

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ FERNANDO GAUDÊNCIO VIEIRA

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS À
GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

SÃO CRISTÓVÃO-SE

2018

JOSÉ FERNANDO GAUDÊNCIO VIEIRA

**APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS À
GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO—SE

2018

Dedicatória

Dedico o êxito desta conquista primeiramente a Deus e em seguida aos meus pais, Luís Vieira Barreto e Maria Gaudêncio Barreto, como também a minha esposa e grande companheira Nadja Simone e meus filhos Luis Fernando, Fabrícia Fernanda e Flávia (enteada).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder o dom da vida com saúde, força e perseverança para que eu pudesse alcançar este momento, aos meus pais, Luís Vieira e Maria Gaudêncio por terem me formado o homem e profissional que sou, a minha querida e amada esposa Nadja Simone por estar sempre ao meu lado em todos os momentos e principalmente nos de dificuldades por mim enfrentados durante esse período de pós-graduação e em particular dos ENQs, aos meus filhos, Luís Fernando, pela sua paciência e compreensão nos momentos em que me chamava para brincar, Fabrícia Fernanda e Flávia, a todos os novos e velhos amigos das turmas de 2014 e 2016 do PROFMAT, que trilharam comigo boa parte dessa trajetória, especialmente, aos "irmãos" Cleverton e Pedro Alexandre, que me proporcionaram grandes momentos de descontração e aprendizagem durante nossos encontros de estudos regados a saborosas degustações de café, aos professores do curso pela paciência e pela contribuição na ampliação do meus conhecimentos matemáticos, principalmente ao meu orientador o Professor Dr. Fábio dos Santos e todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Essa dissertação tem como principal objetivo fornecer algumas aplicações não usuais dos números complexos no estudo da geometria plana. Iniciamos com um pouco da história dos números complexos, e respondemos perguntas feitas frequentemente por discentes do ensino médio quando se introduz este conteúdo, seguido dos conceitos operacionais, necessários para as aplicações. Em seguida, são abordados conteúdos da geometria analítica que serão utilizados posteriormente. Por fim, chegamos ao objetivo principal, tratando das aplicações dos números complexos na geometria plana, reformulando resultados e conceitos da geometria analítica e fornecendo aplicações no estudo de triângulos e polígonos em geral.

Palavras - chave: Números Complexos, Geometria Plana, Geometria Analítica, Polígonos, triângulos.

Abstract

This dissertation has as main objective to provide some different applications of complex numbers in the study of flat geometry. We started with a bit of the history of complex numbers, and answer frequently asked questions. by high school students when this content is introduced, followed by the operational concepts required for applications. Next, content of the analytical geometry that will be used later. Lastly, we arrive at the main objective, dealing with the applications of the complex numbers in the geo- model, reformulating results and concepts of analytical geometry and providing applications in the study of triangles and polygons in general.

Key words: Complex Numbers, Flat Geometry, Analytical Geometry, Polygons, triangles..

Lista de Figuras

1.1	Bhaskara	13
1.2	Tartaglia	14
1.3	Cardano	14
1.4	Rafael Bombelli	15
1.5	Descartes	16
1.6	Moivre	16
1.7	Euler	17
1.8	Gauss	18
1.9	Plano de Argand - Gauss	22
1.10	Representação Geométrica na Forma Polar	24
1.11	Soma de complexos	27
1.12	Subtração de complexos	27
1.13	$d(z_1, z_2) = z_2 - z_1 $	28
1.14	$z.z_1, z_1 = 1$	30
1.15	$z.z_1, z_1 > 1$	30
1.16	$\frac{z}{z_1}, z_1 = 1$	30
1.17	$\frac{z}{z_1}, z_1 > 1$	30
1.18	Interpretação geométrica para $\bar{z}, -z$ e zi	31
1.19	Translação de z_1 e z_2 por t_z	32
1.20	Rotação de z_1 e z_2 por R_θ	33
2.1	Identificação dos quadrantes.	36
2.2	Ponto médio	38
2.3	Medida do ângulo agudo entre dois vetores.	43
3.1	Triângulos congruentes	56
3.2	Caso LAL	57

3.3	$\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ (Triângulos Isósceles)	58
3.4	Caso ALA	58
3.5	Caso LLL	60
3.6	Caso LAA	61
3.7	$\triangle ABC \equiv \triangle MNO$ (Triângulos retângulos)	63
3.8	Divisão do triângulo em trapézios	78
3.9	Divisão de um polígono em triângulos	80

Sumário

Introdução	11
1 Números Complexos	13
1.1 A Origem dos Números Complexos	13
1.2 O Corpo dos Números Complexos	19
1.3 Representação Geométrica dos Números Complexos no Plano	22
1.4 A representação polar e a Fórmula de Moivre	23
1.5 Interpretação Geométrica da Soma e Subtração de dois Complexos	27
1.6 Ângulos entre dois Números Complexos.	28
1.7 Interpretação Geométrica para Multiplicação e Divisão de dois Números Complexos.	29
1.8 Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi	30
1.9 Isometria no Plano Complexo	31
2 Geometria Analítica Plana	35
2.1 Pontos do plano	35
2.1.1 Coordenadas de um ponto	35
2.1.2 Distância entre dois pontos	37
2.1.3 Ponto Médio de um segmento	37
2.1.4 Condição para alinhamento de três pontos	38
2.2 Vetores no plano: a estrutura euclidiana do \mathbb{R}^2	40
2.3 Equações da reta	44
2.3.1 Equações Paramétricas	44
2.3.2 Equação Cartesiana	45
2.3.3 Equação na forma reduzida	46

3	Aplicações dos números complexos à geometria analítica plana	47
3.1	Estudo dos pontos via números complexos	47
3.1.1	Cálculo da distância entre dois pontos	47
3.1.2	Cálculo do ponto médio de um segmento	48
3.1.3	Condições para alinhamento	49
3.2	Estudo das retas no plano via números complexos	51
3.2.1	Equação paramétrica	52
3.2.2	Divisão proporcional de um segmento entre dois números complexos	52
3.2.3	Condição para perpendicularidade	53
3.2.4	Equação da reta perpendicular e da mediatriz	54
3.3	Congruência e semelhança de triângulos via números complexos . . .	55
3.3.1	Congruência de triângulos	56
3.3.2	Semelhança de triângulos	64
3.4	Pontos notáveis de um triângulo via números complexos	68
3.4.1	Baricentro	68
3.4.2	Incentro	69
3.4.3	Ortocentro	73
3.4.4	Circuncentro	75
3.5	Áreas dos polígonos via números complexos	77
3.5.1	Área de um triângulo	77
3.5.2	Área de um polígono	79
3.5.3	Polígonos regulares	81
	Referências Bibliográficas	82

Introdução

O que são números complexos? onde e quando foram inventados? para que servem? Essas e outras perguntas são feitas nas aulas pelos alunos, quando este conteúdo é abordado, seja por curiosidade, ou por receio ao próprio tema. Neste trabalho pretendo dissimular a ideia da falta de importância desta teoria, apresentando ao leitor aplicações não usuais dos números complexos, mostrando assim que essa teoria pode ser utilizada por exemplo para estudar geometria plana.

Representando pontos do plano com números complexos podemos estudar elementos da geometria plana usando os números complexos, com a vantagem que este último tem uma estrutura natural de corpo o que possibilita por exemplo uma divisão, algo que não é possível com pontos nem mesmo usando a noção de coordenadas. Com isso podemos trabalhar com propriedades geométricas usando condições algébricas sobre os números complexos.

O capítulo um refere-se ao estudo dos números complexos. Iniciamos com o estudo da história destes números, que se iniciou com o problema da raiz quadrada de um número negativo como solução de equação, a qual foi tratada com desprezo pelos sábios da época. Porém, após algum tempo, sua importância para o avanço da Matemática e conseqüentemente para o conhecimento humano é reconhecida. Essa importância passou a ser aceita a partir da idade média, com os estudos que contou com a colaboração de diversos pensadores da época. Em seguida trataremos das propriedades fundamentais, importantes para as aplicações estudadas no capítulo 3.

A partir dos estudos e conclusões de Descartes, originou-se a geometria analítica, que criou um elo de ligação entre a álgebra e a geometria. Esta conexão, utiliza-se da álgebra para realizar os estudos dos objetos, figuras e relações contidas na geometria euclidiana. Assim, os conceitos geométricos desenvolveram-se sob uma nova abordagem, ou seja, aprofundando os conceitos da geometria euclidiana. O capítulo 2, dedica-se ao estudo de alguns elementos da geometria analítica teoria como pontos, vetores e retas no plano, usando a ideia de coordenadas.

Por fim, no terceiro capítulo são apresentadas varias aplicações da teoria dos números complexos no estudo da geometria plana. A representação de pontos do plano por números complexos permite o estudo das retas, dos triângulos e dos poligonos em geral a partir linguagem e das propriedades dos números complexos, da qual se chega a resolução de problemas referentes à geometria plana, chegando assim à algumas **aplicações dos números complexos à geometria analítica plana.**

Capítulo 1

Números Complexos

O aprender Matemática não é somente aplicar e deduzir fórmulas, e sim, saber manuseá-la de modo a se obter resultados satisfatórios e exatos nas diversas ciências, com o objetivo de proporcionar saúde e bem estar a todos povos.

1.1 A Origem dos Números Complexos

Ao longo da história, a resolução de equações sempre foi um fato fascinante para os matemáticos, de modo que, a partir dela se deu o início ao estudo dos números complexos.

Estudo esse que passou por diversas etapas e contou com a colaboração de diversos matemáticos babilônicos e gregos, por terem conseguido resolver equações do segundo grau. Entretanto a conquista da Grécia pelos romanos, por pouco não extinguiu com o domínio da matemática grega.

Com a queda do Império Romano e o progresso do cristianismo a Europa entrou na idade das trevas, fazendo com que o desenvolvimento da Matemática ficasse nas mãos dos arábes e dos hindus. Por sua vez os hindus se dedicaram a pesquisa em relação a equação do 2º grau, chegando assim a fórmula de Bhaskara, que na verdade foi definida pelo matemático hindu Sridhara, a pelo menos um século antes da publicação por Bhaskara, entretanto nesse



Figura 1.1: Bhaskara

período quando ao se obter um delta negativo, o mesmo não perturbava os matemáticos, pois esses diziam, simplesmente, que a equação não possuía solução.

Em 1510, Scipione del Ferro, professor da Universidade de Bolonha, Itália, encontrou uma forma de resolver a equação do 3º grau, do tipo $x^3 + ax + b = 0$, no entanto ele morreu antes de publicá-la. Sendo Antônio Maria Del Fiore o único que teve o conhecimento dessa solução, por ter sido discípulo de Del Ferro. Com a obtenção da fórmula de resolução, resolveu desafiar Nicollo Fontana, conhecido como Tartaglia, a resolver uma séria de problemas, os quais dependiam do conhecimento da fórmula de resolução, sendo que após alguns dias e noites, Tartaglia chegou a mesma forma, o que ocasionou em praça pública, no dia do confronto, a obtenção de êxito por parte de Tartaglia, onde Del Fiore foi humilhado.



Figura 1.2: Tartaglia

O matemático Gerolamo Cardano foi o mais importante algebrista da sua época e tendo conhecimento de tal feito, pediu obstinadamente a Tartaglia que o revelasse a fórmula, sobre a promessa de que não a revelaria, a qual foi negada inicialmente, mas depois de tantas insistências, a revelou. Entretanto Cardano quebrou a sua promessa, e em 1545 publicou o método de solução de Tartaglia em seu livro *Artis Magnae Sive de Regules Algebraicis (Livro Número Um sobre a Grande Arte ou as Regras da Álgebra)*, motivado por um suposto conhecimento em trabalhos não divulgados por Del Ferro com data anterior ao de Tartaglia.

Em seu livro, Cardano tratou de diferentes formas os vários tipos de equações do 3º grau, e como aconteceu com os algebristas árabes, os coeficientes negativos não tinha importância, sendo que podiam aparecer termos de graus distintos nos dois lados da equação. Analogamente ao método de AlKharismi para equações quadráticas, que consistia em completar o quadrado, o método de Cardano, seria de completar o cubo, tomando como representante geral uma equação com coeficientes numéricos específicos,



Figura 1.3: Cardano

como o problema: "o cubo e seis vezes o lado igual a 20", que define a equação $x^3 + 6x = 20$, que se aplica a todas as equações do tipo $x^3 + ax + b$, cujas soluções apresentadas retoricamente eram longas e recaíam na fórmula que conhecemos hoje que é:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

e ao resolver equações do tipo "cubo igual a coisa e número" tais como $x^3 = 15x + 4$, chegou ao resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

de modo que Cardano não soube dar uma justificativa para tal fato, pois sabia que não existia raiz quadrada de números negativos, de onde se percebeu que os números reais não eram suficientes, e por outro podia verificar que $x = 4$ era solução da equação, e assim os números complexos apareceram na matemática e foram chamados de "números sofistas" e tratados como "sutis e inúteis" por Cardano.

Dando continuidade aos trabalhos de Cardano, em relação as raízes quadradas de números negativos, Rafael Bombelli, o último grande algebrista do Renascimento italiano, teve o que chamou de *idéia louca*, então escreveu um estudo sobre a álgebra, baseando-se na questão de que se *parecia apoiar-se em sofismo*, o que colaborou para um conceito mais abstrato e teórico dessa disciplina. Com o seu talentoso raciocínio, mostrou a importância que desempenhariam os números imaginários conjugados no futuro ao buscar compreender o aparecimento das soluções com raízes quadradas de números negativos, designando-os por *piu di meno* e *meno di meno*, retratando-os da forma $+\sqrt{-10}$ por p.d.m. 10 e $-\sqrt{-10}$ por m.d.m. 10. No pensamento de Bombelli, as raízes das equações podiam ser expressas pelas somas de números positivo alterados por qualquer um dos quatro símbolos: *piu*, *meno*, *piu di meno* e *meno di meno*, que correspondem a $+$, $-$, $+i$ e $-i$ e propôs ainda normas multiplicativas desses quatro elementos, como: *piu di meno via meno di meno fa piu*, cujo significado é $(+i)(-i) = +1$.



Figura 1.4: Rafael Bombelli

Não podemos deixar cair no esquecimento de que nos séculos XVI e XVII, os

números irracionais, bem como os negativos, não tinham adquirido dignidade numérica para que pudessem classificar as equações do tipo $x^2 + 1 = 0$ ou $x^2 + 2 = 0$ como absurdas, inconcebíveis ou sem soluções, o que ocasionou a não perda de tempo com as mesmas por parte dos matemáticos da época.

O filósofo e matemático francês René Descartes, co-inventor da Geometria Analítica e que protagonizou um capítulo importantíssimo para a composição da matemática moderna. Publicou um único livro relacionado à Matemática sobre o título de *La Géométri*, onde contém um apêndice sobre o *Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e encontrar a Verdade nas Ciências* que falava sobre as técnicas analíticas, sendo considerado a base da Geometria Analítica. Ao contrário do que se pensa, nesta obra, Descartes mostrou que a Álgebra, através da resolução de diversos problemas de geometria, tinha alcançado um grande desenvolvimento, podendo ser empregada no estudo da Geometria, ao contrário do ocorrido na Antiguidade Clássica, onde as figuras geométricas eram usadas para justificar a Aritmética e a Álgebra.



Figura 1.5: Descartes

Mesmo não tendo aprofundado na elaboração de novas resoluções das equações algébricas, Descartes contribuiu bastante para o desenvolvimento da Álgebra. Entre elas, foi em fazer com que as raízes negativas fossem aceitas como soluções para as equações algébricas, mesmo encontrando resistências por parte dos matemáticos da época.

Outra contribuição de Descartes para a Matemática, dessa vez em relação aos Números Complexos, foi a definição de que $\sqrt{-1}$ seria denominado de *número imaginário*, definição feita a partir da frase "*Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias*". (GARBI, 2009, p. 74)

Abraham De Moivre nasceu na França mas logo após a revogação do Edito de Nantes foi para a Inglaterra onde estudou Matemática sozinho e após ler



Figura 1.6: Moivre

os princípios de Newton. Por não ser inglês de nascimento não conseguiu ser professor de matemática em uma universidade. Para obter sustento, dava aulas particulares, o que não foi impedição na produção de uma considerável quantidade de pesquisas. Em 1722, desenvolveu a fórmula que leva o seu nome, onde a mesma faz a relação entre os números complexos e a trigonometria. Portanto o Teorema de Moivre estabelece que

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta),$$

para qualquer número inteiro n .

