



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**DUALIDADE LOCAL**

**ANDRÉ VINICIUS SANTOS DÓRIA**

Dissertação de Mestrado

Recife  
27/02/2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

## DUALIDADE LOCAL

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

ANDRÉ VINICIUS SANTOS DÓRIA  
Orientador: Aron Simis

Recife, 2007.

Dória, André Vinicius Santos

Dualidade local / André Vinicius Santos Dória. -  
Recife: O autor, 2007.

54 folhas : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Homologia. 2. Módulo Canônico. 3. Duali-  
dade de Grothendieck. I. Título.

514.23 CDD (22.ed.) MEI2007-028

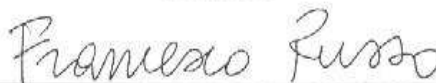
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: \_\_\_\_\_



*Aron Simis, DMAT-UFPE*

**Orientador**



*Francesco Russo, DMAT-UFPE*



*Ivan Edgardo Pañ Perez, DM-UFRGS*

#### **DUALIDADE LOCAL**

*Por*

*André Vinicius Santos Dória*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2007

*Aos meus pais, minhas irmãs e minha namorada.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Ayr Gomes Fonseca Dória e Maria Inácia dos Santos Dória, por vários motivos que não vou explicitá-los aqui, pois gastaria muitas páginas.

Ao professor Aron Simis por sua orientação, dedicação e disponibilidade.

Aos professores Paulo Rabelo e Natanael de Oliveira.

À CAPES, pelo auxílio financeiro durante a preparação desta dissertação.

Aos professores Francesco Russo e Ivan Pan, por participarem da banca examinadora.

As minhas irmãs Maria do Carmo e Sandra Cristina, que sempre torceram por mim.

A minha namorada Jussara da Cruz Abreu, pela amizade, companheirismo e compreensão.

A todos meus colegas do dmat-UFPE que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho.

Aos meus amigos que compartilharam comigo seu conhecimento e sua amizade.

A todos os professores e funcionários do Dmat-UFPE e do Dma-UFS que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação.

A todos os meus amigos que sempre torceram por mim.

## **RESUMO**

Esta dissertação tem como objetivos um estudo detalhado do módulo canônico e do funtor dualizante para anéis de Cohen-Macaulay locais e as demonstrações dos teoremas de dualidade de Grothendieck. Iniciamos com o caso Artiniano e depois estendemos ao caso geral. Analisamos a unicidade do funtor dualizante através da interveniência do módulo canônico, uma peça chave da álgebra comutativa moderna. Focamos, em especial, nos chamados anéis de Gorenstein, caracterizados, entre os anéis de Cohen–Macaulay, como aqueles que são seu próprio módulo canônico. Explícitamos o funtor dualizante. Analisamos o comportamento do módulo canônico sob o processo de localização e completamento. Por fim, trabalhamos nas demonstrações dos teoremas de dualidade de Grothendieck.

## **PALAVRAS CHAVES**

Módulo Canônico      Homologia      Dualidade de Grothendieck

## **ABSTRACT**

The main purpose of this dissertation is a detailed study of canonical module and the dualizing functor for local Cohen-Macaulay rings and the proof of the duality theorems of Grothendieck. We start with the Artinian case and later we extend to the general case. Using the canonical module, an important subject of modern commutative algebra, we examine the unicity of dualizing functor. We give special attention in Gorenstein rings, those whom are Cohen-Macaulay rings and have free canonical module. After, we make explicit the dualizing functor and analyze the behavior of the canonical module under the localization and completion process. We conclude with the duality theorems of Grothendieck.

## **KEYWORDS**

Canonical Module    Homology    Grothendieck's Duality



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Anéis Noetherianos . . . . .	9
1.1.1 Teoremas de finitude . . . . .	9
1.1.2 Anéis Artinianos . . . . .	10
1.1.3 Anéis locais regulares . . . . .	10
1.2 Módulos . . . . .	11
1.2.1 Noções da teoria dos módulos . . . . .	11
1.2.2 Pré-homologia . . . . .	12
1.2.3 Módulos injetivos e projetivos . . . . .	13
1.2.4 Resoluções . . . . .	15
1.3 Funtores . . . . .	16
1.3.1 Funtores derivados . . . . .	17
<b>2 O módulo canônico</b>	<b>18</b>
2.1 Dual de um módulo . . . . .	18
2.2 Anéis Artinianos de Gorenstein . . . . .	25
2.3 Módulo Canônico e Anéis de Gorenstein em dimensões maiores . . . . .	28
2.4 Módulos de Cohen–Macaulay máximos . . . . .	30
2.5 Módulos de dimensão injetiva finita . . . . .	31
2.6 Unicidade e existência do módulo canônico . . . . .	37
2.7 Localização e completamento do módulo canônico . . . . .	40
2.8 Dualidade no caso Cohen-Macaulay máximo . . . . .	42
<b>3 Teoremas de Dualidade</b>	<b>44</b>
3.1 Cohomologia local . . . . .	44
3.2 Teorema da dualidade local . . . . .	46
<b>Bibliografia</b>	<b>54</b>

# Introdução

Esta dissertação tem como metas a serem atingidas apresentar o módulo canônico e suas propriedades no caso local, através da teoria de dualidade local, e depois demonstrar os teoremas de dualidade de Grothendieck. Esta teoria é um tópico clássico e fundamental dentro da álgebra comutativa e da geometria algébrica, justificando a abordagem do tema. Na geometria algébrica o módulo canônico corresponde ao módulo das seções do fibrado canônico de uma variedade, onde o *fibrado canônico* é a potência exterior “topo” do fibrado cotangente.

Uma das motivações desta dissertação é a inexistência de referências sobre o assunto na literatura em português. Além disso, a mera transcrição do conteúdo de referências notáveis, tais como o compêndio de D. Eisenbud ([2]), não seria possível em uma dissertação de Mestrado, que pudesse servir a título de referência ágil. Nosso desafio foi o de repensarmos a teoria, em muitos detalhes além do usual, de modo a darmos um formato próprio, adequado à detecção dos principais resultados. Alguns argumentos foram detalhados um pouco mais e várias demonstrações lançaram mão de outras fontes especializadas. Finalmente, mas não menos importante, tivemos a preocupação de dar uma feição elementar a uma teoria de alta sofisticação.

Grothendieck introduziu o módulo canônico, também conhecido sob a designação de módulo dualizante, e provou o teorema de dualidade local. Para compreensão dessa teoria faz-se necessário desenvolver ferramentas de homologia, que serão revisadas no primeiro capítulo.

Usamos como principal referência o livro *Commutative Algebra*, de D. Eisenbud ([2]). Outras referências muito usadas nesta dissertação foram os livros: *Tópicos de Álgebra Comutativa*, de J. F. Andrade e A. Simis ([8]) e *Cohen-Macaulay Rings* de W. Bruns e J. Herzog ([1]).

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro consiste dos preliminares mínimos, com o objetivo de fornecermos conceitos essenciais para melhor compreensão deste trabalho. Nesta parte fazemos uma revisão sucinta, sem demonstrações, de noções básicas de anéis, módulos, funtores e homologia.

No segundo capítulo começamos, com Eisenbud, justificando a falha da noção usual de dual algébrico para a construção de uma teoria de dualidade em que se possa introduzir um funtor dualizante com todas as propriedades esperadas. Por simplicidade, ainda segundo Eisenbud, consideramos, inicialmente, o caso em que o anel de base  $A$  é uma  $k$ -álgebra local de dimensão vetorial finita sobre um corpo  $k$  – em particular, uma situação de “igual característica”. Nesta situação, definimos o

funtor dualizante

$$D(M) = \text{Hom}_k(M, k),$$

na categoria de  $A$ -módulos e demonstramos as propriedades principais de  $D$ . Com o intuito de provarmos a existência de  $D$ , independentemente da hipótese de igual característica – mais ainda, introduzir o módulo canônico  $\omega_A$ , ponto alto da teoria de dualidade, – introduzimos dois conceitos: *topo* e *socle* de um módulo. Estas noções permitem a extensão da teoria ao caso Artiniano local arbitrário, fornecendo a existência e unicidade do módulo canônico e a explicitação do funtor dualizante

$$D(M) = \text{Hom}_A(M, \omega_A).$$

Mediante hipóteses adicionais sobre o anel, obtemos outras representações de  $\omega_A$ . Em especial, destacamos os anéis Artinianos com a propriedade deles próprios serem seus módulos canônicos – chamados anéis de Gorenstein. Expomos o método formal geral para construir anéis de Gorenstein através da técnica de sistemas inversos de Macaulay.

A segunda etapa consiste em considerarmos anéis locais de dimensão arbitrária. Voltamos a focar a existência e a unicidade do módulo canônico. Provamos o teorema central de dualidade, que fornece uma condição necessária e suficiente para um  $A$ -módulo ser o módulo canônico de  $A$ . Os pormenores da demonstração requerem o estudo dos módulos de Cohen-Macaulay máximos e dos módulos de dimensão injetiva finita. Veremos, em seguida, o comportamento de  $\omega_A$  por localização e por completamento. E por último, retornamos ao funtor dualizante no caso Artiniano.

No terceiro capítulo usamos como base o livro de Bruns e Herzog. Começamos com a definição do funtor

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M ; \mathfrak{m}^k x = 0 \text{ para algum } k \geq 0\},$$

sendo  $M$   $A$ -módulo, depois introduzimos o funtor de cohomologia,  $H_{\mathfrak{m}}^i(-)$ . Vimos algumas propriedades de  $H_{\mathfrak{m}}^i(-)$ , que são análogas ao do funtor  $\text{Ext}$ . Antes de partirmos para as demonstrações dos teoremas de dualidade de Grothendieck exibimos quatro resultados, dentre eles o Teorema de Dualidade de Matlis. Por fim provaremos os teoremas de dualidade de Grothendieck.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo é uma breve revisão dos principais resultados da teoria dos anéis e dos módulos a serem usados neste texto. Todos os anéis serão comutativos com identidade. Tipicamente, um anel será denotado pelas letras  $A, B$ , etc., um ideal, por  $I, J$ , etc., e um módulo, por  $M, N$ , etc.

### 1.1 Anéis Noetherianos

**Definição 1.1** Um anel  $A$  é dito ser um *anel Noetheriano* se toda cadeia crescente de ideais estabiliza. Ou seja, dados ideais  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$  existe  $r$  tal que  $I_r = I_{r+1} = \cdots$ .

#### 1.1.1 Teoremas de finitude

**Definição 1.2** A *altura* de um ideal primo  $P \subset A$  é o supremo dos comprimentos  $\ell$  das cadeias de ideais primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_\ell = P.$$

Esta noção se generaliza para um ideal arbitrário  $I \subset A$ , mediante a noção de *primos mínimos* de um ideal  $I$  (ou do anel residual  $A/I$ ), pondo

$$\text{alt}(I) = \min\{\text{alt}(P) \mid P \in \text{Min}(A/I)\},$$

onde  $\text{Min}(A/I)$  denota o conjunto dos primos mínimos de  $A/I$ .

O teorema básico sobre esta noção fundamental tem a seguinte formulação:

**Teorema 1.3 (Teorema do Ideal Primo de Krull)** *Se  $A$  é um anel Noetheriano e  $I \subset A$  é um ideal gerado por  $n$  elementos, então tem-se  $\text{alt}(P) \leq n$  para todo  $P$  ideal primo mínimo de  $I$ .*

O controle do número de geradores de um módulo é administrado pelo famoso Lema de Nakayama (também chamado de Lema de Azumaya–Krull–Nakayama, fazendo justiça à prioridade de Krull e Azumaya, segundo o próprio Nakayama). No capítulo sobre módulos, este lema terá sua formulação mais geral para estes.

**Lema 1.4 (Nakayama)** *Se  $I \subset A$  é um ideal contido na intersecção de todos os ideais máximos de  $A$  e  $J \subset A$  um ideal finitamente gerado, tem-se:*

- *Se  $IJ = J$ , então  $J = \{0\}$ ;*
- *Dados  $a_1, \dots, a_n \in J$  cujas imagens em  $J/IJ$  geram este  $A/I$ -módulo, então  $a_1, \dots, a_n$  geram  $J$ .*

Este resultado se aplica, notadamente, no caso de um anel regular ou graduado.

### 1.1.2 Anéis Artinianos

Os anéis definidos pela estabilidade de *cadeias descendentes*, em contraponto à definição de anéis Noetherianos, são os anéis Artinianos. Precisamente:

**Definição 1.5** Um anel  $A$  é dito ser um *anel de Artin* ou *Artiniano* se toda cadeia decrescente de ideais estabiliza. Em outras palavras, dados ideais  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$  existe  $r$  tal que  $I_r = I_{r+1} = \dots$ .

Estes anéis estarão na base da formulação de uma teoria de dualidade local preliminar.

### 1.1.3 Anéis locais regulares

Lembramos que um anel é dito ser *local* se é Noetheriano e admite um único ideal máximo  $\mathfrak{m}$ . Usaremos a notação habitual e auto-explicativa  $(A, \mathfrak{m})$  para um anel local.

Pelo teorema de Krull, a altura de  $\mathfrak{m}$  é limitada pelo número de geradores de  $\mathfrak{m}$ . Isto motiva a seguinte noção fundamental:

**Definição 1.6** Um anel local  $(A, \mathfrak{m})$  de dimensão  $d$  é dito *regular* se seu ideal máximo  $\mathfrak{m}$  é gerado por  $d$  elementos.

Um anel local regular de dimensão 0 é um corpo; pode-se mostrar que um anel local regular de dimensão 1 é um anel de valoração discreta (DVR).

Para as propriedades básicas de um anel local regular remetemos o leitor a [8, Capítulo III] (ver também [7]).

**Proposição 1.7** *Se  $(A, \mathfrak{m})$  é um anel regular e  $x \in \mathfrak{m}$  é um parâmetro regular (isto é,  $x$  faz parte de um conjunto mínimo de geradores de  $\mathfrak{m}$ ), então  $A/(x)$  é regular e  $\dim A/(x) = \dim A - 1$ .*

## 1.2 Módulos

Os módulos sobre um anel  $A$  formam uma categoria abeliana, com muitas propriedades especiais. Várias das noções nesta categoria imitam as de espaços vetoriais sobre um corpo: somas diretas, módulos livres (aqueles que admitem *base livre* – como espaços vetoriais), homomorfismos. Assim, por exemplo, dizer que  $M$  é livre com base finita – dizemos que  $M$  tem *posto* finito – é equivalente a dizer que  $M \simeq A^n$ , para algum  $n$ .

Mas, a analogia termina aqui: em particular, a noção rotineira de dual de um espaço vetorial de dimensão finita, apesar de generalizável a módulos, não tem a força de uma teoria de dualidade. Isto estabelece uma grande diferença entre os dois objetos e vai requerer, no caso de módulos, uma teoria de alta sofisticação, para a qual serão indispensáveis resultados absolutamente não triviais de homologia.

Salvo menção explícita em contrário, todos os módulos nesta tese serão finitamente gerados.

### 1.2.1 Noções da teoria dos módulos

O resultado básico sobre número de geradores dado anteriormente para anéis Noetherianos, se estende para módulos:

**Lema 1.8 (Nakayama para módulos)** *Se  $I \subset A$  é um ideal contido na intersecção de todos os ideais máximos de  $A$  e  $M$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado, tem-se:*

- Se  $IM = M$ , então  $M = \{0\}$ ;
- Se  $x_1, \dots, x_n \in M$  são tais que suas imagens em  $M/IM$  constituem um conjunto de geradores para a estrutura de  $A/I$ -módulo, então  $x_1, \dots, x_n$  geram  $M$ .

A noção de dimensão de um módulo é dada em termos do seu anulador. Mais geralmente, temos o seguinte conceito:

**Definição 1.9 (Condutor)** Sejam  $M$   $A$ -módulo e  $N, N'$  submódulos de  $M$ . O *condutor* de  $N$  para  $N'$ , denotado por  $(N' :_A N)$ , é o ideal  $\{a \in A \mid aN \subset N'\}$  de  $A$ .

No caso de  $N' = 0$  e  $N = M$ , o ideal  $\text{ann}(M) := (0 :_A M)$  é dito *anulador* de  $M$ .

**Definição 1.10 (Dimensão de Krull de um Módulo)** A *dimensão* de  $M$  é a dimensão do anel  $A/\text{ann}(M)$ . Notação:  $\dim M$ .

Em particular, se  $M = A/I$ , com  $I$  ideal de  $A$  (isto é,  $M$  é um módulo *cíclico*), a dimensão de Krull de  $M$  no sentido acima é igual a dimensão de Krull de  $A/I$ , como anel.

**Definição 1.11 (Módulo Simples)** Um  $A$ -módulo não-nulo  $M$  é *simples* quando  $M$  não possui submódulos próprios. Isto é equivalente a dizer que  $M \simeq A/\mathfrak{m}$ , com  $\mathfrak{m}$  um ideal máximo de  $A$ .

## 1.2.2 Pré-homologia

Em geral, se  $I \subset A$  é um ideal e  $M$  um  $A$ -módulo, o submódulo de  $M$  gerado pelos elementos  $ax$ , com  $a \in I$  e  $x \in M$ , será denotado por  $IM$ . O módulo quociente  $M/IM$  desempenha um papel muito importante na teoria para ideais  $I$  particulares, como veremos a seguir.

**Definição 1.12 ( $M$ -sequência)** Sejam  $M$  um  $A$ -módulo e  $\underline{x} = x_1, \dots, x_n \subset A$ . Esta sequência é dita *sequência regular* ou  $M$ -*sequência* quando:

- (i)  $\underline{x}M \subsetneq M$ ;
- (ii)  $x_{i+1} \notin Z(M/(x_1, \dots, x_i)M)$ ,

sendo  $Z(N)$  o conjunto dos elementos de  $A$  que anulam algum elemento de  $N \setminus \{0\}$ .

Habitualmente, a sequência  $\underline{x}$  está contida em um ideal fixo  $I \subset A$  – neste caso, falamos de uma  $M$ -sequência em  $I$ .

