



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**SOBRE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE EVOLUÇÃO E
APLICAÇÕES**

POR
JUCILEIDE DOS SANTOS

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

SOBRE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE EVOLUÇÃO E
APLICAÇÕES

por

JUCILEIDE DOS SANTOS

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

PROFESSORA DRA. GIOVANA SIRACUSA GOUVEIA
ORIENTADORA

São Cristóvão-SE
2019

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Jucileide
S237s Sobre equações integrais de evolução e aplicações / Jucileide dos Santos ; orientadora Giovana Siracusa Gouveia. – São Cristóvão, 2018.
133 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Equações integrais. 3. Equações de Volterra
4. Funções especiais. I. Gouveia, Giovana Siracusa orient. II.
Título.

CDU 517.93



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Sobre equações integrais de evolução e aplicações

por

Jucileide dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Giovana Siracusa Gouveia

Profª. Dra. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Orientador

Arlúcio da Cruz Viana

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana - UFS
Primeiro Examinador

Fagner Dias Araruna

Prof. Dr. Fagner Dias Araruna - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 23 de Agosto de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

A Guilherme, filho amado, pela luz que me foi dada com a sua chegada.

A Fernando Bomfim, companheiro e grande amor, pelas mãos dadas nesta caminhada.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que com o auxílio de vossa divina misericórdia, me concedeu resiliência, paciência e força de vontade para prosseguir nos estudos. A ele, toda honra e toda glória.

Agradeço a minha orientadora, professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia pela significativa contribuição na minha formação acadêmica e, pela dedicação, confiança e parceria de trabalho de longa data.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFS, em especial, aos professores Zaqueu, André Vinícius, Éder Mateus, Almir Rogério, Filipe Dantas e Lucas Valeriano, os quais contribuíram diretamente para minha formação durante o mestrado.

A todos os meus colegas da turma 2017 do PROMAT, em especial Verônica, Igor e Rodrigo, pelas horas de estudos compartilhadas.

Agradeço a toda minha família. Aos meus pais Roseli e Benevaldo pelos conselhos e apoio. Ao meu amado esposo, por entender minha ausência em diversos momentos, por pegar para si meus objetivos, não medir esforços para alcançá-los e pelo zelo com nossa família que está se formando. A minha cunhada Ana Maria, que segurou as pontas no cuidado com Gui por diversas manhãs e tardes.

Agradeço aos meus irmãos Kleide e Josevaldo pelos conselhos certos em momentos oportunos.

As pesquisadoras e mães do DMA, Maria Andrade e Débora Lopes, pelo carinho muito especial, direcionado a mim nos corredores, com palavras motivadoras. Para elas que sabem, o quão sensível é, nossa carreira a maternidade, não imaginam o quanto foi importante para mim tê-las como referencial.

Aos meus amigos Caroline, Denilson, Erika, Mari, Gerlândia, Jordana e Mony por visitas, almoços e conversas.

Um agradecimento especial a FAPITEC, pelo auxílio financeiro, e ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFS, pela confiança na concessão de minha bolsa de estudos.

Resumo

Motivados pelo grande êxito em aplicações das *Equações Integrais Evolutivas* em áreas como engenharia, e pelo fato de ter na literatura diversos problemas em aberto, neste trabalho tivemos como objetivo estudar a teoria que envolve as equações de Volterra abstratas, bem como questões relacionadas com um problema fracionário de Cauchy de ordem $\alpha \in (0, 1)$. Neste último buscamos responder algumas perguntas a cerca da boa-posição global e autossimilaridade das soluções.

Palavras-chave: Equações de Volterra; Boa-posição global; Soluções autossimilares.

Abstract

Motivated by the huge success of the applications of the *Evolutionary Integral Equations* in many areas of engineering and the fact that the literature has several open problems, in this work we aimed to study the theory involving abstract Volterra equations as well as issues related to a Cauchy fractional problem of order $\alpha \in (0, 1)$. In this last one we try to answer some questions about the global well-posedness and self-similarity of the solutions.

Palavras-chave: Volterra equations, global well-posedness, self-similar solutions.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Caminho de Hankel $H_a = H_a(r, \theta)$	14
1.2	Função Gama com seus polos simples	20
1.3	Função recíproca de $\Gamma(x)$	23
1.4	Gráfico de $\mathbf{B}(x, y)$, com x, y reais	25
1.5	A curva C composta pelos segmentos de integração	27
2.1	Setor $\Sigma(\omega, \theta)$	50
2.2	Distância entre o ponto t e o conjunto $\mathbb{C} \setminus \Sigma(0, \theta)$	51
C.1	Comportamento gráfico da função θ	106
C.2	Casos particulares da função ϕ	108

1	Preliminares	5
1.1	Espaços de Funções	5
1.2	Transformadas de Laplace e Fourier	9
1.3	Operadores setoriais e semigrupos	11
1.4	Funções especiais	17
1.4.1	Função Gama	17
1.4.2	A função recíproca da função Gama	22
1.4.3	Função Beta	24
1.4.4	Propriedades adicionais a Função Gama	26
1.4.5	Função de Mittag-Leffler	31
1.4.6	As funções de Mittag-Leffler de ordem racional	32
1.4.7	Representação Integral	34
1.4.8	Função Fox-Wright	35

1.4.9	Representação Integral	35
2	Equações de Volterra e a teoria viscoelástica	38
2.1	Boa-posição e resolventes	38
2.2	Equações não homogêneas	43
2.3	Geração de resolventes	46
2.4	Resolventes analíticos	49
2.5	Viscoelasticidade Linear	55
2.5.1	Equações modelo	55
2.5.2	Fluidos isotrópicos incompressíveis	62
2.5.3	Materiais síncronos isotrópicos	64
3	Sobre uma equação de Volterra de reação-difusão	66
3.1	Estimativas para a família Mittag-Leffler	69
3.2	Solução Branda Global	78
3.2.1	Estudo da boa-posição global	78
3.3	Soluções autossimilares	87
A	Espaços L^p	92
B	A integral de Bochner	99
B.1	A integral de Bochner	99
B.1.1	Funções Simples	99
B.2	A integral de Bochner	101

C Distribuições	102
C.1 Espaço de Funções Testes	103
C.2 Distribuições	114
Referências Bibliográficas	118

Nas três últimas décadas, a teoria das equações abstratas de Volterra passou por um rápido desenvolvimento. Em grande parte, isso se deve às aplicações dessa teoria a problemas na física matemática, como viscoelasticidade, condução de calor em materiais com memória, eletrodinâmica com memória e à necessidade de ferramentas para lidar com os problemas que surgem nesses campos. Muitos fenômenos interessantes não modelados com equações diferenciais, mas observados em exemplos específicos do tipo de Volterra, estimularam a pesquisa e melhoraram nossa compreensão e conhecimento.

As equações de Volterra foram inicialmente estudadas pelo matemático e físico italiano Vito Volterra (1860 - 1940), foi ele que deparou-se pela primeira vez com uma equação integral, em um artigo datado de 1884, este artigo tratava-se da distribuição de carga elétrica sobre um segmento de esfera. São variadas as referências que apareceram nos últimos anos tratando da teoria de Volterra, no entanto, uma de grande importância por se tratar da mais completa na literatura atual, é o livro intitulado *Evolutionary Integral Equations and Applications* [40] é responsável por tratar de problemas lineares em dimensões infinitas. Além disso, ela reúne e unifica a maioria dos resultados relevantes disponíveis no momento e exhibe muitos problemas da teoria linear que não foram resolvidos ou não foram considerados. Para os interessados em problemas não-lineares é muito útil conhecer a parte linear da teoria.

Sobre o título deste trabalho, no geral, na literatura, as equações que estudamos são denominadas como “*equações integrais abstratas de Volterra*” ou “*equações integro-diferenciais de Volterra*”, a depender de cada autor ou da forma da equação. Nós intitulamos nosso trabalho

por *Equações Integrais de Evolução*, este termo refere-se ao caráter evolutivo das equações que descrevem a evolução no tempo de certas quantidades, chamadas estado, do sistema. E refere-se também à memória presente nas equações de estado, expressas por certas integrais ao longo de um intervalo de tempo no passado. Os termos supracitados em aspas tornam-se ambíguos, uma vez que se referem também a equações contendo um operador abstrato de Volterra, que é uma noção diferente da qual queremos expressar. Utilizaremos também o termo “*equação de Volterra*” ao longo desta dissertação.

Estudamos neste trabalho dois problemas distintos cada um com sua particularidade na resolução, o primeiro deles é dado pela equação de Volterra da forma

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

em que $f(\cdot)$ é uma função cuja imagem é subespaço de um espaço vetorial de Banach X , a é função escalar, a qual denominamos como sendo o núcleo, A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$ e u é a solução procurada. A Equação 1 modela vários fenômenos, entre os quais podemos citar a dinâmica de materiais viscoelásticos. Nesta parte, consideramos o problema de um fluido viscoelástico incompressível isotrópico¹ e homogêneo que ocupa uma região Ω , o campo velocidade do fluido é dado por $v(t, x)$, daí o problema de condição inicial correspondente é

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \partial_t \int_0^t a(\tau) \Delta v(t - \tau, x) d\tau - \nabla p(t, x) + h(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla v(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

em que as condições de contorno são antiderrapantes, nesse problema $p(t, x)$ denota a pressão hidrostática no fluido e o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento². Neste problema, usaremos a teoria desenvolvida no capítulo para mostrar a boa-posição de 2.

Segundo [3], nos últimos anos diversos pesquisadores vêm demonstrando interesse em equações do calor em materiais com memória, isso se deve ao trabalho de Gurtin e Pipkin [23] onde eles introduziram uma lei de Fourier modificada para materiais com memória. Por

¹Um material é chamado isotrópico se suas propriedades mecânicas são mantidas independentemente da direção que considere.

²O cisalhamento é um fenômeno de deformação ao qual um corpo está sujeito quando as forças que agem sobre ele provocam um deslocamento em planos diferentes

exemplo, Prüss [40] observa que este modelo pode assumir a forma

$$dm * u(t, x) = dk * \Delta u(t, x) + r(t, x) \quad (3)$$

em que $u(t, x)$ é a temperatura, r é o fornecimento de calor. As funções escalares m e k são funções materiais, consideradas como *creep functions*, isto é, são não-negativas, não-decrescentes e côncavas. Já, Carillo [8] provou existência, unicidade e decaimento espacial de soluções para 3 com $m = 1$ e em [9] eles consideraram k sendo uma função singular. Modelos envolvendo núcleo singular na origem não são novos e surgem na condução de calor [9] e no âmbito da viscoelasticidade linear, ao qual podemos citar [10], [17], [19], [30] e [31]. Quando $\alpha < 1$, uma singularidade em $t = 0$ é introduzida no modelo

$$u_t(t, x) = \partial_t \int_0^t g_\alpha(s) \Delta(t - s, x) ds, \quad t > 0, \quad (4)$$

no qual $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, para $\alpha \in (0, 1)$. Observe que se $\alpha = 1$, a Equação 4 é a típica equação do calor. A formulação integral da Equação de difusão fracionária 4 foi introduzida por [46] e tem sido profundamente estudada desde então. Schneider e Wyss [46] observaram que uma possível aplicação da Equação 4 é a descrição da difusão em tipos especiais de meios porosos.

