



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
COORDENAÇÃO DE PESQUISA

INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA – PIBIC

Harmônicos hipersféricos na esfera de dimensão N .

Área de Concentração: Física

Subárea do conhecimento: Métodos Matemáticos da Física

Especialidade do conhecimento: Modelos com o uso da Geometria Esférica

Relatório Final

Período da bolsa: de 08/2017 a 07/2018

Este projeto é desenvolvido com bolsas de Iniciação Científica
PIBIC/COPES

Resumo

Neste trabalho são construídos os harmônicos hiperesféricos em N dimensões. A equação de Laplace em N dimensões nas coordenadas hiperesféricas foi obtida com o uso do operador de Laplace-Beltrami com a métrica da geometria esférica. O método usado para a obtenção dos harmônicos hiperesféricos é baseado no método usual de separação de variáveis e não envolve a teoria de polinômios harmônicos ou a teoria de momento angular generalizado. As equações ordinárias são reduzidas a equação de Schoedinger com o potencial simétrico de Pöschl-Teller. As soluções das equações ordinárias são apresentadas na forma da solução da equação de Schoedinger multiplicado por um fator funcional computado no processo de solução. Os harmônicos hiperesféricos são obtidos como o produto das soluções das equações ordinárias e são expressos em termos dos polinômios de Gegenbauer. O resultado é comparado com os resultados obtidos por outros métodos. Para a ilustração gráfica dos resultados são apresentadas as imagens das projeções dos harmônicos hiperesféricos em 4 dimensões nos hiperplanos tridimensionais.

Palavra-chave: Geometria esférica, harmônicos hiperesféricos, polinômios de Gegenbauer, operador de Laplace-Beltrami.

Sumário

1	Introdução	4
2	Obtenção do Operador de Laplace em Coordenadas Curvilineares Ortogonais.	7
2.1	Transformação de coordenadas	7
2.2	Uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares. . .	13
2.3	Uso do operador de Laplace-Beltrami.	18
3	Separação de variáveis para o caso S^3.	20
4	Obtenção do Laplaciano nas coordenadas hipersféricas em $N+1$ dimensões.	23
5	Solução da Equação de Laplace em N dimensões.	28
5.1	Separação de Variáveis.	28
5.2	O problema de Pöschl-Teller.	32
5.3	Soluções das Equações Ordinárias.	34
5.4	Normalização e Ortogonalidade.	41
6	Apresentação gráfica dos harmônicos hipersféricos em S^3	45
7	Observação	49
8	Conclusão	58

1 Introdução

A equação diferencial parcial elíptica, frequentemente utilizada nas ciências em geral, recebeu o nome de equação de Laplace em homenagem ao seu criador, o astrônomo e matemático francês Pierre Simon Laplace. A equação de Laplace tem uma grande importância, em física, descreve os potenciais para fluidos, elétrico e gravitacional. Uma função que seja solução para a equação de Laplace é nomeada de função harmônica.

O caso usual da equação de Laplace em coordenadas esféricas de 3 dimensões e suas soluções são descritas, por exemplo, na Ref. [1] e chamadas de harmônicos esféricos. Neste trabalho discutiremos a equação de Laplace em geometria esférica para dimensões maiores que 3. As soluções para dimensões altas chamaremos de harmônicos hipersféricos.

Os harmônicos hipersféricos para dimensão arbitrária são descritos na Ref. [2] com os métodos da função geratriz e com o uso da teoria de polinômios harmônicos. Na referência [3] é discutido o problema na geometria esférica em N dimensões com o uso da teoria do momento angular generalizado, usando as relações de comutação para seus componentes em um espaço Euclidiano de N dimensões. Na Ref. [3] são determinados os autovalores do momento angular quadrado que pode ser tratado como a parte angular do operador de Laplace de N dimensões. Indicaremos também alguns artigos dedicados ao tema de obtenção dos harmônicos hipersféricos para aplicação nos vários problemas com o uso da geometria esférica. Na referência [4] foram obtidos os autovalores e suas degenerescências dos harmônicos hipersféricos. Na referência [5] foi deduzida a conclusão sobre completeza dos harmônicos hipersféricos baseada no teorema sobre polinômios homogêneos em S^3 . Na referência [6], os harmônicos hipersféricos são apresentados parcialmente em termos dos polinômios de Gegenbauer. A expressão final não é apresentada, é indicada somente uma função geratriz das soluções. Na referência [7] os harmônicos esféricos são descritos em termos das funções associadas de Legendre. Notamos que as autofunções da equação apresentada em [7] possuem formalmente as propriedades necessárias e os autovalores adequados. Mas a análise das funções que expressam os harmônicos esféricos mostrou que estas funções são singulares nas extremidades do intervalo da variação dos parâmetros e portanto não são aceitáveis para os nossos objetivos.

Na Ref. [8] são estudadas as propriedades de monômios, polinômios homogêneos e polinômios harmônicos. Mostrando as projeções harmonicas de forma alternativa ao tratamento do momento angular e o momento angular generalizado, levando em conta

várias teoremas para integrações hiperangular; ressaltando as aplicações na física por estarem ligadas a Coulomb Sturmians através das projeções de Fock, tanto os Sturmianos quanto suas generalizações mostram-se exatamente úteis na teoria quântica. Na Ref. [9] é demonstrado uma generalização do teorema da divergência para dimensão N que em seguida é usado, junto ao operador de Laplace-Beltrami, para obter a equação de Laplace para dimensão N . O método utilizado na Ref. [9] obtém a equação de Laplace para dimensão N e suas soluções de uma forma mais didática, de maneira mais detalhada, sendo possível a fácil compreensão de alunos de graduação em física ou matemática. É abordado inicialmente a equação para dimensões menores e em seguida é realizada sua generalização. As soluções da equação de Laplace é dada em termos do polinômios de Legendre mostrando uma relação com os polinômios de Gegenbauer, por fim em [9] é apresentado o fator de normalização e mostrada a ortogonalidade da solução encontrada da equação de Laplace para dimensão N . Nas Refs. [10] e [11] são estudadas propriedades das equações diferenciais parciais e o método de separação de variáveis. Nas Refs. [12] e [13] são mostradas algumas outras propriedades dos polinômios de Gegenbauer.

Neste trabalho discutimos a obtenção de harmônicos hipersféricos em N dimensões arbitrária com o uso de um método distinto dos métodos descritos acima. Este método é baseado na utilização da soluções da equação de Schrödinger com potencial simétrico de Pöschl-Teller.

O trabalho é organizado na forma seguinte. Inicialmente encontramos a equação de Laplace para o caso de 4 dimensões de três formas diferentes, sendo elas: o método transformação de coordenadas, onde escrevemos as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas hipersféricas e as coordenadas hipersféricas em termos das coordenadas cartesianas; o uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares, partindo da definição dos operadores de gradiente e de divergência e construindo o operador de Laplace; e o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante para o caso de 4 dimensões, explorando o tensor métrico e algumas de suas propriedades.

A solução para equação de Laplace em N dimensões foi encontrada usamos o método de separação de variáveis. As soluções das equações ordinárias com dependências angulares, foram reduzidas a uma forma da equação de Schrodinger com potencial simétrico de Pöchl-Teller. A solução para a equações ordinarias são escritas como produto da equação Schrödinger por um termo funcional encontrado durante a solução. Escritas em

termos dos polinômios de Gegenbauer, as soluções das equações ordinárias são escritas em termos dos polinômios de Gegenbauer. Os polinômios de Gegenbauer são também conhecidos como polinômios ultra-esféricos, esses polinômios são uma generalização dos polinômios de Legendre e Chebyshev, sendo também um caso especial dos polinômios de Jacobi. O produto das soluções das equações ordinárias dá origem aos harmônicos hipersféricos de N dimensões. Encontramos o fator de normalização e mostramos a ortogonalidade dos harmônicos hipersféricos com o uso de algumas das propriedades dos polinômios de Gegenbauer, mostrando que os harmônicos hipersféricos formam um conjunto completo. Por fim, realizamos algumas apresentações gráficas dos harmônicos hipersféricos para 4 dimensões em dois hiperplanos (x_1, x_2, x_4) e (x_1, x_3, x_4) , usando uma parametrização apropriada que foi definida no projeto. Essas projeções são realizadas fixando $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ para o primeiro hiperplano e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ para o segundo. Fazendo uma abordagem didática para a compreensão dos harmônicos.

2 Obtenção do Operador de Laplace em Coordenadas Curvilineares Ortogonais.

Nessa seção é obtido o Laplaciano nas coordenadas hipersféricas em 4 dimensões. Utilizamos três métodos diferentes na obtenção do Laplaciano em coordenadas hipersféricas. No primeiro método utilizamos a transformação de coordenadas, no segundo fizemos o uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares e no terceiro usamos o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante.

2.1 Transformação de coordenadas

Para obter o Laplaciano nas coordenadas hipersféricas $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ escrevemos as expressões das coordenadas Cartesianas em termos das coordenadas hipersféricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_4 &= r \cos \theta_3, \\ x_3 &= r \sin \theta_3 \cos \theta_2, \\ x_2 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ x_1 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1; \end{aligned} \tag{2.1}$$

e as expressões das coordenadas hipersféricas em termos das coordenadas Cartesianas (as relações inversas) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_1 = \theta_1 &= \arctan \left(\frac{x_1}{x_2} \right), \tag{2.2} \\ q_2 = \theta_2 &= \arctan \left(\frac{x_2}{x_3} \right), \quad r_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ q_3 = \theta_3 &= \arctan \left(\frac{x_3}{x_4} \right), \quad r_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \end{aligned}$$

$q_4 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = r_4$. O Laplaciano nas coordenadas Cartesianas é escrito como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \tag{2.3}$$

Calculamos a primeira derivada da função u em relação as coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

em seguida a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \quad (2.5)$$

O Laplaciano então é escrito:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

As derivadas $\frac{\partial q_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2}$ foram encontradas e listadas a seguir, para a coordenada curvilínea q_1 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} &= \frac{x_2}{r_2^2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{r_2^2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_3} = \frac{\partial q_1}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{2x_1x_2}{r_2^4}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1x_2}{r_2^4}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_4^2} = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

para q_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} &= \frac{x_3x_1}{r_2r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = \frac{x_3x_2}{r_2r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_3} = -\frac{r_2}{r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_1^2} &= \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_3^2} - \frac{x_1^2}{r_2^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_2^2} = \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_3^2} - \frac{x_2^2}{r_2^2} \right), \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_3^2} &= \frac{2x_3r_2}{r_3^4}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_4^2} = 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

para q_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} &= \frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_2} = \frac{x_4 x_2}{r_3 r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{x_4 x_3}{r_3 r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_4} = -\frac{r_3}{r_4^2}, \\ \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_1^2} &= \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_4^2} - \frac{x_1^2}{r_3^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_2^2} = \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_4^2} - \frac{x_2^2}{r_3^2} \right), \\ \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_3^2} &= \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_3^2}{r_4^2} - \frac{x_3^2}{r_3^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_3^2} = \frac{2x_4 r_3}{r_4^4}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

para q_4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{r_4}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{r_4} - \frac{x_1^2}{r_4^3}, \quad \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_2^2} = \frac{1}{r_4} - \frac{x_2^2}{r_4^3}, \\ \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{r_4} - \frac{x_3^2}{r_4^3}, \quad \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_4^2} = \frac{1}{r_4} - \frac{x_4^2}{r_4^3}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Usando as derivadas em (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10), agrupamos os coeficientes que acompanham as segundas derivadas da função u na Eq. (2.6), para a derivada em relação a q_1 :

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \left[\frac{x_2^2}{r_2^4} + \frac{x_1^2}{r_2^4} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \left[\frac{r_2^2}{r_2^4} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}; \quad (2.11)$$

em relação a q_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} &= \left[\frac{r_2^2}{r_3^4} + \frac{x_3^2 x_2^2}{r_2^2 r_3^4} + \frac{x_3^2 x_1^2}{r_2^2 r_3^4} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \\ &= \left[\frac{1}{r_3^4} \left(r_2^2 + \frac{x_3^2 (x_1^2 + x_2^2)}{r_2^2} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \\ &= \left[\frac{1}{r_3^4} \left(r_2^2 + \frac{x_3^2 r_2^2}{r_2^2} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} = \left[\frac{1}{r_3^4} (r_2^2 + x_3^2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} = \frac{1}{r_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

em relação a q_3 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_3}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} &= \left[\frac{r_3^2}{r_4^4} + \frac{x_4^2 x_3^2}{r_3^2 r_4^4} + \frac{x_4^2 x_2^2}{r_3^2 r_4^4} + \frac{x_4^2 x_1^2}{r_3^2 r_4^4} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} \\ &= \left[\frac{1}{r_4^4} \left(r_3^2 + \frac{x_4^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{r_3^2} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} \\ &= \left[\frac{1}{r_4^4} (r_3^2 + x_4^2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} = \left[\frac{1}{r_4^4} r_4^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} = \frac{1}{r_4^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

em relação a q_4 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_3}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} &= \left[\frac{x_4^2}{r_4^2} + \frac{x_3^2}{r_4^2} + \frac{x_2^2}{r_4^2} + \frac{x_1^2}{r_4^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} \\ &= \left[\frac{1}{r_4^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Calculando os coeficientes das derivadas mistas, em relação as coordenadas q_1 e q_2 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \left[-\frac{x_3 x_2}{r_2 r_3^2} \frac{x_1}{r_2^2} + \frac{x_3 x_1}{r_4 r_4^2} \frac{x_2}{r_2^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \\ &= 2 \left[\frac{x_3 x_2 x_1}{r_2^3 r_3^2} (1 - 1) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 ; \end{aligned}$$

as coordenadas q_1 e q_3 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \left[\frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2} \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_2^2} \frac{x_4 x_2}{r_3 r_2^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} \\ &= 2 \left[\frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2 r_2^2} (x_2 - x_2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} = 0 ; \end{aligned}$$

as coordenadas q_1 e q_4 :

$$2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} = 2 \left[-\frac{x_1 x_2}{r_4 r_3^2} + \frac{x_1 x_2}{r_4 r_4^2} \right] \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_4} = 0 ;$$

as coordenadas q_2 e q_3 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \left[-\frac{r_2}{r_3^2} \frac{x_4 x_3}{r_3 r_4^2} + \frac{x_4 x_2}{r_3 r_4^2} \frac{x_3 x_2}{r_2 r_3^2} + \frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2} \frac{x_3 x_1}{r_2 r_3^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} \\ &= 2 \left[\frac{x_4 x_3}{r_3^3 r_4^2} \left(-r_2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{r_2} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} \\ &= 2 \left[\frac{x_4 x_3}{r_3^3 r_4^2} (-r_2 + r_2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} = 0 ; \end{aligned}$$

as coordenadas q_2 e q_4 :