Um dos matemáticos que mais produziu e publicou, independente dos graves problemas de visão desde jovem, foi Leonhard Euler, que nasceu na Basileia, Suíça em 1707, quando o cálculo integral e diferencial, criado por Newton e Leibniz, estava em expansão. Era beneficiado por uma memória fantástica, falava diversos idiomas, tinha em mente as tábuas de logaritmo e trigonometria e realizou trabalhos notáveis em todos os ramos da Matemática em sua época. Consolidou a simbologia matemática moderna inventando muito do que é utilizado atualmente, e é apontado como o matemático que dominou os números complexos.



Figura 1.7: Euler

Uma das maiores representações propostas por Euler foi o i , que substitui $\sqrt{-1}$, por consequência, o número complexo, pode ser escrito da forma

$$z = a + bi,$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, porém essa ideologia só foi admitida quando Gauss a estabeleceu. Mostrou ainda que os números complexos são um corpo fechado, visto que aplicando qualquer operação transcendente terá como resultado um número complexo.

No final do séc. XVIII, Casper Wessel, um agrimensor dinamarquês-norueguês que teve uma notável influência na Matemática, principalmente em relação aos Números Complexos, por ter demonstrado a partir da representação analítica a representação

geométrica dos mesmos.

A representação de Wessel consistiu em tornar o eixo cartesiano em um eixo orientado em relação aos números complexos $a + bi$ qualquer, ao modo que o ponto P do plano fosse representado por (a, b) , ou seja $P = (a, b)$, de modo a se observar que a partir desse momento teríamos um eixo para representar cada uma das partes (real e imaginária) do número complexo.

Jean-Robert Argand, contador e matemático suíço, descreveu em 1806 a representação geométrica dos números complexos, o que é conhecido como **plano de Argand**, onde pode ser observado o intervalo dos números complexos e ser entendido como um plano cartesiano modificado, onde a parte real é representada no eixo x (eixo real) e a parte imaginária no eixo y (eixo imaginário).

No plano de Argand, os números complexos poderiam ser visualizados por um par de números (a, b) , formando assim um vetor em um diagrama denominado de **diagrama de Argand**. A sua criação é imputada a Argand, ainda que tenha sido descrita anteriormente, no final do séc. XVII, pelo agrimensor e matemático norueguês-dinamarquês Caspar Wessel.

Nascido em Brunswick, Alemanha, Johann Carl Friedrich Gauss, demonstrou inicialmente a sua genialidade, quando estudando em sua cidade natal, um certo dia o professor ordenou que os alunos efetuassem a soma de todos os números de 1 a 100, e imediatamente Gauss recitou a resposta - 5050 - supostamente sem cálculo.

Já em 1798, na **Universidade de Helmsãdt**, recebeu o título de Doutor ao apresentar o **Teorema Fundamental da Álgebra**, que até hoje é considerada a maior tese de doutorado de todos os tempos, onde afirma que toda equação polinomial, do tipo $f(x) = 0$, de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos uma raiz complexa.

Dessa forma, o Teorema Fundamental da Álgebra, concluiu o problema relacionado as soluções das equações algébricas e ainda denotou que o conjunto dos números complexos é o mais apropriado para tal assunto, por conter todas as soluções possíveis para qualquer equação algébrica, de qualquer grau. E em 1831, retomou a idéia de Argand em relação as coordenadas dos números complexos, dando-lhe também uma representação geométrica da soma e subtração no plano cartesiano, onde a mesma



Figura 1.8: Gauss

”fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido de que cada ponto no plano corresponde a um número complexo e vice-versa” (BOYER, 1996, p. 350)

Desta forma observa-se que os Números Complexos ou Imaginários trilharam um longo trajeto até que tivessem o devido reconhecimento e aplicação por parte da coletividade matemática.

1.2 O Corpo dos Números Complexos

Iniciaremos com a definição formal de um corpo.

Definição 1.2.1. *Um Corpo é um conjunto não vazio \mathbb{K} munido de duas operações, uma de adição (+) e outra de multiplicação (.) que satisfazem as seguintes propriedades para quaisquer k_1, k_2 e $k_3 \in \mathbb{K}$:*

$$A_1) \text{ Associativa: } (k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3).$$

$$A_2) \text{ Comutativa: } k_1 + k_2 = k_2 + k_1.$$

$A_3)$ *Existência de elemento neutro: Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $k + 0 = k$, para todo $k \in \mathbb{K}$.*

$A_4)$ *Existência do simétrico: Para todo $k \in \mathbb{K}$, existe $-k \in \mathbb{K}$ tal que $k + (-k) = 0$.*

$$M_1) \text{ Associativa: } (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3).$$

$$M_2) \text{ Comutatividade : } k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$$

$M_3)$ *Existência do elemento neutro: Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $k \cdot 1 = k$ para todo $k \in \mathbb{K}$.*

$M_4)$ *Existência do inverso: Para todo $k \neq 0$, existe $k^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $k \cdot k^{-1} = 1$.*

$M_5)$ *Distributiva da multiplicação em relação a adição: $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$.*

Consideremos agora o conjunto $\mathbb{C} = (x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ e nele definamos as seguintes operações de adição representada por + e multiplicação representada por \cdot : seja $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, então teremos:

$$(+) : z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} (\cdot) : z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

O conjunto dos números complexos \mathbb{C} munido das duas operações acima de soma e produto é um corpo, denominado Corpo dos Números Complexos. A verificação das propriedades que definem um corpo são simples e não faremos aqui.

[...] Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$ não são resolúveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não é resolúvel. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém, com a solução da equação cúbica, a situação mudou radicalmente. Sempre que as três raízes de uma equação cúbica são reais e diferentes de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingindo sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais. [...] (BOYER, 1974, p.210) ”

Considere o subconjunto $\mathbb{R}' \subset \mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero, ou seja,

$$\mathbb{R}' = (x, y) \in \mathbb{C} : y = 0$$

Assim, por exemplo, pertencem a \mathbb{R}' os pares $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(x + y, 0)$, $(x \cdot y, 0)$, entre outros.

Agora, considere a aplicação f , de \mathbb{R} em \mathbb{R}' , que aplica cada x de \mathbb{R} ao par ordenado $(x, 0)$ de \mathbb{R}' . Tem-se que f é sobrejetora, pois todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é correspondente, segundo f , de $x \in \mathbb{R}$. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados e, portanto, f é injetiva.

Além disso, note que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois a soma $x + y$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, está associada ao par ordenado $(x + y, 0)$, que é a soma dos pares ordenados $(x, 0)$ e $(y, 0)$, correspondentes de x e y , respectivamente:

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y).$$

Ao produto $x.y$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, está associado ao par ordenado $(x.y, 0)$, que é o produto dos pares $(x, 0)$ e $(y, 0)$, correspondente de x e y , respectivamente:

$$f(x.y) = (x.y, 0) = (xy - 0.0, x.0 + 0.y) = (x, 0).(y, 0).$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$, que conserva as operações de adição e multiplicação, diz-se que R e R' são isomorfos. Devido a esse isomorfismo operar com $(x, 0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x . Isto justifica a igualdade:

$$x = (x, 0), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Aceitando a igualdade, tem-se os casos particulares já citados: $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$. Assim, pode-se escrever $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$ e, portanto, o corpo \mathbb{R} dos números reais passa a ser considerado como um subconjunto do corpo \mathbb{C} dos números complexos.

Como visto anteriormente na seção da origem dos números complexos, a unidade imaginária i que foi nomeada assim por Euler (1707-1783) é o número complexo $(0, 1)$. Veja ainda que

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é

$$i^2 = -1.$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, tem-se:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) = (x, 0) + (y, 0).(0, 1)$$

e, portanto,

$$z = x + yi.$$

Assim, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a fórmula $z = x + yi$, chamada de **forma algébrica**.

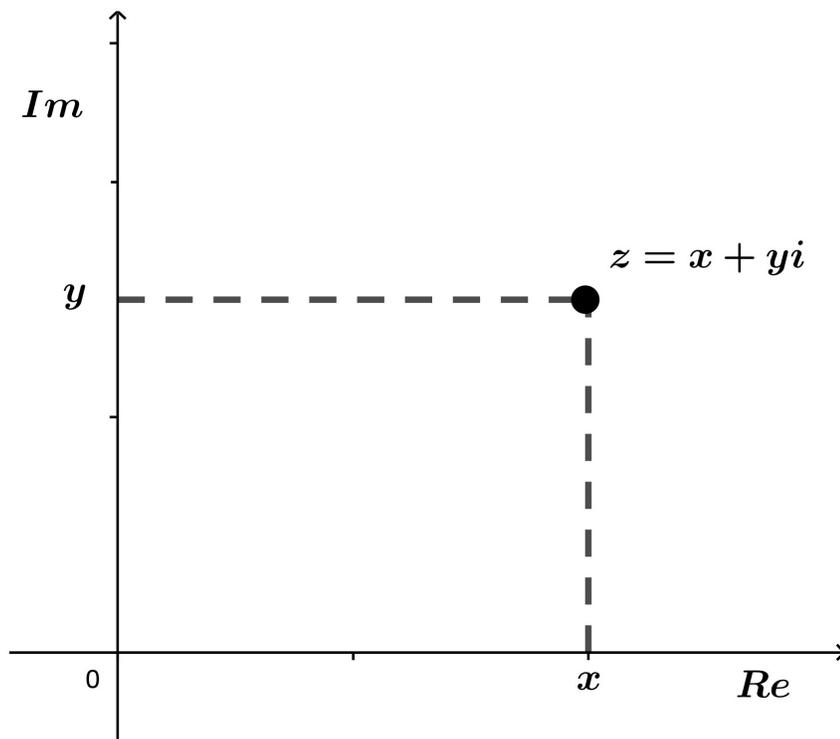


Figura 1.9: Plano de Argand - Gauss

1.3 Representação Geométrica dos Números Complexos no Plano

A representação Geométrica dos números complexos é feita por um referencial cartesiano onde fixamos o eixo das abscissas para representar a parte real do número complexo com $\mathbb{R} = x + yi \in \mathbb{C}; y = 0$ (conjunto dos números reais) e o eixo das ordenadas para representar a parte imaginária pura do conjunto dos números complexos como $\mathbb{I} = x + yi \in \mathbb{C}; x = 0$ (conjunto dos números imaginários puros). A parte real denotamos como $Re(z) = x$ e a parte imaginária por $Im(z) = y$.

A existência da bijeção entre os conjuntos \mathbb{C} e o plano \mathbb{R}^2 permite chamar o sistema de coordenadas da figura 1.9 de **Plano Complexo** ou **Plano de Argand - Gauss**.

Definição 1.3.1. Se $z = x + yi$, o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = x - yi$.

Observação 1.3.2. Geometricamente, \bar{z} representa a reflexão do complexo z em relação ao eixo real.

Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes propriedades:

$$\text{P1: } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\text{P2: } \overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1 - z_2} = z_1 - z_2.$$

$$\text{P3: } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$\text{P4: Se } z_2 \neq 0 \text{ e } z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}, \text{ então } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

$$\text{P5: } z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$\text{P6: } z - \bar{z} = 2\text{Im}(z).$$

$$\text{P7: Se } z \text{ é real, então } z = \bar{z}.$$

$$\text{P8: } z = \bar{\bar{z}}.$$

$$\text{P9: Se } n \text{ é natural, então } \overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

As propriedades P1-P9 podem ser facilmente verificadas usando a definição.

1.4 A representação polar e a Fórmula de Moivre

Vimos que a estrutura algébrica dos números complexos z permite que o escrevamos como um par ordenado $z = (x, y)$ ou na forma algébrica $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Assim como sua representação algébrica no Plano de Argand - Gauss permite que façamos associações de tais números com vetores. Dessa maneira um número complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo vetor \overrightarrow{OZ} , onde tal vetor pode ser representado na forma polar, em que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é o ângulo entre o semi-eixo real positivo e o vetor \overrightarrow{OZ} . O número real $|z|$ é chamado de módulo do vetor \overrightarrow{OZ} ou módulo do número complexo z e representa a distância da origem O do plano complexo para o número complexo z .

Qualquer ângulo da forma $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz a forma polar, isto é, um complexo não nulo z tem infinitos argumentos que diferem entre si por um múltiplo de 2π . Assim o conjunto de todos os argumentos de z será dado por $\text{arg}(z) = (\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z})$. Com isso vamos considerar $\text{Arg}(z)$ como aquele único argumento de z pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi]$, o qual será denominado de argumento principal de z . A figura 1.10 mostra a representação geométrica do número complexo $z = x + yi$, na forma polar.

Dado o número complexo $z = |z|(\cos \theta + i \text{sen } \theta)$, seu conjugado é dado por

$$\bar{z} = |z|(\cos \theta - i \text{sen } \theta) = |z|[\cos(-\theta) + i \text{sen}(-\theta)].$$

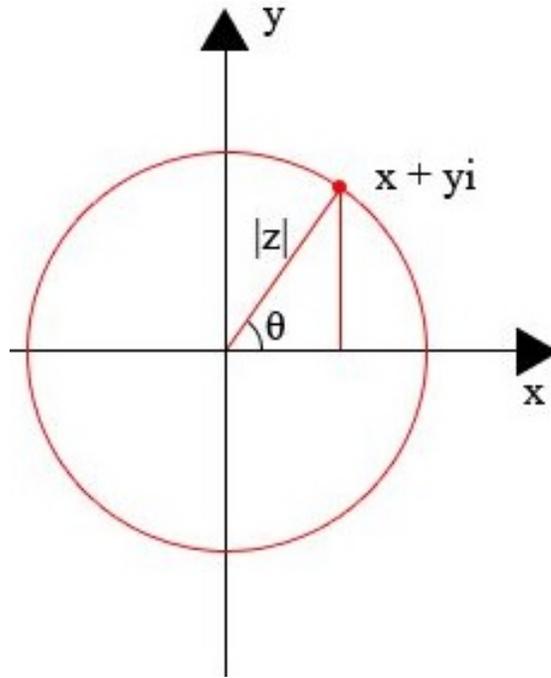


Figura 1.10: Representação Geométrica na Forma Polar

As definições de módulo e argumento citadas anteriormente, permitem listar outras propriedades importantes sobre os números complexos, que nos ajudaram nas próximas interpretações geométricas.

$$\text{P10: } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\text{P11: } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{P12: Se } z_2 \neq 0, \text{ então } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{P13: } \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$

$$\text{P14: } \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

Dado um complexo z , não nulo, pode-se obter a representação polar para $\frac{1}{z} = z^{-1}$ utilizando a propriedade P10 por:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = |z|^{-1} [\cos \theta - i \text{sen} \theta].$$

De P13, sabe-se que o produto de dois números complexos $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \text{sen} \theta_1)$ e $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \text{sen} \theta_2)$ é dado por,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (1.1)$$

A proposição a seguir mostra que a fórmula (1.1) pode ser estendida para n números complexos.

Proposição 1.4.1. *Se $z_j = |z_j| \cdot [\cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j]$, para $j = 1, 2, \dots, n$ então*

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 \dots + \theta_n)]. \quad (1.2)$$

Prova. Provaremos tal afirmação por indução em n . Para $n = 2$ o resultado foi provado em (1.1). Agora supondo que (1.2) seja válida para um certo $n \geq 3$ iremos provar sua validade para $n + 1$. Seja

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n \cdot z_{n+1} = (z_1 \cdot z_2 \dots z_n) \cdot z_{n+1}$$

Por hipótese de indução temos que:

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot z_{n+1}.$$

Fazendo $z_{n+1} = |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1})$, obtém-se,

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1}).$$

Novamente por (1.1), obtém-se,

$$(z_1 \cdot z_2 \cdot z_n) \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})),$$

e portanto

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_n \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})),$$

como queríamos. \square

Como mencionado anteriormente na **seção 1.1**, Abrahan de Moivre ficou conhecido pela sua fórmula que relaciona números complexos com a trigonometria, agora vamos fazer a demonstração de tal fórmula. O próximo resultado nos apresenta a forma para calcularmos potências de números complexos.