O segundo problema abordado nesta dissertação trata-se do problema de reação-difusão estudado de Andrade e Viana [3], que devido ao grande interesse matemático nas não linearidades do tipo $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, os autores buscaram estudar

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \partial_t \int_0^t g_\alpha(s) \Delta u(t - s, x) ds + |u(t, x)|^{\rho-1} u(t, x), & \text{em } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5)$$

em que $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ para $\alpha \in (0, 1)$, $\rho > 1$ e os dados iniciais u_0 são obtidos nos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p = \frac{\alpha N}{2}(\rho - 1)$. Nesse trabalho, eles provaram um resultado de boa-posição global e algumas propriedades assintóticas da solução. Para $\alpha = 1$, Weissler [53] provou existência global sob premissas de pequenez nos dados iniciais $u_0 \in L^p$, em que $p = \frac{\alpha N}{2}(\rho - 1)$. Um resultado semelhante foi dado por Giga [18] para a equação de Navier-Stokes.

Diversos fenômenos físicos são governados por equações do tipo 1, muitos dos quais, provêm da dinâmica dos materiais com memória e dos problemas de difusão. Geralmente, é necessário integrar uma tal equação e determinar um espaço de estado adequado (espaço de funções) para que esta assuma a forma abstrata em 1, isso é o que acontece com o problema

dados por 5, que ao ser integrada, torna-se

$$u(t, x) = u_0(x) + \int_0^t g_\alpha(t-s) \Delta u(s, x) ds + \int_0^t |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) ds. \quad (6)$$

Dividimos este trabalho em três capítulos e alguns apêndices.

O Capítulo 1, o qual intitulamos de Preliminares, possui o objetivo de tornar o nosso texto autossuficiente. Nele organizamos definições e propriedades de alguns conteúdos pertinentes ao trabalho. Faremos uma revisão de algumas funções especiais, as quais podemos destacar a função de um parâmetro de Mittag-Leffler e a função de Wright. Revisaremos também alguns ingredientes clássicos da Análise Funcional, espaços de Sobolev, entre outros. Mesmo tendo como objetivo ser na medida do possível autossuficiente de teoria e acessível, algumas demonstrações são deixadas com a referência.

No Capítulo 2, ao qual intitulamos “Equações de Volterra e a teoria viscoelástica”, desenvolvemos a teoria das equações de Volterra. Daremos a definição precisa para solução da Equação 1, estabelecemos a noção de família resolvente, esta surge naturalmente quando aplicamos a transformada de Laplace em 1, a qual obtemos

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}x \quad (7)$$

ao aplicar, a inversa da transformada de Laplace, obtemos

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} d\lambda. \quad (8)$$

Daremos as condições necessárias e suficientes para existência de soluções, a formalização do procedimento se dá pelo Teorema de Geração, além disso descreveremos as soluções de 1 através da fórmula de variação de parâmetros. Por fim, faremos uma aplicação de 1, essa aplicação trata do modelo físico proveniente da teoria viscoelástica, governado pelo sistema de equações dados por 2. Para tal classe de equações, mostramos existência e unicidade de soluções branda e forte. Para resolver tais problemas, utilizamos teoria de operadores e espaços intermediários.

Já no Capítulo 3, demonstramos boa-posição global e autossimilaridade de soluções brandas para o problema dados por 5. Para isso provamos estimativas para a família de equações Mittag-Leffler associada ao operador laplaciano, definimos o espaço funcional adequado para o qual a solução reside e as condições suficientes para obter soluções auto-similares. Nesta parte do trabalho, buscamos contribuir apresentando de maneira esclarecedora os resultados obtidos em [3].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo enunciaremos resultados, estabeleceremos notações e teorias que serão utilizadas ao longo deste trabalho. O objetivo principal é que ele sirva como um esquema de resultados. Para maiores detalhes, recomendamos as referências [40], [37], [1], [35], [43].

1.1 Espaços de Funções

No decorrer desta dissertação, $(X; \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ é $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , que convergem para x , são escritas como

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,$$

ou seja, que

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Salvo menção do contrário com relação a norma em questão, escreveremos simplesmente $x_n \rightarrow x$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

O espaço normado X é dito ser de Banach se é completo, isto é, dada uma sequência de Cauchy $(x_n) \in X$, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$.

O espaço dual de X , denotado por X^* , é definido como o espaço de todos os funcionais

lineares contínuos x^* definidos em X . X^* é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|x^*\| = \sup\{|\{x, x^*\}|; x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Sejam X e Y dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Chamaremos aplicações lineares de X em Y funções lineares $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$, definidas em um subespaço vetorial $D(T) \subset X$ com valores em Y . Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ como o espaço de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y , com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y. \quad (1.1)$$

Usamos apenas $\mathcal{L}(X)$ para simbolizar o espaço $\mathcal{L}(X, X)$ e $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ para simbolizar o espaço dos funcionais lineares contínuos em X .

Definição 1.1. *Seja T uma aplicação linear de X em Y*

1. *A aplicação T é dita ser uma aplicação fechada se o conjunto gráfico de T*

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in D(T)\}$$

é subconjunto fechado em $X \times Y$.

2. *A aplicação T é dita ser uma aplicação densamente definida, se o domínio de T , for um subconjunto denso em X .*

Observação 1.1. *Quando $X = Y$, então dizemos que T é um operador linear.*

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (possivelmente ilimitado), $C_b(I, X)$ denota o espaço de Banach formado pelas funções contínuas e limitadas de I em X equipado com a norma do supremo. Definimos $C_0([0, \infty), X)$ como o subespaço de todas as funções f em $C_b([0, \infty), X)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\|_X = 0$. Denotamos o espaço das funções localmente integráveis por L^1_{loc} . A seguir definimos alguns espaços de funções úteis ao longo do trabalho.

Definição 1.2. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das classes¹ de funções definidas em Ω , cujos valores estão em $\mathbb{K}$, tais que $|f|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω com norma*

¹Os elementos de L^p são na realidade classes de equivalência, pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim quaisquer dois representantes de uma mesma classe se coincidem q.t.p.

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty, \quad (1.2)$$

e denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções f , mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω , equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} \text{ess}|f(x)|, \quad \text{para } p = \infty. \quad (1.3)$$

É comum denotarmos $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ por $\|\cdot\|_p$. A função $\|\cdot\|_p$ define uma norma que faz de $L^p(\Omega)$ um espaço completo. Consequentemente, temos que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com norma definida acima, no Apêndice A provamos este fato, além desse no mesmo, resultados importantes e úteis são apresentados, como por exemplo, desigualdade de Minkowski, desigualdade de Hölder e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue. A seguir enunciamos a desigualdade de Young na sua forma geral, ela é uma ferramenta muito útil para provar as estimativas do Capítulo 3, a demonstração pode ser encontrada em [15] Capítulo 8, Proposição 8.9.

Teorema 1.1. (*Desigualdade de Young*) *Sejam $p, q, r \in [1, \infty)$ satisfazendo*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

*com $L^p(\mathbb{R}^N)$, $L^q(\mathbb{R}^N)$ e $L^r(\mathbb{R}^N)$ espaços de Lebesgue. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então a convolução $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

A seguir, apresentamos uma coleção das funções $L^p(\Omega)$ tais que suas derivadas distribucionais (Ver Apêndice C) são funções em $L^p(\Omega)$.

Definição 1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, m um inteiro não negativo e p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por espaço de Sobolev (denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$), o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ e } |\alpha| \leq m\}.$$

Para $1 \leq p < \infty$, defina

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Para $p = \infty$,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} : W^{m,\infty}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

A função definida acima define uma norma para o espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, tal que $1 \leq p \leq \infty$. Mostraremos esta afirmação apenas para o caso em que $1 \leq p < \infty$.

É fácil ver que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \geq 0$ para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Também é de verificação imediata que $\|\lambda u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = |\lambda| \cdot \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Provemos a desigualdade triangular. Com efeito, pela desigualdade de Minkowski para funções em L^p e para números reais, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(u + v)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} [\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Proposição 1.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma definida acima é um espaço de Banach.*

Para conveniência do leitor, enunciaremos diversos resultados utilizados durante o texto. Iniciaremos enunciando o Princípio da limitação uniforme, a demonstração desse resultado pode ser encontrada em ([7], página 32).

Teorema 1.2. (Princípio da Limitação Uniforme; Banach-Steinhaus, 1927)
Dada uma família $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de operadores contínuos de X em Y , em que ambos são espaços de Banach, tais que fixado x em X ,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty,$$

então a família T_λ é uniformemente limitada, isto é

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Em seguida, temos o Princípio de contração de Banach, a demonstração desse resultado pode ser encontrada em ([21], Teorema 1.1.1).

Teorema 1.3. (*Princípio de Contração de Banach*). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Finalizamos esta seção com uma versão mais geral da famosa Desigualdade de Gronwall.

Lema 1.1. (*Gronwall Singular, [26]*). *Sejam $b \geq 0$, $\beta > 0$, $a(t)$ uma função não-negativa, localmente integrável em $t \in [0, T)$; e $u(t)$ não-negativa e localmente integrável sobre $[0, T)$, com*

$$u(t) \leq a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds.$$

Então

$$u(t) \leq a(t) + \alpha \int_0^t E'_\beta(\alpha(t-s)) a(s) ds,$$

em que $\alpha = (b\Gamma(\beta))^{1/\beta}$, $E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}$ e $E'_\beta = \frac{d}{dz} E_\beta(z)$. Sendo $a(t) \equiv a$ então,

$$u(t) \leq a E_\beta(\alpha t).$$

1.2 Transformadas de Laplace e Fourier

Vamos considerar a transformada de Laplace, que é uma ferramenta muito poderosa para resolver equações diferenciais. Sua descoberta é atribuída ao Matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827). As seguintes definições foram baseadas na condição clássica suficiente para a existência do operador de transformada de Laplace, baseado no trabalho [11].

Definição 1.4. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é do tipo exponencial, se existem números $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|f(t)\| \leq M e^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Proposição 1.2. *Seja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ uma função localmente integrável tipo exponencial. Então, existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

é convergente para $\operatorname{Re}(\lambda) > \gamma$.

Usando a proposição acima, se considerarmos a função dada por

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad (1.4)$$

podemos garantir que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > \gamma\} \subset D(\tilde{f})$, e $\tilde{f}(\lambda)$ é chamada de transformada de Laplace de $f(t)$. Em outras palavras, podemos definir um mapa linear $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow F(X)$, onde

$$D(\mathcal{L}) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X); \|f(t)\| \leq M e^{\gamma t}\}$$

e $F(X)$ é o conjunto das funções definidas em um subconjunto de $\mathbb{C}$ com imagem contida em X . Chamamos esse operador de transformada de Laplace e o denotamos como

$$\mathcal{L}[f(t)](\lambda) := \tilde{f}(\lambda).$$

Definição 1.5. *Seja $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável. A função f é dada por*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \tilde{f}(\lambda) d\lambda, \quad c > c_0,$$

em que c_0 é um número positivo. Para denotar a transformada inversa de Laplace, escrevemos $\mathcal{L}^{-1}$. A avaliação direta da transformada inversa de Laplace pela fórmula acima é geralmente complicada, mas às vezes fornece informações úteis sobre a função original f .