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_2}{\partial x_i} = \left[-\frac{x_3}{r_4} \frac{r_2}{r_3^2} + \frac{x_2}{r_4} \frac{x_3 x_2}{r_2 r_3^2} + \frac{x_1}{r_4} \frac{x_3 x_1}{r_2 r_4^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} \\
& = 2 \left[\frac{x_3}{r_3^2 r_4} \left(-r_2 + \frac{1}{r_2} (x_1^2 + x_2^2) \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} \\
& = 2 \left[\frac{x_2}{r_3^2 r_4} (-r_2 + r_2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} = 0 ;
\end{aligned}$$

as coordenadas q_3 e q_4

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_3}{\partial x_i} = 2 \left[-\frac{x_4}{r_4} \frac{r_3}{r_4^2} + \frac{x_3}{r_4} \frac{x_4 x_3}{r_3 r_4^2} + \frac{x_2}{r_4} \frac{x_4 x_2}{r_3 r_4^2} + \frac{x_1}{r_4} \frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} \\
& = 2 \left[-\frac{x_4 r_3}{r_4^3} + \frac{x_4}{r_3 r_4^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} = 2 \left[-\frac{x_4 r_3}{r_4^3} + \frac{x_4}{r_3 r_4^3} r_3^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} \\
& = \left[\frac{x_1 r_3}{r_4^3} (r_3 - r_3) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} = 0 .
\end{aligned}$$

Em seguida agrupamos e simplificamos os coeficientes relacionados as primeiras derivadas para a coordenada q_1 :

$$\left[\frac{2x_1 x_2}{r_2^4} - \frac{2x_1 x_2}{r_2^4} \right] \frac{\partial u}{\partial q_1} = 0 ; \quad (2.15)$$

para a coordenada q_2 :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2x_3 r_2}{r_3^4} + \frac{x_3}{r_2 r_3^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_3^2} - \frac{x_1^2}{r_2^2} \right) + \frac{x_3}{r_2 r_3^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_3^2} - \frac{x_2^2}{r_2^2} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial q_2} \\
& = \frac{x_3}{r_3^4 r_2} \left[2r_2^2 + r_3^2 \left(1 - \frac{2r_2^2}{r_3^2} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial q_2} \\
& = \frac{x_3}{r_3^4 r_2} [2r_2^2 - 2r_2^2 + r_3^2] \frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{x_3}{r_3^2 r_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} ;
\end{aligned} \quad (2.16)$$

a coordenada q_3 :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2x_4 r_3}{r_4^4} + \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_4^2} - \frac{x_2^2}{r_3^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_4^2} - \frac{x_1^2}{r_3^2} \right) + \frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(1 - \frac{2x_3^2}{r_4^2} - \frac{x_3^2}{r_3^2} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
&= \left[\frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(2r_4^2 - 2r_2^2 - \frac{r_2^2 r_4^2}{r_3^2} + 2r_3^2 \right) + \frac{2x_4 r_3}{r_4^4} \right] \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
&= \left[\frac{x_4}{r_3 r_4^2} \left(3 - \frac{2r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_3^2}{r_3^2} \right) + \frac{2x_4 r_3}{r_4^4} \right] \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
&= \left[\frac{x_4}{r_3 r_4^4} (2r_4^2 - 2r_3^2 + 2r_3^2) \right] \frac{\partial u}{\partial q_3} = \frac{2x_4}{r_4^2 r_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} ;
\end{aligned} \tag{2.17}$$

e a coordenada q_4 :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{r_4^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \right] \frac{\partial u}{\partial q_4} \\
&= \frac{3}{r_4^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \frac{\partial u}{\partial q_4} = \frac{3r_4^2}{r_4^3} \frac{\partial u}{\partial q_4} = \frac{3}{r_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo os coeficientes das Eqs. (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18) na Eq. (2.6), encontramos:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} + \frac{3}{r_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} + \frac{1}{r_4^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} + \frac{2x_4}{r_4^2 r_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} + \frac{1}{r_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} + \frac{x_3}{r_3^2 r_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}, \tag{2.19}$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_4^2} &= \frac{1}{r^2}; \quad \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3}; \\
\frac{1}{r_2^2} &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2}; \\
\frac{x_3}{r_3^2 r_2} &= \frac{\cos \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}; \quad \frac{2x_4}{r_3 r_4^2} = 2 \frac{\cot \theta_3}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Substituindo os termos de (2.20) na Eq. (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_3^2} + 2 \frac{\cot \theta_3}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \\
&+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_2^2} + \frac{\cos \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

que pode ser escrito também na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

A Eq. (2.22) representa o Laplaciano nas coordenadas hiperésfericas em 4 dimensões. Ao comparar com o Laplaciano nas coordenadas esféricas em 3 dimensões, nota-se que há um acréscimo de um termo referente a derivada em relação a θ_1 , há um acréscimo em 1 nas potências de r a derivada radial e um termo de seno no quociente do coeficiente da derivada em relação a θ_2 .

2.2 Uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares.

Nesta seção apresentaremos uma dedução do Laplaciano usando os operadores de gradiente e de divergência nas coordenadas curvilineares. O Laplaciano é definido como:

$$\Delta u = \text{div} (\text{grad } u) .$$

Descrevemos o caso de 3 dimensões para generalizar para o caso de 4 dimensões. Ressaltamos as expressões de gradiente e divergência no caso de 3 dimensões com o gradiente de uma função escalar definido como:

$$\vec{A} = \text{grad } u = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} , \quad (2.23)$$

sendo q_1 , q_2 e q_3 coordenadas curvilineares ortogonais, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ vetores unitários das linhas das coordenadas e h_1 , h_2 e h_3 os coeficientes métricos determinados pela expressão:

$$h_j = \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \right]^{1/2} , \quad (2.24)$$

sabendo que x_1 , x_2 e x_3 são coordenadas Cartesianas.

A divergência de um campo vetorial é definida como:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right] . \quad (2.25)$$

Substituindo as componetes da Eq. (2.23) na Eq. (2.25), chegamos a expressão para o Laplaciano em coordenadas curvilineares:

$$\begin{aligned} \Delta u = \text{div}(\text{grad } u) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Introduzimos as coordenadas esféricas na seguinte forma:

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2 \text{ e } q_3 = r \quad (2.27)$$

essa forma não é comum, mas é mais conveniente para o objetivo desse trabalho. As relações das coordenadas cartesianas em termos das coordenadas curvilineares são da forma:

$$x_3 = r \cos \theta_2, \quad x_2 = r \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad x_1 = r \sin \theta_2 \sin \theta_1 . \quad (2.28)$$

As derivadas das coordenadas Cartesianas a respeito das coordenadas esféricas da Eq.(2.27) são escritas como:

$$\begin{aligned} G_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ -r \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ 0 & -r \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Efetuando os cálculos da Eq. (2.24) obtemos os coeficientes métricos:

$$h_1 = r \sin \theta_2, \quad h_2 = r \text{ e } h_3 = 1 . \quad (2.29)$$

Substituindo os coeficientes métricos da Eq. (2.29) na Eq. (2.26) e usando a notação da

Eq. (2.27), chegamos ao Laplaciano nas coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) .\end{aligned}$$

Usando um processo parecido, podemos generalizar para o caso de 4 dimensões.

Fazemos o mesmo procedimento para o caso de 4 dimensões. Sendo o gradiente de uma função escalar u

$$\vec{A} = \text{grad } u = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} + \vec{e}_4 \frac{1}{h_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} , \quad (2.30)$$

onde h_1 , h_2 , h_3 e h_4 são os coeficientes métricos definidos por:

$$h_j = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \right]^{1/2} , \quad (2.31)$$

q_1 , q_2 , q_3 e q_4 são coordenadas curvilineares ortogonais, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ e $\vec{e}_4$ são vetores unitários das linhas das coordenadas. A divergência de $\vec{A}$ é definida:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 h_4 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 h_4 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 h_4 A_3) + \frac{\partial}{\partial q_4} (h_1 h_2 h_3 A_4) \right]$$

o operado de Laplace aplicado em u é:

$$\begin{aligned}\Delta u = \text{div} (\text{grad } u) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3 h_4}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3 h_4}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_4}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) + \frac{\partial}{\partial q_4} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} \right) \right] .\end{aligned} \quad (2.32)$$

Obtemos o Laplaciano nas coordenadas hiperesféricas:

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \theta_3 \text{ e } q_4 = r . \quad (2.33)$$

As relações entre as coordenadas Cartesianas e as coordenadas hiperésfericas são:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= r \cos \theta_3 , \\
 x_3 &= r \sin \theta_3 \cos \theta_2 , \\
 x_2 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 , \\
 x_1 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 ;
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

já citadas na Eq. (2.1). Representamos as derivadas das coordenadas hiperesféricas pelas coordenadas curvilineares na forma de matriz

$$\begin{aligned}
 G_{ij} &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_1}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial q_1} & \frac{\partial x_4}{\partial q_2} & \frac{\partial x_4}{\partial q_3} & \frac{\partial x_4}{\partial q_4} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_1}{\partial r_4} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_4} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_4}{\partial r_4} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ 0 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 & r \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & -r \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

e calculamos os coeficientes métricos da Eq. (2.31). Para h_1 temos:

$$\begin{aligned}
 h_1^2 &= r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 \\
 &= r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 ;
 \end{aligned}$$

para h_2 :

$$\begin{aligned}
 h_2^2 &= r^2 (\sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2) \\
 &= r^2 (\sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2) \\
 &= r^2 \sin^2 \theta_3 ;
 \end{aligned}$$

para h_3 :

$$\begin{aligned}
 h_3^2 &= r^2 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + r^2 \cos^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + r^2 \cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 + r^2 \sin^2 \theta_3 \\
 &= r^2 (\cos^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \cos^2 \theta_2) + \sin^2 \theta_3) \\
 &= r^2 (\cos^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) + \sin^2 \theta_3) = r^2 ;
 \end{aligned}$$

e para h_4 :

$$\begin{aligned}
 h_4^2 &= \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 \\
 &= \sin^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2) + \cos^2 \theta_3 \\
 &= \sin^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \cos^2 \theta_2) + \cos^2 \theta_3 = 1 .
 \end{aligned}$$

Simplificamos os termos que acompanham as derivadas da Eq. (2.32) e substituindo os coeficientes métricos calculados acima, encontramos:

$$\frac{h_2 h_3 h_4}{h_1} = \frac{r}{\sin \theta_2}, \quad \frac{h_1 h_3 h_4}{h_2} = r \sin \theta_2, \quad \frac{h_1 h_2 h_4}{h_3} = r \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2, \quad \frac{h_1 h_2 h_3}{h_4} = r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2, \quad (2.36)$$

$$\text{e } h_1 h_2 h_3 h_4 = r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2. \quad (2.37)$$

Substituindo os termos acima na Eq. (2.32), temos:

$$\begin{aligned}
 \text{div (grad } u) &= \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{r}{\sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(r \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(r \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right], \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

podendo ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

A Eq. (2.39) representa a mesma expressão da Eq.(2.22).

2.3 Uso do operador de Laplace-Beltrami.

Nessa seção encontramos o Laplaciano nas coordenadas hiperésfericas utilizando o operador de Laplace-Beltrami. O operador de Laplace-Beltrami é definido como:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial q_j} \right) , \quad (2.40)$$

onde g_{ij} é o tensor métrico, g^{ij} é o tensor métrico inverso e g é o determinante do tensor métrico. O tensor métrico pode ser determinado como:

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = G^T G . \quad (2.41)$$

onde G representa a matriz com componentes $G_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$. A matriz G é determinada na seção anterior na Eq. (2.35) e G^T tem a forma:

$$G^T = \begin{bmatrix} r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 & 0 \\ r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \cos \theta_3 \cos \theta_2 & -r \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_3 \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Da Eq. (2.42) e Eq. (2.35) achamos a matriz do tensor métrico:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.43)$$

Sendo o determinante:

$$g = \det g_{ij} = r^6 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2, \quad (2.44)$$

Com a raiz de g e a Eq. (2.43) calculamos o tensor inverso

$$g^{ij} = \frac{1}{r^6 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \begin{bmatrix} r^4 \sin^4 \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^4 \sin^3 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^6 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Para $\sqrt{|g|}g^{ij}$ temos:

$$\sqrt{|g|}g^{ij} = \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} r^4 \sin^4 \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^4 \sin^3 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^6 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2 \end{bmatrix}$$

A expressão para cada coordenada curvilínea referente a Eq. (2.40) é dada por:

$$\frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial r} \left((r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2) \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right),$$

$$\frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right),$$

$$\frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right).$$

Utilizando as Eqs. (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49) o Laplaciano é escrito como:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} . \end{aligned} \quad (2.50)$$

A Eq. (2.50) repete os resultados das Eqs. (2.22) e (2.39). Por conveniência e praticidade utilizaremos o método descrito nessa subseção (operador de Laplace-Beltrami) para a generalização do Laplaciano para dimensão N .

