UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas

Kennedy Félix Rodrigues

Agosto de 2014
São Cristóvão-SE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Kennedy Félix Rodrigues

Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).
ORIENTADOR: Prof. Dr. J. Anderson Valença Cardoso

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno **Kennedy Félix Rodrigues**, orientada pelo Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso.

Agosto de 2014
São Cristóvão-SE

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Rodrigues, Kennedy Félix
R696a Ângulos hiperbólicos e funções hiperbólicas / Kennedy Félix Rodrigues ; orientador José Anderson Valença Cardoso. - São Cristóvão, 2014.
68 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2014.

1. Matemática. 2. Funções (Matemática). 3. Funções trigonométricas. 4. Hipérbole. I. Cardoso, José Anderson Valença, orient. II. Título.

CDU: 517.58

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas

por

Kennedy Felix Rodrigues

Aprovada pela Banca Examinadora:

José Anderson Valença Cardoso
Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Orientador

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB
Primeiro Examinador

Prof. Zaqueu Alves Ramos- UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de agosto de 2014

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedico este trabalho a minha família, que tanto apoiou e incentivou o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradecimentos

A Deus, por amparar nos momentos difíceis, dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e suprir todas as minhas necessidades. Ao meu orientador, Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso, pelo incentivo, dedicação e, principalmente, por acreditar em mim. A todo o corpo docente da Universidade Federal de Sergipe que integra a Rede Nacional do PROFMAT, pelo profissionalismo e ensinamentos. A minha família: Mãe, Sogra, irmãs, cunhada e, em especial, a minha esposa Viviane que, enquanto me dedicava a esse trabalho, gerava em seu ventre o nosso bem mais precioso (nossa "princesa Sophia") e sempre demonstrando carinho, paciência e incentivo. Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo, espírito de equipe e amizade, em especial, a Chicão, Luiz, Marconi, Alan, Edi- Ackel, Verônica, Lucas e Janaína.

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo estudar as funções hiperbólicas através dos conceitos e propriedades da hipérbole. Apresenta-se uma revisão sobre ângulos trigonométricos e funções trigonométricas de maneira conveniente ao uso na sequência do trabalho. Faz-se um estudo sobre hipérbole, descrevendo seus principais elementos e propriedades, a exemplo de suas equações na forma canônica e na forma de equação do segundo grau. No caso específico da hipérbole de equação $xy = a$, define-se rotação, setor e ângulo hiperbólicos e estuda-se propriedades como preservação de área de triângulo sobre a hipérbole e de setor hipérbolico. Realiza-se um estudo das funções hiperbólicas, apresentando as definição do seno, cosseno e demais funções hiperbólicas e suas propriedades, a exemplo das relações de soma de ângulos hiperbólicos, que são tratadas com e sem a utilização de funções exponenciais.

Palavras-Chave: Funções trigonométricas, Hipérbole, Rotação hiperbólica, Ângulo hiperbólico, Funções hiperbólicas.

Abstract

This work has as main objective to study the functions through the concepts and properties of hyperbole. We present a review on trigonometric angles and trigonometric functions in a convenient way for use in the work. A study is made of hyperbole, describing its main elements and properties, such as its equations in canonical form and in the form of equation of the second degree. In the specific case of the hyperbola of equation $xy = a$, it is defined rotation, hyperbolic sector and angle, and properties such as the preservation of a triangle area on hyperbole and hyperbolic sector. A study of the functions hyperbolic, presenting the definition of sine, cosine and other hyperbolic functions and their properties, like the hyperbolic angle summing relations, which are treated with and without the use of exponential functions.

Key-Words: Trigonometric functions, Hyperbola, Hyperbolic rotation, Hyperbolic angle, Hyperbolic functions.

Sumário

Introdução

As funções hiperbólicas são comumente estudadas em cursos de cálculo diferencial e integral e apresentadas geralmente sem qualquer evidência de relação com uma hipérbole. Veja por exemplo o relato retirado do livro do James Stewart [4] na introdução das funções hiperbólicas:

> "Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente em matemática e suas aplicações e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas tem com o círculo. Por esta razão são chamadas funções hiperbólicas, particularmente seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e assim por diante".

É dessa maneira que a maioria dos livros de Cálculo I inicia a sua abordagem ao tema "Funções Hiperbólicas"(veja por exemplo: [1, 4, 5]). Em seguida, sem mostrar de fato a relação existente com a hipérbole, são definidas as funções hiperbólicas com o uso de funções exponenciais. São apresentadas algumas identidades, suas derivadas e integrais, esboçados os gráficos das funções e, finalmente, são definidas as funções hiperbólicas inversas. Esse tipo de abordagem ao tema, como será visto, facilita a verificação das propriedades e identidades das funções hiperbólicas e todas as demais interpelações do Cálculo, como o estudo das derivadas e integrais dessas funções. Todavia, muitas vezes se torna incompreensível para o aluno, por exemplo, juntar palavras como seno e hipérbole para nomear um $(e^x - e^{-x})/2$. O presente trabalho visa estudar as funções hiperbólicas através dos conceitos e propriedades da hipérbole e mostrar que satisfazem um número de propriedades que são análogas às conhecidas propriedades trigonométricas. Acreditamos que com esse tratamento ao tema, seja possível iniciar a abordagem às funções hiperbólicas, sem o uso das funções exponenciais, ainda no ensino médio quando o aluno já está familiarizado com os conceitos de funções trigonométricas e de geometria analítica (em particular, a hipérbole). Alternativamente, o presente trabalho pode ser utilizado como material de consulta para uma introdução ao estudo das funções hiperbólicas.

Para efeitos didáticos, nosso trabalho será dividido em quatro capítulos que terão a seguinte estrutura:

No Capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre ângulos trigonométricos e funções trigonométricas (conteúdos facilmente encontrados em [1, 2, 4], por exemplo, e tantos outros textos disponíveis na literarura). Conceituamos ângulo trigonométrico de forma relativamente diferente da usual, através da relação de ângulo trigonométrico com a área de setor circular. As funções trigonométricas são definidas no círculo unitário $X^2 + Y^2 = 1$, através de relações entre as coordenadas dos pontos do círculo. Por fim, as principais identidades das funções trigonométricas, inclusive as relativas a soma de ângulos, são apresentadas e demonstradas através das propriedades da semelhança de triângulos, em uma construção no círculo.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da hipérbole e suas propriedades. É apresentada uma definição de hipérbole no plano e expostos seus principais elementos, como: focos, vértices, eixo focal, eixo não focal e assíntotas; e conceituada a hipérbole equilátera. São exibidas equações da hipérbole na forma canônica e na forma de equação do segundo grau e traçados os respectivos gráficos. Em uma rotação de eixos no plano cartesiano, são apresentadas as equações de transformação das coordenadas dos pontos em um sistema inicial a um novo sistema. Definimos Rotação Hiperbólica e, particularmente, aplicamos os seus efeitos no estudo da hipérbole de equação $xy = a$, verificando algumas de suas propriedades, como por exemplo: preservação de área de triângulo no plano, ponto médio e preservação de área de setor hiperbólico.

O Capítulo 3 é destinado ao principal objetivo de nosso trabalho que é o estudo das funções hiperbólicas através dos conceitos e propriedades da hipérbole. Inicialmente, definimos ângulo hiperbólico e apresentamos, após uma rotação hiperbólica na hipérbole $xy = (1/2)$, as propriedades de preservação de ângulo hiperbólico e das relações de segmentos tomados de maneira conveniente. Na hipérbole unitária $X^2 - Y^2 = 1$, são apresentadas as definição do seno, cosseno e demais funções hiperbólicas, de maneira análoga à que foi feita no Capítulo 1 para a definição das funções trigonométricas, em um círculo unitário $X^2+Y^2 = 1$. As principais identidades, inclusive as relativas à soma de ângulos hiperbólicos, são apresentadas e verificadas através de relações de semelhança de triângulos, em uma construção na hipérbole.

O Capítulo 4 apresenta a relação entre as funções hiperbólicas definidas por ângulo hiperbólico e as funções exponenciais e^x e e^{-x}. Isso possivelmente explica porque são comumente encontradas nos diversos livros de cálculo diferencial e integral, as definições das funções hiperbólicas muitas vezes sem menção à hipérbole. A apresentação inicia-se com a utilização de uma integração simples, obtendo a fórmula do cálculo da área de um setor hiperbólico, que relaciona o logarítmo neperiano com as coordenadas dos pontos da hipérbole. A partir de uma rotação de eixos, obtemos as coordenadas, nos sistemas xOy e XOY, dos pontos da hipérbole que delimitam o setor hiperbólico e aplicamos na relação obtida no cálculo da área de setor hiperbólico. Dessa forma, as funções hiperbólicas passam a ser expressas como combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x}. Finalmente, algumas identidades e relações de soma de ângulos hiperbólicos são tratadas com a utilização das funções exponenciais.

Capítulo 1

Funções Trigonométricas

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e propriedades das funções trigonométricas que darão ao leitor maior familiaridade com as notações utilizadas, além de servirem de suporte para o tema principal deste trabalho.

1.1 Ângulos e Funções Trigonométricas

1.1.1 Ângulos Circulares

Considere a circunferência unitária $X^2+Y^2=1$ de centro O, no plano cartesiano XOY (Figura 1.1):

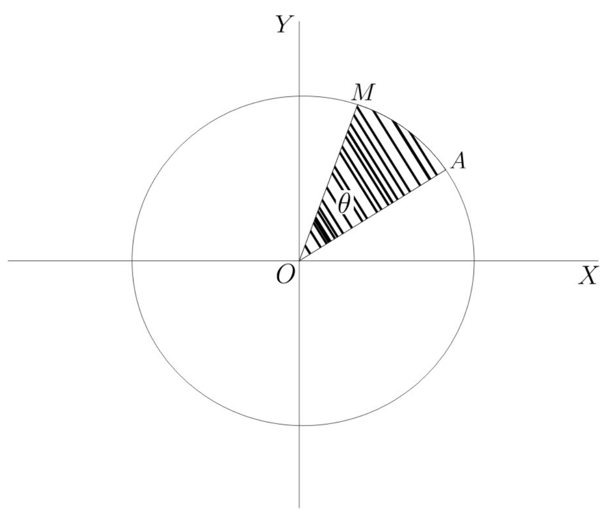

Figura 1.1: Ângulo Circular

Definição 1.1. *Sejam A e M pontos na circunferência unitária $X^2 + Y^2 = 1$. A região delimitada pelos segmentos OA e OM e pela parte do círculo compreendida entre A e M (arco AM) é chamada de setor circular.*

Sejam A e M pontos na circunferência unitária. O ângulo circular θ entre os raios OA e OM é definido usualmente como sendo o comprimento do arco AM. Embora essa seja uma das maneiras mais comuns para definir ângulo circular, como a área da circunferência unitária é π e o arco de uma volta completa mede 2π, usaremos a seguinte forma equivalente:

Definição 1.2. *Dados A e M pontos na circunferência unitária, definimos o ângulo circular θ entre os segmentos OA e OM como sendo duas vezes a área do setor circular determinado por A, O e M.*

Observação 1.3. *Suponha a a medida da área do setor circular AOM. Aplicando uma regra de três simples, notamos que $2\pi a = \theta\pi$, consequentemente, $\theta = 2a$ ou $a = \frac{\theta}{2}$. Desse modo, o ângulo θ pode ser entendido como sendo um setor circular de área $\frac{\theta}{2}$. Se a circunferência não fosse unitária a medida do ângulo seria $\theta = \frac{2a}{r}$.*

Exemplo 1.4. *Um ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$, em uma circunferência unitária, corresponde a um setor circular de área igual a $\frac{\pi}{6}$.*

Exemplo 1.5. *Um setor circular de área igual a $\frac{3\pi}{4}$, em uma circunferência unitária, corresponde a um ângulo θ de medida $\frac{3\pi}{2}$.*

1.2 Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo ou, de forma mais geral, como razões de segmentos ou de coordenadas de pontos no círculo unitário.

Considerando o setor circular AOM (Figura 1.2), para definir as funções seno e cosseno, tracemos por M uma perpendicular ao eixo OX, determinando P no segmento OA.

Definição 1.6. *Definimos as funções seno e cosseno, respectivamente, por*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PM}{OA} \qquad e \qquad \cos\theta = \frac{OP}{OA}.$$

Lembrando que no círculo unitário o raio $OA = 1$, podemos escrever também

$$\operatorname{sen}\theta = PM \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = OP.$$

Exemplo 1.7. *O seno de um ângulo θ de medida $\frac{\pi}{6}$ é igual a $\frac{1}{2}$.*

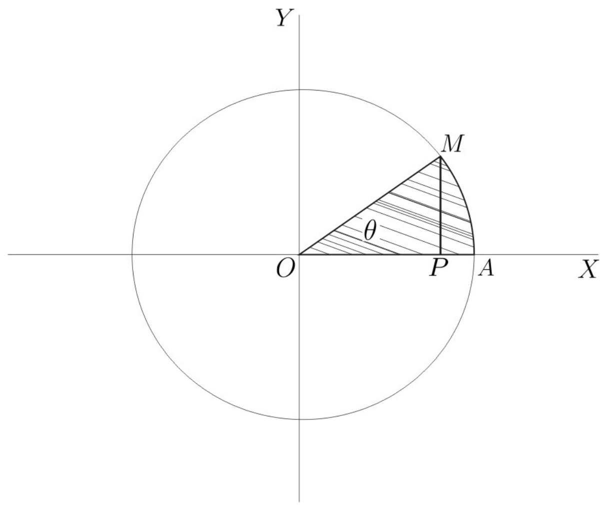

Figura 1.2: Ângulo Circular a partir do eixo OX

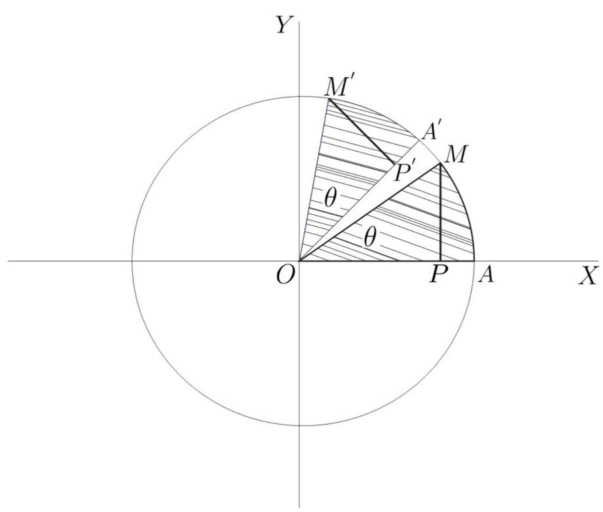

Figura 1.3: Ângulos Circulares Iguais

Observação 1.8. *Note que, na definição das funções trigonométricas seno e cosseno, consideramos um setor circular particular, com o segmento OA sobre o eixo OX. Observe que, apesar disso, não há perda de generalidade caso se considere um outro setor circular na mesma circunferência (Figura 1.3). Com efeito, considere um setor circular $A'OM'$ da circunferência $X^2+Y^2=1$, de mesma área que o setor circular AOM. Agora, traçando por M' uma perpendicular ao segmento OA', determinamos o ponto P'. Temos que*

$$\frac{P'M'}{OA'}=\frac{PM}{OA} \qquad e \qquad \frac{OP'}{OA'}=\frac{OP}{OA}.$$

De fato, note que (Figura 1.3) os triângulos OPM e $OP'M'$ são iguais pelo critério de igualdade de triângulos "ALA" (o lado $OM=OM'=1$ e os ângulos $POM=P'OM'=\theta$ e $OMP=OM'P'=\frac{\pi}{2}-\theta$). Dessa forma, além de $OA=OA'=1$, temos que

$$PM=P'M' \qquad e \qquad OP=OP'$$

e consequentemente,

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{P'M'}{OA'}=\frac{PM}{OA} \qquad e \qquad \cos\theta=\frac{OP'}{OA'}=\frac{OP}{OA}.$$

Com as funções seno e cosseno definidas, podemos definir as demais funções trigonométricas. Considere a Figura 1.4.

