\alpha) = \dfrac{1}{g(\alpha)}$. □

Corolário 3.12. *Sejam $t^n = a$ e $x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n \neq 0$ com $a, x_i \in \mathbb{Q}$ então existem $y_i \in \mathbb{Q}$ tais que $(x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n)(y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n) = 1$.*

Demonstração: Considere $g(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n$ e $f(t) = t^n - a$. Pelo Corolário 3.11, existe $h(t) = y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n$ tal que

$$(x_0 + x_1t + x_2t^2 + ... + x_nt^n)(y_0 + y_1t + y_2t^2 + ... + y_nt^n) = 1.$$

□

Aplicando a mesma técnica no Problema 2.1, temos $f(x) = x^3 - 2$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Calculando o mdc de $f(x)$ e $g(x)$:

	$x-3$	$\frac{1}{8}x+\frac{23}{64}$	0
x^3-2	x^2+3x+1	$8x+1$	$\frac{41}{64}$
	$8x+1$	$\frac{41}{64}$	$\frac{512}{41}x+\frac{64}{41}$

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$f(x)h(x)+g(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	x^3-2
$-(x-3)$	0	1	x^2+3x+1
$-\left(\frac{1}{8}x+\frac{23}{64}\right)$	1	$-(x-3)$	$8x+1$
	$-\left(\frac{1}{8}x+\frac{23}{64}\right)$	$\frac{1}{64}(8x^2-x-5)$	$\frac{41}{64}$

Ou seja

$$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)(x^3 - 2) + \frac{1}{64}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = \frac{41}{64}.$$

Logo, $-\frac{1}{41}(8x + 23)(x^3 - 2) + \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = 1$. Deste modo, $h(x) = \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5)$ e $h(\sqrt[3]{2}) = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}$.

Assim,

$$\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = -\frac{5}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} + \frac{8\sqrt[3]{4}}{41}.$$

Exemplo 3.13. Obter a racionalização da fração $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}}$.

Solução: Note que $2\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{4}$, então

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}.$$

O polinômio mínimo de $\sqrt[4]{2}$ é $f(x) = x^4 - 2$. Deve-se procurar $g(x)$ de modo que $g(\sqrt[4]{2}) = 1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} \neq 0$, ou seja, $g(x) = 1 - x + 2x^2 + x^3$. Calculando o *mdc* de $f(x)$ e $g(x)$.

	$x-2$	$\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}$	$\frac{125}{14}x-\frac{4175}{196}$	
x^4-2	x^3+2x^2-x+1	$5x^2-3x$	$\frac{14}{25}x+1$	$\frac{4175}{196}$
				0

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$g(x)h(x)+f(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	x^4-2
$-(x-2)$	0	1	x^3+2x^2-x+1
$-\left(\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}\right)$	1	$-x+2$	$5x^2-3x$
$-\left(\frac{125}{14}x-\frac{4175}{196}\right)$	$-\frac{1}{5}x+\frac{13}{25}$	$\frac{x^2}{5}+\frac{3x}{25}-\frac{1}{25}$	$\frac{14}{25}x+1$
		$-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}$	$\frac{4175}{196}$

Desta maneira

$$(x^3+2x^2-x+1)\left(-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}\right) = \frac{4175}{196},$$

isto é,

$$\frac{196}{4175}(x^3+2x^2-x+1)\left(-\frac{25x^3}{14}+\frac{625x^2}{196}+\frac{375x}{196}+\frac{225}{196}\right) = 1.$$

Assim, fazendo $x = \sqrt[4]{2}$ e simplificando,

$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{64}} = \frac{1}{167}\left(-14\sqrt[4]{8}+25\sqrt[4]{4}+15\sqrt[4]{2}+9\right).$$

□

Referências

[1] Engel, Arthur. Problem Solving strategies. Springer, 1998.

[2] Gondim, Rodrigo, Maria Eulália de Moraes Melo, and Francesco Russo. Equaçoes Algébricas e a Teoria de Galois. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2013

[3] Hefez, Abramo. Elementos de Aritmética. Coleção: Textos universitários. SBM, 2011.

[4] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. Temas e Problemas Elementares, SBM, 2006.

[5] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios. Vol. 6, SBM, 2012.

[6] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números. Vol. 5, SBM, 2012.