A  $M$ -sequência que não admite inserção própria de novos elementos é dita  *$M$ -sequência máxima*. O resultado preliminar básico sobre  $M$ -sequências é a invariância do número de elementos de  $M$ -sequências máximas. Mais precisamente:

**Proposição 1.13** [8, Proposição II.3] *Se  $A$  é Noetheriano,  $I \subset A$  um ideal e  $M$ , um  $A$ -módulo finitamente gerado tal que  $IM \neq M$ , então duas  $M$ -sequências máximas em  $I$  admitem mesmo número de elementos.*

**Definição 1.14 (Profundidade)** Sejam  $I$  ideal de  $A$  e  $M$   $A$ -módulo. Definimos a *profundidade* de  $I$  em  $M$  como sendo a cardinalidade comum das  $M$ -sequências máximas de  $I$ . Notação:  $\text{prof}(I, M)$  ou  $\text{grade}(I, M)$  ou  $\text{depth}(I, M)$ .

Para todo ideal  $I \subset A$ , tem-se

$$\text{prof}(I, A) \leq \text{alt } I.$$

A demonstração deste fato pode ser vista em [2, proposição 18.2].

**Proposição 1.15** [2, Corolário 17.8] *Se  $x_1, \dots, x_n$  é uma  $M$ -sequência, a sequência  $x_1^t, \dots, x_n^t$  é uma  $M$ -sequência para todo inteiro positivo  $t$ . Em particular, se  $I$  é um ideal de  $A$  e  $J$  é seu radical, temos*

$$\text{prof}(I, M) = \text{prof}(J, M).$$

Se  $(A, \mathfrak{m})$  é local, pomos  $\text{prof}(M) := \text{prof}(\mathfrak{m}, M)$ . Temos então  $\text{prof}(M) \leq \dim M$ . Quando ocorre a igualdade,  $M$  é dito *módulo de Cohen–Macaulay* (C-M). Um anel  $A$  será de Cohen–Macaulay quando, visto como  $A$ -módulo, é de Cohen–Macaulay. Observemos que se  $A$  é um anel local regular, então  $\text{prof } A = \dim A$ , logo  $A$  é de Cohen–Macaulay.

**Definição 1.16 (Sistema de parâmetros - sop)** Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel local e  $M$ , um  $A$ -módulo finitamente gerado. Um *sistema de parâmetros* de  $M$  é uma sequência  $\underline{x} = x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$  tal que:

- (i) O comprimento de  $M/\underline{x}M$  é finito;
- (ii)  $n$  é o menor valor possível tal que (i) vale.

Representaremos este menor valor possível por  $s(M)$ .

A condição (i) é equivalente à condição de que  $\dim(M/(x_1, \dots, x_n)M) = 0$ .

**Teorema 1.17 (Chevalley–Krull)**  $\dim M = s(M)$ .

O teorema também leva o nome de P. Samuel quando se mostra que o número acima ainda é o grau do chamado polinômio de Hilbert–Samuel.

Resulta do teorema acima que  $M$  é módulo de Cohen–Macaulay se, e só se, todo (respectivamente, algum) sistema de parâmetros de  $M$  é  $M$ -sequência. Mais adiante estudaremos os módulos de Cohen–Macaulay *máximos*, entendendo-se por isto aqueles módulos  $M$  de Cohen–Macaulay tais que  $\dim M = \dim A$ . Esta condição será então equivalente a dizer que todo (respectivamente, algum) sistema de parâmetros de  $A$  é uma  $M$ -sequência (ver Proposição 2.20).

Notemos que se  $(A, \mathfrak{m})$  é local regular, então todo sistema mínimo de geradores de  $\mathfrak{m}$  é sistema de parâmetros.

Pode-se também mostrar:

**Proposição 1.18** *Se  $A$  é local e  $(x_1, \dots, x_n)$  é um ideal próprio contendo uma  $M$ -sequência de comprimento  $n$ , então  $x_1, \dots, x_n$  é uma  $M$ -sequência.*

Este resultado, típico de anéis locais, pode ser demonstrado diretamente ou via o complexo de Koszul (ver, por exemplo, [8, Capítulo III]).

### 1.2.3 Módulos injetivos e projetivos

**Definição 1.19 (Módulo injetivo)** Um  $A$ -módulo  $Q$  é *injetivo* quando para todo monomorfismo (homomorfismo injetivo) de  $A$ -módulo  $\alpha : N \rightarrow M$  e todo homomorfismo  $\beta : N \rightarrow Q$ , existe um  $\gamma : M \rightarrow Q$  tal que  $\beta = \gamma \circ \alpha$ . O diagrama abaixo ilustra esta situação:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & M \\ & & \beta \downarrow & \nearrow \gamma & \\ & & Q & & \end{array}$$

O cerne desta teoria é o fato de que todo módulo admite uma *envoltória injetiva*, no sentido de estar contido em um módulo injetivo menor possível. Primeiramente, temos o seguinte critério de injetividade para um módulo:



**Proposição 1.20** *Sejam  $A$  anel e  $Q$   $A$ -módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $Q$  é injetivo.
- (ii) (Critério de Baer) *Seja  $I$  ideal de  $A$ . Então todo homomorfismo  $\beta : I \rightarrow Q$  se estende a  $A$ .*
- (iii)  $\text{Hom}_A(-, Q)$  preserva seqüências curtas exatas.

Um módulo injetivo tem uma propriedade elementar importante, que será usada mais adiante. Para maior familiarização do leitor, juntamos uma demonstração.

**Lema 1.21** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Artiniano local,  $M \neq 0$  e  $Q \neq 0$   $A$ -módulos. Se  $Q$  é injetivo, então para todo  $x \in M, x \neq 0$ , existe um  $A$ -homomorfismo  $\varphi : M \rightarrow Q$  tal que  $\varphi(x) \neq 0$ .*

**Demonstração:** Fixemos  $x \in M$ , não-nulo. Como  $\mathfrak{m}$  é o único ideal primo de  $A$  e  $Q \neq 0$ , tem-se  $\text{Ass}(Q) = \{\mathfrak{m}\}$ . Logo, existe  $y \in Q$  tal que  $(0 :_A y) = \mathfrak{m}$ . Notemos que  $y$  é não-nulo. Seja  $\beta : A \rightarrow M$  o  $A$ -homomorfismo tal que  $\beta(1) = x$  e consideremos  $I = \ker(\beta)$ . Seja  $\bar{\beta} : A/I \rightarrow M$  o homomorfismo injetivo induzido por  $\beta$ . Definamos  $\alpha : A/I \rightarrow Q$  por  $\bar{a} \mapsto ay$ . A aplicação é um homomorfismo pois  $I \subset (0 :_A y)$ . Usando o fato de  $Q$  ser injetivo, teremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A/I & \xrightarrow{\bar{\beta}} & M \\ & & \downarrow \alpha & \swarrow \varphi & \\ & & Q & & \end{array}$$

Disto resulta que,  $\varphi$  satisfaz ao enunciado desejado. ■

**Definição 1.22** *Sejam  $M$  módulo e  $N$  submódulo de  $M$ .  $M$  é dito *extensão essencial* de  $N$ , ou  $N$  é *submódulo essencial* de  $M$ , quando todo submódulo de  $M$  intercepta  $N$  não trivialmente. Uma extensão essencial  $M$  de  $N$  que é módulo injetivo é dita uma *envoltória injetiva* de  $N$ .*

Todo  $A$ -módulo possui uma envoltória injetiva, que é única a menos de isomorfismos. A demonstração dessa afirmação pode ser vista em [2, Proposição-Definição A3.10]. Vemos que a envoltória injetiva de um módulo injetivo é ele próprio.

**Proposição 1.23** *A envoltória injetiva de uma soma direta de  $A$ -módulos é canonicamente isomorfa à soma direta das envoltórias injetivas dos somandos.*

Agora estudaremos outro tipo de módulo, os projetivos. Os módulos projetivos foram introduzidos pela primeira vez em 1956 por Henri Cartan e Samuel Eilenberg. O conceito de módulo projetivo sobre um anel é uma generalização da idéia de módulo livre (isto é, um módulo com base livre).

**Definição 1.24 (Módulo projetivo)** Um  $A$ -módulo  $P$  é *projetivo* quando para todo epimorfismo (homomorfismo sobrejetivo) de  $A$ -módulo  $\alpha : M \twoheadrightarrow N$  e todo homomorfismo  $\beta : P \rightarrow N$ , existe um  $\gamma : P \rightarrow M$  tal que  $\beta = \alpha \circ \gamma$ . Tal situação é ilustrada pelo diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \gamma & \downarrow \beta \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

Um exemplo de módulo projetivo é um módulo livre. Em particular, todo anel  $A$ , visto como  $A$ -módulo, é projetivo.

**Proposição 1.25** *Seja  $P$  um  $A$ -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $P$  é projetivo;
- (ii) Para todo homomorfismo sobrejetivo de módulos  $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ , a aplicação induzida  $\text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$  é um epimorfismo;
- (iii)  $P$  é somando direto de um módulo livre;
- (iv) Para todo homomorfismo sobrejetivo  $\alpha : M \twoheadrightarrow P$ , existe  $\beta : P \rightarrow M$  tal que  $\alpha \circ \beta = I_P$ .

## 1.2.4 Resoluções

A noção fundamental aqui é a de complexo.

**Definição 1.26 (Complexo)** Um *complexo* de módulos é uma sequência de módulos e homomorfismo

$$F : \dots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \dots$$

tal que  $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$ ,  $\forall i$ . A *homologia* de  $F$  em  $F_i$ , ou a homologia de  $F$  de ordem  $i$ , é definida como

$$H_i F := \ker \varphi_i / \text{Im } \varphi_{i+1}.$$

$F$  é dito *exato* em  $F_i$  quando  $H_i F = 0$ . Se  $F$  é exato  $\forall i$ , dizemos que  $F$  é *acíclico*.

Conforme as propriedades do complexo temos os conceitos de resolução livre e projetiva, sendo que com o último definimos a dimensão projetiva.

**Definição 1.27 (Resolução Livre)** Uma *resolução livre* de um  $A$ -módulo  $M$  é um complexo acíclico

$$F : \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

onde  $F_i$  é livre para todo  $i \geq 0$ . Além disso, se  $(A, \mathfrak{m})$  for local e  $\varphi_n(F_n) \subset \mathfrak{m}F_{n-1}$ , para todo  $n > 0$ , o complexo é dito *minimal*.

**Definição 1.28 (Dimensão projetiva)** Uma *resolução projetiva* de um  $A$ -módulo  $M$  é um complexo acíclico de  $A$ -módulos projetivos  $F_i$ ,

$$F : \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

A *dimensão projetiva* de  $M$  é o menor  $n$  acima tal que  $\varphi_n$  é aplicação injetiva - se um tal  $n$  não existe, dizemos que  $M$  tem dimensão projetiva infinita. Notação:  $\text{pd } M$ .

Um teorema de extrema importância que relaciona o conceito de dimensão projetiva com a profundidade é a fórmula de Auslander-Buchsbaum.

**Teorema 1.29 (Fórmula de Auslander-Buchsbaum)** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  anel local. Se  $M$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado de dimensão projetiva finita, então*

$$\text{prof}(\mathfrak{m}, A) = \text{pd } M + \text{prof}(\mathfrak{m}, M).$$

### 1.3 Funtores

Um functor é uma aplicação entre categorias que satisfaz algumas propriedades. A definição precisa de functor e suas propriedades elementares remetemos a [2, A5]. O conceito de categoria foi introduzida por Eilenberg e Maclane para unificar idéias da teoria de grupos e topologia.

A categoria que usaremos será constituída pelo conjunto dos  $A$ -módulos, sendo  $A$  um anel fixado.

Um dos funtores que será essencial a nossa teoria e que é muito familiar na teoria de grupos é o functor dualizante.

**Definição 1.30 (Functor dualizante)** Um functor  $E$  na categoria de  $A$ -módulos em si mesmo é dito *dualizante* se satisfizer as seguintes condições:

1.  $E$  é contravariante e exato;
2.  $E$  é  $A$ -linear, no sentido que a aplicação natural

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_A(E(N), E(M)) \\ \varphi &\mapsto E(\varphi) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de  $A$ -módulos;

3.  $E$  é idempotente – isto é,  $E^2 \simeq I$ .

Vê-se que  $E$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se  $\alpha$  é sobrejetiva (injetiva), então  $E(\alpha)$  é injetiva (sobrejetiva);
- (ii) Se  $M$  é injetivo (projetivo), então  $E(M)$  é projetivo (injetivo);

- (iii) A aplicação natural de  $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(E(N), E(M))$ , induzida por  $E$ , é um isomorfismo, ou seja,  $\text{Hom}_A(M, N) \simeq \text{Hom}_A(E(N), E(M))$ ;
- (iv)  $E(M \oplus N) \simeq E(M) \oplus E(N)$ , sendo  $M$  e  $N$   $A$ -módulos.

As três primeiras afirmações seguem, respectivamente, da exatidão de  $E$ , das definições de módulo projetivo e injetivo, e da idempotência de  $E$ . Para a última observemos que

$$\begin{aligned}
E(M \oplus N) &\simeq \text{Hom}_A(A, E(M \oplus N)) \\
&\simeq \text{Hom}_A(E^2(M \oplus N), E(A)) \\
&\simeq \text{Hom}_A(M \oplus N, E(A)) \\
&\simeq \text{Hom}_A(M, E(A)) \oplus \text{Hom}_A(N, E(A)) \\
&\simeq \text{Hom}_A(A, E(M)) \oplus \text{Hom}_A(A, E(N)) \\
&\simeq E(M) \oplus E(N).
\end{aligned}$$

### 1.3.1 Funtores derivados

Dado um functor na categoria de  $A$ -módulos, podemos definir outros funtores, chamados de *funtores derivados*. Um dos funtores mais úteis é  $\text{Hom}$ , a partir do qual podemos obter o functor  $\text{Ext}$ , que é fundamental neste estudo e cuja definição passamos a esboçar.

Para cada  $i \in \mathbb{N}$  definiremos um functor associado a  $\text{Hom}$ , conhecido como *funtor derivado direito* ( $\text{Ext}$ ), denotado por

$$\text{Ext}_A^i(M, -) : N \mapsto \text{Ext}_A^i(M, N),$$

onde  $M$  um  $A$ -módulo fixado e  $\text{Ext}_A^i(M, -)$  é construído da seguinte forma: para cada  $A$ -módulo  $N$ , consideramos uma resolução injetiva de  $N$

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \xrightarrow{\varphi_0} I_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots$$

e aplicamos  $\text{Hom}_A(M, -)$  ao complexo, obtendo-se

$$\text{Hom}(M, \mathcal{E}) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, I_0) \xrightarrow{\bar{\varphi}_0} \text{Hom}_A(M, I_1) \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \dots$$

Definimos então  $\text{Ext}_A^i(M, N)$  como a homologia de ordem  $i$  deste complexo, isto é

$$\text{Ext}_A^i(M, N) = (\ker \bar{\varphi}_i) / (\text{Im } \bar{\varphi}_{i-1}),$$

para todo  $i$  inteiro positivo e

$$\text{Ext}_A^0(M, N) = \text{Hom}_A(M, N).$$

Vemos que o  $\text{Ext}$  mede a exatidão do complexo  $\text{Hom}(M, \mathcal{E})$ .

# Capítulo 2

## O módulo canônico

O módulo canônico é um objeto central na teoria da dualidade na categoria de  $A$ -módulos. Este conceito é de fundamental importância no estudo dos anéis de Cohen–Macaulay. A finalidade deste capítulo é introduzir o módulo canônico e suas propriedades no caso local.

### 2.1 Dual de um módulo

Nesta seção definiremos o dual de um módulo, no sentido da teoria da dualidade.

Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. A noção usual de dual é o  $A$ -módulo  $\text{Hom}_A(M, A)$ . Infelizmente, ao contrário do que sucede com espaços vetoriais de dimensão finita, em geral  $M$  não é reflexivo nesta definição. Além disso, o funtor  $M \mapsto \text{Hom}_A(M, A)$  não é exato em seqüências curtas exatas. Por exemplo, tomando  $A = \mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , segue que  $\text{Hom}_A(M, A) = \{0\}$  e, conseqüentemente,  $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A) \not\cong M$ . Quanto a preservação de seqüências exatas, se tal resultado fosse verdadeiro teríamos que  $A$ , visto como  $A$ -módulo, seria injetivo - decorre da proposição 1.20 (iii). Mas isso é falso pois por exemplo  $A = K[X, Y]/(X^2, XY^2, Y^3)$  não é injetivo.

Vamos proceder, mais cuidadosamente, por etapas. Suporemos, inicialmente, que  $(A, \mathfrak{m})$  é anel local de dimensão zero, contendo um corpo  $k$  sobre o qual  $A$  é espaço vetorial de dimensão finita (chamado caso “igual característica em dimensão zero”). Observemos que um  $A$ -módulo finitamente gerado  $M \neq \{0\}$  tem então comprimento finito e sempre contém uma cópia isomorfa de  $A/\mathfrak{m}$ , já que  $M$  admite algum submódulo simples. Denotaremos por  $\ell(M)$  o comprimento de  $M$ .

Definiremos o *dual* de  $M$  como sendo

$$D(M) = \text{Hom}_k(M, k).$$

Para simplificarmos a notação poremos  $D^2(M) = D(D(M))$ .

Queremos, antes de tudo, que  $D(M)$  seja um  $A$ -módulo. Para isto definiremos uma ação de  $A$  em  $D(M)$  de acordo com a prescrição:

$$(a \cdot \varphi)(m) = \varphi(am), \text{ sendo } \varphi \in D(M), a \in A \text{ e } m \in M.$$

**Proposição 2.1**  *$D$  é um funtor dualizante da categoria de  $A$ -módulos em si própria.*

**Demonstração:** É imediato que  $D$  é  $A$ -linear e contravariante, propriedades bem conhecidas do funtor  $\text{Hom}$ . Provaremos que  $D$  preserva seqüências exatas curtas e que  $D^2(M) \simeq M$ .

Primeiro mostraremos que  $D$  preserva seqüências exatas curtas. Dada uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0,$$

segue que

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_k(H, k) \xrightarrow{\bar{\beta}} \text{Hom}_k(M, k) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \text{Hom}_k(N, k),$$

sendo  $\bar{\beta}(\varphi) = \varphi \circ \beta$  e  $\bar{\alpha}(\gamma) = \gamma \circ \alpha$ . Basta provarmos que  $\bar{\alpha}$  é sobrejetivo. Para mostrarmos que  $\bar{\alpha}$  é sobrejetiva, consideremos  $N$  e  $M$  como espaços vetoriais sobre  $k$  e usemos o fato de  $k$ , visto como  $k$ -módulo, ser injetivo. Portanto,  $D$  preserva seqüências exatas.