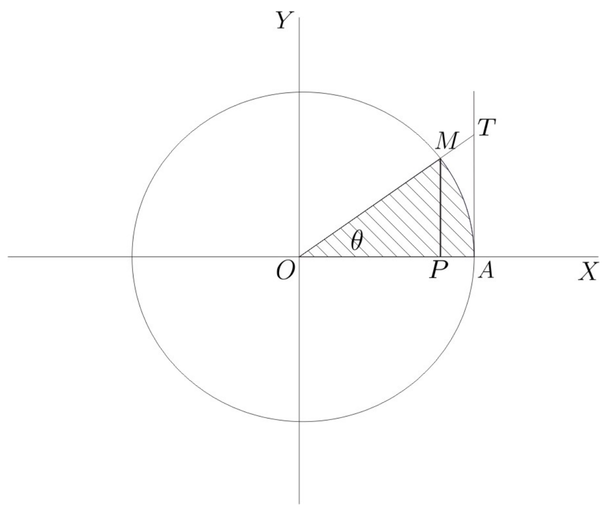

Figura 1.4: Definição da Tangente

Definição 1.9. *Definimos as funções tangente, secante, cossecante e cotangente, respectivamente, por*

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad e \qquad \operatorname{cotg}\theta=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

onde assumimos que os denominadores são não nulos.

As funções trigonométricas definidas possuem as seguintes propriedades:

Propriedade 1.10. $\tan\theta = AT$, *onde* T *é o ponto de interseção entre as retas determinada pelos pontos* O *e* M *e a tangente à circunferência no ponto* A *(veja Figura 1.4).*

Demonstração. De fato, pela semelhança entre os triângulos OPM e OAT, concluímos que:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA}.$$

Sendo $OA = 1$,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{PM}{OP} = AT. \tag{1.1}$$

■

Propriedade 1.11. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Demonstração. De fato, utilizando as coordenadas do ponto M ($X = OP$ e $Y = PM$) e substituindo na equação da circunferência unitária $X^2 + Y^2 = 1$, temos que:

$$X^2 + Y^2 = (OP)^2 + (PM)^2 = 1.$$

Logo,

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \tag{1.2}$$

■

Propriedade 1.12. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Demonstração. De fato, dividindo ambos os membros da Equação (1.2) por $\cos^2\theta$, temos que

$$1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

ou seja,

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \tag{1.3}$$

■

Propriedade 1.13. $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$.

Demonstração. De fato, dividindo ambos os membros da equação (1.2) por $\operatorname{sen}^2\theta$, temos

$$\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

isto é,

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{1.4}$$

■

1.3 Soma de Ângulos e Funções Trigonométricas

Nesta seção serão apresentadas as fómulas de adição para as funções trigonométricas. Mostramos na seção anterior que movendo o ângulo θ formado pelos raios OA e OM para a posição dos raios OA' e OM', respectivamente (Figura 1.3), temos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{P'M'}{OA'} = \frac{PM}{OA} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{OP'}{OA'} = \frac{OP}{OA}$$

Propriedade 1.14 (Identidades trigonométricas da soma). *Dados dois ângulos circulares α e β, temos que*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \tag{1.5}$$

e

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta. \tag{1.6}$$

Demonstração. Sejam os ângulos $A\hat{O}M = \alpha$ e $M\hat{O}M' = \beta$ (Figura 1.5) e façamos uma

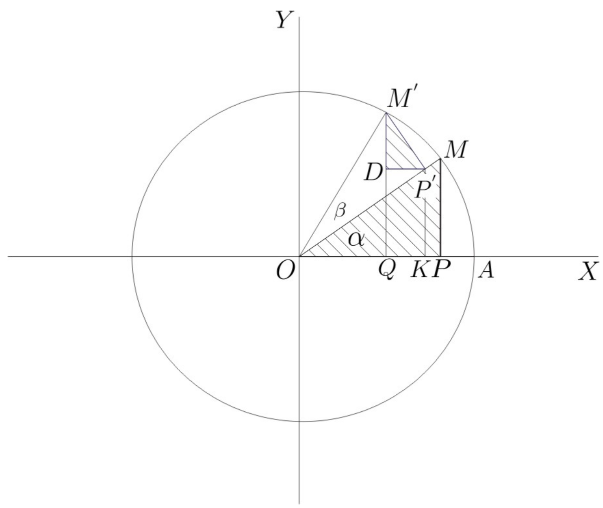

Figura 1.5: Soma de Ângulos Trigonométricos

construção com os seguintes passos:

1. Traçamos um reta por M e outra por M', ambas paralelas ao eixo OY, determinando os pontos P e Q, respectivamente, no eixo OX;

2. Traçamos uma reta por M', perpendicular ao raio OM, determinando o ponto P' em OM;

3. Traçamos duas retas por P': uma paralela ao eixo OX determinando o ponto D de interseção com o segmento QM' e outra paralela ao eixo OY, determinando o ponto K no eixo OX.

Pela definição das funções seno e cosseno, temos que

$$\text{sen}\alpha = PM, \quad \cos\alpha = OP, \quad \text{sen}\beta = P'M', \quad \cos\beta = OP',$$

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = QM' \quad \text{e} \quad \cos(\alpha+\beta) = OQ.$$

Note que os triângulos OPM e OKP' são semelhanes pois ambos são retângulos e têm um ângulo em comum. Os triângulos OPM e $DP'M'$ também são semelhantes, pois ambos são retângulos e os ângulos MOP e $P'M'D$ são iguais, pois são ângulos com os lados reciprocamente perpendiculares. É evidente que, pela Figura 1.5:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = QM' = KP' + DM' \quad \text{e} \quad \cos(\alpha+\beta) = OQ = OK - DP'.$$

Da semelhança dos triângulos OPM e OKP', deduzimos que

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM} \quad \Rightarrow \quad KP' = \frac{OP'}{OM}PM$$

e

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM} \quad \Rightarrow \quad OK = \frac{OP'}{OM}OP.$$

Da semelhança dos triângulos OPM e $DP'M'$, teremos

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM} \quad \Rightarrow \quad DM' = \frac{P'M'}{OM}OP$$

e

$$\frac{DP'}{P'M'} = \frac{PM}{OM} \quad \Rightarrow \quad DP' = \frac{P'M'}{OM}PM.$$

Como

$$PM = \text{sen}\alpha, \quad OP = \cos\alpha, \quad \frac{P'M'}{OM} = \text{sen}\beta \quad \text{e} \quad \frac{OP'}{OM} = \cos\beta,$$

temos que

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = KP' + DM' = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$$

e

$$\cos(\alpha+\beta) = OK - DP' = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta.$$

■

Usando as Relações (1.5) e (1.6) e de (1.1) e (1.2), podemos deduzir outras identidades da trigonometria.

Propriedade 1.15.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}. \tag{1.7}$$

Demonstração. De (1.5) e (1.6) e pela definição de tangente, temos que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta}. \tag{1.8}$$

Dividindo por $\cos\alpha\cos\beta$ o numerador e o denominador da última fração do lado direito de (1.8), obtemos a Equação (1.7). ■

Observação 1.16. *Se $\alpha = \beta$, das relações (1.5), (1.6) e (1.7), obtemos*

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\beta, \tag{1.9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \tag{1.10}$$

e

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \tag{1.11}$$

Propriedade 1.17 (Identidade trigonométrica da diferença)**.** *Dados dois ângulos circulares α e β, temos que*

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha, \tag{1.12}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta \tag{1.13}$$

e

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \tag{1.14}$$

Demonstração. Multiplicando (1.5) por $\cos\beta$ e (1.6) por $\text{sen}\beta$ e subtraindo o resultado, encontramos

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\text{sen}\beta. \tag{1.15}$$

Multiplicando (1.5) por $\text{sen}\beta$ e (1.6) por $\cos\beta$ e somando o resultado, encontramos

$$\cos\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}\beta. \tag{1.16}$$

Nas expressões (1.15) e (1.16) substituindo $(\alpha+\beta)$ por α e α por $(\alpha-\beta)$, obtemos (note que $2\alpha = \alpha+\alpha = (\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$):

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha$$

e

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta.$$

Dividindo, membro a membro, (1.12) por (1.13), obtemos

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

■

Propriedade 1.18. *Relações de seno, cosseno e tangente em função da tangente do ângulo metade:*

$$\text{sen}\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{1.17}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{1.18}$$

e

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Demonstração. Das equações (1.3), (1.9) e (1.11), obtemos

$$\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\sec^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

e

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Finalmente, de (1.17) e (1.18) e da definição de tangente, obtemos

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

■

Observação 1.19. *Propriedade do Arco Metade: das Relações (1.10) e (1.2), deduzimos as equações do arco metade. Fazendo $2\alpha = \beta$, temos*

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$

e

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}.$$

Dividindo $\text{sen}\frac{\beta}{2}$ *por* $\cos\frac{\beta}{2}$*, obtemos*

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}}.$$

Capítulo 2

Hipérbole e Rotação Hiperbólica

No presente capítulo, introduziremos conceitos e resultados básicos sobre Hipérbole.

2.1 Hipérboles e Elementos

Definição 2.1. *Considere os pontos F_1 e F_2 no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e números $c = d(F_1, F_2)/2 > 0$ (distância entre F_1 e F_2) e $a > 0$, com $a < c$. Uma Hibérbole H no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, com focos em F_1 e F_2, é o conjunto de todos os pontos P do $\mathbb{R}^2$ para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$. Simbolicamente:*

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

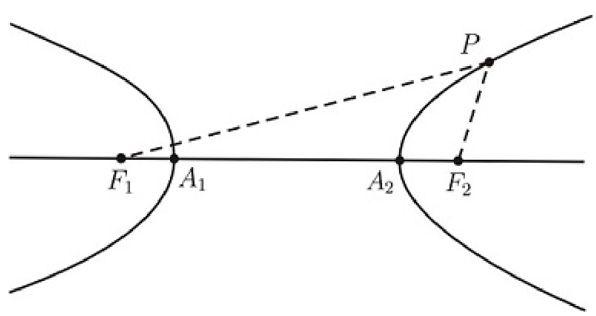

Figura 2.1: Hipérbole H

Terminologias

- Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole e a reta que os contém é a reta *focal.*
- A interseção da hipérbole H com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados *vértices* da hipérbole.

- O segmento A_1A_2 é denominado *eixo focal* da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$ (Figura 2.1).

- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o *centro* da hipérbole (Figura 2.2). O centro C é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

- A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a reta *não focal* da hipérbole. Como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intersecta a reta não focal ℓ', pois, se $P \in \ell'$, temos (Figura 2.2):

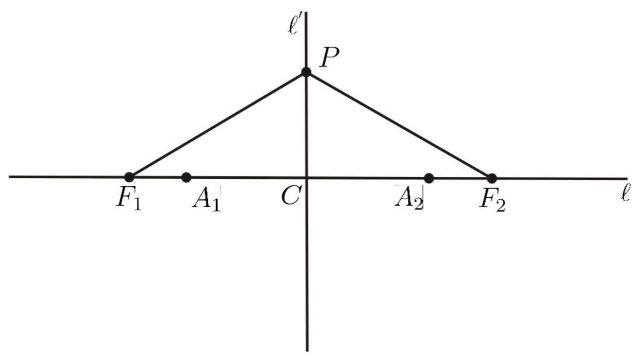

Figura 2.2: Pontos da reta não focal não pertencem a H

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a$$

- O segmento B_1B_2, perpendicular ao eixo focal que tem o ponto médio C e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado *eixo não focal* da hipérbole, e B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole (Figura 2.3).

- A *excentricidade* da hipérbole H é $e = \frac{c}{a}$, note que $e > 1$, pois $c > a$.

- O *retângulo de base* da hipérbole H é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as *assíntotas* de H (Figura 2.4).

  Portanto, *as assíntotas de H são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação à reta focal.* Assim, ℓ e ℓ' são as bissetrizes das assíntotas.

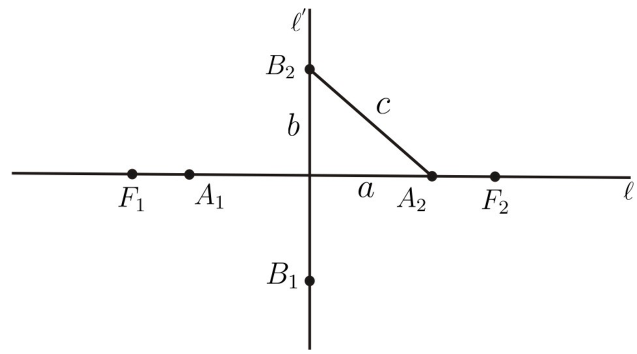

Figura 2.3: Relação dos componentes a, b e c

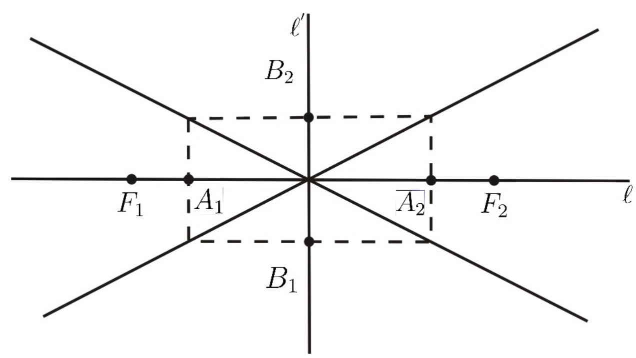

Figura 2.4: Retângulo de Base e Assíntotas da Hipérbole

Observação 2.2. *Definida de forma simples, uma* ***assíntota*** *de uma curva é uma reta na qual a curva se aproxima indefinidamente sem cortá-la em nenhum ponto.*

- Uma hipérbole é *equilátera* se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$. O retângulo de base dessa hipérbole é um quadrado e as assíntotas se intersectam perpendicularmente.