Definição 1.6. *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de φ , denotada por $\hat{\varphi}$, é uma função definida sobre o $\mathbb{R}$ pela fórmula*

$$\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \hat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx \quad (1.5)$$

Já a inversa da transformada de Fourier de $\hat{\varphi}(x)$, denotada por $\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x) = \varphi(x)$, é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}](x) = \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\langle \omega, x \rangle} d\omega, \quad (1.6)$$

sendo $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\langle \omega, x \rangle = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$.

Observação 1.2. Temos que a transformada de Fourier, dada pela Equação 1.5, está bem definida. Com efeito, note que

$$|\hat{\varphi}(\omega)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

O que prova o desejado.

1.3 Operadores setoriais e semigrupos

Os semigrupos podem ser usados para resolver uma grande classe de problemas comumente conhecidos como por exemplo, Equações de Evolução. Geralmente, esse tipo de equações aparecem em muitos problemas físicos e matemáticos que são descritos por um problema de valor inicial (PVI) para uma equação diferencial que pode ser ordinária ou parcial. Neste trabalho, nos deparamos com uma solução escrita em termos da família de Mittag-Leffler associada ao operador Laplaciano, a qual sua fórmula pode ser escrita por um semigrupo fortemente contínuo, nós utilizamos este fato para mostrar que a solução é fortemente contínua.

No Capítulo 2, abordaremos sobre resolventes analíticos, faremos algumas correspondências com a teoria de semigrupos analíticos, por este motivo e pelo já citado, vamos relembrar algumas definições úteis que serão pertinentes ao longo deste trabalho.

Definição 1.7. Um **semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares** em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

(i) $T(0) = I_X$, onde I_X é o operador identidade em X ;

(ii) Para quaisquer $t, s \geq 0$

$$T(t)T(s) = T(t+s);$$

(iii) $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $x \in X$.

Note que pela condição (ii) da definição acima, a família $\{T(t)\}$ é comutativa com respeito a composição, de fato

$$T(t)T(s) = T(t+s) = T(s)T(t).$$

Observação 1.3. A descrição utilizada para a família de operadores que satisfaz as condições da Definição 1.7 é C_0 -**semigrupo**.

Definição 1.8. Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dito uniformemente limitado, se $\|T(t)\| \leq M$, $M \geq 1$. Além disso, se $M = 1$, dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações, para todo $t \geq 0$.

Definição 1.9. Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um C_0 -semigrupo em X . Um **gerador infinitesimal** é o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

e

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Definição 1.10. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A)^{-1} : \text{Im}(\lambda I - A) \subset X \rightarrow X \text{ é injetiva, limitada e } \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = X\}$$

é chamado de conjunto resolvente de A . O complemento deste conjunto, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, é chamado de espectro de A . Se $\lambda \in \rho(A)$, o operador resolvente (ou simplesmente o resolvente), denotado por $R(\lambda, A)$ é definido por

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Exemplo 1.1. Para motivar os resultados sobre semigrupos lineares, considere o estado físico de um sistema que está evoluindo com o tempo, dado pelo seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ é um operador linear e $x \in \mathbb{R}^N$. A solução para o sistema 1.7 é dada por

$$u(t) = e^{At}x, \quad t \geq 0, \quad (1.8)$$

onde e^{At} representa a matriz fundamental do sistema diferencial linear $u'(t) = Au(t)$ que é igual a I para $t = 0$. E essa solução existe e é única.

Na proposição a seguir, temos outra representação da solução para 1.7 estendida ao caso ilimitado.

Proposição 1.3. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e seja $\gamma \in \mathbb{C}$ um círculo centrado em 0 de raio $\lambda > \|A\|$. Então

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Ver [35] Proposição 1.2.2 . □

Definição 1.11. (*Aproximação de Yosida*) Definimos para cada $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \quad (1.9)$$

Lema 1.2. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear que satisfaz a aproximação de Yosida. Então para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda}\}_{t>0}$, satisfazendo*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \quad (1.10)$$

para cada $t > 0$. E mais, para cada $u \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \quad (1.11)$$

Observação 1.4. *Note que $\{e^{tA_\lambda}\}_{\mathcal{L}(X)}$ é um semigrupo de contração. De fato,*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq 1.$$

Vamos agora descrever uma curva no plano complexo que nos será muito útil no desenvolvimento do Capítulo 3.

Definição 1.12. *Dizemos que H_a é um caminho de Hankel, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ de modo que $H_a = H_{a_1} + H_{a_2} - H_{a_3}$, em que os caminhos H_{a_i} são dados por*

$$\begin{aligned} H_{a_1} &:= \{te^{i\theta}, t \in [r, \infty)\} \\ H_{a_2} &:= \{re^{it}, t \in [-\theta, \theta]\} \\ H_{a_3} &:= \{te^{-i\theta}, t \in [r, \infty)\}. \end{aligned}$$

Também escrevemos $H_a = H_a(r, \theta)$ para ficar claro a dependência do ângulo e do raio, como na Figura 1.1.

Considere $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0, \pi)$. Definimos então os seguintes subconjuntos do plano complexo

$$S_{a,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C}; \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \quad (1.12)$$

e

$$\Sigma_{a,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - a)| \leq \theta, \lambda \neq a\}, \quad (1.13)$$

ver Figuras 1.2a e 1.2b.

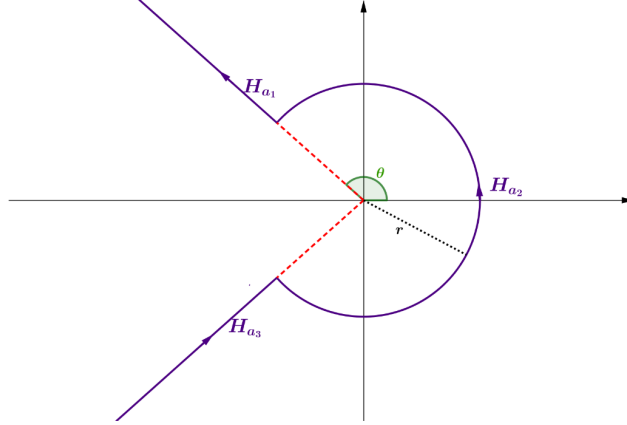
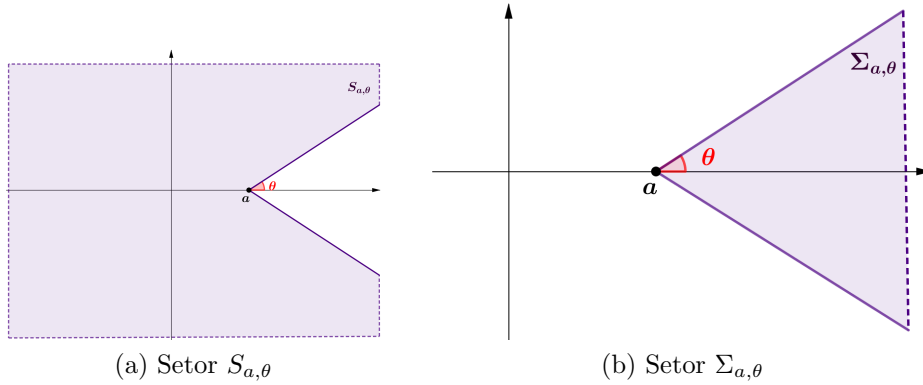


Figura 1.1: Caminho de Hankel $H_a = H_a(r, \theta)$

Definição 1.13. Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido, é setorial se existirem constantes $a \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ e $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que $\Sigma_{a, \theta + \frac{\pi}{2}} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{a, \theta + \frac{\pi}{2}}.$$

Neste caso, dizemos que A é a -setorial de ângulo θ .



Observação 1.5. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e densamente definido. É fácil ver que $-A$ é setorial se, e somente se, existem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \leq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $S_{a, \theta} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a, \theta}.$$

A seguir, temos uma importante fórmula de representação para o resolvente $R(\lambda, A)$ de A , um operador setorial.

Proposição 1.4. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$ temos*

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt.$$

A proposição a seguir, será importante no exemplo seguinte, pois será com ela que provaremos que o laplaciano Δ é setorial e que gera o semigrupo do calor² $T(t) = e^{\Delta t}$.

Proposição 1.5. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear tal que $\rho(A)$ está contido no semi-plano $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) \geq \omega\}$ e*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad (1.14)$$

com $\omega \geq 0$, $M \geq 1$. Então A é setorial.

Demonstração. Para demonstração ver [35], Capítulo 1, Seção 1.3, Proposição 1.3.12. $\square$

Exemplo 1.2. *Provaremos a seguir, que o operador Laplaciano Δ no $\mathbb{R}^N$ é setorial, ou seja, dado $\nu_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\nu_0},$$

em que $\Sigma_{\nu_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg(\lambda)| < \nu_0\}$. Antes disso, vamos considerar a equação do calor

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^N; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.15)$$

em que a condição inicial u_0 é tomada em $X = L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Aplicando formalmente a transformada de Fourier em 1.15 em relação à variável espacial x , obtemos para $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixo, uma equação diferencial ordinária, dada por

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, \xi) = (4\pi)^{-1} |\xi|^{-2} \hat{u}_t(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^N; \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases}, \quad (1.16)$$

cuja única solução é dada por:

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \hat{G}(t, \xi), \quad (1.17)$$

²Recebe esse nome pois resolve a equação do calor linear.

onde $\hat{G}(t, \xi) = e^{-4t\pi^2|\xi|^2}$.

Portanto, aplicando a transformada de Fourier inversa em 1.17, obtemos que a solução do problema linear 1.15, pode ser expressa via convolução como segue

$$u(t, x) = G(t, \cdot) * u_0(x), \quad \text{com} \quad G(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \quad (1.18)$$

A única solução de 1.18 gera um semigrupo $T(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass 1.18, isto é,

$$(T(t)u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.19)$$

Com isso, mostraremos que o operador Laplaciano Δ é setorial em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e que $T(t) = e^{t\Delta}$ para cada $t > 0$.

Para $\operatorname{Re}(z) > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, definimos $T(z)f = G_z * f$ onde

$$G_z(x) = \frac{1}{(4\pi z)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4z}}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |G_z(x)| dx = \left(\frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)} \right)^{n/2}.$$

Pela desigualdade de Young 1.1, se $z \in S_{\theta_0, 0}$ e $\theta_0 < \pi/2$, temos

$$\|T(z)u_0\|_{L^p} \leq \frac{1}{(\cos \theta_0)^{n/2}} \|u_0\|_{L^p}.$$

Agora provamos a estimativa para o resolvente de Δ no semi-plano complexo $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$. Se $z = a + ib$ com $a > 0$ e $b > 0$, pelo teorema integral de Cauchy, temos

$$R(\lambda, \Delta)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)f dt = \int_\gamma e^{-\lambda z} T(z)u_0 dz$$

em que $\gamma = \{z = x - ix, \quad x \geq 0\}$. Como $\cos \theta_0 < \frac{1}{2}$, assim

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, \Delta)f\|_{L^p} &\leq \frac{1}{\cos(\theta_0)^{-N/2}} \|f\|_{L^p} \int_0^\infty e^{-(a+b)x} dx \\ &\leq \frac{2^{N/2}}{a+b} \|f\|_{L^p} \\ &\leq \frac{2^{N/2}}{|\lambda|} \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.5, Δ é setorial. Se $b \leq 0$ obtém-se a mesma estimativa considerando $\lambda = \{z = x + ix; \quad x \leq 0\}$.