[7] Wagner, Eduardo; Moreira, Carlos Gustavo Tamm de Araujo. 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática. FOTOJAE, 1996.

Submetido em 19 de Junho de 2018.
Aceito em 18 de Setembro de 2018.

REVISEM Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

SOBRE ALGUNS RESULTADOS DE D'ALEMBERT

Luiz Adauto Medeiros
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
luizadauto@gmail.com

Manuel Milla Miranda
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
mmillamiranda@gmail.com

Aldo Trajano Louredo
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
aldolouredo@gmail.com

Resumo
Neste artigo de divulgação faremos uma descrição sucinta de alguns resultados matemáticos obtidos por Jean Le Rond D'Alembert, bem como uma pequena resenha biográfica dele.

Abstract
In this article we will give a brief description of some mathematical results obtained by Jean Le Rond D'Alembert, as well as a short biographic review of him.

1 Introdução

Iniciamos esta seção fazendo um breve resumo sobre a vida de Jean Le Rond D'Alembert.

Foto de D'Alembert pertencente à "École de La Tour", St. Quentin.

As circunstâncias do nascimento de D'Alembert incluem a existência romântica de um amor proibido, na versão de Ronald Grimsley. Ana de Tencin, antes, contra sua vontade, tornou-se freira e então uma "Chanoinesse", em Paris. Por meio de uma dispensa Papal de 1714, teve oportunidade de exercer atividades de natureza social fora do convento, dando origem a intrigas políticas e ligações amorosas. Participou de uma empresa onde recebia recursos que permitiam sua segurança financeira. Uma de suas uniões "irregulares"foi com um oficial de artilharia de nome Louis-Camus Detouches. Jean Lerond foi o resultado desta aventura amorosa.

Na época do nascimento do bebê, 17 de novembro de 1717, Detouches não se encontrava em Paris porque cumpria missão no exterior. Assim, ansiosa por resolver complicada situação, Mme. de Tencin colocou a criança acabada de nascer, em uma "caixa de madeira" e deixou na escadaria da pequena Igreja Saint-Jean-Lerond. Esta igreja, demolida em 1748, se localizava próxima à Catedral de Notre Dame.

A criança foi rapidamente encontrada e batizada, na Igreja Católica, com o nome Jean Lerond, nome da igreja. Muito frágil, foi encaminhada, como de hábito, a um berçário onde permaneceria em recuperação por seis semanas.

Do berçário foram Mme. Rousseaux e seu esposo, família de artesãos humildes, que assumiram a paternidade e educação de Jean Lerond.

Ao retornar à Paris, Detouches, o pai, se inteirou do acontecido e iniciou a procura para localizar seu filho, o que logo conseguiu. A família Rousseaux tinha poucos recursos. Detouches apoiou financeiramente a educação da criança sob orientação da família Rousseaux. Jean Lerond tinha o casal Rousseaux como seus verdadeiros pais e eles o tinham como filho.

Concluiu o ensino elementar, em escolas particulares, financiado por seu pai. Preocupados com a educação da criança a família Detouches conseguiu matricular Jean Lerond no Colégio Quatro Nações, colégio de nobres. Os Detouches já tinham informações, de professores anteriores, da capacidade intelectual da criança, quando ela tinha aproximadamente oito anos. No momento da inscrição o administrador registrou com o nome Jean Lerond Daremberg. Ele não gostou deste nome e passou a se identificar como Jean Lerond D'Alembert e assim ficou (cf. Grimsley [4]). Completou seus estudos no Quatro Nações em 1735 aos 18 anos e retornou a morar com a família Rousseaux. A história daí em diante é muito rica. O Colégio Quatro Nações para educação de nobres era Jansenista [1]. Entretanto D'Alembert teve influências dos Cartesianos e Jesuítas.

Nota-se que seu pai Detouches ao falecer em 1726 deixou uma boa soma de recursos para D'Alembert o que contribuiu para sua educação no Colégio Jansenista Quatro Nações. Falecendo em 29 de outubro de 1783, sem família, D'Alembert foi para a vala

[1] Jansenismo: Corrente filosófica idealizada por Cornelio Jansênio (1585-1638)

comum.

