UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDSON DE JESUS OLIVEIRA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: RESULTADOS E APLICAÇÕES

ITABAIANA - SE
2019

EDSON DE JESUS OLIVEIRA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: RESULTADOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração. Matemática

Orientador: Prof. Dr. Mateus Alegri

ITABAIANA - SE

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Oliveira, Edson de Jesus
O48p Progressões aritméticas de ordem superior: resultados e aplicações / Edson de Jesus Oliveira ; orientador Mateus Alegri. – Itabaiana, 2019.
55 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Aritmética. 2. Séries aritméticas. 3. Sistema métrico. 4. Contagem. I. Alegri, Mateus. II. Título.

CDU 511.1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Resultados e Aplicações

por

Edson de Jesus Oliveira

Aprovada pela banca examinadora:

Mateus Alegri

Prof. Mateus Alegri - UFS
Orientador

Samuel Brito Silva

Prof. Samuel Brito Silva - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Rafael Neves Almeida - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 27 de Março de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

A Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia.

Aos meus pais, minha base, meu ponto de equilíbrio, que não tiveram a oportunidade de estudar, esse título é nosso.

A minha avó, dona Maria José, a mulher que transborda amor para todos nós.

Aos meus irmãos que sempre estão presentes, apoiando e lutando por cada conquista.

A minha namorada, Lark Soany, que esteve do meu lado durante toda essa trajetória.

A toda minha família, em especial ao meu tio Tonho por todo apoio durante minha graduação.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, amigo, Professor Doutor Mateus Alegri, que sempre foi muito atencioso e compreensivo, sem seu companheirismo o caminho seria muito mais árduo.

Ao grande amigo Rafael Andrade, guerreiro de profissão, que sempre estava comigo às sextas e sábados durante essa trajetória. Foram viagens longas, porém cheias de energia positiva e uma boa música sertaneja.

Ao Mestre John William, atencioso, solícito, companheiro de trabalhos acadêmicos. Sou seu fã, meu amigo.

Aos meus pais, que tiveram apenas a oportunidade de cursarem parte do ensino fundamental, porém, com a mais sábia escolha me incentivaram a buscar o caminho da educação.

À minha vovó, dona Maria José, analfabeta e sábia, detentora de um amor imensurável por sua família.

Aos meus irmãos, amigos, que sempre estiveram do meu lado. Cada passo de um de nós é um passo triplo. Cada vitória de um de nós é uma vitória de nossa família.

À minha incrível namorada, Lark Soany, que sempre esteve lado a lado. Seu apoio foi extremamente importante para a concretização desse sonho.

Ao meu grande amigo Sérgio, o cara que me acolheu na UFS. Obrigado meu amigo.

Ao meu professor do ensino médio, o amigo que me fez ser conhecido em todo o município como o “carinha da matemática”. Muito obrigado, mestre José Oliveira.

Ao professor Rafael Almeida por toda ajuda e atenção durante esse trabalho.

Às mais lindas professoras Karly Alvarenga, Tereza Cristina e Marta Amorim. Muito obrigado por cada aula de estágio e muito mais por cada ensinamento para a vida.

Aos demais professores que fizeram parte da minha trajetória, Eder Mateus, Wagner, Arlúcio, Samuel, Antônio dos Santos, muito obrigado a cada um de vocês.

Muito obrigado a todos!

Apesar dos nossos defeitos, precisamos enxergar que somos pérolas únicas no teatro da vida e entender que não existem pessoas de sucesso ou pessoas fracassadas. O que existe são pessoas que lutam pelos seus sonhos ou desistem deles.

(Augusto Cury)

RESUMO

Esta dissertação é um estudo a respeito das Progressões Aritméticas de Ordem Superior e, para demosntrar os principais resultados deste trabalho, foram necessários apresentar o Princípio da Indução Matemática e os Princípios da Matemática Discreta. Iniciamos o trabalho definindo o Princípio da Indução Matemática e utilizando-o para demonstrar identidades, desigualdades e para resolver alguns problemas de divisibilidade. Em seguida, exibimos os princípios da matemática discreta, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Começamos o estudo das progressões exibindo algumas noções elementares de sucessões. Prontamente, apresentamos o conceito de progressões aritméticas ordinárias, progressões aritméticas de ordem superior e alguns resultados. Como aplicação exibimos uma conjectura baseada em progressões aritméticas de ordem superior e uma fórmula geral para calcular o número de subtriângulos de um triângulo maior com lado igual a n, para todo n natural. A razão de apresentar a conjectura baseada em progressões aritméticas é devido ao fato de que planejamos uma atividade em que apresentamos este conceito para alunos do ensino médio e posteriormente solicitamos que estes buscassem uma possível fórmula para o número de subtriângulos de um triângulo maior de lado com n pontos de lado (com n ímpar).

Palavras-chave: Contagem. Indução. Matemática Discreta. Triângulos. Progressão Aritmética. Progressão Aritmética de Ordem superior. Ensino.

ABSTRACT

This dissertation is a study on the Arithmetic Progressions of Higher Order and, to show the main results of this work, it was necessary to present the Principle of Mathematical Induction and the Principles of Discrete Mathematics. We begin the work by defining the Principle of Mathematical Induction and using it to demonstrate identities, inequalities and to solve some problems of divisibility. Next, we present the principles of discrete mathematics, the additive principle, and the multiplicative principle. We begin the study of progressions by exhibiting some elementary notions of succession. Promptly, we present the concept of ordinary arithmetic progressions, higher order arithmetic progressions, and some results. As an application, we present a conjecture based on higher order arithmetic progressions and a general formula for calculating the number of subtriangles of a larger triangle with sides equal to n, for every natural n. The reason for presenting the conjecture based on arithmetic progressions is due to the fact that we plan an activity in which we present this concept to high school students and then ask them to look for a possible formula for the number of subtriangles of a larger side triangle with n side points (with odd n).

Keywords: Counting. Induction. Discrete Mathematics. Triangles. Arithmetic Progression. Arithmetic progression of higher order. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Iniciamos esse capítulo com um conceito primordial para o conjunto dos números inteiros positivos: a lei da sucessão, isto é, para cada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, existe um sucessor de n: o número $n + 1$. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo elencadas:

a) Todo número natural tem um único sucessor;
b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

As afirmações (a), (b), (c) e (d) acima são conhecidas como os axiomas de *Peano*. Tudo que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequências desses axiomas.

O último dos axiomas de Peano é conhecido como o axioma da indução. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução o recorrência).

Enunciamos o Axioma da Indução sob a forma de propriedades em vez de conjuntos, como segue:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) $P(1)$ é verdade;
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Definição 1.1. Esta formulação do Axioma da Indução é chamada de Princípio da Indução Matemática.

Terminamos essa breve descrição do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com a relação de ordem $m < n$.

Dados $m,n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é menor do que n, e escrevemos $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

Transitividade: se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Tricotomia: dados $m,n \in \mathbb{N}$ vale uma, e somente uma, das alternativas:

$m = n,\ m < n$ ou $n < m$.

Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$. (com as operações *adição* e *produto* bem definidas nos números naturais).

Princípio da Boa-ordenação: Todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

O Princípio da Boa-ordenação pode muita vezes substituir com vantagem o Princípio da Indução como método de provas de resultados referentes a números naturais.

Apresentamos agora um exemplo de demonstração por indução, seguindo de uma demonstração por Boa-ordenação.

Exemplo 1.2. Queremos provar a validez, para todo número natural n, da igualdade:

$$P(n): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Usaremos indução. Para $n = 1$, $P(1)$ se resume a afirmar que $1 = 1$. Supondo $P(n)$ verdadeira para um certo valor de n, somamos $2n + 1$ a ambos os membros da igualdade acima, obtendo

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1,$$

Ou seja:

$1 + 3 + 5 + \cdots + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2.$

Mas essa última igualdade é $P(n + 1)$. Logo $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Assim $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então afirmar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n.

Exemplo 1.3. (Usando o princípio da boa ordenação.)

Lembremos que um número natural p chama-se primo quando não pode ser expresso como produto $p = mn$ de dois números naturais, a menos que um deles seja igual a 1 (e o outro igual a p); isto equivale a dizer que os fatores m,n não podem ser ambos menores do que p.

Exemplo 1.4. Um resultado fundamental em Aritmética diz que todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos.

Demosnração: Provaremos isto por boa ordenação. Usaremos a linguagem de conjuntos. Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto mn pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Queremos provar que Y é vazio. Isto será feito por redução ao absurdo (como sempre se dá nas demonstrações por boa-ordenação). Com efeito, se Y não fosse vazio, haveria um menor elemento $a \in Y$. Então todos os números menores do que a pertencem a X. Como a não é primo, ter-se-ia $a = m.n$, com $m < a$ e $n < a$, logo $m \in X$ e $n \in X$. Sendo assim, $mn \in X$. Mas $mn = a$, o que daria $a \in X$, uma contradição. Segue-se que $Y = \emptyset$.

Apresentamos, a seguir, algumas aplicações do Princípio da Indução Matemática referentes a três importantes grupos: demonstração de identidade; demonstração de desigualdades e demonstrações de problemas de divisibilidade.

1.1. Demonstrando identidades

Exemplo1.1.1. Demonstre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é válida a igualdade:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

Solução. Definamos a proposição

$$p(n): 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

e observemos que a mesma vale para $n = 1$; de fato

$$p(1): 2 = 1(1 + 1).$$

Agora, suponhamos que $p(k)$ é verdadeira para um certo $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$.
Devemos mostrar que $p(k + 1)$ também é verdadeira.
Com efeito, como

$$2 + 4 + \cdots + 2k = k(k + 1),$$

Somando $2(k+1)$ a ambos os lados dessa igualdade, temos que

$$2+4+\cdots+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)=(k+2)(k+1).$$

Esta última igualdade afirma que $p(k+1)$ também é verdadeira. Portanto, o Princípio da Indução Matemática garante que $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Demonstrando desigualdades

Exemplo1.2.1. Prove que $3^{n-1} < 2^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução. Denotamos por $P(n)$ a propriedade: $3^{n-1} < 2^{n^2}$. Notamos que $P(1)$ é válida, pois $1 < 2$. Agora supondo que $P(n)$ é verdadeira temos que

$$3^n = 3^{n-1}.3 < 2^{n^2}.2^{2n+1} = 2^{(n+1)^2}$$

Logo $p(n+1)$ também vale. Observamos que na desigualdade acima usamos o fato de que $3 < 2^{2n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo1.2.2. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}, n > 3$, vale que $2^n < n!$

Demonstração. Para $n = 4$ a desigualdade é verificada, pois $2^4 = 16 < 4! = 24$. Vamos assumir como hipótese de indução que a desigualdade é válida para $n \geq 4$. Então precisamos mostrar que a mesma também vale para $n+1$. De fato, por hipótese de indução:

$$2^n < n! \qquad \text{(I)}$$

Como $2 < n+1$, podemos multiplicar o lado esquerdo da desigualdade em (I) por 2 e o lado direito por $n+1$, sem alterar o sinal da desigualdade. Logo, temos que:

$$2^n.2 = 2^{n+1} < n!\,(n+1) = (n+1)!,$$

Concluindo-se a demonstração.

Exemplo1.2.3. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} < 2 \;\; (n - radicais).$$

Demonstração. Claramente a desigualdade vale para $n = 1$, pois $\sqrt{2} < 2$. Suponhamos que para certo $n \in \mathbb{N}$ a desigualdade acontece, então

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < 2 \ \ (n - radicais).$$

Logo, adicionando 2 em ambos os lados desta igualdade tem-se

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < 2 + 2 \ \ (n - radicais).$$

Tomando raiz quadrada em ambos os lados desta última desigualdade obtemos

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < 2 \ \ (n + 1 - radicais).$$

Como desejávamos.

1.3. Indução e problemas de divisibilidade

Exemplo1.3.1. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3.

Solução. Para $n = 1$ a afirmação é válida, pois $1^3 + 2.1 = 3$, que obviamente é divisível por 3.

Assumamos como hipótese de indução que a afirmação vale para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

Hipótese: $k^3 + 2k$ é divisível por 3.

Devemos mostrar que a afirmação também é verdadeira para $k + 1$, ou seja, temos que provar que

Tese: $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ é divisível por 3.

Para provar isto último, usamos o fato de que

$$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2);$$

agrupando adequadamente,

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) =$$
$$= (k^2 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) =$$
$$= múltiplo\ de\ 3,$$

Pois $(k^2 + 2k)$ e $3(k^2 + k + 1)$ são múltiplos de 3.

Exemplo1.3.2. Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Solução. Definamos a seguinte proposição:

$p(n)$: $n^3 + (n+1)^3$+ $(n+2)^3$ é um múltiplo de 9.

Notemos que $p(1)$ é válida, pois

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9.4.$$

Precisamos provar agora o passo indutivo, isto é,

Hipótese: $p(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$.

Tese: $p(k+1)$ também é verdadeira.

Para provar isto, observamos que

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k^3 + 9k^2 + 27k + 27).$$

Ordenando adequadamente, temos que o lado direito da última igualdade se escreve como

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (9k^2 + 27k + 27) =$$
$$= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3) =$$
$$múltiplo\ de\ 9$$

■

A seguir apresentamos outras aplicações do Princípio da Indução matemática.

Exemplo1.3.3. Os números de Fibonacci F_n são dados pela relação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n > 2$, e $F_1 = 1 = F_2$. Prove que

a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

Seja $P(n)$: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

$P(1)$ é verdadeira pois $F_3 = 2$, e $F_3 - 1 = 1 = F_1$ e considerando como hipótese indutiva $P(n)$, temos:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1,$$

provando a veracidade de $P(n+1)$.

Logo pelo princípio da indução matemática,

$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$, para qualquer n natural.

b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

Para $n = 1$ a propriedade $P(n)$: $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ é verdadeira, pois $F_1 = 1 = F_2$. Assumindo por hipótese de indução a veracidade de $P(n)$, vamos provar que

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$$

De fato,

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$$

De modo que pelo Princípio da Indução Matemática,

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

Para $n = 1$, a proposição $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ é verdadeira pois $F_2 = 1 = F_3 - 1$.