2.1.1 Forma Canônica e Esboço do Gráfico da Hipérbole

Vamos obter o equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy, no caso em que a reta focal é o eixo Ox e o centro da hipérbole é a origem do sistema (o caso em que a reta focal é o eixo Oy é análogo). Sejam:

$$\begin{array}{lll} F_1 = (-c, 0); & A_1 = (-a, 0); & B_1 = (0, -b) \\ F_2 = (c, 0); & A_2 = (a, 0); & B_2 = (0, b) \end{array}$$

Logo,

$$P = (x, y) \in H \quad \Leftrightarrow \quad |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

de modo que

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$$

e, substituindo as coordenadas dos pontos F_1, F_2, A_1, A_2 , B_1 e B_2, temos que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ (ramo direito de } H) \tag{2.1}$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \text{ (ramo esquerdo de } H) \tag{2.2}$$

Desenvolvendo (2.1) e (2.2) e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, concluímos que

$$P = (x, y) \in H \quad \Leftrightarrow \quad (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

onde obtemos a curva com equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.3}$$

chamada de equação da hipérbole na sua posição padrão (na sua forma canônica). Note que a equação (2.3) fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$; dessa forma, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos. Para encontrar as interseções com o eixo Ox, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm\, a$. Mas, se colocarmos $x = 0$ na Equação (2.3), teremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; dessa forma, não existe interseção com o eixo Oy. Na verdade, da Equação (2.3) obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

o que demonstra que $x^2 \geq a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geq a$. Assim temos que $x \geq a$ ou $x \leq -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, chamadas *ramos*. O gráfico da hipérbole de Equação (2.3) está esboçado na Figura 2.5.

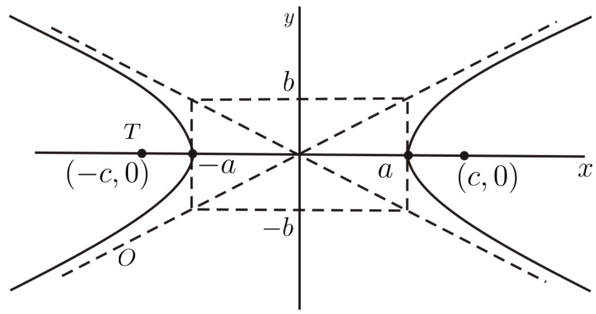

Figura 2.5: Hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Trocando os papéis de x e y, obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

que também representa uma hipérbole cujo gráfico está esboçado na Figura 2.6:

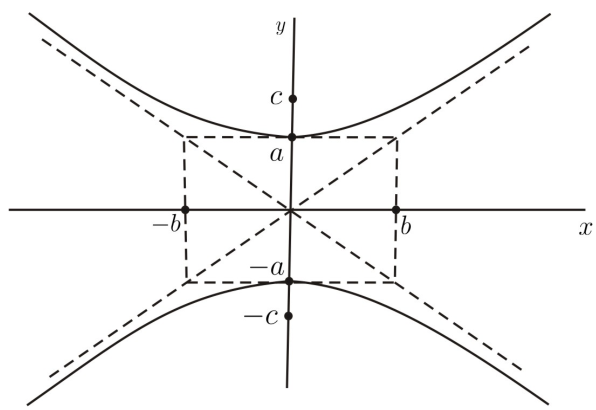

Figura 2.6: Hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

2.1.2 Rotação de Eixos

No plano, considere dois pares de eixos coordenados: os usuais Ox e Oy e dois novos eixos OX e OY, obtidos fazendo uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo θ nos eixos Ox e Oy, conforme Figura (2.7).

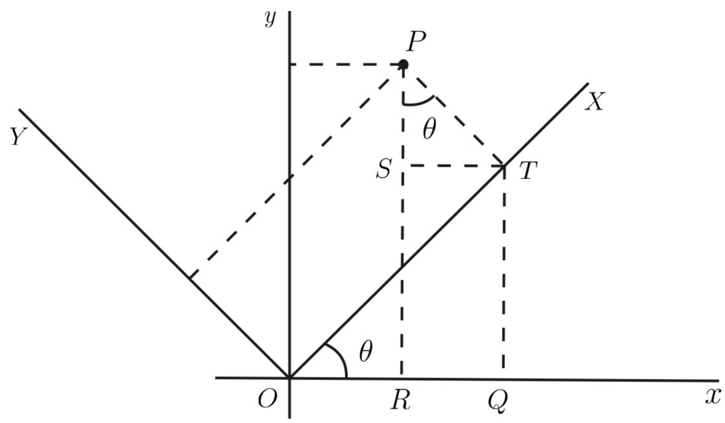

Figura 2.7: Rotação de Eixos

A relação entre as coordenadas (x, y) e (X, Y) é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.3. *Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem e as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da rotação são (x, y) e (X, Y), respectivamente, então as equações de transformação do sistema original ao novo são dadas por:*

$$x = X\cos\theta - Y\mathrm{sen}\theta \qquad e \qquad y = X\mathrm{sen}\theta + Y\cos\theta. \tag{2.4}$$

Demonstração. Da Figura 2.7, temos que $x = OR$, $X = OT$, $y = PR$ e $Y = PT$, assim

$$x = OR = OQ - RQ = X\cos\theta - Y\mathrm{sen}\theta$$

e

$$y = PR = RS + SP = QT + SP = X\mathrm{sen}\theta + Y\cos\theta.$$

■

Observação 2.4. *As expressões dadas em (2.4) recebem o nome de Equações de Rotação de Eixos. Também podemos escrever a relação entre as coordenadas (x, y) e (X, Y) através de um produto de matrizes, isto é,*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

o que nos dá indícios de que podemos também tratar deste assunto utilizando-se da Álgebra Linear, envolvendo conceito de autovalores e autovetores. Todovia, este não é o objetivo deste trabalho.

2.1.3 Equação Geral do 2^o Grau nas variáveis x e y

Uma equação do 2^o grau nas variáveis x e y dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0, \tag{2.5}$$

onde $AC < 0$ e $F \neq 0$ ou $A = C = 0$ e $BF < 0$, é também equação de uma hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas xOy, porém com reta focal não necessariamente sendo um dos eixos coordenados (Ox ou Oy), a depender de B ser igual ou diferente de zero. Para verificar essa afirmativa, consideremos os dois casos:

1. Caso $AC < 0$ e $F \neq 0$: como $AC < 0$, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $C < 0 < A$. Agora note que este caso subdivide-se em $B = 0$ e $B \neq 0$. Se $B = 0$, podemos reescrever a Equação (2.5) na forma:

- para $F > 0$:
$$\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{-F}{C}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{F}{A}}\right)^2} = 1.$$

- para $F < 0$:
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-F}{A}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{F}{C}}\right)^2} = 1.$$

Para verificar o subcaso $B \neq 0$, consideramos as equações de rotação dadas em (2.4), com ângulo θ a princípio não especificado, e as substituímos em (2.5). Logo, temos

$$A(X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta)^2 + B(X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta)(X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta) + C(X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta)^2 + F = 0.$$

Desenvolvendo os termos desta expressão, obtemos

$$(A\cos^2\theta + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)X^2 + (-2A\cos\theta\operatorname{sen}\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta + 2C\cos\theta\operatorname{sen}\theta)XY +$$
$$+(A\operatorname{sen}^2\theta - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C\cos^2\theta)Y^2 + F = 0. \tag{2.6}$$

Agora, note que fazendo

$$2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta = 0 \tag{2.7}$$

podemos determinar um ângulo θ que eliminará o termo misto XY. Observe que usando as relações trigonométricas (1.9) e (1.10) em (2.7), obtemos

$$(A - C)\operatorname{sen}(2\theta) = B\cos(2\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}, \tag{2.8}$$

para $A \neq C$. No caso em que $A = C$, temos $B\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta = 90^o \Rightarrow \theta = 45^o$.

Assim, com a condição dada em (2.8), a Equação (2.6) se reduz a

$$(A\cos^2\theta + B\cos\theta\text{sen}\theta + C\text{sen}^2\theta)X^2 + (A\text{sen}^2\theta - B\cos\theta\text{sen}\theta + C\cos^2\theta)Y^2 + F = 0. \quad (2.9)$$

Vamos agora verificar que o coeficiente de X^2 é positivo e o de Y^2 é negativo. De fato, usando as Relações (2.8) e (1.10), temos

$$B = (A - C)\frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\cos^2\theta}{\cos(2\theta)} \geq 1.$$

Desenvolvendo o coeficiente de X^2 em (2.9), encontramos que

$$\begin{aligned}
&A\cos^2\theta + (A-C)\frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)}\cos\theta\text{sen}\theta + C\text{sen}^2\theta \\
&\quad = A\cos^2\theta + (A-C)\frac{2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos(2\theta)} + C\text{sen}^2\theta \\
&\quad \geq A\cos^2\theta + (A-C)2\text{sen}^2\theta.1 + C\text{sen}^2\theta \\
&\quad = A\cos^2\theta + 2A\text{sen}^2\theta - 2C\text{sen}^2\theta + C\text{sen}^2\theta \\
&\quad = A\cos^2\theta + 2A\text{sen}^2\theta - C\text{sen}^2\theta > 0,
\end{aligned}$$

ou seja, o coeficiente de X^2 é estritamente positivo.

Analogamente, para o coeficiente de Y^2 em (2.9), verificamos que encontramos que

$$\begin{aligned}
&A\text{sen}^2\theta - (A-C)\frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)}\cos\theta\text{sen}\theta + C\cos^2\theta \\
&\quad = A\text{sen}^2\theta - (A-C)\frac{2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos(2\theta)} + C\cos^2\theta \\
&\quad = A\text{sen}^2\theta + (A-C)2\text{sen}^2\theta\left(-\frac{\cos^2\theta}{\cos(2\theta)}\right) + C\cos^2\theta \\
&\quad \leq A\text{sen}^2\theta + (A-C)2\text{sen}^2\theta\,(-1) + C\cos^2\theta \\
&\quad = A\text{sen}^2\theta - 2A\text{sen}^2\theta + 2C\text{sen}^2\theta + C\cos^2\theta \\
&\quad = -A\text{sen}^2\theta + 2C\text{sen}^2\theta + C\cos^2\theta < 0,
\end{aligned}$$

ou seja, o coeficiente de Y^2 é estritamente negativo. Fazendo

$$A_1 = A\cos^2\theta + B\cos\theta\text{sen}\theta + C\text{sen}^2\theta$$

e

$$C_1 = A\text{sen}^2\theta - B\cos\theta\text{sen}\theta + C\cos^2\theta$$

obtemos em (2.9):

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F = 0.$$

Portanto,

- para $F > 0$:
$$\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-F}{C_1}}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{F}{A_1}}\right)^2} = 1.$$

- para $F < 0$:
$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-F}{A_1}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{F}{C_1}}\right)^2} = 1.$$

Isto conclui a verificação do caso $AC < 0$ e $F \neq 0$.

2. Caso $A = C = 0$ e $BF < 0$: neste caso consideramos as equações de rotação dadas em (2.4), com ângulo $\theta = 45°$, e as substituímos em (2.5). Logo, temos
$$B(X\cos 45° - Y \operatorname{sen} 45°)(X \operatorname{sen} 45° + Y\cos 45°) + F = 0.$$
Desenvolvendo os termos desta expressão, obtemos
$$B\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2\right) + F = 0,$$
ou seja,
$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-2F}{B}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-2F}{B}}\right)^2} = 1.$$
Isto conclui a verificação do segundo caso.

Daremos agora alguns exemplos de aplicação:

Exemplo 2.5. *Encontrar o ângulo θ que devem ser rotacionados os eixos Ox e Oy, na equação (2.10) para que seja eliminado o termo xy e, em seguida, trace o gráfico:*
$$5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 = 4. \tag{2.10}$$

Resolução: *Sendo $A = 5$, $B = 6\sqrt{3}$ e $C = -1$, então*
$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{6\sqrt{3}}{5-(-1)} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = 60^o \Rightarrow \theta = 30^o.$$

Assim,
$$x = X\cos 30^o - Y \operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \tag{2.11}$$
e
$$y = X \operatorname{sen} 30^o + Y\cos 30^o = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), obtemos:

$$5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{1}{2}Y\right)^2+6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{1}{2}Y\right)\left(\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)-\left(\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2=4$$

$$\Rightarrow\ 5(3X^2-2\sqrt{3}XY+Y^2)+6\sqrt{3}(\sqrt{3}X^2+2XY-\sqrt{3}Y^2)-X^2-2\sqrt{3}X^2Y^2-3Y^2=16$$

$$\Rightarrow\ 15X^2+5Y^2+18X^2-18Y^2-X^2-3Y^2=16$$

$$\Rightarrow\ 32X^2-16Y^2=16\Rightarrow 2X^2-Y^2=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{X^2}{1/2}-Y^2=1,$$

a qual representa uma hipérbole centrada na origem, conforme Figura 2.8.

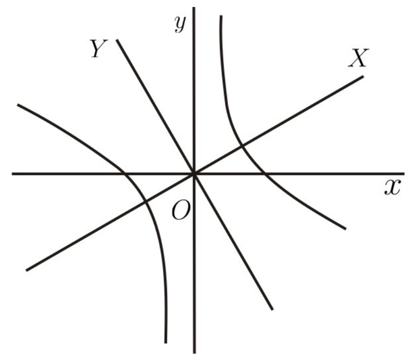

Figura 2.8: Exemplo 2.5

Exemplo 2.6. *Vimos no início deste capítulo que em uma hipérbole equilátera o comprimento do eixo focal é igual ao comprimento do eixo não focal, isto é,* $a=b$. *Substituindo esses valores em (2.3) encontramos*

$$x^2-y^2=a^2$$

Aplicando uma rotação de 45° *no sistema de eixos* xOy*, obtemos*

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2-\frac{1}{2}(X+Y)^2=a^2\Rightarrow XY=\frac{-a^2}{2},$$

a qual representa uma hipérbole cujos ramos estão no segundo e quarto quadrantes em relação aos (Figura 2.9).