Proposição 1.4.2 (A Fórmula de Moivre). *Se n é inteiro e $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, então*

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Prova. Para $n = 0$ ou $n = 1$ o resultado é imediato. Para n inteiro maior que 1, basta utilizar a equação (1.2) quando $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$. Para n inteiro negativo, fazemos $n = -k$, com k inteiro positivo. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 z^n &= [|z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))]^n \\
 &= [|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)]^{-k} \\
 &= \frac{1}{[|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)]^k} \\
 &= \frac{1}{|z|^k(\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta))} \\
 &= \frac{\cos\theta + i\text{sen}\theta}{|z|^k(\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta))} \\
 &= |z|^{-k}(\cos(-k\theta) + i\text{sen}(-k\theta)).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Substituindo $-k$ por n o resultado segue. \square

Definição 1.4.3. Se $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$e^{xi} = \cos x + i \text{sen } x.$$

Como consequência da definição 1.4.3 temos que a fórmula polar de um complexo z é dada por $z = |z|.e^{i\theta}$, onde θ é o argumento de z , além disso temos as seguintes propriedades:

- i) $e^0 = 1$
- ii) $e^{xi}e^{yi} = e^{(x+y)i}$
- iii) $e^{-xi} = (e^{xi})^{-1}$
- iv) $(e^{xi})^n = e^{nxi}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

O grande ganho que se tem quando escrevemos um número complexo não-nulo em sua forma exponencial é a simplicidade vista quando se realiza as operações algébricas. Por exemplo o produto e o quociente desses números se reduzem a

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta+\alpha)}$$

e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta-\alpha)}.$$

As próximas seções serão dedicadas às interpretações geométricas para as operações básicas envolvendo números complexos. Para isso usaremos z para representar o vetor com origem em O (origem dos complexos) e extremidade em z (número complexo) e, caso a origem do vetor não esteja na origem do plano, usaremos números complexos para representar sua origem e extremidade.

1.5 Interpretação Geométrica da Soma e Subtração de dois Complexos

A representação vetorial da soma e/ou subtração de dois números complexos, obtém-se somando ou subtraindo os componentes dos vetores que os representam.

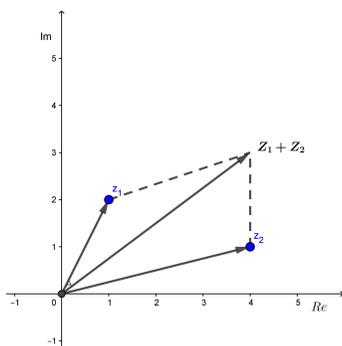


Figura 1.11: Soma de complexos

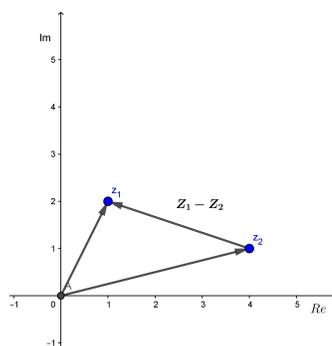


Figura 1.12: Subtração de complexos

Proposição 1.5.1. *Para quaisquer dois números complexos z_1 e z_2 vale a desigualdade*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Prova. De fato, pela propriedade P10 sabe-se que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + \overline{z_1} \cdot z_2 + \overline{z_1} \cdot z_1 + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

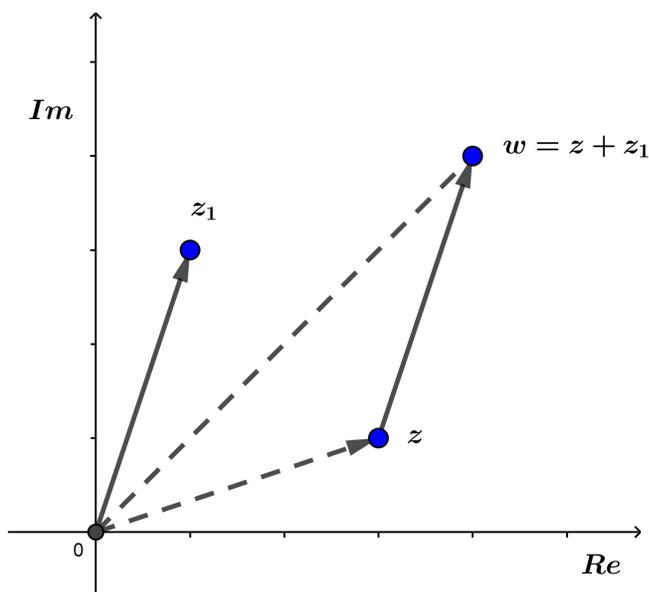


Figura 1.13: $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

Para provar a outra desigualdade tomemos $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$ que implica $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)|$, por (1.3) tem-se, $|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |-z_2| = |(z_1 + z_2)| + |z_2|$, assim $|z_1| \leq |(z_1 + z_2)| + |z_2|$ que implica $|z_1| - |z_2| \leq |(z_1 + z_2)|$. Fazendo $z_2 = (z_1 + z_2) + (-z_1)$ e aplicando o mesmo procedimento anterior, obtém-se $|z_2| - |z_1| \leq |(z_1 + z_2)|$ e portanto, $||z_1| - |z_2|| \leq |(z_1 + z_2)|$. \square

Se z_1 e z_2 são números complexos, a distância $d(z_1, z_2)$ entre eles é igual ao módulo de sua diferença, ou seja, $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$.

Pensando ainda na soma de dois números complexos como vetores do plano, a expressão $z \rightarrow z + z_1$, representa o deslocamento paralelo do vetor representante de z_1 na direção do vetor representante de z e de mesmo módulo que z_1 , em outras palavras, esta operação "leva" a origem O no número complexo z e o complexo z_1 no complexo $w = z + z_1$, conforme figura 1.13.

1.6 Ângulos entre dois Números Complexos.

Definição 1.6.1. *O ângulo entre dois números complexos z_1 e z_2 não nulos é o número real*

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right).$$

Como consequência da definição 1.6.1, se $z_1 = |z_1|e^{i\beta}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\alpha}$, então

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left(\frac{|z_1|e^{\beta i}}{|z_2|e^{\alpha i}} \right) = \text{Arg} \left(\frac{e^{\beta i}}{e^{\alpha i}} \right) = \text{Arg}(e^{(\beta-\alpha)i}).$$

Observe que $\theta(z_1, z_2) = -\theta(z_2, z_1)$ é um ângulo orientado. Temos também como consequência que

$$\theta(iz_1, z_1) = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\theta(z_1, iz_1) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Se tomarmos $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$, então

$$\theta(z_1, z_2) = \theta(\alpha z_2 i, z_2) = -\theta(z_2, \alpha z_2 i) = \frac{\pi}{2},$$

ou seja, a condição para que dois números complexos z_1 e z_2 sejam perpendiculares é $z_1 = \alpha \cdot z_2 i$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1.7 Interpretação Geométrica para Multiplicação e Divisão de dois Números Complexos.

Fixemos um número complexo z tal que $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$. Ao multiplicarmos z por $|z_1| = |z_1| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a equação (1.1) garante que se $|z_1| = 1$ e $\alpha > 0$, então o produto $z \cdot z_1$ representa a rotação no sentido anti-horário de um ângulo α do vetor z em torno do plano complexo. Caso $|z_1| \neq 1$ a rotação é a mesma do caso anterior, porém, o comprimento de $z \cdot z_1$ será dado por $|z| \cdot |z_1|$.

O produto $z \cdot z_1$ acima representa uma rotação de um ângulo α em torno da origem, seguida de uma homotetia ¹ com centro na Origem O e coeficiente de semelhança igual a $|z_1|$

¹é a ampliação ou a relação de distâncias ou áreas a partir de um ponto fixo.

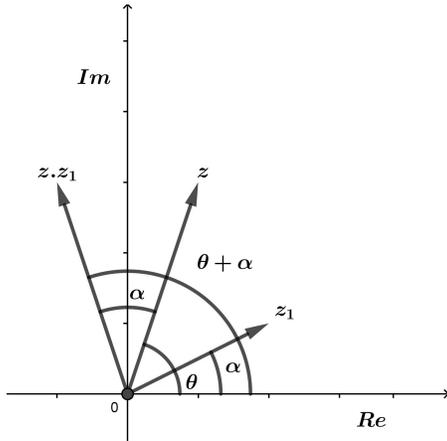


Figura 1.14: $z.z_1, |z_1| = 1$

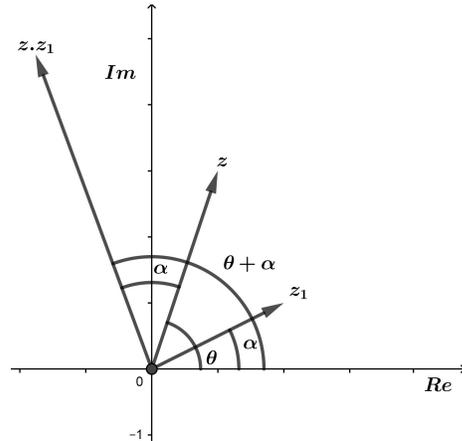


Figura 1.15: $z.z_1, |z_1| > 1$

Sejam os números complexos $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ com $\alpha > 0$. Pela propriedade P10, sabe-se que o quociente $\frac{z}{z_1}$ representa a rotação de um ângulo α no sentido horário (negativo) do vetor z em torno da origem do plano complexo seguida de uma homotetia com centro na mesma origem do plano complexo.

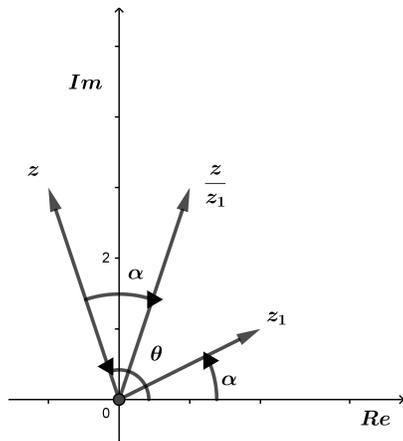


Figura 1.16: $\frac{z}{z_1}, |z_1| = 1$

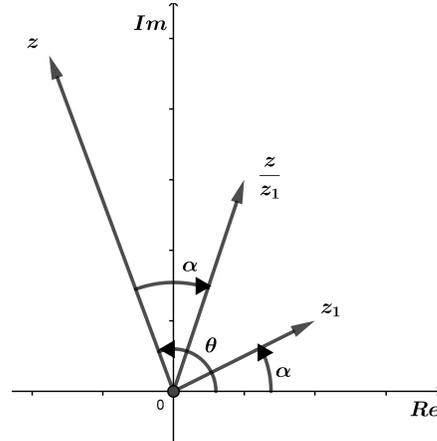


Figura 1.17: $\frac{z}{z_1}, |z_1| > 1$

1.8 Interpretação Geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi

Se $z = x + yi$, então $-z = -x - yi$ e $\bar{z} = x - yi$ representam respectivamente a simetria de z em relação à origem e ao eixo real. O produto $z.i = i.(x + yi) = -y + xi$ representa a rotação do vetor z de um ângulo de 90° no sentido anti-horário em torno da origem.

É importante observar que o produto de um número complexo $z = x + yi$ por $(-i)$ representa a rotação do vetor representante de z de um ângulo de 90° no sentido horário em torno da origem.

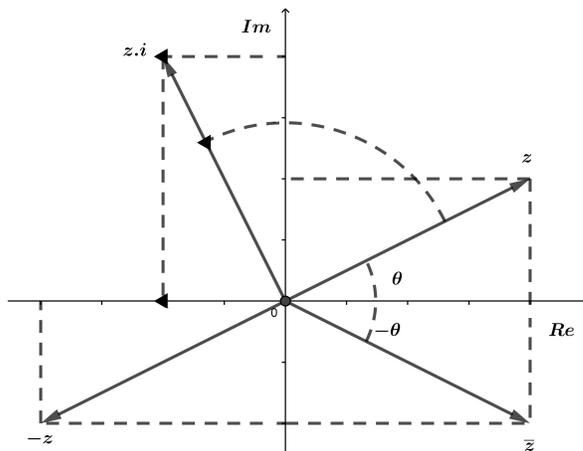


Figura 1.18: Interpretação geométrica para \bar{z} , $-z$ e zi

1.9 Isometria no Plano Complexo

Nesta seção faremos um breve estudo sobre os movimento rígidos no plano complexo \mathbb{C} , ou seja, movimentos que preservam a forma e a medida dos objetos de \mathbb{C} . Tais transformações ou movimentos são chamados de **isometrias** (do grego, mesma medida).

Primeiro observe que se tomarmos dois pontos z e w de \mathbb{C} , então a distância entre eles é dada por $|z - w|$.

Definição 1.9.1. *Uma **isometria** no plano complexo é uma aplicação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz*

$$|T(z) - T(w)| = |z - w|,$$

para quaisquer que sejam os complexos z e w de \mathbb{C} .

Definição 1.9.2. *Chama-se **translação determinada pelo complexo z** à transformação $T_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que leva cada complexo w de \mathbb{C} no complexo $T_z = w + z$.*

Proposição 1.9.3. *Toda translação é uma isometria.*

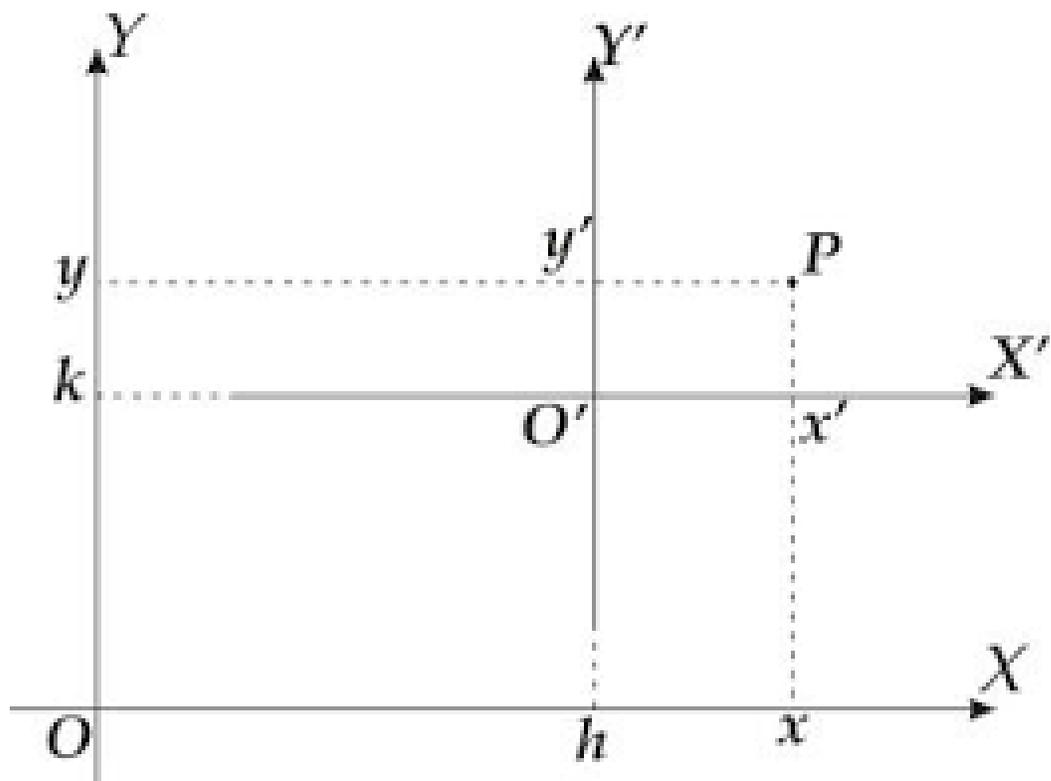


Figura 1.19: Translação de z_1 e z_2 por t_z

Prova. Sejam os complexos z_1 e z_2 de \mathbb{C} , então $T_z(z_1) = z_1 + z$ e $T_z(z_2) = z_2 + z$, assim

$$|T_z(z_1) - T_z(z_2)| = |z_1 + z - (z_2 + z)| = |z_1 + z - z_2 - z| = |z_1 - z_2|.$$

□

Definição 1.9.4. Seja $z \in \mathbb{C}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ um ângulo. Chama-se rotação determinada pelo ângulo θ a transformação $R_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que leva cada complexo z de \mathbb{C} no complexo $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$.