Finalmente, para mostrarmos que  $D(D(M)) \simeq M$ , definamos  $\Phi : M \rightarrow D(D(M))$  por  $\Phi(m)(\alpha) = \alpha(m)$ , sendo  $m \in M$  e  $\alpha \in D(M)$ . Temos:

(a)  $\Phi$  está bem definida. De fato, se  $\sigma \in k$  e  $\alpha, \beta \in \text{Hom}_k(M, k)$ , então  $\Phi(m)(\sigma\alpha + \beta) = (\sigma\alpha + \beta)(m) = (\sigma\alpha)(m) + \beta(m) = \sigma\alpha(m) + \Phi(m)(\beta) = \sigma\Phi(m)(\alpha) + \Phi(m)(\beta)$ .

(b)  $\Phi$  é isomorfismo. Desde que  $\Phi(am + n)(\alpha) = \alpha(am + n) = \alpha(am) + \alpha(n) = a\Phi(m)(\alpha) + \Phi(n)(\alpha)$ , segue que  $\Phi$  é um  $A$ -homomorfismo.

Suponhamos agora que  $\Phi(m) \equiv 0$  para algum  $m \in M$ . Então  $\Phi(m)(\alpha) = 0$ ,  $\forall \alpha \in \text{Hom}_k(M, k)$ . Ou seja,  $\alpha(m) = 0, \forall \alpha \in \text{Hom}_k(M, k)$ . Assim,  $m = 0$  - a última implicação resulta de propriedades rotineiras de espaços vetoriais. Dessa forma,  $\Phi$  é injetivo.

Para provarmos que  $\Phi$  é sobrejetivo, consideremos  $M$  como um  $k$  espaço vetorial e  $\Phi$  como uma transformação  $k$ -linear. Desde que  $\dim_k M = \dim_k D(D(M))$  e  $\Phi$  é injetivo, segue que é sobrejetivo. ■

Sendo  $D$  funtor dualizante, concluímos - ver seção 1.3 - que  $D$  possui as seguintes propriedades:

- (i) Se  $\alpha$  é sobrejetiva (injetiva), então  $D(\alpha)$  é injetiva (sobrejetiva);
- (ii) Se  $M$  é injetivo (projetivo), então  $D(M)$  é projetivo (injetivo);
- (iii) A aplicação natural de  $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(D(N), D(M))$ , induzida por  $D$ , é um isomorfismo.

Veremos agora outras propriedades de  $D$ .

**Proposição 2.2** *O funtor  $D$  satisfaz as seguintes condições:*

- (a) Se  $M$  é simples, então  $D(M)$  também o é;
- (b)  $\ell(M) = \ell(D(M))$ ;
- (c)  $\text{ann}(M) = \text{ann}(D(M))$ .

**Demonstração:**

(a) Com efeito, suponhamos o contrário. Então  $D(M)$  tem um submódulo próprio não trivial  $N$ . Aplicando  $D$  à sequência exata curta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow D(M) \longrightarrow (D(M)/N) \longrightarrow 0,$$

obtemos

$$0 \longrightarrow D(D(M)/N) \longrightarrow D^2(M) \simeq M \longrightarrow D(N) \longrightarrow 0.$$

Como  $0 \subsetneq N \subsetneq D(M)$ , resulta que  $0 \subsetneq D(D(M)/N) \subsetneq M$ . Logo  $M$  não é simples, o que é uma contradição.

(b) Procedemos por indução sobre  $\ell(M)$ . Se  $\ell(M) = 0$  segue que  $M = 0$ , logo  $D(M) = 0$ . Se  $\ell(M) = 1$ ,  $M$  é simples e, pelo item (a),  $D(M)$  é simples, assim  $\ell(D(M)) = 1$ . Agora, supondo  $\ell(M) > 1$ , podemos tomar  $N$  tal que  $\{0\} \subsetneq N \subsetneq M$ . Ora, temos  $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$  e, analogamente, como  $D$  é funtor exato,  $\ell(D(M)) = \ell(D(N)) + \ell(D(M/N))$ . Pela hipótese indutiva,  $\ell(D(N)) = \ell(N)$  e  $\ell(D(M/N)) = \ell(M/N)$ . Consequentemente,  $\ell(D(M)) = \ell(N) + \ell(M/N) = \ell(M)$ , como afirmamos.

(c) Com efeito, sejam  $a \in \text{ann}(M)$  e  $\varphi \in D(M)$ , temos que

$$(a.\varphi)(m) = \varphi(am) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow (a.\varphi) \equiv 0.$$

Daí,  $\text{ann}(M) \subset \text{ann}(D(M))$ . Em particular,  $\text{ann}(D(M)) \subset \text{ann}(D^2(M))$ . Como  $D^2(M) \simeq M$ ,  $\text{ann}(D(M)) \subset \text{ann}(M)$ . Logo,  $\text{ann}(M) = \text{ann}(D(M))$ . ■

Observemos que a demonstração dos itens (a) e (b) valem para qualquer funtor dualizante.

Como vimos até agora a definição do nosso funtor está ligada diretamente ao corpo  $k$ . Mais adiante mostraremos que o funtor  $D$  é independente de  $k$ . Primeiro veremos um caso particular:  $A$  corpo. Provaremos que  $D(M) \simeq \text{Hom}_A(M, A)$ , ou seja,  $\text{Hom}_k(M, k) \simeq \text{Hom}_A(M, A)$  como  $A$  espaços vetoriais. A existência desse isomorfismo equivale a mostrarmos que as dimensões destes espaços coincidem. E como

$$\begin{aligned} \dim_A(\text{Hom}_A(M, A)) &= \dim_A(M) \\ &= \dim_k(M)/\dim_k(A) \\ &= \dim_k(\text{Hom}_k(M, k))/\dim_k(A) \\ &= \dim_A(\text{Hom}_k(M, k)), \end{aligned}$$

temos que  $D(M) \simeq \text{Hom}_A(M, A)$ .

Para provarmos o caso geral precisaremos de mais resultados.

Os dois conceitos a seguir desempenharão papel importante nesta primeira visão da dualidade.

**Definição 2.3** O *topo* de um módulo  $M$  é o quociente  $M/\mathfrak{m}M$  e o *socle* (literalmente, “pedestal” ou “plinto”) é o anulador  $(0 :_M \mathfrak{m})$ , denotados por  $\text{Top}(M)$  e  $\text{Soc}(M)$ , respectivamente.

Observemos que  $\text{Top}(M)$  é soma direta de módulos simples já que é  $(A/\mathfrak{m})$ -espaço vetorial de dimensão finita, e  $\text{Soc}(M)$  é a soma de (isto é, contém) todos os submódulos simples de  $M$  – de fato, se  $N \subset M$  é simples, então  $N \simeq A/\mathfrak{m}$  e, portanto, se  $0 \neq x \in N$ , então  $Ax = N$ , logo  $x$  anula  $\mathfrak{m}$ . Além disto, ambos os módulos são não triviais.

**Exemplo 2.4** Seja  $A = K[X, Y]/(X^2, XY^2, Y^3)$ . Representando classes de elementos por letras minúsculas, uma  $k$ -base vetorial de  $A$  é  $\{1, x, y, xy, y^2\}$  e  $\text{Soc}(A)$  é gerado por  $xy, y^2$ . Então,  $D(A)$  é gerado pela base dual  $\{1', x', y', xy', y^2'\}$  e  $\text{Soc}(D(A))$  é gerado por  $1'$ , logo é módulo simples. Por outro lado, o anel  $A = K[X, Y]/(X^2, Y^3)$ , é gerado por  $1, x, y, xy, y^2, xy^2$ , como  $k$ -espaço vetorial, e  $\text{Soc}(A)$  é gerado por  $xy^2$ . Neste caso,  $\text{Soc}(D(A))$  também é simples.

Nos dois casos do exemplo acima,  $\text{Soc}(D(A))$  é simples. Isto nos levar a perguntarmos se isso é verdade para todo anel local  $A$  de dimensão zero. A proposição abaixo mostra que esta afirmação é verdadeira.

**Proposição 2.5** *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  anel local dimensão zero e  $E$ , um funtor dualizante da categoria de  $A$ -módulos finitamente gerados. Então  $\text{Soc}(E(A))$  é simples.*

**Demonstração:** Afirmamos que  $E(A)$  é a envoltória injetiva de  $\text{Soc}(E(A))$ . Para tal basta mostrarmos que  $E(A)$  é uma extensão essencial de  $\text{Soc}(E(A))$ , pois devido a  $E$  ser funtor dualizante e  $A$  ser projetivo,  $E(A)$  é injetivo. Seja  $M$  submódulo de  $E(A)$  não-nulo. Como  $M$  é não-nulo,  $M$  possui um submódulo  $N \neq \{0\}$  que é simples. Segue que,  $N \subset M \cap \text{Soc}(E(A))$ , já que  $\text{Soc}(E(A))$  contém todos submódulo simples de  $E(A)$ . Logo  $E(A)$  é uma extensão essencial de  $\text{Soc}(E(A))$  e, portanto, é de fato a envoltória injetiva de  $\text{Soc}(E(A))$ .

Supondo que o socle de  $E(A)$  não é simples então  $\text{Soc}(E(A))$  possui um somando direto não trivial como  $A/\mathfrak{m}$ -módulo, logo como  $A$ -módulo. Como a extensão injetiva de uma soma direta é a soma direta das extensões injetivas dos somandos segue que podemos obter um somando direto próprio de  $E(A)$ . Aplicando  $E$  teremos um somando próprio de  $A$ , contudo  $A$  não admite somando direto próprio, pois um anel local não possui idempotentes  $\neq 0, 1$ . Logo  $\text{Soc}(E(A))$  é simples. ■

Apesar da definição do funtor dualizante  $D$  ter sido formulada em termos do corpo  $k$ , vamos provar que, na verdade, sua existência independe da hipótese de igual característica. Para tal, procedemos da seguinte maneira: primeiro se existe funtor dualizante, provaremos que ele é único (a menos de isomorfismos), e depois construiremos um explicitamente.



**Proposição 2.6** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Artiniano local. Se  $E$  é um funtor dualizante da categoria dos  $A$ -módulos finitamente gerados, então existe um isomorfismo de funtores*

$$E(-) \simeq \text{Hom}_A(-, E(A)).$$

*Além disso,  $E(A)$  é isomorfo à envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$ . Portanto, só poderá existir no máximo um funtor dualizante, a menos de isomorfismos.*

**Demonstração:** Pelas preliminares do capítulo anterior, temos que  $\text{Hom}_A(A, M) \simeq M$ ,  $\text{Hom}_A(M, N) \simeq \text{Hom}_A(E(N), E(M))$  e  $E(E(M)) \simeq M$ . Aplicando os resultados acima na ordem dada, segue que

$$E(M) \simeq \text{Hom}_A(A, E(M)) \simeq \text{Hom}_A(E(E(M)), E(A)) \simeq \text{Hom}_A(M, E(A)),$$

o que prova a primeira parte da proposição.

Segue pela demonstração da proposição 2.5 que  $E(A)$  é a envoltória injetiva de  $\text{Soc}(E(A))$  e que  $E(A)$  tem socle simples, ou seja,  $\text{Soc}(E(A)) \simeq A/\mathfrak{m}$ . Portanto  $E(A)$  é a envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$ . ■

Com isso provamos que se existe um funtor dualizante, então ele é único, a menos de isomorfismos. Agora explicitaremos um funtor dualizante.

**Definição 2.7** Denotaremos por  $\omega_A$  a envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$  e ela será chamada de *módulo canônico* de  $A$ . Definimos:

$$D(M) := \text{Hom}_A(M, \omega_A).$$

Notemos que,  $\omega_A = D(A)$ .

Provaremos que  $D$  é um funtor dualizante. Primeiramente, temos:

**Lema 2.8** *Sejam  $A$  um anel local de dimensão zero e  $E, M$ ,  $A$ -módulos. Se  $M$  é simples e  $E$  é extensão essencial de  $M$ , então  $\text{Soc}(E) = M$ .*

**Demonstração:** Seja  $N$  submódulo simples de  $E$ . Como  $E$  é extensão essencial de  $M$  segue que  $M \cap N \neq \{0\}$ . Como  $M$  e  $N$  são ambos simples temos que  $M = N$ . Logo o único submódulo simples de  $E$  é  $M$ . Por uma das caracterizações do socle temos  $\text{Soc}(E) = M$ . ■

**Proposição 2.9** *Se  $(A, \mathfrak{m})$  é anel local de dimensão zero, então o funtor*

$$M \mapsto D(M) := \text{Hom}_A(M, \omega_A)$$

*é um funtor dualizante na categoria dos  $A$ -módulos finitamente gerados.*

**Demonstração:** Devemos mostrar que: (i)  $D$  é  $A$ -linear e contravariante; (ii)  $D$  é exato; (iii)  $D^2(M) = M$ .

(i) Segue diretamente da definição.

(ii) Seja

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Aplicando  $D$ , obtemos a sequência exata à esquerda

$$0 \longrightarrow D(H) \xrightarrow{D(\beta)} D(M) \xrightarrow{D(\alpha)} D(N) .$$

Resta provarmos que  $D(\alpha)$  é sobrejetiva.

Lembremos que  $D(\alpha) : D(M) \rightarrow D(N)$  é dado por  $D(\alpha)(\varphi)(n) = \varphi(\alpha(n))$ . Seja  $\gamma \in D(N)$ . Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \omega_A & \\ & \uparrow \gamma & \\ & N & \xrightarrow{\alpha} M \end{array}$$

Como  $\omega_A$  é injetivo, existe  $\varphi \in D(M)$  tal que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$ . Assim,  $D(\alpha)(\varphi) = \gamma$ . Logo,  $D(\alpha)$  é sobrejetiva.

Portanto,  $D$  preserva sequências exatas curtas.

(iii) Consideremos o homomorfismo

$$\alpha_M : M \rightarrow D^2(M) = \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A),$$

dado por  $(\alpha_M(m))(\varphi) = \varphi(m)$ , sendo  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, \omega_A)$ . Mostraremos que  $\alpha_M$  é um isomorfismo.

Suponhamos que  $\alpha_M$  não é injetivo, isto é,  $\exists x \in M, x \neq 0$  tal que  $\alpha_M(x) = 0$ . Pela definição de  $\alpha_M$ , segue que  $\varphi(x) = 0, \forall \varphi \in \text{Hom}_A(M, \omega_A)$ . Mas isto contradiz o Lema 1.21. Logo  $\alpha_M$  é injetiva.

Para provarmos a sobrejetividade usaremos indução sobre o comprimento de  $M$ .

Suponhamos que  $\ell(M) = 1$ . Se mostrarmos que  $\ell(D^2(M)) = 1$ , segue que  $\alpha_M$  é isomorfismo, pois  $\alpha_M$  é injetiva. Por definição

$$D(M) = \text{Hom}_A(M, \omega_A) \simeq \text{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, \omega_A) = (0 :_{\omega_A} \mathfrak{m}) = \text{Soc}(\omega_A).$$

Como  $\omega_A$  é extensão essencial de  $A/\mathfrak{m}$ , segue pela Proposição 2.5 e o Lema 2.8 que o socle de  $\omega_A$  é  $A/\mathfrak{m}$ . Disto resulta que  $D(M) \simeq A/\mathfrak{m} \Rightarrow \ell(D(M)) = 1$ . Aplicando o mesmo argumento em  $D(M)$  temos que  $\ell(D^2(M)) = 1$ .

Se o comprimento de  $M$  é maior que 1, seja  $M'$  um submódulo próprio e tomemos  $M'' = M/M'$ . Como  $D$  é exato, obtemos um diagrama comutativo de linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\beta} & M & \xrightarrow{\gamma} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_{M'} & & \downarrow \alpha_M & & \downarrow \alpha_{M''} & & \\ 0 & \longrightarrow & D^2(M') & \xrightarrow{\bar{\beta}} & D^2(M) & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & D^2(M'') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva,  $\alpha_{M'}$  e  $\alpha_{M''}$  são isomorfismos. Pelo Lema da Serpente resulta imediatamente que  $\alpha_M$  é sobrejetiva. ■

Portanto, todo anel local de dimensão zero têm módulo canônico e com base nele podemos explicitar o funtor dualizante.

**Corolário 2.10** *Seja  $A$  um anel local Artiniano. Então:*

- (i)  $\omega_A$  é módulo fiel (isto é,  $(0 :_A \omega_A) = 0$ );
- (ii)  $\ell(\omega_A) = \ell(A)$ ;
- (iii)  $\text{End}_A(\omega_A) \simeq A$ .

**Demonstração:** Por definição, tem-se  $D(A) = \text{Hom}_A(A, \omega_A) \simeq \omega_A$ . Assim:

- (i)  $0 :_A \omega_A = 0 :_A \text{Hom}_A(A, \omega_A) = 0$ .
- (ii) Vimos antes que se  $D$  é funtor dualizante, então  $\ell(D(A)) = \ell(A)$ , logo  $\ell(\omega_A) = \ell(A)$ .
- (iii)  $A \simeq D^2(A) = D(D(A)) \simeq D(\omega_A) = \text{Hom}_A(\omega_A, \omega_A) = \text{End}_A(\omega_A)$ . ■

Voltando ao caso de igual característica, vimos que  $\text{Hom}_k(-, k)$  é um funtor dualizante. Resulta que  $\text{Hom}_k(-, k) \simeq E(-)$ , sendo  $E$  funtor dualizante. Em particular,  $\text{Hom}_k(A, k) \simeq \omega_A$ .

Este resultado admite a seguinte generalização:

**Proposição 2.11** *Seja  $(B, \mathfrak{m}_B) \rightarrow (A, \mathfrak{m})$  um homomorfismo local de anéis locais, com  $A$  Artiniano. Suponhamos que, através deste homomorfismo,  $A$  é finitamente gerado como  $B$ -módulo. Se  $E = E(B/\mathfrak{m}_B)$  é a envoltória injetiva do corpo das classes de resíduo de  $B$ , então*

$$\omega_A = \text{Hom}_B(A, E).$$

*Em particular, se  $B$  também é Artiniano, então  $\omega_A = \text{Hom}_B(A, \omega_B)$ .*

**Demonstração:** Devemos provar que  $\text{Hom}_B(A, E)$  é a envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$ . Já que  $\text{Hom}_B(A, E)$  é um  $A$ -módulo injetivo, resta mostrarmos que  $\text{Hom}_B(A, E)$  é extensão essencial de  $A/\mathfrak{m}$ . O homomorfismo local  $(B, \mathfrak{m}_B) \rightarrow (A, \mathfrak{m})$  induz uma inclusão  $k_B := B/\mathfrak{m}_B \subset k = A/\mathfrak{m}$  tornando  $k$  espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $k_B$ .