Assumindo a proposição válida para n, temos:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, seque que

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1;$$

d) $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.

Para $n = 1, F_2^2 - F_1 F_3 = -1$, e assumindo $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ como verdadeiro, Vamos provar que $F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = (-1)^{n+1}$.

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1}) =$$

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+1}^2 =$$
$$F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 =$$
$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, segue que

$$F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. PRINCÍPIOS DA MATEMÁTICA DISCRETA

Nesse capítulo trabalhamos a Análise Combinatória, que consiste no estudo de permutações, combinações e partições. Trata-se da determinação do número de possibilidades lógicas de algum evento sem necessariamente identificar todos os casos.

Inicialmente apresentamos dois princípios básicos de contagem usados no decorrer dessa dissertação.

2.1. O princípio aditivo e o princípio multiplicativo

Princípio aditivo. Suponha que algum evento E pode ocorrer de m maneiras distintas e que um segundo evento F pode ocorrer de n, e suponha que ambos os eventos não podem ocorrer simultaneamente. Então, E ou F podem ocorrer de $m+n$ maneiras. Mais, genericamente, suponha que um evento E_1 pode ocorrer de n_1 maneiras, um segundo evento E_2 pode ocorrer de n_2 maneiras, e que um terceiro evento E_3 pode ocorrer de n_3 maneiras, ..., e suponha que dois eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo. Então, alguns dos eventos podem ocorrer de $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$ maneiras.

De forma equivalente, podemos definir o princípio aditivo como segue:

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$, são conjuntos, onde A_i tem m_i elementos, $1 \leq i \leq n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ possui exatamente $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ elementos.

Exemplo 2.1.1. Suponha que existem oito professores do sexo masculino e cinco professores do sexo feminino ministrando aula de cálculo. Um estudante pode escolher um professor de cálculo de $8 + 5 = 13$ maneiras.

Exemplo 2.1.2. Suponha que E é o evento de escolher um número primo entre 10 e 20, e suponha que F é o evento de escolher um número par entre 10 e 20. Então, E pode ocorrer de quatro maneiras $\{11, 13, 17, 19\}$; e F pode ocorrer de quatro maneiras {12, 14, 16, 18}. Assim, E ou F pode ocorrer de $4 + 4 = 8$ maneiras, uma vez que agora nenhum dos números pares é primo.

Princípio multiplicativo. Suponha que existe um evento E que pode ocorrer de m maneiras e, independentemente deste evento, que existe um segundo evento F que pode ocorrer de n maneiras. As combinações de E e F ocorrem de $m.n$ maneiras. Mais genericamente, suponha que existe um evento E_1 pode ocorrer de n_1 maneiras, e, seguindo E_1, um segundo evento E_2 pode ocorrer de n_2 maneiras, e, seguindo E_2, um terceiro evento E_3 pode ocorrer de n_3 maneiras, e assim por diante. Então, todos os eventos podem ocorrer, na ordem indicada, de $n_1.n_2.n_3...$ maneiras.

De forma equivalente, podemos definir o princípio multiplicativo como segue:

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$, são conjuntos, onde A_i tem m_i elementos, $1 \leq i \leq n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ possui exatamente $m_1.m_2...m_n$ elementos.

Exemplo 2.1.3. Suponha que uma placa de carro contenha duas letras seguidas por três algarismos, sendo o primeiro dígito não nulo. Quantas placas de carros podem ser impressas?

Existem 26 possibilidades para cada letra, o primeiro algarismo tem 9 possibilidades e cada um dos outros dois tem 10. Portanto,

$$26\,.\,26\,.\,26\,.\,9\,.\,10\,.\,10 = 608\,400$$

Placas distintas podem ser criadas.

Exemplo 2.1.4. De quantas maneiras uma organização com 26 membros pode eleger um presidente, um tesoureiro e um secretário (assumindo que ninguém pode ser eleito para mais de uma posição)?

O presidente pode ser eleito de 26 maneiras; a seguir o tesoureiro pode ser eleito de 25 maneiras (já que a pessoa escolhida como presidente não é elegível para tesoureiro); e, a seguir, o secretário pode ser eleito de 24 maneiras diferentes. Portanto, pelo princípio multiplicativo, existem

$$26\,.25\,.24 = 15600$$

Maneiras distintas pelas quais a organização pode eleger os membros para cargos.

Agora, suponhamos que $n(A)$ denote o número de elementos de um conjunto A. Então:

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, se A e B são conjuntos disjuntos.
- Considerando A x B o produto cartesiano dos conjuntos A e B. Então: $n(A \text{ x } B) = n(A).n(B)$.

2.2. Notação fatorial

Notação fatorial. Na matemática, o **fatorial** de um número natural n, representado por $n!$, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n.

$$n! = 1.2.3 \dots .(n-2).(n-1).n$$

Definimos, ainda,

$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Exemplos:

$5! = 5.4.3.2.1 = 120.$

$\frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

Definição 2.2.1. A função fatorial é definida por:

$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad para\ todo\ n\ natural$

Definição 2.2.2 Seja $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto arbitrário de n elementos. Para $0 < k \leq n$, **uma $\boldsymbol{k - permuta}$ção$\boldsymbol{o}$ de elementos de $\boldsymbol{A_n}$** (ou simplesmente uma $k - permuta$çãoo de n elementos) é uma k-upla de elementos não repetidos de A_n.

Exemplo 2.2.3 Considerando $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, as $12 - permutações$ de A_4 são: $(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_3, a_1), (a_1, a_3), (a_4, a_1), (a_1, a_4), (a_3, a_2), (a_2, a_3),$

$$(a_3, a_2), (a_4, a_2), (a_2, a_4)\ e\ (a_4, a_3).$$

Quando $k = n$ uma $n - permutação\ de\ n\ elementos$ é chamada simplesmente de uma $permuta$ção $de\ n\ elementos$.

Exemplo 2.2.4. Em que ordem Mateus, Tiago e Sérgio podem sentar-se em fila?

Essa solução se dá associando às permutações de 3 elementos do conjunto A={M,T,S}.

As maneiras destas pessoas se sentarem em fila são: (M, T, S) (Mateus na frente, seguido por Tiago e encerrando a fila com Sérgio, (M, S, T), (T, M, S), (T, S, M), (S, M, T), e (S, T, M).

Definição 2.2.5. Seja $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto arbitrário com n elementos. Para $0 < k \leq n$, uma **$\boldsymbol{k - combina}$ção$\boldsymbol{o}$ de elementos de $\boldsymbol{A_n}$** (ou simplesmente uma $k - combina$çãoo de n elementos) é um subconjunto com k elementos não repetidos de A_n.

Exemplo 2.2.6. As $2 - combinações$ de $n = 4$, são:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}\ e\ \{a_3, a_4\}.$$

Observe que como um conjunto, a ordem dos elementos não importa, é claro que para certo k, $0 < k < n$ o número de $k - permutações$ de n é maior do que o número de $k - combinações$ de n. O quanto maior veremos pouco a frente.

Segue a dedução da fórmula do número de permutações de n objetos tomados k de cada vez, ou o número de $k-permutações$ de n objetos, $P(n,k)$.

Teorema 2.2.7. Sendo $0<k\leq n,$ o número de $k-permutações$ de n elementos, $P(n,k)$ é dado por:

$$P(n,k)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\ =\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demonstração:

O primeiro elemento de uma $k-permutação$ de n objetos pode ser escolhido de n maneiras diferentes; a seguir, o segundo elemento da permutação pode ser escolhido de $n-1$ maneiras diferentes; e, a seguir, o terceiro elemento da permutação pode ser escolhido de $n-2$ maneiras diferentes. Seguindo dessa forma, temos o $k-ésimo$ (último) elemento em uma $k-permutação$ que pode ser escolhido de $n-(k-1)=n-k+1$ maneiras. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$P(n,k)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Multiplicando e dividindo $P(n,k)$ por $(n-k)!$ temos:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}.\ ■$$

Exemplo 2.2.8. O número de 6-uplas de 10 elementos é igual ao número de $6-permutações$ de 10 elementos dado por:

$$P(10,6)=\frac{10!}{6!}=5040.$$

Agora, suponha que tenhamos um conjunto de n objetos. Uma combinação para esses n objetos é uma seleção de k objetos cuja ordem não importa.

Teorema 2.2.9. Sendo $0<k\leq n,$ o número de $k-permutações$ de n elementos, $C(n,k)$ é dado por:

$$C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Demonstração

Para cada escolha de um subconjunto de k elementos $C_k=\{b_1,\ldots,b_k\}$ de $A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ temos $k!$ maneiras de reordenar os elementos do subconjunto C_k e obter assim $k!$ $k-permutações$ de elementos de C_k. Ou seja, cada $k-combinação$ de n elementos está associada a $k!$ $k-permutações$ de n elementos. Considerando todas as $k-combinações$ de n elementos existentes, temos

$k!\,C(n,k)=P(n,k)$, e portanto,

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \blacksquare$$

Exemplo 2.2.10. O número de subconjunto de 6 elementos de um conjunto com 10 elementos é igual ao número de $6 - combinações$ de 10 elementos, e é dado por:

$$C(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!\,6!} = 126.$$

Para concluir esse capítulo, trazemos alguns problemas, resultado e aplicações.

2.3. Problemas resultados e aplicações

Problema 2.3.1. Uma placa de carro no Brasil é formada por sete dígitos: quatro números e três letras como **ABC0123**. Encontre o número total de placas possíveis.

Solução:

Como há 26 letras no nosso alfabeto e 10 dígitos, pelo princípio multiplicativo existem

$26^3 \times 10^4 = 175.760.000$ códigos de placas disponíveis.

Problema 2.3.2. (**Relação de Stifel**) Para $1 < k \leq n$, tem-se:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

Demonstração:

Considere os conjuntos $C_k\,(A_n)$ formado pelos subconjuntos com k elementos de $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, X e Y subconjuntos de $C_k\,(A_n)$, onde todos os elementos de X tem a_1 como elemento e a_1 não é elemento dos conjuntos de Y. Note que:

1. O número de elementos de X, $n(X)$ é dado por $n(X) = C(n-1,k-1)$, pois uma posição é fixa (tendo a_1 como elemento), e há apenas $n-1$ possibilidades de escolhas de elementos de A_n;

2. O número de elementos de Y é dado por $n(Y) = C(n-1,k)$, pois perde-se uma opção nas escolhas de elementos de A_n.

3. $X \cap Y = \emptyset\ e\ X \cup Y = C_k(A_n)$.

Logo, pelo princípio aditivo,

$n\big(C_k(A_n)\big) = C(n,k) = n(X) + n(Y) =$
$C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$.

Problema 2.3.3. Sendo $2 \leq k \leq n$, uma $k - permutação$ de n elementos com repetição é uma k-upla de elementos $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ onde cada entrada pode ser repetida. Se denotarmos $PR(n, k)$ o número de *k-permutações com repetição de n*, encontre:

a) $PR(5,3)$. b) Uma fórmula para $PR(n, k)$.

Solução:

a) Considerando uma 3-upla de elementos em $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ em que cada entrada pode ser repetida, por exemplo, (a_1, a_1, a_2), pelo princípio multiplicativo há $5^3 = 125$ uplas deste tipo. Logo $PR(5,3) = 125$.

b) Pensando de forma análoga ao item a), considerando agora k-uplas de elementos em $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pelo princípio multiplicativo há n^k destas uplas, de modo que $PR(n, k) = n^k$.

Problema 2.3.4. Em um parque de diversões há um brinquedo que gira sobre um eixo, chamado COMBINATRON. Este possui uma fila de quatro cadeiras dispostas lado a lado sobre o eixo de rotação. De quantas maneiras um grupo de 5 homens e 6 mulheres podem se divertir no COMBINATRON?

Solução:

. Podemos subdividir em casos separando por grupos de homens e mulheres entrando no COMBINATRON.

1. Três mulheres e um homem;
2. Dois homens e duas mulheres;
3. Três homens e uma mulher;
4. Quatro homens e nenhuma mulher.

No primeiro caso, pelo princípio multiplicativo, podemos fazer as escolhas de $C(5,1)C(6,3)$ maneiras. No segundo, terceiro e último caso, têm-se $C(5,2)C(6,2)$, $C(5,3)C(6,1)$ e $C(5,4)C(6,0)$ maneiras de fazer as escolhas, respectivamente. Para cada caso há 4! maneiras dos escolhidos se sentarem em fila.

Pelo princípio aditivo temos:

$4!\,C(5,1)C(6,3) + 4!\,C(5,2)C(6,2) + 4!\,C(5,3)C(6,1) + 4!\,C(5,4)C(6,0) = 7560$ modos de 5 homens e 6 mulheres se divertirem no COMBINATRON.

Problema 2.3.5. Prove a seguinte identidade utilizando argumentos combinatórios.

$$C(2n,2) = 2C(n,2) + n^2.$$

Solução:

Seja $A_{2n} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{2n}\}$ um conjunto com $2n$ elementos. Considerando $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $Y = \{a_{n+1}, \dots, a_{2n}\}$, temos que $X \cap Y = \emptyset$ e $X \cup Y = A_{2n}$. Cada subconjunto de A_{2n} com dois elementos é do tipo:

1. Com dois elementos de X;
2. Com dois elementos de Y;
3. Com um elemento de X e outro de Y.

O número de subconjuntos do tipo 1 é $C(n,2)$, e o do tipo 2, também. Como podemos escolher de n modos elementos de X para fazer par com n elementos de Y, pelo princípio multiplicativo há n^2 subconjuntos do tipo 3. O número de subconjuntos de A_{2n} com dois elementos é $C(2n,2)$ e é igual ao número de subconjuntos do tipo 1, 2 e 3, que pelo princípio aditivo são enumerados por $2C(n,2) + n^2$, o que confirma a fórmula:

$$C(2n,2) = 2C(n,2) + n^2.$$

Problema 2.3.6. (*O binômio de Newton*[1]) Considerando o binômio $(a+b)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, mostre que o coeficiente de $c_i = a^i b^{n-i}$ na expansão do binômio é $C(n,i)$.