Proposição 1.9.5. Toda rotação é uma isometria.

Prova. Sejam os complexos z_1 e z_2 de \mathbb{C} , então $R_\theta(z_1) = e^{i\theta}z_1$ e $R_\theta(z_2) = e^{i\theta}z_2$, assim

$$|R_\theta(z_1) - R_\theta(z_2)| = |e^{i\theta}z_1 - e^{i\theta}z_2| = |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

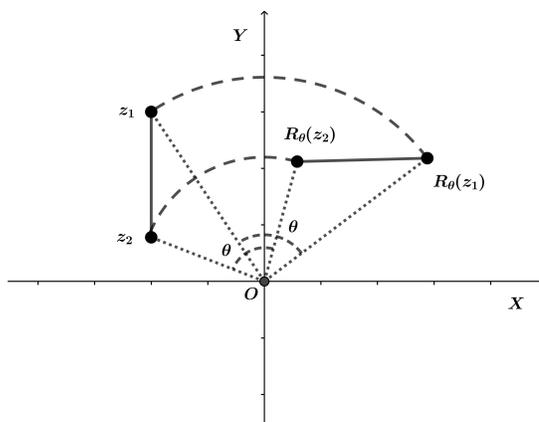


Figura 1.20: Rotação de z_1 e z_2 por R_θ

Vimos que $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, então $\theta(z_1, z_2) = \text{Arg}(e^{i(\theta_1 - \theta_2)})$.

Agora note que as rotações preservam a orientação do ângulo, ou seja podemos

tomar

$$\begin{aligned}
\theta(R_\beta(z_1), R_\beta(z_2)) &= \operatorname{Arg} \left(\frac{R_\beta(z_1)}{R_\beta(z_2)} \right) \\
&= \operatorname{Arg} \left(\frac{\frac{|R_\beta(z_1)|}{|R_\beta(z_2)|}}{\frac{|z_1|e^{(\beta+\theta)i}}{|z_2|e^{(\beta+\alpha)i}}} \right) \\
&= \operatorname{Arg} \left(\frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{e^{(\beta+\alpha)i}}{e^{(\beta+\theta)i}} \right) \\
&= \operatorname{Arg} \left(\frac{e^{(\beta+\alpha)i}}{e^{(\beta+\theta)i}} \right) \\
&= \operatorname{Arg}(e^{(\theta-\alpha)i}) \\
&= \theta(z_1, z_2),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

como queríamos demonstrar. \square

As transformações que preservam o módulo e a orientação do ângulo são chamadas de transformações conformes.

Proposição 1.9.6. *A composição de uma translação com uma rotação é uma isometria.*

Prova. Se z_1 e z_2 são complexos, então

$$(R_\theta \circ T_z)(z_1) = R_\theta(T_z(z_1)) = e^{i\theta}(z_1 + z)$$

e

$$(R_\theta \circ T_z)(z_2) = R_\theta(T_z(z_2)) = e^{i\theta}(z_2 + z),$$

assim

$$\begin{aligned}
|(R_\theta \circ T_z)(z_1)| - |(R_\theta \circ T_z)(z_2)| &= |R_\theta(T_z(z_1))| - |R_\theta(T_z(z_2))| \\
&= |e^{i\theta}(z_1 + z)| - |e^{i\theta}(z_2 + z)| \\
&= |e^{i\theta}z_1 + e^{i\theta}z - e^{i\theta}z_2 - e^{i\theta}z| \\
&= |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| \\
&= \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} |z_1 - z_2| \\
&= 1 \cdot |z_1 - z_2| \\
&= |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

\square

Capítulo 2

Geometria Analítica Plana

Introduzida por René Descartes e Pierre de Fermat, a Geometria analítica teve um papel importante para a evolução da Matemática. Por meio da representação de pontos do plano por meio de pares ordenados de números reais, as curvas planas são representadas através de equações, de modo a tornar possível lidar algebricamente com diversos problemas geométricos, e por outro lado, tratar de problemas algébricos usando geometria.

Por toda a extensão deste Capítulo, consideraremos que o leitor tenha por conhecimento os axiomas e corolários da Geometria Euclidiana no plano, no que diz respeito aos elementos básicos: ponto, reta e plano.

2.1 Pontos do plano

Os pontos do plano podem ser representados por pares ordenados de números reais denominados de coordenadas, conforme veremos a seguir.

2.1.1 Coordenadas de um ponto

Fixe um ponto O do plano o qual será denominado origem do sistemas de coordenadas, e um par de retas orientadas perpendiculares x e y passando pelo ponto O . Dado um ponto P do plano, representaremos P pelo para ordenado (x_P, y_P) de modo que x_P fornece a distância da projeção ortogonal do ponto P sobre a reta x , se esta projeção estiver a direita de O e y_P fornece distância da projeção ortogonal do ponto P sobre a reta y , se esta projeção estiver a direita de O . Caso a projeção esteja

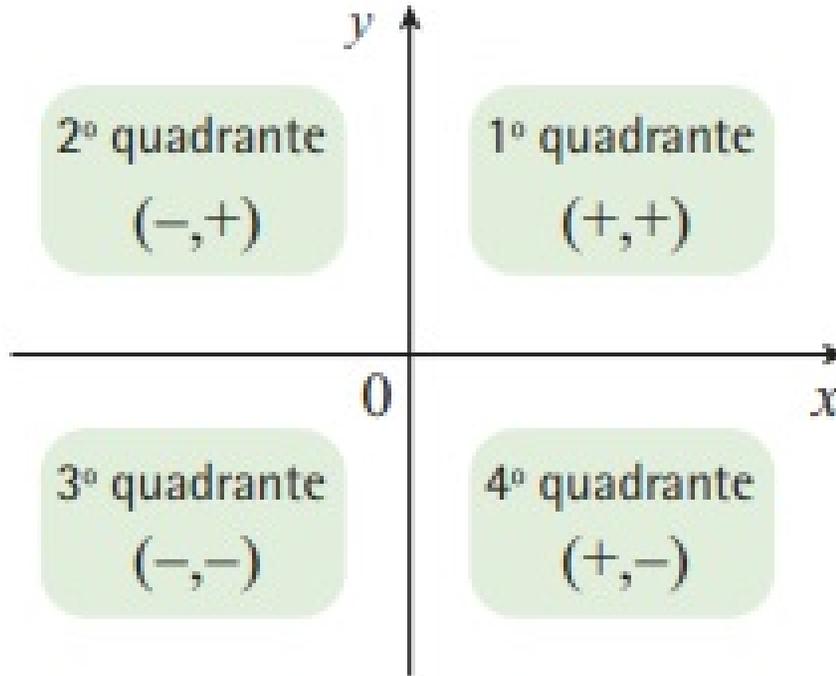


Figura 2.1: **Identificação dos quadrantes.**

a esquerda, invertemos o sinal. Assim, ao considerarmos dois eixos x e y perpendiculares em um ponto O , os mesmos definem um plano denominado plano cartesiano, por ter sido introduzido pelo matemático francês René Descartes no século XVII. A reta x é denominada de eixo das abscissas e a reta y de eixo das ordenadas. O plano cartesiano está assim, dividindo em quatro regiões, denominadas de quadrantes, como mostrado na figura 2.1.

Seguem algumas propriedades.

- I - Se um ponto P pertence ao eixo das abscissas, então $y_P = 0$, ou seja, $P = (x_P, 0)$;
- II - Se um ponto P pertence ao eixo das ordenadas, então $x_P = 0$, ou seja, $P = (0, y_P)$;
- III - Se um ponto P pertence à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, então $x_P = y_P$, ou seja $P = (x_P, x_P)$;
- IV - Se um ponto P pertence à bissetriz do segundo e quarto quadrantes, então $x_P = -y_P$, ou seja $P = (x_P, -x_P)$.

2.1.2 Distância entre dois pontos

De modo geral, quando traçamos duas retas, uma que passam pelo ponto S e é paralela ao eixo y , e outra que passa R sendo paralelo ao eixo x , definimos assim o triângulo cuja hipotenusa RS fornece a distância entre os pontos S e R . Aplicando o teorema de Pitágoras temos que

$$RS^2 = RT^2 + TS^2,$$

entretanto, $RT = |x_2 - x_1|$ e $ST = |y_2 - y_1|$, que nos permite obter

$$d(RS)^2 = RS^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

donde concluímos que

$$RS^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e portanto

$$RS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2.1)$$

chegando assim a fórmula que fornece a distância entre dois pontos em função de sua coordenadas.

2.1.3 Ponto Médio de um segmento

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dois pontos do \mathbb{R}^2 e $M(x, y)$ o ponto médio de AB , ou seja, um ponto do \mathbb{R}^2 tal que $d(A, M) = d(M, B)$. Mostraremos como determinar M em função de A e B , ou seja, x e y em função de x_1 , x_2 , y_1 e y_2 .

Sendo M o ponto médio de \overline{AB} temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$, então

$$2\overline{AM} = \overline{AB},$$

como

$$\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1) \quad e \quad \overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

logo

$$2(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

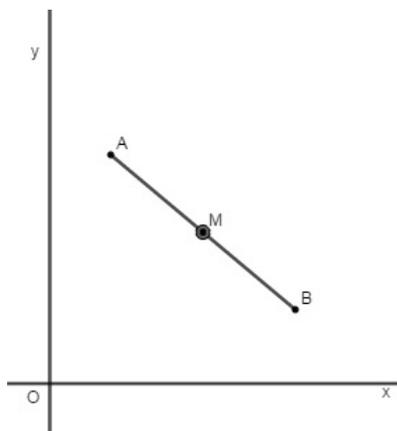


Figura 2.2: Ponto médio

donde temos

$$2x - 2x_1 = x_2 - x_1 \quad e \quad 2y - 2y_1 = y_2 - y_1.$$

Assim,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad e \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ou seja

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Deste modo temos que as coordenadas do ponto médio de \overline{AB} é a média aritmética das coordenadas dos pontos A e B .

2.1.4 Condição para alinhamento de três pontos

Dizemos que três pontos são colineares ou que estão alinhados se existe uma reta que contém os três. A próxima proposição fornece uma condição para alinhamento de três pontos do \mathbb{R}^2 .

Proposição 2.1.1. *Três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares se e somente se*

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prova. Inicialmente suponhamos que A , B e C são colineares e mostraremos que $D = 0$. Consideremos três casos possíveis:

- **1 caso:** Suponha que dois dos pontos coincidem, por exemplo $A = C$. Então temos que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, donde segue que $D = 0$;
- **2 caso:** Suponha que os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos, então $x_1 = x_2 = x_3$ ou $y_1 = y_2 = y_3$, donde segue que $D = 0$;
- **3 caso:** Supondo que os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela aos eixos \overline{Ox} e \overline{Oy} , sendo r a razão em que B divide \overline{AC} , com $r \neq -1$, temos que

$$r = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

então

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$$

o que implica em

$$x_3(y_1 - y_2) - y_3(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Portanto temos que $D = 0$.

Para a recíproca suponhamos que $D = 0$ e iremos provar que A , B e C são colineares. De antemão temos que se $D = 0$ então

$$x_3(y_1 - y_2) - y_3(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

que implica em

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0. \quad (2.2)$$

Vamos considerar dois casos possíveis:

- **1 caso:** Suponha que $x_2 = x_3$. De (2.2) temos que $(x_3 - x_1)(y_2 - y_3) = 0$, então $x_3 - x_1 = 0$ ou $y_2 - y_3 = 0$. No primeiro caso teríamos $x_3 = x_1 = x_2$ e portanto A, B, C são pontos sobre uma mesma reta vertical e portanto são colineares. Já no segundo caso segue que $B = C$ e A, B, C , pertencem à mesma reta paralela ao eixo vertical, portanto, A, B, C são colineares;
- **2 caso:** Suponha que $y_3 = y_1$. De (2.2) uma análise similar a feita no primeiro caso mostra que A, B, C são colineares. \square

2.2 Vetores no plano: a estrutura euclidiana do \mathbb{R}^2

O \mathbb{R}^2 representa o conjunto dos pares numéricos (x, y) , com $x, y \in \mathbb{R}$. Visto inicialmente no Ensino Fundamental, sob a denominação de coordenadas cartesianas, é utilizado na interpretação geométrica de análise de gráficos, inicialmente nas equações do primeiro grau com duas variáveis até as funções. Já no Ensino Médio, recebem um tratamento mais abrangente, pois sofrem associações de novos elementos, provocando um estudo mais intrigante, favorecendo a busca por novos conhecimentos e proporcionando um maior aprofundamento na Geometria Analítica.

Ao chegar no Ensino superior, observa-se que o \mathbb{R}^2 é denotado de forma distinta as vistas anteriormente, com aplicações de novos contextos voltados a Álgebra Linear, alterando principalmente a interpretação, apesar de serem trabalhados com os mesmos elementos e os mesmos conjuntos, onde os elementos do \mathbb{R}^2 passam a ser chamados de vetores e os números reais, escalares. Desta forma, temos que as operações de adição e multiplicação por números reais formam, basicamente, a idéia de espaço vetorial, que é o princípio básico da Álgebra Linear.

Definição 2.2.1. *Um conjunto V será dito um espaço vetorial real se possui uma operação de adição com as propriedades:*

A1 associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, para todos $u, v, w \in V$;

A2 comutativa: $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$;

A3 possui elemento neutro: existe $0 \in V$, tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$;

A4 possui simétricos: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

Além disso, existe uma operação chamada de multiplicação por escalares reais, que associa a um elemento $a \in \mathbb{R}$ e a um elemento $v \in V$, um elemento $av \in V$, satisfazendo as seguintes propriedades:

ME1 $a(u + v) = au + av$, para todos $a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$;

ME2 $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$, para todos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$;

ME3 $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$, para todos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$;

ME4 $1v = v$, para todo $v \in V$.

Definidas em \mathbb{R}^2 as operações de adição e multiplicação por escalar por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $a(x, y) = (ax, ay)$, para $a \in \mathbb{R}$, segue que \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial real onde o elemento neutro da adição é o vetor $(0, 0)$ e o simétrico de (x_1, x_2) é o vetor $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Assim, o \mathbb{R}^2 munido dessas duas operações possui uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Além da estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} , possui uma estrutura adicional, a qual explicitaremos em seguida.

Definição 2.2.2. *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno em V é uma função que a cada par de vetores u e w em V associa um número real, denotado por $\langle u, v \rangle$, que satisfaz as seguintes condições para quaisquer vetores u, v e w de V e qualquer número real k :*

PI₁ $\langle v, v \rangle \geq 0$;

PI₂ $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

PI₃ $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

PI₄ $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

PI₅ $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$.

O produto escalar de \mathbb{R}^2 definido por $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ satisfaz os axiomas PI₁, PI₂, PI₃, PI₄ e PI₅, de modo que ele define um produto interno em \mathbb{R}^2 . De fato, a noção de produto interno generaliza a noção de produto escalar em \mathbb{R}^2 e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos geométricos como por exemplo a norma, a distância e o ângulo.

Um espaço vetorial real munido de um produto interno é chamado de espaço vetorial euclidiano. Deste modo, o \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial euclidiano.

Se V é um espaço euclidiano, a norma ou comprimento de um vetor $\vec{v} \in V$ é definida como o número real não negativo dado por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}. \quad (2.3)$$

Se $\|\vec{v}\| = 1$ dizemos que \vec{v} é um vetor unitário. Neste caso, diz-se que o vetor \vec{v} está normalizado.