Inicia-se fixando a nomenclatura. Deslocamento virtual é definido como uma mudança da configuração de um sistema, arbitrário, instantâneo, contínuo, infinitesimal, compatível com as condições de vínculo. Tentaremos exemplificar com o caso de pequenas vibrações transversais de uma corda elástica $[\alpha_0, \beta_0]$, em repouso no eixo dos x do sistema cartesiano ortogonal do $\mathbb{R}^2$. Suponha num instante $t > 0$ a vibração ou deformação da corda fixa em $(\alpha_0, 0)$ e $(\beta_0, 0)$ assuma a curva S que se supõe de equação $y = u(x, t)$, uma função regular. Posteriormente retornaremos com mais detalhes. A curva S é regular, o deslocamento virtual sobre S representa-se por δs. Ele é um deslocamento sobre S, contínuo de S presa em $(\alpha_0, 0)$, $(\beta_0, 0)$. Estes deslocamentos são introduzidos na tentativa de obter informações sobre o comportamento das forças internas atuando no sistema, no presente exemplo a deformação S de $[\alpha_0, \beta_0]$. Observe que sobre S define-se o elemento de arco ds que é definido pela representação analítica de S. Em geral são feitas hipóteses de derivabilidade sobre a representação analítica de S permitindo definir ds. [2]

2 Equilíbrio Dinâmico

Considera-se uma massa pontual m situada no eixo x de um sistema de coordenadas Cartesianas como mostra a Figura 1.

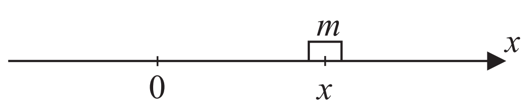


Figura 1

Quando uma força F, vetor, atua sobre m, a segunda lei de Newton afirma que a relação entre a força F e a aceleração γ que ela imprime a m, sendo m constante, é

$$F = m\,\gamma.$$

Note que F e γ são vetores do plano $\mathbb{R}^2$.

[2]Dedicado ao Professor Plńio Sussekind Rocha - em memória.

Observa-se que a velocidade da massa m é $v = \dfrac{dx}{dt}\cdot$ Denote por $p = m\,v$, sendo $\gamma = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, obtém-se a notação

$$F = \overset{\circ}{p}\,, \tag{2.1}$$

sendo $\overset{\circ}{p} = \dfrac{dp}{dt}\cdot$ Esta é a segunda lei de Newton com outra notação.

A seguir será dada a interpretação de D'Alembert para (2.1). Ele supõe que quando F atua sobre a massa m ela reage com uma força $-\overset{\circ}{p}$, representada por F^* e denominada inércia da massa m. Portanto, em cada instante t, obtém-se o equilíbrio dinâmico:

$$F + F^* = 0, \tag{2.2}$$

denominado Princípio de D'Alembert. Repete-se que a soma (2.2) é de vetores. Interpreta-se graficamente do modo seguinte:

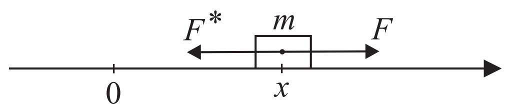


Figura 2

O princípio diz que em cada instante há o equilíbrio entre a força aplicada F e a força fictícia de inércia F^* da partícula de massa m. A segunda lei de Newton pode ser vista, graficamente por meio da Figura 3:

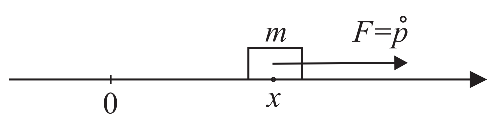


Figura 3

Suponha que a massa m localizada no ponto x sofra deformações infinitesimais (convergentes para zero), contínuas mantendo-se sobre o eixo dos x. Tais deformações são denominadas virtuais ou possíveis (segundo Ernest Mach [3]) e representadas por

δx. O trabalho da força $F+F^*$ correspondente ao deslocamento virtual δx é $(F+F^*)\delta x$. Do equilíbrio dinâmico de D'Alembert (2.2) resulta que

$$(F + F^*)\delta x = 0. \tag{2.3}$$

A igualdade (2.3) é denominada princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert para uma partícula de massa m e coordenada x. Quando se tem n partículas de massa m_i e coordenadas x_i sobre o eixo Ox, com forças F_i e F_i^* tem-se o equilíbrio dinâmico

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i + F_i^*\right) = 0.$$

Se δx_i é um deslocamento virtual de m_i , o princípio dos trabalhos virtuais tem a forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i + F_i^*\right)\delta x_i = 0. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1. Considere uma barra cilíndrica, de comprimento L, com um extremo fixo na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e o extremo L livre, veja a Figura 4.