Demonstração:

$(a+b)^n = \overbrace{\{(a+b)(a+b)\dots(a+b)\}}^{n\ vezes}$. Podemos escolher i símbolos a no produto de $C(n,i)$ maneiras, e para cada escolha de i símbolos a no produto, resta um complementar de $n-i$ símbolos b, de modo que cada termo na expansão $c_i a^i b^{n-i}$ é tal que $c_i = C(n,i)$, e a expansão de $(a+b)^n$ é dada por:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n,i) a^i b^{n-i}.$$

Problema 2.3.7. Encontre o coeficiente de x^2 na expansão de $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{10}$.

Solução:

Utilizando a fórmula do binômio de Newton, temos:

$$\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{10} = \frac{1}{x^{10}}(1+x^3)^{10} = \frac{1}{x^{10}} \sum_{i=0}^{10} C(10,i) x^{3i}.$$

O coeficiente de x^2 é obtido para $i = 4$, e vale $C(10,4) = 210$.

[1] Acredita-se que Newton tinha também o conhecimento da expansão $(a+b)^n$ para n inteiro e negativo.

Problema 2.3.8. (*Permutações circulares*) As crianças Miguel, Tauan e Sofia brincam de roda. De quantas maneiras elas podem brincar? E se houvessem n crianças dispostas circularmente, de quantas maneiras elas podem brincar?

Solução:

a) Por tentativa é fácil ver que há apenas duas maneiras para as crianças se organizarem em uma roda.

b) Considere um círculo com n crianças. Se rotacionarmos elas no sentido horário, por exemplo, a roda ainda é a mesma. Porém se fixarmos uma criança e permutarmos as outras, a roda é distinta. Logo o número destas crianças brincarem é igual ao que chamamos de *número de permutações circulares* de n elementos, e é dado por $(n-1)!$.

Problema 2.3.9. Suponha que dispomos de 20 bolas não enumeradas de cores branca, azul e preta. No caso há 10 bolas brancas, 6 azuis e 4 pretas. Partindo do princípio que as bolas são apenas distinguíveis por cores, de quantas maneiras podemos organizá–las em fila?

Solução:

Se as bolas forem uma a uma distinguíveis, teremos 20! maneiras. Porém precisamos retirar os casos idênticos. Como há 10 bolas brancas, podemos permutá-las de 10! maneiras, podemos permutar as azuis e pretas de 6! e 4! maneiras, respectivamente. Se denotarmos por N o número de filas possíveis, temos:

$10!\,6!\,4!\,N = 20!$, e assim $N = \frac{20!}{10!6!4!}$.

Problema 2.3.10. Certo código é escrito utilizando 6 letras e um número em qualquer ordem, como E1ERMIK,2WEKJRA, por exemplo. Quantas são as palavras-código possíveis utilizando as entradas INDIGOn, onde n é um dígito em $\{0,1,2,\ldots,9\}$?

Solução:

Apenas para as entradas com letras, temos $P(6;2,1,1,1,1) = \frac{6!}{2!} = 360$ possibilidades. Há sete espaços para alocar o dígito, para cada um dos dez dígitos (de zero a nove). Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $360 \times 7 \times 10 = 25200$ possibilidades de montar uma palavra código do tipo especificado.

Problema 2.3.11. (*Combinações Generalizadas*) Definição: Seja w_n uma coleção com n objetos não necessariamente distintos. Na coleção w_n há k grupos de objetos, onde cada grupo i possui n_i objetos idênticos entre si $(1 \leq i \leq k)$, satisfazendo $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Cada modo de alocar os objetos de w_n nos n lugares disponíveis é chamado de $combinação\ generalizada$ de n elementos do tipo $n_1, n_2, \dots, n_k$. O número de $n - combinações\ generalizadas$ do tipo $n_1, n_2, \dots, n_k$ é denotada por $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$.

a) Mostre que

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) =$$
$$C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) \dots C(n - n_1 - n_2 \dots\ n_{k-1}, n_k).$$

Demonstração:

a) Podemos alocar os n_1 objetos idênticos do grupo 1 de $C(n, n_1)$ maneiras, em seguida alocamos os n_2 objetos do grupo 2. Isto pode ser feito de $C(n - n_1, n_2)$ modos. Repetimos este processo até esgotar os grupos. Pelo princípio multiplicativo há

$$C(n, n_1)\ C(n - n_1, n_2) \dots C(n - n_1 - n_2 \dots\ n_{k-1}, n_k)$$

maneiras de alocar os objetos.

Como o número de maneiras de alocar objetos deste tipo é $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$, obtemos a fórmula:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) =$$
$$C(n, n_1)\ C(n - n_1, n_2) \dots C(n - n_1 - n_2 \dots\ n_{k-1}, n_k).$$

b) Conclua demonstrando a igualdade

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Demonstração:

Observe que o ato de alocar n objetos, matematicamente é o mesmo que considerá-los como uma n-upla. De modo que a definição de combinação generalizada é uma interpretação para a definição de uma permutação generalizada e, por conseguinte,

$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$.

3. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

3.1. Introdução

Neste capítulo trabalhamos, inicialmente, com algumas noções elementares de sucessões. Em seguida, apresentamos o conceito de progressões aritméticas ordinárias, progressões aritméticas de ordem superior e alguns resultados.

3.2. Progressões aritméticas ordinárias

A ideia de Progressão está relacionada com a sucessão. Na Matemática, caracterizamos a progressão como uma série numérica de quantidades, ou seja, que ocorre de forma sucessiva, uma após a outra.

Definição 3.2.1 Uma sucessão de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, que a cada número natural n (ordem) faz corresponder um número real x_n (que se denomina *n-ésimo* termo da sucessão).

Portanto,

$$x: \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x_n$$

Escrevemos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas (x_n) para representar a sucessão cujo *n-ésimo* termo é x_n (termo geral da sucessão).

Exemplo 3.2.2. $(a_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots)$ é uma sequência onde cada termo a_n é o n-ésimo número par.

Definição 3.2.3. Progressões aritméticas são sucessões de números reais nas quais a diferença entre termos consecutivos é sempre constante. Essa diferença constante tem o nome de razão da progressão e é representada pela letra r.

Consideremos uma progressão aritmética (a_n). Se quisermos, por exemplo, calcular o termo de ordem 6 a partir do termo inicial a_1, basta somar a a_1 cinco vezes a razão dessa progressão aritmética. Isto é,

$$a_6 = a_1 + 5r$$

Assim sendo, para calcular um termo de ordem n numa progressão aritmética de razão r qualquer basta atender a que

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

O termo geral de uma progressão aritmética (a_n) de razão $r > 0$ é assim dado pela expressão

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplo 3.2.4. Uma equipe de pesquisadores estava estudando o impacto da temperatura sobre o crescimento de uma espécie de feijão em função do tempo e obtiveram a seguinte tabela, a partir do momento em que a ponta da planta saiu do solo:

Desenvolvimento da planta

Tempo (dias)	**Altura (cm)**
1	1,00
2	1,75
3	2,50
4	3,25
5	4,00

Se a planta continuar crescendo seguindo o padrão dos cinco primeiros dias, qual será sua altura no 10º dia?

Solução:

Com os dados da tabela, percebe-se que a altura descreve uma sequência onde a diferença $a_n - a_{n-1} = 0{,}75$. Caracterizando uma Progressão aritmética. Logo teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Isto é, $a_{10} = 7{,}75$.

Portanto, depois de 10 dias, a planta estará com 7,75 cm de altura.

Apresentamos, a seguir, a expressão da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, denotada por S_n.

Proposição 3.2.5. (Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração: Seja (a_n)) uma progressão aritmética e S_n a soma dos seus n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \text{ (1)}$$

Reordenando os termos da igualdade anterior começando pelo último e terminando no primeiro vem

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1. \ (2)$$

Somando (1) com (2) obtemos que

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Ao passar de um par de parênteses para o seguinte verifica-se que, na primeira parcela há um aumento de r e na segunda parcela uma diminuição de r, não alterando a soma. Isto é,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_n - r) + (a_1 + 2r + a_n - 2r) + \cdots$$
$$+ (a_1 + (n-1)r + a_n - (n-1)r) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

Como existem n pares de parênteses, temos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Leftrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

■

Exemplo 3.2.6. Seja a progressão aritmética $(a_n) = (10,8,6,4,2,\ldots)$, qual é a soma dos 20 primeiros números?

Solução:

Como $a_1 = 10, r = -2 \ e \ a_{20} = 10 + 19 \times (-2) = -28$, temos:

$$S_{20} = \frac{(10 - 28)20}{2}$$

$$S_{20} = -180$$

■

Enunciamos, a seguir, uma proposição que mostra a relação entre a soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem e polinômios do segundo grau.

Proposição 3.2.7. A soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética é um polinômio de grau 2 sem termo livre.

Demonstração

Temos que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2}$$

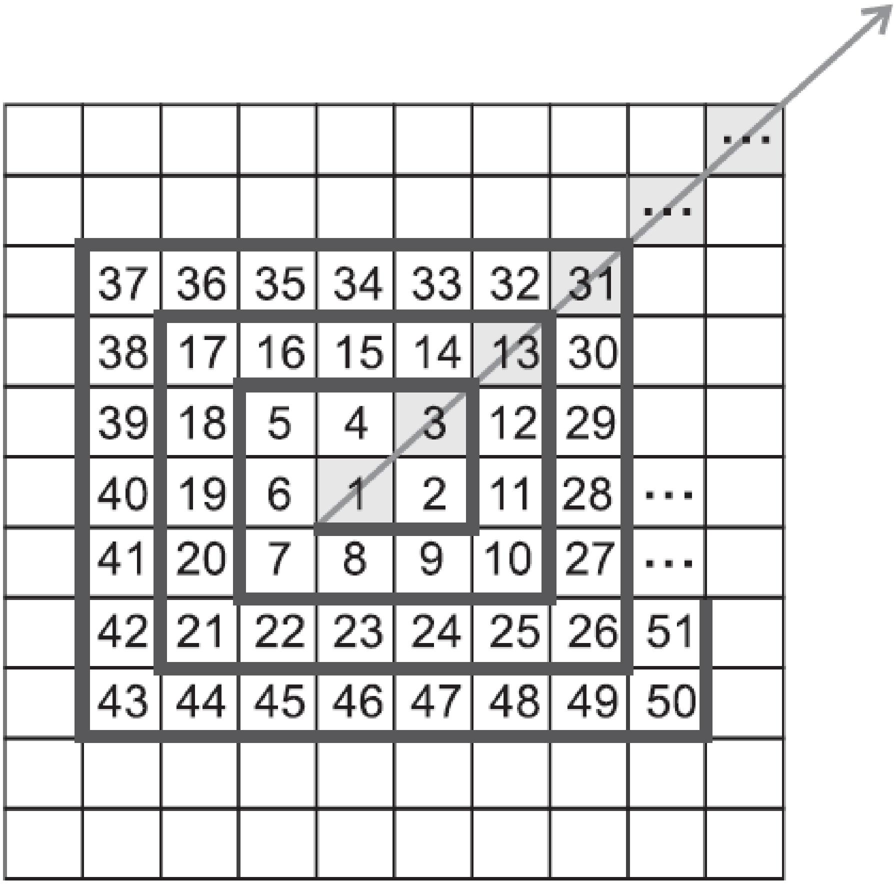
$$= \frac{2a_1 n + rn^2 - rn}{2}$$

$$= \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$

■

Aplicação 3.2.8. Paula escreveu os números 1, 2, 3,... em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. (ver figura 1) Os números que aparecem ao longo da flecha formam a sequência 1, 3, 13, 31, ... Qual é o 30º termo dessa sequência?

Figura 1. Folha de papel quadriculado da aplicação 3.2.8.



Fonte: imagem extraída da prova da OBMEP – 2007.

Solução:

A partir da tabela, verificamos que o próximo termo da sequência é o número 57. Assim temos:

$f_1 = 1$

$f_2 = 3$

$f_3 = 13$

$f_4 = 31$

$f_5 = 57$

$\vdots$

$f_n = ?$

Para determinar o valor de f_{30} precisamos determinar a *lei de formação* da referida sequência.

Observando a sequência dos números 1, 3, 13, 31, 57, ..., percebemos o seguinte padrão:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+10} 13 \xrightarrow{+18} 31 \xrightarrow{+26} 57$$

Notemos ainda que, a sequência $(2, 10, 18, 26)$ é uma Progressão Aritmética de razão 8, cujo termo geral, a_n, é dado por:

$$a_n = 2 + (n-1)8 = 8n - 6.$$

Dessa forma, a partir do padrão representado acima, observamos que:

$$1 \xrightarrow{+(8.1-6)} 3 \xrightarrow{+(8.2-6)} 13 \xrightarrow{+(8.3-6)} 31 \xrightarrow{+(8.4-6)} 57 \ldots \xrightarrow{[8.(n-2)-6]} f_{n-1} \ldots \xrightarrow{[8.(n-1)-6]} f_n$$

Assim, podemos notar dois fatos interessantes:

1º) Cada termo da sequência pode ser determinado a partir de seu termo anterior, pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + (8n - 6) \end{cases}$$

2º) Cada termo da sequência pode ser escrito da seguinte maneira:

$f_1 = 1$

$f_2 = 3 = (8.1 - 6)$

$f_3 = 13 = (8.1 - 6) + (8.2 - 6)$

$f_4 = 31 = (8.1 - 6) + (8.2 - 6) + (8.3 - 6)$

$f_5 = 57 = (8.1 - 6) + (8.2 - 6) + (8.3 - 6) + (8.4 - 6)$

$\vdots$

$$f_n = 1 + (8.1 - 6) + (8.2 - 6) + (8.3 - 6) + (8.4 - 6) + \cdots + [8.(n-1) - 6]$$

A soma S, indicada por

$(8.1 - 6) + (8.2 - 6) + (8.3 - 6) + (8.4 - 6) + \cdots + [8.(n-1) - 6]$,

representa a soma dos termos de uma PA de razão 8, de $(n-1)$ termos, em que $a_1 = 2$ e a_n =8.(8.1-6). Escrevendo essa soma de trás para frente

$$S = [8.(n-1) - 6)] + [8.(n-2) - 6)] + [8.(n-3) - 6)] + \cdots + (8.3 - 6) + (8.2 - 6) + (8.1 - 6)$$

Daí

$$2.S = (8n - 12).(n-1) \therefore$$

$$S = (4n - 6).(n-1)$$

Logo, a referida sequência, tem por lei de formação:

$f_n = (4n - 6).(n-1) + 1$, ou simplesmente, $f_n = 4n^2 - 10n + 7$.