Seja $e^{t\Delta}$ o semigrupo analítico gerado por Δ . Pela Proposição 1.4, para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ temos

$$R(\lambda, \Delta)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\Delta} f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)f dt,$$

daí para todos $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle e^{t\Delta} f, g \rangle dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle T(t)f, g \rangle dt.$$

Isso mostra que as transformadas de Laplace das funções com valor escalar $t \mapsto \langle e^{t\Delta} f, g \rangle$ e $t \mapsto \langle T(t)f, g \rangle$, coincidem, portanto $\langle e^{t\Delta} f, g \rangle = \langle T(t)f, g \rangle$. Como f, g são arbitrárias, $e^{t\Delta} = T(t)$.

Algumas referências citadas anteriormente definem operador setorial de maneira diferente à Definição 1.13. Em Lunardi [35], Definição 1.3.1, por exemplo, define operador setorial como um operador que satisfaz as condições da Definição 1.13, exceto a condição do operador ser densamente definido.

1.4 Funções especiais

O propósito desta seção é relembrar as definições e enunciar algumas das propriedades básicas sobre algumas funções, tais funções serão essenciais no decorrer deste trabalho. Começaremos definindo a função gama.

1.4.1 Função Gama

A função Gama é uma função importante da física matemática, denotada por Γ . Optamos por apresentá-la já de início como uma função na variável complexa z , pois várias de suas propriedades são melhor compreendidas com esse tipo de tratamento.

A seguir, temos a definição dada por Euler da função gama.

Definição 1.14. (Euler, 1771) A função Gama, denotada por Γ é dada pela integral

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log(t))^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (1.20)$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = -\log(t)$ essa definição histórica assume a forma mais usual, como segue.

Teorema 1.4. *Temos que, para $\operatorname{Re}(z) > 0$, a função gama $\Gamma(z)$ é definida pela integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1.21)$$

Adiante, reunimos informações importantes a respeito de Γ , uma delas diz respeito a sua estrutura analítica.

Proposição 1.6. *A integral em 1.21 converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$.*

Demonstração. Para demonstrar que a integral em 1.21 converge absolutamente para $\operatorname{Re}(z) > 0$, escrevemos $z = x + iy$ com $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$ e escolhemos α e β tais que $0 < \alpha < x < \beta < \infty$. Como $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\leq \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt. \end{aligned}$$

A integral $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ é finita, de fato

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

enquanto que $\int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt$ é finita para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ pois, devido ao rápido decaimento da exponencial, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} t^{\beta-1} = 0$, para todo $\gamma > 0$, o que implica que existe uma constante $C_{\gamma, \beta} > 0$ tal que $t^{\beta-1} \leq C_{\gamma, \beta} e^{\gamma t}$ para todo $t > 1$. Sendo assim, seja $0 < \gamma < 1$, vale

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \leq C_{\gamma, \beta} \int_1^\infty e^{-(1-\gamma)t} dt = C_{\gamma, \beta} \frac{e^{-(1-\gamma)}}{1-\gamma}.$$

Isso prova que a integral em 1.21 converge absolutamente se $\operatorname{Re}(z) > 0$. □

Proposição 1.7. *É válida a chamada representação de Mittag-Leffler da função Γ ou representação em soma de frações parciais da função Γ , dada por*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (1.22)$$

O resíduo de Γ em $z = -n$ é dado por $\frac{(-1)^n}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Demonstração. Na integral

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt,$$

substituímos e^{-t} por sua expansão em série de Taylor, dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a representação de Mittag-Leffler da função Γ também conhecida como representação em soma de frações parciais

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Como se constata inspecionando a representação de Mittag-Leffler da função Γ , o resíduo de em $z = -n$ é dado por $\frac{(-1)^n}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Isso completa a demonstração. $\square$

Na Equação 1.22 a integral no lado direito é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ e a soma no lado direito converge uniformemente em domínios limitados de $\mathbb{C}$ que excluam os inteiros não-positivos e, portanto, representa uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto nos inteiros não-positivos, onde possui polos simples. Na Figura 1.2 abaixo temos o gráfico da função Gama com seus polos simples representados.

Pelo que acabamos de provar, podemos concluir que para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\mathcal{R}(z) > 0$ tem-se

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\mathcal{R}(z)).$$

Lema 1.3. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tal que $\mathcal{R}(z) > 0$, então vale a fórmula de redução*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

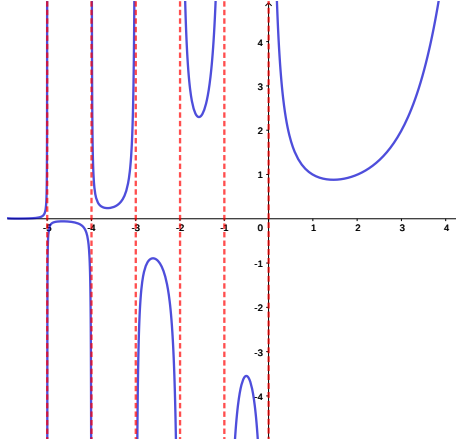


Figura 1.2: Função Gama com seus polos simples

Demonstração. Em primeiro lugar temos que, se $z = 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b}) + e^0 = 1\end{aligned}$$

Para $\operatorname{Re}(z) > 0$, fazendo $\Gamma(z+1)$ em 1.21 e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} b^z (-e^{-b}) - \int_0^\infty (-e^{-t}) \cdot (z) t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \Gamma(z).\end{aligned}$$

□

Corolário 1.5. Para n inteiro positivo, $\Gamma(n+1) = n!$.

Demonstração. Como $\Gamma(1) = 1$ e pela recorrência do lema acima temos $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$,

assim

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!.
\end{aligned}$$

A expressão 1.21 permite definir $\Gamma(z)$, mas somente se $\operatorname{Re}(z) > 0$ pois, de outra forma, a integral no lado direito não está definida. É possível, no entanto, estender analiticamente a função Γ a todo $\mathbb{C}$, exceto aos inteiros não-positivos. Trataremos disso na observação abaixo. $\square$

Observação 1.6. Usando a relação de recorrência acima, a função Gama é estendida para o semi-plano $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ por

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}. \quad (1.23)$$

Em que, $\operatorname{Re}(z) > -n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \neq Z_0^-$ e $(z)_n$ é o símbolo de Pochhammer, definido para números complexos z e inteiros não-negativos $n \in \mathbb{N}_0$, da seguinte maneira

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

De fato, para $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+n-(n-1))(z)\Gamma(z),$$

o que nos permite escrever

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)(z)}.$$

Agora, $\Gamma(z+n)$ está definida por 1.21 para $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Assim, a relação em 1.23 estende analiticamente $\Gamma(z)$ à região $\operatorname{Re}(z) > -n$, exceto nos pontos $z = -k$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$. Com isso, concluímos que Γ possui uma extensão analítica ao plano complexo, exceto aos pontos $z = 0, -1, -2, \dots$, onde possui no máximo polos simples.

A seguir listamos algumas relações que envolvem a função Gama, transformações integrais, funções especiais e outras igualdades relacionadas. A relação da função Gama com a transformada de Laplace, ocorre fazendo uma mudança de variável, como segue.

Observação 1.7. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f(t) = t^{z-1}$,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{z-1} dt,$$

fazendo a mudança de variável $v = st$ na integral acima, obtemos

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-v} \left(\frac{v}{s}\right)^{z-1} \frac{dv}{s} = s^{-z} \int_0^\infty v^{z-1} e^{-v} dv.$$

Assim temos que, $\Gamma(z) = s^z \mathcal{L}[f(t)](s)$.

A observação seguinte, traz uma relação interessante, da função gama e a função gaussiana (e^{-x^2}). Para tal, basta fazer uma mudança de variável.

Observação 1.8. Seja $z = \frac{1}{2}$. Efetuando a mudança de variável $t = x^2$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Veremos abaixo uma outra forma, talvez mais conveniente, de expressar uma extensão para Γ , a saber, com uso da chamada fórmula de reflexão.

Observação 1.9. Vale para todo z complexo a fórmula de reflexão

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

que permite escrever

$$\Gamma(-z) = \frac{\pi}{z\Gamma(z)\sin(\pi z)}.$$

1.4.2 A função recíproca da função Gama

Podemos obter uma representação integral complexa para a recíproca da função gama, denotada por $\frac{1}{\Gamma(z)}$, tal representação foi fornecida por Hankel em 1864 e é válida para qualquer $z \in \mathbb{C}$, com $\Re(z) > 0$.

A seguir na Figura 1.3, temos o gráfico para a função $f(z) = 1/\Gamma(z)$ no caso particular da reta.

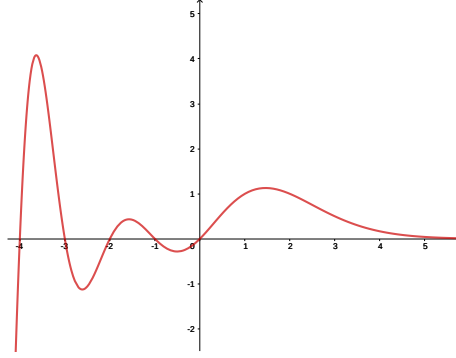


Figura 1.3: Função recíproca de $\Gamma(x)$

Proposição 1.8. Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(z) > 0$ vale

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu \quad (1.24)$$

em que H_a é qualquer contorno de Hankel (ver Definição 1.12).

Demonstração. Por [11], Teorema 2.8, temos que a integral sobre um caminho de Hankel da Equação 1.24 é finita, independe do caminho H_a e além disso integrar sobre H_a é equivalente à integrar sobre uma linha paralela ao eixo imaginário, isto é

$$\int_{H_a} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu. \quad (1.25)$$

Sabendo disso, vamos mostrar a igualdade em 1.24. Obtivemos na Observação 1.7 a igualdade $s^z \mathcal{L}[f(t)](s) = \Gamma(z)$, o que equivale a $\mathcal{L}[f(t)](s) = s^{-z} \Gamma(z)$, em que $f(t) = t^{z-1}$, assim segue que

$$s^{-z} = \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{\Gamma(z)},$$

daí aplicamos a transformada de Laplace inversa em ambos os lados da ultima equação

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-z}] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{\Gamma(z)} \right],$$

como $\frac{1}{\Gamma(z)}$ é uma constante, segue que

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-z}] = \frac{1}{\Gamma(z)} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}[f(t)](s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[s^{-z}] = \frac{1}{\Gamma(z)} f(t).$$

Por um lado, pela definição da inversa da transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-z}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} s^{-z} e^{st} ds, \quad (1.26)$$

com α positivo.