Temos que  $k$  é um anel local de dimensão zero contendo um corpo, donde, pelo que já foi feito,  $\text{Hom}_{k_B}(-, k_B)$  e  $\text{Hom}_k(-, k)$  são funtores dualizante sobre os  $k$ -módulos. Pela proposição 2.6 estes funtores são isomorfos. Assim

$$\text{Hom}_{k_B}(k, k_B) \simeq \text{Hom}_k(k, k) \simeq k.$$

Logo, nosso problema se resume a provarmos que  $\text{Hom}_B(A, E)$  é extensão essencial de  $\text{Hom}_{k_B}(k, k_B)$ .

Para tal, seja  $S = \text{Soc}(\text{Hom}_B(A, E))$ . Temos que  $\text{Hom}_B(A, E)$  é extensão essencial de  $S$ , pois todo módulo não-nulo contém um submódulo simples e socle é a soma de todos os submódulo simples de  $\text{Hom}_B(A, E)$ .

Mostremos que  $S \simeq \text{Hom}_{k_B}(k, k_B)$ . Para verificarmos este fato, seja  $\varphi \in S = (0 :_{\text{Hom}_B(A, E)} \mathfrak{m})$ , com  $\varphi \neq 0$ . Temos que  $\varphi \in \text{Hom}_B(A, E)$  e  $\mathfrak{m}\varphi = 0$ . Como  $\mathfrak{m}_B A \subset \mathfrak{m}$ , a imagem de  $\varphi$  é também anulada por  $\mathfrak{m}_B \Rightarrow \text{Im } \varphi \subset \text{Soc}_B(E)$ . Por hipótese,  $E$  é a envoltória injetiva de  $k_B$ , logo, e pelo Lema 2.8, segue que  $\text{Soc}(E) = k_B$ . Desde que  $k_B$  é simples,  $\text{Im } \varphi \neq 0$  e  $\text{Im } \varphi \subset k_B$ , temos que  $\text{Im } \varphi = k_B$ .

Definamos

$$\omega : S \rightarrow \text{Hom}_{k_B}(k, k_B)$$

por  $\omega(\varphi)(\bar{a}) = \varphi(a)$ , sendo  $\bar{a} \in k = A/\mathfrak{m}$  e  $\varphi(a) \in k_B = A/\mathfrak{m}_B$ . Usando as considerações acima segue que  $\omega$  é isomorfismo. ■

## 2.2 Anéis Artinianos de Gorenstein

Nesta seção, consideraremos a seguinte classe de anéis:

**Definição 2.12** Um anel Artiniano local  $A$  é um anel de *Gorenstein* quando  $\omega_A \simeq A$ .

Observemos que todo corpo é anel de Gorenstein. Mais tarde veremos outros anéis de Gorenstein. O seguinte critério pode facilitar o reconhecimento de um tal anel.

**Proposição 2.13** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Artiniano local. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $A$  é Gorenstein;
- (ii)  $A$  é injetivo como  $A$ -módulo;
- (iii) O socle de  $A$  é simples;
- (iv)  $\omega_A$  é gerado por um único elemento.

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Uma vez que  $\omega_A$  é injetivo e  $\omega_A \simeq A$ , segue que  $A$  é injetivo.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Como um anel local não possui idempotentes  $\neq 0, 1$ , temos que  $A$  não possui somandos diretos próprios. Ora, supondo que o socle de  $A$  não é simples,  $\text{Soc}(A)$  pode ser escrito como soma direta de submódulos próprios, uma vez que  $\text{Soc}(A)$  admite uma tal decomposição como espaço vetorial sobre  $A/\mathfrak{m}$  e esta decomposição é automaticamente uma soma direta de  $A$ -módulos devido a que  $\mathfrak{m}\text{Soc}(A) = 0$ . Temos que a envoltória injetiva de  $\text{Soc}(A)$  é  $A$ . Como a envoltória

injetiva de uma soma direta é a soma direta das extensões injetivas dos somandos (Proposição 1.23) e a envoltória injetiva de um módulo é única, segue que  $A$  pode ser escrito como soma direta. Assim  $A$  pode ser decomposto propriamente como  $A$ -módulo, contradição. Portanto  $\text{Soc}(A)$  é simples.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Por hipótese, socle de  $A$  é simples, ou seja, isomorfo a  $A/\mathfrak{m}$ . Provaremos que  $\omega_A \simeq A$ , e assim obtemos o resultado desejado. Seja  $I = \text{Soc}(A)$ . Por hipótese  $I \simeq A/\mathfrak{m}$ , e como  $\omega_A$  é a envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$ , temos que  $I \subset \omega_A$ . Usando o fato de  $\omega_A$  ser injetivo segue que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & I \xrightarrow{\alpha} A \\ & & \beta \downarrow \swarrow \gamma \\ & & \omega_A \end{array}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são homomorfismos de inclusão. Supondo que  $\gamma$  não é injetivo, existe um  $x \in A$  tal que  $x$  é não-nulo e  $\gamma(x) = 0$ . Notemos que  $A$  é extensão essencial de  $I$ . Logo  $(x)$  intercepta  $I$  não trivialmente, ou seja,  $\exists ax \in I$  não-nulo, onde  $a \in A$ . Temos que  $\beta(ax) \neq 0$  e  $\gamma(\alpha(ax)) = 0$ . Isto contradiz o fato do diagrama ser comutativo. Portanto,  $\gamma$  é homomorfismo injetivo de  $A$ -módulos de igual comprimento (Corolário 2.10), logo é um isomorfismo.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Como  $\omega_A$  é gerado por um único elemento,  $\exists w \in \omega_A$  tal que  $\omega_A = Aw$ . Consideremos o homomorfismo  $\alpha : A \rightarrow \omega_A$  dado por  $\alpha(a) = aw$ . Se mostrarmos que  $\alpha$  é isomorfismo temos que  $A$  é de Gorenstein. Já sabemos que  $\alpha$  é sobrejetivo. Se  $\alpha$  não é injetivo, isto é,  $\ker(\alpha) \neq 0$  então  $\ell(\omega_A) < \ell(A)$ , contradizendo o Corolário 2.10. Portanto  $A$  é anel de Gorenstein. ■

Vimos anteriormente (Exemplo 2.4) que os anéis

$$K[X, Y]/(X^2, Y^3), \quad K[X, Y]/(X^2, XY^2, Y^3)$$

têm, respectivamente, socle simples e não simples. Logo, somente o primeiro é Gorenstein.

Um método geral para construções de anéis Gorenstein é a técnica de sistemas inversos de Macaulay. Descreveremos este método.

Seja  $S = k[x_1, \dots, x_r]$  o anel de polinômios sobre o corpo  $k$ . Mostraremos que

$$T := k[x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}] \subset k(x_1, \dots, x_r)$$

admite estrutura de  $S$ -módulo. Para isto seja  $L \subset k(x_1, \dots, x_r)$  o  $k$ -subespaço vetorial gerado pelos monômios que não estão em  $T$ . Temos que  $L$  é  $S$ -submódulo de  $k(x_1, \dots, x_r)$ , onde a multiplicação por escalares é a multiplicação usual de frações racionais. Consideremos a aplicação natural de  $T \subset k(x_1, \dots, x_r)$  em  $k(x_1, \dots, x_r)/L$  que leva o elemento de  $T$  na sua classe com respeito a  $L$ . Temos que esta aplicação é um isomorfismo de  $k$  espaços vetoriais. Já que  $k(x_1, \dots, x_r)/L$  tem estrutura de  $S$ -módulo, segue que  $T$  é um  $S$ -módulo por transporte de estrutura. Como  $T$  é

gerado por monômios, para esclarecemos a ação de  $S$  em  $T$  só precisamos analisar nos monômios. Esta ação é dada por

$$s.t = \begin{cases} st, & \text{se } st \in T \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para  $d \geq 0$  inteiro denotaremos por  $S_d$  o  $k$ -espaço vetorial gerado pelos monômios de grau  $d$ .

**Teorema 2.14** *Com a notação acima, existe uma bijeção da família dos  $S$ -submódulos  $M \subset T$  finitamente gerados tais que  $(0 :_S M) \subset (x_1, \dots, x_r)$  e  $S/(0 :_S M)$  é um anel local de dimensão zero sobre a família dos ideais  $I \subset S$  tais que  $I \subset (x_1, \dots, x_r)$  e  $S/I$  é um anel local de dimensão zero; explicitamente:*

$$\begin{aligned} M &\rightarrow (0 :_S M) \\ I &\rightarrow (0 :_T I). \end{aligned}$$

Se  $M$  e  $I$  estão em correspondência, então  $M \simeq \omega_{S/I}$ . Uma condição necessária e suficiente para que um ideal  $I \subset (x_1, \dots, x_r)$ , onde  $S/I$  é um anel local de dimensão zero, seja Gorenstein é que  $I = (0 :_S f)$  para algum  $f \in T$  não-nulo.

**Demonstração:** Para provarmos a correspondência, precisaremos aplicar a Proposição 2.11, com  $B = S$ . Necessitamos então encontrar a envoltória injetiva de  $S/(x_1, \dots, x_r)$ . Mostraremos que  $T$  é a envoltória injetiva de  $S/(x_1, \dots, x_r)$ . Isto segue dos seguintes fatos:

- Temos que o  $S$ -módulo  $T$  pode ser identificado como o dual graduado de  $S$ ,  $\bigoplus_d \text{Hom}_k(S_d, k)$  (a terminologia “dual graduado” vem do seguinte fato: o funtor  $D$  que leva cada  $S$ -módulo graduado  $\bigoplus_d M_d$  em  $D(\bigoplus_d M_d) = \bigoplus_d \text{Hom}_k(M_d, k)$  é dualizante na categoria dos  $S$ -módulos graduados - para maiores detalhes remetemos ao Apêndice). Com efeito seja  $B$  a  $k$  base natural de  $S = k[x_1, \dots, x_r]$  e  $\bar{B}$ , a base dual com respeito a  $B$ . A cada elemento  $\bar{m} \in \bar{B}$  associamos a  $m^{-1} \in T$ , temos que esta função é um isomorfismo. Portanto  $T$  é isomorfo ao dual graduado de  $S$ .
- Afirmamos que  $T$  é injetivo. Isto equivale a mostrarmos que o dual graduado de  $S$  é injetivo. Desde que  $\bigoplus_d \text{Hom}_k(S_d, k) = D(S)$ ,  $S$  é projetivo e  $D$  é funtor dual graduado, temos que  $\bigoplus_d \text{Hom}_k(S_d, k)$  é injetivo. Logo  $T$  é injetivo.
- Por fim provaremos que  $T$  é extensão essencial de  $K = S/(x_1, \dots, x_r)$ . Primeiro veremos que  $S/(x_1, \dots, x_r)$  é submódulo de  $T$ . Isto segue direto da ação de  $S$  em  $T$ , onde  $K$  será isomorfo aos elementos de grau zero de  $T = [x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}]$ . Seja  $N$  submódulo de  $T$  não-trivial, ou seja, existe  $n \in N$  não-nulo. Podemos escrevê-lo na forma

$$n = \sum_I k_I (x_1^{-1})^{i_1} \dots (x_r^{-1})^{i_r},$$

sendo  $I = i_1, \dots, i_r$ . Se  $x_1$  aparece em  $n$ , então multipliquemos  $(x_1)^h$  por  $n$ , sendo  $h$  o maior valor absoluto das potências de  $x_1$  de  $n$ , assim obtemos um

outro elemento não-nulo de  $N$  onde não aparece a variável  $x_1$ . Fazendo isto nas outras variáveis encontraremos um elemento de  $N$  não-nulo que também pertence a  $K$ . Logo  $T$  é extensão essencial de  $K$ .

Em conclusão,  $T$  é a envoltória injetiva de  $S/(x_1, \dots, x_r)$ .

Seja  $I \subset (x_1, \dots, x_r)$  um ideal tal que  $S/I$  é um anel Artiniano local – isto é,  $I$  é  $(x_1, \dots, x_r)$ -primário. Pela Proposição 2.11, o módulo canônico de  $A = S/I$  é  $\omega_A = \text{Hom}_S(A, T) \simeq (0 :_T I) \subset T$ . Tomemos  $M := \omega_A$ . Aplicando o corolário 2.10, segue que  $(0 :_A M) = 0$ , isto é,  $(0 :_S M) = I$ .

Reciprocamente, fixamos um  $M$  submódulo finitamente gerado de  $T$  tal que  $(0 :_S M) \subset (x_1, \dots, x_r)$  e  $S/(0 :_S M)$  é um anel Artiniano local. Seja  $I = (0 :_S M)$ . Provaremos que  $M = (0 :_T I)$ . Claramente,  $M \subset (0 :_T I) \simeq \omega_A$ . Para demonstrarmos a inclusão inversa, apliquemos o funtor dualizante a

$$0 \rightarrow M \rightarrow \omega_A \rightarrow \omega_A/M \rightarrow 0$$

obtendo

$$0 \rightarrow D(\omega_A/M) \rightarrow D(\omega_A) \simeq A \rightarrow D(M) \rightarrow 0.$$

Se mostrarmos que  $A \rightarrow D(M)$  é um isomorfismo, seguirá que  $D(\omega_A/M) = 0$ , e daí  $\omega_A/M = 0$ , como queríamos. Ora, seja  $x$  pertencente ao núcleo de  $A \rightarrow D(M)$  acima, isto é,  $x \in 0 : D(M)$ . Por propriedades do funtor  $D$ ,  $x \in 0 : M$ . Mas,  $(0 : AM) = 0$ . ■

**Exemplo 2.15** - Caso  $r = 3$ . Tomemos  $f = x_1^{-1}x_2^{-1} + x_3^{-2} \in T$ . Por um cálculo direto temos que  $I := (0 :_S f) = (x_1^2, x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2 - x_3^2)$  (observe que a ação de  $S$  em  $T$  não é a multiplicação usual de polinômios). Notemos que  $S/I$  é local de dimensão zero. Pelo teorema acima segue que  $S/I$  é Gorenstein. Observe que  $S/I$  não é interseção completa - para maiores detalhes remetemos a [2, exercício 21.6].

## 2.3 Módulo Canônico e Anéis de Gorenstein em dimensões maiores

Nesta seção estenderemos os resultados anteriores para anéis locais de Cohen–Macaulay de dimensão arbitrária.

A definição de módulo canônico será por indução na  $\dim A$ .

**Definição 2.16** Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Cohen–Macaulay local de dimensão  $d$ . Um  $A$ -módulo finitamente gerado  $\omega$  é *módulo canônico* de  $A$  se existe um  $x \in A$  regular em ambos  $A$  e  $\omega$  tal que  $\omega/x\omega$  é módulo canônico de  $A/(x)$ .  $A$  é dito Gorenstein se um tal módulo canônico é isomorfo a  $A$ .

Notemos que esta definição indutiva tem fundamento, pois  $\dim A/(x) = \dim A - 1$  e  $A/(x)$  é local Cohen–Macaulay. Além disso, se  $\dim A = 0$ , o módulo canônico existe.

Em outras palavras,  $\omega$  será o módulo canônico se existir alguma sequência regular máxima  $x_1, \dots, x_d$  em  $A$  ( $d = \dim A$ ) tal que  $\omega/(x_1, \dots, x_d)\omega$  é a envoltória injetiva do corpo de classe de resíduos de  $A/(x_1, \dots, x_d)$ . Do mesmo modo,

$A$  é Gorenstein  $\Leftrightarrow A/(x_1, \dots, x_d)$  é Gorenstein (no sentido de dimensão zero)  $\Leftrightarrow \omega/(x_1, \dots, x_d)\omega$  é gerado por um só elemento  $\Leftrightarrow A$  tem módulo canônico cíclico.

A título de ilustração, é fácil ver pela definição que todo anel local regular é de Gorenstein, usando de fato, um sistema de parâmetros regulares.

A definição de módulo canônico é insatisfatória, a menos que decidamos as seguintes questões:

- A definição independe da escolha da sequência regular  $x_1, \dots, x_d$ ?
- Um módulo canônico é único a menos de isomorfismos?

Podemos antecipar que nem todo anel Cohen–Macaulay local admite um módulo canônico. Essa afirmação ficará clara mais adiante.

Para resolvermos estas questões introduziremos outras noções homológicas.

**Definição 2.17 (Resoluções injetivas mínimas)** Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo. Um complexo acíclico de  $A$ -módulos injetivos

$$\mathcal{E} : E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow \dots \quad (2.1)$$

tal que  $\ker(E_0 \rightarrow E_1) = M$  é dito ser uma *resolução injetiva* de  $M$ . Uma resolução injetiva  $\mathcal{E}$  é dita *mínima* se  $E_n$  é a envoltória injetiva de  $\ker(E_n \rightarrow E_{n+1})$ ,  $\forall n$ .

A existência de resoluções injetivas é garantida pelo resultado da existência de “bastante injetivos”. Quando é mínima, será única a menos de isomorfismos ([2, Corolário A3.11]). Como no caso de resoluções projetivas, a noção fornece um invariante numérico.

**Definição 2.18 (Dimensão Injetiva)** A *dimensão injetiva*  $\text{id}_A M$  de  $M$  é o comprimento de uma resolução injetiva mínima de  $M$ .

Finalizadas as definições necessárias ao entendimento do teorema central deste capítulo, agora o enunciaremos.

**Teorema 2.19 (Dualidade)** *Sejam  $A$  anel local Cohen–Macaulay de dimensão  $d$  e  $W$  um  $A$ -módulo finitamente gerado.  $W$  é módulo canônico de  $A$  se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $\text{prof } W = d$ ;
- (ii)  $\text{id}_A W < \infty$ ;
- (iii)  $\text{End}(W) = A$ .

Uma consequência imediata deste teorema é que uma condição necessária e suficiente para um anel local Cohen–Macaulay seja de Gorenstein é que tenha dimensão injetiva finita.