3 Separação de variáveis para o caso S^3 .

Aplicaremos o método de separação de variáveis para a equação de Laplace nas coordenadas hipersféricas

$$\Delta u = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^3} u = 0 \quad (3.1)$$

em que Δ_{S^3} é o operador de Laplace na esfera S^3 nas coordenadas hipersféricas da Eq. (2.1) definido por:

$$\begin{aligned} \Delta_{S^3} = & \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Apresentamos a função u na forma:

$$u(r, \theta_3, \theta_2, \theta_1) = R(r)W_3(\theta_3, \theta_2, \theta_1). \quad (3.3)$$

Ao utilizar o método de separação de variáveis para a Eq. (2.50), encontramos:

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) W_3 = -\frac{1}{r^2} (\Delta_{S^3} W_3) R. \quad (3.4)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (3.4) por:

$$\frac{r^2}{RW_3} \quad (3.5)$$

obtemos:

$$\frac{1}{rR} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3 . \quad (3.6)$$

Isso só é válido caso a Eq. (3.6) seja igual a uma constante, chamada de constante de separação λ_3 ,

$$\Delta u = \frac{1}{rR} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3 = \lambda_3. \quad (3.7)$$

A equação radial, para o nosso propósito, não é tão importante quanto as equações angulares então, nesse momento, desconsideramos. Continuando para a equação angular, dada por:

$$-\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3 = \lambda_3 \quad (3.8)$$

$$\Delta_{S^3} W_3 = -\lambda_3 W_3. \quad (3.9)$$

Apresentamos a função W_3 como:

$$W_3(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = \Theta_3(\theta_3) W_2(\theta_2, \theta_1) \quad (3.10)$$

e a substituímos na Eq. (3.9):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) W_2 + \frac{\Theta_3}{\sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial W_2}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{\Theta_3}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta_1^2} = -\lambda_3 \Theta_3 W_2 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Simplificando e agrupando os termos, chegamos a expressão:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) W_2 + \frac{\Theta_3}{\sin^2 \theta_3} \Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_3 \Theta_3 W_2 , \quad (3.12)$$

onde Δ_{S^2} é dado por:

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) . \quad (3.13)$$

Multiplicando a Eq. (3.12) por:

$$\frac{\sin^2 \theta_3}{\Theta W_2}$$

encontramos:

$$\frac{1}{\Theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + \frac{1}{W_2 \sin^2 \theta_2} \Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_3 \sin^2 \theta_3 \quad (3.14)$$

agrupando os termos, obtemos:

$$\frac{1}{\Theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 + \frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2 = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\Theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 = -\frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2. \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) só é válida caso seja igual a uma constante de separação λ_2 , assim:

$$\frac{1}{\Theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 = -\frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2 = \lambda_2. \quad (3.17)$$

Ficamos com duas equações, uma para Θ_3 e outra para W_2 . A equação para Θ_3 é da forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + (\lambda_3 \sin^2 \theta_3 - \lambda_2) \Theta_3 = 0 \quad (3.18)$$

e para W_2 é:

$$\Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_2 W_2. \quad (3.19)$$

Apresentamos a função W_2 como:

$$W_2(\theta_2, \theta_1) = \Theta_2(\theta_2) \Theta_1(\theta_1). \quad (3.20)$$

e a substituímos na Eq. (3.19), obtemos:

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) \Theta_1 + \frac{\Theta_2}{\sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta_1^2} = -\lambda_2 \Theta_2 \Theta_1, \quad (3.21)$$

em seguida multiplicamos a Eq. (3.21) por $\frac{\sin^2 \theta_2}{\Theta_2 \Theta_1}$ encontrando

$$\frac{\sin \theta_2}{\Theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{\Theta_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta_1^2} = -\lambda_2 \sin^2 \theta_2 \quad (3.22)$$

ou, ainda:

$$\frac{\sin \theta_2}{\Theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) + \lambda_2 \sin^2 \theta_2 = -\frac{1}{\Theta_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta_1^2} = \lambda_1, \quad (3.23)$$

onde λ_1 é a constante de separação. Da Eq. (3.23) ficamos com duas equações uma em relação a Θ_2 e outra em relação a Θ_1 :

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta_1^2} + \lambda_1 \Theta_1 = 0 ; \quad (3.24)$$

e

$$\frac{\sin \theta_2}{\Theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) + \lambda_2 \sin^2 \theta_2 = \lambda_1 \quad (3.25)$$

ou, ainda:

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) \Theta_2 = 0 . \quad (3.26)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, conseguimos encontrar 3 equações diferenciais ordinarias para Θ_1 , Θ_2 e Θ_3 :

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta_1^2} + \lambda_1 \Theta_1 = 0 , \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) \Theta_2 = 0 , \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \theta_3} \right) + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{\sin^2 \theta_3} \right) \Theta_3 = 0 . \quad (3.29)$$

4 Obtenção do Laplaciano nas coordenadas hipersféricas em N+1 dimensões.

Nessa seção descrevemos a obtenção do Laplaciano em coordenadas hipersféricas em $N + 1$ dimensões arbitrárias. Para fazermos isso utilizaremos o operador de Laplace-Beltrami, definido como:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial q_j} \right)$$

onde g_{ij} é o tensor métrico, g^{ij} é o tensor métrico inverso e g é o determinante do tensor métrico. O tensor métrico pode ser determinado como:

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = G^T G . \quad (4.1)$$

onde x_i são coordenadas Cartesianas, q_i são coordenadas curvilineares,

$$G = G_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (4.2)$$

e G^T é a matriz transposta. Com as coordenadas curvilineares utilizaremos as coordenadas hipersféricas na dimensão $N + 1$ definidas como:

$$\begin{aligned} q_{N+1} &= r, \quad q_i = \theta_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \theta_1 &\in (0, 2\pi), \quad \theta_i \in (0, \pi), \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (4.3)$$

As coordenadas Cartesianas em termos das coordenadas hipersféricas $(r, \theta_N, \dots, \theta_2, \theta_1)$ são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= r \cos \theta_N, \\ x_N &= r \sin \theta_N \cos \theta_{N-1}, \\ x_{N-1} &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \cos \theta_{N-2}, \\ &\dots \\ x_3 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \cos \theta_2, \\ x_2 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ x_1 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1; \end{aligned} \quad (4.4)$$

ou na forma compacta:

$$x_i = r \prod_{k=i}^N \sin \theta_k \cos \theta_{i-1}, \quad \text{com } \theta_0 = 0.$$

Descrevemos algumas propriedades das coordenadas da Eq.(4.4) que serão utilizados nos cálculos

$$\sum_{k=1}^{N+1} x_k^2 = r^2; \quad \sum_{k=1}^j x_k^2 = x_{j+1}^2 \tan^2 \theta_j, \quad j \geq k. \quad (4.5)$$

Primeiramente calcularemos o tensor métrico definido na Eq. (4.1) que para obtermos calcularemos as derivadas $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$. A derivada das coordenadas Cartesianas em relação a

coordenada $q_{N+1} = r$ são:

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_{N+1}} = \frac{\partial x_k}{\partial r} = \frac{x_k}{r} . \quad (4.6)$$

Da Eq. (4.4) vemos que para $i \leq N$ temos:

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = 0 \text{ para } k \geq i + 2 , \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_{i+1}}{\partial q_i} = -x_{i+1} \tan \theta_i , \quad k = i + 1 , \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = x_k \cot \theta_i \text{ para } k \leq i . \quad (4.9)$$

Com as derivadas calculadas, utilizamos a Eq. (4.1) para calcular o tensor métrico, inicialmente efetuamos os cálculos para

$$g_{N+1,N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial r} \right)^2 = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x_k^2}{r^2} = 1 . \quad (4.10)$$

Em seguida agrupamos as derivadas das Eqs. (4.7), (4.8) e (4.9) para encontrar os termos diagonais ($i = j$) da matriz que representa o tensor métrico para $i \leq N$, sendo:

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 = \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial q_i} \right)^2 + \sum_{k=i+2}^{N+1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^i x_k^2 \cot^2 \theta_i + x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i + 0 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Usando a Eq. (4.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} g_{ii} &= x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i \cot^2 \theta_i + x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i = x_{i+1}^2 (1 + \tan^2 \theta_i) = \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} \\ &= r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_i \frac{1}{\cos^2 \theta_i} = r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para os termos não diagonais, temos:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial x_{i+1}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial q_j} + \sum_{k=i+2}^{N+1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} . \quad (4.13)$$

Substituindo as Eqs.(4.7), (4.8) e (4.9) na Eq. (4.13), obtemos:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^i x_k \cot \theta_i x_k \cot \theta_j - x_{i+1} \tan \theta_i x_{i+1} \cot \theta_j + 0 = \quad (4.14)$$

$$\sum_{k=1}^i x_k^2 \cot \theta_i \cot \theta_j - x_{i+1}^2 \tan \theta_i \cot \theta_j,$$

que com o uso da Eq. (4.5) pode ser escrito da seguinte forma:

$$g_{ij} = x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i \cot \theta_i \cot \theta_j - x_{i+1}^2 \tan \theta_i \cot \theta_j \quad (4.15)$$

$$= x_{i+1}^2 (\tan \theta_i \cot \theta_j - \tan \theta_i \cot \theta_j) = 0 .$$

As componentes da matriz que representa o tensor métrico já calculadas acima, são:

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (4.16)$$

$$g_{N+1,N+1} = 1, \quad g_{NN} = r^2, \quad (4.17)$$

$$g_{ii} = \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} = r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin \theta_k, \quad i \leq N-1 \quad (4.18)$$

Com os resultados da Eq. (4.16) podemos calcular o determinante de g_{ij} , que é:

$$g = \det g_{ij} = \prod_{i=1}^{N+1} g_{ii} = \prod_{i=1}^N \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} = \prod_{i=1}^N r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k = r^{2N} \prod_{k=2}^N \sin^{2(k-1)} \theta_k . \quad (4.19)$$

A raiz de g é:

$$\sqrt{|g|} = \prod_{i=1}^N \frac{x_{i+1}}{\cos \theta_i} = r^N \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k . \quad (4.20)$$

Agora calcularemos o tensor métrico inverso. Para as componentes não diagonais temos:

$$g^{ij} = 0, \quad i \neq j ; \quad (4.21)$$

e para as componentes diagonais:

$$g^{ii} = \frac{1}{g} \prod_{k=1}^{i-1} g_{kk} \prod_{j=1}^{i+1} g_{jj} = \frac{1}{g} \frac{g}{g_{ii}} = \frac{x_{i+1}^{-2}}{\cos^{-2} \theta_i} = r^{-2} \prod_{k=i+1}^N \sin^{-2} \theta_k \quad (4.22)$$

As componentes da matriz que representa o tensor métrico inverso são:

$$g^{N+1,N+1} = 1, \quad g^{NN} = r^{-2}, \quad (4.23)$$

$$g^{ii} = r^{-2} \prod_{k=1+i}^N \sin^{-2} \theta_k = \frac{x_{i+1}^{-2}}{\cos^{-2} \theta_i} \text{ para } i \leq N-1. \quad (4.24)$$

Definimos em seguida, que $h^i = g^{ii}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$. O operador de Laplace-Beltrami citado na Eq. (2.40), pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \right) \partial_j u + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_i \partial_j u \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} \right) g^{ij} \partial_j u + (\partial_i g^{ij}) \partial_j u + g^{ij} \partial_i \partial_j u. \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} \right) g^{ij} \partial_j u + (\partial_i g^{ij}) \partial_j u + h^i \partial_i^2 u. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Calculamos em seguida $\partial_i \sqrt{|g|}$:

$$\begin{aligned} \partial_{N+1} \sqrt{|g|} &= N r^{N-1} \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k = N r^{-1} \sqrt{|g|} \text{ para } i = N+1, \\ \partial_1 \sqrt{|g|} &= 0 \text{ para } i = 1, \\ \partial_i \sqrt{|g|} &= r^N \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k (i-1) \sin^{-1} \theta_i \cos \theta_i = \sqrt{|g|} (i-1) \cot \theta_i \text{ para } N \geq i \geq 2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

As derivadas do tensor métrico inverso são:

$$\partial_i g^{ij} = 0. \quad (4.27)$$

Substituindo na Eq. (4.25) as Eqs. (4.26) e (4.27) o Laplaciano é escrito:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=2}^N \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sqrt{|g|} (i-1) \cot \theta_i g^{ij} \partial_j u + \frac{1}{\sqrt{|g|}} N r^{-1} \sqrt{|g|} \partial_r u + \sum_{i=1}^{N+1} h^i \partial_i^2 u \\ &= \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ij} \partial_j u + N r^{-1} \partial_r u + \sum_{i=1}^N h^i \partial_i^2 u + \partial_r^2 u \\ &= \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + \sum_{i=1}^N g^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u), \end{aligned} \quad (4.28)$$

que ao simplificarmos encontramos:

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + \sum_{i=1}^N g^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) = 0$$

e agrupamos os termos ficamos:

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=1}^N \left((i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + g^{ii} \partial_i^2 u \right) + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) = 0 . \quad (4.29)$$

A Eq. (4.29) representa o Laplaciano em coordenadas hipersféricas na dimensão $N + 1$.

5 Solução da Equação de Laplace em N dimensões.

Apresentaremos a obtenção da solução da Equação de Laplace para N dimensões em coordenadas hipersféricas, utilizamos o método de separação de variáveis aplicando em:

$$r^{-2} \sum_{i=1}^N \left((i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + g^{ii} \partial_i^2 u \right) + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) = 0 , \quad (5.1)$$

repetindo os mesmos passos das subseções anteriores para caso em 4 dimensões.

5.1 Separação de Variáveis.

Aplicamos o método de separação de variáveis para a equação de Laplace nas coordenadas hipersféricas definida na Eq. (4.29) e mostrada a seguir:

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=1}^N \left((i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i u + g_N^{ii} \partial_i^2 u \right) + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) . \quad (5.2)$$

onde g_N^{ij} é o tensor métrico hipersférico sem dependência radial. Definimos Δ_{S^N} a seguir:

$$\Delta_{S^N} = \sum_{i=1}^N \left((i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i + g_N^{ii} \partial_i^2 \right) \quad (5.3)$$

como o operador de Laplace para N dimensões nas coordenadas hipersféricas, reescrevemos a Eq. (5.2) como:

$$\Delta u = r^{-2} \Delta_{S^N} u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) . \quad (5.4)$$

Apresentamos u da seguinte forma:

$$u = R(r) W_N(\theta_N, \dots, \theta_2, \theta_1) . \quad (5.5)$$

Utilizando o método de separação de variáveis na Eq. (5.4), encontramos:

$$r^{-2} \Delta_{S^N} (RW_N) + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r RW_N) , \quad (5.6)$$

multiplicamos a Eq. (5.6) por $\frac{r^2}{RW_N}$, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_N} \Delta_{S^N} W_N + \frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) &= 0 \\ \frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) &= -\frac{1}{W} \Delta_{S^N} W_N \end{aligned} \quad (5.7)$$

a validade da Eq. (5.7) é obtida ao igualarmos a uma constante de separação, nesse caso λ_N , logo:

$$-\frac{1}{W} \Delta_{S^N} W_N = \frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) = \lambda_N . \quad (5.8)$$

Como no caso para 4 dimensões a equação radial não tem tanta importância quanto as equações angulares, então as desconsideramos. Continuando para a equação angular, dada por:

$$\Delta_{S^N} W_N = -\lambda_N W_N , \quad (5.9)$$

substituímos o operador de Laplace da Eq. (5.3) na Eq. (5.9) e encontramos:

$$\sum_{i=1}^N ((i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N) = -\lambda_N W_N , \quad (5.10)$$

onde o tensor métrico hipersférico sem dependência radial g_N^{ij} é:

$$g_N^{ij} = g_{N-1}^{ij} \sin^{-2} \theta_N . \quad (5.11)$$

Expressamos o primeiro termo da Eq. (5.10) como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N ((i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N) = \\ & \sum_{i=1}^{N-1} ((i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N) \\ & + ((N-1) \cot \theta_N g_N^{NN} \partial_N W_N + g_N^{NN} \partial_N^2 W_N) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} & \sin^{-2} \theta_N \sum_{i=1}^{N-1} ((i-1) \cot \theta_i g_{N-1}^{ii} \partial_i W_N + g_{N-1}^{ii} \partial_i^2 W_N) + \\ & ((N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N) = -\lambda_N W_N . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Notamos que g_{N-1}^{ij} não possui dependência θ_N , então definimos que:

$$\Delta_{S^{N-1}} = \sum_{i=1}^{N-1} ((i-1) \cot \theta_i g_{N-1}^{ii} \partial_i + g_{N-1}^{ii} \partial_i^2) \quad (5.14)$$

é o operador de Laplace para $N-1$ coordenadas hipersféricas.