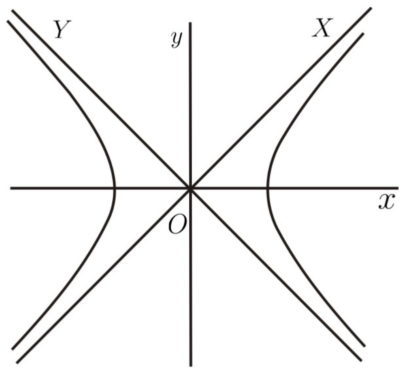

Figura 2.9: Exemplo 2.6

Exemplo 2.7. *Transforme a hipérbole de equação* $xy = \frac{1}{2}$ *na de equação* $X^2 - Y^2 = 1$.
Resolução: *Sendo* $A = C = 0$, *aplicaremos uma rotação de* $45°$ *no sistema de eixos* xOy *para eliminar o termo* xy. *Desse modo, temos*

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$$

e

$$y = X\operatorname{sen} 45^o + Y\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y.$$

Substituindo estas expressões na equação $xy = \frac{1}{2}$, *obtemos*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Observação 2.8. *Em um outro exemplo, pode-se partir da hipérbole de equação* $X^2 - Y^2 = 1$ *para obter a hipérbole de equação* $xy = \frac{1}{2}$. *Nesse caso, fazendo uma rotação de* $-45°$ *no sistema de eixos* XOY, *obtemos:*

$$X = x\cos(-45°) - y\operatorname{sen}(-45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

e

$$Y = x\operatorname{sen}(-45^o) + y\cos(-45^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

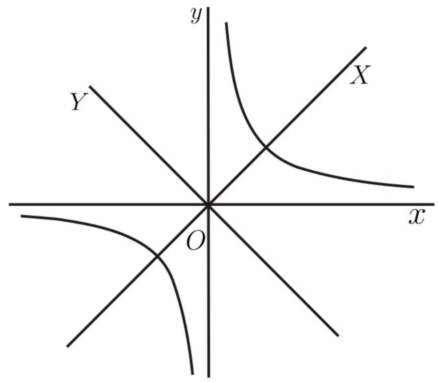

Figura 2.10: Exemplo 2.7

Substituindo estas expressões na equação $X^2 - Y^2 = 1$*, obtemos*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 = 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(-x+y)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad xy = \frac{1}{2},$$

cujo gráfico, com o traçado no sistema de eixos XOY *e* xOy*, está representado na Figura*

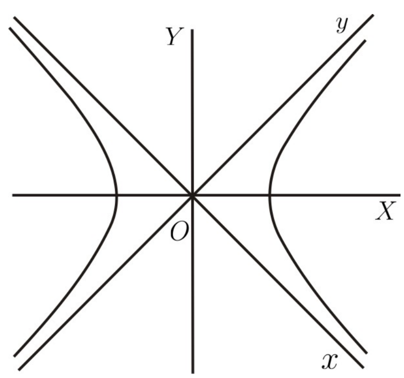

Figura 2.11: Observação 2.8

2.11.

Observação 2.9. *Uma equação do segundo grau nas variáveis* x *e* y *da forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

pode representar uma parábola, uma elipse, uma hipérbole, um par de retas, um ponto ou não representar curva alguma (como por exemplo $x^2 + y^2 + 1 = 0$, pois o lado direito dessa equação é sempre maior do que zero). Para o estudo desses casos é necessário, além do que vimos, o conceito de translação de eixos. Como o presente trabalho não necessitará de conhecimento sobre translação, não faremos o estudo aqui. Maiores detalhes sobre esse tema podem ser consultados na referência [2].

2.2 Propriedades da Hipérbole $xy = a$.

Na presente seção, realizamos um estudo da hipérbole de equação $xy = a$, com $a > 0$, que servirá de base ao entendimento dos próximos capítulos. Analisando a equação dessa hipérbole, observamos que x e y não podem ser nulos pois $a > 0$ e que quanto maior for o valor de x, menor será o valor de y e, inversamente; ou seja, em termos simbólicos, se $x \to \infty$ então $y \to 0$, e se $y \to \infty$ então $x \to 0$. Em uma linguagem geométrica, isso significa que a hipérbole se aproxima indefinidamente dos eixos coordenados Ox e Oy sem tocá-los em nenhum ponto. Dessa forma, os eixos coordenados servem de assíntotas para a nossa hipérbole. Essa hipérbole possui dois ramos para $a > 0$:

- Para x e y positivos: um dos ramos da curva se dispõe no primeiro quadrante;
- Para x e y negativos: o outro ramo da curva se dispõe no terceiro quadrante;

Podemos agora apresentar algumas propriedades.

Propriedade 2.10. *A área do retângulo $MQOP$ (Figura 2.12), limitado pelos eixos coordenados e as retas traçadas por um ponto M da hipérbole, paralelamente aos eixos, é igual a a e não depende da escolha do ponto M.*

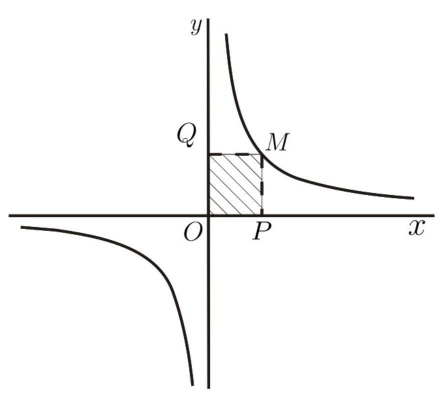

Figura 2.12: Retângulo de Coordenadas

Demonstração. Com efeito, temos que as coordenadas do ponto M são $x = OP$, $y = PM$ e que a área do retângulo $MQOP$ é

$$A_{MQOP} = OP \cdot PM = xy = a,$$

qualquer que seja o ponto sobre a hipérbole. ∎

Observação 2.11. *Se ao retângulo $MQOP$ damos o nome de "retângulo de coordenadas" do ponto M, pode-se determinar a hipérbole $xy = a$ como sendo o lugar geométrico dos pontos (dispostos no primeiro e terceiro quadrantes do sistema de coordenadas) cujos retângulos de coordenadas têm áreas constantes.*

Propriedade 2.12. *A hipérbole possui seus dois ramos simétricos em relação a origem do sistemas de coordenadas O.*[1]

Demonstração. Com efeito, seja o retângulo de coordenadas $MQOP$ do ponto $M = (OP, PM)$ situado no primeiro quadrante, conforme Figura 2.13. Tomemos os ponto Q', simétrico ao ponto Q (em relação ao eixo Ox), e o ponto P', simétrico ao ponto P (em relação ao eixo Oy). Seja M' o ponto do plano cujas coordenadas são $M' = (OP', P'M')$. Note que M'pertence à hipérbole pois os retângulos de coordenadas $MQOP$ e $M'Q'OP'$tem áreas iguais, onde

$$xy = OP \cdot PM = OP' \cdot P'M' = a$$

com $OP = OP'$ e $PM = P'M'$. O ponto M' é simétrico ao ponto M em relação a origem do sistema de coordenadas, pois as diagonais OM e OM' são iguais. ∎

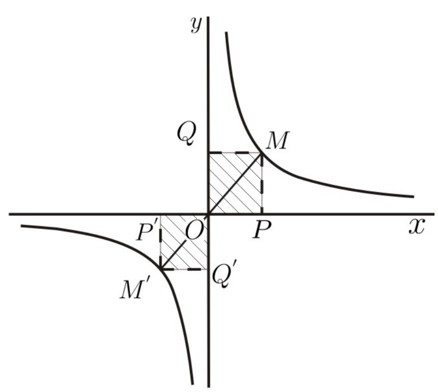

Figura 2.13: Simetria em relação a origem O

Propriedade 2.13. *A hipérbole possui dois eixos de simetria que são representados pelas bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes (reta de equação $y = x$, chamada de reta focal) e do segundo e quarto quandrantes (reta de equação $y = -x$, chamada de reta não focal).*

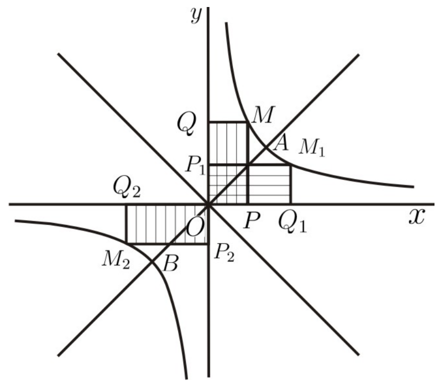

Figura 2.14: Simetria em Relação a $y = x$ e $y = -x$

Demonstração. Com efeito, sejam os retângulos de coordenadas $MQOP$ e $M_1P_1OQ_1$ (Figura 2.14), com $M = (OP, OQ)$ e $M_1 = (OQ_1, OP_1)$, de modo que $OQ = OQ_1$ e $OP = OP_1$. Além disso, temos $Q = (0, OQ)$, $Q_1 = (OQ_1, 0)$, $P = (OP, 0)$ e $P_1 = (0, OP_1)$. Note que o pontos médios dos segmentos QQ_1, PP_1 e MM_1 são, respectivamente:

$$M_{QQ_1} = \left(\frac{OQ}{2}, \frac{OQ}{2}\right), \, M_{PP_1} = \left(\frac{OP}{2}, \frac{OP}{2}\right) \text{ e } M_{MM_1} = \left(\frac{OP + OQ}{2}, \frac{OQ + OP}{2}\right)$$

e que todos pertençem à bissetriz dos quadrantes ímpares (reta $y = x$), como queríamos demonstrar. De maneira análoga, verificamos que a hipérbole é simétrica em relação à reta $y = -x$. ■

2.2.1 Rotação Hiperbólica

No plano, seja a hipérbole de equação $xy = a$ no sistema de coordenadas xOy. Realizemos uma multiplicação de um $k > 0$ na coordenada x de um ponto (x, y) do plano, de modo que obtemos (kx, y). Com essa multiplicação, observe que a hipérbole se transformará em outra hipérbole de equação $xy = ka$, dado que a coordenada y de cada ponto se manterá invariável e a coordenada x será multiplicada por k (Figuras 2.15 e 2.16). Realizando, em seguida, uma multiplicação de $\frac{1}{k}$ na coordenada y do ponto (kx, y), obtemos o ponto $(kx, \frac{y}{k})$. Note que se (x, y) pertence a hipérbole $xy = a$, então o ponto $(kx, \frac{y}{k})$ pertence a mesma hipérbole e é distinto de (x, y) quando $k \neq 1$.

Definição 2.14. *Uma Rotação sobre a hipérbole* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = a\}$, *com coeficiente* $k > 0$, *é uma operação que transforma cada* $(x, y) \in H$ *em* $(kx, \frac{y}{k}) \in H$.

[1] A partir da Propriedadde 2.12, é comum dizer que a hipérole possui um "centro de simetria".

Notação 1. *Por simplicidade, no presente trabalho nos referiremos a uma rotação com coeficiente $k > 0$ sobre a hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = a\}$, apenas como Rotação Hiperbólica. Além disso, tomaremos $a = \frac{1}{2}$ para obtermos a hipérbole de equação $xy = \frac{1}{2}$ (Exemplo 2.7 e Observação 2.8) equivalente à hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$ no sistema de eixos XOY, obtidos após uma rotação de 45^o no sistema de eixos xOy. Chamaremos essa hipérbole de "Hipérbole Unitária" pois a distância do centro aos vértices é igual a 1, assim como denominamos de "Círculo Unitário"o círculo de equação $X^2 + Y^2 = 1$ cujo raio também é igual a 1.*

Observação 2.15. *O nome "Rotação Hiperbólica" se deve ao tipo de transformação durante a qual, todos os pontos da hipérbole "deslizam para cima da curva"(quando $0 < k < 1$, conforme Figura 2.16) ou "deslizam para baixo da curva"(quando $k > 1$, conforme Figura 2.15). Assim, o ponto M passa, inicialmente, ao ponto M_1 e logo em seguida, este último passa a M'. Desse forma, a Rotação Hiperbólica transforma o ponto M da hipérbole no ponto M' da mesma hipérbole. Esta rotação é análoga à rotação de uma circunferência.*

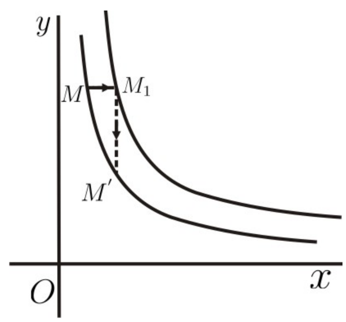

Figura 2.15: Rotação Hiperbólica com $k > 1$

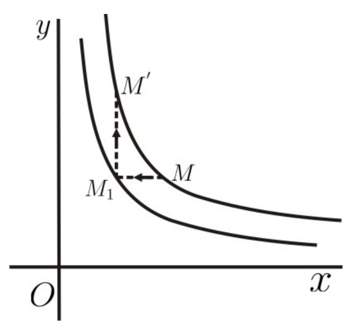

Figura 2.16: Rotação Hiperbólica com $0 < k < 1$

2.2.2 Propriedades da Hipérbole após uma Rotação Hiperbólica

Fazendo uso de uma Rotação Hiperbólica, podemos obter uma série de propriedades da hipérbole $xy = a$ (em particular, $xy = \frac{1}{2}$) que serão utéis ao entendimento dos próximos capítulos.

Propriedade 2.16. *O segmento da tangente à hipérbole $xy = a$, limitado entre os eixos coordenados e a curva, divide-se pelo ponto de tangência em duas partes iguais.*

Demonstração. Com efeito, dado que a bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes ($y = x$) serve de eixo de simetria da hipérbole (Figura 2.17), o segmento K_0L_0 da tangente no vértice A, limitado entre os eixos coordenados, divide-se pelo ponto A, em seu ponto médio.