Por outro lado, se considerarmos $t > 0$ fixo fazendo a substituição $\mu = ts$ na integral sobre a curva H_a , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \mu^{-z} e^\mu d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} (ts)^{-z} e^{ts} t ds \\ &= \frac{t^{1-z}}{2\pi i} \int_{H_a} s^{-z} e^{ts} t ds.\end{aligned}$$

Segue da Equação 1.25

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \mu^{-z} e^\mu d\mu = \frac{t^{1-z}}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (ts)^{-z} e^{ts} t ds.$$

Por outro lado, da Equação 1.26, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \mu^{-z} e^\mu d\mu &= \frac{1}{f(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (ts)^{-z} e^{ts} t ds \\ &= \frac{1}{f(t)} \mathcal{L}^{-1}[s^{-z}] \\ &= \frac{1}{f(t)} \frac{1}{\Gamma(z)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(z)}\end{aligned}$$

□

1.4.3 Função Beta

Nesta seção, abordaremos a função Beta e suas propriedades, em seguida faremos propriedades adicionais a função Gama e provaremos a fórmula de reflexão. Adotaremos a seguinte definição para a função especial Beta, para pares de números complexos (p, q) tais que, $\mathcal{R}e(p) > 0$ e $\mathcal{R}e(q) > 0$, a função Beta $\mathbf{B} : (p, q) \rightarrow (0, \infty)$ é definida por

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^{q-1} ds. \quad (1.27)$$

Uma maneira alternativa de apresentar a função Beta, é através de sua relação com a função Gama, como a seguir

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.28)$$

para p, q e $p + q$ complexos, mas diferentes de inteiros negativos. O gráfico de $\mathbf{B}$ para pares de números reais está apresentado na Figura 1.4.

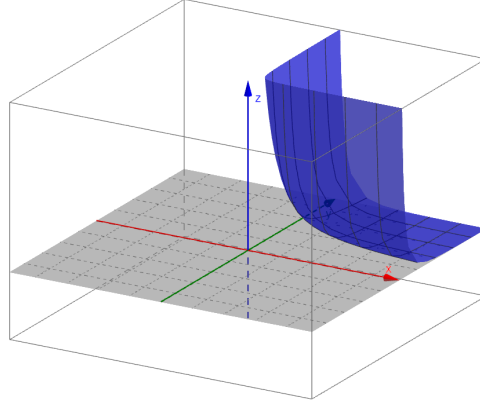


Figura 1.4: Gráfico de $\mathbf{B}(x, y)$, com x, y reais

Observação 1.10. *Observa-se que, pela definição $\mathbf{B}$ é uma função simétrica, ou seja, $\mathbf{B}(p, q) = \mathbf{B}(q, p)$.*

Observação 1.11. *Quando p e q são inteiros positivos, segue-se a partir da definição da função Gama Γ e da relação 1.28 a qual provaremos ser verdadeira a seguir, que:*

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (1.29)$$

Mostraremos que a Equação 1.28 é equivalente a Equação 1.27, para tal, notemos que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty t_1^{p-1} e^{-t_1} dt_1 \int_0^\infty t_2^{q-1} e^{-t_2} dt_2,$$

fazendo uma mudança de variável $t_1 = u^2, dt_1 = 2u du$ e $t_2 = v^2, dt_2 = 2v dv$, obtemos

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty u^{2(p-1)} e^{-u^2} 2u du \int_0^\infty v^{2(q-1)} e^{-v^2} 2v dv \quad (1.30)$$

$$= 4 \int_0^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} du \int_0^\infty v^{2q-1} e^{-v^2} dv. \quad (1.31)$$

$$= 4 \int_{u \geq 0} \int_{v \geq 0} u^{2p-1} v^{2q-1} e^{-(v^2+u^2)} dv du. \quad (1.32)$$

Usando coordenadas polares, escrevemos $u = r \sin \theta$ e $v = r \cos \theta$ com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} (r \sin \theta)^{2p-1} (r \cos \theta)^{2q-1} |J(r, \theta)| d\theta dr \\
&= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2p-1} \frac{(\sin \theta)^{2p}}{\sin \theta} r^{2q-1} \frac{(\cos \theta)^{2q}}{\cos \theta} r d\theta dr \\
&= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} (\sin \theta)^{2p} (\cos \theta)^{2q} \frac{1}{(\sin \theta)(\cos \theta)} d\theta dr \\
&= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p} (\cos \theta)^{2q} \frac{1}{(\sin \theta)(\cos \theta)} d\theta \right) \\
&= \Gamma(p+q) 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta.
\end{aligned}$$

isso mostra que

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta$$

ou seja,

$$\mathbf{B}(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta. \quad (1.33)$$

Por mudanças de variáveis, tomando $t = \sin^2 \theta$, $dt = 2(\sin \theta)(\cos \theta)d\theta$, obtemos integral da definição em 1.27,

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

De maneira similar mostra de 1.27 é equivalente a 1.28.

Observação 1.12. *Por mudança de variável obtemos outra representação para $\mathbf{B}$. Tomando na integral em 1.27, $u = \frac{t}{1-t}$, ou seja, $t = \frac{u}{1+u}$, $1-t = \frac{1}{1+u}$ e $dt = \frac{du}{(1+u)^2}$, obtemos, por outro lado,*

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du \quad (1.34)$$

As representações em 1.27, 1.33 e 1.34 valem para $\mathcal{R}e(p) > 0$ e $\mathcal{R}e(q) > 0$. Ao longo dessa dissertação usaremos 1.27 como definição para $\mathbf{B}$.

1.4.4 Propriedades adicionais a Função Gama

Uma das principais aplicações de 1.34 e das representações integrais da função beta é o estabelecimento da importante fórmula de reflexão para a função Γ também conhecida por fórmula de reflexão de Euler.

Proposição 1.9. *Vale para todo z complexo a fórmula de reflexão da função Gama*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.35)$$

Demonstração. Para demonstrar, basta notar que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \mathbf{B}(z, z-1) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{(1+u)} du. \quad (1.36)$$

A integral acima pode ser calculada pelo método dos resíduos, a seguir o descrevemos.

Seja I a integral

$$I = \int_C \frac{\omega^{z-1}}{(1+\omega)} d\omega.$$

onde C é a curva fechada no plano complexo, orientada no sentido anti-horário, indicada na figura 1.5. A curva C é composta dos segmentos orientados (1) e (2), localizados, respectivamente, imediatamente acima e imediatamente abaixo do semi-eixo real positivo, sendo que fazemos a distância desses segmentos a esse semi-eixo ir a zero e dos arcos orientados γ e Γ , de raios r e R , respectivamente. Escolhemos $R > 1$, de modo que o polo simples que a função $f(\omega) = \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega}$ possui em $\omega = -1$ fique no interior da região delimitada por C . Vamos representar a variável complexa ω na forma $\omega = \rho e^{i\phi}$, com $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

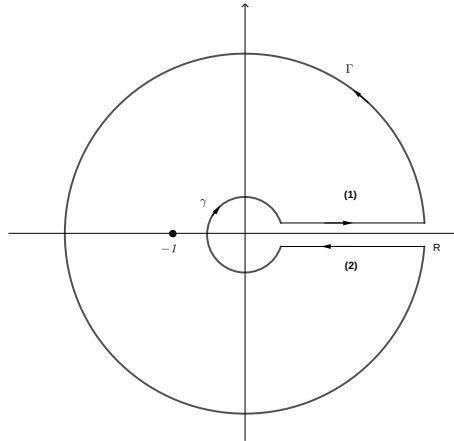


Figura 1.5: A curva C composta pelos segmentos de integração

Devido a essa escolha do intervalo de valores de ϕ , vemos que no segmento (1) tem-se que $\phi \approx 0$, enquanto que no segmento (2) $\phi \approx 2\pi$. Assim, a integral no segmento orientado (1) é aproximada por

$$\int_\epsilon^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho,$$

enquanto que a integral no segmento orientado (2) é aproximada por

$$-e^{2\pi iz} \int_{\varepsilon}^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho,$$

as aproximações sendo tanto melhores quanto mais próximos os segmentos (1) e (2) encontrarem-se do semi-eixo real positivo. Assim, a contribuição das integrações de (1) e (2) à integral I é

$$(1 - e^{2\pi iz}) \int_{\varepsilon}^R \frac{\rho^{z-1}}{1+\rho} d\rho,$$

que nos limites $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ converge a $(1 - e^{2\pi iz})\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ devido a 1.36. Vamos agora estimar as integrais sobre os segmentos Γ e γ .

Em γ temos $\rho = \varepsilon$, de modo que podemos escrever $\omega = \varepsilon e^{i\phi}$, com $\alpha \leq \phi \leq 2\pi - \alpha$, para um certo α pequeno, e $d\omega = i\varepsilon e^{i\phi} d\phi$, de forma que, escrevendo $z = x + iy$ com $x = \mathcal{R}e(z)$ e $y = \mathcal{I}m(z)$

$$\int_{\gamma} \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega} d\omega = -i\varepsilon^z \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{e^{i\phi(z-1)}}{1+\varepsilon e^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi,$$

logo

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega} d\omega \right| \leq \varepsilon^x \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{e^{\phi|y|}}{1-\varepsilon} d\phi \leq \varepsilon^x \frac{2\pi e^{2\pi|y|}}{1-\varepsilon},$$

que converge a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, lembrando que, assumimos $0 < \mathcal{R}e(z) < 1$, ou seja, $0 < x < 1$.

Em Γ temos, analogamente, $\rho = R$, de modo que podemos escrever $\omega = R e^{i\phi}$, com $\beta \leq \phi \leq 2\pi - \beta$, para um certo β pequeno e $d\omega = iR e^{i\phi} d\phi$, de forma que, escrevendo $z = x + iy$, temos

$$\int_{\Gamma} \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega} d\omega = iR^z \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \frac{e^{i\phi(z-1)}}{1+R e^{i\phi}} e^{i\phi} d\phi,$$

e assim,

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega} d\omega \right| \leq R^x \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \frac{e^{\phi|y|}}{R-1} e^{i\phi} d\phi \leq 2\pi e^{2\pi|y|} \frac{R^x}{R-1} = 2\pi e^{2\pi|y|} \frac{R^{x-1}}{1-\frac{1}{R}},$$

que converge a zero quando $R \rightarrow \infty$ pois $x < 1$.

No interior da região delimitada por C o integrando $f(\omega) = \frac{\omega^{z-1}}{1+\omega}$ possui uma única singularidade, que é um polo simples em $\omega = -1$, cujo resíduo é $e^{i\pi(z-1)}$, lembrando que $-1 = e^{i\pi}$. Assim, pelo teorema dos resíduos

$$\int_C \frac{u^{z-1}}{1+u} du = -2\pi i e^{i\pi z},$$

que independe de ε e R . Coletando os resultados anteriores sobre as integrais nos caminhos (1), (2), γ e Γ concluímos que nos limites $\varepsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ vale a igualdade

$$-2\pi i = (1 - e^{2\pi iz})\Gamma(z)\Gamma(z-1).$$

Isso implica que,

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Provando assim a proposição. □

De acordo com a definição para a função $\mathbf{B}$, é elementar ver que

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{p+q}{q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

Com a fórmula de reflexão da função Gama provada, temos agora um poderoso dispositivo para provar algumas propriedades pertinentes a função Beta, como segue.

Proposição 1.10. 1. *Assim, vale a identidade*

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{p+q}{q} \mathbf{B}(p, q+1).$$

Analogamente, demonstra-se que

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{p+q}{p} \mathbf{B}(p+1, q).$$

2. *Utilizando a fórmula de reflexão da função Gama, obtemos*

$$\mathbf{B}(p, q) = -\frac{\pi}{q \sin(\pi q)} \frac{1}{\mathbf{B}(p+q, -q)}.$$

As propriedades da função beta nos permite provar mais uma identidade importante satisfeita pela função gama, a conhecida fórmula de duplicação da função gama, obtida por Legendre³ em 1813.