Analisamos a Eq. (5.10) com o operador de Laplace para $N-1$ coordenadas da Eq. (5.14), percebendo que:

$$\sin^{-2} \theta_N \Delta_{S^{N-1}} W_N + ((N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N) = -\lambda_N W_N, \quad (5.15)$$

reescrevemos a Eq. (5.15) na forma:

$$\Delta_{S^{N-1}} W_N + \sin^2 \theta_N ((N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N + \lambda_N W_N) = 0 . \quad (5.16)$$

Definimos W_N como:

$$W_N = W_{N-1}(\theta_{N-1}, \dots, \theta_2, \theta_1) Y_N(\theta_N) , \quad (5.17)$$

substituindo a Eq. (5.17) na Eq. (5.16) e obtemos que:

$$\sin^2 \theta_N ((N-1) \cot \theta_N \partial_N W_{N-1} Y_N + \partial_N^2 W_{N-1} Y_N + \lambda_N W_{N-1} Y_N) = -\Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} Y_N , \quad (5.18)$$

multiplicando a Eq. (5.18) por $\frac{1}{W_{N-1}Y_N}$, encontramos:

$$\frac{1}{Y_N} \sin^2 \theta_N \left((N-1) \cot \theta_N \partial_N Y_N + \partial_N^2 Y_N + \lambda_N Y_N \right) = -\frac{1}{W_{N-1}} \Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} = \lambda_{N-1} \quad (5.19)$$

onde λ_{N-1} é uma constante de separação. Foram obtidas duas equações, uma com dependência θ_N :

$$\begin{aligned} (N-1) \cot \theta_N \partial_N Y_N + \partial_N^2 Y_N + \lambda_N Y_N &= \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} Y_N \\ \partial_N^2 Y_N + (N-1) \cot \theta_N \partial_N Y_N + \left(\lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right) Y_N &= 0 , \end{aligned} \quad (5.20)$$

e outra com dependências $(\theta_{N-1}, \dots, \theta_2, \theta_1)$:

$$-\Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} = \lambda_{N-1} W_{N-1} . \quad (5.21)$$

Aplicamos o método de separação de variáveis repetindo as manipulações anteriores e reduzimos a Eq. (5.21) até chegarmos há:

$$-\Delta_{S^2} W_2 = \lambda_2 W_2 , \quad (5.22)$$

Usamos mais uma vez o método de separação de variáveis, dessa vez na Eq. (5.22) para obtemos:

$$\cot \theta_2 \partial_2 Y_2 + \partial_2^2 Y_2 + \lambda_2 Y_2 = \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} Y_2 \quad (5.23)$$

$$\partial_2^2 Y_2 + \cot \theta_2 \partial_2 Y_2 + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0 . \quad (5.24)$$

Aplicamos o método de separação de variáveis na Eq. (5.24) encontrando a seguinte equação:

$$-\Delta_{S^1} W_1 = \lambda_1 W_1 . \quad (5.25)$$

Com o método de separação de variáveis podemos encontrar as seguintes equações ordi-

nárias:

$$\partial_N^2 Y_N + (N-1) \cot \theta_N \partial_N Y_N + \left(\lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right) Y_N = 0 , \quad (5.26)$$

$$\partial_{N-1}^2 Y_{N-1} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \partial_{N-1} Y_{N-1} + \left(\lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right) Y_{N-1} = 0 , \quad (5.27)$$

...

$$\partial_3^2 Y_3 + \cot \theta_3 \partial_3 Y_3 + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{\sin^2 \theta_3} \right) Y_3 = 0 , \quad (5.28)$$

$$\partial_2^2 Y_2 + \cot \theta_2 \partial_2 Y_2 + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0 , \quad (5.29)$$

$$\partial_1^2 Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0 . \quad (5.30)$$

5.2 O problema de Pöschl-Teller.

Em prol de resolvermos as equações diferenciais ordinárias encontradas anteriormente, usaremos a solução da equação de Schrodinger com potencial de Pöschl-Teller simétrico.

A solução do problema de Pöschl-Teller da mecânica quântica é descrita na Ref. [14], problema 38; onde:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right) \psi = E \psi , \quad (5.31)$$

$$\kappa > 1, \quad \lambda > 1; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2\alpha} .$$

A Eq. (5.31) também é escrita na forma:

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \alpha^2 \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right) \psi = q^2 \psi, \quad q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (5.32)$$

Seu espectro é dado como:

$$q^2 = \alpha^2 (2n + \kappa + \lambda)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \quad (5.33)$$

e suas autofunções são:

$$\psi_n = A_n \sin^\kappa(\alpha x) \cos^\lambda(\alpha x) {}_2F_1 \left(-n, n + \kappa + \lambda, \kappa + \frac{1}{2}; \sin^2(\alpha x) \right) \quad (5.34)$$

com ${}_2F_1(a, b, c, x)$ a função hipergeométrica, definida da seguinte forma:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.35)$$

com $(a)_n$ o símbolo de Pochhammer, escrito como:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (5.36)$$

Para o caso do potencial simétrico de Pöschl-Telle, em que $\kappa = \lambda$, o potencial toma a forma:

$$V(x) = \alpha^2 \kappa(\kappa-1) \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \right) = \frac{4\alpha^2 \kappa(\kappa-1)}{\sin^2(2\alpha x)}, \quad (5.37)$$

com seguinte espectro:

$$q^2 = 4\alpha^2 (n + \kappa)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

As autofunções são:

$$\psi_n = A'_n \sin^\kappa(2\alpha x) {}_2F_1\left(-n, n+2\kappa, \kappa + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha x))\right), \quad (5.39)$$

em seguida definimos uma nova variável:

$$\theta = 2\alpha x \quad (5.40)$$

e então a Eq. (5.32) assume a forma:

$$-\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta} \psi = (n+\kappa)^2 \psi \quad (5.41)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + (n+\kappa)^2 \psi - \frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2\theta} \psi = 0 \quad (5.42)$$

com as autofunções dada por:

$$\psi_n(\theta) = A'_n \sin^\kappa \theta {}_2F_1\left(-n, n+2\kappa, \kappa + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\right). \quad (5.43)$$

Os polinômios de Jacobi são definidos como:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1}{2}(1 - x) \right), \quad (5.44)$$

na Ref. [15], número da equação (8.932.1).

Os polinômios de Gegenbauer são uma particularização dos polinômios de Jacobi e podem ser definidos como:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1 \left(-n, n + 2\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - x) \right), \quad (5.45)$$

uma outra definição bem importante é a fórmula de Rodrigues, mostrada a seguir:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(\lambda + n)\Gamma(2\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda + 2n)} (1 - x^2)^{-2\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^{n + \lambda - \frac{1}{2}} \right]. \quad (5.46)$$

Por fim, a solução da Eq. (5.42) é da forma:

$$\psi_n(\theta) = A'_n \sin^\kappa(\theta) C_n^\kappa(\cos \theta). \quad (5.47)$$

5.3 Soluções das Equações Ordinárias.

Nesse subseção apresentamos as soluções das equações ordinárias encontradas anteriormente. Iniciamos com a Eq. (5.30), com dependência de θ_1 , onde:

$$\partial_1^2 Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0. \quad (5.48)$$

Devido a variação azimutal

$$Y_1(\theta_1) = Y_1(\theta_1 + 2\pi), \quad (5.49)$$

isso significa que:

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi.$$

Fazemos com que $\lambda_1 = l_1^2$, da condição Eq. (5.49) $l_1 \in \mathbb{Z}$ e a solução da Eq. (5.48) é:

$$Y_1(\theta_1) = B_1 e^{il_1 \theta_1}. \quad (5.50)$$

Encontramos a solução para a equação com dependência de θ_i com $2 \leq i \leq N$:

$$\partial_i^2 Y_i + (i-1) \cot \theta_i \partial_i Y_i + \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) Y_i = 0 . \quad (5.51)$$

Definimos que:

$$Y_i = f_i u_i , \quad (5.52)$$

substituindo na Eq. (5.26), obtemos:

$$\begin{aligned} (f_i'' u_i + 2f_i' u_i' + f_i u_i'') + (i-1) \cot(\theta_i) (f_i' u_i + f_i u_i') + \\ \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) f_i u_i = 0 \text{ para } i \geq 2 , \end{aligned} \quad (5.53)$$

multiplicando a Eq. (5.53) por $\frac{1}{f_i}$ e colocando os termos em evidência, encontramos:

$$\begin{aligned} u_i'' + \left(2 \frac{f_i'}{f_i} + (i-1) \cot \theta_i \right) u_i' \\ + \left(\frac{f_i''}{f_i} + (i-1) \cot(\theta_i) \frac{f_i'}{f_i} + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) u_i = 0 . \end{aligned} \quad (5.54)$$

A Eq. (5.54) deve tomar uma forma conhecida, que nesse caso é a da equação de Schrödinger com potencial Pöschl-Teller simétrico. Comparamos Eq. (5.54) com a Eq. (5.42) e percebemos que temos que simplificarmos a Eq. (5.54) de forma com que o termo que acompanha u_i' seja nulo, consideramos então:

$$2 \frac{f_i'}{f_i} + (i-1) \cot \theta_i = 0$$

ou ainda:

$$\frac{f_i'}{f_i} = -\frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i . \quad (5.55)$$

Recordamos a seguinte relação:

$$\partial_i (\ln h_i) = \frac{h_i'}{h_i} , \quad (5.56)$$

lembrado que:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Usando a igualdade (2.34) na Eq. (5.55), obtemos que:

$$\partial_i (\ln f_i) = -\frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i , \quad (5.57)$$

integrando os dois lados da Eq. (5.57), encontramos:

$$\ln (f_i) = -\frac{(i-1)}{2} \ln (\sin \theta_i) + C \quad (5.58)$$

com $C = 0$, aplicamos a exponencial dos dois lados da Eq. (5.100), de tal forma que:

$$e^{\ln(f_i)} = e^{\ln\left(\sin^{-\frac{(i-1)}{2}}(\theta_i)\right)} \quad (5.59)$$

e encontramos:

$$f_i = \sin^{-\frac{(i-1)}{2}}(\theta_i) . \quad (5.60)$$

As derivadas de f_i são:

$$f'_i = -\frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i f_i , \quad (5.61)$$

$$f''_i = \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} f_i - \frac{(i-1)}{2} \cot(\theta_i) f'_i ; \quad (5.62)$$

multiplicamos a Eqs. (5.61) e (5.62) por $\frac{1}{f_i}$, tornado-as:

$$\frac{f'_i}{f_i} = -\frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i , \quad (5.63)$$

$$\frac{f''_i}{f_i} = \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{(i-1)}{2} \cot(\theta_i) \frac{f'_i}{f_i} ; \quad (5.64)$$

ao substituir a Eq. (5.63) na Eq. (5.64), deparamos com :

$$\frac{f''_i}{f_i} = \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i - \frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i \quad (5.65)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{f''_i}{f_i} = \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} + \frac{(i-1)^2}{4} \cot^2 \theta_i . \quad (5.66)$$

Substituímos a Eq. (5.66) no termo que acompanha u_i da Eq. (5.54), que quando simplificamos, encontramos :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{f_i''}{f_i} + (i-1) \cot \theta_i \frac{f_i'}{f_i} + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) \\
 &= \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} + \frac{(i-1)^2}{4} \cot^2 \theta_i \\
 & \quad + (i-1) \cot \theta_i - \frac{(i-1)}{2} \cot \theta_i + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} ,
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

escrevemos a Eq. (5.67) como:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{f_i''}{f_i} + (i-1) \cot (\theta_i) \frac{f_i'}{f_i} + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) = \frac{(i-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \\
 & \quad + \frac{(i-1)^2}{4} \cot^2 \theta_i - \frac{(i-1)^2}{2} \cot^2 \theta_i + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \\
 &= \left(\frac{(i-1)}{2} - \lambda_{i-1} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{(i-1)^2}{4} \cot^2 \theta_i + \lambda_i \\
 &= \left(\frac{(i-1)}{2} - \lambda_{i-1} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{(i-1)^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - 1 \right) + \lambda_i \\
 &= \left(\frac{(i-1)}{2} - \frac{(i-1)^2}{4} - \lambda_{i-1} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} + \lambda_i + \frac{(i-1)^2}{4}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

agrupamos alguns termos e simplificamo 4a Eq. (5.68), tornado-a:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{f_i''}{f_i} + (i-1) \cot (\theta_i) \frac{f_i'}{f_i} + \lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\sin^2 \theta_i} \right) \\
 &= \left(\frac{(i-1)}{2} \left(1 - \frac{(i-1)}{2} \right) - \lambda_{i-1} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} + \lambda_i + \frac{(i-1)^2}{4} .
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Substituímos a Eq. (5.69) na Eq. (5.54) conseguindo obter:

$$u_i'' + \left(\left(\frac{(i-1)}{2} \left(1 - \frac{(i-1)}{2} \right) - \lambda_{i-1} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} + \lambda_i + \frac{(i-1)^2}{4} \right) u_i = 0 \tag{5.70}$$

que ao simplificarmos, é escrita da forma:

$$u_i'' + \left(\lambda_i + \frac{(i-1)^2}{4} - \left(\lambda_{i-1} - \frac{(i-1)}{2} \left(1 - \frac{(i-1)}{2} \right) \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \right) u_i = 0 . \tag{5.71}$$