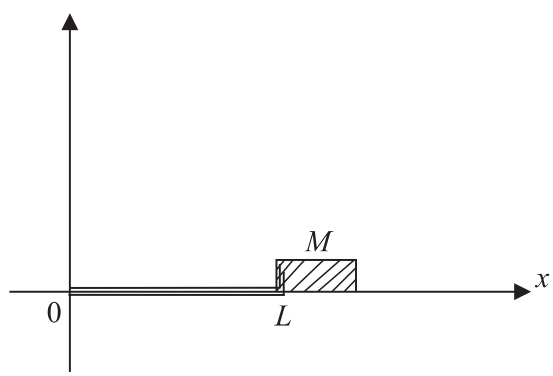


Figura 4

Suponha uma massa M colada à extremidade L da barra, pressionando continuamente a barra na direção oposta do eixo Ox. Como consequência há deformações horizontais da barra e uma tensão interna τ. Supõe-se que a relação tensão e deformação média seja linear, (Lei linear de Hooke). Assim representando por $u(x,t)$ a deformação horizontal do ponto x da barra no instante t, a equação diferencial parcial que modela este problema é a seguinte:

$$u_{tt}(x,t) - a^2\, u_{xx}(x,t) = 0, \;\; 0 < x < L, \;\; t > 0. \tag{2.4}$$

Note que u_t e u_x são derivadas parciais de $u(x,t)$ em relação a t e x, respectivamente.

Para a análise matemática do modelo (2.4), é mister que se conheçam as condições iniciais $u(x,0)$ e $u_t(x,0)$ bem como as condições de contorno, isto é, $u(0,t)$ e $u(L,t)$ para o tempo $t > 0$. Supõe-se a barra fixa na origem, isto é,

$$u(0,t) = 0. \tag{2.5}$$

Quanto às condições iniciais, admite-se:

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \tag{2.6}$$

sendo u_0 e u_1 funções conhecidas.

Resta conhecer a condição no extremo L da barra onde pressiona a massa M, na direção oposta a do eixo Ox. De fato, pela segunda lei de Newton, devido a pressão no extremo L tem-se a força F^* em L dada por

$$F^* = -M\, u_{tt}(L,t).$$

A força de inércia da barra em L é dada pela tensão

$$F = ES\, u_x(L,t),$$

pela lei de Hooke. Portanto do equilíbrio dinâmico de D'Alembert, obtém-se em L,

$$F + F^* = 0, \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Resulta a condição de fronteira em L, isto é:

$$M\, u_{tt}(L,t) + ES\, u_x(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

□

3 Vibrações de Cordas Elásticas

Nesta seção aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais para obter o modelo de D'Alembert para pequenas vibrações verticais de uma corda elástica com extremos fixos.

Considera-se o plano $\mathbb{R}^2$ com um sistema de coordenadas Cartesianas ortogonais xOy. Suponha uma corda $[\alpha_0, \beta_0]$ em posição de repouso no eixo Ox e S uma pequena deformação vertical de $[\alpha_0, \beta_0]$ no instante t. Ver Figura 5.