Proposição 1.11. *Vale para todo $z \in \mathbb{C}$ que não seja um inteiro negativo $-n$ e um número da forma $-n - \frac{1}{2}$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, a fórmula de duplicação da função gama*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

³Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Demonstração. Para demonstrar a fórmula, vamos provisoriamente assumir que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \mathbf{B}(z, z) = \int_0^1 (t(1-t))^{z-1} dt.$$

Efetuamos a mudança de variável de integração $u = 2t - 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t(1-t))^{z-1} dt &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+u}{2} \right) \left(\frac{1-u}{2} \right) \right]^{z-1} du \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{z-1} du \\ &= \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo a mudança de variável de integração $v = u^2$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} &= \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-v)^{z-1} v^{-\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{\mathbf{B}(z, \frac{1}{2})}{2^{2z-1}} \\ &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2z-1}\Gamma(z + \frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

portanto, como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{\Gamma(z)\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}\Gamma(z + \frac{1}{2})} \Rightarrow \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

como queríamos provar. □

A identidade a seguir, é denominada fórmula de multiplicação da função gama ou fórmula de multiplicação de Gauss da função gama, foi provada em 1812 por Gauss.

Observação 1.13. *A generalização da fórmula de duplicação de Legendre é dada pela fórmula de multiplicação de Gauss da função Gama. Para cada $m \in \mathbb{N}$ vale*

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}} \prod_{l=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{l}{m}\right) \quad (1.37)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n/m, n \in \mathbb{N}_0\}$. Observa-se que o caso $m = 1$ é uma identidade trivial e o caso $m = 2$ reproduz a fórmula de duplicação de Legendre.

1.4.5 Função de Mittag-Leffler

Nesta seção apresentamos as propriedades básicas da função clássica⁴ de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$. Inicialmente, partindo da definição básica da função Mittag-Leffler em termos de uma série de potências, descobrimos que, para o parâmetro α com parte real positiva, a função $E_\alpha(z)$ é uma função inteira na variável complexa z . Por isso, discutimos na primeira parte as propriedades (analíticas) da função Mittag-Leffler como uma função inteira. Ou seja, calculamos sua ordem e tipo, apresentamos um número de fórmulas relacionando-as a funções elementares e especiais, bem como relações de recorrência e fórmulas diferenciais, introduzimos algumas representações integrais úteis.

A função Mittag-Leffler, que denotamos por $E_\alpha(z)$ com $\alpha > 0$, é assim chamada em homenagem a Gösta M. Mittag-Leffler, um grande matemático sueco que a introduziu e investigou no início do século XX. A função é definida pela seguinte representação em série convergente em todo o plano complexo.

Definição 1.15. *Consideramos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro como definida pela série de potência*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (1.38)$$

onde $\alpha > 0$.

Observação 1.14. *Observe que $E_1(z) = \exp(z)$. Também note que para a convergência da série de potências em o parâmetro α pode ser complexo desde que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, isso foi observado por Mittag-Leffler, num trabalho publicado em 1904.*

Esta função fornece uma generalização simples da função exponencial por causa da substituição de $k! = \Gamma(k + 1)$ por $(\alpha k)! = \Gamma(\alpha k + 1)$ no denominador dos termos da série de potência .

Definição 1.16. *Uma função inteira não constante é de ordem finita $\rho = \inf \lambda$, se*

$$|f(z)| \leq e^{|z|^\lambda}, \quad \forall |z| > r > 0.$$

A função $E_\alpha(z)$ de um parâmetro é tal que

$$|E_\alpha(z)| \leq e^{|z|^{\frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha)}}}.$$

⁴Conhecida por ser a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Assim, a função Mittag-Leffler é de ordem $\frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha)}$.

A função Mittag-Leffler desempenha um papel importante entre funções especiais. Em primeiro lugar não é difícil obter vários exemplos de suas relações com funções elementares e especiais. Reunimos na proposição a seguir, alguns resultados desse tipo.

Proposição 1.12. *Para todos os $z \in \mathbb{C}$, a função Mittag-Leffler satisfaz as seguintes relações:*

1. $E_1(\pm z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k z^k}{\Gamma(k+1)} = e^{\pm z};$
2. $E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cos(z);$
3. $E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z);$

Demonstração. A demonstração é uma aplicação da definição de E_α como série de potência. □

1.4.6 As funções de Mittag-Leffler de ordem racional

Consideremos agora as funções Mittag-Leffler de ordem racional $\alpha = p/q$ com p e q naturais, primos entre si. As relações funcionais relevantes são

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_p(z^p) = E_p(z^p), \quad (1.39)$$

$$\frac{d^p}{dz^p} E_{p/q}(z^{p/q}) = E_{p/q}(z^{p/q}) + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{z^{-kp/q}}{\Gamma(1 - kp/q)}, \quad q = 2, 3, 4, \dots \quad (1.40)$$

$$E_{p/q}(z) = \frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} E_{1/q}(z^{1/p} e^{i2\pi h/p}), \quad (1.41)$$

a demonstração dessas fórmulas fogem do escopo do trabalho, elas aparecem aqui para melhor nos familiarizar com essa família de funções, uma demonstração pode ser encontrada em Mainardi [31], Apêndice E. Quando $\alpha = \frac{1}{l}$ para $l \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, podemos representar a função de Mittag-Leffler através de uma integral. De fato, da Definição 1.38

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

calculemos a derivada

$$\frac{d}{dz}[E_\alpha(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

O segundo membro dessa equação pode ser escrito da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{z^0}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2z^1}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{3z^2}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \cdots + \frac{(l-1)z^{l-2}}{\Gamma((l-1)\alpha + 1)} + \frac{lz^{l-1}}{\Gamma(l\alpha + 1)} + \cdots,$$

usando o fato que $\Gamma(\alpha k + 1) = \alpha k \Gamma(\alpha k)$, assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}[E_\alpha(z)] &= \frac{z^0}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{2z^1}{2\alpha\Gamma(2\alpha)} + \frac{3z^2}{3\alpha\Gamma(3\alpha)} + \cdots + \frac{(l-1)z^{l-2}}{(l-1)\alpha\Gamma((l-1)\alpha)} + \frac{lz^{l-1}}{l\alpha\Gamma(l\alpha)} + \cdots \\ &= \frac{z^0}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{z^1}{\alpha\Gamma(2\alpha)} + \frac{z^2}{\alpha\Gamma(3\alpha)} + \cdots + \frac{z^{l-2}}{\alpha\Gamma((l-1)\alpha)} + \frac{z^{l-1}}{\alpha\Gamma(l\alpha)} + \cdots \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{z^0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{z^2}{\Gamma(3\alpha)} + \cdots + \frac{z^{l-2}}{\Gamma((l-1)\alpha)} \right] \\ &+ \frac{z^{l-1}}{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(l\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma((l+1)\alpha)} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{d}{dz}[E_\alpha(z)] = \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k\alpha)} \right] + \frac{z^{l-1}}{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(l\alpha)} + \frac{z^1}{\Gamma((l+1)\alpha)} + \cdots \right].$$

Considerando $\alpha = \frac{1}{l}$, assim $\frac{1}{\alpha} = l$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}[E_{\frac{1}{l}}(z)] &= \left[l \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)} \right] + lz^{l-1} \left[\frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{z^1}{\Gamma(1 + (1/l))} + \cdots \right] \\ &= \left[l \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)} \right] + lz^{l-1} E_{\frac{1}{l}}(z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dz}[E_{\frac{1}{l}}(z)] = lz^{l-1} E_{\frac{1}{l}}(z) + l \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)}. \quad (1.42)$$

Como $E_{\frac{1}{l}}(0) = 1$, temos que resolver o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}[E_{\frac{1}{l}}(z)] = lz^{l-1} E_{\frac{1}{l}}(z) + l \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)} \\ E_{\frac{1}{l}}(0) = 1 \end{cases}$$

Cuja resolução fazemos pelo método do fator integrante, multiplicando a Equação 1.42 por $e^{-(z^l)}$, temos

$$\begin{aligned} e^{-(z^l)} \frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{l}}(z)] &= e^{-(z^l)} l z^{l-1} E_{\frac{1}{l}}(z) + e^{-(z^l)} l \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)} \Rightarrow \\ e^{-(z^l)} \frac{d}{dz} [E_{\frac{1}{l}}(z)] - l z^{l-1} e^{-(z^l)} E_{\frac{1}{l}}(z) &= l e^{-(z^l)} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)} \Rightarrow \\ \frac{d}{dz} [e^{-(z^l)} E_{\frac{1}{l}}(z)] &= l e^{-(z^l)} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{z^{k-1}}{\Gamma(k/l)}, \end{aligned}$$

integrando em relação a z , obtemos

$$e^{-(z^l)} E_{\frac{1}{l}}(z) = \left[\int_0^z l e^{-(\omega^l)} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\omega^{k-1}}{\Gamma(k/l)} d\omega \right] + C,$$

onde C é a constante de integração. Por fim, aplicando a condição inicial $E_{\frac{1}{l}}(0) = 1$ na equação acima, encontramos a constante $C = 1$, assim a solução da EDO resulta em

$$E_{\frac{1}{l}}(z) = e^{z^l} + e^{z^l} \left[\int_0^z l e^{-(\omega^l)} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\omega^{k-1}}{\Gamma(k/l)} d\omega \right].$$

1.4.7 Representação Integral

Muitas das propriedades mais importantes de $E_\alpha(z)$ seguem da representação integral

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{\omega^{\alpha-1} e^\omega}{\omega^\alpha - z} d\omega, \quad \alpha > 0, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \quad (1.43)$$

onde o caminho da integração H_a é o caminho de Hankel.

Definição 1.17. *Seja $f \in C^\infty((0, \infty))$. Dizemos que f é **completamente monótona** se, e somente se, vale*

$$(-1)^n \frac{d^n f}{dx^n} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma propriedade relevante da função clássica de Mittag-Leffler é sua monotonicidade completa no eixo real negativo, quando seu parâmetro α é menor ou igual a 1. Escrevemos para $x > 0$:

$$E_\alpha(-x) \quad (1.44)$$

satisfaz a Definição 1.17 se, e somente se $0 < \alpha \leq 1$.

Essa propriedade, anteriormente conjecturada por Feller usando métodos probabilísticos, foi rigorosamente provada por Pollard (1948), ver [39], com base no teorema de Bochner, que fornece uma condição suficiente e necessária para a monotonicidade completa. Em outras palavras, Pollard foi capaz de dar a representação de $E_\alpha(-x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$, quando $0 < \alpha < 1$, em que

$$E_\alpha(-x) = \int_0^\infty e^{-tx} \Psi_\alpha(t) dt, \quad \Psi_\alpha(t) \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.45)$$

Em que $\Psi_\alpha(t)$ é uma função inteira com representação em séries dada por

$$\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sin(\pi\alpha n) \Gamma(\alpha n + 1) \right] t^{n-1}, \quad (1.46)$$

cujas não-negatividades foi provada por Pollard sendo relacionada com o sinal da transformada inversa de Laplace da função completamente monótona $\exp(-s^\alpha)$, ver [38].

Posteriormente mostraremos que a função Ψ_α introduzido por Pollard é uma função do tipo Wright.