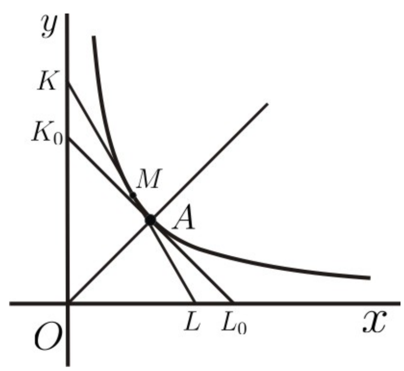

Figura 2.17: Ponto de tangência divide o segmento em duas partes iguais

Sejam $K_0 = (0, 2y)$, $L_0 = (2x, 0)$ e $A = (x, y)$. Após sofrer uma Rotação Hiperbólica, os novos pontos com as respectivas coordenadas, serão: $K = (0, \frac{2y}{k})$, $L = (2kx, 0)$ e $M = (kx, \frac{y}{k})$. Note que M é ponto médio de KL, pois

$$M = \left(\frac{2kx + 0}{2}, \frac{\frac{2y}{k} + 0}{2} \right) = (kx, \frac{y}{k})$$

e que M pertence à hipérbole, pois

$$kx\frac{y}{k} = xy = a,$$

como queríamos demonstrar. ■

Propriedade 2.17. *As áreas dos triângulos cujos lados são formados pelos eixos coordenados e cada uma das tangentes à hipérbole $xy = a$, são todas iguais.*

Demonstração. Seja o triângulo K_0OL_0 que se obtém com a interseção do segmento K_0L_0, da tangente à hipérbole $xy = a$ no ponto A, e os eixos coordenados (Figura 2.17). Considere $K_0 = (0, 2y)$, $L_0 = (2x, 0)$ e os pontos $K = (0, \frac{2y}{k})$, $L = (2kx, 0)$ obtidos de uma Rotação Hiperbólica sobre K_0 e L_0, respectivamente. Como vimos na propriedade anterior, o segmento KL é tangente à hipérbole $xy = a$ no ponto $M = (kx, \frac{y}{k})$ e os triângulos K_0OL_0 e KOL tem mesma área, pois

$$A_{K_0OL_0} = \frac{2x.2y}{2} = \frac{xy}{2} = \frac{2kx.\frac{2y}{k}}{2} = A_{KOL}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Das duas propriedades anteriores, segue que um ramo da hipérbole pode ser determinado como o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que juntamente com os eixos coordenados formam triângulos retângulos de áreas iguais (Figura 2.18).

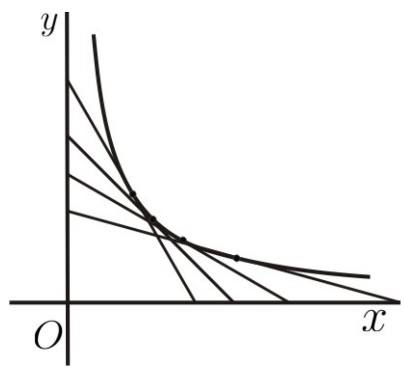

Figura 2.18: Triângulos de áreas iguais

Propriedade 2.18. *Considere os pontos* A, M, $A^{'}$ *e* $M^{'} \in H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{1}{2}\}$, *com* $A^{'}$ *e* $M^{'}$ *obtidos de uma Rotação Hiperbólica sobre* A *e* M, *respectivamente. Temos que a área do triângulo* AOM *é igual a área do triângulo* $A^{'}OM^{'}$.

Demonstração. Inicialmente, note que os pontos sobre a hipérbole são do tipo $(x, \frac{1}{2x})$, pois o produto das coordenadas do ponto é sempre igual a $\frac{1}{2}$. Seja o ponto $O = (0, 0)$ o centro da hipérbole e, em particular, consideremos

$$A = (a, \frac{1}{2a}),\ M = (m, \frac{1}{2m}),\ A^{'} = (ka, \frac{1}{2ka}) \text{ e } M^{'} = (km, \frac{1}{2km})$$

com a e m distintos e diferentes de zero. Observe que os pontos A, O e M não são colineares, visto que os coeficientes angulares das retas OA e OM são distintos e valem, respectivamente, $\frac{1}{2a^2}$ e $\frac{1}{2m^2}$. Bem como, os pontos $A^{'}$, O e $M^{'}$ também não são colineares, visto que os coeficientes angulares das retas OA' e OM' são distintos e valem, respectivamente, $\frac{1}{2k^2a^2}$ e $\frac{1}{2k^2m^2}$. Iremos determinar a área dos triângulos AOM e $A'O'M'$ do ponto de vista da Geometria Analítica: a área de um triângulo é dada pela metade do módulo do determinante das coordenadas dos seus vértices. Assim, temos

$$A_{AOM} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \frac{1}{2a} & 1 \\ m & \frac{1}{2m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2m} - \frac{m}{2a}\right) = \frac{a^2 - m^2}{4am}$$

e

$$A_{A'OM'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ka & \frac{1}{2ka} & 1 \\ km & \frac{1}{2km} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{ka}{2km} - \frac{km}{2ka}\right) = \frac{a^2 - m^2}{4am},$$

ou seja,

$$A_{AOM} = A_{A'OM'}.$$

■

Observação 2.19. *Por esta propriedade, podemos dizer que a Rotação Hiperbólica preserva área de triângulo com um vértice na origem e os demais vértices pertencentes à hipérbole (Figura 2.19);*

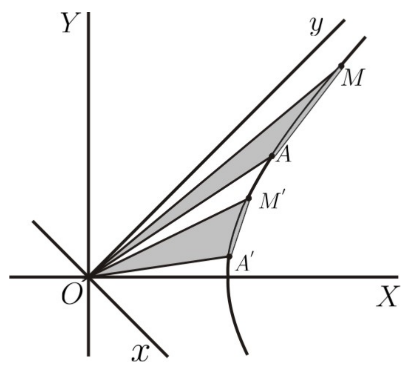

Figura 2.19: Área de Triângulos

Observação 2.20. *A propriedade de preservar área de triângulo pode ser generalizada para quaisquer três pontos distintos do plano. Com efeito, sejam os pontos não colineares*

$$A = (a_1, a_2), \qquad B = (b_1, b_2) \qquad e \qquad C = (c_1, c_2)$$

e os pontos

$$A' = (ka_1, \frac{a_2}{k}), \qquad B' = (kb_1, \frac{b_2}{k}) \qquad e \qquad C' = (kc_1, \frac{c_2}{k}),$$

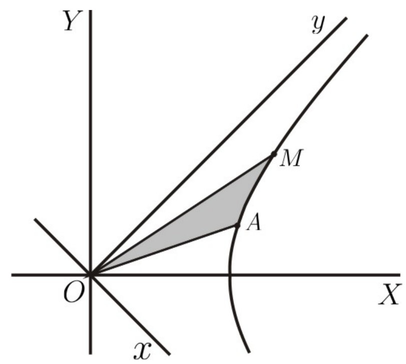

Figura 2.20: Setor Hiperbólico

obtidos após uma Rotação Hiperbólica sobre A, B e C, respectivamente. Calculando a área dos triângulos ABC e $A'B'C'$, encontramos

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(a_1b_2) + (a_2c_1) + (b_1c_2) - (b_2c_1) - (a_2b_1) - (a_1c_2)\right]$$

e

$$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ka_1 & \frac{a_2}{k} & 1 \\ kb_1 & \frac{b_2}{k} & 1 \\ kc_1 & \frac{c_2}{k} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(ka_1\frac{b_2}{k}) + (ka_2\frac{c_1}{k}) + (kb_1\frac{c_2}{k}) - (kb_2\frac{c_1}{k}) - (ka_2\frac{b_1}{k}) - (ka_1\frac{c_2}{k})\right],$$

logo

$$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left[(a_1b_2) + (a_2c_1) + (b_1c_2) - (b_2c_1) - (a_2b_1) - (a_1c_2)\right] = A_{ABC},$$

como queríamos demonstrar.

2.2.3 Setor Hiperbólico

Definição 2.21. *Sejam A e M pontos em um mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$. A região delimitada pelos segmentos OA e OM e pela parte da hipérbole compreendida entre A e M é chamada de Setor Hiperbólico (ver Figura 2.20).*

Observação 2.22. *Note que na definição de setor hiperbólico é necessário que os pontos A e M pertençam ao mesmo ramo da hipérbole pois, do contrário, a região delimitada pelos pontos A, O e M será uma região triangular que possui apenas dois pontos da hipérbole. Ver Figura 2.20.*

Propriedade 2.23. *Considere os pontos $A, M \in H = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 - Y^2 = 1\}$. É possível traçar um segmento MN, com $N \in H$, de modo que a reta OA intersecte MN no seu ponto médio.*

Demonstração. Trataremos as coordenadas dos pontos sob a hipérbole de quação $xy = \frac{1}{2}$, no sistema de eixos xOy obtidos fazendo uma rotação de -45^o no sistema de eixos XOY. Considere o setor AOM (Figura 2.21). Podemos fazer uma construção com os seguintes

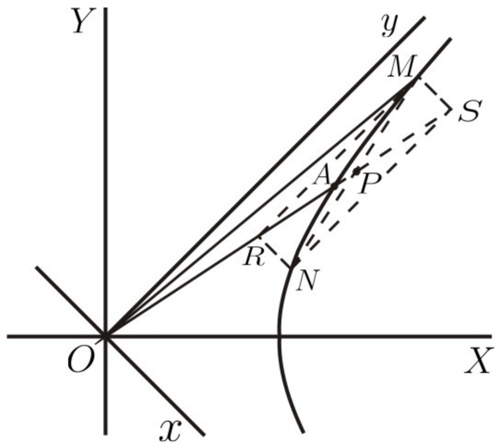

Figura 2.21: Propriedade do Ponto Médio

passos:

1. Traçamos uma reta por M, paralela ao eixo Ox;
2. Traçamos a reta OA e determinamos o ponto S de interseção com a reta traçada no primeiro passo;
3. Traçamos uma reta por M, paralela ao eixo Oy, determinando o ponto R em OA;
4. Traçamos uma reta por R, parelela ao eixo Ox, e outra por S, paralela ao eixo Oy, determinando o ponto N de interseção entre essas duas retas;
5. Formado o retângulo $RNSM$, traçamos a diagonal MN e determinamos o ponto P de interseção com a diagonal RS. O ponto P divide as diagonais em quatro segmentos de mesmo comprimento.

Mostraremos que o ponto N pertence à hipérbole $xy = \frac{1}{2}$. Para tanto, note que os pontos que pertencem à hiperbole são do tipo $\left(x, \frac{1}{2x}\right)$, pois o produto das coordenadas do ponto é sempre igual a $\frac{1}{2}$. Em particular, temos

$$A = \left(a, \frac{1}{2a}\right) \qquad \text{e} \qquad M = \left(m, \frac{1}{2m}\right).$$

A equação da reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ e pelo ponto A é $y = \frac{1}{2a^2}x$, ou seja, os pontos que pertencem à reta OA são do tipo $\left(x, \frac{x}{2a^2}\right)$. Dessa forma, temos

$$R = \left(r, \frac{1}{2a^2}r\right),$$

pois R pentence a reta OA. Além disso, como as abcissas dos pontos R e M são iguais, temos $r = m$ de modo que podemos escrever.

$$M = (r, \frac{1}{2r}).$$

Agora vamos determinar as equações das retas RN e MN. Observe que:

- a reta RN tem equação $y = \frac{1}{2a^2}r$, pois é paralela ao eixo x e passa pelo ponto $R = (r, \frac{1}{2a^2}r)$.
- Para o cálculo da equação da reta MN, inicialmente determinamos o seu coeficiente angular. Para isso, note que o coeficiente angular da reta OA é igual a $\frac{1}{2a^2}$. Como o ângulo formado pela reta OA e o eixo x e o ângulo formado pela reta MN com o eixo x são suplementares, e $\tan\theta = -\tan(180^o - \theta)$, temos que o coeficiente angular da reta MN é $-\frac{1}{2a^2}$. Desde que a reta MN passa pelo M, temos que sua equação é

$$y - \frac{1}{2r} = -\frac{1}{2a^2}(x - r) \Rightarrow \; y + \frac{1}{2a^2}x = \frac{1}{2a^2}r + \frac{1}{2r}. \tag{2.13}$$

Assim, fazendo a interseção das retas MN e RN com a substituição de $y = \frac{1}{2a^2}r$ em (2.13), obtemos as coordenadas do ponto N:

$$\frac{1}{2a^2}r + \frac{1}{2a^2}x = \frac{1}{2a^2}r + \frac{1}{2r} \Longrightarrow r^2 + rx = r^2 + a^2 \Longrightarrow x = \frac{a^2}{r}.$$

Logo,

$$N = (\frac{a^2}{r}, \frac{1}{2a^2}r).$$

Finalmente, observe que $N \in H$ pois o produto de suas coordenadas é igual a $\frac{1}{2}$. ■

Propriedade 2.24. *Considere os pontos* A, M, $A^{'}$ *e* $M^{'} \in H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{1}{2}\}$, *com* $A^{'}$ *e* $M^{'}$ *obtidos de uma Rotação Hiperbólica sobre* A *e* M, *respectivamente. Temos que a área do setor* AOM *é igual a área do setor* $A^{'}OM^{'}$ *(ver Figura 2.22).*

Demonstração. Veja Apêndice A.

■

Uma consequência da Propriedade 2.18 é a seguinte:

Propriedade 2.25. *Pode-se tomar um setor hiperbólico tão grande quanto se queira.*

Demonstração. Seja AOM setor hiperbólico de área S. Pela Propriedade 2.18, pode-se realizar uma rotação hiperbólica que translade o ponto A ao ponto M e o ponto M passará, assim, a um ponto M_1, de modo que obtemos um setor AOM_1 e área $2S$. Agora, com o setor MOM_1, aplicamos a rotação que translada M ao M_1 e M_1 num M_2 de maneira que obtemos um setor M_1OM_2 com área S e outro setor AOM_2 com área $3S$. Segundo o argumento, construímos setores AOM, AOM_1, AOM_2, AOM_3, $AOM_4, \ldots$ com áreas, respectivamente, $S, 2S, 3S, 4S, \ldots$. Deduzimos, dessa maneira, que um setor hiperbólico pode ser tão grande quanto se deseje. ■

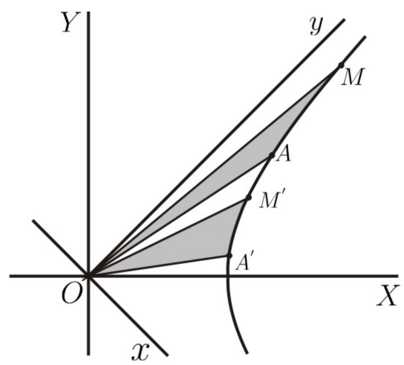

Figura 2.22: Preservação de Área de Setor Hiperbólico

Capítulo 3

Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas

3.1 Ângulos Hiperbólicos

Para definir ângulo hiperbólico, considere a hipérbole unitária

$$H = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 - Y^2 = 1\}$$

de centro O, no plano cartesiano XOY (Figura 3.1).