Assim, calculamos facilmente f_{30}:

$f_{30} = 4.30^2 - 10.30 + 7 = 3307$.

Observe que poderíamos ter determinado a soma S aplicando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$:

$$S = \frac{(2 + 8n - 14).(n-1)}{2} = \frac{(8n - 12).(n-1)}{2}$$

Ou seja,

$$S = (4n - 6).(n-1)$$

■

3.3. Progressões aritméticas de ordem superior

Definição 3.3.1. (Operador Diferença). Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defini-se o chamado operador diferença $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que constitui uma nova sequência. Como $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma nova sequência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta(\Delta a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e assim recursivamente, $(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para $k \geq 3$.

Definição 3.3.2 (Ordem de uma PA). Uma sequência $(a_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ será uma PA de ordem k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante.

Exemplo 3.3.3. A sequência $(a_{\boldsymbol{n}})_{n\in\mathbb{N}} = (37; 13; 21; 31; \dots)$,onde $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, para $n \geq 1$, é uma $P.A.$ de ordem 2, pois, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 2$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 2$, e assim, $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4,6,8,10,\dots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,\dots)$.

Exemplo 3.3.4. A sequência $(b_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} = (2,8,20,40,70,\dots)$, onde $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + n^2 + 3n + 2$, para $n \geq 1$, é uma $P.A.$ de ordem 3, pois, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = n^2 + 3n + 2$, $\Delta^2 b_n = \Delta b_{n+1} - \Delta b_n = 2n + 4$ $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 2$, e assim, $(\Delta b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6,12,20,30,42,\dots)$, $(\Delta^2 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6,8,10,12,\dots)$ e $(\Delta^3 b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,\dots)$.

Exemplo 3.3.5. A sequência $(c_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} = (1,6,20,50,\dots)$, onde $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + (1/6)(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$, para $n \geq 1$, é uma $P.A.$ de ordem 4, pois, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = (1/6)(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$, $\Delta^2 c_n = \Delta c_{n+1} - \Delta c_n = n^2 + 4n + 4$ $\Delta^3 c_n = \Delta^2 c_{n+1} - \Delta^2 c_n = 2n + 5$, $\Delta^4 c_n = \Delta^3 c_{n+1} - \Delta^3 c_n = 2$ e assim,

$(\Delta c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5,14,30,55,91,\dots)$, $(\Delta^2 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (9,16,25,36,\dots)$, $(\Delta^3 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (7,9,11,13,\dots)$ e $(\Delta^4 c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,\dots)$.

Exibiremos agora uma expressão para uma $P.A.$ de ordem superior que depende das sequências de diferenças e do número de combinações. Esta fórmula será útil para se determinar uma conjectura para o problema da contagem de triângulos. De forma geral podemos afirmar que todo termo de uma $P.A.$ de ordem k é um polinômio, e a recíproca também é válida: todo polinômio de grau k na variável n é termo de uma $P.A.$ de ordem k.

A priori, vamos lançar dois resultados auxiliares, lemas, para, em seguida, obtermos o resultado geral.

Lema 3.3.6. Seja (a_n) uma sequência qualquer. Para todos n e i inteiros não negativos, tem-se:

$$\Delta^i a_n = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C(i,j) a_{n+j}\,.$$

Demonstração

A demonstração do lema se dará por indução sobre i.

Para $i = 1$, o resultado segue imediatamente. Assumindo válida a proposição para $i - 1$, vamos provar a veracidade da afirmação para i.

Por definição $\Delta^i a_n = \Delta^{i-1} a_{n+1} - \Delta^{i-1} a_n$, e pela hipótese indutiva, temos:

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} C(i-1,j) a_{n+1+j} - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} C(i-1,j) a_{n+j}\,.$$

Colocamos a parte, o último termo da primeira soma e o primeiro termo da segunda soma e assim obtemos:

$$\Delta^i a_n = \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{i-1-j} C(i-1,j) a_{n+1+j} + a_{n+i} +$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} C(i-1,j) a_{n+j} + (-1)^i a_n =$$

$$(-1)^i a_n + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \big(C(i-1,j-1) + C(i-1,j)\big) a_{n+j} + a_{n+i} =$$

$$(-1)^i a_n + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} C(i,j) a_{n+j} + a_{n+i} = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C(i,j) a_{n+j}\,.$$

Na penúltima equação utilizamos a relação de Stifel. ■

Lema 3.3.7. As seguintes identidades combinatórias são válidas.

a) Sejam $i, j \in \mathbb{Z}$, com $i \geq j + 1$ e $j \geq 0$. Então:

$$\sum_{h=0}^{j} (-1)^h C(i,h) = (-1)^j C(i-1,j).$$

b) $C(n+1,k)C(k,j) = C(n+1-j,k-j)C(n+1,j)$, para quaisquer n, j e k naturais.

Demonstração

a)

$$\sum_{h=0}^{j} (-1)^j C(i,h) =$$

$$C(i,0) - C(i,1) + C(i,2) - \cdots + (-1)^j C(i,j) =$$
$$C(i,0) - \big(C(i-1,0) + C(i-1,1)\big) + \big(C(i-1,1) + C(i,2)\big) - \cdots +$$
$$(-1)^j (C(i-1,j-1) + C(i-1,j)) = (-1)^j C(i-1,j).$$

Na última passagem utilizamos a **relação de Stifel.**

b)

$$C(n+1,k)C(k,j) = \left(\frac{(n+1)!}{j!\,(n+1-j)!}\right)\left(\frac{(n+1-j)!}{(k-j)!\,(n+1-k)!}\right) =$$
$$\left(\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}\right)\left(\frac{k!}{(k-j)!\,j!}\right) = C(n+1-j,k-j)C(n+1,j). \blacksquare$$

Teorema 3.3.8. Se (a_n) é uma $P.A.$ de ordem k, então o seu termo geral a_n é um polinômio de grau k dado por

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} C(n,j)\Delta^j a_0.$$

Demonstração

Seja (a_n) uma $P.A.$ de ordem k. O resultado também segue trivialmente para os casos $n = 0$ e $n = 1$. Vamos demonstrar a veracidade do proposto utilizando o princípio de indução finita em sua segunda forma.

Pelo **lema 1**,

$$\Delta^{n+1} a_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} C(n+1,j) a_j + a_{n+1},$$

logo,

$$a_{n+1} = \Delta^{n+1} a_0 - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} C(n+1,j) a_j\,,$$

e pela hipótese indutiva, temos:

$$a_{n+1} = \Delta^{n+1} a_0 - \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} C(n+1,j) \sum_{i=0}^{j} C(j,i)\Delta^{\mathrm{i}} a_0 =$$
$$\Delta^{n+1} a_0 - \sum_{i=0}^{n} \Delta^{\mathrm{i}} a_0 \sum_{j=i}^{n} (-1)^{n+1-j} C(n+1,j) C(j,i) =$$

$$\Delta^{n+1}a_0 - \sum_{i=0}^{n} C(n+1,i)\Delta^{\mathrm{i}}a_0 \sum_{j=i}^{n}(-1)^{n+1-j}C(n+1-i,j-i)\,.$$

Utilizamos a parte b) do **lema 3.3.7.** na última passagem. Fazendo uso da parte a) do mesmo lema na soma

$$\sum_{i=j}^{n}(-1)^{n+1-j}C(n+1-i,j-i),$$

obtemos:

$$\sum_{i=j}^{n}(-1)^{n+1-j}C(n+1-i,j-i) = \sum_{h=0}^{n-i}(-1)^{h}C(n-i+1,h) =$$

$$(-1)^{n-i+1}\sum_{h=0}^{n-i}(-1)^{h}C(n-i+1,h) =$$

$$(-1)^{n-i+1}(-1)^{n-i}C(n-i,n-i) = (-1)^{2(n-i)+1} = -1,$$

logo,

$$a_{n+1} = \Delta^{n+1}a_0 - (-1)\sum_{i=0}^{n} C(n+1,i)\Delta^{i}a_0 = \sum_{j=0}^{n+1} C(n+1,j)\Delta^{j}a_0\,.$$

Como (a_n) é uma p.a. de ordem k, então $\Delta^j a_n = 0$ para todo $j > k$ e, portanto,

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} C(n,j)\Delta^{j}a_0. \blacksquare$$

Apresentamos a seguir problemas com progressões aritméticas ordinárias e suas soluções.

Problema 3.3.9. Considere a sequência (a_n), dada por $a_1 = 1, a_2 = 2+4+6, a_3 = 8+10+12+14, a_4 = 16+18+20+22+24, \ldots$ Encontre uma expressão para o termo geral a_n em função de n.

Solução

$$\begin{cases} a_2 = 2(1+2+3) \\ a_3 = 2(4+5+6+7) \\ a_4 = 2(8+9+10+11+12) \\ \vdots \\ a_n = 2(b_{n-2} + (b_{n-2}+1) + \cdots + (b_{n-2}+n) \\ \vdots \end{cases}$$

Assim $a_n = 2\left((n+1)b_{n-2} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n \geq 2$.

Encontrando o termo geral da sequência (b_n), obtemos também o termo geral de (a_n). Observe que (b_n) é uma p.a. de ordem 2. De fato,
$b_n = (1,4,8,13,\dots), (\Delta b_n) = (3,4,5,6,\dots)$. **Logo**,

$$b_n = 1.C(n,0) + 3.C(n,1) + 1.C(n,2) = \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} + 1.$$

Portanto $a_n = (n+1)(n^2 + 2n - 4)$, para todo $n \geq 2$.

Problema 3.3.10. Prove que para todo $k \in \mathbb{N}$, a soma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ é uma $P.A.$ de ordem $k+1$.

Solução

Para $k = 1$, sabemos que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, que é um polinômio de grau 2. Vamos demonstrar o lema utilizando indução sobre k. Suponhamos válida a afirmação: $1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \dots + n^{k-1}$ é um polinômio de grau k sobre n. Tomando como verdade a afirmação anterior, vamos provar que $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ é um polinômio de grau $k+1$ sobre n.

Pela hipótese indutiva, $1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \dots + n^{k-1} = p_k(n)$, um polinômio de grau k sobre n.

Assim $n(1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \dots + n^{k-1}) = np_k(n)$ e resolvendo para n^k temos: $n^k = np_k(n) - n - n2^{k-1} - \dots - n(n-1)^{k-1} = p_{k+1}(n)$, um polinômio de grau $k+1$ sobre n. Portanto,
$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = 1 + 2^k + \dots + (n-1)^k + p_{k+1}(n)$ é um polinômio de grau $k+1$ sobre n.

Problema 3.3.11. Mostre que o polinômio associado à soma dos n primeiros termos de uma p.a. de ordem k tem termo livre igual a 0.

Solução

Seja (a_n) uma p.a. de ordem k. A soma $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ vale

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} C(n, i+1)\Delta^i a_0 .$$

Note que o termo $C(n, i+1) = \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}$ é sempre múltiplo de n para todo $1 \leq i < n - 1$. De maneira que o termo livre é sempre nulo nesta soma.

Problema 3.3.12. Mostre que a sequência $\big(C(n,k)\big)$, para k um número natural fixo, é uma p.a. de ordem k.

Solução.

Observe que:

$$C(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(k+1)\big)}{k!} = \frac{1}{k!}\Big(n^k + g(n)\Big),$$

onde $g(n)$ é um polinômio de grau menor do que k.

Assim, a sequência $\big(C(n,k)\big)$ é uma p.a. de ordem k.

Problema 3.3.13. Prove o seguinte lema:

Se (a_n) é uma sequência, então

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_n.$$

Demonstração:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k =$$

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) =$$

$$a_{n+1} - a_n.$$

Este lema é conhecido, por alguns matemáticos, como *soma telescópica*, justamente pela soma requerer apenas os extremos para o cálculo.

4. ATIVIDADE SOBRE PROGRESSÕES

Neste tópico apresentamos a atividade desenvolvida com uma turma de alunos do Ensino Básico, mais especificamente do Ensino Médio, que teve por objetivo trabalhar o conceito de uma Progressão Aritmética de ordem n e resolver um problema da contagem de subtriângulos a partir de um triângulo de lado n, para n ímpar.

A atividade foi realizada em seis encontros dos quais participaram alunos do Centro de Excelência 28 de Janeiro, uma escola de tempo integral situada no município sergipano de Monte Alegre de Sergipe. Participaram dessa atividade, 20 estudantes. Dentre estes, estavam alunos do primeiro e segundo ano do Ensino Médio, os quais ainda não haviam visto o conceito de progressões aritméticas.

Foram propostos nove problemas dispostos em seis folhas as quais foram apresentadas aos alunos para que respondessem a cada uma das situações-problema . As folhas não foram entregues simultaneamente, mas à medida que os alunos trabalhavam e avançavam na realização da atividade. Todos os alunos recebiam uma folha com novas atividades ao mesmo tempo.

Para ajudar a compreender o desenvolvimento da atividade e a participação dos alunos iremos apresentar também algumas das respostas que selecionamos. Para isso tratamos de omitir o verdadeiro nome dos alunos e eliminamos formas de identificá-los de forma a preservar e garantir a privacidade dos participantes da pesquisa.

A atividade se desenvolveu ao longo de seis encontros nos quais os alunos, com o auxílio do professor, responderam as atividades propostas em sequência. No próximo tópico será apresentado o material trabalhado em cada um desses seis encontros dispostos como 1ª Folha, 2ª Folha, 3ª Folha, 4ª Folha, 5ª Folha e 6ª Folha. A seguir apresentaremos a primeira delas.