Para encontrar os autovalores comparamos a Eq. (5.71) com a Eq. (5.42) e concluimos a

seguinte relação:

$$\lambda_i + \frac{(i-1)^2}{4} = (n_i + \kappa_i)^2 \Rightarrow \lambda_i = (n_i + \kappa_i)^2 - \frac{(i-1)^2}{4} \quad (5.72)$$

reescrevemos a Eq. (5.72) na forma:

$$(n_i + \kappa_i)^2 - \frac{(i-1)^2}{4} = \left(n_i + \kappa_i + \frac{(i-1)}{2} \right) \left(n_i + \kappa_i - \frac{(i-1)}{2} \right) = \lambda_i . \quad (5.73)$$

Expressamos a seguinte igualdade:

$$\kappa_i (\kappa_i - 1) = \left(\lambda_{i-1} - \frac{(i-1)}{2} \left(1 - \frac{(i-1)}{2} \right) \right) , \quad (5.74)$$

usando a Eq. (5.73) simplificamos a Eq (5.74) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \kappa_i (\kappa_i - 1) &= \left((n_{i-1} + \kappa_{i-1})^2 - \frac{((i-1)-1)^2}{4} - \frac{(i-1)}{2} + \frac{(i-1)^2}{4} \right) \\ &= (n_{i-1} + \kappa_{i-1})^2 - \frac{(i-1)^2}{4} + \frac{(i-1)}{2} - \frac{1}{4} - \frac{(i-1)}{2} + \frac{(i-1)^2}{4} . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Em seguida mostramos que:

$$\begin{aligned} (n_{i-1} + \kappa_{i-1})^2 - \frac{1}{4} &= \left(n_{i-1} + \kappa_{i-1} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{i-1} + \kappa_{i-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\kappa_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\kappa_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) ; \end{aligned} \quad (5.76)$$

escrevemos a Eq. (5.76) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\kappa_i - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) \left(\left(\kappa_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(n_{i-1} + \kappa_{i-1} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{i-1} + \kappa_{i-1} - \frac{1}{2} \right) , \end{aligned} \quad (5.77)$$

logo

$$\left(\kappa_i - \frac{1}{2} \right) = n_{i-1} + \kappa_{i-1} . \quad (5.78)$$

Com a Eq. (5.78) encontramos que:

$$\kappa_i = n_{i-1} + \kappa_{i-1} + \frac{1}{2} , \quad (5.79)$$

observe que os valores de κ_i são escritos a partir dos seus valores anteriores. Reescrevemos a Eq. (5.79) na forma:

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j + \frac{(i-1)}{2} , \quad (5.80)$$

e definimos que:

$$l_i = \sum_{j=1}^i n_j ; \quad (5.81)$$

chamamos l_i de número característico. Dessa forma a Eq. (5.80) torna-se:

$$\kappa_i = l_{i-1} + \frac{(i-1)}{2} . \quad (5.82)$$

Substituímos a Eq. (5.80) na Eq. (5.73) obtendo os autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (n_i + \kappa_i)^2 - \frac{(i-1)^2}{4} \\ &= \left(\sum_{j=1}^i n_j + \frac{(i-1)}{2} + \frac{(i-1)}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^i n_j + \frac{(i-1)}{2} - \frac{(i-1)}{2} \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^i n_j + (i-1) \right) \left(\sum_{j=1}^i n_j \right) , \end{aligned} \quad (5.83)$$

substituindo a Eq. (5.83) na Eq. (5.82) encontrado que:

$$\lambda_i = l_i (l_i + i - 1) . \quad (5.84)$$

Por fim, os autovalores são:

$$\lambda_N = l_N (l_N + N - 1) , \quad (5.85)$$

...

$$\lambda_3 = l_3 (l_3 + 2) ,$$

$$\lambda_2 = l_2 (l_2 + 1) ,$$

$$\lambda_1 = l_1^2 .$$

A solução para u_i assim como para o problema de Pöschl- Teller é da seguinte forma:

$$u_i(\theta_i) = A_i \sin^{\kappa_i}(\theta_i) [C_{n_i}^{\kappa_i}(\cos \theta_i)] , \quad (5.86)$$

usando as Eqs. (5.60) e (5.86) encontramos a solução para Y_i na forma:

$$Y_i = A_i \sin^{\kappa_i}(\theta_i) \sin^{-\frac{(i-1)}{2}}(\theta_i) [C_{n_i}^{\kappa_i}(\cos \theta_i)] . \quad (5.87)$$

A solução da Equação de Laplace em N dimensões é o produto de todas as soluções das equações ordinarias, ou seja:

$$\begin{aligned} W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) &= Y_1(\theta_1) \dots Y_N(\theta_N) \\ &= D_\gamma e^{i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{(j-1)}{2}}(\theta_j) [C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos(\theta_j))] \end{aligned} \quad (5.88)$$

com γ um índice condensado definido como:

$$\gamma = [l_1, l_2, \dots, l_N] .$$

Escrevemos a Eq. (5.88) em termos dos números característicos l_j , de modo que:

$$\begin{aligned} l_1 &= n_1, \\ l_2 &= n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = l_2 - l_1, \\ l_3 &= n_1 + n_2 + n_3 = l_3 + l_2 - l_1 + n_3 = l_2 + n_3 \Rightarrow n_3 = l_3 - l_2, \\ &\dots \\ l_{N-1} &= n_1 + \dots + n_{N-1} = l_1 + \dots + l_{N-2} + n_{N-1} \Rightarrow n_{N-1} = l_{N-1} - l_{N-2}, \\ l_N &= n_1 + \dots + n_{N-1} + n_N \Rightarrow n_N = l_N - l_{N-1}; \end{aligned}$$

concluimos então que:

$$n_j = l_j - l_{j-1}, \text{ com } j \geq 2 , \quad (5.89)$$

e a Eq. (5.88) torna-se:

$$W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = D_\gamma e^{i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{l_{j-1}}(\theta_j) \left[C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}}(\cos(\theta_j)) \right] . \quad (5.90)$$

A Eq. (5.90) é a solução da Equação de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões e é chamada de harmônicos hiperesférico em N dimensões. Para fim de confirmação de veracidade do resultado apresentado na Eq. (5.90) foi efetuada a sua comparação

com os resultados da Ref. [2] em que os harmônicos hipersféricos também foram expressos em termos dos polinômios de Gegenbauer. A expressão dos harmônicos hipersféricos da Eq. (5.90) coincide com as fórmulas da Ref. [2] a menos de um fator de normalização.

5.4 Normalização e Ortogonalidade.

A solução angular para a equação de Laplace em N dimensões, escrita na Eq. (5.90) é:

$$W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = D_\gamma e^{i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{(j-1)}{2}} \theta_j \left[C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos(\theta_j)) \right]$$

onde D_γ é o fator de normalização.

Encontramos o fator de normalização D_γ da seguinte forma:

$$\int_{S^N} W_\gamma^* W_\gamma d\tau = 1, \quad (5.91)$$

substituímos por conveniência a Eq. (5.88) na Eq. (5.91) obtendo:

$$\begin{aligned} & \int_{S^N} (D_\gamma)^2 \left(e^{i l_1 \theta_1} \right)^* e^{i l_1 \theta_1} \\ & \left(\prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{(j-1)}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j} \cos(\theta_j) \right)^* \left(\prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{(j-1)}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j} \cos(\theta_j) \right) d\tau = 1, \end{aligned} \quad (5.92)$$

com κ_j definido na Eq. (5.82) e n_j na Eq. (5.89). Observamos na Ref. [16] e na Ref. [2], que o diferencial de volume tem a forma:

$$d\tau = \sqrt{|\det g_{ij}|} d\theta_N \dots d\theta_1. \quad (5.93)$$

Determinamos anteriormente na Eq. (4.20) a $\sqrt{|\det g_{ij}|}$ e substituímos na Eq. (5.93)

$$d\tau = \prod_{j=2}^N \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j \dots d\theta_1, \quad (5.94)$$

e em seguida substituindo na Eq. (5.92), obtendo:

$$D_\gamma^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \prod_{j=2}^N \sin^{2\kappa_j - (j-1)} \theta_j \quad (5.95)$$

$$\left[C_{n_j}^{\kappa_j} (\cos(\theta_j)) \right]^2 \prod_{j=2}^N \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j \dots d\theta_1 = 1,$$

como para cada valor de j temos uma dependência de θ_j diferente, a integral da Eq. (5.95) pode ser escrita como o produto das integrais, da seguinte forma:

$$D_\gamma^2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 \prod_{j=2}^N \int_0^\pi \sin^{2\kappa_j - (j-1)} \theta_j \left[C_{n_j}^{\kappa_j} \cos(\theta_j) \right]^2 \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j = 1. \quad (5.96)$$

Definimos a seguinte substituição:

$$y_j = \cos \theta_j, \quad (5.97)$$

$$dy_j = -\sin \theta_j d\theta_j \implies d\theta_j = -\frac{1}{\sin \theta_j} dy_j$$

de tal modo que:

$$-1 \leq x_j \leq 1.$$

Utilizando a substituição da expressão (5.97) na Eq. (5.96), obtemos:

$$\begin{aligned} & -2\pi D_\gamma^2 \prod_{j=2}^N \int_1^{-1} (1 - y_j^2)^{\kappa_j - \frac{(j-1)}{2}} \left[C_{n_j}^{\kappa_j} (y_j) \right]^2 (1 - y_j^2)^{\frac{(j-2)}{2}} dy_j \\ & = 2\pi D_\gamma^2 \prod_{j=2}^N \int_{-1}^1 (1 - y_j^2)^{\kappa_j + \frac{(j-2)}{2} - \frac{(j-1)}{2}} \left[C_{n_j}^{\kappa_j} (y_j) \right]^2 dy_j \\ & = 2\pi D_\gamma^2 \prod_{j=2}^N \int_{-1}^1 (1 - y_j^2)^{\kappa_j - \frac{1}{2}} \left[C_{n_j}^{\kappa_j} (y_j) \right]^2 dy_j = 1. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Na Ref. [15], 22.2.3, encontramos a seguinte propriedade dos polinômios de Gegenbauer:

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} [C_\lambda^\alpha(x)]^2 dy_j = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(\lambda + 2\alpha)}{\lambda! (\lambda + \alpha) [\Gamma(\alpha)]^2}. \quad (5.99)$$

Desfrutando da Eq. (5.99) e comparando com a Eq. (5.98) encontramos que:

$$\int_{-1}^1 (1 - y_j^2)^{\kappa_j - \frac{1}{2}} \left[C_{n_j}^{\kappa_j}(y_j) \right]^2 dx_j = \frac{\pi 2^{1-2\kappa_j} \Gamma(n_j + 2\kappa_j)}{n_j! (n_j + \kappa_j) [\Gamma(\kappa_j)]^2} \quad (5.100)$$

e ao substituirmos a Eq. (5.100) na Eq. (5.98), generalizando-a, obtemos:

$$2\pi D_\gamma^2 \prod_{j=2}^N \frac{\pi 2^{1-2\kappa_j} \Gamma(n_j + 2\kappa_j)}{n_j! (n_j + \kappa_j) [\Gamma(\kappa_j)]^2} = 1, \quad (5.101)$$

logo o fator de normalização é:

$$\begin{aligned} D_\gamma &= \frac{1}{(2\pi)} \prod_{j=2}^N \left(\frac{n_j! (n_j + \kappa_j) [\Gamma(\kappa_j)]^2}{2^{-2\kappa_j} \Gamma(n_j + 2\kappa_j)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \prod_{j=2}^N \frac{\Gamma\left(l_{i-1} + \frac{(j-1)}{2}\right)}{2^{-l_{i-1} + \frac{(j-1)}{2}}} \left(\frac{(l_j - l_{j-1})! \left(l_j + \frac{(j-1)}{2}\right)}{\Gamma(l_j + (j-1))} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Os harmônicos hipersféricos em N dimensões são:

$$\begin{aligned} W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) &= \frac{e^{i l_1 \theta_1}}{2\pi} \prod_{j=2}^N \frac{\Gamma\left(l_{i-1} + \frac{(j-1)}{2}\right)}{2^{-l_{i-1} + \frac{(j-1)}{2}}} \\ &\left(\frac{(l_j - l_{j-1})! \left(l_j + \frac{(j-1)}{2}\right)}{\Gamma(l_j + (j-1))} \right) \sin^{l_{i-1}}(\theta_j) \left[C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{i-1} + \frac{(j-1)}{2}}(\cos(\theta_j)) \right]. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Para verificarmos a ortogonalidade de W_γ temos que mostrar:

$$\langle W_\gamma | W_{\tilde{\gamma}} \rangle = \int_{S^N} W_\gamma^* W_{\tilde{\gamma}} d\tau = 0 \text{ se } \gamma \neq \tilde{\gamma}, \quad (5.104)$$

onde

$$\gamma = [l_1, l_2, \dots, l_N]$$

e

$$\tilde{\gamma} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_N].$$

Substituindo a Eq. (5.93) na Eq. (5.104)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi W_\gamma^* W_{\gamma'} \prod_{j=2}^N \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j \dots d\theta_1 \\
&= D_\gamma^* D_{\tilde{\gamma}} \int_0^{2\pi} e^{-i l_1 \theta_1} e^{i \tilde{l}_1 \theta_1} d\theta_1 \dots \int_0^\pi \prod_{j=2}^N \sin^{l_{j-1}} \theta_j \left[C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}} (\cos(\theta_j)) \right] \\
& \prod_{j=2}^N \sin^{\tilde{l}_{j-1}}(\theta_j) \left[C_{\tilde{l}_j - \tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}} (\cos(\theta_j)) \right] \prod_{j=2}^N \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j \dots d\theta_2 .
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Os fatores de normalização são:

$$D_\gamma^* = \left[\frac{1}{(2\pi)} \prod_{j=2}^N \frac{\Gamma\left(l_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}\right)}{2^{-l_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}}} \left(\frac{(l_j - l_{j-1})! \left(l_j + \frac{(j-1)}{2}\right)}{\Gamma(l_j + (j-1))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* , \tag{5.106}$$

$$D_{\tilde{\gamma}} = \frac{1}{(2\pi)} \prod_{j=2}^N \frac{\Gamma\left(\tilde{l}_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}\right)}{2^{-\tilde{l}_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}}} \left(\frac{(\tilde{l}_j - \tilde{l}_{j-1})! \left(\tilde{l}_j + \frac{(j-1)}{2}\right)}{\Gamma(\tilde{l}_j + (j-1))} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{5.107}$$