Chamamos de distância entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} em V , o número real $d(\vec{u}, \vec{v})$ definido por

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Exemplo 2.2.3. *Sejam $\vec{u} = (3, -2)$ e $\vec{v} = (-4, 1)$ vetores do \mathbb{R}^2 . Vamos determinar a distância entre \vec{u} e \vec{v} . Usando a definição de distância, temos que*

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(3 + 4, -2 - 1)\|.$$

donde

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(3 + 4)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{58}.$$

Para definirmos o ângulo no \mathbb{R}^2 precisaremos mostrar que o ângulo entre vetores é definido a partir do ângulo entre segmentos ou retas que contém os vetores, como será mostrado na figura 2.3.

Definição 2.2.4. *Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos do plano. Dizemos que o ângulo formado entre \vec{u} e \vec{v} é o menor ângulo entre os segmentos \overline{OP} e \overline{OQ} que representam, respectivamente, \vec{u} e \vec{v} , que indicamos por $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ a medida do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .*

Observação 2.2.5. *i) Os ângulos são medidos em radianos ou em graus, onde π rad = 180° ;*

ii) $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$ ou $0^\circ \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$

iii) $\left\{ \begin{array}{l} \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}), \\ \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}), \end{array} \right.$ De acordo com o produto interno de vetores do plano chegamos a definição: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ então

$$\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right), \quad (2.5)$$

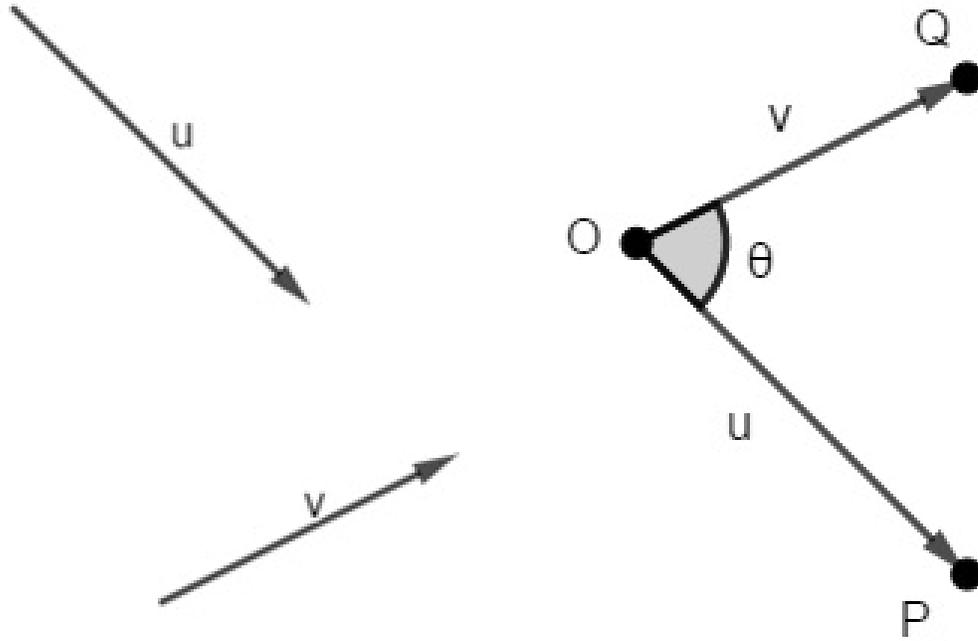


Figura 2.3: Medida do ângulo agudo entre dois vetores.

donde temos que

$$\left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| \cos \theta = \cos \theta \quad (2.6)$$

o que implica em

$$\theta = \arccos \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle \quad (2.7)$$

o que nos permite afirmar que o ângulo θ entre dois vetores (ou segmentos) do plano é dado pelo produto interno de vetores e a partir de PI_1 da definição do produto interno podemos afirmar que θ tem valor não negativo.

Proposição 2.2.6. Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são dois vetores do plano então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Prova. Sendo um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} nulo, temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ como também $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Por outro lado, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com

$P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$. Então:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{v} - \vec{u} \\ &= (c - a, d - b)\end{aligned}$$

e sendo $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ e aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OPQ , obtemos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Daí

$$\begin{aligned}2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - ((c - a)^2 + (d - b)^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - c^2 - 2ac - a^2 - d^2 - 2bd - b^2 \\ &= 2(ac + bd)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = (ac + bd)$$

nos permite medir ângulo entre dois vetores a partir de suas coordenadas. \square

2.3 Equações da reta

2.3.1 Equações Paramétricas

Seja r uma reta que passa pelos pontos A e B e sendo P um ponto qualquer do \mathbb{R}^2 , teremos que o ponto P pertencerá a reta r se e somente se

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

com $t \in \mathbb{R}$. À medida que o parâmetro t varia o ponto P vai assumindo os valores que determinam a reta r , que podemos escrever da seguinte maneira:

$$P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Se A e P têm coordenadas (x_1, y_1) e (x, y) , respectivamente, e o vetor $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, então

$$P = (x, y) \in r \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b), t \in \mathbb{R}$$

o que implica em

$$r : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

As equações (2.8) e (2.9) são denominadas de equações paramétricas da reta r .

2.3.2 Equação Cartesiana

Seja r a reta que passa pelo ponto A de coordenadas (x_1, y_1) e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (a, b)$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$. Então

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (x - x_1, y - y_1), (a, b) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) \\ &\Leftrightarrow ax + by = ax_1 + by_1. \end{aligned}$$

Fazendo $c = ax_1 + by_1$ temos que

$$ax + by = c, \quad (2.10)$$

que é denominada de equação cartesiana da reta r .

Observação 2.3.1. Veremos outra forma de chegar na equação (2.10). Dados os pontos A e B distintos e de coordenadas iguais a (x_1, y_1) e (x_2, y_2) respectivamente, e sendo r a reta determinada pelos pontos A e B e $P = (x, y) \in r$, então observa-se que os pontos A , B e P estão alinhados, assim pela Proposição 2.1.1 segue que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Após o cálculo do determinante obtemos

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Fazendo $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$, temos a equação

$$ax + by = c, \tag{2.11}$$

como estávamos procurando.

2.3.3 Equação na forma reduzida

A partir da equação cartesiana

$$ax + by = c,$$

ao determinarmos o valor de y obtemos a equação

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$ obtemos

$$y = mx + q, \tag{2.12}$$

que é denominada de equação de r na forma reduzida. O número real m é denominado coeficiente angular e q de coeficiente linear.

Capítulo 3

Aplicações dos números complexos à geometria analítica plana

Neste capítulo veremos algumas das aplicações dos números complexos no estudo da geometria plana.

3.1 Estudo dos pontos via números complexos

Sabemos que um ponto P de coordenadas (x, y) pode ser representado pelo número complexo $z = x + iy$, assim é natural pensar que é possível usar os números complexos para estudar geometria plana. Uma pergunta natural é sobre o ganho desta abordagem. Neste ponto, lembro que os números complexos têm uma estrutura natural de corpo o que possibilita por exemplo uma divisão, algo que não é possível com pontos, ou seja, existem divisões de números complexos mas não existe uma divisão natural de pontos do \mathbb{R}^2 . Podemos enunciar propriedades geométricas usando condições algébricas sobre os números complexos que representam pontos do plano.

3.1.1 Cálculo da distância entre dois pontos

Apesar de imediato, veremos como calcular a distância entre dois pontos do plano usando números complexos.

Proposição 3.1.1. *Dados dois pontos P_1 e P_2 do \mathbb{R}^2 representados respectivamente pelos números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, temos que a distância entre*

esses pontos dada por:

$$d(P_1, P_2) = |z_1 - z_2|.$$

Prova. Ao usarmos as definições de módulo de um número complexo e de distância entre dois pontos do \mathbb{R}^2 temos que

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i)| \\ &= |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\ &= d(P_1, P_2), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

3.1.2 Cálculo do ponto médio de um segmento

A próxima proposição mostra como podemos usar números complexos para calcular o ponto médio de um segmento de reta.

Proposição 3.1.2. Dado um segmento de reta que une dois pontos P_1 e P_2 , representados respectivamente pelos números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, temos que o ponto médio deste segmento é representado pelo número complexo

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Prova. Basta observar que

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)}{2} + \frac{(b_1 + b_2)i}{2}, \end{aligned}$$

assim z_m representa o ponto cujas coordenadas coincidem com as coordenadas do ponto médio do segmento de reta que une dois pontos P_1 e P_2 . \square

3.1.3 Condições para alinhamento

A próxima proposição mostra uma condição para alinhamento de três pontos do plano usando números complexos.

Proposição 3.1.3. Três pontos do \mathbb{R}^2 representados pelos números complexos z , w e t estão alinhados se e somente se

$$\frac{t - z}{w - z} \in \mathbb{R}.$$

Prova. Se os números complexos z , w e t representam respectivamente os pontos alinhados P , Q e R então o ângulo θ entre os vetores \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{QR} só pode ser igual a 0 ou π , o que nos permite afirmar que:

$$\arg\left(\frac{t - z}{w - z}\right) = 0$$

ou

$$\arg\left(\frac{t - z}{w - z}\right) = \pi$$

que é equivalente a

$$\frac{t - z}{w - z} \in \mathbb{R}.$$

Este número será positivo se $\theta = 0$ e negativo se para $\theta = \pi$.

Reciprocamente se

$$\frac{t - z}{w - z} = k \in \mathbb{R}$$

então $\arg(k) = 0$ ou π . Em qualquer caso temos que $\sin \theta = 0$, o que acarreta em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, de modo a obter que os números complexos z , w e t estão alinhados.

□

Observação 3.1.4. Veremos outra demonstração de uma das implicações da Proposição 3.1.3 de modo direto, sem usar a noção de ângulo.

Se os pontos representados por $z = a + bi$, $w = c + di$ e $t = e + fi$ estiverem alinhados então o complexo $t - z$ deve ser um múltiplo do complexo $w - z$, ou seja, existe um k tal que

$$t - z = k(w - z).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(e + fi) - (a + bi) &= k[(c + di) - (a + bi)] \\(e - a) + (f - b)i &= k[(c - a) + (d - b)i] \\(e - a) + (f - b)i &= k(c - a) + k(d - b)i\end{aligned}$$

o que por sua vez implica em

$$e - a = k(c - a) \quad e \quad f - b = k(d - b)$$

e portanto

$$\frac{e - a}{c - a} = k \quad e \quad \frac{f - b}{d - b} = k$$

ou seja,

$$\frac{e - a}{c - a} = \frac{f - b}{d - b}$$

que é a condição de alinhamento.

Corolário 3.1.5. Três pontos do \mathbb{R}^2 representados pelos números complexos z , w e t estão alinhados se e somente se

$$\frac{t - z}{w - z} = \frac{\bar{t} - \bar{z}}{\bar{w} - \bar{z}}.$$

Prova. De fato, se

$$k = \frac{t - z}{w - z}$$

então, da proposição anterior, temos que os três pontos estão alinhados se e somente se $k \in \mathbb{R}$, o que ocorre se e somente se $k = \bar{k}$. Mas usando propriedades do conjugado de um número complexo temos que

$$\bar{k} = \frac{\bar{t} - \bar{z}}{\bar{w} - \bar{z}},$$

donde segue a prova do corolário. \square

3.2 Estudo das retas no plano via números complexos

A partir da condição de alinhamento de três pontos, visto no corolário 3.1.5, fica claro que um ponto representado por um número complexo z está na reta que passa por dois pontos representados pelos números complexos w e t se e somente se

$$\frac{z - w}{t - w} = \frac{\bar{z} - \bar{w}}{\bar{t} - \bar{w}}, \quad (3.1)$$

que corresponde a

$$\bar{z}(t - w) - z(\bar{t} - \bar{w}) = \bar{w}t - w\bar{t}. \quad (3.2)$$

A equação 3.2 descreve a reta que passa por dois pontos representados pelos números complexos w e t .

Observação 3.2.1. No caso particular em que $|w| = |t| = 1$ podemos escrever a equação 3.2 na forma:

$$z + wt\bar{z} = w + t. \quad (3.3)$$

Fazendo $A = t - w$, $B = \bar{t} - \bar{w}$ e $C = w\bar{t} - \bar{w}t$, podemos reescrever a equação 3.2 na forma:

$$A\bar{z} - Bz + C = 0.$$

Note que $B = \bar{A}$ e que $C = -\bar{C}$, donde temos que C é um imaginário puro.

Ao calcular o determinante abaixo

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \\ t & \bar{t} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

percebemos que as equações (3.2) e (3.4) são equivalentes. Dessa forma, destacamos que a equação da reta que passa pelos pontos representados por w e t deverá ser obtida através da equação (3.4).

3.2.1 Equação paramétrica

Veremos agora como fica as equações paramétricas de uma reta usando a linguagem dos números complexos.

Proposição 3.2.2. *Sejam z_1 e z_2 dois números complexos quaisquer, a reta que passa pelos pontos que esses números representam é dada por*

$$z(t) = z_1(1-t) + z_2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Prova. *Se os números complexos z_1 , z_2 e z representam pontos colineares então existe $t \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1),$$

assim,

$$\begin{aligned} z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \\ &= z_1 - z_1t + z_2t \\ &= z_1(1-t) + z_2t, \end{aligned}$$

então temos que

$$z(t) = z_1(1-t) + z_2t$$

é a equação complexa que define a reta que passa por dois pontos no plano complexo. \square

3.2.2 Divisão proporcional de um segmento entre dois números complexos

Veremos na próxima proposição como usar os números complexos para dividir um segmento de reta em partes proporcionais.

Proposição 3.2.3. *Um número complexo z divide o segmento com extremidades em z_1 e z_2 em partes proporcionais a e b se e somente se*

$$z = \frac{b}{a+b}z_1 + \frac{a}{a+b}z_2.$$

Prova. *Sejam z_1 e z_2 números complexos que determinam o segmento $\overline{z_1z_2}$ que contem o número complexo z o qual divide o segmento $\overline{z_1z_2}$ em partes proporcionais a e b .*

Como os números complexos z , z_1 e z_2 são colineares e z divide o segmento com extremidade em z_1 e z_2 na proporção de a para b , temos que:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{a}{b}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} b(z - z_1) &= a(z_2 - z) \\ bz - bz_1 &= az_2 - az \\ az + bz &= bz_1 + az_2 \\ z(a + b) &= bz_1 + az_2 \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$z = \frac{b}{a+b}z_1 + \frac{a}{a+b}z_2,$$

como queríamos demonstrar. \square

3.2.3 Condição para perpendicularidade

A próxima proposição fornece uma condição para perpendicularidade de duas retas usando números complexos.

Proposição 3.2.4. A reta r que passa por z_1 e z_2 é ortogonal a reta s que passa por z_3 e z_4 se e somente se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \quad (3.6)$$

for imaginário puro.

Prova. Sendo $r \perp s$ então o ângulo formado pelos números complexos $z_2 - z_1$ e $z_4 - z_3$ será igual a $\pm \frac{\pi}{2}$, que é equivalente a

$$\text{Arg} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

o que ocorre se e somente se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$$

for imaginário puro. \square

3.2.4 Equação da reta perpendicular e da mediatriz

Dois conceitos muito importantes quando estudamos geometria analítica são as noções de perpendicularidade entre retas e de mediatriz de um segmento. Nesta seção mostraremos como efetuar seus calculos usando a linguagem dos números complexos.

Proposição 3.2.5. *Seja r a reta que passa por z_1 e z_2 . A equação da reta s que passa por z_3 e é perpendicular à reta r é dada*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\bar{z}(z_2 - z_1) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1). \quad (3.7)$$

Prova. Como $r \perp s$, então pela Proposição 3.2.4 temos que z está em s se e somente se

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$$

for um imaginário puro, donde podemos concluir

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0,$$

que corresponde a

$$\bar{z}(z_2 - z_1) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1), \quad (3.8)$$

como queríamos demonstrar. \square

Seja r é a reta que passa por z_1 e z_2 . A mediatriz do segmento que passa por z_1 e z_2 é a reta perpendicular a r que passa pelo seu ponto médio

$$z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Por conseguinte, fazendo o uso da Proposição 3.2.5 temos que a equação da reta mediatriz é dada por

$$\bar{z}(z_2 - z_1) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = \frac{z_1 + z_2}{2}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}(z_2 - z_1)$$

ou seja

$$\bar{z}(z_2 - z_1) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2. \quad (3.9)$$

3.3 Congruência e semelhança de triângulos via números complexos

Quando damos início ao estudo das figuras planas, duas das principais abordagens sobre este tema são a semelhança e congruência de figuras geométricas planas, e nos triângulos não poderia ser diferente, principalmente por serem estruturas básicas a este conteúdo matemático, por estar ligada a todas as outras formas geométricas, então, antes de expressarmos o conteúdo sobre semelhança de triângulos relacionado aos números complexos, estipularemos as seguintes tratos.