A primeira atividade (1ª Folha) iniciou com uma apresentação do que é sequência numérica (veja figura 2).

Figura 2. Apressentação de uma sequência numérica

1ºFolha

Para iniciar esta atividade, vamos relacionar padrões e regularidades utilizando números. Para tanto, vamos entender o que é uma sequência numérica. Uma sequência numérica $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sucessão ordenada de números reais. Exemplos:

a) A sequência dos números pares $(p_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$;

b) A sequência dos números primos $(P_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots)$.

c) A sequência de Fibonacci $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$;

Fonte: Banco de dados do Autor

Após a apresentação de uma sequência foi proposto o Primeiro problema aos alunos (ver figura 3). Essa questão proposta de forma contextualizada com o evento esportivo mais popular do Brasil relaciona sequência numérica com a Copa do Mundo de Futebol.

Figura 3. Problema 1 da atividade 1 da 1º Folha

Problema 1. Sabendo que a Copa do Mundo de Futebol é realizada de 4 em 4 anos,

a) Exiba os nove primeiros termos da sequência que descreve os anos de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

b) Qual é a relação entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo?

c) Exiba a sequência das diferenças dos termos da sequência de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

Uma *progressão aritmética (P.A.)* é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Esta diferença constante entre termos consecutivos de uma *P.A.* é denominada de razão.

d) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 12ª Copa do Mundo?

e) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 20ª Copa do Mundo?

f) Sem listar uma a uma, qual é o ano de realização da milésima Copa do Mundo?

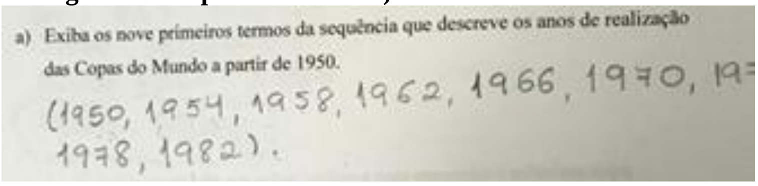
g) Aqui, com a expressão em mãos, utilize-a para encontrar a milésima copa.

h) A partir dos itens anteriores, obtenha uma expressão para o termo geral de uma *P.A.* (a_n) de primeiro termo a_1 e razão r.

Fonte: Banco de dados do Autor

Iniciamos a atividade analisando os anos de realizações das copas do mundo a partir de 1950 (ver Figura 4). O problema 1 tinha por objetivo relacionar padrões e regularidades utilizando números, buscando entender o que é uma sequência numérica.

Figura 4. Resposta do item a) doProblema 1 da 1º Folha

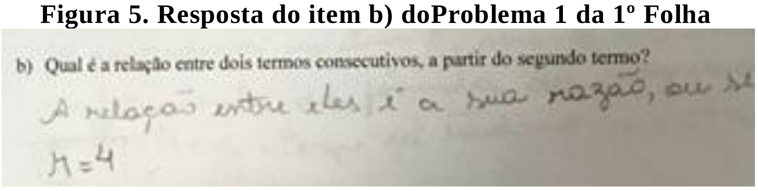

a) Exiba os nove primeiros termos da sequência que descreve os anos de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

(1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 19
1978, 1982).

Fonte: Banco de dados do Autor

No item a) (ver figura 4), os alunos exibiram as nove primeiras datas que descrevem os anos de realização desse evento, observando a relação entre dois anos consecutivos, a partir do segundo ano. Todos os estudantes que participaram da atividade conseguiram resolover esse item.

Figura 5. Resposta do item b) doProblema 1 da 1º Folha

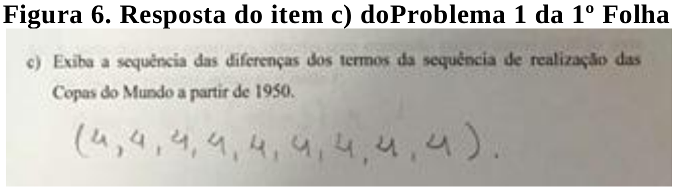

b) Qual é a relação entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo?

A relação entre eles é a sua razão, ou se
r=4

Fonte: Banco de dados do Autor

O segundo item tratou a relação entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo (ver figura 5). Nessa resposta, todos os alunos descreveram que essa diferença era constante e igual a 4. Destacamos dois olhares diferentes, estudantes que eram da 2ª série, que já tinham estudado progressão aritmética usaram o termo “razão” para definir a relação entre cada ano de realização da copa e o ano anterior.

Figura 6. Resposta do item c) doProblema 1 da 1º Folha


c) Exiba a sequência das diferenças dos termos da sequência de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

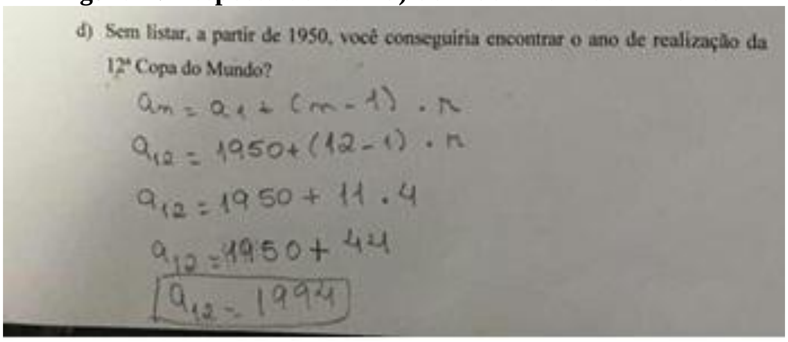
(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4).

Fonte: Banco de dados do Autor

No item c) (ver figura 6), todos os estudantes conseguiram exibir a sequência das diferenças dada por $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$.

Para determinar o ano de realização da 12º Copa do Mundo, solicitada no item d) (ver figura 7), os alunos usaram a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, pois já possuíam esse conhecimento como mostra o relato de um dos alunos “Eu não tive nenhuma dificuldade, pois já tinha base do assunto”, ressaltou um dos discentes.

Figura 7. Resposta do item d) doProblema 1 da 1º Folha


d) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 12ª Copa do Mundo?

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{12} = 1950 + (12-1) \cdot r$

$a_{12} = 1950 + 11 \cdot 4$

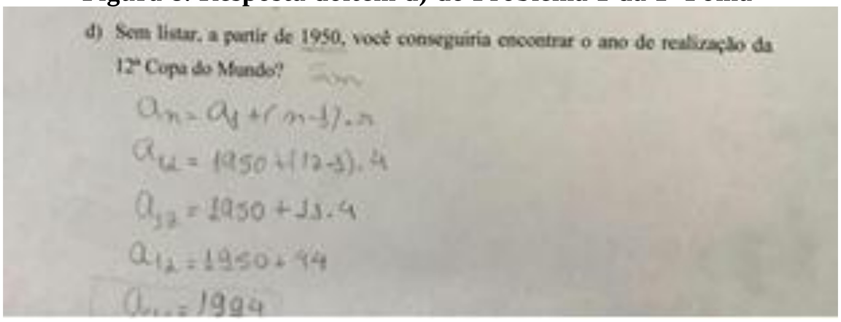
$a_{12} = 1950 + 44$

$\boxed{a_{12} = 1994}$

Fonte: Banco de dados do Autor

Outro estudante, também da 2ª série, apresentou resposta semelhantes à exibida acima (ver Figura 8). Segue abaixo a imagem com a resposta desse aluno.

Figura 8. Resposta doitem d) do Problema 1 da 1º Folha


d) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 12ª Copa do Mundo? Sim

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{12} = 1950 + (12-1) \cdot 4$

$a_{12} = 1950 + 11 \cdot 4$

$a_{12} = 1950 + 44$

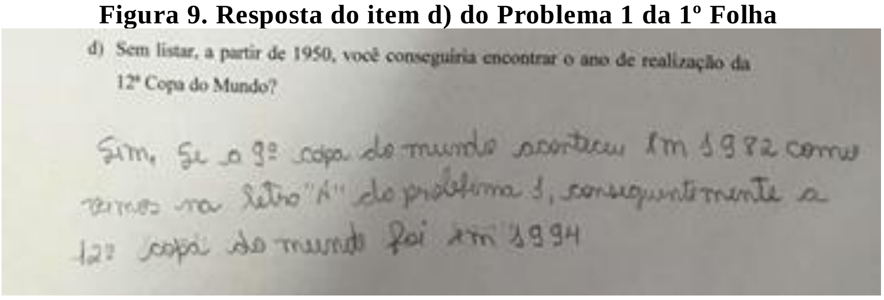
$a_{12} = 1994$

Fonte: Banco de dados do Autor

É possível perceber uma resolução muito similar à evidenciada anteriormente e a utilização da fórmula do termo geral.

No tocante a resolução da atividade feita por estudantes da 1ª série, temos o caso de daqueles que conseguiram resolver as questões utilizando um procedimento diferente dos referidos acima (ver Figura 6). A imagem a seguir apresenta suas respostas.

Figura 9. Resposta do item d) do Problema 1 da 1º Folha


d) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 12ª Copa do Mundo?

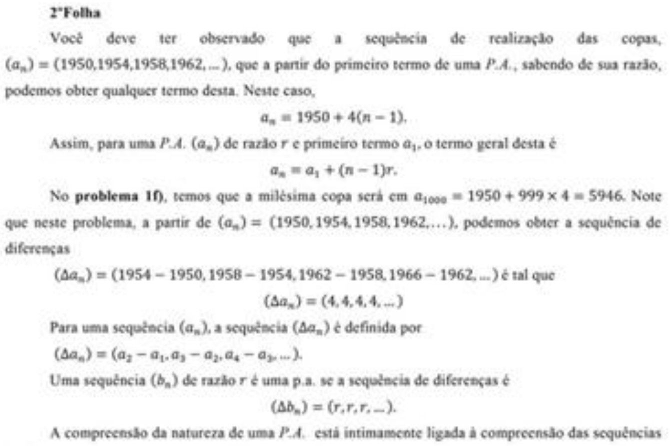
Sim, se a 9ª copa do mundo aconteceu em 1982 como temos na letra "A" do problema 1, consequentemente a 12ª copa do mundo foi em 1994

Fonte: Banco de dados do Autor

Observamos que não foi utilizado nenhum termo ou fórmula já conhecido das progressões aritméticas. Uma das alunas relatou: “encontrei muita dificuldade para resolver as questões, pois eu nunca tinha tido contato com progressão aritmética. Ainda assim tentei usar os conhecimentos básicos que tinha para buscar uma solução, o que levou bastante tempo, mas acredito que tenha dado certo”. Como vimos ela chegou a mesma resposta dos alunos da 2ª série. Todos os estudantes conseguiram resolver os problemas propostos no primeiro dia de atividades.

A segunda atividade (Folha 2) iniciou com a apresentação do termo geral de uma $P.A.(a_n)$ e o processo de obtenção da sequência das diferenças Δa_n (ver Figura 7).

Figura 10. Atividade da 2º Folha



2ºFolha

Você deve ter observado que a sequência de realização das copas, $(a_n) = (1950, 1954, 1958, 1962, \ldots)$, que a partir do primeiro termo de uma *P.A.*, sabendo de sua razão, podemos obter qualquer termo desta. Neste caso,

$$a_n = 1950 + 4(n-1).$$

Assim, para uma *P.A.* (a_n) de razão r e primeiro termo a_1, o termo geral desta é

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

No **problema 1f)**, temos que a milésima copa será em $a_{1000} = 1950 + 999 \times 4 = 5946$. Note que neste problema, a partir de $(a_n) = (1950, 1954, 1958, 1962, \ldots)$, podemos obter a sequência de diferenças

$(\Delta a_n) = (1954 - 1950, 1958 - 1954, 1962 - 1958, 1966 - 1962, \ldots)$ é tal que

$$(\Delta a_n) = (4, 4, 4, 4, \ldots)$$

Para uma sequência (a_n), a sequência (Δa_n) é definida por

$(\Delta a_n) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots)$.

Uma sequência (b_n) de razão r é uma p.a. se a sequência de diferenças é

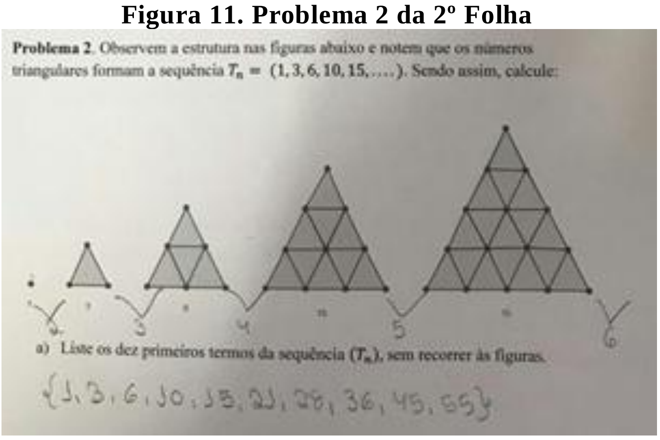
$$(\Delta b_n) = (r, r, r, \ldots).$$

A compreensão da natureza de uma *P.A.* está intimamente ligada à compreensão das sequências

Fonte: Banco de dados do Autor

No problema 2 (ver figura 11), trabalhamos com os números triangulares, que formam a sequência $T_n = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$.