A demonstração do Teorema 2.19 será nosso objetivo principal no que segue, para o qual precisaremos de outras preliminares.



## 2.4 Módulos de Cohen–Macaulay máximos

Começaremos por examinar a condição (i) do Teorema 2.19.

**Proposição 2.20** - Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel local de dimensão  $d$  e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:

- a. Todo sistema de parâmetros de  $A$  é uma  $M$ -sequência.
- b. Algum sistema de parâmetros de  $A$  é uma  $M$ -sequência.
- c.  $\text{prof } M = d$ .

Notemos que se uma destas condições é satisfeita (e, portanto, todas) temos que  $M$  é um módulo *Cohen–Macaulay máximo*.

**Demonstração:**

(a)  $\Rightarrow$  (b) Imediato devido à existência de sistemas de parâmetros em um anel local arbitrário.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Sabemos que

$$\text{prof } M \leq \dim M \leq \dim A = d.$$

Assim,  $\text{prof } M \leq d$ . Por outro lado, por hipótese, existe  $x_1, \dots, x_n$  um sistema de parâmetros de  $A$  que é uma  $M$ -sequência. Pelo Teorema de Krull,  $n = d$ . Daí,  $\text{prof } M \geq d$ . Portanto,  $\text{prof } M = d$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a) Seja  $x_1, \dots, x_d$  um sistema de parâmetros de  $A$ . Como o ideal  $(x_1, \dots, x_d)$  é  $\mathfrak{m}$ -primário, pela Proposição 1.15 temos

$$\text{prof}((x_1, \dots, x_d), M) = \text{prof}(\mathfrak{m}, M) = \text{prof } M = d.$$

Pela Proposição 1.18,  $(x_1, \dots, x_d)$  é uma sequência regular. ■

Observemos que se  $(A, \mathfrak{m})$  é Artiniano local, então todo módulo  $M$  finitamente gerado é Cohen–Macaulay máximo. De fato,

$$0 \leq \text{prof } M = \text{prof}(\mathfrak{m}, M) \leq \text{alt } \mathfrak{m} = \dim A = 0.$$

Assim,  $\text{prof } M = 0$ . Se  $(A, \mathfrak{m})$  é anel local regular, então, pela fórmula de Auslander–Buchsbaum, os  $A$ -módulos Cohen–Macaulay máximos são exatamente os  $A$ -módulos livres de posto finito.

## 2.5 Módulos de dimensão injetiva finita

Analisaremos a condição (ii) do Teorema 2.19.

Lembremos que dados um  $A$ -módulo  $E$  e um ideal  $J$  de  $A$ , então  $\text{Hom}_A(A/J, E) \simeq (0 :_E J) \subset E$ . Se, além disto,  $E$  for injetivo então  $(0 :_E J)$  é  $A/J$ -módulo injetivo.

**Proposição 2.21** *Sejam  $A$  um anel local de Cohen–Macaulay e  $M$  um  $A$ -módulo. Seja  $\mathcal{E}$  como em (2.1) uma resolução injetiva mínima de  $M$  e  $x \in A$  um elemento regular em  $A$  e em  $M$ . O complexo*

$$\mathcal{E}' : E'_1 \rightarrow E'_2 \rightarrow \cdots,$$

onde  $E'_i = \text{Hom}_A(A/(x), E_i)$  e cujas aplicações são as induzidas por  $\mathcal{E}$ , é resolução injetiva mínima de  $M/xM$  sobre  $A/(x)$ . Além disso, se  $N$  é um  $A$ -módulo anulado por  $x$ , então

$$\text{Ext}_{A/(x)}^j(N, M/xM) \simeq \text{Ext}_A^{j+1}(N, M), \text{ para } \forall j \geq 0.$$

**Demonstração:** Seja

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow \cdots$$

tal resolução. Aplicando o funtor  $\text{Hom}_A(A/(x), -)$  obtemos

$$\text{Hom}_A(A/(x), \mathcal{E}) : \text{Hom}_A(A/(x), M) \longrightarrow \text{Hom}_A(A/(x), E_0) \xrightarrow{\bar{\varphi}_0} \cdots,$$

sendo  $\bar{\varphi}_i$  os homomorfismos induzidos por  $\varphi_i$ . Notemos que

$$\text{Hom}_A(A/(x), N) \simeq (0 :_N x),$$

para todo  $A$ -módulo  $N$ . Assim,

$$\text{Hom}_A(A/(x), \mathcal{E}) : (0 :_M x) \longrightarrow (0 :_{E_0} x) \xrightarrow{\varphi'_0} (0 :_{E_1} x) \xrightarrow{\varphi'_1} \cdots,$$

onde  $\varphi'_i$  a restrição de  $\varphi_i$  a  $(0 :_{E_i} x)$ . Por hipótese  $(0 :_M x) = \{0\}$ , e o mesmo acontece com  $(0 :_{E_0} x)$ . De fato, como  $E_0$  é a envoltória injetiva de  $M$ , se  $(0 :_{E_0} x)$  é não-nulo, então  $(0 :_{E_0} x)$  intercepta  $M$  de maneira não-trivial, ou seja,  $(0 :_M x) \neq \{0\}$ , contradizendo a hipótese. Logo,  $(0 :_{E_0} x) = \{0\}$ . Portanto,  $\text{Hom}_A(A/(x), M) = \text{Hom}_A(A/(x), E_0) = 0$ .

Usando a terminologia do enunciado,

$$\mathcal{E}' = \text{Hom}_A(A/(x), \mathcal{E}).$$

Mostraremos que  $\mathcal{E}'$  é a resolução injetiva mínima de  $M/xM$ , visto como  $A/(x)$ -módulo, e disto resulta que

$$\text{id}_{A/(x)} M/xM = \text{id}_A M - 1.$$

Primeiro veremos que a resolução é injetiva. Pela observação feita antes desta proposição  $E'_i$  é injetivo,  $\forall i$ . Temos que a homologia de  $\text{Hom}_A(A/(x), \mathcal{E})$  é por definição  $\text{Ext}_A^*(A, M)$ . Daí se mostrarmos que

$$\text{Ext}_A^1(A/(x), M) \simeq M/xM \text{ e } \text{Ext}_A^j(A/(x), M) = 0, \forall j \neq 1$$

segue que  $\mathcal{E}'$  é resolução injetiva de  $M/xM$ . Para isto consideramos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow A/(x) \longrightarrow 0.$$

Esta nos dará a sequência exata longa

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(A/(x), M) &\longrightarrow \text{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{x} \text{Hom}_A(A, M) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_A^1(A/(x), M) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(A, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^1(A, M) \\ &\longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow \text{Ext}_A^j(A/(x), M) \longrightarrow \text{Ext}_A^j(A, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^j(A, M) \\ &\longrightarrow \dots \end{aligned}$$

E como  $\text{Hom}_A(A/(x), M) = 0$ ,  $\text{Hom}_A(A, M) \simeq M$  e  $\text{Ext}_A^j(A, M) = 0$  ( $\forall j$ ), segue da sequência longa que  $\text{Ext}_A^1(A/(x), M) \simeq M/xM$  e  $\text{Ext}_A^j(A/(x), M) = 0$ ,  $\forall j \neq 1$ . Logo  $\mathcal{E}'$  é resolução injetiva de  $M/xM$ .

Agora só falta provarmos que  $E'_n$  é a envoltória injetiva do  $\ker(E'_n \rightarrow E'_{n+1})$ ,  $\forall n$ . Com efeito, seja  $N$  submódulo não-nulo de  $E'_n$ . Então  $N$  é submódulo não-nulo de  $E_n$ , e daí

$$\{0\} \neq N \cap (\ker(E_n \rightarrow E_{n+1})) = N \cap (\ker(E_n \rightarrow E_{n+1})) \cap E'_n.$$

Assim  $N \cap (\ker(E_n \rightarrow E_{n+1})) \cap E'_n \neq \{0\}$ . Já que  $\varphi'_i$  é a restrição de  $\varphi_i$  a  $E'_n$ ,  $\ker(E'_n \rightarrow E'_{n+1}) = \ker(E_n \rightarrow E_{n+1}) \cap E'_n$  e dessa forma  $N \cap \ker(E'_n \rightarrow E'_{n+1}) \neq \{0\}$ . Logo  $E'_n$  é a envoltória injetiva do  $\ker(E'_n \rightarrow E'_{n+1})$ ,  $\forall n$ .

Portanto  $\mathcal{E}'$  é resolução injetiva mínima de  $M/xM$ .

Agora mostraremos a segunda parte. Seja  $N$  um  $A$ -módulo anulado por  $x$ . Queremos demonstrar que

$$\text{Ext}_{A/(x)}^j(N, M/xM) \simeq \text{Ext}_A^{j+1}(N, M), \text{ para } \forall j \geq 0.$$

Observemos que toda aplicação de  $N$  para um dos  $E_i$  tem imagem anulada por  $x$ , donde

$$\text{Hom}_A(N, \mathcal{E}) \simeq \text{Hom}_A(N, \mathcal{E}') \simeq \text{Hom}_{A/x}(N, \mathcal{E}').$$

Analisando a homologia de cada resolução temos que

$$\text{Ext}_{A/(x)}^j(N, M/xM) \simeq \text{Ext}_A^{j+1}(N, M), \text{ para } \forall j \geq 0.$$

■

Para explorar este resultado, faz-se necessária familiarização com propriedades de módulos de dimensão injetiva finita. Módulos de Cohen–Macaulay máximos, de dimensão projetiva finita, são triviais (isto é, livres) pela fórmula de Auslander–Buchsbaum. A proposição a seguir mostra o que ocorre no caso de dimensão injetiva finita.

**Proposição 2.22** *Seja  $A$  anel local Cohen–Macaulay. Se  $M$  é um módulo Cohen–Macaulay máximo, de dimensão injetiva finita, então*

$$\text{id}_A M = \dim A.$$

*Se  $\dim A = 0$ , então  $M$  é soma direta de cópias de  $\omega_A$ ; além disso,  $M \simeq \omega_A$  se, e somente se,  $\text{End}_A(M) = A$ .*

**Demonstração:** Primeiro provaremos a segunda parte do enunciado. Supondo que  $\dim A = 0$ , consideremos o funtor dualizante  $D(-) = \text{Hom}_A(-, \omega_A)$ . Por hipótese,  $M$  tem dimensão injetiva finita. Então aplicando  $D$ , segue que  $D(M)$  tem dimensão projetiva finita, e assim livre, pela fórmula de Auslander–Buchsbaum. Logo,  $D(M)$  é isomorfo a uma soma direta de cópias de  $A$ . Como  $D$  preserva somas diretas e  $D^2(M) \simeq M$ ,  $M$  é soma direta de cópias de  $D(A) = \omega_A$ . Se  $M \simeq \omega_A$ , então

$$\text{End}_A(M) \simeq \text{End}_A(\omega_A) \simeq A,$$

a última equivalência é devida ao Corolário 2.10. Reciprocamente suponhamos  $\text{End}_A(M) = A$ . Sabemos que  $M \simeq (\omega_A)^n$ , daí

$\text{End}_A(M) \simeq \text{End}_A((\omega_A)^n) = \text{Hom}_A((\omega_A)^n, \omega_A) \simeq \bigoplus^n \text{Hom}_A(\omega_A, \omega_A) \simeq A^n$ . Logo,  $A^n \simeq A$  e assim  $n = 1$ . Portanto,  $M \simeq \omega_A$  se, somente se,  $\text{End}_A(M) = A$ .

Na primeira parte do problema usaremos indução sobre  $\dim A$ . Se  $\dim A = 0$ , vimos que  $M$  é soma direta de cópias de  $\omega_A$ . Como  $\omega_A$  é injetivo e a soma direta de módulos injetivos, no caso Noetheriano, é injetivo, segue que  $M$  é injetivo, isto é,  $\text{id } M = 0$ . Suponhamos  $\dim A = d > 0$ . Seja  $\bar{x} = x_1, \dots, x_d$  um sistema de parâmetros de  $A$ . Como  $M$  é C-M máximo, então  $\bar{x}$  é também  $M$ -sequência. Tomemos  $x = x_1$ . Por hipótese  $x$  é não divisor de zero em  $A$  e em  $M$ . Aplicando a Proposição 2.21 e usando a hipótese indutiva segue que

$$\begin{aligned} \text{id}_A M &= 1 + \text{id}_{A/(x)} M/xM \\ &= 1 + \dim A/(x) \\ &= 1 + \dim A - 1 \\ &= \dim A. \end{aligned}$$

Portanto  $\text{id}_A M = \dim A$ . ■

Finalmente analisaremos a última condição do Teorema 2.19, com a seguinte proposição.

**Proposição 2.23** *Sejam  $A$  anel Cohen–Macaulay local de dimensão  $d$  e  $M$   $A$ -módulo Cohen–Macaulay máximo de dimensão injetiva finita.*

(a) *Se  $N$  é um módulo finitamente gerado com profundidade  $e$ , então*

$$\text{Ext}_A^j(N, M) = 0 \text{ se } j > d - e.$$

(b) *Se  $x$  é um não divisor de zero de  $M$ , então  $x$  é um não divisor de zero de  $\text{Hom}_A(N, M)$ . Se  $N$  é também um Cohen–Macaulay máximo, então o homomorfismo natural  $\text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_{A/(x)}(N/xN, M/xM)$  induz um isomorfismo de  $A/(x)$ -módulos*

$$\text{Hom}_A(N, M)/x\text{Hom}_A(N, M) \simeq \text{Hom}_{A/(x)}(N/xN, M/xM).$$

**Demonstração:**

(a) Podemos, sem perda de generalidade, supor  $M \neq \{0\}$ . Procederemos por indução sobre  $e$ . Caso  $e = 0$ , pela proposição anterior,  $\text{id}_A M = \dim A = d$ . Seja

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_d \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

resolução injetiva de  $M$ . Por definição  $\text{Ext}_A^j(N, M)$  é a homologia de ordem  $j$  da resolução obtida aplicando  $\text{Hom}_A(N, -)$  a resolução acima. Se  $j > d - e = d$ , segue que  $\text{Ext}_A^j(N, M) = \{0\}$ .

Caso  $e > 0$ . Como  $\text{prof } N = e > 0$ , existe  $x \in \mathfrak{m}$  não divisor de zero sobre  $N$ . Daí

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{x} N \longrightarrow N/xN \longrightarrow 0$$

segue que

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_A^j(N, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^j(N, M) \longrightarrow \text{Ext}_A^{j+1}(N/xN, M) \longrightarrow \cdots.$$

Temos que  $\text{prof}(N/xN) = e - 1$ . Pela hipótese de indução,

$$\text{Ext}_A^k(N/xN, M) = 0, \forall k > d - (e - 1) = d - e + 1.$$

Se  $j > d - e$ . Tomemos  $k = j + 1$ , e observemos que  $k > d - e + 1$ . Daí,  $\text{Ext}_A^{j+1}(N/xN, M) = 0$ . Assim,

$$\text{Ext}_A^j(N, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^j(N, M) \longrightarrow 0.$$

Portanto  $x \text{Ext}_A^j(N, M) = \text{Ext}_A^j(N, M)$ . Usando o Lema de Nakayama temos que  $\text{Ext}_A^j(N, M) = \{0\}$ .

(b) Seja  $x$  não divisor de zero de  $M$ . Suponhamos que  $x$  seja divisor de zero de  $\text{Hom}_A(N, M)$ , isto é, existe  $\varphi \in \text{Hom}_A(N, M)$ , não-nulo, tal que  $x\varphi = 0$ . Como  $\varphi$  é não-nulo, existe  $n \in N$  tal que  $m := \varphi(n) \neq 0$ . Assim,  $xm = 0 \Rightarrow x$  é divisor de zero de  $M$ , absurdo. Logo  $x$  é um não divisor de zero sobre  $\text{Hom}_A(N, M)$ .

Agora suponhamos  $N$  Cohen–Macaulay máximo e consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor  $\text{Hom}_A(N, -)$  obtemos a sequência exata longa

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M/xM) \rightarrow \text{Ext}_A^1(N, M) \rightarrow \dots$$

Ora,  $N$  é Cohen–Macaulay máximo e  $\text{prof } N = d$ . Então, pelo item (a) do enunciado, temos que  $\text{Ext}_A^1(N, M) = 0$ , resultando a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M/xM) \rightarrow 0$$

Logo,

$$\text{Hom}_A(N, M)/x\text{Hom}_A(N, M) \simeq \text{Hom}_A(N, M/xM).$$

Com isto basta provarmos que  $\text{Hom}_A(N, M/xM) \simeq \text{Hom}_{A/(x)}(N/xN, M/xM)$ . Isolaremos este fato no seguinte lema, que será também útil mais adiante:

**Lema 2.24** *Sejam  $A$  anel local e  $M, N$  módulos finitamente gerados. Seja  $x$  elemento do ideal máximo de  $A$  tal que  $x$  é não divisor de zero de  $M$ . Sejam  $\varphi : N \rightarrow M$  um  $A$ -homomorfismo e  $\psi : N/xN \rightarrow M/xM$ , o homomorfismo induzido por  $\varphi$ .*

(a) *Se  $\psi$  é sobrejetivo, então  $\varphi$  é sobrejetivo.*

(b) *Se  $\psi$  é injetivo, então  $\varphi$  é injetivo.*

*Mais ainda, se  $M$  e  $N$  são módulos  $C$ - $M$  máximos,  $M$  tem dimensão injetiva finita e todo  $A/(x)$ -homomorfismo  $\psi : N/xN \rightarrow M/xM$  é induzido por um  $A$ -homomorfismo  $\varphi : N \rightarrow M$ .*

**Demonstração:**

(a) Suponhamos  $\psi$  sobrejetivo. Digamos que  $\psi(\bar{n}_1), \dots, \psi(\bar{n}_d)$  geram  $M/xM$ , onde  $n_1, \dots, n_d \in N$ . Pela definição de  $\psi$ , segue que  $[\varphi(n_1)], \dots, [\varphi(n_d)]$  geram  $M/xM$ . Pelo Lema de Nakayama,  $\varphi(n_1), \dots, \varphi(n_d)$  geram  $M$ . Logo,  $\varphi$  é sobrejetiva.