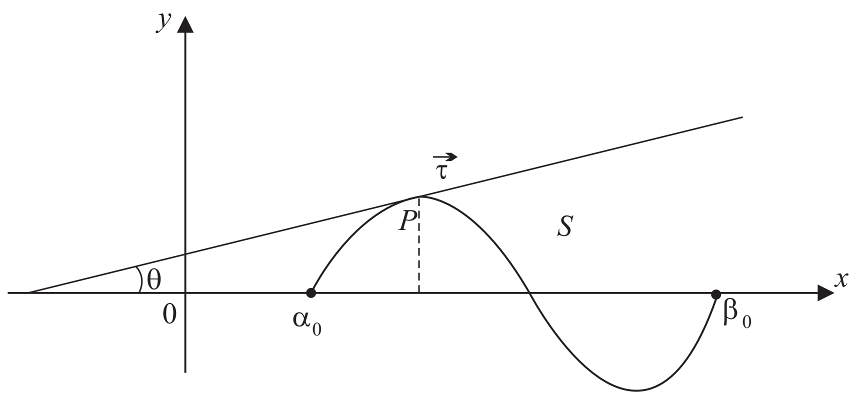


Figura 5

Suponha que a única força atuando na corda $[\alpha_0, \beta_0]$ seja a tensão $\vec{\tau}$. Note que em cada ponto P de S a tensão possui a direção da tangente a S no ponto P. Supõe-se, também, que $y = u(x,t)$ seja a representação analítica de S, $\alpha_0 \leq x \leq \beta_0$, $t \geq 0$. Supõe-se esta função duas vezes continuamente derivável relativamente a $x \in (\alpha_0, \beta_0)$ e $t \geq 0$. Considera-se pequenas deformações verticais, isto é, $|u_x(x,t)| \ll 1$ em $[\alpha_0, \beta_0]$ e $t > 0$. Usa-se a notação u_x, u_t para $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Represente por τ o módulo do vetor $\vec{\tau}$. Assim, as componentes de $\vec{\tau}$ são:

$$\tau \text{ sen } \theta \ \ \text{(vertical) e } \ \tau \cos\theta \ \ \text{(horizontal)}.$$

Da hipótese de pequenez sobre as deformações verticais, a componente horizontal é pequena e nós consideramos somente a componente vertical τ sen θ. Logo, a única força atuando na corda é a variação da componente vertical, isto é,

$$F = \frac{\partial}{\partial x}(\tau \text{ sen } \theta), \tag{3.1}$$

onde F é o módulo de $\vec{F}$.

Suponha δs um deslocamento virtual sobre S. Assim o trabalho virtual de $F(x,t)+F^*(x,t) = F(x,t) - \mathring{p}$, correspondendo a δs, é

$$\big[F(x,t) - \mathring{p}\big]\delta s = 0,$$

pelo princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert. O trabalho virtual ao longo de S é a integral sobre S, isto é:

$$\int_S \Big\{ \Big[F(x,t) - \mathring{p} \Big] \, \delta s \Big\} \, ds = 0, \tag{3.2}$$

para todo deslocamento virtual δs sobre S. Note que δs é $\delta s(x,t)$. Sendo $\delta s(x,t)$ uma função contínua de x conclui-se de (3.2) que

$$F(x,t) - \mathring{p}(x,t) = 0, \text{ para } \alpha_0 \le x \le \beta_0\,, \ t > 0. \tag{3.3}$$

Sendo

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}(\tau \text{ sen } \theta) = \tau \frac{\partial}{\partial x} \text{ sen } \theta \\ &\approx \tau \frac{\partial}{\partial x} \text{tg } \theta \approx \tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot \end{aligned}$$

Então

$$F(x,t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot \tag{3.4}$$

tem-se, também:

$$\mathring{p}(x,t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) resulta:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot \tag{3.6}$$

Este é o modelo matemático para pequenas vibrações verticais de uma corda elástica presa nos extremos. Ele foi obtido em 1741 por D'Alembert. Pode-se afirmar que esta foi a primeira equação diferencial parcial modelando um fenômeno da Física Matemática.

Note que D'Alembert estava interessado na modelagem matemática da propagação do som em cordas de instrumentos musicais. (Ver por exemplo, o trabalho de D'Alembert [2]).

3.1 Solução de D'Alembert para (3.6)

Faça $\dfrac{\tau}{m} = 1$, para tornar simples o cálculo. Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ para } 0 < x < +\infty, \;\; t \geq 0, \tag{3.7}$$

com $u = u(x,t)$ duas vezes continuamente derivável em relação a x e t. D'Alembert empregou um processo imaginativo para encontrar uma função $u(x,t)$ solução pontual para (3.7). De fato, consideremos a forma diferencial du:

$$du = q\,dt + p\,dx,$$

com

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Agora, seja w a forma diferencial dada por

$$w = p\,dt + q\,dx,$$

com $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $q = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, para $u(x,t)$ solução da equação de D'Alembert (3.7), isto é, u satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

que implica

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot$$

Esta igualdade diz que a forma diferencial w é exata. Então, w é a diferencial de uma função $v(x,t)$ e temos:

$$dv = p\,dt + q\,dx.$$

Assim obtemos:

$$\begin{cases} d(u+v) = (p+q)d(x+t), \\ d(u-v) = (p-q)d(x-t). \end{cases}$$

Então, D'Alembert obtém:

$$\begin{cases} u + v = \phi(x+t), \\ u - v = \psi(x-t), \end{cases}$$

com, segundo ele, ϕ e ψ são funções reais arbitrárias.