Definição 3.3.1. Sendo os triângulos ABC e MNO , cujos vértices são números complexos, dizemos que:

1. Os triângulos são orientados se somente se seus vértices são especificados em ordem, que pode ser positiva (sentido ant-horário) ou negativa (sentido horário).
2. Os triângulos possuem a mesma orientação se os mesmos estiverem denotados no sentido horário ou no anti-horário.
3. Os triângulos possuem orientações inversas se os mesmos tiverem com orientações diferentes, ou seja, uma horária e a outra anti-horária.
4. Os triângulos são chamados congruentes quando os seus lados e os seus ângulos são congruentes, ou seja, se correspondem, ou seja,

$$\Delta ABC \equiv \Delta MNO \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} \overline{AB} \equiv \overline{MN} & \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MO} & \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} & \widehat{C} \equiv \widehat{O} \end{array} \right)$$

5. Os triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes forem congruente e os lados forem proporcionais. Essa razão entre lados correspondentes de triângulos semelhantes é chamada de razão de semelhança.

Observação 3.3.2. As relações de congruência e de semelhança entre triângulos são reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, elas definem relações de equivalência.

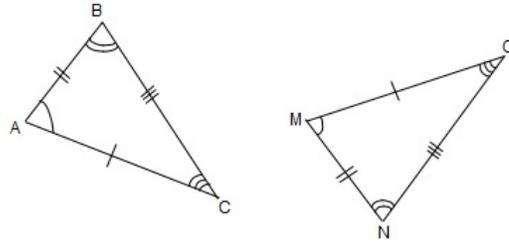


Figura 3.1: Triângulos congruentes

3.3.1 Congruência de triângulos

Por definição dois triângulos são congruentes se eles têm ordenadamente os três lados e os três ângulos iguais. No entanto, com o auxílio de alguma propriedades dos triângulos podemos verificar se dois triângulos são congruentes utilizando condições mínimas, conforme casos exibidos a seguir.

Para testar a congruência de dois triângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , basta lembrar que o comprimento de um dos lados de um triângulo é dado pelo módulo da diferença dos números complexos que representam os vértices, por exemplo,

$$\overline{AB} = d(A, B) = |z_2 - z_1|,$$

e que o ângulo correspondente a um vértice é o ângulo entre os dois segmentos que passam por este ponto, por exemplo, \hat{A} é o ângulo entre os números complexos $z_2 - z_1$ e $z_3 - z_1$, que conforme visto na definição 1.6.1 é dado por

$$\hat{A} = \theta(z_2 - z_1, z_3 - z_1) = \text{Arg} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right).$$

Com essas considerações e usando uma das condições mínimas listadas a seguir, podemos checar a congruência de dois triângulos utilizando números complexos.

Primeiro caso - LAL

Proposição 3.3.3. *Se dois triângulos possuem ordenadamente dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes, então eles são congruentes. Em particular*

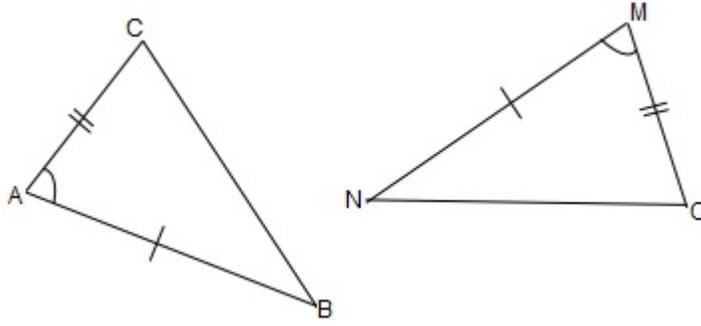


Figura 3.2: Caso LAL

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MO} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

No caso de dois triângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , se $|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2|$, $\theta(z_2 - z_1, z_3 - z_1) = \theta(w_2 - w_1, w_3 - w_1)$ e $|z_1 - z_3| = |w_1 - w_3|$ então $\Delta ABC \equiv \Delta MNO$.

Prova. A demonstração consiste em observar que

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MO} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{O} \end{cases}$$

Assim concluímos que os três ângulos e os três lados são congruentes.

Utilizando o caso LAL podemos estabelecer uma condição de congruência de triângulos retângulos.

Corolário 3.3.4. Se um triângulo possui dois lados congruentes, então os ângulos opostos a eles são congruentes.

Prova. Considerando os triângulos ΔABC e ΔACB , associaremos a A, B e C , na devida ordem, A, C e B , logo temos

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{AC} \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB} \\ \overline{AC} \equiv \overline{AB} \end{cases}$$

o que implica, pelo caso LAL,

$$\Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{C}$$

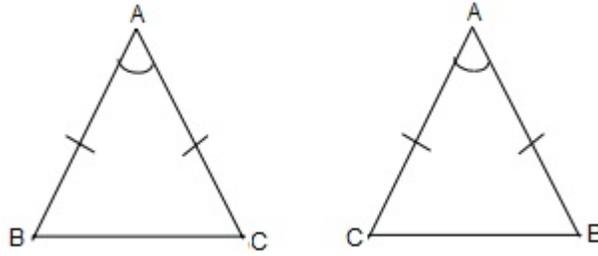


Figura 3.3: $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ (Triângulos Isósceles)

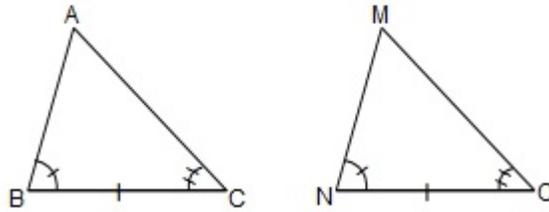


Figura 3.4: Caso ALA

Segundo caso - ALA

Proposição 3.3.5. *Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes um lado e dois ângulos a ele adjacentes, então eles são congruentes. Nos triângulos ΔABC e ΔMNO os ângulos adjacentes ao lado BC são \widehat{B} e \widehat{C} e ao lado NO são \widehat{N} e \widehat{O} respectivamente, assim,*

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{O} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

No caso de dois triângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , se $\theta(z_1 - z_2, z_3 - z_2) = \theta(w_1 - w_2, w_3 - w_2)$, $|z_2 - z_3| = |w_2 - w_3|$ e $\theta(z_1 - z_3, z_2 - z_3) = \theta(w_1 - w_3, w_2 - w_3)$ então $\Delta ABC \equiv \Delta MNO$.

Prova. *Neste caso devemos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{MN}$, desse modo recairemos no primeiro caso. Pelo postulado do transporte de segmento, obtemos na semi-reta NM um ponto X tal que*

$$\overline{NX} \equiv \overline{BA}, \tag{3.10}$$

temos que

$$\overline{BC} \equiv \overline{NO} \quad (3.11)$$

$$\widehat{B} \equiv \widehat{N} \quad (3.12)$$

$$\overline{BA} \equiv \overline{NM}, \quad (3.13)$$

que pelo caso LAL implica em

$$\Delta ABC \equiv \Delta MNO$$

que por sua vez resulta em

$$B\widehat{C}A \equiv N\widehat{O}M \quad (3.14)$$

Da hipótese temos que $B\widehat{C}A \equiv N\widehat{O}M$, com (3.14) $B\widehat{C}A \equiv N\widehat{O}X$ e como o postulado do transporte de ângulos, ocorre que \overline{NM} e $\overline{OX} = \overline{OM}$ que se interceptam em um único ponto $X = M$.

De $X \equiv M$, com (3.10), verifica-se que $\overline{NM} \equiv \overline{BA}$.

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BA} \equiv \overline{NM} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO$$

Terceiro caso - LLL

Proposição 3.3.6. *Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes. Em outras palavras,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MO} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

No caso de dois triângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , se $|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2|$, $|z_1 - z_3| = |w_1 - w_3|$ e $|z_2 - z_3| = |w_2 - w_3|$ então $\Delta ABC \equiv \Delta MNO$.

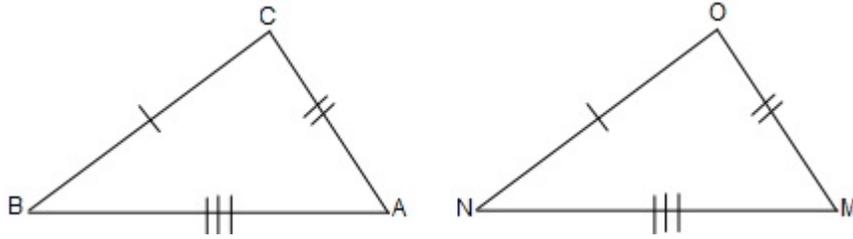


Figura 3.5: Caso LLL

Prova. *Pelos postulados do transporte de ângulos e de segmentos obtemos o ponto X de modo que:*

$$\widehat{XMN} \equiv \widehat{CAB} \quad (3.15)$$

$$\overline{MX} \equiv \overline{AC} \quad (3.16)$$

sendo X um ponto do semiplano oposto ao de C em relação à reta MN .

De (3.16) e da hipótese, temos:

$$\overline{MX} \equiv \overline{MO}. \quad (3.17)$$

Sendo D o ponto de interseção entre \overline{OX} e a reta MN .

Da hipótese, (3.15) e (3.16), e pelo primeiro caso de congruência (LAL), temos que

$$\triangle ABC \equiv \triangle MNX \Rightarrow \overline{XN} \equiv \overline{CB}$$

que junto com a hipótese, determina

$$\overline{XN} \equiv \overline{ON}, \quad (3.18)$$

de (3.17), temos que $\triangle MOX$ é isósceles de base \overline{OX} , então

$$M\hat{O}X \equiv M\hat{X}O, \quad (3.19)$$

e de (3.18), implica em que $\triangle NOX$ é isósceles de base \overline{OX} , então

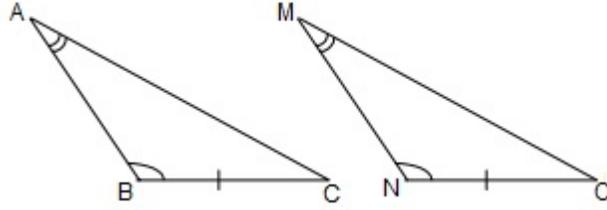


Figura 3.6: Caso LAA

$$N\hat{O}X \equiv N\hat{X}O, \quad (3.20)$$

Por excesso ou por falta de (3.19) e (3.20), obtém-se:

$$M\hat{O}N \equiv M\hat{X}N \quad (3.21)$$

e de (3.17), (3.21) e (3.18), temos que

$$\Delta MNO \equiv \Delta MNX \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

Quarto caso - LAA

Proposição 3.3.7. *Se dois triângulos contêm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes. Em particular,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} \equiv \overline{NO} \\ \hat{B} \equiv \hat{N} \\ \hat{A} \equiv \hat{M} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

No caso de dois triângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , se $|z_2 - z_3| = |w_2 - w_3|$, $\theta(z_1 - z_2, z_3 - z_2) = \theta(w_1 - w_2, w_3 - w_2)$ e $\theta(z_3 - z_1, z_2 - z_1) = \theta(w_3 - w_1, w_2 - w_1)$ então $\Delta ABC \equiv \Delta MNO$.

Prova. *Existem três possibilidades para \overline{AB} e \overline{MN} , que são elas:*

- $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$

- $\overline{AB} < \overline{MN}$
- $\overline{AB} > \overline{MN}$

Da primeira possibilidade, juntamente com o primeiro caso de congruência (LAL), temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO$$

Na segunda possibilidade, com o auxílio de um ponto D na semi-reta \overrightarrow{BA} , e também do caso de congruência (LAL), temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{DB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO$$

logo obtemos $\widehat{D} \equiv \widehat{A}$, que, pela hipótese, implica em

$$\widehat{A} \equiv \widehat{M}$$

o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no triângulo ΔADC . No entanto a segunda possibilidade não satisfaz.

Na terceira possibilidade também verifica-se um absurdo, pelo mesmo motivo da diferença que D estaria entre A e B .

Portanto, só pode ocorrer na primeira possibilidade, logo:

$$\Delta ABC \equiv \Delta MNO. \tag{3.22}$$

Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Proposição 3.3.8. *Se dois triângulos retângulos possuem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes. Em particular,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \overline{BC} \equiv \overline{NO} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO.$$

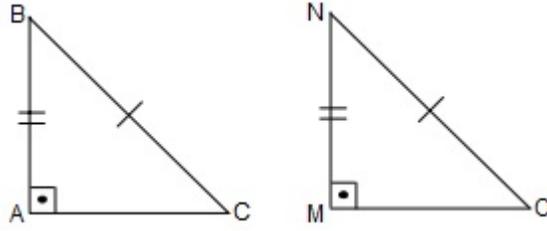


Figura 3.7: $\triangle ABC \equiv \triangle MNO$ (Triângulos retângulos)

No caso de dois triângulos retângulos ABC com vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 , e MNO com vértices em w_1, w_2 e w_3 , se $\theta(z_3 - z_1, z_2 - z_1) = \theta(w_3 - w_1, w_2 - w_1)$, $|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2|$ e $|z_2 - z_3| = |w_2 - w_3|$ então $\triangle ABC \equiv \triangle MNO$.

Prova. Tomemos um ponto D na semi-reta oposta à semi-reta \overrightarrow{MO} de modo que $\overline{MD} \equiv \overline{AC}$ (postulado do transporte de segmento). Logo pelo caso de congruência (LAL), temos:

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AC} \equiv \overline{MD} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle MND$$

o que implica em

$$\overline{BC} \equiv \overline{ND} \quad (3.23)$$

e

$$\widehat{C} \equiv \widehat{D} \quad (3.24)$$

De (3.23) e da hipótese, temos que

$$\overline{NO} \equiv \overline{ND} \Rightarrow \triangle NOD$$

que é isósceles de base \overline{ND} que implica em

$$\widehat{O} \equiv \widehat{D} \quad (3.25)$$

De (3.24) e (3.25), temos $\widehat{C} \equiv \widehat{O}$.

Considerando agora os triângulos ABC e MNO juntamente com o quarto caso de congruência de triângulos (LAA), temos:

$$\begin{cases} \overline{BC} \equiv \overline{NO} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{O} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{M} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNO,$$

completando a prova de que os três ângulos e os três lados são ordenadamente congruentes.

3.3.2 Semelhança de triângulos

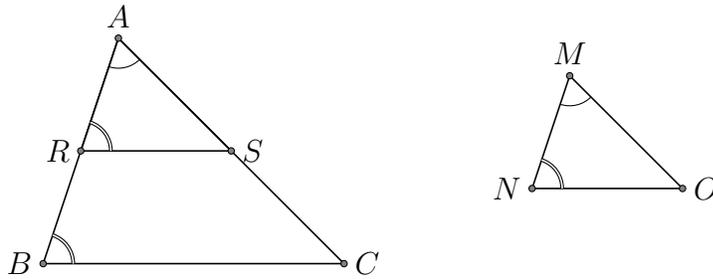
Veremos agora condições para semelhança de triângulos. Por definição dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados forem proporcionais. No entanto, para checar a semelhança de dois triângulos podemos checar uma das condições mais simples, listadas a seguir:

- **Caso AAA (ângulo/ ângulo/ ângulo):** os ângulos de um triângulo forem respectivamente congruentes aos ângulos correspondentes de outro triângulo;
- **Caso LAL (lado/ângulo/lado):** As medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente proporcionais às medidas de dois lados correspondentes de outro triângulo e os ângulos determinados por estes lados são congruentes;
- **Caso AA (ângulo/ângulo):** Dois triângulos têm dois ângulos internos correspondentes congruentes;
- **Caso LLL (lado/lado/lado):** Se as medidas dos lados de dois triângulos são respectivamente proporcionais.