(b) Suponhamos  $\psi$  é um homomorfismo injetivo. Tomemos  $J = \ker(\varphi)$ . Mostremos que  $J = xJ$ . Como  $J$  é um módulo,  $xJ \subset J$ . Reciprocamente, dado  $j \in J \Rightarrow \varphi(j) = 0 \Rightarrow \psi(\bar{j}) = [0]$ . Já que  $\psi$  é injetiva,  $\bar{j} = \bar{0} \Rightarrow j \in xN \Rightarrow j = xn$ , para algum  $n \in N$ . Temos que,  $\varphi(xn) = \varphi(j) = 0$ . E por outro lado,  $\varphi(xn) = x\varphi(n)$ . Daí,  $x\varphi(n) = 0 \Rightarrow \varphi(n) = 0$ , pois  $x$  não é divisor de zero em  $M$ . Assim,  $n \in J$ . Desde que  $j$  é arbitrário,  $J \subset xJ$ . Logo,  $J = xJ$  e novamente aplicando o Lema de Nakayama,  $J = 0 \Rightarrow \varphi$  é injetivo.

A demonstração da última afirmação do lema é uma aplicação do item b da Proposição anterior. ■

Passemos, agora, à demonstração do Teorema 2.19.

**Demonstração do Teorema 2.19:** Suponhamos que  $W$  é módulo canônico de  $A$ . Procederemos por indução sobre  $\dim A$ . Caso  $\dim A = 0$ . Provaremos que  $W$  satisfaz os três itens (i), (ii), (iii):

(i)  $\text{prof } W \leq \dim W \leq \dim A = 0 \Rightarrow \text{prof } W = 0$ .

(ii) Pela teoria já desenvolvida no caso Artiniano,  $W$  é a envoltória injetiva de  $A/\mathfrak{m}$ , sendo  $\mathfrak{m}$  o ideal máximo de  $A$ . Portanto,  $W$  é injetivo, isto é,  $\text{id}_A W = 0$ .

(iii)  $\text{End}(W) = \text{End}(\omega_A) = \text{End}(D(A)) = \text{End}(A) = A$ .

Suponhamos agora que  $\dim A > 0$ . Como  $W$  é o módulo canônico de  $A$ , existe  $x \in \mathfrak{m}$  que é regular em  $A$  e em  $W$  tal que  $W/xW$  é o módulo canônico de  $A/(x)$ . Como  $\dim(A/(x)) = \dim A - 1$ , segue pela hipótese indutiva que o  $(A/(x))$ -módulo  $W/xW$  satisfaz os itens (i), (ii) e (iii). Segue que:

(i) Como  $\text{prof } W = \text{prof}(W/xW) + 1$  e  $\text{prof}(W/xW) = d - 1$ ,  $\text{prof } W = d$ .

(ii) Pela Proposição 2.21,  $\text{id}_{A/(x)} M/xM = \text{id}_A M - 1$  e como  $\text{id}_{A/(x)} M/xM < \infty$ , segue que  $\text{id}_{A/(x)} M < \infty$ .

(iii) Por hipótese  $\text{End}(W/xW) \simeq A/(x)$ , ou seja,  $\text{Hom}_{A/(x)}(W/xW, W/xW) \simeq A/(x)$ . Aplicando a Proposição 2.23-(b),

$$\text{Hom}_{A/(x)}(W/xW, W/xW) \simeq \text{Hom}_A(W, W)/x\text{Hom}_A(W, W).$$

Logo,  $\text{Hom}_A(W, W)/x\text{Hom}_A(W, W) \simeq A/(x)$ . Pelo Lema 2.24,  $\text{Hom}_A(W, W) \simeq A$ . Portanto,  $\text{End}(W) = A$ .

Reciprocamente, seja  $W$  satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Novamente usaremos indução sobre  $\dim A$ . Se  $\dim A = 0$ , para mostrarmos que  $W = \omega_A$ , basta usarmos as condições (ii) e (iii) pois então segue da Proposição 2.22.

Caso  $\dim A > 0$ . Seja  $x$  não divisor de zero de  $A$ . Provaremos que  $W/xW$ ,  $A/(x)$ -módulo, satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). Com efeito,

(i) Podemos construir um sistema de parâmetros  $\underline{x} = x_1, \dots, x_d$  de  $A$  tal que  $x_1 = x$ . Como  $A$  e  $M$  são C-M máximo, segue pela Proposição 2.20 que  $\underline{x}$  é sequência regular em  $A$  e em  $M$ . Logo  $x$  é não divisor de zero em  $A$  e em  $M$ . Assim  $\text{prof } W/xW = \text{prof } W - 1 = d - 1 = \dim A/(x)$ .

(ii)  $\text{id}_{A/(x)}(M/xM) + 1 = \text{id}_A M < \infty \Rightarrow \text{id}_{A/(x)}(M/xM) < \infty$ .

(iii) Pela Proposição 2.23,

$$\text{End}(W/xW, W/xW) = \text{End}(W)/x\text{End}(W).$$

Assim,  $\text{End}(W/xW, W/xW) = A/(x)$ .

Pela hipótese indutiva,  $W/xW$  é o módulo canônico de  $A/(x)$ . Portanto,  $W$  é o módulo canônico de  $A$ . ■

Se analisarmos a demonstração acima, fica claro que a definição de módulo canônico é independente da escolha dos elementos não divisores de zero. Ou seja, se  $A$  tem módulo canônico  $W$  e  $x$  é um elemento regular arbitrário então  $W/xW$  é módulo canônico de  $A/(x)$ .

## 2.6 Unicidade e existência do módulo canônico

Primeiro trabalharemos com a questão da unicidade.

**Corolário 2.25 (Unicidade do módulo canônico)** *Seja  $A$  um anel local Cohen–Macaulay, com módulo canônico  $\omega$ . Se  $M$  é um  $A$ -módulo Cohen–Macaulay máximo de dimensão injetiva finita, então  $M$  é soma direta de cópias de  $\omega$ . Em particular, dois módulos canônicos de  $A$  são isomorfos entre si.*

**Demonstração:** Usaremos indução sobre  $\dim A$ . Se  $\dim A = 0$ , basta aplicarmos a Proposição 2.22. Suponhamos que  $\dim A > 0$ . Seja  $x \in A$  elemento regular em  $A$  e em  $\omega$ . Então  $\omega/x\omega$  é módulo canônico de  $A/(x)$ . Aplicando a hipótese indutiva, segue que  $M/xM \simeq (\omega/x\omega)^{\oplus n} \simeq (\omega^{\oplus n}/x\omega^{\oplus n})$ , para algum  $n \geq 1$ . Pelo Lema 2.24,  $M \simeq \omega^{\oplus n}$ .

Sejam  $\omega$  e  $\omega'$  módulos canônicos de  $A$ . Tomando  $M = \omega'$  segue que  $\omega' \simeq \omega^{\oplus n}$ , para algum  $n \geq 1$  e, analogamente,  $\omega \simeq (\omega')^{\oplus m}$ , para algum  $m \geq 1$ . Disto resulta que  $\omega' \simeq (\omega')^{\oplus nm}$ . Como  $\omega'$  é finitamente gerado,  $mn = 1$ . Logo,  $\omega' = \omega$ . ■

Agora veremos a questão da existência. Recordemos que no caso de  $A$  ser anel local regular, existe  $\omega_A$  e tem-se  $\omega_A \simeq A$ . Provaremos que, se  $A$  é imagem de um homomorfismo de um anel local que tem módulo canônico, então  $A$  também tem módulo canônico.

Admitiremos o seguinte resultado sem demonstração.

**Lema 2.26** [2, Proposição 18.4] *Seja  $R$  um anel e  $M, N$   $R$ -módulos finitamente gerados. Se  $(0 :_R N) + (0 :_R M) = R$  – isto é, se  $N = (0 :_R M)N$  – então  $\text{Ext}_R^t(M, N) = 0$  para todo  $t$ . Se  $(0 :_R M)N \subsetneq N$ , então  $\text{prof}((0 :_R M), N)$  é o menor número  $t$  tal que  $\text{Ext}_R^t(M, N) \neq 0$ .*

**Teorema 2.27 (Construindo módulos canônicos)** *Seja  $(R, \mathfrak{m}_R)$  um anel local de Cohen–Macaulay, com módulo canônico  $\omega_R$ . Seja  $(A, \mathfrak{m})$  uma  $R$ -álgebra local tal que vista como  $R$ -módulo é finitamente gerada e de Cohen–Macaulay. Então  $A$  tem um módulo canônico  $\omega_A$  e vale*

$$\omega_A \simeq \text{Ext}_R^c(A, \omega_R),$$

onde  $c = \dim R - \dim_R A$ .

**Demonstração:** Usaremos indução sobre  $\dim A$ , lembramos que, na hipótese do enunciado,  $\dim A$  coincide com a dimensão de  $A$  como  $R$ -módulo e  $A$  é um anel de Cohen–Macaulay. Se  $\dim A = 0$ , isto é,  $c = \dim R$ , temos que  $(0 :_R A) \supset (\mathfrak{m}_R)^n$ , para algum  $n$  natural, logo  $\sqrt{(0 :_R A)} \supset \mathfrak{m}_R$ , o que implica  $\sqrt{(0 :_R A)} = \mathfrak{m}_R$ . Pela Proposição 1.15,

$$\text{prof}(0 :_R A) = \text{prof}(\sqrt{(0 :_R A)}).$$

Como  $\sqrt{(0 :_R A)} = \mathfrak{m}_R$  e  $R$  é C-M, segue que  $\text{prof}(0 :_R A) = \dim R = c$ , logo,  $\exists \underline{x} = \{x_1, \dots, x_c\}$   $R$ -sequência tal que  $x_i \in (0 :_R A)$ . Escrevamos  $R' = R/(\underline{x})$ . Temos



que  $R'$  é local C-M de dimensão zero e, por definição,  $\omega_{R'} = \omega_R/\underline{x}\omega_R$ . Aplicando a Proposição 2.21 sucessivamente (no primeiro passo  $N = A$ ,  $M = \omega_R$  e  $A = R$ ) e depois a Proposição 2.11 segue que

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^c(A, \omega_R) &\simeq \text{Ext}_{R/x_1}^{c-1}(A, \omega_R/x_1\omega_R) \\ &\simeq \text{Ext}_{R/(x_1, x_2)}^{c-2}(A, \omega_R/(x_1, x_2)\omega_R) \\ &\simeq \dots \\ &\simeq \text{Ext}_{R/(\bar{x})}^0(A, \omega_R/(\bar{x})\omega_R) \\ &\simeq \text{Hom}_{R'}(A, \omega_{R'}) \\ &\simeq \omega_A. \end{aligned}$$

Passemos ao caso em que  $\dim A > 0$ . Seja  $x \in \mathfrak{m}$  um elemento regular em  $A$ . Para mostrarmos que  $\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$  é o módulo canônico de  $A$  basta provarmos que  $x$  é regular em  $\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$  e  $\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)/x\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$  é o módulo canônico de  $A/(x)$ . A sequência exata

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow A/(x) \longrightarrow 0.$$

induz uma sequência exata longa de Ext's

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \text{Ext}_R^c(A/(x), \omega_R) \longrightarrow \text{Ext}_R^c(A, \omega_R) \xrightarrow{x} \text{Ext}_R^c(A, \omega_R) \longrightarrow \text{Ext}_R^{c+1}(A/(x), \omega_R) \\ \longrightarrow \text{Ext}_R^{c+1}(A, \omega_R) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Pela hipótese indutiva

$$\omega_{A/(x)} \simeq \text{Ext}_R^{c+1}(A/(x), \omega_R).$$

Vamos mostrar que  $\text{Ext}_R^{c+1}(A/(x), \omega_R) \simeq \text{Ext}_R^c(A, \omega_R)/x\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$  e que  $x$  é regular em  $\text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$ . Isto seguirá da sequência exata longa acima se provarmos que  $\text{Ext}_R^c(A/(x), \omega_R) = \{0\}$  e também  $\text{Ext}_R^{c+1}(A, \omega_R) = \{0\}$ .

O anel  $A$  é C-M, donde  $\text{prof}_R A = \dim_R A = \dim R - c$  e, assim,  $\text{Ext}_R^{c+1}(A, \omega_R) = \{0\}$ , pela Proposição 2.23, (a).

Quanto ao anulamento de  $\text{Ext}_R^c(A/(x), \omega_R)$ , ponhamos  $I = 0 :_R A$ . Como  $x$  é regular em  $A$ , o ideal  $(I, x)$  tem grade  $c+1$ . Pelo Lema 2.26,  $\text{Ext}_R^c(A/(x), \omega_R) = \{0\}$ . ■

Notemos que uma consequência do teorema é que se  $R$  é anel local de Gorenstein e  $I \subset A$  tal que  $A = R/I$  é C-M, então  $A$  admite módulo canônico  $\omega_A \simeq \text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$ , onde  $c$  é a altura de  $I$ .

Para prosseguirmos, precisaremos de outro resultado, também admitido sem demonstração.

**Lema 2.28** [2, Corolário 19.15] *Se  $R$  é anel local regular e  $A$  uma  $R$ -álgebra local finitamente gerada como  $R$ -módulo, então  $A$  é Cohen–Macaulay se, e somente se,  $\text{pd}_R A = \text{codim}_R A$ , onde  $\text{codim}_R A$  é a codimensão do anulador  $0 :_R A$ .*

Se no teorema anterior  $R$  for regular, temos o seguinte resultado:

**Corolário 2.29** *Seja  $R$  anel local regular. Suponhamos que  $I$  é um ideal de codimensão  $c$  em  $R$  e que  $A = R/I$  é anel de Cohen–Macaulay. Se*

$$F : \dots \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow R,$$

*é uma resolução livre minimal de  $A$ , visto como  $R$ -módulo, então o comprimento de  $F$  é  $c$  e  $F^* := \text{Hom}_R(F, \omega_R)$  é a resolução livre minimal de  $\omega_A$ . Além disso as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a.  $A$  é Gorenstein.*
- b.  $F$  é simétrica no sentido que  $F^* \simeq F$  como complexo.*
- c.  $F_c \simeq R$ .*

**Demonstração:** Primeiro provaremos que o comprimento de  $F$  é  $c$ . Segue pelo Lema 2.28 que  $\text{pd}_R A = \text{codim}_R A = \text{codim}_R(0 :_R A) = \text{codim}_R I = c$ . Como  $F$  é uma resolução projetiva, temos que  $n \geq c$ . Devido ao fato de  $R$  ser local, toda resolução projetiva é livre. Daí, aplicando o Teorema de unicidade da resolução livre mínima ([2, Teorema 20.2]),  $n \leq c$ . Portanto

$$F : 0 \longrightarrow F_c \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow R.$$

Agora mostraremos que  $F^* := \text{Hom}_R(F, \omega_R) \simeq \text{Hom}_R(F, R)$  é a resolução livre minimal de  $\omega_A$ . Notemos que

$$F^* : 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(R, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(F_1, R) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(F_c, R) \longrightarrow \dots$$

e a homologia desta resolução é, por definição,  $\text{Ext}_R^*(A, R)$ . Aplicando o Lema 2.26 e o Teorema 2.27 temos que  $\text{Ext}_R^j(A, R) = 0$ , para  $j < c$ , e  $\omega_A \simeq \text{Ext}_R^c(A, \omega_R)$ , respectivamente. Logo  $F^*$  é a resolução livre minimal de  $\omega_A$ .

E por fim provaremos as implicações:

$a \Rightarrow b$ ) Se  $A$  é Gorenstein, então  $\omega_A = A$ . Daí  $F^*$  é resolução livre minimal de  $A$ . Logo, segue pela unicidade da resolução livre minimal que  $F^* \simeq F$ .

$b \Rightarrow c$ ) Se  $F^* \simeq F$ , então  $F_c \simeq \text{Hom}_R(R, R) \simeq R$ . Logo,  $F_c \simeq R$ .

$c \Rightarrow a$ ) Como  $F_c \simeq R$  segue que

$$F^* : 0 \longrightarrow R \longrightarrow \text{Hom}_R(F_1, R) \longrightarrow \dots \longrightarrow R.$$

Já que  $F^*$  é a resolução livre minimal de  $\omega_A$ , temos que

$$R \longrightarrow \omega_A \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad R/J \simeq \omega_A,$$

sendo  $J$  ideal de  $R$ . Pelo Teorema 2.19

$$\text{End}(\omega_A) \simeq A \Rightarrow \text{Hom}_{R/I}(R/J, R/J) \simeq A \Rightarrow R/J \simeq A = R/I \Rightarrow J = I.$$

Portanto,  $A$  é Gorenstein. ■

## 2.7 Localização e completamento do módulo canônico

Várias passagens específicas da teoria de localização e completamento serão usadas sem maiores detalhes. Estes resultados podem ser encontrados em [2, Capítulos 2 e 7].

**Lema 2.30** *Sejam  $A$  anel local Cohen-Macaulay e  $P$  um ideal primo de  $A$  com codimensão igual a  $c$ . Temos que existe um sop de  $A$  tal que os  $c$  primeiros elementos pertencem a  $P$ .*

**Corolário 2.31** *Seja  $A$  anel local Cohen-Macaulay com módulo canônico  $\omega_A$ . Se  $P$  é ideal primo de  $A$ , então  $(\omega_A)_P$  é módulo canônico de  $A_P$ . Em particular, se  $A$  é Gorenstein, então  $A_P$  é Gorenstein.*

**Demonstração:** Provaremos cada item da caracterização do módulo canônico no Teorema 2.19.

(i) Seja  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado tal que  $\text{prof } M = \dim A$ . Represente por  $d$  e  $c$  a dimensão e a codimensão de  $P$ , respectivamente. Pelo Lema 2.30 existe um sop  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $x_1, \dots, x_c \in P$ . Segue pela Proposição 2.20 que  $x_1, \dots, x_n$  é  $M$ -sequência, em particular  $x_1, \dots, x_c$  também é. Localizando em  $P$  temos que a sequência  $x_1, \dots, x_c$  vista em  $A_P$  é uma  $M_P$ -sequência. Daí

$$\text{prof } M_P = c = \text{codim } P = \dim A_P.$$

Em particular tomando  $M = \omega_A$  segue o resultado deste item.

(ii) Notemos que a localização de uma resolução injetiva finita de  $\omega_A$  nos dar uma resolução injetiva finita de  $(\omega_A)_P$ .