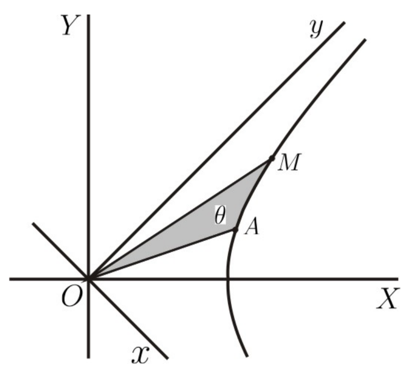

Figura 3.1: Ângulo Hiperbólio

Definição 3.1. *Dados A e M pontos num mesmo ramo da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, definimos o ângulo hiperbólico θ, entre os segmentos OA e OM, como sendo duas vezes a área do setor hiperbólico determinado por A, O e M.*

Observação 3.2. *Note que os conceitos de ângulo trigonométrico circular e ângulo hiperbólico são diferentes, apesar de definidos de maneira análoga. De fato, um ângulo* *trigonométrico cicular θ_C é estritamente menor do que um ângulo hiperbólico θ_H, isto é $\theta_C < \theta_H$, exceto quando $\theta_C = 0$ e $\theta_H = 0$ (Figura 3.2). Além disso, segue imediato da Propriedade 2.25 que podemos considerar ângulos hiperbólicos tão grandes quanto desejados.*

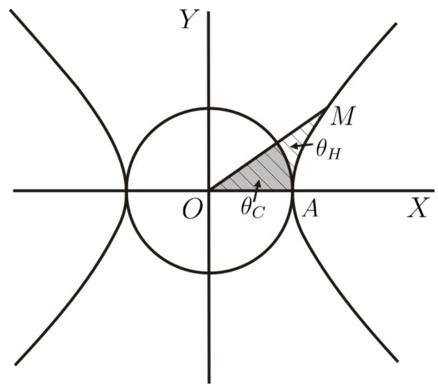

Figura 3.2: Relação entre Ângulo Hipérbólico e Circular

Propriedade 3.3. *Considere a hipérbole $H = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 - Y^2 = 1\}$. Dado um ângulo hiperbólico θ, determinado pelos pontos O, A e M, existem pontos A' e M' pertencentes à hipérbole, tais que A' pertence ao eixo OX e o ângulo hiperbólico determinado por O, A' e M' é igual a θ (Figura 3.3).*

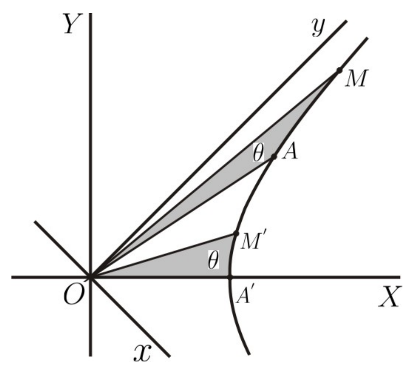

Figura 3.3: Preservação de Ângulo Hiperbólico

Demonstração. Considere as coordenadas dos pontos no sistema xOy. Nesse caso, os pontos da hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ são do tipo $(x, \frac{1}{2x})$, pois o produto das coordenadas do ponto é sempre igual a $\frac{1}{2}$. Seja $O = (0, 0)$ o centro da hipérbole e, em particular, sejam

$$A = (a, \frac{1}{2a}) \quad \text{e} \quad M = (m, \frac{1}{2m})$$

e os pontos

$$A' = (ka, \frac{1}{2ka}) \quad \text{e} \quad M' = (km, \frac{1}{2km})$$

obtidos de A e M, repectivamente, após uma rotação hiperbólica de coeficiente k. Considerando $k = \frac{\sqrt{2}}{2a}$, a reta OA de equação $y = \frac{1}{2a^2}x$ passará à reta OA' de equação $y = x$ (correspondente ao eixo OX no sistema de coordenadas XOY) e os pontos A' e M' terão as seguintes coordenadas: $A' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $M' = (\frac{\sqrt{2}m}{2a}, \frac{\sqrt{2}a}{2m})$. Por fim, pela Propriedade 2.24 e pela definição de ângulo hiperbólico, temos que a área do setor AOM é igual a área do setor $A'OM'$ e, consequentemente, o ângulo determinado por A, O e M é igual ao ângulo determinado por A', O e M'. ∎

Dado um ângulo hiperbólico θ, determinado pelos pontos O, A e M, usando a Propriedade 3.3, obtemos os pontos A' e M', tais que A' pertence ao eixo OX e o ângulo hiperbólico determinado por O, A' e M' é igual a θ. Com os pontos A, M, A' e M', podemos fazer uma construção análoga a desenvolvida na prova da Propriedade 2.23. Para tanto, tratamos as coordenadas dos pontos da hipérbole em relação ao sistema de coordenadas xOy obtido por uma rotação de -45^o do sistema de coordenadas XOY. Fazemos uma construção com os seguintes passos (Figura 3.4):

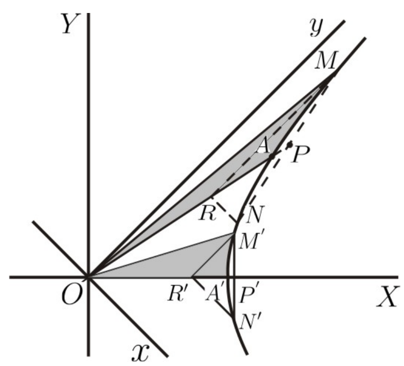

Figura 3.4: Relação entre Segmentos

1. Traçamos uma reta por M, paralela ao eixo Oy, determinando o ponto R no segmento OA;
2. Traçamos uma reta por R, paralela ao eixo Ox, determinando o ponto N na hipérbole;
3. Traçamos o segmento de reta NM;
4. Prolongamos o segmento de reta OA e determinamos o ponto P no segmento NM.

Considerando agora os pontos A' e M' e desenvolvendo uma construção análoga a anterior, obtemos os pontos R', N' e P', com R' e P' pertencentes ao eixo OX e N'

pertencente a hipérbole. Agora, usando a Propriedade 2.23, temos que

$$PM = PN = PR \qquad \text{e} \qquad P'M' = P'N' = P'R'. \tag{3.1}$$

Com essas informações, podemos verificar a seguinte propriedade.

Propriedade 3.4.

$$\frac{PM}{OA} = \frac{P'M'}{OA'} \qquad e \qquad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Demonstração. Para mostrar a primeira igualdade, por (3.1) é suficiente verificar que

$$\frac{PR}{OA} = \frac{P'R'}{OA'}.$$

Seguindo a notação da demonstração da Propriedade 2.23, os pontos A, P e R possuem as seguintes coordenadas:

$$A = \left(a, \frac{1}{2a}\right), \quad P = \left(p, \frac{p}{2a^2}\right) \quad \text{e} \quad R = \left(r, \frac{r}{2a^2}\right)$$

Note que, após realizar uma Rotação Hiperbólica como na demonstração da Propriedade 3.3, com $k = \frac{\sqrt{2}}{2a}$, a reta OA de equação $y = \frac{1}{2a^2}x$ passará à reta OA' de equação $y = x$ (correspondente ao eixo OX no sistema de coordenadas XOY) e os pontos A', P' e R' terão as seguintes coordenadas:

$$A' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad P' = \left(\frac{\sqrt{2}p}{2a}, \frac{\sqrt{2}p}{2a}\right) \qquad \text{e} \qquad R' = \left(\frac{\sqrt{2}r}{2a}, \frac{\sqrt{2}r}{2a}\right).$$

Fazendo:

$$(PR)^2 = (p-r)^2 + \left(\frac{p}{2a^2} - \frac{r}{2a^2}\right)^2 = (p-r)^2 + \frac{1}{4a^4}(p-r)^2,$$

$$(OA)^2 = (a-0)^2 + \left(\frac{1}{2a} - 0\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4a^2},$$

$$(P'R')^2 = \left(\frac{\sqrt{2}p}{2a} - \frac{\sqrt{2}r}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}p}{2a} - \frac{\sqrt{2}r}{2a}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}p}{2a} - \frac{\sqrt{2}r}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}(p-r)^2$$

e

$$(OA')^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Como RP, $R'P'$, OA e OA' são estritamente positivos, mostrar que $\frac{PR}{OA} = \frac{P'R'}{OA'}$ é o mesmo que mostrar $PR \cdot OA' = P'R' \cdot OA$ ou $(PR)^2 \cdot (OA')^2 = (P'R')^2 \cdot (OA)^2$. Assim:

$$(PR)^2 \cdot (OA')^2 = \left[(p-r)^2 + \frac{1}{4a^4}(p-r)^2\right](1) = \left(1 + \frac{1}{4a^4}\right)(p-r)^2$$

e

$$(P'R')^2 \cdot (OA)^2 = \frac{1}{a^2}(p-r)^2.\left(a^2 + \frac{1}{4a^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4a^4}\right)(p-r)^2.$$

Portanto, concluímos a verificação da primeira igualdade.

A verificação da segunda igualdade é análoga. ∎

3.2 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas de maneira análoga às funções trigonométricas (circulares). Considere o setor hiperbólico AOM de área $\frac{\theta}{2}$, com OA sobre o eixo OX, na hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, ou seja, um setor que determina um ângulo de medida θ. Para definir as funções seno e cosseno hiperbólicos, tracemos por M uma paralela ao eixo OY, determinando P no eixo OX (Figura 3.5).

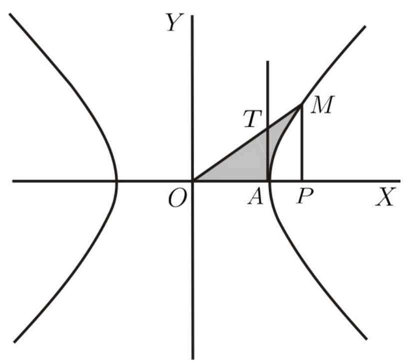

Figura 3.5: Definições das Funções Hiperbólicas

Definição 3.5. *Definimos as funções seno e cosseno hiperbólicos, respectimente, por*

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{PM}{OA} \qquad e \qquad \cosh\theta = \frac{OP}{OA}.$$

Observação 3.6. *Nesse caso específico, como $OA = 1$, temos também*

$$\operatorname{senh}\theta = PM \qquad e \qquad \cosh\theta = OP.$$

Note ainda que senh θ *é uma função (extritamente) crescente (se M "sobe" na hipérbole, PM cresce - Figura 3.5), diferentemente da função seno que é periódica. Diferenças similares para cosseno também acontecem. Portanto, merece destaque o fato das funções hipérbolicas não serem períodicas como as trigonométricas.*

Observação 3.7. *Note que na definição das funções hiperbólicas seno e cosseno, consideramos um setor hiperbólico particular, com o segmento OA sobre o eixo OX. Observe que, apesar disso, não há perda de generalidade caso se considere um outro setor hipérbolico $A'OM'$, de mesma área, como na demonstração da Propriedade 3.3 (ver Figura 3.6). Com*

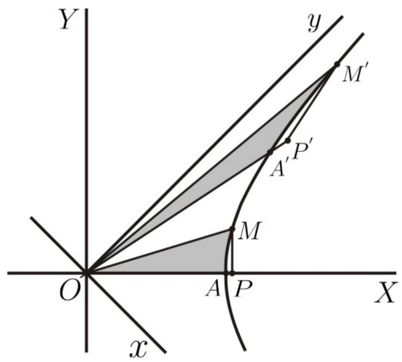

Figura 3.6: Funções Hiperbólicas em Ângulo Hiperbólico Geral

efeito, pela Propriedade 3.4, temos que

$$\frac{PM}{OA} = \frac{P'M'}{OA'} \qquad e \qquad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{PM}{OA} = \frac{P'M'}{OA'} \qquad e \qquad \cosh\theta = \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Com as funções seno e cosseno definidas, podemos definir as demais funções trigonométricas.

Definição 3.8. *Definimos as funções tangente, secante, cossecante e cotangente hiperbólicas, respectivamente, por*

$$\tanh\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}, \qquad \operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}, \qquad \operatorname{csch}\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} \qquad e \qquad \coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta},$$

onde assumimos que os denominadores são não nulos.

As funções hiperbólicas assim definidas possuem as seguintes propriedades:

Propriedade 3.9. $\tanh\theta = AT$, *onde T é o ponto de interseção entre as retas determinada pelos pontos O e M e a tangente à hipérbole no ponto A (veja Figura 3.5).*

Demonstração. De fato, considerando a Figura 3.5, pela semelhança entre os triângulos OPM e OAT, concluímos que:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA}.$$

Sendo $OA = 1$,

$$\tanh\theta = \frac{\text{senh}\theta}{\cosh\theta} = \frac{PM}{OP} = AT. \tag{3.2}$$

■

Propriedade 3.10. $\cosh^2\theta - \text{senh}^2\theta = 1$.

Demonstração. De fato, utilizando as coordenadas do ponto M ($X = OP$ e $Y = PM$) e substituindo na equação da hipérbole unitária $X^2 - Y^2 = 1$, temos que:

$$X^2 - Y^2 = (OP)^2 - (PM)^2 = 1.$$

Logo,

$$\cosh^2 - \text{senh}^2 = 1. \tag{3.3}$$

■

Propriedade 3.11. $1 + \tanh^2\theta = \sec h^2\theta$.

Demonstração. De fato, dividindo ambos os membros de (3.3) por $\cosh^2\theta$, temos que

$$1 + \frac{\text{senh}^2\theta}{\cosh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta},$$

ou seja,

$$1 - \tanh^2\theta = \text{sech}^2\theta. \tag{3.4}$$

■

Propriedade 3.12. $\coth^2\theta + 1 = \text{csch}^2\theta$.

Demonstração. De fato, dividindo ambos os membros de (3.3) por $\text{senh}^2\theta$, temos

$$\frac{\cosh^2\theta}{\text{senh}^2\theta} + 1 = \frac{1}{\text{senh}^2\theta},$$

isto é,

$$\coth^2\theta - 1 = \csc h^2\theta. \tag{3.5}$$

■

3.3 Soma de Ângulos e Funções Hiperbólicas

Nesta seção, serão apresentadas as propriedades de adição de ângulos nas funções hiperbólicas. Mostramos na seção anterior que após uma Rotação Hiperbólica, movendo o ângulo hiperbólico θ, formado pelos segmentos OA e OM, para a posição dos segmentos OA' e OM', respectivamente (Figura 3.4), temos que

$$\text{senh}\theta = \frac{PM}{OA} = \frac{P'M'}{OA'} \qquad \text{e} \qquad \cosh\theta = \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Consideremos agora os ângulos hiperbólicos $\alpha = AOM$ e $\beta = MOM'$ (Figura 3.7).