Figura 11. Problema 2 da 2º Folha

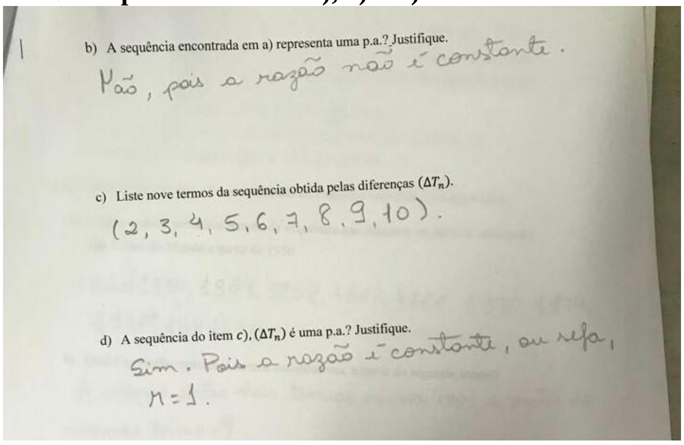


Fonte: Banco de dados do Autor

No item a) do problema 2 (ver figura 11) todos os aluos conseguiram perceber a lógica da estrutura dos números triangulares e listaram os elementos das sequência solicitada. Os estudantes listaram os 10 primeiros termos da sequência T_n observando as diferenças entre cada termo e o termo anterior. Ressaltamos que todos os discentes consegiram determinar a resposta esperada.

Na próxima figura (ver Figura 12) apresentamos a resposta de um estudante referente aos itens b), c) e d) do problema 2.

Figura 12. Respostas dos tens b), c) e d) doProblema 2 da 2º Folha

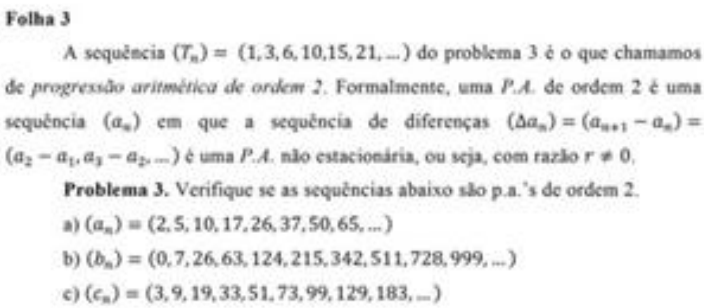


Fonte: Banco de dados do Autor

No item b), os estudantes perceberam que a sequência não representava uma progressão aritmética, pois a diferença entre cada termo e o termo anterior não era constante. Em seguida, buscando resolver o item b), os alunos foram orientados a determinar a sequência das diferenças, isto é, fazendo $3-1; 6-3; 10-6; 15-10; \ldots$, obtiveram $\Delta T_n = (2, 3, 4, 5, \ldots)$ e assim, perceberam que a sequência obtida se tratava de uma progressão aritmética. Obervemos que os discentes identificaram que a diferença entre dois termos consecutivos era uma unidade a mais que a diferença entre os dois termos anteriores. A partir dessa percepção puderam listar os 10 primeiros termos da sequência. No item b), os alunos destacaram que a sequência não se tratava de uma progressão aritmética, pois a diferença entre termos consecutivos não era constante. No entanto, no item c) puderam notar que a sequência ΔT_n se tratava de uma $P.A.$

No terceiro dia de atividades (Folha 3) definimos progressão aritmética de ordem 2 e apresentamos o problema 3 (ver figura 13).

Figura 13. Problema 3 da Atividade da 3º Folha



Folha 3

A sequência $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ do problema 3 é o que chamamos de *progressão aritmética de ordem 2*. Formalmente, uma $P.A.$ de ordem 2 é uma sequência (a_n) em que a sequência de diferenças $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)$ é uma $P.A.$ não estacionária, ou seja, com razão $r \neq 0$.

Problema 3. Verifique se as sequências abaixo são p.a.'s de ordem 2.

a) $(a_n) = (2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, \ldots)$

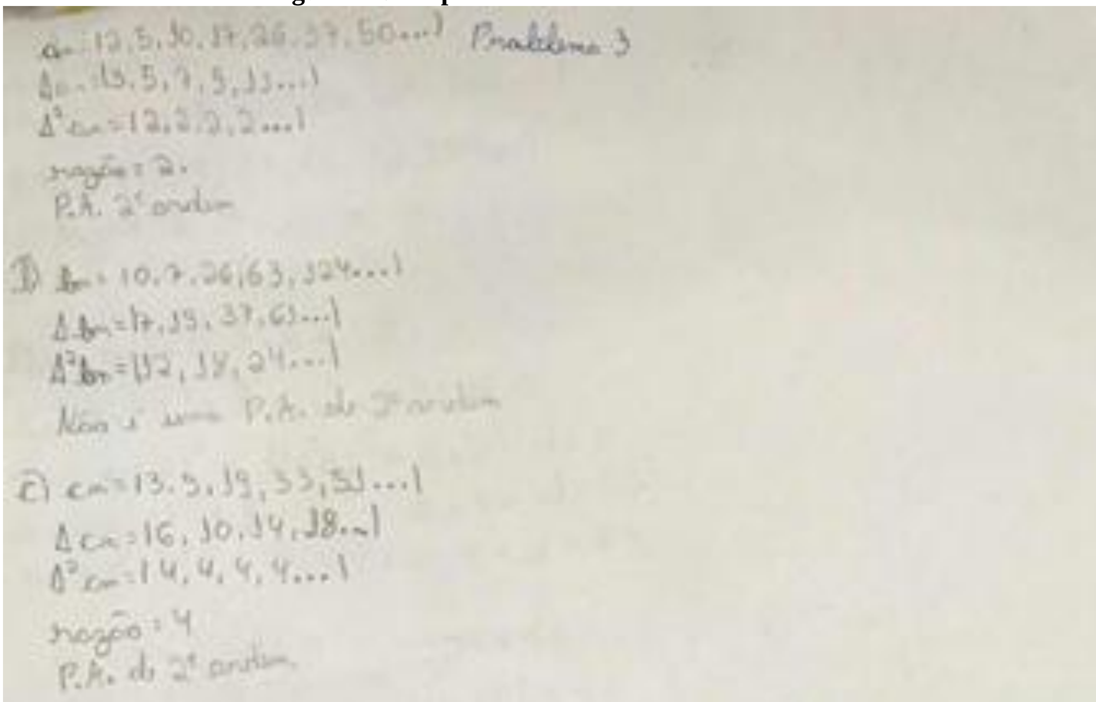
b) $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \ldots)$

c) $(c_n) = (3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, 129, 183, \ldots)$

Fonte: Banco de dados do Autor

O Problema 3 (ver Figura 13) tinha por objetivo verificar se as sequências dos itens a), b) e c) eram progressões aritméticas de ordem 2. Todos os estudantes conseguiram verificar que os intens a) e c) se tratavam de progressões aritméticas de ordem 2, já o item b) não tinha a mesma característica. A figura a seguir (figura 14) mostra as respostas de um dos nossos discentes.

Figura 14. Resposta do Problema 3 da 3º Folha



Fonte: Banco de dados do Autor

O problema 4 solicitava o termo geral da sequência $c_n = (3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, 129, 183, \dots)$ (ver figura 15).

Figura 15. Problema 4 da Atividade da 3º Folha

Problema 4. Encontre o termo geral da sequência $(c_n) = (3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, 129, 183, \dots)$.

Fonte: Banco de dados do Autor

Pudemos constatar que o termo geral de uma progressão aritmética de ordem 2 é um polinômio de grau 2 na variável n, bem como o termo geral de uma $P.A.$ (a_n) é um polinômio de grau 1 em n.

A $P.A.$ de ordem 2, $(a_n) = (2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, \dots)$ possui termo geral na forma $a_n = a(n)^2 + b(n) + c$. (como mostra afigura 16).

Figura 16. Problema 3 da Atividade da 3º Folha

Um fato importante aqui é que o termo geral de uma *P.A.* de ordem 2 é um polinômio de grau 2 na variável n, bem como o termo geral de uma *P.A.* (a_n) é um polinômio de grau 1 em n, a saber, $a_n = a_1 + (n-1)r$. A *P.A.* de ordem 2 do Problema 3a) possui termo geral na forma $a_n = a(n)^2 + b(n) + c$. Devemos encontrar os coeficientes a, b e c a fim de encontrar o termo geral da sequência. Para este problema, sabemos que

$a_1 = 2, a_2 = 5$ e $a_3 = 10$. Desta forma, temos as seguintes equações.

$$\begin{cases} 2 = a_1 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 5 = a_2 = a(2)^2 + b(2) + c \\ 10 = a_3 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases}$$

Como sabemos, devemos resolver este sistema nas incógnitas a, b e c para obter o termo geral da *P.A.* de ordem 2, (a_n). Subtraindo a linha 1 da linha 2, $L_2 - L_1$e a linha 1 da linha 3, $L_3 - L_1$ obtemos a partir do sistema original

$$L_1: 2 = a + b + c$$
$$L_2: 5 = 4a + 2b + c$$
$$L_3: 10 = 9a + 3b + c$$

O seguinte sistema

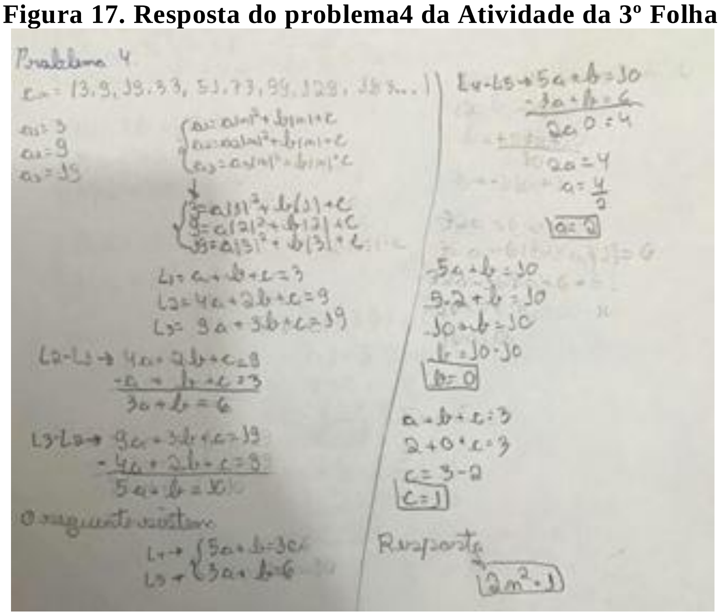
$$3a + b = 3$$
$$8a + 2b = 8$$

Cuja solução é $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Assim o termo geral da sequência (a_n) é $a_n = a_n = an^2 + bn + c = n^2 + 1$.

Fonte: Banco de dados do Autor

Assim, instigamos os alunos a obterem o termo geral da sequência do problema 4. (figura 15). Ressaltamos que este trabalho foi realizado com alunos das primeiras e segundas séries do ensino médio, em que a maioria deles não tinha conhecimento sobre escalonamento de sistema de equações. Fizemos um trabalho de orientação, ensinando passo a passo como resolver um sistema de equações. Em seguida, todos os alunos conseguiram resolver o problema 4. Apresentamos abaixo a resposta de um dos estudantes referente ao problema 4 (ver figura 17).

Figura 17. Resposta do problema4 da Atividade da 3º Folha



Fonte: Banco de dados do Autor

Iniciamos a quarta atividade (4ª Folha) observando que a sequência $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \dots)$ não é uma *P.A.* de ordem 2. Porém se calcularmos a sequência das diferenças de (Δb_n), obteremos uma *P.A.* de ordem 2. No caso, estaremos obtendo uma sequência de diferenças das diferenças. Definimos então progressão aritmética de ordem 3 (ver Figura 18).

Figura 18. 4º Folha

Folha 4

No Problema 3b), você deve ter observado que a sequência $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \dots)$ não é uma *P.A.* de ordem 2. Porém se calcularmos a sequência das diferenças de (Δb_n), obteremos uma *P.A.* de ordem 2. No caso, estaremos obtendo uma sequência de diferenças das diferenças. Como veremos a seguir.

$(\Delta b_n) = (7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, \dots)$. Fazendo as diferenças de (Δb_n), obtemos a sequência que denotaremos por $(\Delta^2 b_n)$:

$$(\Delta^2 b_n) = (12, 18, 24, 30{,}36, \dots).$$

Note que $(\Delta^2 b_n)$ é uma *P.A.* de razão 6. De fato as diferenças de $(\Delta^2 b_n)$, que denotaremos por $(\Delta^3 b_n)$ é tal que

$$(\Delta^3 b_n) = (6, 6, 6, 6, \dots).$$

Deste modo, dizemos que a sequência (b_n) é uma *P.A.* de ordem 3.

Fonte: Banco de dados do Autor

Utilizamos o problema 5 (ver figura 19) para mostrar para os alunos como encontar o termo geral de uma progressão aritmética de ordem 3.

Figura 19. Problema 5 da Atividade da 4ª Folha

Problema 5

Verifique que a sequência $(b_n) = (2, 10, 30, 68, 130, 222, 350, 520, 738, \dots)$ é uma *P.A.* de ordem 3.Como fizemos com uma *P.A.* de ordem 2, estamos interessados em encontrar o termo geral de uma *P.A.* de ordem 3. Sabe-se que o termo geral de uma *P.A.* (a_n) de ordem 3 é um polinômio de grau 3 em n, ou seja, $a_n = a.n^3 + b.n^2 + c.n + d$.

Podemos encontrar este termo geral resolvendo um sistema com 4 equações e 4 incógnitas, a saber a, b, c e d.

$$\begin{cases} 2 = a_1 = a.1^3 + b1^2. + c.1 + d \\ 10 = a_2 = a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d \\ 30 = a_3 = a.3^3 + b.3^2 + c.3 + d \\ 68 = a_4 = a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d \end{cases}$$

Fonte: Banco de dados do Autor

Após trabalharmos o problema 5, apresentamos para os estudantes o problema 6 (ver Figura 20) que tinha por objetivo encontrar o termo geral da *P.A.* de ordem 3 $(b_n) = (0{,}7{,}26{,}63{,}124{,}215{,}342{,}511{,}728{,}999, \dots)$.