(iii) Em virtude do isomorfismo  $\text{Hom}_{A_P}(N_P, M_P) \simeq (\text{Hom}_A(N, M))_P$ , segue que  $\text{End}((\omega_A)_P) \simeq (\text{End}_A(\omega_A))_P \simeq A_P$ . ■

Uma aplicação desse corolário é um critério sobre quando um módulo canônico  $\omega_A$  é um ideal de  $A$ .

**Corolário 2.32** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  anel local de Cohen-Macaulay tal que o seu módulo canônico  $\omega_A$  existe. Temos que*

$$\omega_A \text{ é isomorfo a um ideal de } A \iff A \text{ é genericamente Gorenstein,}$$

*sendo que um anel será genericamente Gorenstein quando  $A_P$  é de Gorenstein para todo  $P$  ideal primo mínimo de  $A$ .*

**Demonstração:** Usaremos indução sobre  $\dim A$ .

Caso  $\dim A = 0$ . Vamos supor que  $\omega_A$  é isomorfo a um ideal de  $A$ . Seja  $P$  ideal primo mínimo de  $A$ , provaremos que  $A_P$  é de Gorenstein. Desde que  $P = \mathfrak{m}$ ,

temos  $A_P \simeq A$ . Logo, precisamos mostrar que  $A$  é Gorenstein. Já que  $\omega_A \subset A$  e  $\ell(A) = \ell(\omega_A)$ , segue que  $\omega_A = A$ . Reciprocamente, suponhamos que  $A_{\mathfrak{m}}$  é Gorenstein. Desde que  $A_{\mathfrak{m}} \simeq A$ ,  $A$  é Gorenstein. Portanto o módulo canônico de  $A$  é um ideal de  $A$ .

Caso  $\dim A > 0$ . Suponhamos que  $\omega_A$  é isomorfo a um ideal de  $A$ . Seja  $P$  ideal primo mínimo de  $A$ . Temos que  $\text{alt } P = 0$ , ou seja,  $\dim A_P = 0$ . Pelo corolário 2.31, o módulo canônico de  $A_P$  é  $(\omega_A)_P$ . Já que  $(\omega_A)_P$  é ideal de  $A_P$  e  $\dim A_P = 0$ , segue pela demonstração do caso dimensão zero que  $A_P$  é Gorenstein. Reciprocamente, suponhamos que  $A_P$  é Gorenstein para todo ideal primo mínimo  $P$  de  $A$ . Então, pelo Teorema 2.27, temos que

$$A_P \simeq \text{Ext}_A^{\dim A}(A_P, \omega_A),$$

$\forall P$  primo mínimo de  $A$ . Assim  $\omega_A$  tem posto igual a 1. Segue pelo [1, 1.4.17] (Seja  $A$  anel e  $M$   $A$ -módulo de posto  $r$ , então  $M$  é isomorfo a um submódulo de um  $A$ -módulo livre finito de posto  $r$ ) que  $\omega_A$  é isomorfo a um submódulo de  $A$ , ou seja, ideal de  $A$ . ■

Em particular, se  $A$  for um domínio local de Cohen-Macaulay com módulo canônico, temos que seu módulo canônico é um ideal de  $A$ .

**Corolário 2.33** *Se  $(A, \mathfrak{m})$  é anel local de Cohen-Macaulay com módulo canônico  $\omega_A$ , então o completamento  $\hat{\mathfrak{m}}$ -ádico  $\hat{A}$  de  $A$  possui módulo canônico que é dado por  $\widehat{\omega_A}$ . Em particular,  $A$  é Gorenstein  $\Leftrightarrow$  o completamento  $\hat{A}$  é Gorenstein.*

**Demonstração:** A definição de módulo canônico diz que  $\widehat{\omega_A}$  será módulo canônico de  $\hat{A}$  se existir alguma sequência regular  $x_1, \dots, x_d$  de  $\hat{A}$  tal que também é  $\widehat{\omega_A}$ -sequência e  $\widehat{\omega_A}/(x_1, \dots, x_d)\widehat{\omega_A}$  é módulo canônico de  $\hat{A}/(x_1, \dots, x_d)\hat{A}$ .

Seja  $x_1, \dots, x_d$  sop de  $A$ . Fixemos  $x_1, \dots, x_d$  uma sequência regular de  $A$  que também é  $\omega_A$ -sequência. Olhando tal sequência em  $\hat{A}$  temos que  $x_1, \dots, x_d$  é  $\hat{A}$ -sequência e  $\widehat{\omega_A}$ -sequência. Como

$$\hat{A}/(x_1, \dots, x_d)\hat{A} \simeq A/(x_1, \dots, x_d)$$

e

$$\widehat{\omega_A}/(x_1, \dots, x_d)\widehat{\omega_A} \simeq \omega_A/(x_1, \dots, x_d)\omega_A,$$

segue que  $\widehat{\omega_A}$  é o módulo canônico de  $\hat{A}$ .

Agora veremos a questão do anel ser de Gorenstein. Já que  $\hat{A}/(x_1, \dots, x_d)\hat{A} = A/(x_1, \dots, x_d)A$ ,  $A$  é Gorenstein se e somente se o  $\hat{A}$  é. ■

Um anel local  $A$  é dito *interseção completa* quando existe um anel local regular  $R$  e uma sequência regular  $x_1, \dots, x_n$  própria de  $R$  tal que  $A \simeq R/(x_1, \dots, x_n)$ .

Notemos que uma interseção completa é um anel de Cohen-Macaulay. Na verdade, muito mais é válido:

**Corolário 2.34** *Se  $A = R/I$ , onde  $R$  é anel local regular e  $I$  ideal gerado por uma sequência regular, então  $A$  é Gorenstein.*

**Demonstração:** Seja  $x_1, \dots, x_c$  a sequência regular que gera  $I$ . Então o complexo de Koszul  $K(x_1, \dots, x_c; R)$  é a resolução livre minimal de  $A$  como  $R$ -módulo. Mas, este complexo tem comprimento  $c$  e último número de Betti igual a 1. O resultado segue então do Teorema 2.29. ■

É bem conhecido que a recíproca não vale se  $c \geq 3$  - o exemplo padrão é o ideal gerado pelos Pfaffianos de uma matriz anti-simétrica genérica  $5 \times 5$ . Em codimensão um a recíproca é trivial, uma vez que  $I$  é necessariamente principal. Em codimensão dois é o célebre resultado de Serre.

## 2.8 Dualidade no caso Cohen-Macaulay máximo

Agora retornaremos os estudos do funtor dual. Vamos generalizar o caso em que  $A$  é local de dimensão zero do seguinte modo:

**Teorema 2.35 (Funtor Dual)** *Seja  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Cohen-Macaulay local admitindo módulo canônico  $\omega_A$  e  $D$ , o funtor dado por  $\text{Hom}_A(-, \omega_A)$ . O funtor  $D$  é funtor dualizante sobre a categoria dos  $A$ -módulos Cohen-Macaulay máximo no sentido que:*

- (a)  $D$  preserva módulos de Cohen-Macaulay máximos;
- (b)  $D$  preserva sequências exatas de  $A$ -módulos de Cohen-Macaulay máximos;
- (c) A aplicação natural  $M \rightarrow D^2M = \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A)$  que leva  $m \in M$  para aplicação  $\alpha \mapsto \alpha(m)$ ,  $\alpha \in \text{Hom}_A(M, \omega_A)$  é um isomorfismo quando  $M$  é Cohen-Macaulay máximo.

**Demonstração:**

- (a) Usaremos indução sobre  $\dim A$ .

Caso  $\dim A = 0$ . Temos que todo  $A$ -módulo é C-M máximo. Daí,  $D$  aplicado a um  $A$ -módulo Cohen-Macaulay máximo é ainda um  $A$ -módulo Cohen-Macaulay máximo.

Caso  $\dim A > 0$ . Sejam  $M$   $A$ -módulo C-M máximo e  $\bar{x} = x_1, \dots, x_d$  ( $d = \dim A$ ) um sop de  $A$ . Pela Proposição 2.20,  $\bar{x}$  é sequência regular de  $A$  e de  $M$ . Definamos  $x = x_1$ . Temos que  $M/xM$ , visto como  $A/(x)$ -módulo, é C-M máximo e  $\omega/(x)\omega_A$  é o módulo canônico de  $A/(x)$ . Pela hipótese indutiva,  $\text{Hom}_{A/(x)}(M/xM, \omega/(x)\omega_A)$  é C-M máximo. Usando a Proposição 2.23, temos

$$\text{Hom}_{A/(x)}(M/xM, \omega_A/(x)\omega_A) \simeq \text{Hom}_A(M, \omega_A)/x\text{Hom}_A(M, \omega_A).$$

Como  $x$  é não divisor de zero em  $\text{Hom}_A(M, \omega_A)$ , segue que:

$$\begin{aligned} \text{prof Hom}_A(M, \omega_A) &= \text{prof Hom}_{A/(x)}(M/xM, \omega_A/(x)\omega_A) + 1 \\ &= \dim A/(x) + 1 \\ &= \dim A - 1 + 1 \\ &= \dim A. \end{aligned}$$

Portanto  $\text{Hom}_A(M, \omega_A)$  é C-M máximo.

(b) Seja

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de  $A$ -módulos C-M máximo. Então

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', \omega_A) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \omega_A) \\ \longrightarrow \text{Hom}_A(M', \omega_A) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M'', \omega_A) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Agora para provarmos que  $\text{Ext}_A^1(M'', \omega_A) = 0$ , basta aplicarmos a Proposição 2.23 - (a) para obtermos o resultado desejado.

(c) Denotemos por  $\varphi_M$  a aplicação natural de  $M$  em  $D^2(M)$ , onde  $M$  é C-M máximo. Usaremos indução sobre  $\dim A$ . O caso  $\dim A = 0$  segue da Proposição 2.9.

Caso  $\dim A > 0$ . Assim, usando o fato de  $A$  e de  $M$  serem C-M máximos podemos tomar  $x \in \mathfrak{m}$  não divisor de zero de  $A$  e de  $M$ . Consideremos  $M/xM$  como  $A/(x)$ -módulo. Temos que

$$\varphi'_{M/xM} : M/xM \rightarrow (D')^2(M/xM)$$

é um isomorfismo, sendo  $D'$  o funtor dualizante com respeito a  $A/(x)$  e  $\varphi'_{M/xM}$  a aplicação natural de  $M/xM$  em  $(D')^2(M/xM)$ . Utilizando a Proposição 2.23 segue que

$$\begin{aligned} D^2(M)/xD^2(M) &= \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A)/x\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A) \\ &\simeq \text{Hom}_{A/(x)}(\text{Hom}_A(M, \omega_A)/x\text{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A/(x)\omega_A) \\ &\simeq \text{Hom}_{A/(x)}(\text{Hom}_{A/(x)}(M/xM, \omega_A/(x)\omega_A), \omega_A/(x)\omega_A) \\ &= (D')^2(M/xM). \end{aligned}$$

Assim podemos considerar  $\varphi'_{M/xM} : M/xM \rightarrow D^2(M)/xD^2(M)$ . Notemos que  $\varphi'_{M/xM}$  é função induzida de  $\varphi_M$ . Portanto, pelo Lema 2.24,  $\varphi_M$  é isomorfismo. ■

# Capítulo 3

## Teoremas de Dualidade

Neste capítulo provaremos os teoremas de dualidade de Grothendieck que fazem uma conexão entre o funtor  $\text{Ext}$  e a cohomologia local. Para tal, usaremos resultados historicamente anteriores, tais como, por exemplo, o Teorema da Dualidade de Matlis. O detalhamento desses resultados nos levariam muito longe dos objetivos deste trabalho, assim que nos contentaremos em dar as referências apropriadas.

Introduziremos, primeiramente, a cohomologia local e mostraremos que a profundidade e dimensão de um módulo podem ser detectados pelo seu anulamento e não-anulamento desta cohomologia, em um sentido a ser precisado. Por fim provaremos o Teorema da dualidade local de Grothendieck.

### 3.1 Cohomologia local

Passemos, o quanto antes, as noções fundamentais para a demonstração do teorema de dualidade de Grothendieck.

Sejam  $(A, \mathfrak{m}, k)$  anel local, sendo  $k = A/\mathfrak{m}$ , e  $M$   $A$ -módulo. Denotamos por  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$  o submódulo de  $M$  constituído de todos os elementos de  $M$  com suporte  $\{\mathfrak{m}\}$ :

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M ; \mathfrak{m}^k x = 0 \text{ para algum } k \geq 0\} = 0 :_M \mathfrak{m}^{\infty},$$

também conhecido como a saturação de  $\{0\}$  por  $\mathfrak{m}$ .

Como trabalharemos com limite direto necessitaremos definir uma topologia em  $A$ .

Seja  $X = x_1, \dots, x_n$  uma seqüência de elementos de  $A$  que geram um ideal  $\mathfrak{m}$ -primário. Consideremos

$$X^k = x_1^k, \dots, x_n^k,$$

para todo  $k \geq 0$ . A família  $\{X^k\}_k$  é cofinal com a família das potências de  $\mathfrak{m}$  (isto é, cada elemento da primeira família estar contido em algum elemento da segunda família e vice-versa), do que resulta

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \{y \in M ; (X^k)y = 0 \text{ para algum } k \geq 0\}.$$

Evidentemente,  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  é um *functor aditivo* - preserva a soma de homomorfismo. Uma outra característica é que  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  é exato à esquerda, conforme proposição abaixo.

**Proposição 3.1** *O funtor  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  é exato à esquerda.*

**Demonstração:** Seja

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3$$

uma sequência exata à esquerda. Aplicando  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ , obtemos o complexo

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1) \xrightarrow{\alpha'} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2) \xrightarrow{\beta'} \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_3),$$

sendo  $\alpha' = \alpha|_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1)}$  e  $\beta' = \beta|_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2)}$ . Mostraremos que a sequência acima é exata à esquerda e assim teremos o resultado desejado. Desde que  $\alpha$  é injetivo,  $\alpha'$  também é. Daí, resta provarmos que a sequência acima é exata em  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2)$ , isto é

$$\ker \beta' \subset \text{Im } \alpha'.$$

Dado  $x \in \ker \beta'$ , segue que  $\beta(x) = 0$ . Já que a sequência dada é exata em  $M_2$ , temos que existe um  $y \in M_1$  tal que  $\alpha(y) = x$ . Como  $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2)$ , segue da definição de  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  que existe um  $k \geq 0$  tal que  $\mathfrak{m}^k x = 0$ . Notemos que

$$\mathfrak{m}^k \alpha(y) = 0 \Rightarrow \alpha(\mathfrak{m}^k y) = 0.$$

Mas  $\alpha$  é injetiva, logo  $y \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1)$  e  $\alpha'(y) = x$ .

Portanto  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  é exato à esquerda. ■

**Definição 3.2** O funtor *cohomologia local*, denotado por  $H_{\mathfrak{m}}^i(-)$ , é o funtor derivado direito de  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ .

Mais precisamente, seja

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots$$

uma resolução injetiva de  $M$ . Aplicando  $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$  obtemos

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(I_0) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(I_1) \longrightarrow \dots$$

Temos que  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  é a homologia deste complexo de ordem  $i$ , ou seja,

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = H^i(\Gamma_{\mathfrak{m}}(I^*)),$$

sendo  $I^*$  resolução injetiva de  $M$ .

Analogamente ao funtor Ext, dada uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$



podemos obter a sequência exata longa

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_1) & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_2) & \longrightarrow & \Gamma_{\mathfrak{m}}(M_3) \cdot \\
& & & & & & \\
& & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^1(M_1) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^1(M_2) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^1(M_3) \\
& & & & & & \\
& & \longrightarrow & \dots & & & \\
& & & & & & \\
& & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^i(M_1) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^i(M_2) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^i(M_3) \\
& & & & & & \\
& & \longrightarrow & \dots & & &
\end{array}$$

Outra propriedade de  $H_{\mathfrak{m}}^*(-)$  é que o funtor transforma soma direta em produto direto.

## 3.2 Teorema da dualidade local

Vamos utilizar alguns resultados preliminares, que serão enunciados sem demonstração. O primeiro deles é bastante elementar e será citado por comodidade de referência.

**Lema 3.3** [1, Exercício 1.4.17] *Sejam  $A$  anel e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado livre de torção. Se  $M$  tem posto, então  $M$  é isomorfo a um submódulo de um  $A$ -módulo livre de mesmo posto.*

Dado um  $(A, \mathfrak{m}, k)$  anel local completo (um anel que é a imagem de um anel local regular) e seja  $E$  a envoltória injetiva de  $k$ . O funtor  $\text{Hom}_A(-, E)$  estabelece uma equivalência entre a categoria dos  $A$ -módulos Artinianos e  $A$ -módulos finitamente gerado, mais precisamente.

**Proposição 3.4** [1, Teorema 3.2.13](Dualidade de Matlis) *Sejam  $(A, \mathfrak{m}, k)$  anel local completo e seja  $T(-) = \text{Hom}_A(-, E(k))$ , onde  $E(k)$  é a envoltória injetiva de  $k$ . Denotemos por  $\mathcal{A}(A)$  e  $\mathcal{F}(A)$  as subcategorias plenas da categoria dos  $A$ -módulos consistindo, respectivamente, dos módulos artinianos (mas, não necessariamente Noetherianos) e dos  $A$ -módulos finitamente gerados. Dados  $N \in \mathcal{A}(A)$  e  $M \in \mathcal{F}(A)$ , tem-se:*

- (a)  $T(E(k)) \simeq A$ ;
- (b)  $T(N) \in \mathcal{F}(A)$ ;
- (c)  $T(T(N)) \simeq N$ .

**Proposição 3.5** [1, Lema 3.5.4] *Sejam  $(A, \mathfrak{m}, k)$  anel local e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado. Então*

- (a) Se  $M$  é finitamente gerado,  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  é Artiniano;
- (b) Para  $i < \text{prof } M$  temos que  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ ;
- (c) Se  $A$  é Gorenstein, então

$$H_{\mathfrak{m}}^i(A) \simeq \begin{cases} E(k), & \text{se } i = \dim A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

- (d) Se  $\hat{M}$  denota o completamento  $\mathfrak{m}$ -ádico de um  $A$ -módulo  $M$ , então

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\hat{\mathfrak{m}}}^i(\hat{M}).$$

Agora o objetivo é construir um complexo cuja cohomologia é dada por  $H_{\mathfrak{m}}^i(-)$ . Para tal introduz-se o complexo de Koszul dual,  $K^*(-)$ . O sistema  $\{K^*(X^k)\}_k$  é direto, onde, como antes,  $X^k = x_1^k, \dots, x_n^k$ ; isto permite definir o complexo

$$C^* := \varinjlim K^*(X^k).$$

Este complexo desempenha um papel relevante nas demonstrações dos teoremas de dualidade. A importância desse complexo resulta do Teorema abaixo.