Podemos escrever a integral da Eq. (5.105) como o produto das integrais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& D_\gamma^* \int_0^{2\pi} e^{i\theta_1(\tilde{l}_1 - l_1)} d\theta_1 \prod_{j=2}^N \int_0^\pi \sin^{l_{j-1}} \theta_j \left[C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}} (\cos(\theta_j)) \right] \\
& \sin^{\tilde{l}_{j-1}}(\theta_j) \left[C_{\tilde{l}_j - \tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1} + \frac{(j-1)}{2}} (\cos(\theta_j)) \right] \sin^{(j-1)} \theta_j d\theta_j .
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Foram feitas duas análises, a primeira quando $l_1 \neq \tilde{l}_1$ referente a integral com relação a θ_1 , seja:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta_1(\tilde{l}_1 - l_1)} d\theta_1 = \left[\frac{e^{i\theta_1(\tilde{l}_1 - l_1)}}{i(\tilde{l}_1 - l_1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi(\tilde{l}_1 - l_1)} - 1}{i(\tilde{l}_1 - l_1)} = 0 \tag{5.109}$$

logo a Eq. (5.109) é:

$$\langle W_\gamma | W_{\tilde{\gamma}} \rangle = 0 . \tag{5.110}$$

A segunda análise envolve todos os outros l_j ($j \geq 2$), onde:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \tilde{l}_1 , \\
l_j &\neq \tilde{l}_j , \quad j = 2, 3, 4, \dots ,
\end{aligned}$$

seja:

$$\int_0^\pi \sin^{l_{j-1}}(\theta_j) \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(\cos(\theta_j)) \right] \sin^{\tilde{l}_{j-1}}(\theta_j) \left[C_{\tilde{l}_j-\tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(\cos(\theta_j)) \right] \sin^{(j-1)}\theta_j d\theta_j, \quad (5.111)$$

desfrutando da substituição da expressão (5.97) na integral acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-y_j^2)^{\frac{l_{j-1}}{2}} \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] (1-y_j^2)^{\frac{\tilde{l}_{j-1}}{2}} \left[C_{\tilde{l}_j-\tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] (1-y_j^2)^{\frac{(j-2)}{2}} dy_j \\ &= \int_{-1}^1 (1-y_j^2)^{\frac{1}{2}(l_{j-1}+\tilde{l}_{j-1}+j-1)-\frac{1}{2}} \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] \left[C_{\tilde{l}_j-\tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] dy_j. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Os polinômios de Gegenbauer são ortogonais, isso é mostrado na Ref. [15], e que:

$$\int_{-1}^1 [C_n^\alpha(x)] [C_{\tilde{n}}^\alpha(x)] (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = 0 \text{ se } n \neq \tilde{n}. \quad (5.113)$$

logo

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-y_j^2)^{\frac{1}{2}(l_{j-1}+\tilde{l}_{j-1}+j-1)-\frac{1}{2}} \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] \left[C_{\tilde{l}_j-\tilde{l}_{j-1}}^{\tilde{l}_{j-1}+\frac{(j-1)}{2}}(y_j) \right] dy_j = 0 \\ & \text{se } l_j - l_{j-1} \neq \tilde{l}_j - \tilde{l}_{j-1}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

portanto

$$l_j \neq \tilde{l}_j \Rightarrow \langle W_\gamma | W_{\tilde{\gamma}} \rangle = 0. \quad (5.115)$$

Por fim os harmônicos hipersféricos em N dimensões (W_γ), formam um conjunto completo.

6 Apresentação gráfica dos harmônicos hipersféricos em S^3

Obtemos anteriormente os harmônicos hipersféricos para o S^N e suas soluções, com a virtude de comparação entre os harmônicos esféricos usuais no S^2 , que são apresentados graficamente em diversos materiais, como por exemplo a [17], realizamos algumas

ilustração dos resultados para o caso dos harmônicos hipersféricos no S^3 apresentado-os graficamente. Enfatizamos que não é possível apresentar um objeto quadridimensional, mas é possível fazer projeções do objeto em hiperplanos tridimensionais, obtendo resultados análogos aos harmônicos esféricos usuais.

A partir da Eq. (5.90), obtemos a seguinte expressão da solução para o caso $S^3(N = 3)$:

$$W_{l_1, l_2, l_3}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = D_{l_1, l_2, l_3} e^{i l_1 \theta_1} \sin^{l_1}(\theta_2) \left[C_{n_2}^{l_1 + \frac{1}{2}}(\cos(\theta_2)) \right] \sin^{l_2}(\theta_3) \left[C_{n_3}^{l_2 + 1}(\cos(\theta_3)) \right] , \quad (6.1)$$

com

$$l_3 = \sum_{j=1}^3 n_j , \quad (6.2)$$

logo:

$$l_1 = n_1 , \quad (6.3)$$

$$l_2 = n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = l_2 - l_1 ,$$

$$l_3 = n_1 + n_2 + n_3 = l_3 + l_2 - l_1 + n_3 = l_2 + n_3 \Rightarrow n_3 = l_3 - l_2 ;$$

substituindo na solução (6.1):

$$W_{l_1, l_2, l_3}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = D_{l_1, l_2, l_3} e^{i l_1 \theta_1} \sin^{l_1}(\theta_2) \left[C_{l_2 - l_1}^{l_1 + \frac{1}{2}}(\cos(\theta_2)) \right] \sin^{l_2}(\theta_3) \left[C_{l_3 - l_2}^{l_2 + 1}(\cos(\theta_3)) \right] \quad (6.4)$$

para

$$l_3 \geq l_2 \geq l_1 . \quad (6.5)$$

Por conveniência fazemos:

$$D_{l_1, l_2, l_3} = 1 . \quad (6.6)$$

Utilizamos a seguinte parametrização para as projeções:

$$x_4 = r \cos \theta_3 ,$$

$$x_3 = r \sin \theta_3 \cos \theta_2 ,$$

$$x_2 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 ,$$

$$x_1 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 ;$$

fixamos um valor para 2 dos ângulos.

Realizamos 2 projeções diferentes, sendo elas:

1º: hiperplano (x_1, x_2, x_4) :

Nesse hiperplano tomamos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e fixamos os seguintes valores para o número característico $l_3 = 3, 2, 1$; as representações são apresentadas nas Figs.: (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7). Com:

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ l_2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os seguintes casos:

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ l_2 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ l_1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

W_3 é nula, o motivo foi observado ao analisarmos o polinômio de Gegenbauer da Eq. (6.1) com dependência θ_2 , onde definimos:

$$y = \cos \theta_2, \quad (6.8)$$

fazendo com que $C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(\cos \theta_2)$ tome a seguinte forma:

$$C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(y) = \frac{(-2)^{l_2-l_1}}{(l_2-l_1)!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+l_2)\Gamma(l_1+1+l_2)}{\Gamma(l_1+\frac{1}{2})\Gamma(1+2l_2)} (1-y^2)^{-l_1+1} \frac{d^{l_2-l_1}}{dy^{l_2-l_1}} \left[(1-y^2)^{l_2} \right]. \quad (6.9)$$

Aplicamos os valores de l_2 e l_1 mostrados na lista (6.7) e verificamos os termos que aparecem com as derivadas da Eq. (6.9), para:

$$l_2 = 3 \text{ e } l_1 = 2:$$

$$\frac{d}{dy} \left[(1-y^2)^3 \right] = -6y (1-y^2)^2, \quad (6.10)$$

$$l_2 = 3 \text{ e } l_1 = 0:$$

$$\frac{d^3}{dy^3} \left[(1-y^2)^3 \right] = y (72 (1-y^2) - 48y^2), \quad (6.11)$$

$$l_2 = 2 \text{ e } l_1 = 1:$$

$$\frac{d}{dy} (1-y^2)^2 = -4y (1-y^2), \quad (6.12)$$

$l_2 = 1$ e $l_1 = 0$:

$$\frac{d}{dy} (1 - y^2) = -2y ; \quad (6.13)$$

como definimos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ a Eq. (6.8) é nula, implicando em:

$$y = 0 ,$$

assim as derivadas (6.11), (6.12) e (6.13) também são nulas.

2ª hiperplano (x_1, x_3, x_4):

Para esse hiperplano, tomamos $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ as Figs.: (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16) e (17), são as representações gráficas dos harmônicos hiperesféricos para fixando $l_3 = 3, 2, 1$.

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ l_2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Observe que para $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ projetamos o caso dos harmônicos esféricos usuais.

7 Observação

Na etapa final de trabalho no projeto no banco de dado de preprints ArXiv apareceu um artigo [18] que é bem relevante ao trabalho do nosso projeto. Por causa disso, decidimos adicionar esta observação no final do relatório.

No trabalho [18] os harmônicos esféricos em 3 dimensões são obtidos de uma forma em que não seja necessário o uso de derivadas. O método utilizado baseia-se nos operadores de componentes do momento angular (L_x , L_y e L_z) e os operadores de levantamento de abaixamento para o momento angular ($L_{\pm}$), denotando os harmônicos na notação de Dirac da mecânica quântica, em seguida é introduzido o operador exponencial de desemaranhamento mostrando sua relação com a álgebra de Lie; por fim verifica-se que o método reproduz o mesmo resultado dos métodos convencionais. Ao facilitar a obtenção das matrizes de rotação e estender o entendimento dos operadores da mecânica quântica o método traz uma abordagem mais didática comparados aos métodos convencionais. Na opinião dos autores do trabalho, apesar de que esta abordagem já era conhecida desde 1970, a conexão com os harmônicos esféricos não foi indicada por outros autores. Esperamos que essa indicação do trabalho [18] possa ser estendido para o caso de dimensões mais altas que é o interesse principal do nosso trabalho.

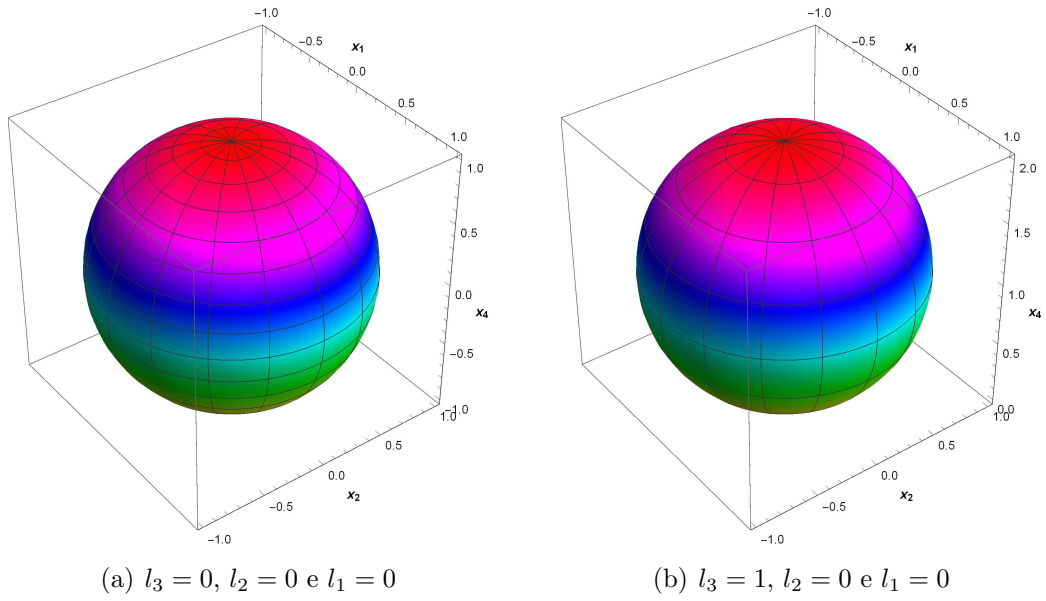


Figura 1: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 0$, $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$; $l_3 = 1$, $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

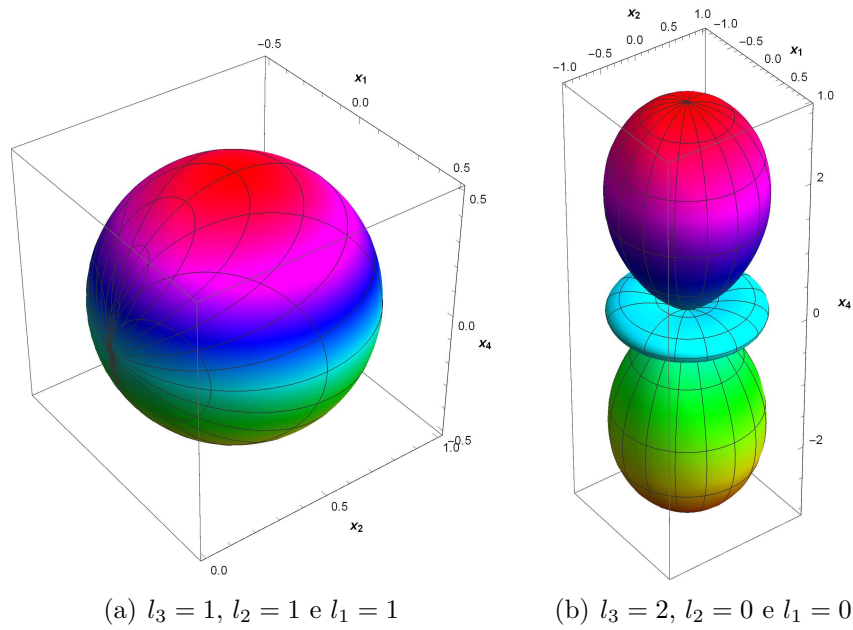


Figura 2: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 1$, $l_2 = 1$ e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

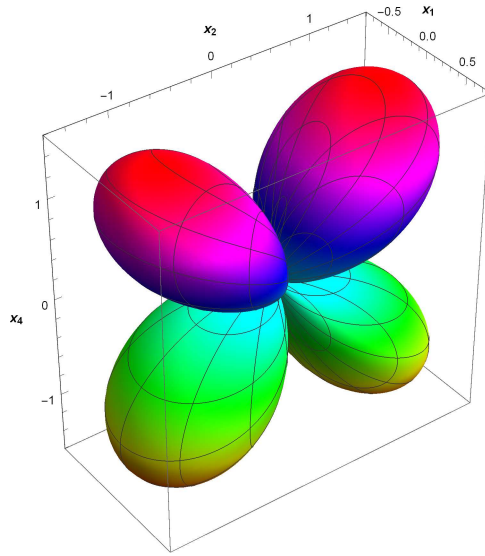
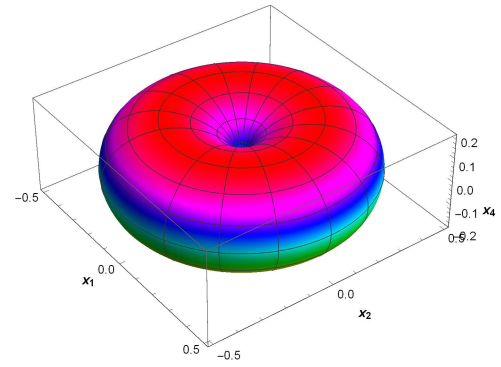
(a) $l_3 = 2, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$ (b) $l_3 = 2, l_2 = 2$ e $l_1 = 0$

Figura 3: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 0$.