Consequentemente, ele obteve a solução $u(x,t)$ definida por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+t) + \psi(x-t)\right],$$

com ϕ, ψ funções arbitrárias. Esta função é denominada solução de D'Alembert da equação (3.6). $\square$

4 Contribuições de D'Alembert ao Ensino Médio e Universitário

No presente parágrafo serão relembradas algumas contribuições de D'Alembert que fazem parte do currículo de ensino da Matemática Pré–Universitária.

- Inicia-se com o Teorema Fundamental da Álgebra. Representa-se por $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Com $P(z)$ denota-se o polinômio $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, sendo $n \in \mathbb{N},\ z, a_0, a_1, \ldots, a_n$ números complexos. Habitualmente, denomina-se Teorema Fundamental da Álgebra o resultado afirmando que a equação algébrica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

possui uma solução $\zeta \in \mathbb{C}$, isto é,

$$P(\zeta) = 0.$$

Note que $z, a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números complexos. Este resultado foi demonstrado, pela primeira vez, por D'Alembert em 1746. Sua demonstração, publicada em "Histoire de l'Académie Royal des Sciences de Berlin, 1746 , p. 182-191", estava incorreta. Uma demonstração correta foi apresentada por Gauss em 1799. Por esta razão o Teorema Fundamental da Álgebra aparece como Teorema de D'Alembert-Gauss. A demonstração deste teorema, nos dias de hoje, é consequência do Teorema de Liouville. Aliás bem simples, como será visto a seguir. Representa-se por $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos. Diz-se que uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa em $\mathbb{C}$, quando f for continuamente derivável em $\mathbb{C}$. O teorema de Liouville afirma que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ for holomorfa e limitada em $\mathbb{C}$ então f é constante em $\mathbb{C}$. Admitindo demonstrado o Teorema de Liouville, será provado o Teorema de D'Alembert-Gauss. Considere um polinômio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n\,,$$

pelo menos um coeficiente a_i diferente de zero. Para fixar idéia suponha $a_0 \neq 0$. O teorema de D'Alembert-Gauss afirma que a equação

$$P(z) = 0, \quad (a_0 \neq 0)$$

possui uma raiz em $\mathbb{C}$. De fato, suponha $P(z) \neq 0$ em $\mathbb{C}$. Resulta que a função

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

é holomorfa em $\mathbb{C}$. Provaremos que f é limitada em $\mathbb{C}$. De fato, escreve-se;

$$P(z) = z^n \left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right],$$

de onde resulta:

$$|P(z)| \geq |z|^n \left[|a_0| - \frac{|a_1|}{|z|} - \frac{|a_2|}{|z^2|} - \cdots - \frac{|a_n|}{|z^n|} \right].$$

Seja $r > 0$ tal que

$$\frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_2|}{|z^2|} + \cdots + \frac{|a_n|}{|z|^n} < \frac{|a_0|}{2}$$

para $|z| > r > 0$. Por cálculo simples, resulta:

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2} |a_0| r^n, \quad \text{para } |z| > r.$$

Daí

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_0| r^n},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| > r$, provando que f é limitada no exterior do disco $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$, isto é, em $\mathbb{C}$. Note que $|f(z)|$ é limitada no disco fechado. Assim, f é holomorfa e limitada em $\mathbb{C}$, portanto, pelo Teorema de Liouville, f é constante em $\mathbb{C}$. Sendo $a_0 \neq 0$, $\;P(z) = a_0 z^n$ não é constante. Há assim, uma contradição, concluindo-se que $P(z) = 0$ possui solução em $\mathbb{C}$, provando o Teorema de D'Alembert-Gauss.