Figura 20. Problema 6 da Atividade da 4ª Folha

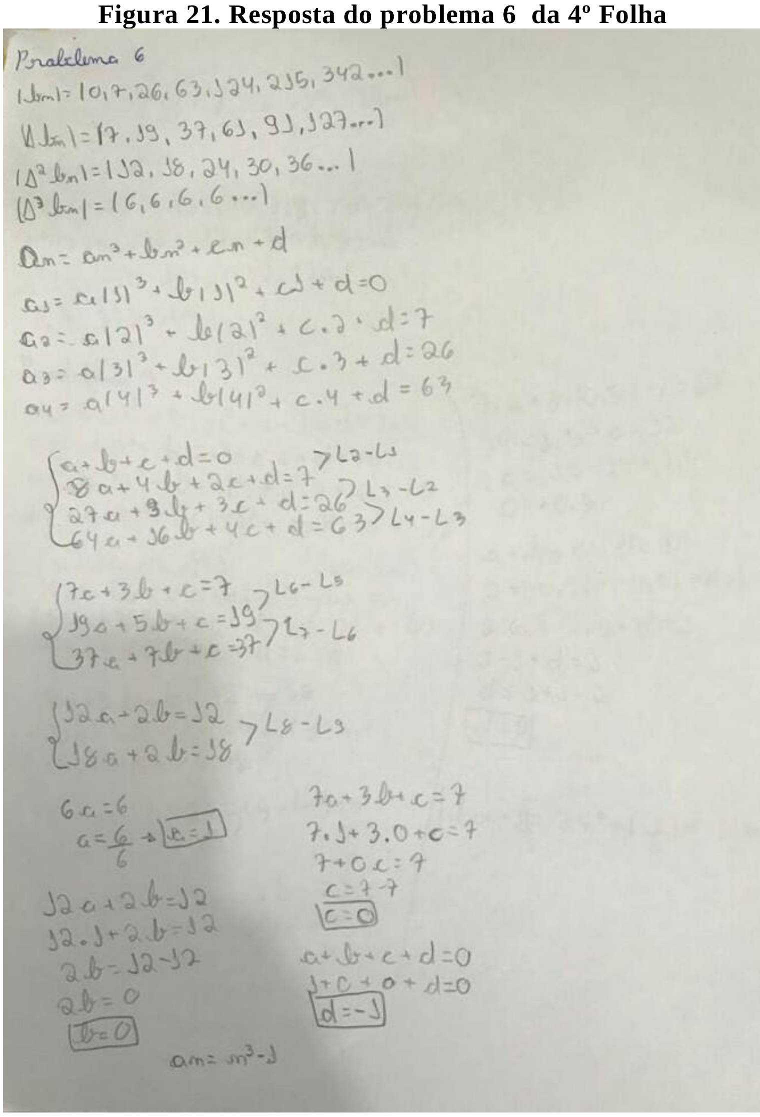
Problema 6

Encontre o termo geral da *P.A.* de ordem 3 $(b_n) = (0{,}7{,}26{,}63{,}124{,}215{,}342{,}511{,}728{,}999, \dots)$.

Fonte: Banco de dados do Autor

No quarto encontro, os alunos foram questionados sobre a sequência $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \ldots)$ e, determinando a sequência das diferenças, constataram que não se tratava de uma *P.A.* de ordem 2. Daí, pedimos que eles calculassem a sequência das diferenças de (Δb_n). Nosso objetivo era que eles percebessem que a próxima sequência se tratava de uma $P.A.$. Os estudantes, ao fazerem a sequência das diferenças pela segunda vez, perceberam que esta era uma $P.A$ de razão 6. Logo após, encontraram o termo geral da sequência b_n. Apresentamos a seguir, a resposta de um dos nossos estudantes.

Figura 21. Resposta do problema 6 da 4º Folha



Problema 6

$(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342 \ldots)$

$(\Delta b_n) = (7, 19, 37, 61, 91, 127 \ldots)$

$(\Delta^2 b_n) = (12, 18, 24, 30, 36 \ldots)$

$(\Delta^3 b_n) = (6, 6, 6, 6 \ldots)$

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$a_1 = a(1)^3 + b(1)^2 + c1 + d = 0$

$a_2 = a(2)^3 + b(2)^2 + c.2 + d = 7$

$a_3 = a(3)^3 + b(3)^2 + c.3 + d = 26$

$a_4 = a(4)^3 + b(4)^2 + c.4 + d = 63$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 26 \\ 64a + 16b + 4c + d = 63 \end{cases} \quad L_2 - L_1,\ L_3 - L_2,\ L_4 - L_3$$

$$\begin{cases} 7a + 3b + c = 7 \\ 19a + 5b + c = 19 \\ 37a + 7b + c = 37 \end{cases} \quad L_6 - L_5,\ L_7 - L_6$$

$$\begin{cases} 12a + 2b = 12 \\ 18a + 2b = 18 \end{cases} \quad L_8 - L_3$$

$6a = 6$

$a = \frac{6}{6} \to \boxed{a = 1}$

$12a + 2b = 12$

$12.1 + 2b = 12$

$2b = 12 - 12$

$2b = 0$

$\boxed{b = 0}$

$7a + 3b + c = 7$

$7.1 + 3.0 + c = 7$

$7 + 0c = 7$

$c = 7 - 7$

$\boxed{c = 0}$

$a + b + c + d = 0$

$1 + 0 + 0 + d = 0$

$\boxed{d = -1}$

$a_n = n^3 - 1$

Fonte: Banco de dados do Autor

Durante a resolução do problema 6 um aluno do segundo ano comentou: “professor, como fizemos as diferenças duas vezes e encontramos uma progressão aritmética então a sequência original recebe algum nome específico?”. A partir dessas observações’, definimos progressão aritmética de ordem 3.

Em seguida, assim como fizemos para obter o termo de uma $P.A$ de ordem 2, fizemos com a sequência $(b_n) = (2, 10, 30, 68, 130, 222, 350, 520, 738, \ldots)$ para obter o termo de uma $P.A$ de ordem 3.

Orientamos que o termo geral de uma *P.A.* (a_n) de ordem 3 é um polinômio de grau 3 em n, ou seja, $a_n = a.n^3 + b.n^2 + c.n + d$ e que podemos encontrar este termo geral resolvendo um sistema com 4 equações e 4 incógnitas, a saber a, b, c e d.

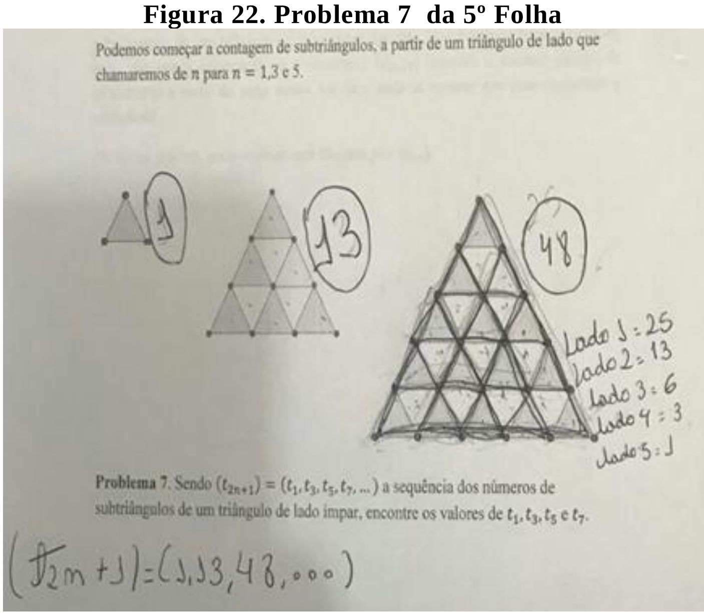
$$\begin{cases} 2 = a_1 = a.1^3 + b1^2. + c.1 + d \\ 10 = a_2 = a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d \\ 30 = a_3 = a.3^3 + b.3^2 + c.3 + d \\ 68 = a_4 = a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d \end{cases}$$

Na figura 13 obervemos que, no primeiro momento, o estudante verificou que a sequência $(b_n) = (0{,}7{,}26{,}63{,}124{,}215{,}342{,}511{,}728{,}999, \ldots)$ é uma $P.A$ de ordem 3. Posteriormente, utilizou escalonamento de sistemas de equações para determinar o termo geral da *P.A.*

Ressaltamos que todos os estudantes, após nossas orientações, conseguiram encontrar o termo geral da $P.A$ solicitado no problema 6.

No quinto dia de atividades (Folha 5) nosso objetivo era encontrar uma fórmula que calcula o número de subtriângulos de um triângulo de lado n, sendo n um número ímpar. A priori, começamos a contagem de subtriângulos, a partir de um triângulo de lado que chamamos de n para $n = 1{,}3$ e 5 (ver Figura 22 a seguir).

Figura 22. Problema 7 da 5º Folha



Fonte: Banco de dados do Autor

Sem muitas dificuldades, todos os estudantes contaram de forma correta para $n = 1$, 1 triângulo, para $n = 3$, 13 triângulos e, para $n = 5$, 48 triângulos, como mostra a resposta de um dos alunos na figura 22. . Mas a partir de $n = 5$, tivemos que ajudar os estudantes na contagem e encontramos a sequência $(t_{2n+1}) = (1, 13,48, 118, 235, 411, 658, 988, \dots)$, solucionando o problema 7 (ver figura 22).

As atividades da Folha 6 (ver Figura 23), desenvolvidas no sexto e último encontro, tinham por objetivo verificar que a sequência $(t_{2n+1}) = (1, 13,48, 118, 235, 411, 658, 988, \dots)$ é uma P.A. de ordem 3 e encontrar o termo geral dessa sequência.

Figura 23. Atividade da 6º Folha

Folha 6

Repetindo o processo da folha anterior encontraremos a sequência $(t_{2n+1}) = (1, 13,48, 118, 235, 411, 658, 988, \dots)$.

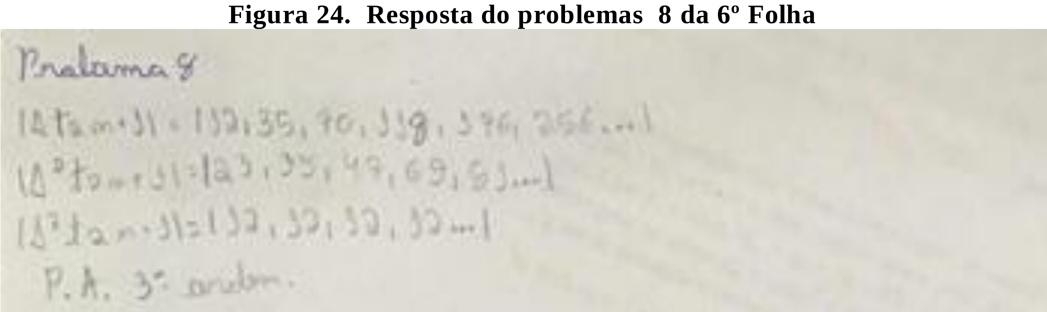
Problema 8. Verifique que esta sequência é uma P.A. de ordem 3.

Problema 9. Encontre o termo geral da sequência (t_{2n+1}).

Fonte: Banco de dados do Autor

Na próxima figura (ver Figura 24) temos a resposta de um estudante sobre o problema 8.

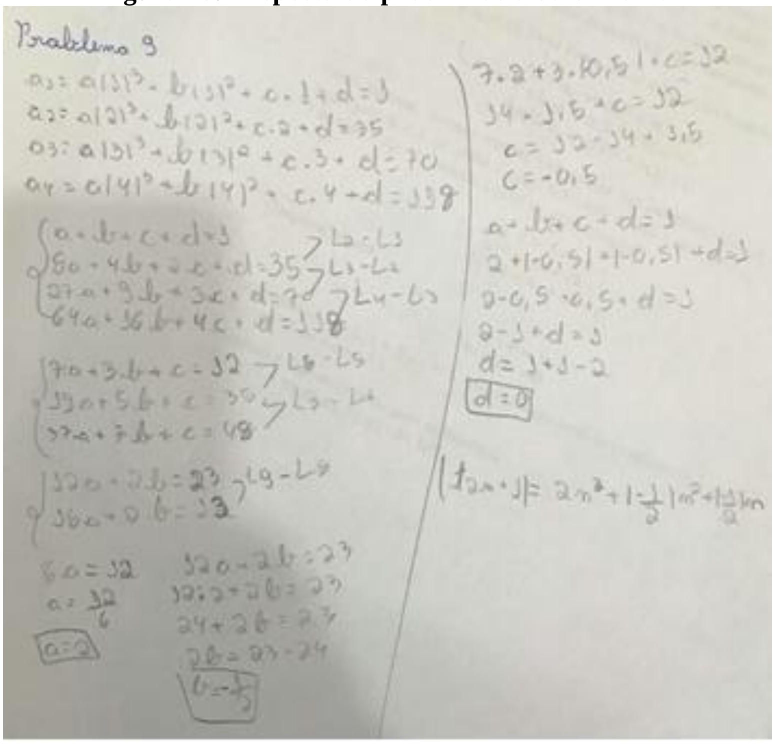
Figura 24. Resposta do problemas 8 da 6º Folha



Fonte: Banco de dados do Autor

Constatamos que todos os estudantes conseguiram verificar que a sequência do problema 8 se tratava de uma progressão aritmética. Em seguida, no problema 9, solicitamos que os alunos encontrassem o termo geral da sequência (t_{2n+1}). Na figura a seguir (ver figura 25), apresentamos uma solução, feita por um dos estudantes, para o problema 9.

Figura 25. Resposta do problemas 9 da 6º Folha



Fonte: Banco de dados do Autor

No tocante a solução do problema 9, os meninos obedeceram ao processo de escalonamento trabalhado ao longo das atividades e determinaram o termo geral solicitado.

Ao final da aula apresentamos que termo geral obtido é uma conjectura da fórmula que calcula o número de subtriângulos de um triângulo de lado ímpar. De fato, esta é apenas uma conjectura, pois, não temos informação se a sequência (t_{2n+1}) manterá o mesmo padrão de crescimento a partir do nono termo. De fato, pode-se mostrar que esta conjectura é verdadeira! De forma análoga, pode-se obter uma fórmula para (t_{2n}).