Observação 3.3.9. Devido a simplicidade do **Caso AAA** e do **Caso LLL**, veremos uma demonstração.

Demonstração do caso AAA: Vamos supor que os triângulos ABC e MNO não são congruentes e que $\overline{MN} < \overline{AB}$.

Seja R um ponto de \overline{AB} , tal que $\overline{AR} \equiv \overline{MN}$ e o triângulo ARS com $\widehat{R} \equiv \widehat{O}$ e S um ponto do lado \overline{AC} . Então, temos que



$$\begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{M} \\ \overline{AR} \equiv \overline{MN} \\ \widehat{R} \equiv \widehat{N} \end{cases}$$

o que implica no caso de semelhança (ALA), logo

$$\Delta ARS \equiv \Delta MNO.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{N} \\ \widehat{N} \equiv \widehat{R} \end{cases}$$

logo

$$\widehat{B} \equiv \widehat{R} \Rightarrow \overline{RS} // \overline{BC},$$

então

$$\Delta ABC \equiv \Delta ARS.$$

Portanto, conclui-se que

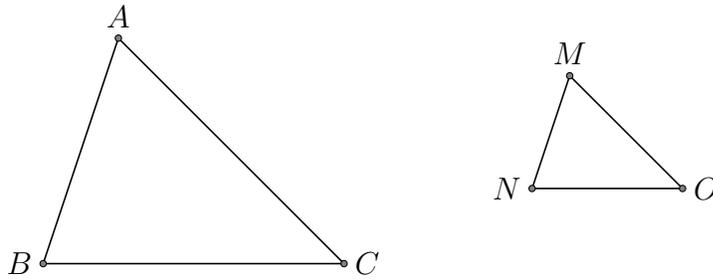
$$\Delta ABC \equiv \Delta ARS$$

pelo caso de semelhança ângulo, ângulo (AA). \square

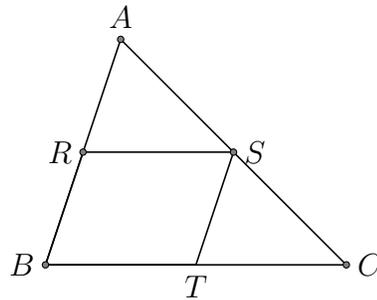
Demonstração do Caso LLL: *Sejam ABC e MNO dois triângulos, tais que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NO}}.$$

Mostraremos que $\Delta ABC \sim \Delta MNO$.



Sendo



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NO}} = k,$$

temos que $\overline{AB} = k \cdot \overline{MN}$, $\overline{AC} = k \cdot \overline{MO}$ e $\overline{BC} = k \cdot \overline{NO}$. Tome $k > 1$, sem perda de generalidade, e marque o ponto $R \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AR} = \overline{MN}$.

Sendo S o ponto de interseção da reta que passa por R com o lado AC e que é paralela ao lado BC , pelo **Teorema de Tales** temos que

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k},$$

logo $\overline{AS} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{MO}$.

Traçando, agora, a reta paralela ao lado AB e passa pelo ponto S e que intercepta o segmento BC no ponto T , onde se obtém o quadrilátero $RSTB$ que é um paralelogramo, e outra vez pelo **teorema de Pitágoras**, temos

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k},$$

logo, $\overline{RS} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{NO}$.

A discussão feita acima mostra que $\overline{AR} = \overline{MN}$, $\overline{AS} = \overline{MO}$ e $\overline{RS} = \overline{NO}$, ou seja, $\Delta ABC \sim \Delta MNO$ pelo caso LLL de congruência.

Considere agora dois triângulos ABC e PQR contidos no plano complexo de coordenadas dos vértices, respectivamente, iguais a z_1, z_2 e z_3 , e w_1, w_2 e w_3 . Então, assim como no caso de semelhança, podemos usar propriedades algébricas nos números complexos que representam os vértices dos triângulos para fornecer condições para semelhança.

A proposição a seguir fornece uma condição de simples verificação para semelhança de dois triângulo com vértices no plano complexo.

Proposição 3.3.10. *Considere os triângulos ABC , com vértices em z_1, z_2 e z_3 , e PQR com vértices em w_1, w_2 e w_3 , ambos com mesma orientação. Temos que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ se e somente se*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}. \quad (3.26)$$

Prova. *Pelo caso LAL $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ se e somente se*

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad e \quad \widehat{z_3 z_1 z_2} = \widehat{w_3 w_1 w_2}$$

que é equivalente a

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad e \quad \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right) = \arg \left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right).$$

Devido ao fato dos dois triângulos possuírem a mesma orientação, essas condições são equivalentes a

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1},$$

concluindo assim a demonstração. \square

Observação 3.3.11. *Para que triângulos ABC e PQR sejam semelhantes, no caso em que eles têm orientação oposta, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim_{op} \Delta w_1 w_2 w_3 z_k$, é necessário e suficiente que o triângulo ABC seja semelhante a reflexão do triângulo PQR em relação ao*

eixo x ou ao eixo y . Com efeito, sendo o triângulo PQR de orientação positiva e cujo os seus vértices w_1, w_2 e w_3 , pertencem ao primeiro quadrante do plano complexo. Ao ser feita a sua reflexão em relação ao eixo x ou y , observa-se que a mesma determina um triângulo $P'Q'R'$, de vértices \bar{w}_1, \bar{w}_2 e \bar{w}_3 que possui orientação negativa, logo os triângulos PQR e $P'Q'R'$ são semelhantes e possuem orientações opostas. Portanto os triângulos ABC e $P'Q'R'$ são semelhantes e possuem a mesma orientação.

3.4 Pontos notáveis de um triângulo via números complexos

Nesta seção aplicaremos os números complexos ao cálculo dos pontos notáveis de um triângulo, o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro.

3.4.1 Baricentro

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Proposição 3.4.1. *As três medianas de um triângulo são concorrentes e se encontram em um ponto G , o qual será chamado de baricentro ou centro de massa. O baricentro de um triângulo de vértices nos números complexos z_1, z_2 e z_3 é dado pelo números complexo*

$$G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \quad (3.27)$$

Prova. *Considere o triângulo ΔABC cujas coordenadas dos vértices são z_1, z_2 e z_3 respectivamente. Então a reta suporte da mediana relativa ao lado AB é a reta que passa por C e pelo ponto médio de AB , que é representado por*

$$\frac{z_1 + z_2}{2},$$

portanto, a partir da equação (3.2) temos que a equação da mediatriz é determinada por:

$$\bar{z} \left(z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) - z \left(\bar{z}_3 - \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} \right) = z_3 \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} \right) - \bar{z}_3 \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

ou seja,

$$\bar{z}(2z_3 - z_1 - z_2) - z(2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - \bar{z}_3(z_1 + z_2). \quad (3.28)$$

De modo semelhante obtemos as equações das retas suportes das mediatrizes relativas aos lados AC e BC respectivamente, que são representadas, respectivamente, pelas equações

$$\bar{z}(2z_2 - z_1 - z_3) - z(2\bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_3) = z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_3) - \bar{z}_2(z_1 + z_3) \quad (3.29)$$

e

$$\bar{z}(2z_1 - z_2 - z_3) - z(2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3) = z_1(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) - \bar{z}_1(z_2 + z_3). \quad (3.30)$$

Após a determinação das equações das retas suportes das mediatrizes do triângulo, observa-se que qualquer uma delas pode ser obtida pela combinação linear das outras duas. Por conseguinte, a intersecção entre duas delas pertence também a terceira. Porém, as três medianas interceptam-se em um único ponto.

Para determinarmos a equação paramétrica da mediana relativa ao lado AB , usaremos a equação (3.4) e obtemos

$$z = (1 - t)z_3 + t\frac{z_1 + z_2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.31)$$

e fazendo $t = \frac{2}{3}$, temos:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \quad (3.32)$$

e como as demais equações das medianas relativas aos lados AC e BC são simétricas então z também pertence a elas. \square

A Proposição 3.4.1 mostra que quando usamos a teoria dos números complexos o cálculo do baricentro de um triângulo é feito simplesmente calculando a média aritmética dos seus vértices.

3.4.2 Incentro

Uma bissetriz de um triângulo é um segmento de reta que liga um dos vértices do triângulo a outra extremidade do lado oposto a esse vértice, sendo que ela divide ao

meio o ângulo correspondente ao vértice.

Proposição 3.4.2. *As três bissetrizes de um triângulo são concorrentes e se encontram em um ponto, o qual será denominado de incentro. As coordenadas do incentro do triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ e lados medindo \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} é dado pela média ponderada dos vértices tendo como pesos os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , isto é,*

$$I = \frac{\overline{BC} \cdot A + \overline{AC} \cdot B + \overline{AB} \cdot C}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}},$$

ou em termos de coordenadas sendo

$$I = (a, b),$$

temos que:

$$a = \frac{\overline{BC} \cdot x_1 + \overline{AC} \cdot x_2 + \overline{AB} \cdot x_3}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}} \quad (3.33)$$

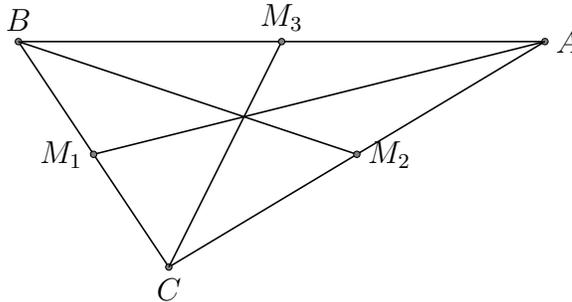
e

$$b = \frac{\overline{BC} \cdot y_1 + \overline{AC} \cdot y_2 + \overline{AB} \cdot y_3}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}}. \quad (3.34)$$

Em particular para um triângulo de vértices nos números complexos z_1 , z_2 e z_3 , o incentro é o número complexo dado por

$$I = \frac{|z_2 - z_3|z_1 + |z_1 - z_3|z_2 + |z_1 - z_2|z_3}{|z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| + |z_1 - z_2|}.$$

Prova. No triângulo ABC representamos os pés das bissetrizes baixadas dos vértices do triângulo por M_1 , M_2 e M_3 .



Pelo teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{\overline{AM_3}}{\overline{M_3B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \quad (3.35)$$

logo M_3 divide o lado \overline{AB} em segmentos proporcionais aos lados \overline{AC} e \overline{BC} . No entanto o vetor

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{AB},$$

e como

$$\overline{M_3B} = \frac{\overline{AM_3} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}}$$

então

$$\overline{AM_3} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM_3}}{\overline{AC}} = \overline{AB}$$

o que implica em

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\overline{BC} + \overline{AC}}.$$

Por outro lado, em coordenadas cartesianas, temos

$$(x - x_1, y - y_1) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

o que implica em

$$(x, y) = \left(\frac{\overline{BC}x_1 + \overline{AC}x_2}{\overline{BC} + \overline{AC}}, \frac{\overline{BC}y_1 + \overline{AC}y_2}{\overline{BC} + \overline{AC}} \right)$$

Daí,

$$M_3 = \frac{\overline{BCA} + \overline{ACB}}{\overline{BC} + \overline{AC}}$$

e de modo análogo,

$$M_2 = \frac{\overline{BCA} + \overline{ABC}}{\overline{BC} + \overline{AB}}.$$

Como o vetor \overrightarrow{CI} é um múltiplo de $\overline{CM_3}$ e o vetor \overrightarrow{BI} é um múltiplo de $\overline{BM_2}$, temos:

$$\overrightarrow{CI} = \alpha \overline{CM_3}$$

e

$$\overrightarrow{BI} = \beta \overline{BM_2}$$

Como

$$\overline{CI} + \overline{BI} = \overline{CB},$$

temos que

$$\alpha \overline{CM_3} + \beta \overline{BM_2} = \overline{CB}$$

isto é

$$\alpha (M_3 - C) + \beta (M_2 - B) = (B - C).$$

Como as fórmulas acima independem da origem do sistema de coordenadas, então simplificaremos os cálculos, adotando como a origem do nosso sistema o vértice C , logo $C = (0, 0)$ e ao substituírmos os valores encontrados para M_3 e M_2 , obtemos:

$$\alpha \left(\frac{\overline{BC} \cdot A + \overline{AC} \cdot B}{\overline{BC} + \overline{AC}} \right) - \beta \left(\frac{\overline{BC} \cdot A}{\overline{BC} - \overline{AB}} \right) + \beta B = 0$$

$$\left(\frac{\alpha \overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} - \frac{\beta \overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{AB}} \right) A - \left(\frac{\beta \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} + \beta - 1 \right) B = 0$$

Como $A - C = \overline{CA}$ e $B - C = \overline{CB}$ não são paralelos, logo

$$\left(\frac{\alpha \overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} - \frac{\beta \overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{AB}} \right) = 0 \quad (3.36)$$

e

$$\left(\frac{\beta \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} + \beta - 1 \right) = 0. \quad (3.37)$$

Donde temos que

$$\alpha = \frac{(\overline{BC} + \overline{AC}) \beta}{\overline{AC} + \overline{AB}}$$

e assim chegamos a

$$\beta \frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{\overline{AC} + \overline{AB}}.$$

Como $\overline{BI} = \beta \overline{BM_2}$, logo

$$I = B + \beta (M_2 - B)$$

que por sua vez

$$I = B + \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}} \left(\frac{\overline{BC} \cdot A + \overline{AB} \cdot C}{\overline{BC} + \overline{AB}} - B \right),$$

No entanto, temos que:

$$I = \frac{\overline{BC} \cdot A + \overline{AC} \cdot B + \overline{AB} \cdot C}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}},$$

como queríamos. \square

3.4.3 Ortocentro

Uma altura de um triângulo é uma perpendicular traçada de um vértice até seu lado oposto.

Proposição 3.4.3. *As três alturas de um triângulo ΔABC se interceptam em um único ponto H , denominado de Ortocentro. Se os vértices A , B e C são representados, respectivamente, pelos números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$, e os ângulos internos são respectivamente, α , β e θ , o ortocentro é dado pela média ponderada dos vértices tendo por pesos as $\tan \alpha$, $\tan \beta$ e $\tan \theta$, isto é,*

$$H = \frac{z_1 \tan \alpha + z_2 \tan \beta + z_3 \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta}$$

ou seja, sendo $H = x + iy$, temos

$$x = \frac{x_1 \tan \alpha + x_2 \tan \beta + x_3 \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta} \quad e \quad y = \frac{y_1 \tan \alpha + y_2 \tan \beta + y_3 \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta}.$$

Prova. *A equação da reta suporte da altura relativa ao vértice A e perpendicular ao lado BC , é da forma:*

$$\bar{z}(z_2 - z_3) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + \bar{z}_1(z_2 - z_3). \quad (3.38)$$

A partir disso, por meio analógico, obtemos as demais equações das retas suporte das alturas relativas aos vértices B e C , como mostrado abaixo respectivamente:

$$\bar{z}(z_1 - z_3) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}_2(z_1 - z_3). \quad (3.39)$$

e

$$\bar{z}(z_1 - z_2) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_3(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_3(z_1 - z_2). \quad (3.40)$$

Deste modo observamos que a combinação linear de duas destas será igual a terceira e por isso o encontro de duas delas pertence a terceira, ou melhor, as alturas de um triângulo se cortam em um único ponto.

Vamos considerar um triângulo ABC não retângulo, pois caso contrário a altura coincide com o vértice do ângulo reto.