- No estudo das séries de números reais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é conhecido o critério de Cauchy (1821) para o caso $a_n > 0$, $n = 1, \cdots$, afirmando que se para $n \geq n_0$, se tem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a < 1 \quad \text{a série converge}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{a série diverge}$$

Note-se que este critério havia sido estabelecido por Daniel Bernoulli (1743-1771) e D'Alembert com demonstração incorreta.

- No ensino elementar das equações diferenciais ordinárias, isto é, equações do tipo $y' = f(x, y)$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, costuma-se particularizar a função f para obter modelos que são integráveis, encontrando, por meio de cálculos, a solução explícita da equação. Há um modelo de Giacomo Bernoulli (1695) e D'Alembert (1748). Consulte-se F. Severi-G.S. Draconi – Lezioni di Analisi, Volume Terzo, p.34. Cesare Zuffi Editores, Bologna, Italia, 1951.

$\square$

5 Solução fraca para equação de D'Alembert

Representa-se por $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ o espaço vetorial das funções reais em $\mathbb{R}^2$, infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, cada função nula no exterior de um compacto K de $\mathbb{R}^2$, K variando com a função. Denota-se por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ o espaço das funções numéricas em $\mathbb{R}^2$, integráveis em cada compacto de K de $\mathbb{R}^2$.

Diz-se, segundo Sobolev, que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ possui derivada parcial fraca relativamente a x quando existe $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdt = -\int_{\mathbb{R}^2} h\phi dxdt,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

A função h é denominada derivada fraca de u em relação a x, representando-se por $h = \frac{\partial u}{\partial x}$. Escreve-se a igualdade acima:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdt = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial x} \phi dxdt.$$

Mutatis mutandis, define-se as derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Consequentemente, o D'Alembertiano fraco é definido por:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\square u)\phi dxdt = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, onde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Integrando por partes a integral anterior deduz-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \square \phi dxdt = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim, define-se solução fraca da equação de D'Alembert como sendo a função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, satisfazendo a igualdade integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \Box \phi dx dt = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Mostra-se que a solução de D'Alembert dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+t) + \psi(x-t)]$$

com $\phi, \psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ é solução fraca da equação de D'Alembert $\Box u = 0$. Com efeito, seja (ρ_ν) uma sucessão regularizante de $\mathbb{R}^2$. Define-se a convolução de ϕ com ρ_ν, denotada por $\phi * \rho_\nu$, como sendo

$$(\phi * \rho_\nu)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\rho_\nu(x-y, t-s) dy ds.$$

Cada função $\phi * \rho_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e existe uma subsucessão de $(\phi * \rho_\nu)$, ainda denotada por $(\phi * \rho_\nu)$, tal que

$$\lim_{\nu \to \infty} (\phi * \rho_\nu)(x,t) = \phi(x,t)$$

para quase todo $(x,t) \in K$, K compacto de $\mathbb{R}^2$. Tem-se o análogo resultado para $(\psi * \rho_\nu)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [(\phi * \rho_\nu)(x+t) + (\psi * \rho_\nu)(x-t)] \Box \varphi(x,t) dx dt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [\Box(\phi * \rho_\nu)(x+t) + \Box(\psi * \rho_\nu)(x-t)] \varphi(x,t) dx dt \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Notando que φ anula-se no exterior de um compacto K de $\mathbb{R}^2$, usando a última convergência e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} [\phi(x+t) + \psi(x-t)] \Box \varphi(x,t) dx dt = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \Box \varphi(x,t) dx dt = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim a solução $u(x,t)$ determinada por D'Alembert é solução fraca da equação (2.4). $\Box$

Referências

[1] Joseph Bertrand, *D'Alembert*, Librarie Hachette et Cia., Paris 1889.

[2] Jean Le Rond D'Alembert, *Recherche sur les vibrations des cordes sonores (p.1-64) puis: supplément au mémoire précédent sur les cordes vibrantes*, Opuscules Mathématiques, tome 1, pp. 65-73 Paris, 1761.

[3] Ernest Mach, *Desarrollo Histórico–Critico de la Mecánica*, Epasa–Calpe Argentina, Buenos Aires, 1949.

[4] Ronald Grimsley, *Jean D'Alembert, 1717-1783*, Claredon Press, Oxford 1963.

[5] Michel Paty, *D'Alembert*, Les Belles Lettres, Paris 1998.

Submetido em 10 de Julho de 2018.
Aceito em 19 de Setembro de 2018.