1.4.8 Função Fox-Wright

A função Wright, que denotamos por $W_{\lambda,\mu}(z)$, é assim chamada em homenagem a E. Maitland Wright, o eminente matemático britânico, que introduziu e investigou essa função em uma série de notas a partir de 1933, no âmbito da teoria das partições. A função é definida pela representação em série, convergente em todo o plano complexo,

$$W_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1.47)$$

então $W_{\lambda,\mu}(z)$ é uma função inteira. Originalmente, Wright assumiu $\lambda > 0$ e, somente em 1940, ele considerou $-1 < \lambda < 0$. Segundo Mainardi [31] as funções do tipo Wright são divididas em dois tipos: o primeiro tipo quando $\lambda \geq 0$ e o segundo tipo $-1 < \lambda < 0$.

1.4.9 Representação Integral

A representação integral da função Wright é dada por

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\sigma + z\sigma^{-\lambda}} \frac{d\sigma}{\sigma^\mu}, \quad \lambda > -1, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1.48)$$

onde H_a denota o caminho de Hankel. A equivalência entre as representações em série e integral é facilmente comprovada usando a fórmula de Hankel para a recíproca da função Gama. De fato, temos que

$$\frac{1}{\Gamma(\varsigma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} u^{-\varsigma} e^u du$$

A troca entre série e integral é verdadeira pela convergência uniforme da série, sendo $W_{\lambda,\mu}(z)$ uma função inteira. Temos

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\sigma+z\sigma^{-\lambda}} \frac{d\sigma}{\sigma^\mu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^\sigma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sigma^{-\lambda n} \right] \frac{d\sigma}{\sigma^\mu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\int_{H_a} e^\sigma \sigma^{-\lambda n - \mu} d\sigma \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}. \end{aligned}$$

Isso demonstra 1.47. Dedicamos nesta seção mais atenção a uma função específica do tipo Wright, em virtude de seu papel nas aplicações do cálculo fracionário. Chama-se função Mainardi, chamada também de função auxiliar.

Definição 1.18. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. A função Mainardi $M_\alpha(z)$ é dada por*

$$M_\alpha(z) = W_{-\alpha, 1-\alpha}(-z) \quad (1.49)$$

A representação em série dessa função auxiliar é aplicação direta da representação em série de $W_{\lambda,\mu}(z)$. Temos

$$\begin{aligned} M_\alpha(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\alpha n + (1 - \alpha))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(\alpha n) \sin(\pi \alpha n) \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde usamos a fórmula de reflexão provada na Proposição 1.9.

Já a representação integral para a função auxiliar M_α é dada por

$$M_\alpha(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\sigma - z\sigma^\alpha} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} \quad (1.51)$$

Finalmente, pretendemos estudar algumas propriedades da função Mainardi e associá-la a função Mittag-Leffler, o seguinte resultado pode ser encontrado em Mainardi [31].

Proposição 1.13. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r < \infty$ e $z \in \mathbb{C}$. A função Mainardi, a qual denotaremos a partir de agora por Ψ_α , tem as seguintes propriedades:*

1. $\Psi_\alpha(t) \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \geq 0$;

2. para todo $t \geq 0$

$$\int_0^\infty t^r \Psi_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)};$$

3. $\mathcal{L}[\Psi_\alpha(t)](z) = E_\alpha(-z)$

CAPÍTULO 2

LEQUAÇÕES DE VOLTERRA E A TEORIA VISCOELÁSTICA

Neste capítulo vamos introduzir e discutir o conceito de resolvente, que é central para a teoria das equações lineares de Volterra. Obteremos também a fórmula de variação de parâmetros para equações não homogêneas. As principais ferramentas para provar os teoremas de existência para solução de uma equação de Volterra são descritas em detalhes, um dos métodos é o da transformada de Laplace. Provaremos o teorema para geradores para as equações de Volterra análogo ao teorema de Hille-Yosida, como na teoria de semigrupos.

2.1 Boa-posição e resolventes

Seja X um espaço complexo de Banach, A um operador linear ilimitado e fechado em X com domínio $D(A)$ denso em X e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ um núcleo escalar diferente de zero. Consideramos a Equação de Volterra, dada por

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, \quad t \in J \quad (2.1)$$

em que $f \in C(J, X)$ e $J = [0, T]$. Denotamos por X_A o domínio do operador A munido com a norma do gráfico $\|\cdot\|_A$, tal que

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|.$$

Além disso, X_A é um espaço de Banach desde que A seja um operador fechado e seja continuamente e densamente incluído em X .

Na definição que se segue, trazemos uma distinção entre os tipos de soluções 2.1.

Definição 2.1. Uma função $u \in C(J, X)$ é chamada de

- a) **Solução forte** de 2.1 em J se $u \in C(J, X_A)$ e 2.1 vale em J , em que X_A é o domínio de A equipado com a norma gráfico $\|\cdot\|_A$ de A ;
- b) **Solução branda** de 2.1 em J se $(a * u) \in C(J, X_A)$ e $u(t) = f(t) + A(a * u)(t)$ em J ;
- c) **Solução fraca** de 2.1 em J se

$$\langle u(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle + \langle (a * u)(t), A^* x^* \rangle,$$

em J , para cada $x \in D(A^*)$.

Observe que se $u \in C([0, \infty), D(A))$ é uma solução forte de 2.1, então $u \in L_{loc}^\infty([0, \infty), D(A))$ e assim u é uma solução branda de 2.1. Por outro lado, se u é uma solução branda de 2.1, então

$$\langle u(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle + \langle A(a * u)(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle + \langle a * u(t), A^* x^* \rangle$$

e u é solução fraca de 2.1. Se além disso, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A não é vazio, então toda solução fraca também é branda, para detalhes da demonstração ver a Proposição 1.4 na Seção 1.2, Prüss [40]. No entanto, em geral, nem toda solução branda é uma solução forte.

Definição 2.2. A Equação de Volterra 2.1 é chamada **bem posta** se para cada $x \in D(A)$ existe uma única solução forte $u(t, x)$ em $\mathbb{R}_+$ de

$$u(t) = x + (a * Au)(t), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

e dada uma sequência $(x_n) \in D(A)$ em que $x_n \rightarrow 0$ tem-se que $u(t, x_n) \rightarrow 0$ em X , uniformemente em intervalos compactos, isto é, se $[x, y] \subset \mathbb{R}_+$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u(t, x_n)\| < \epsilon$, para todo $n > n_0$ e $x \leq t \leq y$.

Supondo que 2.1 esteja bem posta, então podemos introduzir o operador solução $S(t)$ dado por

$$S(t)x = u(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in D(A).$$

Observação 2.1. Pela unicidade da solução, temos que $S : D(A) \subset X \rightarrow X$ está bem definido de forma que é linear para cada $t \geq 0$. Com isso temos que, dados $x, y \in D(A)$ e $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$u(t) = S(t)x + \gamma S(t)y$$

é solução forte de 2.2 e por unicidade

$$S(t)x + \gamma S(t)y = u(t, x + \gamma y) = S(t)(x + \gamma y).$$

Para cada $x \in D(A)$, $S(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}_+$ e $S(0)x = x$ em $D(A)$.

Mostremos que $S(t)$ é limitado em intervalos compactos, isto é, dado $r > 0$ existe $M(r)$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M(r), \quad t \in [0, r].$$

De fato, assumindo por contradição que existem $(t_n) \subset [0, r]$ e $(y_n) \subset D(A)$, com $\|y_n\| = 1$ tal que $\|S(t_n)y_n\| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, fazendo $x_n = y_n/n$, teremos $x_n \rightarrow 0$. Com isso obtemos a seguinte contradição

$$1 \leq \|S(t_n)x_n\| = \|u(t_n, x_n)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto $S(t)$ é limitado e admite uma única extensão limitada para todo o X , além disso $S(t)$ é contínuo para cada $x \in X$.

A seguir, mostraremos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uma família fortemente contínua. De fato, dado $x \in X$ e $t_0 \in [0, \infty)$, seja (x_n) uma sequência em $D(A)$ que converge para x . Então, para todo t numa vizinhança de t_0 pela limitação uniforme de $S(t)$, existe M tal que, para todo $n \in N$, vale

$$\begin{aligned} \|S(t)x - S(t_0)x\| &= \|S(t)x - S(t)x_n + S(t)x_n - S(t_0)x_n + S(t_0)x_n - S(t_0)x\| \\ &\leq \|S(t)x - S(t)x_n\| + \|S(t)x_n - S(t_0)x_n\| + \|S(t_0)x_n - S(t_0)x\| \\ &\leq M\|x - x_n\| + \|S(t)x_n - S(t_0)x_n\| + M\|x - x_n\| \end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \|S(t)x - S(t_0)x\| \leq 2M\|x - x_n\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo, para cada $x \in X$, $S(t)x$ é contínuo sobre $[0, \infty)$, ou seja, a família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua.

Segue da definição de solução forte que o operador solução $S(t)$ mapeia $D(A)$ nele mesmo, $AS(t)x$ é contínuo em $\mathbb{R}^+$ para cada $x \in D(A)$ e

$$S(t)x = x + a * AS(t)x = x + Aa * S(t)x \quad (2.3)$$

é satisfeita em $\mathbb{R}^+$. Como $S(t)$ é limitado, segue que $\text{Im}(a * S(t)) \subset D(A)$ e $Aa * S(t) = S(t) - I$ é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$. Em outras palavras $u(t, x) = S(t)x$ é uma solução branda da Equação 2.2 para cada $x \in X$, como provaremos na proposição a seguir.

Proposição 2.1. *Supondo que a Equação 2.1 seja bem posta. Então, para cada $x \in X$, $u(t, x) = S(t)x$ é uma solução branda de 2.2.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência em $D(A)$ que converge para $x \in X$ e $t \geq 0$, por 2.3 temos que

$$Aa * S(t)x_n = (S(t) - I)x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $S(t)$ é limitado sobre X , $(Aa * S(t)x_n)$ converge e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Aa * S(t)x_n = (S(t) - I)x.$$

Uma vez que A é fechado,

$$(a * S(t)x, (S(t) - I)x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a * S(t)x_n, Aa * S(t)x_n) \in D(A),$$

isto é, $a * S(t)x \in D(A)$ e

$$Aa * S(t)x = (S(t) - I)x.$$

Como $S(t)x$ é contínuo sobre $\mathbb{R}^+$, temos que $Aa * S(t)x \in C(\mathbb{R}^+, X)$. Em particular, $a * S(t)x \in C(\mathbb{R}^+, X_A)$. $\square$

Proposição 2.2. *Se 2.1 é bem posta, então soluções brandas para 2.2 são únicas.*

Demonstração. De fato, supondo que u_1 e u_2 são soluções brandas de 2.2 e seja $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Então, $a * u(t) \in C(\mathbb{R}^+, X_A)$ e

$$u(t) = Aa * u(t) \Rightarrow a * u(t) = a * A(a * u)(t)$$

para cada $t \geq 0$. Assim $a * u(t)$ é uma solução forte para 2.2 com $x = 0$. Como 2.1 é bem posta, soluções fortes são únicas e assim, $a * u(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Como $a \neq 0$, segue que $u \equiv 0$. Assim $u_1 = u_2$, concluímos a unicidade. $\square$

É interessante observar que A comuta com $S(t)$ já que, para cada $x \in D(A)$, ambos $u(t, Ax)$ e $Au(t, x)$ são soluções brandas de 2.2 com x trocado por Ax . Portanto,

$$S(t)Ax = u(t, Ax) = Au(t, x) = AS(t)x,$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

A partir dessas considerações, dá-se origem à seguinte definição. 2.1.