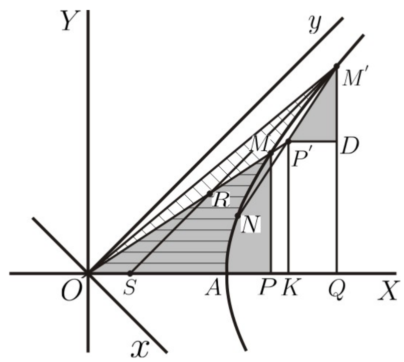

Figura 3.7: Soma de Ângulos Hiperbólicos

Propriedade 3.13. *O seno e o cosseno hiperbólicos da soma dos ângulos α e β são dados por:*

$$\text{senh}(\alpha+\beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha$$

e

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta.$$

Demonstração. Após fazermos com os pontos M e M' uma construção análoga à desenvolvida na prova da Propriedade 2.23, obtemos os pontos R, N e P'. Em seguida, continuamos a construção com os seguintes passos:

1. Traçamos duas retas paralelas ao eixo OY: uma por M e outra por M', determinando os pontos P e Q, respectivamente, no eixo OX;

2. Traçamos duas retas por P': uma paralela ao eixo OX determinando o ponto D de interseção com o segmento QM' e outra paralela ao eixo OY, determinando o ponto K no eixo OX.

Pela definição das funções hiperbólicas seno e cosseno, temos:

$$\text{senh}\alpha = PM \qquad \cosh\alpha = OP \qquad \text{senh}\beta = \frac{P'M'}{OM} \qquad \text{e} \qquad \cosh\beta = \frac{OP'}{OM}$$

enquanto

$$\text{senh}(\alpha+\beta) = QM' \qquad \text{e} \qquad \cosh(\alpha+\beta) = OQ.$$

Os triângulos OPM e OKP' são semelhantes pois ambos são retângulos e tem o ângulo POM em comum. Os triângulos OPM e $P'DM'$ também são semelhantes, pois ambos são retângulos e os ângulo POM e $P'M'D$ são iguais. Com efeito, a reta $M'R$, paralela ao eixo Oy, corta os segmentos OM e OA nos pontos R e S, respectivamente. Logo, os ângulos $QM'S = QSM' = \frac{\pi}{4}$ e os ângulos $P'M'R$ e $M'RP'$ também são iguais, dado que $P'M' = P'R$. Desse modo, os ângulos:

$$POM = QSM' - ORS = QSM' - M'RP'$$

e

$$P'M'D = QM'S - P'M'R,$$

portanto,

$$POM = P'M'D.$$

Note que (Figura 3.7):

$$\text{senh}(\alpha+\beta) = QM' = KP' + DM'$$

e

$$\cosh(\alpha+\beta) = OQ = OK + P'D.$$

Da semelhança dos triângulos OPM e OKP', deduzimos:

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM} \quad \Rightarrow \quad KP' = PM\frac{OP'}{OM}$$

e

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM} \quad \Rightarrow \quad OK = OP\frac{OP'}{OM}.$$

Da semelhança dos triângulos OPM e $P'DM'$, temos:

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM} \quad \Rightarrow \quad DM' = OP\frac{P'M'}{OM}$$

e

$$\frac{P'D}{P'M'} = \frac{PM}{OM} \quad \Rightarrow \quad P'D = PM\frac{P'M'}{OM}.$$

Levando em consideração que

$$PM = \text{senh}\alpha \qquad OP = \cosh\alpha \qquad \frac{P'M'}{OM} = \text{senh}\beta \qquad \text{e} \qquad \frac{OP'}{OM} = \cosh\beta,$$

temos finalmente que

$$\text{senh}(\alpha+\beta) = KP^{'} + DM^{'} = PM\frac{OP^{'}}{OM} + OP\frac{P^{'}M^{'}}{OM} = \text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha \quad (3.6)$$

e

$$\cosh(\alpha+\beta) = OK + P^{'}D = OP\frac{OP^{'}}{OM} + PM\frac{P^{'}M^{'}}{OM} = \cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta \quad (3.7)$$

■

Das relações (3.6) e (3.7) e de (3.2) e (3.3), podemos obter outras relações da trigonometria hiperbólica. Assim, por exemplo, temos:

Propriedade 3.14.

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta}. \quad (3.8)$$

Demonstração. De fato, pela definição de tangente hiperbólica, temos

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\text{senh}(\alpha+\beta)}{\cosh(\alpha+\beta)} = \frac{\text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha}{\cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta} \quad (3.9)$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração do último membro de (3.9) por $\cosh\alpha\cosh\beta$, obtemos:

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta}.$$

■

Observação 3.15. *Se $\alpha = \beta$, as relações (3.6), (3.7) e (3.8) tomam a forma:*

$$\text{senh}2\alpha = 2\text{senh}\alpha\cosh\alpha, \quad (3.10)$$

$$\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \text{senh}^2\alpha \quad (3.11)$$

e

$$\tanh 2\alpha = \frac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha}. \quad (3.12)$$

Propriedade 3.16. *Identidade hiperbólica da diferença:*

$$\text{senh}(\alpha-\beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta - \text{senh}\beta\cosh\alpha, \quad (3.13)$$

$$\cosh(\alpha-\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta - \text{senh}\alpha\text{senh}\beta \quad (3.14)$$

e

$$\tanh(\alpha-\beta) = \frac{\tanh\alpha - \tanh\beta}{1-\tanh\alpha\tanh\beta}. \quad (3.15)$$

Demonstração. Multiplicando (3.6) por $\cosh\beta$ e (3.7) por $\text{senh}\beta$ e subtraindo o resultado, encontramos:

$$\text{senh}\alpha = \text{senh}(\alpha+\beta)\cosh\beta - \text{senh}\beta\cosh(\alpha+\beta)$$

Multiplicando (3.6) por $\text{senh}\beta$ e (3.7) por $\cosh\beta$ e subtraindo o resultado, obtemos:

$$\cosh\alpha = \cosh(\alpha+\beta)\cosh\beta - \text{senh}(\alpha+\beta)\text{senh}\beta.$$

Substituindo $(\alpha+\beta)$ por α, e α, por $(\alpha-\beta)$ nestas duas últimas equações, obtemos:

$$\text{senh}(\alpha-\beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta - \text{senh}\beta\cosh\alpha$$

e

$$\cosh(\alpha-\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta - \text{senh}\alpha\text{senh}\beta.$$

Pela definição de tangente hiperbólica, temos

$$\tanh(\alpha-\beta) = \frac{\text{senh}(\alpha-\beta)}{\cosh(\alpha-\beta)} = \frac{\text{senh}\alpha\cosh\beta - \text{senh}\beta\cosh\alpha}{\cosh\alpha\cosh\beta - \text{senh}\alpha\text{senh}\beta}. \tag{3.16}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração do último membro de (3.16) por $\cosh\alpha\cosh\beta$, resulta:

$$\tanh(\alpha-\beta) = \frac{\tanh\alpha - \tanh\beta}{1-\tanh\alpha\tanh\beta}$$

■

Propriedade 3.17. *Relações de seno, cosseno e tangente hiperbólica em função da tangente hiperbólica do ângulo metade.*

$$\text{senh}\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{3.17}$$

$$\cosh\alpha = \frac{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}} \tag{3.18}$$

e

$$\tanh\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}} \tag{3.19}$$

Demonstração. Da Equação (3.10), encontramos que:

$$\text{senh}\alpha = 2\text{senh}\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}.$$

Dividindo e multiplicando o segundo membro dessa equação por $\cosh\frac{\alpha}{2}$, obtemos

$$\text{senh}\alpha = 2\frac{\text{senh}\frac{\alpha}{2}}{\cosh\frac{\alpha}{2}}\cosh^2\frac{\alpha}{2} = 2\tanh\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\frac{1}{\cosh^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Da equação (3.4), encontramos que:

$$\cosh\alpha = \cosh^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{senh}^2\frac{\alpha}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\mathrm{senh}^2\frac{\alpha}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Finalmente, pela definição de tangente hiperbólica, dividindo (3.17) por (3.18) (ou diretamente da Equação (3.12)), obtemos:

$$\tanh\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}.$$

■

Observação 3.18. *As relações do arco metade, são deduzidas de (3.3) e (3.11). Substituindo* $\mathrm{senh}^2\alpha = \cosh^2\alpha - 1$ *em (3.11), obtemos*

$$\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \cosh^2\alpha - 1 \Rightarrow \cosh 2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1,$$

e substituindo $\cosh^2\alpha = 1 + \mathrm{senh}^2\alpha$ *em (3.11), teremos*

$$\cosh 2\alpha = \mathrm{senh}^2\alpha + 1 + \mathrm{senh}^2\alpha \Rightarrow \cosh 2\alpha == 2\mathrm{senh}^2\alpha + 1.$$

Fazendo $\beta = 2\alpha$*, encontramos:*

$$\mathrm{senh}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta - 1}{2}} \tag{3.20}$$

e

$$\cosh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta + 1}{2}}. \tag{3.21}$$

Finalmente, dividindo (3.20) por (3.21), obtemos

$$\tanh\alpha = \tanh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta - 1}{\cosh\beta + 1}}.$$

Observação 3.19. *Para deduzir as equações da adição para as funções hiperbólicas não existe a necessidade de medir o primeiro ângulo* α *a partir do eixo de simetria* OA *da hipérbole. De uma maneira análoga, podemos deduzir as equações 3.6 e 3.7 para o caso em que o segmento* OA *ocupa uma posição arbitrária. Observe a Figura 3.8:*

Os ângulos hiperbólicos AOM e MOM' são iguais a α e β, respectivamente. Considere que:

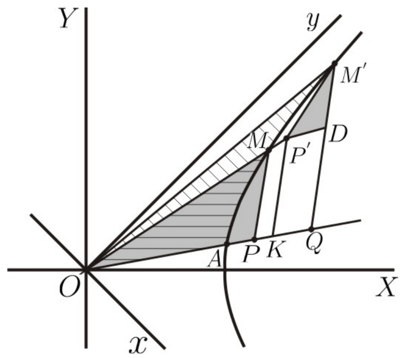

Figura 3.8: Ângulos Hiperbólicos em uma Posição Geral

- Os segmentos MP e $M'Q$ são obtidos com uma construção análoga à da Propriedade 3.4, com os pontos P e Q pertencentes à reta OA;
- O segmento $M'P'$também é obtido com um construção análoga à da Propriedade 3.4, com o ponto P' pertencente à reta OM.

Por conseguinte,

$$\text{senh}\alpha = \frac{PM}{OA} \qquad \text{e} \qquad \cosh\alpha = \frac{OP}{OA},$$

$$\text{senh}\beta = \frac{P'M'}{OM} \qquad \text{e} \qquad \cosh\beta = \frac{OP'}{OM}$$

e

$$\text{senh}(\alpha+\beta) = \frac{QM'}{OA} \qquad \text{e} \qquad \cosh(\alpha+\beta) = \frac{OQ}{OA}.$$

Capítulo 4

Funções Hiperbólicas e Exponenciais

O presente capítulo apresenta a maneira pela qual surgem as combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} na definição de funções hiperbólicas, como comumente são encontradas nos diversos livros de cálculo diferencial e integral.

4.1 Área de Setor Hiperbólico

Para medir ângulos, precisamos calcular a área do setor hiperbólico. Voltemos aos eixos Ox e Oy, com a hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ (Figura 4.1). Sejam M e N dois pontos quaisquer num

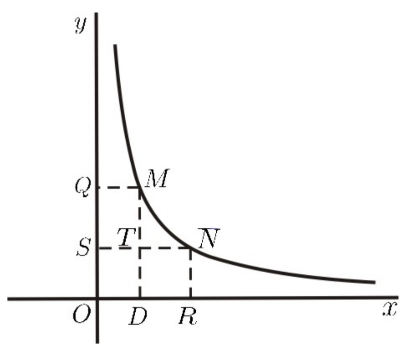

Figura 4.1: Coordenadas dos Pontos M e N

mesmo ramo da hipérbole. O ponto M tem coordenadas $x = OD$ e $y = OQ$ e o ponto N tem coordenadas $x = OR$ e $y = OS$. A área do retângulo $ODMQ$ é dada por

$$A_{ODMQ} = OD \cdot OQ = xy = \frac{1}{2}$$

e a área do retângulo $ORNS$ é dada por

$$A_{ORNS} = OR \cdot OS = xy = \frac{1}{2}.$$

Logo $A_{ODMQ} = A_{ORNS}$ e, consequentemente, $A_{STMQ} = A_{DRNT}$.

Para calcular a área do setor OAM, vamos rodar a Figura 4.1 de 45^o e tomar a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ (Figura 4.2). Observemos que:

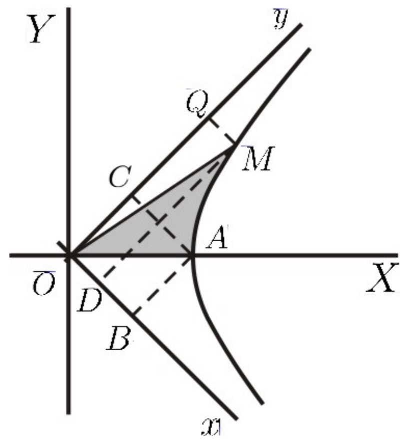

Figura 4.2: Área do Setor AOM

$$A_{ODM} = \frac{1}{2}A_{ODMQ} = \frac{1}{2}A_{OBAC} = A_{OBA}$$

e

$$A_{OBAM} = A_{ODM} + A_{DBAM} = A_{OAM} + A_{OBA},$$

logo

$$A_{OAM} = A_{DBAM}.$$

Um raciocínio análogo nos leva a:

$$A_{OAC} = \frac{1}{2}A_{OBAC} = \frac{1}{2}A_{ODMQ} = A_{OMQ}$$

e

$$A_{OAMQ} = A_{OAC} + A_{QCAM} = A_{OMQ} + A_{OAM},$$

logo

$$A_{OAM} = A_{QCAM} = A_{DBAM}.$$

Assim, o que precisamos é calcular a área de $DBAM$. Voltando aos eixos x, y e à hipérbole $xy = \frac{1}{2}$, a área de $DBAM$ é a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$, compreendida entre $x = OD$ e $x = OB$ (Figura 4.3). Logo:

$$A_{DBAM} = \left| \int_{OD}^{OB} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \ln OB - \ln OD \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{OB}{OD} \right|. \tag{4.1}$$

Ou seja:

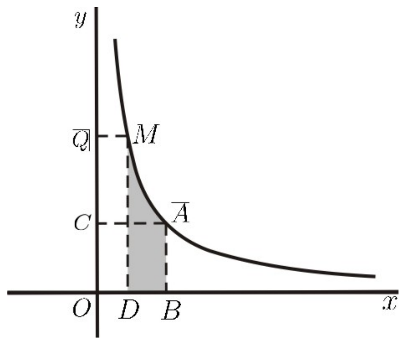

Figura 4.3: Área de $DBAM$

- Se M está à esquerda de A então:

$$A_{PBAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OB}{OD}.$$

- Se M está à direita de A então:$A_{PBAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OD}{OB}$.