Apresentamos aqui o desenvolvimento da atividade que, a nosso ver, considerando nossas expectativas, pode ajudar na construção de conhecimento sobre as Progressões Aritméticas de Ordem n. No próximo tópico faremos as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso interesse principal foi estudar as Progressões aritméticas de ordem superior. Para isso, foi necessário escrever e revisar o Princípio da Indução Matemática, bem como os Princípios da Matemática Discreta, conteúdos de extrema importância para demonstrar os resultados descritos nesse trabalho. Vimos como demonstrar identidades e desigualdades usando o Princípio da Indução. Usamos ainda esse método para evidenciar a veracidade de problemas de divisibilade.

Escrevemos sobre o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, revisamos a notação fatorial, trabalhamos com permutações simples (Arranjos e Combinações) e estudamos ainda as permutações circulares. O principal resultado da Matemática Discreta, para nossos fins, foi a Relação de Stifel, provamos que Para $1 < k \leq n$, tem-se: $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$.

Querímaos demonstrar que Se (a_n) é uma $P.A.$ de ordem k, então o seu termo geral a_n é um polinômio de grau k dado por $a_n = \sum_{j=0}^{k} C(n,j)\Delta^j a_0$.

Para isso, além da Relação de Stifel, provamos que Se (a_n) é uma sequência qualquer, para todos n e i inteiros não negativos, tem-se: $\Delta^i a_n = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C(i,j)a_{n+j}$. Demosntramos também que Se $i,j \in \mathbb{Z}$, com $i \geq j+1$ e $j \geq 0$. Então:$\sum_{h=0}^{j}(-1)^h C(i,h) = (-1)^j C(i-1,j)$. E ainda, $C(n+1,k)C(k,j) = C(n+1-j,k-j)C(n+1,j)$, para quaisquer n,j e k naturais.

Com esses dois últimos resultados e a Relação de Stifel mostramos que uma progressão aritmética de ordem k tem como termo geral um polinômio de grau k.

Na última parte desse trabalho, aplicamos a atividade sobre as Progressões. Foram seis encontros de muitas aprendizagens, alunos e professor contruindo juntos artifícios para resolver o problema da contagem dos triângulos.

Por fim, de acordo com o desempenho nos seis encontros e o material produzido por todos os alunos, nossos estudantes cessam esse trabalho com a capacidade de reconhecer a notação utilizada em progressões aritméticas, além de conseguirem generalizar padrões em sequências numéricas e saem com a capacidade de resolver situações-problema utilizando os conceitos de progressão aritmética.

REFERÊNCIAS

ALEGRI, M. **O Pequeno livro das Progressões**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2017.

ALONSO, J. **Arithmetic sequences of higher order**. The Fibonacci Quarterly, 1976, 147-153.

BERMÚDEZ, T., Martinón,A., Noda,J. **Arithmetic progressions and its applications to (m,q)-isometries:** *a survey*, Results Math. 69, 2016, 177–199.

DLAB, V. **Arithmetic progressions of higher order**. Teaching Mathematics and Computer Science 9/2, 2011, 225-239.

GARSTANG, R. H. **Triangles in a triangle**. Mathematical Gazette 70,1986, 288–289.

GERRISH, F. **How many triangles?** Mathematical Gazette 54, 1970, 241–246.

LARSEN, M.E. **The Eternal Triangle – A History of a Counting Problem.** Coll. J. Math. 20, No. 5 November, 1989, 370–384.

LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P. WAGNER, E., Morgado, A.C. **A Matemática do Ensino Médio,** volume 2, SBM, 2016.

WELLS, C. **Numbers of triangles**, Mathematics Teaching 54, 1971, 27–29.

APENDICE A – Folha 1 da atividade sobre progressões

1ºFolha

Para iniciar esta atividade, vamos relacionar padrões e regularidades utilizando números. Para tanto, vamos entender o que é uma sequência numérica. Uma sequência numérica $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma sucessão ordenada de números reais. Exemplos:

a) A sequência dos números pares $(p_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$;
b) A sequência dos números primos $(P_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots)$.
c) A sequência de Fibonacci $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$;

Problema 1. Sabendo que a Copa do Mundo de Futebol é realizada de 4 em 4 anos,

a) Exiba os nove primeiros termos da sequência que descreve os anos de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

b) Qual é a relação entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo?

c) Exiba a sequência das diferenças dos termos da sequência de realização das Copas do Mundo a partir de 1950.

Uma *progressão aritmética (P.A.)* é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Esta diferença constante entre termos consecutivos de uma *P.A.* é denominada de razão.

d) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 12ª Copa do Mundo?

e) Sem listar, a partir de 1950, você conseguiria encontrar o ano de realização da 20ª Copa do Mundo?

f) Sem listar uma a uma, qual é o ano de realização da milésima Copa do Mundo?

g) Aqui, com a expressão em mãos, utilize-a para encontrar a milésima copa.

h) A partir dos itens anteriores, obtenha uma expressão para o termo geral de uma *P.A.* (a_n) de primeiro termo a_1 e razão r.

APENDICE B – Folha 2 da atividade sobre progressões

2ºFolha

Você deve ter observado que a sequência de realização das copas, $(a_n) = (1950{,}1954{,}1958{,}1962, \dots)$, que a partir do primeiro termo de uma $P.A.$, sabendo de sua razão, podemos obter qualquer termo desta. Neste caso,

$$a_n = 1950 + 4(n-1).$$

Assim, para uma $P.A.$ (a_n) de razão r e primeiro termo a_1, o termo geral desta é

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

No **problema 1f)**, temos que a milésima copa será em $a_{1000} = 1950 + 999 \times 4 = 5946.$ Note que neste problema, a partir de $(a_n) = (1950, 1954, 1958, 1962, \dots)$, podemos obter a sequência de diferenças

$(\Delta a_n) = (1954 - 1950, 1958 - 1954, 1962 - 1958, 1966 - 1962, \dots)$ é tal que

$$(\Delta a_n) = (4, 4, 4, 4, \dots)$$

Para uma sequência (a_n), a sequência (Δa_n) é definida por

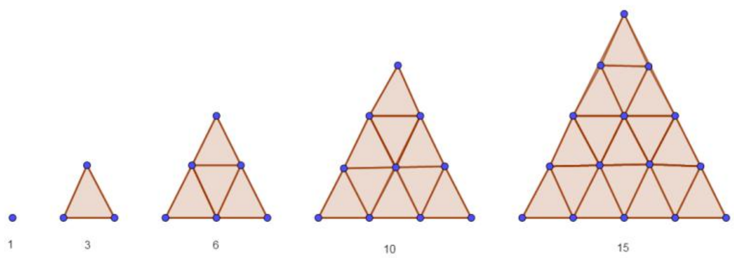
$(\Delta a_n) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots).$

Uma sequência (b_n) de razão r é uma p.a. se a sequência de diferenças é

$$(\Delta b_n) = (r, r, r, \dots).$$

A compreensão da natureza de uma $P.A.$ está intimamente ligada à compreensão das sequências de diferenças, como veremos no problema a seguir.

Problema 2. Observem a estrutura nas figuras abaixo e notem que os números triangulares formam a sequência $T_n = (1, 3, 6, 10, 15, \dots.)$. Sendo assim, calcule:



a) Liste os dez primeiros termos da sequência (T_n), sem recorrer às figuras.

b) A sequência encontrada em a) representa uma $P.A.$? Justifique.

c) Liste nove termos da sequência obtida pelas diferenças (ΔT_n).

d) A sequência do item c), (ΔT_n) é uma $P.A.$? Justifique.

APENDICE C – Folha 3 da atividade sobre progressões

Folha 3

A sequência $(T_n) = (1, 3, 6, 10,15, 21, \dots)$ do problema 3 é o que chamamos de *progressão aritmética de ordem 2*. Formalmente, uma *P.A.* de ordem 2 é uma sequência (a_n) em que a sequência de diferenças $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots)$ é uma *P.A.* não estacionária, ou seja, com razão $r \neq 0$.

Problema 3. Verifique se as sequências abaixo são p.a.'s de ordem 2.

a) $(a_n) = (2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, \dots)$

b) $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \dots)$

c) $(c_n) = (3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, 129, 183, \dots)$

Um fato importante aqui é que o termo geral de uma *P.A.* de ordem 2 é um polinômio de grau 2 na variável n, bem como o termo geral de uma *P.A.* (a_n) é um polinômio de grau 1 em n, a saber, $a_n = a_1 + (n-1)r$. A *P.A.* de ordem 2 do Problema 3a) possui termo geral na forma $a_n = a(n)^2 + b(n) + c$. Devemos encontrar os coeficientes a, b e c a fim de encontrar o termo geral da sequência. Para este problema, sabemos que
$a_1 = 2, a_2 = 5$ e $a_3 = 10$. Desta forma, temos as seguintes equações.

$$\begin{cases} 2 = a_1 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 5 = a_2 = a(2)^2 + b(2) + c \\ 10 = a_3 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases}$$

Como sabemos, devemos resolver este sistema nas incógnitas a, b e c para obter o termo geral da *P.A.* de ordem 2, (a_n). Subtraindo a linha 1 da linha 2, $L_2 - L_1$e a linha 1 da linha 3, $L_3 - L_1$ obtemos a partir do sistema original

$$L_1: 2 = a + b + c$$
$$L_2: 5 = 4a + 2b + c$$
$$L_3: 10 = 9a + 3b + c$$

O seguinte sistema

$$3a + b = 3$$
$$8a + 2b = 8$$

Cuja solução é $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Assim o termo geral da sequência (a_n) é $a_n = a_n = an^2 + bn + c = n^2 + 1$.

Problema 4. Encontre o termo geral da sequência $(c_n) = (3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, 129, 183, \dots)$.

APENDICE D – Folha 4 da atividade sobre progressões

Folha 4

No Problema 3b), você deve ter observado que a sequência $(b_n) = (0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, 728, 999, \dots)$ não é uma *P.A.* de ordem 2. Porém se calcularmos a sequência das diferenças de (Δb_n), obteremos uma *P.A.* de ordem 2. No caso, estaremos obtendo uma sequência de diferenças das diferenças. Como veremos a seguir.

$(\Delta b_n) = (7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, \dots)$. Fazendo as diferenças de (Δb_n), obtemos a sequência que denotaremos por $(\Delta^2 b_n)$:

$$(\Delta^2 b_n) = (12, 18, 24, 30{,}36, \dots).$$

Note que $(\Delta^2 b_n)$ é uma *P.A.* de razão 6. De fato as diferenças de $(\Delta^2 b_n)$, que denotaremos por $(\Delta^3 b_n)$ é tal que

$$(\Delta^3 b_n) = (6, 6, 6, 6, \dots).$$

Deste modo, dizemos que a sequência (b_n) é uma *P.A.* de ordem 3.

Problema 5

Verifique que a sequência $(b_n) = (2, 10, 30, 68, 130, 222, 350, 520, 738, \dots)$ é uma *P.A.* de ordem 3.

Como fizemos com uma *P.A.* de ordem 2, estamos interessados em encontrar o termo geral de uma *P.A.* de ordem 3. Sabe-se que o termo geral de uma *P.A.* (a_n) de ordem 3 é um polinômio de grau 3 em n, ou seja, $a_n = a.n^3 + b.n^2 + c.n + d$.

Podemos encontrar este termo geral resolvendo um sistema com 4 equações e 4 incógnitas, a saber a, b, c e d.

$$\begin{cases} 2 = a_1 = a.1^3 + b1^2. + c.1 + d \\ 10 = a_2 = a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d \\ 30 = a_3 = a.3^3 + b.3^2 + c.3 + d \\ 68 = a_4 = a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d \end{cases}$$

Problema 6

Encontre o termo geral da *P.A.* de ordem 3 $(b_n) = (0{,}7{,}26{,}63{,}124{,}215{,}342{,}511{,}728{,}999, \dots)$.

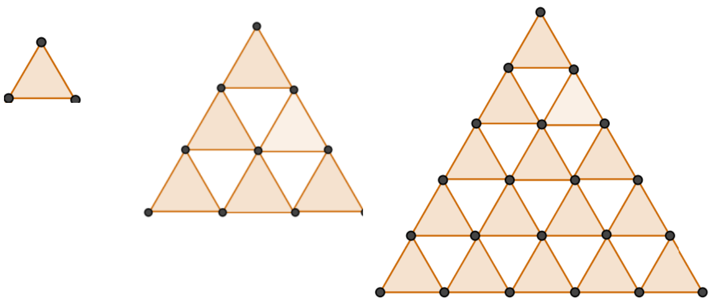
APENDICE E – Folha 5 da atividade sobre progressões

Folha 5

Considere triângulos equiláteros como na figura abaixo. O problema a seguir é contar o número de subtriângulos equiláteros nesta figura.

Nosso objetivo é encontrar uma fórmula que calcula o número de subtriângulos de um triângulo de lado n, sendo n um número ímpar. Obteremos uma conjectura para a fórmula a partir de uma progressão aritmética de ordem 3.

Podemos começar a contagem de subtriângulos, a partir de um triângulo de lado que chamaremos de n para $n = 1{,}3$ e 5.



Problema 7. Sendo $(t_{2n+1}) = (t_1, t_3, t_5, t_7, \dots)$ a sequência dos números de subtriângulos de um triângulo de lado ímpar, encontre os valores de t_1, t_3, t_5 e t_7.

APENDICE F – Folha 6 da atividade sobre progressões

Repetindo o processo da folha anterior encontraremos a sequência $(t_{2n+1}) = (1, 13,48, 118, 235, 411, 658, 988, \dots)$.

Problema 8. Verifique que esta sequência é uma P.A. de ordem 3.

Problema 9. Encontre o termo geral da sequência (t_{2n+1}).

Observe que o termo geral obtido é uma conjectura da fórmula que calcula o número de subtriângulos de um triângulo de lado ímpar. De fato, esta é apenas uma conjectura, pois, não temos informação se a sequência (t_{2n+1}) manterá o mesmo padrão de crescimento a partir do nono termo. De fato, pode-se mostrar que esta conjectura é verdadeira!

De forma análoga, pode-se obter uma fórmula para (t_{2n}).