Sejam H_1 , H_2 e H_3 os pés das alturas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente. Como $BH_2 = \overline{AH_2} \tan \alpha = \overline{H_2C} \tan \theta$, com isso temos que

$$\frac{\overline{AH_2}}{\overline{H_2C}} = \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}.$$

Logo H_2 divide o lado AC em segmentos proporcionais a $\tan \alpha$ e $\tan \theta$. Portanto $\overline{AH_2} + \overline{H_2C} = \overline{AC}$ e como $\overline{H_2C} = \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} \overline{AH_2}$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{AH_2} + \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} \overline{AH_2} = \overline{AC} &\Rightarrow \left(\frac{\tan \alpha + \tan \theta}{\tan \theta} \right) \overline{AH_2} = \overline{AC} \\ &\Rightarrow \overline{AH_2} = \frac{\tan \theta}{\tan \alpha + \tan \theta} \overline{AC}, \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Corolário 3.4.4. O Ortocentro de um triângulo inscrito em um círculo de raio r e de centro na origem do eixo complexo é dado por

$$H = z_1 + z_2 + z_3. \quad (3.41)$$

Prova. De antemão temos que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$, que implica em $\bar{z}_1 = \frac{r^2}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{r^2}{z_2}$ e $\bar{z}_3 = \frac{r^2}{z_3}$ e fazendo a comutação dessas relações e dissociando \bar{z} temos:

$$\bar{z} = r^2 \left(\frac{z}{z_1 z_3} - \frac{z_2}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_2} \right) \quad (3.42)$$

e

$$\bar{z} = r^2 \left(\frac{z}{z_1 z_2} - \frac{z_3}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_3} \right). \quad (3.43)$$

Assim,

$$z = z_1 + z_2 + z_3 \quad (3.44)$$

que é o ponto de encontro das alturas de um triângulo, ou melhor, o ortocentro do triângulo. \square

3.4.4 Circuncentro

Uma mediatriz de um triângulo é uma reta perpendicular a um lado do triângulo que passa pelo seu ponto médio.

Proposição 3.4.5. *As mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto O , denominado de circuncentro do triângulo. O circuncentro (O) de um triângulo de vértices A , B e C é dada pela diferença entre $\frac{3}{2}$ do baricentro e $\frac{1}{2}$ do ortocentro, ou seja, $O = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H$. Se o triângulo ΔABC têm como vértices os números complexos z_1 , z_2 e z_3 então*

$$O = \frac{\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)}{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2)}. \quad (3.45)$$

Prova. Se o triângulo ΔABC têm como vértices os números complexos z_1 , z_2 e z_3 , a equação da mediatriz relativa ao lado AB dada por

$$\bar{z}(A - B) + z(\bar{A} - \bar{B}) = |A|^2 - |B|^2, \quad (3.46)$$

ou seja,

$$\bar{z}(z_1 - z_2) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2. \quad (3.47)$$

Analogamente, obtém-se as demais equações das mediatrizes pertinentes aos lados

AC e BC , o que nos permite obter o sistema

$$\begin{cases} \bar{z}(z_1 - z_2) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ \bar{z}(z_1 - z_3) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = |z_1|^2 - |z_3|^2 \\ \bar{z}(z_2 - z_3) + z(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = |z_2|^2 - |z_3|^2 \end{cases}$$

No sistema acima podemos observar que qualquer uma das equações pode ser obtida a partir da soma das outras duas, por isso acarreta que a interseção de duas destas equações pertence também a terceira. Por conseguinte, concluímos que as mediatrizes de um triângulo possui um único ponto em comum, chamado de circuncentro. Para determinarmos o ponto em comum das mediatrizes, ou seja, o circuncentro, utilizaremos as duas primeiras equações do sistema acima.

De forma que isolamos \bar{z} na primeira equação, ou seja,

$$\bar{z} = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{z_1 - z_2}, \quad (3.48)$$

e substituindo na segunda equação temos:

$$\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2 - z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{z_1 - z_2} (z_1 - z_3) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = |z_1|^2 - |z_3|^2$$

desse modo, temos que

$$z = \frac{\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)}{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2)} \quad (3.49)$$

Pelo resultado obtido, notamos que também será solução satisfatória par a terceira equação. No entanto, conclui-se que as mediatrizes dos triângulo se encontram em um único ponto, isto é, no circuncentro. \square

Observação 3.4.6. Veremos outra demonstração da Proposição 3.4.5 sem usar os números complexos. Suponha um triângulo ABC , não retângulo, e tomemos os pontos os pontos médios M_1 , M_2 e M_3 , respectivamente, dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , verifica-se que

$$M_1 = \frac{B+C}{2}, M_2 = \frac{A+C}{2} \text{ e } M_3 = \frac{A+B}{2}$$

Os ângulos do triângulo $M_1M_2M_3$ são iguais aos do triângulo ABC e também $\overline{M_1M_3} // \overline{AC}$, $\overline{M_2M_3} // \overline{BC}$ e $\overline{M_1M_2} // \overline{AB}$.

Logo as mediatrizes dos lados do ΔABC possuem as alturas do $\Delta M_1M_2M_3$. Portanto o circuncentro O do ΔABC é o ortocentro O do $\Delta M_1M_2M_3$. Logo

$$\begin{aligned} O &= \frac{M_1 \tan \alpha + M_2 \tan \beta + M_3 \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta} \\ &= \frac{\frac{B+C}{2} \tan \alpha + \frac{A+C}{2} \tan \beta + \frac{A+B}{2} \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta} \\ &= \frac{(\tan \beta + \tan \theta) A + (\tan \alpha + \tan \theta) B + (\tan \alpha + \tan \beta) C}{2(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta)} \\ &= \frac{A+B+C}{2} - \frac{A \tan \alpha + B \tan \beta + C \tan \theta}{2(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$O = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H,$$

como queríamos.

Note que quando usamos apenas a teoria de geometria euclideana para demonstrar os resultados, as demonstrações ficam mais axiomatizadas e de compreensão mais difícil para um aluno do ensino médio. o uso dos números complexos permite que as provas fiquem mais algébricas, uma manipulação de propriedades.

3.5 Áreas dos polígonos via números complexos

Neste seção iremos obter a expressão que determinará a área dos polígonos regulares usando números complexos.

3.5.1 Área de um triângulo

Já vimos anteriormente vários resultados sobre triângulos. Buscaremos aqui determinar a área de um triângulo qualquer, levando em consideração os seus vértices e identificando esses como números complexos.

Proposição 3.5.1. Considere $\Delta z_1 z_2 z_3$ um triângulo qualquer no plano complexo.

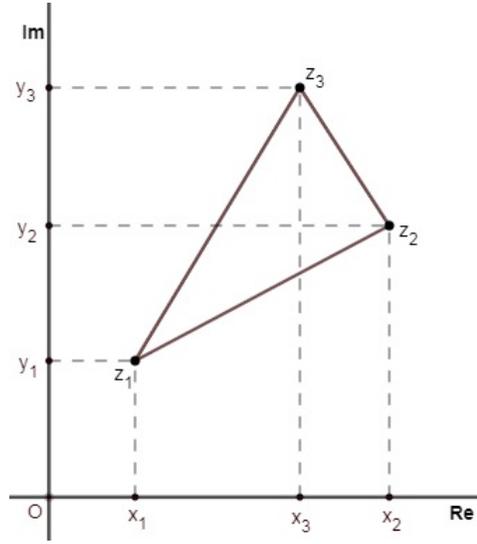


Figura 3.8: Divisão do triângulo em trapézios

Então sua área $A(z_1z_2z_3)$ é dada por

$$A(z_1z_2z_3) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

Prova. Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ e $z_3 = x_3 + y_3i$ três números complexos quaisquer no plano complexo. Notemos que

$$\begin{aligned} A(\Delta z_1z_2z_3) &= A(y_1y_2x_2x_1) + A(y_1x_1x_3y_3) + A(y_2x_2x_3y_3) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_1 + x_3) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 + x_2) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)], \end{aligned}$$

onde $A(y_1y_2x_2x_1)$, $A(y_1x_1x_3y_3)$ e $A(y_2x_2x_3y_3)$ são as áreas dos trapézios conforme Figura 3.8. Agora notemos que

$$\begin{aligned} x_1y_2 - y_1x_2 &= \operatorname{Im}[(x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_1, z_2) = \frac{1}{2}i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2); \\ x_2y_3 - y_2x_3 &= \operatorname{Im}[(x_2 - y_2i)(x_3 + y_3i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_2, z_3) = \frac{1}{2}i(z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3); \\ x_3y_1 - y_3x_1 &= \operatorname{Im}[(x_3 - y_3i)(x_1 + y_1i)] = \operatorname{Im}(\bar{z}_3, z_1) = \frac{1}{2}i(z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1); \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A(\Delta z_1 z_2 z_3) &= \frac{i}{4} (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 + z_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 z_1) \\ &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

No caso em que

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$$

for um número real negativo, devemos tomar o seu módulo. \square

Observação 3.5.2. Observe que aplicando o teorema de Laplace na primeira linha do determinante acima, temos que a área do $\Delta z_1 z_2 z_3$ também pode ser dada por

$$A(\Delta z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \quad (3.50)$$

A fórmula (3.50) será generalizada para um polígono arbitrário de $n \geq 3$ lados.

3.5.2 Área de um polígono

Generalizando as ideias da seção anterior, vamos determinar uma expressão para o cálculo da área de um polígono convexo formado por n pontos representados por números complexos.

Proposição 3.5.3. A área de um polígono convexo com vértices $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ é dado por

$$A(z_1 z_2 \dots z_n) = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right).$$

Prova. Lembremos que a área de um polígono convexo é igual a soma das áreas dos triângulos em que este polígono pode ser decomposto, conforme Figura 3.9. Assim, considerando o polígono convexo $z_1 z_2 \dots z_n$ com os pontos z_1, z_2, \dots, z_n dispostos no

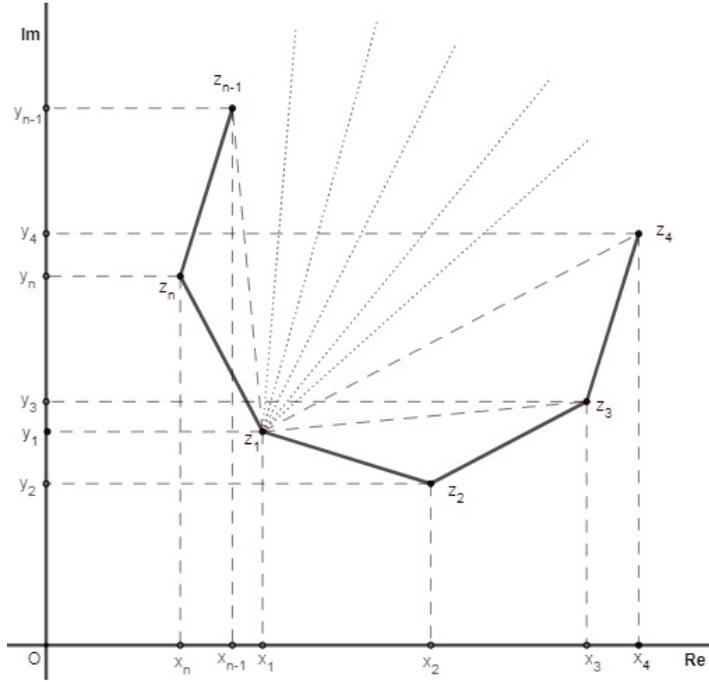


Figura 3.9: Divisão de um polígono em triângulos

sentido anti-horário, temos

$$A(\Delta z_1 z_2 \dots z_n) = A(\Delta z_1 z_2 z_3) + A(\Delta z_1 z_3 z_4) + \dots + A(\Delta z_1 z_{n-1} z_n)$$

onde a área do k -ésimo triângulo $\Delta z_1 z_k z_{k+1}$, conforme expressão (3.50), é dada por

$$A(\Delta z_1 z_k z_{k+1}) = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_k \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{k+1} & z_1 \\ \bar{z}_{k+1} & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} A(z_1 z_2 \dots z_n) &= \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right) \\ &+ \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_4 & z_1 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right) + \dots \\ &+ \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_{n-1} \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_n \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Notemos que o último determinante de $A(z_1 z_k z_{k+1})$ se anula com o primeiro $A(\Delta z_1 z_{k+1} z_{k+2})$. Portanto,

$$A(\Delta z_1 z_2 z_3) = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right), \quad (3.51)$$

conforme queríamos demonstrar. \square

3.5.3 Polígonos regulares

As raízes n -ésimas de um número complexo $z \neq 0$ representam geometricamente os vértices de um polígono regular de n lados. Sabemos também da proposição 3.5.3 que sendo essas raízes representadas por z_0, z_1, \dots, z_{n-1} , a área desse polígono formado por estas raízes é dada por

$$A(\Delta z_0 z_1 \dots z_{n-1}) = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_0 & z_1 \\ \bar{z}_0 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_0 \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_0 \end{vmatrix} \right). \quad (3.52)$$

Para utilizar a fórmula (3.52) é necessário calcular as raízes n -ésimas de z , o que em geral não é muito fácil. No entanto, a proposição a seguir nos mostra como determinar uma expressão para a área do polígono regular acima, determinado pelo número complexo $z \neq 0$, sem que haja necessidade de calcular suas raízes, de maneira relativamente simples.

Proposição 3.5.4. Se $z = x + yi$ é um número complexo não nulo então a área do polígono cujos vértices z_0, z_1, \dots, z_{n-1} são as rízes n -ésima de z dada por

$$A(z_0 z_1 \dots z_{n-1}) = \frac{n \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

Prova. As raízes n -ésimas de um número complexo z são dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) \right],$$

sendo $0 \leq k < n$.

Assim, utilizando propriedades dos determinantes, o k -ésimo determinante de

(3.52) é dado por

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_{k-1} & z_k \\ \bar{z}_{k-1} & \bar{z}_k \end{vmatrix} &= \sqrt[2^n]{|z|} \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\theta+2(k-1)\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2(k-1)\pi}{n}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \end{vmatrix} \\ &= -2 \sqrt[2^n]{|z|} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Notemos que o resultado obtido acima independe de k , portanto, os demais determinantes de (3.52) possuem o mesmo resultado. Logo, como são n determinantes, temos que

$$\begin{aligned} A(z_0 z_1 \dots z_{n-1}) &= n \frac{i}{4} \left[-2i \sqrt[2^n]{|z|} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \frac{n \sqrt[2^n]{|z|^2}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \frac{n \sqrt[2^n]{x^2 + y^2}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Observação 3.5.5. Para calcular a área do triângulo regular cujos vértices são as raízes cúbicas de um número complexo não nulo $z = x + iy$, basta aplicar a proposição anterior no caso em que $n = 3$, obtendo assim a fórmula

$$A(\Delta z_0 z_1 z_2) = \frac{3 \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3\sqrt{3} \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{4},$$

visto que $\operatorname{sen} 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$.

Referências Bibliográficas

- [1] IEZZI, GELSON e outros *Fundamentos de Matemática Elementar v. 7* 5ª ed. São Paulo. Atual Editora. 2005
- [2] DOLCE, OSVALDO e POMPEO, JOSÉ NICOLAU *Fundamentos de Matemática Elementar v. 9* 8ª ed. São Paulo. Atual Editora. 2005
- [3] IEZZI, Gelson *Fundamentos de Matemática Elementar v. 6* 6ª ed. São Paulo. 6ª ed. Aão Paulo. Atual Editora. 1993
- [4] DELGADO, J; FRENSEL, K; GRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- [5] GAMA, S.S.S. *Reconhecimento de Cnicas Via diagonalização de Matrizes*. 2016. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática).UFS. São Cristóvão, 2016.
- [6] MARTINS, F. J. dos Santos *Números Complexos e suas Aplicações na Geometria*. 2018. 87 p. Dissertação (Mestrado em Matemática).UFCE. Fortaleza, 2018.
- [7] BEZERRA, L. H; COSTA e SILVA, I. P. *Geometria Analítica*. 2ª ed. 170 p. Florianópolis. UFSC. 2010.
- [8] SALGADO, S. A. B; dos SANTOS, J. P. *Geometria Analítica*. 167 p. São João del-Rei. UFSJ. 2011.
- [9] REIS, G.L; SILVA, V.V. *Geometria Analítica*. 2ª ed. Rio de Janeiro : LTC, 2000.
- [10] JUNIOR, A. S. B. *Pontos Notáveis de um Triângulo: Uma Abordagem Geométrica e Analítica*. 2014. 32 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFCE. Fortaleza, 2014.

[11] NEVES, E. D. *Caracterização e Localização dos Pontos Notáveis de um Triângulo*. 2013. 71 p. *Dissertação (Mestrado em Matemática)*. USP. São Carlos. 2013