**Teorema 3.6** [1, Teorema 3.5.6] *Sejam  $(A, \mathfrak{m})$  um anel Noetheriano local e  $M$ , um  $A$ -módulo. Então*

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H^i(M \otimes_A C^*).$$

A demonstração deste teorema usa o fato de que  $C^*$  se identifica com o complexo de Čech.

O seguinte resultado básico é conhecido como o teorema do anulamento de Grothendieck.

**Teorema 3.7 (Grothendieck)** *Sejam  $(A, \mathfrak{m}, k)$  um anel local e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado de profundidade  $t$  e dimensão  $d$ . Então*

- (a)  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$  para todo  $i < t$  e  $i > d$ ;
- (b)  $H_{\mathfrak{m}}^t(M) \neq 0$  e  $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$ .

**Demonstração:** Antes de mostrarmos os itens (a) e (b) precisaremos de um resultado auxiliar que será de grande utilidade.

(i) Seja  $\varphi : (A, \mathfrak{m}, k) \rightarrow (A', \mathfrak{m}', k')$  um homomorfismo local de anéis tal que  $\mathfrak{m}A'$  é ideal  $\mathfrak{m}'$ -primário. Dado um  $A'$ -módulo  $M$ , provaremos que

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\mathfrak{m}'}^i(M), \forall i \geq 0,$$

onde  $M$  é visto como  $A$ -módulo através do homomorfismo dado.

Seja  $X = x_1, \dots, x_n$  um conjunto de geradores mínimo de  $\mathfrak{m}$ . Denotando  $X' = \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ , introduzimos o complexo

$$C'^* := \varinjlim K^*(X'^k).$$

Como  $X' = \varphi(X)$ , temos que

$$C^* \otimes_A M \simeq C'^* \otimes_{A'} M.$$

Pelo Teorema 3.6  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H^i(M \otimes_A C^*)$  e  $H_{\mathfrak{m}'}^i(M) \simeq H^i(M \otimes_{A'} C'^*)$ , logo

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\mathfrak{m}'}^i(M), \forall i \geq 0.$$

Em resumo, se  $\varphi : (A, \mathfrak{m}, k) \rightarrow (A', \mathfrak{m}', k')$  é um homomorfismo local de anéis tal que  $\mathfrak{m}A'$  é ideal  $\mathfrak{m}'$ -primário, então

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\mathfrak{m}'}^i(M), \forall i \geq 0,$$

onde  $M$  é um  $A'$ -módulo.

Em seguida, vejamos a demonstração dos itens (a) e (b).

(a) De acordo com o Teorema 3.5, temos que

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0, \forall i < \text{prof } M.$$

Para concluir, basta mostrar que  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0, \forall i > d$ .

Seja  $\varphi : R \rightarrow R' = R/\text{ann}(M)$  o homomorfismo canônico de classes. Claramente  $\varphi$  satisfaz as hipóteses de (i). Podemos considerar  $M$  como  $A'$ -módulo onde  $\dim_{A'} M = \dim A'$ , pois  $A' = A/\text{ann}(M)$ . Já que  $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\mathfrak{m}'}^i(M)$ , reduzimos o nosso problema ao caso em que  $\dim A = \dim M = d$ .

Sejam  $X = x_1, \dots, x_d$  um sop de  $A$  e

$$C^* = \varinjlim K^*(X^l).$$

Por definição de  $C^*$  temos que  $C^i = 0, \forall i > d$ . E pelo Teorema 3.6

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H^i(M \otimes_A C^*) = 0, \forall i > d.$$

(b) Para provar que  $H_{\mathfrak{m}}^t(M) \neq 0$ , usaremos indução sobre  $t$ . Se  $t = 0$ , então

$$H_{\mathfrak{m}}^0(M) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \supset \text{Soc}(M) \neq 0.$$

Agora suponhamos  $t > 0$ . Então existe um  $x \in \mathfrak{m}$  que é  $M$ -regular. A sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/(x)M \longrightarrow 0$$

induz a sequência exata longa em cohomologia

$$\dots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M/(x)M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^t(M) \longrightarrow \dots$$

Truncando a sequência e aplicando o item (a) segue que

$$0 \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M/(x)M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^t(M)$$

e assim  $H_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M/(x)M) \hookrightarrow H_{\mathfrak{m}}^t(M)$ . Pela hipótese indutiva  $H_{\mathfrak{m}}^{t-1}(M/(x)M) \neq 0 \Rightarrow H_{\mathfrak{m}}^t(M) \neq 0$ .

Por fim mostraremos que

$$H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0.$$

Primeiramente reduziremos nosso problema ao caso em que  $A$  é completo. Para isto basta usar o fato de que  $\dim \hat{M} = \dim M$  e o Teorema 3.5-(d).

Seja  $P \in \text{Supp } M$  com  $\dim M = \dim A/P$ . Então  $\dim M/PM = \dim M = d$ . Consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow M/PM \longrightarrow 0,$$

onde  $U = PM$ . Esta induz a sequência

$$H_{\mathfrak{m}}^d(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^d(M/PM) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{d+1}(U).$$

Pelo item (a)  $H_{\mathfrak{m}}^{d+1}(U) = 0$  e assim, se  $H_{\mathfrak{m}}^d(M/PM) \neq 0$ , então  $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$ . Logo, resta provarmos que  $H_{\mathfrak{m}}^d(M/PM) \neq 0$ . Tomemos  $A' = A/P$ . Como  $M/PM$  é um  $A/P$ -módulo, por (i), podemos supor que  $A$  é domínio e  $\dim A = \dim M$ .

Todo domínio Noetheriano completo tem uma normalização de Noether, ou seja, existe um  $(S, n)$  subanel local regular de  $A$  tal que  $A$  é um  $S$ -módulo finitamente gerado (para maiores detalhes remetemos a [1, A.22]). Consideremos  $\varphi : S \rightarrow A$ . Temos que  $\varphi$  satisfaz as condições de (i), e daí podemos supor que  $A$  é regular.

Seja  $K$  o corpo de frações de  $A$  e  $\alpha : M \rightarrow K \otimes_A M$ , o homomorfismo natural. Pondo  $U = \ker \alpha$  e  $N = \text{Im } \alpha$ , obtemos

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0. \quad (3.1)$$

E pela Proposição 3.3, segue uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^s \longrightarrow W \longrightarrow 0, \quad (3.2)$$

onde  $s = \text{posto } M = \text{posto } N$ . De 3.2 obtemos

$$H_{\mathfrak{m}}^d(N) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^d(A^s) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{d+1}(W).$$

Pela propriedade aditiva de  $\dim(-)$  segue da sequência exata 3.2 que,  $\dim W < \dim A = d$  e aplicando o item (a) resulta

$$H_{\mathfrak{m}}^d(N) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^d(A^s) \longrightarrow 0. \quad (3.3)$$

Como  $H_{\mathfrak{m}}^*(-)$  leva soma direta em produto direto, temos que  $H_{\mathfrak{m}}^d(A^s) \simeq [H_{\mathfrak{m}}^d(A)]^s$ . Aplicando 3.5-(c)

$$H_{\mathfrak{m}}^d(A) = E(k),$$

onde  $E(k)$  é a envoltória injetiva do  $A$ -módulo  $k$ . Esta igualdade permite concluir que  $[H_{\mathfrak{m}}^d(A)]^s \neq 0$ . Por 3.3 segue que  $H_{\mathfrak{m}}^d(N) \neq 0$ . E por fim, usando 3.1 temos que  $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$ . ■

Por fim, provaremos o teorema conhecido como teorema da dualidade local. Antes, observemos que todo anel completo tem módulo canônico devido a proposição 2.27.

**Teorema 3.8 (Grothendieck)** *Seja  $(A, \mathfrak{m}, k)$  um anel local Cohen-Macaulay completo de dimensão  $d$ , sendo  $k = A/\mathfrak{m}$ . Então para todo  $A$ -módulo finitamente gerado  $M$  e todo inteiro  $i$  existe um natural isomorfismo*

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq \text{Hom}_A(\text{Ext}_A^{d-i}(M, \omega_A), E(k))$$

$e$

$$\text{Ext}_A^i(M, \omega_A) \simeq \text{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(M), E(k)),$$

sendo  $E(k)$  a envoltória injetiva de  $k$ .

**Demonstração:** Pela proposição 3.5-(a) temos que  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  são Artinianos e aplicando a proposição 3.4 segue que o primeiro isomorfismo é resultado do segundo. Provaremos então o segundo isomorfismo. Tomemos  $i < 0$ , temos que  $\text{Ext}_A^i(M, \omega_A) = 0$ , pois  $\text{Ext}$  é a homologia de um complexo que não tem termos de ordem negativa. Devemos mostrar que

$$\text{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(M), E(k)) = 0.$$

Isto é equivalente a mostrar que  $H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(M) = 0$ , ou seja,  $H_{\mathfrak{m}}^j(M) = 0$ ,  $j > d$ . E essa afirmação segue do Teorema 3.7.

Para cada  $i \geq 0$  fixado definamos

$$T^i(-) = \text{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(-), E(k)).$$

Analisaremos o caso  $i = 0$ . Temos que  $T^0(-)$  é contravariante, exata à esquerda e aplica somas diretas em produtos diretos. Por [6, Teorema 3.36], existe um  $A$ -módulo  $C$  tal que

$$T^0(-) \simeq \text{Hom}_A(-, C).$$

Segue da definição de  $T^0(-)$  que  $T^0(A) \simeq C$ . Como  $H_{\mathfrak{m}}^d(A)$  é um módulo Artiniano, aplicando a dualidade de Matlis segue que  $C$  é um  $A$ -módulo finitamente gerado.

De [6, página 212] resulta que os  $T^i(-)$  são funtores derivados direito de  $T^0(-)$ .

Coletando a informação até aqui, podemos concluir que

$$\text{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^i(M), E(k)) \simeq \text{Ext}_A^{d-i}(M, C), \text{ para todo } i \geq 0 \text{ e } A\text{-módulo } M. \quad (3.4)$$

Assim, resta provar que  $C \simeq \omega_A$ , o que terminará a demonstração do teorema.

Pelo Teorema 3.7, temos que

$$H_{\mathfrak{m}}^i(k) \simeq \begin{cases} k, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i > 0, \end{cases}$$

pois  $\dim k = 0$  e  $H_{\mathfrak{m}}^0(k) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(k) = k$ . Daí, por 3.4,

$$\mathrm{Ext}_A^i(k, C) \simeq \begin{cases} k, & \text{se } i = d \\ 0, & \text{se } i \neq d. \end{cases}$$

Mostraremos que  $C$  satisfaz a caracterização do módulo canônico do Teorema 2.19. Pelo [1, Teorema 1.2.8] segue que  $\mathrm{prof} M = \min\{i; \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}$ , assim  $C$  é Cohen-Macaulay máximo. O item (ii) segue do seguinte fato:

$$id(M) = \sup\{i; \mathrm{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}$$

(vide [1, 3.1.14]). Finalmente, para obtermos a última condição, aplicaremos o [2, Exercise 21.13] que diz que a condição (iii) pode ser substituída por  $\mathrm{Ext}_A^d(k, C) \simeq k$ . Portanto,  $C \simeq \omega_A$ . ■

# Apêndice

## Funtor dualizante graduado

Uma *graduação* de um anel  $A$  é uma decomposição de  $A$  como soma direta

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots,$$

onde  $A_i$  é grupo abeliano tal que  $A_i A_j \subset A_{i+j}$ ,  $\forall i, j \geq 0$ .

Em particular, segue que  $A_0$  é fechado pelo produto de  $A$  e contém 1, logo é um subanel de  $A$  e, portanto,  $A$  é um  $A_0$ -módulo e todo  $A_i$  é, de fato, um  $A_0$ -submódulo.

Seja  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$  um anel graduado. Uma *graduação* de um  $A$ -módulo  $M$  é uma decomposição de  $M$  como soma direta de subgrupos do grupo aditivo de  $M$

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus \dots,$$

tal que  $A_i M_j \subset M_{i+j}$ ,  $\forall i, j \geq 0$ .

A definição implica que cada  $M_i$  é um  $A_0$ -módulo. Um *elemento homogêneo* de grau  $i$  de  $M$  é um elemento de  $M_i$ .

Existem módulos naturalmente graduados sobre  $\mathbb{Z}$ , com partes graduadas efetivamente de ordem negativa. Assim, quando nos referirmos à definição acima, estaremos falando de um *módulo positivamente graduado*.

Trabalharemos no caso de  $A$  ser um anel positivamente graduado e de Cohen–Macaulay tal que

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots,$$

onde  $A_0$  é um corpo (este é o caso que precisamos no desenvolvimento da técnica de sistemas inversos de Macaulay). Consideremos o funtor  $D$ , da categoria de  $A$ -módulos graduados em si mesma, dado por

$$D(M) := \text{Hom}_{gr}(M, k) = \bigoplus_d \text{Hom}_k(M_d, k),$$

sendo  $M = \bigoplus M_d$   $A$ -módulo graduado.

O resultado básico é que  $D$  é *funtor dualizante graduado*, isto é,  $D$  satisfaz as seguintes hipóteses:

(i)  $D$  é contravariante, isto é, dados  $M, N$   $A$ -módulos graduados e  $\varphi : N \rightarrow M$  homomorfismo homogêneo, existe um homomorfismo homogêneo  $D(\varphi) : D(M) \rightarrow D(N)$  induzido por  $\varphi$  que leva  $\alpha \in D(M)$  em  $D(\alpha)$ .

(ii)  $D$  é exato no sentido graduado, ou seja,  $D$  preserva seqüências exatas de  $A$ -módulos graduados, sendo que os homomorfismos que ligam estes módulos são homogêneos.

(iii)  $D$  é  $A$ -linear – isto é, a aplicação natural

$$\begin{aligned} {}^*\mathrm{Hom}_A(M, N) &\rightarrow {}^*\mathrm{Hom}_A(D(N), D(M)) \\ \varphi &\mapsto D(\varphi) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de  $A$ -módulos, onde o asterisco indica que considera-se apenas os homomorfismos homogêneos.

(iv)  $D$  é idempotente – isto é,  $D^2 \simeq I$ .

**Demonstração:** Notemos que

$$D(M) = \oplus_d D'(M_d),$$

sendo  $D'$  o funtor dualizante na categoria de  $k$ -módulos em si mesmo definido por

$$D'(N) := \mathrm{Hom}_k(N, k).$$

Mostraremos cada item separadamente.

(i) Dado um  $\varphi : N \rightarrow M$ , sendo  $N = \oplus_i N_i$  e  $M = \oplus_i M_i$   $A$ -módulos graduados e  $\varphi$  homogêneo. Definemos por  $\varphi_i : N_i \rightarrow M_i$  a componente homogênea de  $\varphi$  de ordem  $i$ . Seja  $\alpha \in D(M)$ , assim

$$\alpha = (\dots, \alpha_{-i}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_i, \dots),$$

sendo  $\alpha_i \in D'(M_i)$ . Temos que

$$D(\varphi)(\alpha) = (\dots, D'(\varphi_{-i})(\alpha_{-i}), \dots, D'(\varphi_0)(\alpha_0), \dots, D'(\varphi_i)(\alpha_i), \dots).$$

Devido a  $D'(\varphi_i)(a\alpha_i) = aD'(\varphi_i)(\alpha_i)$  segue que  $D(\varphi)$  é um homomorfismo. E direto da definição temos que  $D(\varphi)$  é homogêneo. Portanto  $D$  é contravariante.

(ii) Para provarmos que  $D$  é exato, basta mostrarmos que se  $\varphi : N \rightarrow M$  é injetivo (sobrejetivo), então  $D(\varphi)$  é sobrejetivo (injetivo).

Suponhamos que  $\varphi$  é injetivo, assim  $\varphi_i$  é injetivo,  $\forall i$ . Dado

$$\beta = (\dots, \alpha_{-i}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_i, \dots) \in D(N).$$

Como  $D'$  é funtor exato, existe  $\alpha_i \in D'(M_i)$  tal que  $D'(\varphi)(\alpha_i) = \beta_i$ . Tomemos  $\alpha = (\dots, \alpha_{-i}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_i, \dots) \in D(M)$ . Temos que  $D(\varphi)(\alpha) = \beta$ . Logo  $D(\varphi)$  é sobrejetiva.

Suponhamos agora que  $\varphi$  é sobrejetiva. Temos que  $\varphi_i$  é sobrejetivo. Seja  $\alpha \in D(M)$  tal que  $D(\varphi)(\alpha) \equiv 0 \Rightarrow D'(\varphi_i)(\alpha_i) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_i \equiv 0$ , pois  $D'(\varphi_i)$  é injetivo. Logo  $D(\varphi)$  é injetivo.

(iii) Isto resulta direto da definição.

(iv) Observe que

$$D^2(M) = D(D(M)) = D(\oplus_i (D'M_i)) = \oplus_i (D'(D'(M_i))) \simeq \oplus_i M_i.$$

Logo  $D$  é exato.

Portanto,  $D$  é um funtor dualizante graduado.



# Bibliografia

- [1] Bruns, W. and Herzog, J., *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 39, Cambridge University Press, 1996.
- [2] Eisenbud, D., *Commutative Algebra (with a view toward Algebraic Geometry)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, 1995.
- [3] Kaplansky, I., *Commutative Rings* (Revised Ed.), The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.
- [4] Krull, W., *Idealtheorie*, Ergebnisse d. Math. **4**, No. 3, Springer 1935.
- [5] Noether, E., Idealtheorie in Ringebereiche, Math. Ann. **83** (1921), 24-66.
- [6] Rotman, J., *An introduction to homological algebra*, Academic Press, 1979.
- [7] Serre, J.-P., *Algèbre Locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Mathematics, No. 21, Springer-Verlag, 1965.
- [8] Simis, A. e Andrade, J. F., *Tópicos de Álgebra Comutativa*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, MG, 1981.
- [9] Zariski, O. and Samuel, P., *Commutative Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1960.