Analogamente, podemos calcular A_{QCAM} integrando a função $x = \frac{1}{2y}$.

$$A_{QCAM} = \left|\int_{OC}^{OQ} \frac{1}{2y}dy\right| = \frac{1}{2}\left|\ln OQ - \ln OC\right| = \frac{1}{2}\left|\ln\frac{OQ}{OC}\right|. \tag{4.2}$$

Ou seja:

- Se M está acima de A então:

$$A_{PBAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OQ}{OC};$$

- Se M está abaixo de A então:

$$A_{PBAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OC}{OQ}.$$

Observação 4.1. *Note que se $M = A$ então $A_{DBAM} = 0$ e se $M \neq A$ então $A_{DBAM} > 0$. Quando M se afasta de A pela direita, o segmento OD cresce indefinidamente. Assim, como o tamanho OB está fixo, $A_{DBAM} = \frac{1}{2}\left|\ln OD - \ln OB\right|$ cresce indefinidamente. Se M se afasta de A pela esquerda, o segmento OD tende a zero e $\ln OD$ decresce indefinidamente. Assim, $A_{DBAM} = \frac{1}{2}\left|\ln OB - \ln OD\right|$ também cresce indefinidamente. Logo, $A_{OAM} = A_{DBAM}$ varia de 0 a $+\infty$.*

Observação 4.2. *Coloquemos a seguinte convenção (Figura 4.4):*

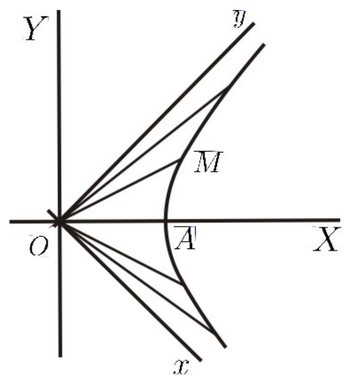

Figura 4.4: Ângulos Hiperbólicos Positivos e Negativos

- *Se o ponto M está acima do eixo dos X's, o ângulo que ele define terá medida positiva.*
- *Se o ponto M está abaixo do eixo dos X's, o ângulo que ele define terá medida negativa.*

Assim, um ângulo hiperbólico, tendo medida $\pm\frac{1}{2}A_{OAM}$, assumirá valores entre $-\infty$ e $+\infty$. Lembrando que esta é uma medida nova, definida na hipérbole. Se os mesmos ângulos fossem medidos no círculo, seus valores estariam entre $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$.

4.2 Funções Hiperbólicas e Exponenciais

Seja M um ponto sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ tal que $A_{OAM} = \frac{\theta}{2}$, ou seja, um ponto que determina um ângulo com medida hiperbólica θ (Figura 4.5). O ponto M tem

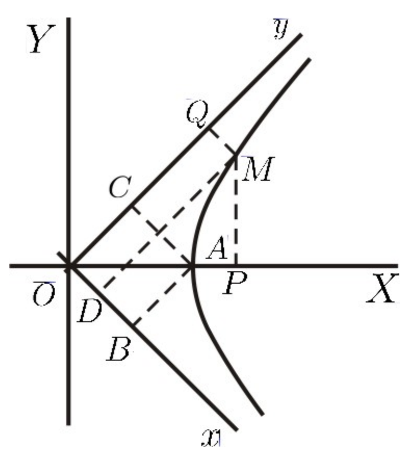

Figura 4.5: Coordenadas dos Pontos nos eixos xOy e XOY

coordenadas $X = OP = \cosh\theta$, $Y = PM = \text{senh}\theta$ no sistema de eixos XOY e coordenadas $x = OD$ e $y = OQ$ no sistema de eixo xOy. Como vimos no Exemplo 2.7, através de uma rotação de 45^o nos eixos coordenados xOy obtemos as fórmulas que relacionam as coordenadas (x, y) com (X, Y):

$$OD = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta - \text{senh}\theta)$$

e

$$OQ = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \text{senh}\theta).$$

O ponto A tem coordenadas $X = 1$, $Y = 0$ e $x = OB$, $y = OC$. Temos que:

$$OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad OC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, de (4.1) e (4.2), obtemos:

$$A_{DBAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta - \text{senh}\theta)} = -\frac{1}{2}\ln(\cosh\theta - \text{senh}\theta)$$

e

$$A_{QCAM} = \frac{1}{2}\ln\frac{OQ}{OC} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \text{senh}\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln(\cosh\theta + \text{senh}\theta).$$

Como $A_{OAM} = A_{DBAM}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\ln(\cosh\theta - \text{senh}\theta)$$

e como $A_{OAM} = A_{QCAM}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\ln(\cosh\theta + \text{senh}\theta).$$

Logo

$$e^{-\theta} = \cosh\theta - \text{senh}\theta \tag{4.3}$$

e

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \text{senh}\theta. \tag{4.4}$$

Somando (4.3) e (4.4), obtemos

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

e subtraindo, obtemos

$$\text{senh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Observação 4.3. *Utilizando-se das relações entre seno e cosseno hiperbólico, podemos demonstrar as equações das demais funções hiperbólicas em função de e^{θ} e $e^{-\theta}$. Temos, então:*

1. Tangente hiperbólica
$$\tanh\theta = \frac{\mathrm{senh}\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1};$$

2. Cotangente hiperbólica
$$\coth\theta = \frac{1}{\tanh\theta} = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{e^{\theta}-e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta}+1}{e^{2\theta}-1};$$

3. Secante hiperbólica
$$\sec h\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta}+e^{-\theta}};$$

4. Cossecante hiperbólica
$$\csc h\theta = \frac{1}{\mathrm{senh}\theta} = \frac{2}{e^{\theta}-e^{-\theta}}.$$

4.3 Fórmulas da Soma de Ângulos nas Funções Hiperbólicas com Exponenciais

Passaremos a demonstrar as principais identidades e as relações de adição de ângulos nas funções hiperbólicas, utilizando-se das definições de seno e cosseno hiperbólico com o uso funções exponenciais e^{θ} e $e^{-\theta}$ e suas combinações.

Propriedade 4.4. $\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta = 1.$

Demonstração. De fato,

$$\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta = \left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta}-2+e^{-2\theta}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

■

Propriedade 4.5. $\mathrm{senh}(-\theta) = -\mathrm{senh}\theta$

Demonstração. De fato,

$$\mathrm{senh}(-\theta) = \frac{e^{-\theta}-e^{-(-\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2} = \frac{-(e^{\theta}-e^{-\theta})}{2} = -\mathrm{senh}\theta$$

■

Propriedade 4.6. $\cosh(-\theta) = \cosh\theta$

Demonstração. De fato,

$$\cosh(-\theta) = \frac{e^{-\theta} + e^{-(-\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta$$

■

Propriedade 4.7. $1 - \tanh^2\theta = \sec h^2\theta$

Demonstração. De fato,

$$1 - \tanh^2\theta = 1 - \left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}\right)^2 = \frac{e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta} - (e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta})}{(e^{\theta} + e^{-\theta})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^{\theta} + e^{-\theta})^2} = \frac{1}{\left(\frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})}{2}\right)^2} = \sec h^2\theta$$

■

Propriedade 4.8. $\coth^2\theta - 1 = \csc h^2\theta$

Demonstração. De fato,

$$\coth^2\theta - 1 = \left(\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta} - (e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta})}{(e^{\theta} - e^{-\theta})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^{\theta} - e^{-\theta})^2} = \frac{1}{\left(\frac{(e^{\theta} - e^{-\theta})}{2}\right)^2} = \csc h^2\theta$$

■

Propriedade 4.9. $\text{senh}(\alpha + \beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha.$

Demonstração. De fato,

$$\text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha = \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right) + \left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} =$$

$$\frac{2(e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta})}{4} = \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \text{senh}(\alpha + \beta).$$

■

Analogamente, podemos verificar que

$$\text{senh}(\alpha - \beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta - \text{senh}\beta\cosh\alpha \quad e \quad \text{senh}2\alpha = 2\text{senh}\alpha\cosh\alpha.$$

Propriedade 4.10. $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta.$

Demonstração. De fato,

$$\cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta = \left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right) + \left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}+e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta}-e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta}}{4} =$$

$$\frac{2(e^{\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta})}{4} = \frac{e^{\alpha+\beta}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \cosh(\alpha+\beta)$$

■

Analogamente, podemos verificar que

$$\cosh(\alpha-\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta - \text{senh}\alpha\text{senh}\beta \quad e \quad \cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \text{senh}^2\alpha.$$

Propriedade 4.11.

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta}$$

Demonstração. De fato,

$$\frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta} = \frac{\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}}{1+\left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\right)\left(\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}\right)} = \frac{\frac{(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})+(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta})}{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})}}{\frac{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})+(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta})}{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})}}$$

$$= \frac{(e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha+\beta}-e^{-\alpha-\beta})+(e^{\alpha+\beta}+e^{-\alpha+\beta}-e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha-\beta})}{(e^{\alpha+\beta}+e^{\alpha-\beta}+e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta})+(e^{\alpha+\beta}-e^{\alpha-\beta}-e^{-\alpha+\beta}+e^{-\alpha-\beta})}$$

$$\frac{2(e^{\alpha+\beta}-e^{-(\alpha+\beta)})}{2(e^{\alpha+\beta}+e^{-(\alpha+\beta)})} = \frac{e^{\alpha+\beta}-e^{-(\alpha+\beta)}}{e^{\alpha+\beta}+e^{-(\alpha+\beta)}} = \tanh(\alpha+\beta).$$

■

Analogamente, podemos verificar que

$$\tanh(\alpha-\beta) = \frac{\tanh\alpha-\tanh\beta}{1-\tanh\alpha\tanh\beta} \quad \text{e} \quad \tanh 2\alpha = \frac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha}.$$

As demais relações, como:

$$\text{senh}\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cosh\alpha = \frac{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tanh^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{e} \qquad \tanh\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}$$

e

$$\cosh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta-1}{2}}, \qquad \text{senh}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta+1}{2}} \qquad e \qquad \tanh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\beta-1}{\cosh\beta+1}}$$

são deduzidas diretamente das relações fundamentais de seno, cosseno e tangente hiperbólica e já foram demonstradas anteriormente.

Apêndice A

Presevação de Área de Setor Hiperbólico após Rotação Hiperbólica

Propriedade A.1. *Considere os pontos A, M, $A^{'}$ e $M^{'} \in H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \frac{1}{2}\}$, com $A^{'}$ e $M^{'}$ obtidos de uma Rotação Hiperbólica sobre A e M, respectivamente. Temos que a área do setor AOM é igual a área do setor $A^{'}OM^{'}$.*

Demonstração. Considere a Figura A.1:

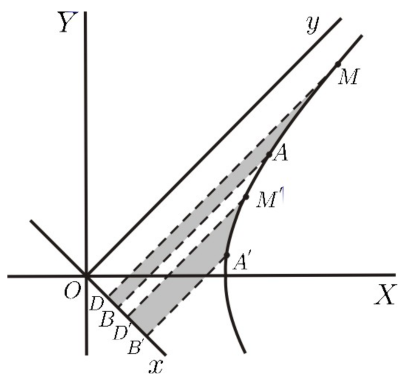

Figura A.1: Preservação de Área de Setor Hiperbólico

Inicialmente note que os pontos sobre a hipérbole são do tipo $(x, \frac{1}{2x})$, pois o produto das coordenadas do ponto é sempre igual a $\frac{1}{2}$. Seja ponto $O = (0,0)$ o centro da hipérbole e, em particular, consideremos

$$A = (a, \frac{1}{2a}),\ M = (m, \frac{1}{2m}),\ A^{'} = (ka, \frac{1}{2ka}) \text{ e } M^{'} = (km, \frac{1}{2km}),$$

com a e m distintos e diferentes de zero. Assim, como $A \neq M$ e $A^{'} \neq M^{'}$ temos que as áreas dos setores AOM e $A^{'}OM^{'}$ são diferentes de zero.

Para determinar as áreas dos setores OAM e $A^{'}OM^{'}$, conforme mostrado na seção "Área de Setor Hiperbólico", o que precisamos é calcular a área de $DBAM$ e de $D'B'A'M'$, respectivamente. Essas áreas correspondem, respectivamente, a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$, compreendida entre $x = OD = m$ e $x = OB = a$ e área sob o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$, compreendida entre $x = OD' = km$ e $x = OB' = ka$. Assim, temos

$$A_{DBAM} = \left| \int_{OD}^{OB} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{m}^{a} \frac{1}{x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \ln a - \ln m \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{a}{m} \right|$$

e

$$A_{D'B'A'M'} = \left| \int_{OD'}^{OB'} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{km}^{ka} \frac{1}{x} dx \right| = \frac{1}{2} \left| \ln ka - \ln km \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{ka}{km} \right| = A_{PBAM},$$

como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

[1] Anton, H.; Bivens, I.; Davis, S. *Cálculo*, Bookman, 8. ed., Porto Alegre (2007).

[2] Muniz Neto, A. C. *Geometria*, SBM, Rio de Janeiro (2013).

[3] Shervatov, V.G. *Funciones Hiperbólicas*, Editora Mir, 2^a Ed., Moscou (1984).

[4] Stewart, J. *Cálculo, Volume 1*, Cengage Learning, Ed. 7^a, São Paulo (2013).

[5] Thomas, G. B. *Cálculo*, Addison-Wesley, 10. ed., São Paulo (2002).

[6] http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf, página consultada em 06/08/2014. Organizada por Sônia Pinto de Carvalho.

■