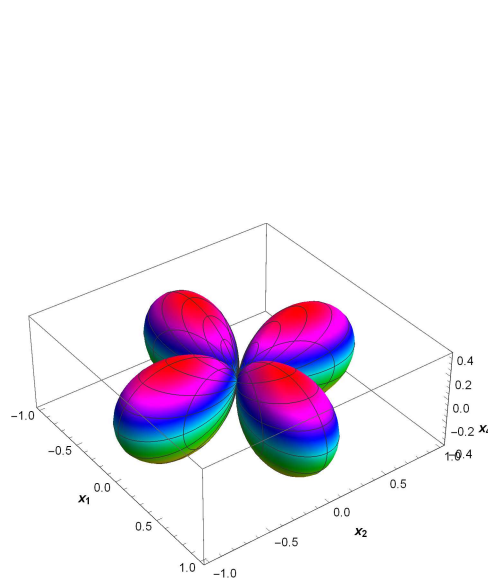
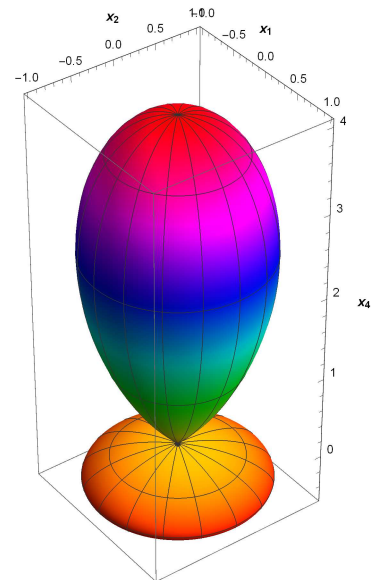
(a) $l_3 = 2, l_2 = 2$ e $l_1 = 2$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$

Figura 4: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$; $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

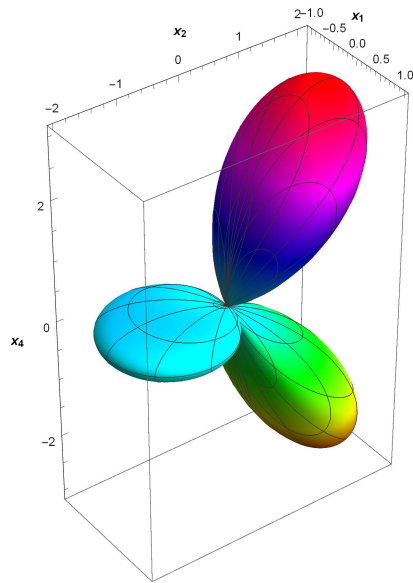
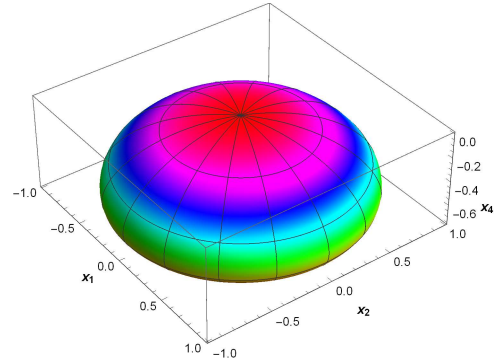
(a) $l_3 = 3, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 0$

Figura 5: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$.

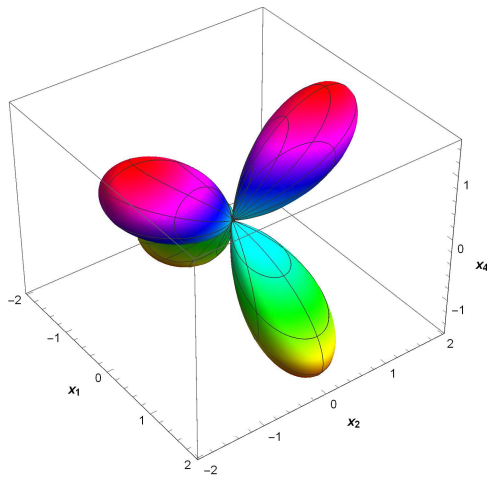
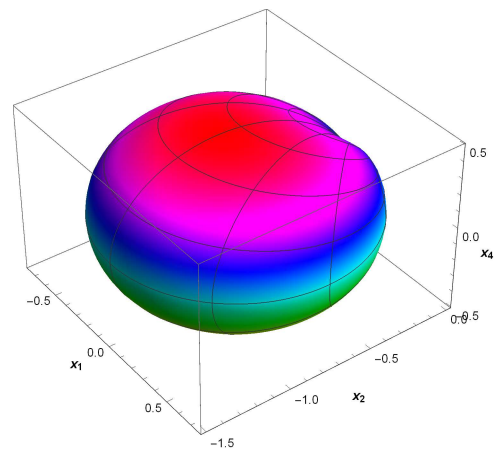
(a) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 2$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 1$

Figura 6: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 1$.

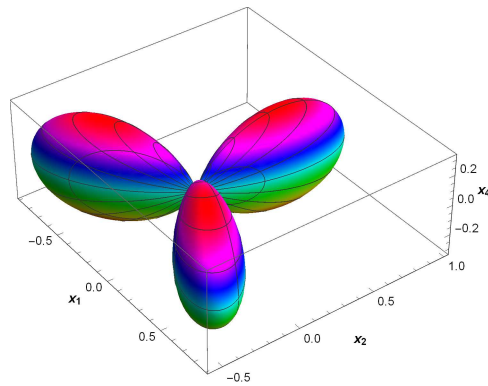
(a) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 3$

Figura 7: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 3$;

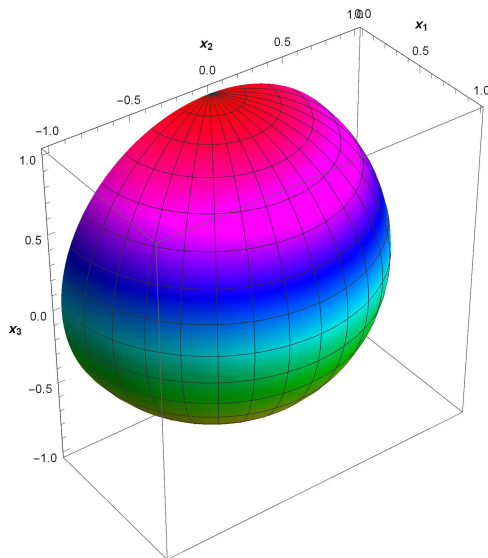
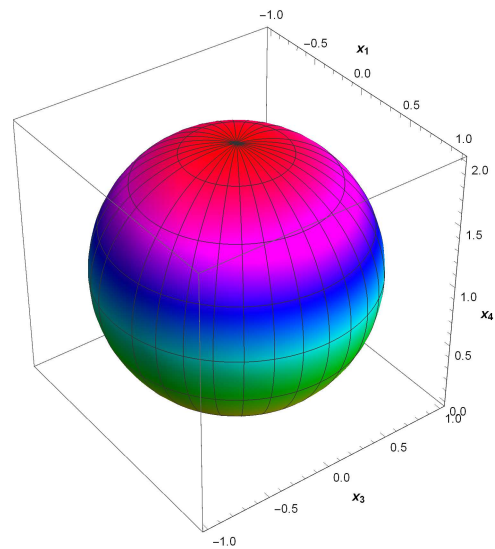
(a) $l_3 = 0, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$ (b) $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$

Figura 8: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 0$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

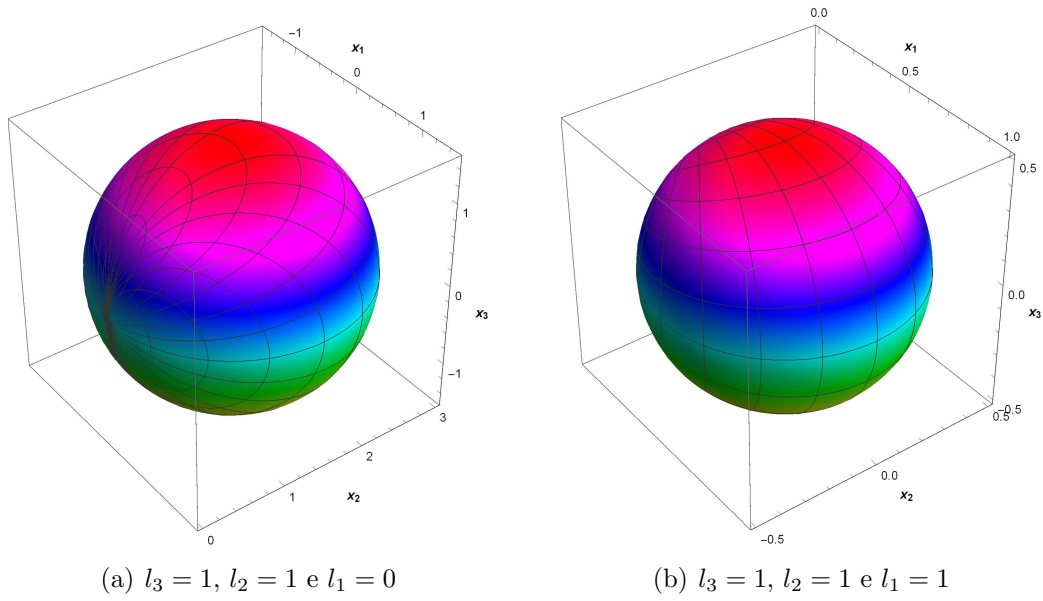


Figura 9: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 1$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$

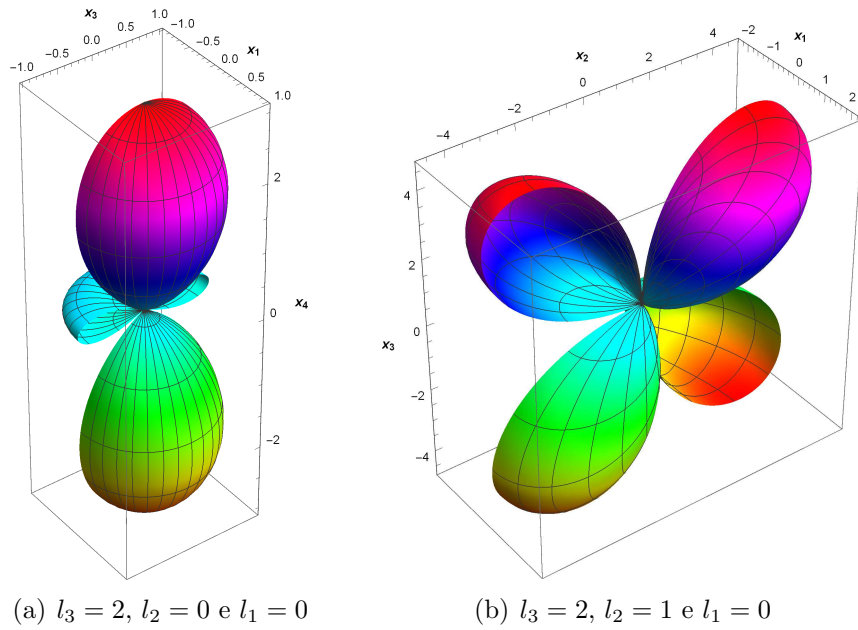


Figura 10: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 2$; $l_2 = 1$ e $l_1 = 0$.

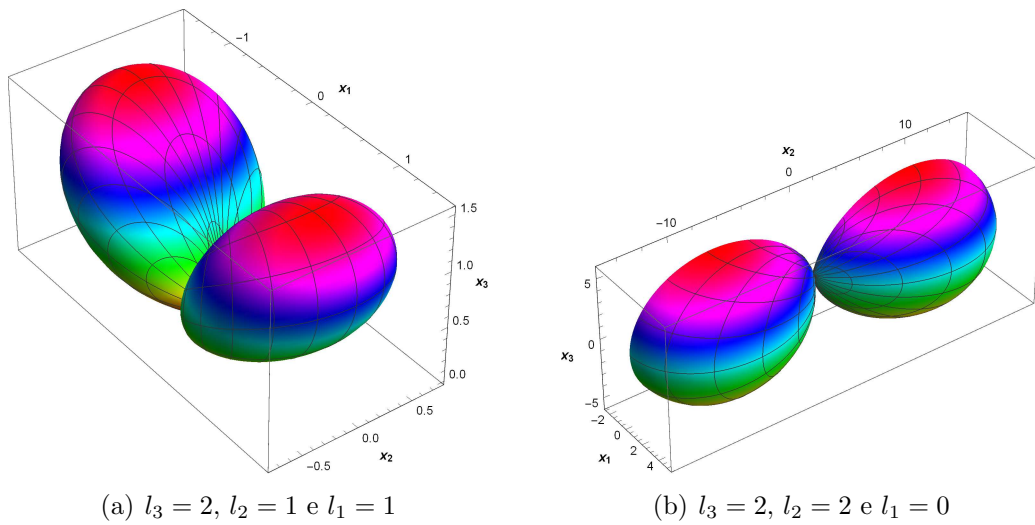


Figura 11: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$.

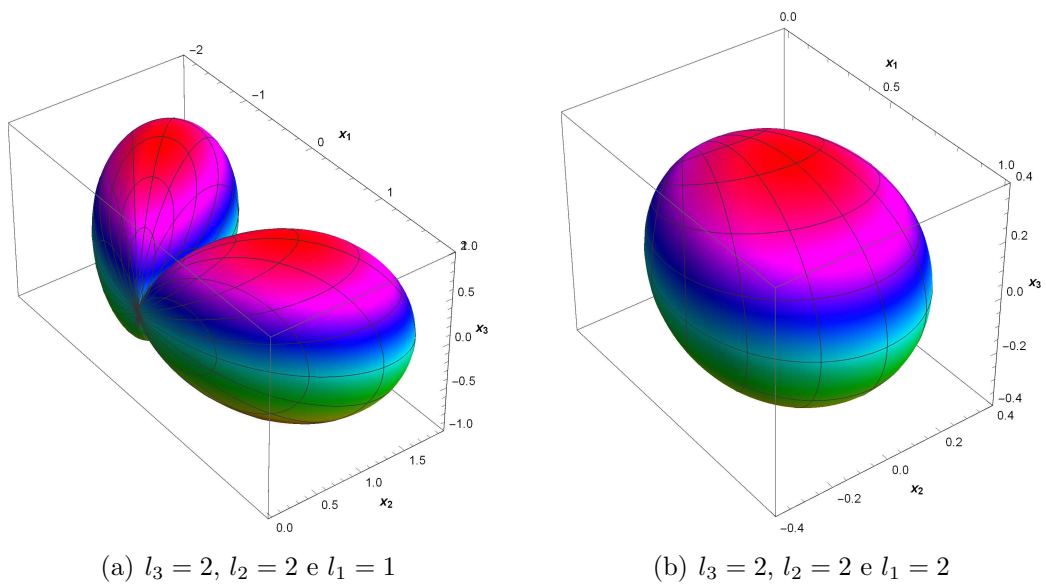


Figura 12: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$.

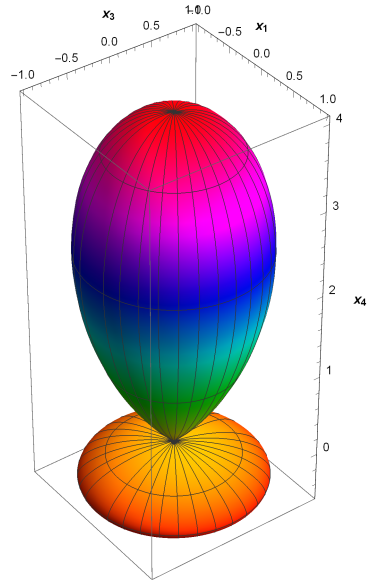
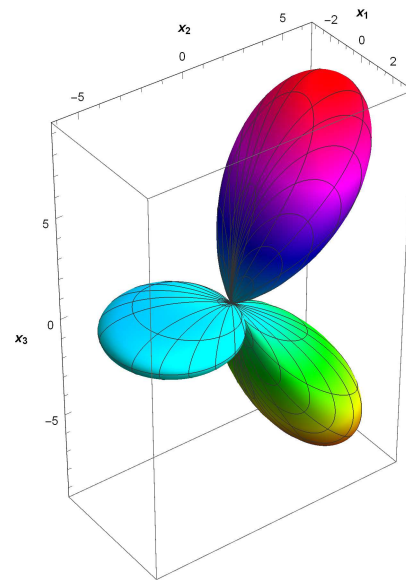
(a) $l_3 = 3, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 1$ e $l_1 = 0$

Figura 13: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3$, $l_2 = 1$ e $l_1 = 0$.

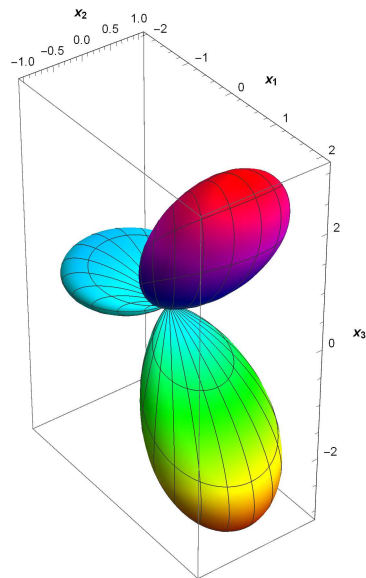
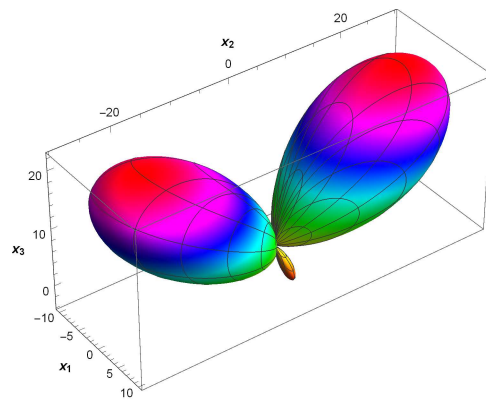
(a) $l_3 = 3, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 0$

Figura 14: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 0$.

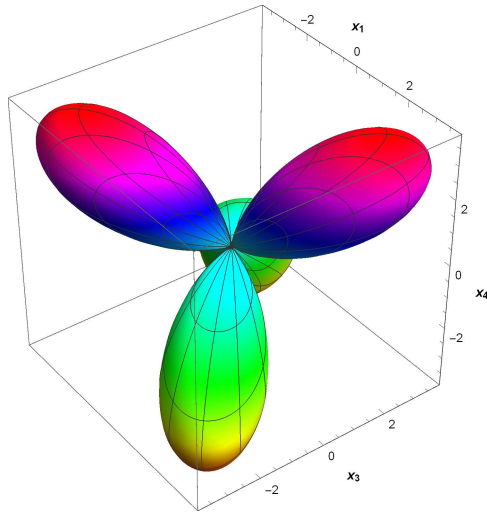
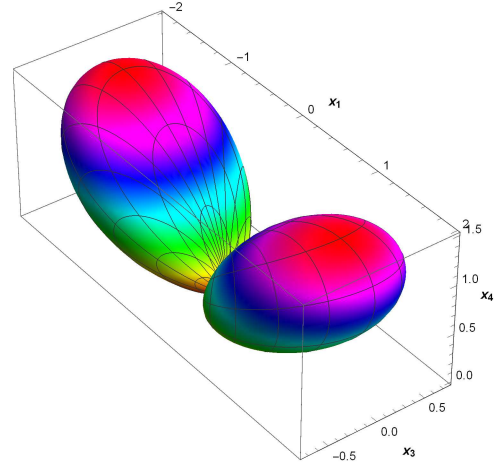
(a) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 1$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 2$

Figura 15: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$.

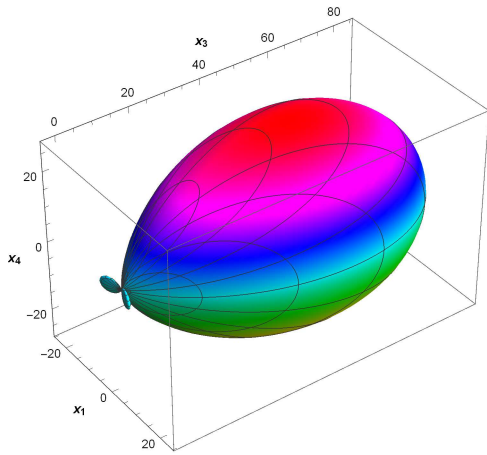
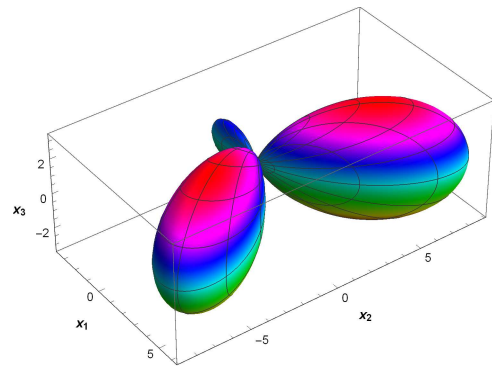
(a) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 0$ (b) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 1$

Figura 16: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$ e $l_1 = 1$.

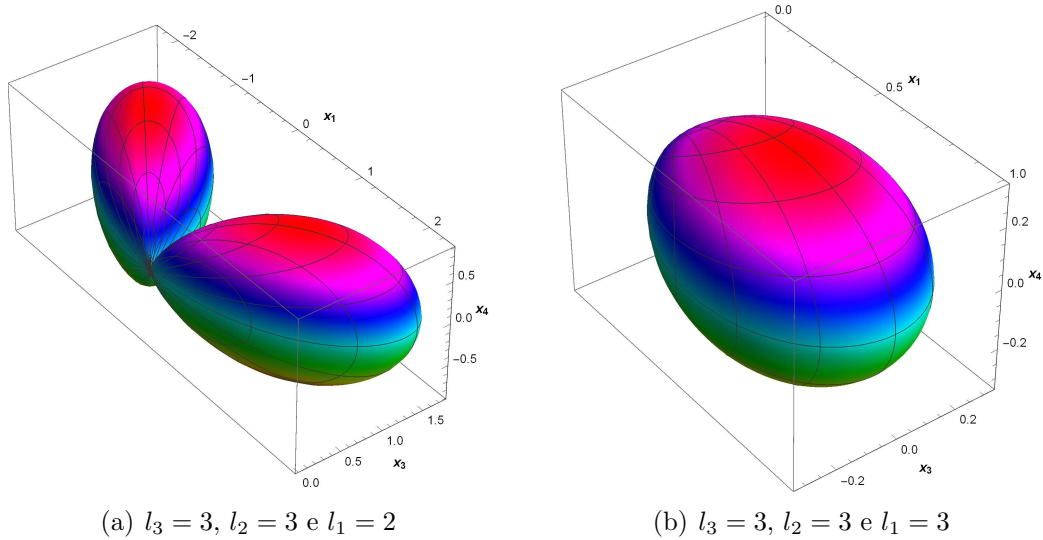


Figura 17: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 3$.

8 Conclusão

Neste projeto consideramos a construção dos harmônicos hiperesféricos em N dimensões. São demonstrados os três métodos da obtenção da equação de Laplace em 4 dimensões nas coordenadas hiperesféricas: a transformação de coordenadas, os operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares e o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante. No caso para N dimensões arbitrária, utilizamos o operador de Laplace-Beltrami com a métrica da geometria esférica. Para resolver a equação de Laplace foi usado o método de separação de variáveis. As equações ordinárias para cada variável foram reduzidas a uma forma da equação de Schrodinger com o potencial simétrico de Pöschl-Teller. As soluções das equações ordinárias foram obtidas na forma de produto das soluções da equação de Schrödinger e o fator funcional que foi determinado no processo de solução. As soluções das equações ordinárias foram expressas em termos dos polinômios de Gegenbauer. O produto das soluções das equações ordinárias apresenta os harmônicos hiperesféricos em N dimensões. Aproveitando as propriedades dos polinômios de Gegenbauer, foi demonstrada a ortogonalidade dos harmônicos hiperesféricos construídos e determinado o fator de normalização. Os harmônicos hiperesféricos construídos no projeto coincidem com aqueles obtidos em outros trabalhos a menos de um fator de normalização. Para uma ilustração dos resultados do projeto apresentamos as imagens dos harmônicos hiperesféricos em 4 dimensões, para os primeiros valores dos números característicos. Para visualizar os objetos quadridimensionais no espaço tridimensional efetuamos as projeções

deles nos hiperplanos tridimensionais.

A abordagem usada neste projeto não envolve a teoria dos polinômios harmônicos ou a teoria de momento angular generalizado que foram utilizadas anteriormente para obtenção dos harmônicos hipersféricos em N dimensões.

Referências

- [1] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics: Volume II, Wiley Classics, Chapter IV (1989).
- [2] Harry Bateman, Higher transcendental functions, MC Graw Book company, INC (1953).
- [3] J. D. Louck, Theory of angular momentum in N-dimensional space, Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, University of California (1960).
- [4] M. A. Rubin, C. R. Ordonez, Eigenvalues and degeneracies for n-dimensional tensor spherical harmonics, J. Math. Phys. 25, 2888 (1984).
- [5] A. Chodos, E. Myers, Gravitational contribution to the Casimir energy in Kaluza-Klein theories, Ann. Phys. 156, 412 (1984).
- [6] B. Ratra, Restoration of spontaneously broken continuous symmetries in de Sitter spacetime, Phys. Rev. D. 31, 1931 (1985).
- [7] A. Higuchi, Symmetric tensor spherical harmonics on the N-sphere and their application to the de Sitter group $SO(N,1)$, J. Math. Phys. 28, 1553 (1987).
- [8] J. S. Avery, Harmonic polynomials, hyperspherical harmonics, and atomic spectra, Copenhagen, University of Copenhagen, Journal of Computational and Applied Mathematics 233, 1366-1379 (2010).
- [9] C. Efthimiou, Christopher Frye, Spherical Harmonics in p Dimensions, World Scientific, (2012); ArXiv: 1205.3548 .
- [10] V. Iório , EDP - Um Curso de Graduação, SBM (2012).
- [11] Osmar S. Silva Jr., Métodos de Física Teórica II (2010).
- [12] R. F. Afonso, Um Estudo do Comportamento dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer, Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia - MG (2016)
- [13] P.K. Suetin, Ultraspherical polynomials, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, I (2001).

- [14] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer (1994).
- [15] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series - 55, Chapter 22 (1972)
- [16] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, 3 ed. (2004).
- [17] R. Eisberg, R. Resnick, *Física Quântica Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, CAMPUS, 2ª Edição, (1985).
- [18] M. Weitzman, J. K. Freericks, Calculating spherical harmonics without derivatives, submetido para Condensed Matter Physics; ArXiv: 1805.12125 (30 de maio de 2018).