Definição 2.3. Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é chamada um Resolvente ou Operador solução para 2.1, se as seguintes condições forem satisfeitas.

1. $S(t)$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}_+$ e $S(0) = I$.
2. $S(t)$ comuta com A , o que significa que $S(t)D(A) \subset D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$; para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.
3. A equação resolvente é satisfeita, ou seja,

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)ds, \quad (2.4)$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

Acabamos de ver que, se a equação 2.1 é bem posta, então ela admite um resolvente, a seguinte proposição caracteriza quando o problema 2.1 é bem posto em termos do resolvente.

Proposição 2.3. A equação de Volterra em 2.1 é bem posta se, e somente se admite um resolvente $S(t)$. Neste caso, $\text{Im}(a * S(t)) \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$ e vale a Equação 2.4, para todo $x \in X$, $t \geq 0$. Em particular, $Aa * S$ é fortemente contínuo em X .

Demonstração. Seja $S(t)$ um resolvente para a equação 2.1, só resta provar que a existência de um resolvente $S(t)$ implica na boa posição para a Equação 2.1. Então, suponhamos que $S(t)$ seja um resolvente para ela, pelas propriedades de $S(t)$, para cada $x \in D(A)$ a função $u(t) = S(t)x$ é uma solução forte de 2.2. Para provar sua unicidade, seja $v(t)$ outra solução forte de 2.2, pela condição (2) e (3) da Definição 2.3 assim como por 2.2, temos que

$$\begin{aligned} 1 * v &= (S - a * AS) * v \\ &= S * v - S * a * Av \\ &= S * (v - a * Av) = S * x = 1 * Sx \end{aligned}$$

segue $v(t) = S(t)x = u(t)$. A dependência contínua das soluções segue diretamente da limitação uniforme de $S(t)$ em intervalos compactos que por sua vez é uma consequência da condição (1) da Definição 2.3, pelo princípio de limites uniformes. $\square$

Corolário 2.1. O problema 2.1 admite no máximo um resolvente $S(t)$.

Demonstração. Se $S_1(t)$ e $S_2(t)$ são ambos resolventes para 2.1, então dado $x \in X$ temos que $S_1(t)x$ e $S_2(t)x$ são soluções brandas para 2.2. Pela Proposição 2.1, $S_1(t)x = S_2(t)x$ para todo $t \geq 0$. Logo $S_1 = S_2$. $\square$

Para o caso especial em que $a(t) = 1$ acima, o resolvente $S(t)$ torna-se o C_0 -semigrupo e^{At} gerado por A .

2.2 Equações não homogêneas

Supondo que $S(t)$ seja um resolvente para 2.1 e seja $u(t)$ uma solução branda do problema 2.1. Então pelas condições (1) – (3) da Definição 2.3, temos formalmente que

$$\begin{aligned} 1 * u &= (S - A(a * S)) * u \\ &= S * u - AS * (a * u) \\ &= S * u - S * (Aa * u) = S * (u - Aa * u) = S * f \end{aligned}$$

ou seja, $S * f$ é continuamente diferenciável e

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Esta é a fórmula de variação de parâmetros para equações de Volterra 2.1.

Na equação de Volterra

$$u(t) = f(t) + a * Au(t), \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ tem como condição até aqui assumida a continuidade. Na proposição seguinte, consideraremos alguns casos em que, além da continuidade, supomos outras condições de regularidade para f .

Proposição 2.4. *Suponha que 2.2 admita um resolvente $S(t)$ e seja $f \in C(J, X)$. Então*

(i) *Se $u \in C(J, X)$ é uma solução branda de 2.1, então $S * f$ é continuamente diferenciável e*

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in J.$$

Em particular, soluções brandas de 2.1 são únicas.

(ii) Se $f \in W^{1,1}(J; X)$, então

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)ds, \quad t \in J, \quad (2.6)$$

é uma solução branda de 2.1.

(iii) Se $f(t) = x + a * g(t)$, com $g \in W_{loc}^{1,1}(J, X)$ e $x \in D(A)$ então

$$u(t) = S(t)x + a * S(t)g(0) + a * g'(t), \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

é uma solução forte de 2.1.

(iv) Se $f \in W^{1,1}(J, X_A)$, então $u(t)$, descrito por 2.6 é uma solução forte de 2.1.

Demonstração. (i) Como $S(t)x$ é uma solução branda de 2.2, dado $s \in [0, t]$, tomando $x = u(s)$, temos

$$S(t-s)u(s) = u(s) + Aa * S(t-s)u(s).$$

Integrando de 0 a t obtemos,

$$S * u(t) = \int_0^t u(s)ds + \int_0^t Aa * S(t-s)u(s)ds.$$

Além disso, como $a * S(t-s)x \in D(A)$ para todo $x \in X$ e $0 \leq s \leq t$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t Aa * S(t-s)u(s)ds &= A \int_0^t a * S(t-s)u(s)ds \\ &= A(a * S) * u(t) \\ &= AS * (a * u)(t) \\ &= A \int_0^t S(\tau)(a * u(t-\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Uma vez que $(Aa * u)(t)$ é contínua, resulta que $Aa * u \in L_{loc}^1([0, \infty), X)$. Logo, a convolução $S * (Aa * u)(t)$ existe e

$$\begin{aligned} S * (Aa * u)(t) &= \int_0^t S(\tau)Aa * u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t AS(\tau)a * u(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t u(s)ds &= S * u(t) - S * (Aa * u)(t) \\ &= S * (u - Aa * u)(t) = (S * f)(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S * f \in C^1([0, \infty), X)$ e

$$u(t) = (S * f)'(t), \quad t \geq 0.$$

(ii) Se $f \in W^{1,1}([0, \infty), X)$, então u que é dada por 2.6 é contínua em $[0, \infty)$. Assim obtemos pela Proposição 2.3

$$a * u = a * Sf(0) + a * S * f \in D(A) \quad \text{para cada } t \in [0, \infty)$$

e

$$\begin{aligned} Aa * u &= Aa * Sf(0) + (Aa * S) * f' \\ &= (S - I)f(0) + S * f' - 1 * f' \\ &= Sf(0) + S * f' - f(0) - 1 * f' = u - f, \end{aligned}$$

isto é $u(t)$ é solução branda de 2.1.

(iii) Seja $v(t) = Sg(0) + S * g'(t)$, pelo item (ii) v é uma solução branda de 2.1 f substituído por g , em particular temos $a * v \in C([0, \infty), X_A)$ e $v(t) = g(t) + Aa * v(t)$. Agora temos que u dado por 2.1 torna-se $u = Sx + a * v$, daí $u \in C([0, \infty), X_A)$ desde que $x \in D(A)$ e

$$Au(t) = AS(t)x + Aa * v(t) = AS(t)x + (v(t) - g(t)).$$

Fazendo a convolução da equação acima com a , obtemos

$$\begin{aligned} a * Au(t) &= a * AS(t)x + a * v(t) - a * g(t) \\ &= (S(t)x - x) + a * v(t) - a * g(t) \\ &= (S(t)x + a * v(t)) - (x + a * g(t)) = u(t) - f(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow u(t) = S(t)x + a * S(t)g(0) + a * S * g'(t)$ é uma solução forte de 2.1.

(iv) A prova deste item é uma consequência direta de (ii) usando o fato que $S(t)$ comuta com A .

□

Concluimos esta seção demonstrando que os conceitos solução branda e solução fraca para equações bem-postas da forma 2.1 coincidem, desde que $\rho(A) \neq \emptyset$.

Proposição 2.5. *Seja $f \in C([0, \infty))$ e supondo que $\rho(A) \neq \emptyset$. Então cada solução fraca em $[0, \infty)$ de 2.1 é uma solução branda de 2.1 em $[0, \infty)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mu \in \rho(A)$ e $u \in C([0, \infty))$ é uma solução fraca de 2.1, então para cada $x^* \in D(A^*)$

$$\langle a * u(t), A^* x^* \rangle = \langle u(t) - f(t), x^* \rangle.$$

Subtraímos $\langle a * u(t), \mu x^* \rangle$ de ambos os lados, obtemos

$$\langle a * u(t), (A^* - \mu)x^* \rangle = \langle u(t) - f(t) - \mu a * u(t), x^* \rangle.$$

Como $\mu - A^*$ é invertível, fazendo $y^* = (\mu - A^*)x^*$, temos

$$\begin{aligned} \langle a * u(t), y^* \rangle &= \langle u(t) - f(t) - \mu a * u(t), (\mu - A^*)^{-1} y^* \rangle \\ &= \langle (\mu - A^*)^{-1} (u(t) - f(t) - \mu a * u(t)), y^* \rangle \end{aligned}$$

para todo $y^* \in X^*$, assim

$$a * u(t) = (\mu - A^*)^{-1} (u(t) - f(t) - \mu a * u(t)) \quad \text{em } [0, \infty).$$

Isso implica que $a * u(t) \in D(A)$ para cada $t \in [0, \infty)$ e

$$Aa * u(t) = u(t) - f(t) \quad \text{em } [0, \infty),$$

isto é $u(t)$ é solução branda de 2.1. □

2.3 Geração de resolventes

Como 2.1 é dada em termos de uma equação de convolução em $[0, \infty)$ é natural empregar neste caso a transformada de Laplace para seu estudo. Além das condições já impostas a $a(t)$ e A , supomos que $a(t)$ admite transformada de Laplace, ou seja, existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\omega t} |a(t)| dt < \infty.$$

Mas devemos restringir a classe de resolventes, eles devem admitir transformada de Laplace.

Definição 2.4. *Supondo que $S(t)$ é um resolvente para 2.1.*

1. $S(t)$ é dito exponencialmente limitado se existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

Neste caso, $S(t)$ é dito ser exponencialmente limitado do tipo (M, ω) .

2. O limite de crescimento $\omega_0(S)$ de um resolvente $S(t)$ para 2.1 é definido por

$$\omega_0(S) = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|S(t)\| \quad (2.9)$$

Em outras palavras, temos a seguinte relação para $\omega_0(S)$

$$\omega_0(S) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{existe } M > 0 \text{ tal que 2.8 vale}\} \quad (2.10)$$

Agora, suponha que $S(t)$ seja um resolvente exponencialmente limitado para 2.1, sua transformada de Laplace a qual denotaremos por

$$\hat{S}(\lambda) = H(\lambda)$$

é dada por

$$H(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega,$$

está bem definida e é holomorfa para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} \|H^{(n)}(\lambda)\| &= \left\| \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} S(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^\infty t^n e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} M e^{\omega t} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)t} t^n dt \\ &= \frac{Mn!}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A partir de 2.4, aplicando propriedades básicas e o teorema de convolução para transformada de Laplace, obtemos para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$

$$H(\lambda)x = \lambda^{-1}x + \hat{a}(\lambda)H(\lambda)Ax,$$

válido para cada $x \in D(A)$. E a partir de 2.4 obtemos

$$H(\lambda)x = \lambda^{-1}x + A\hat{a}(\lambda)H(\lambda)x,$$

para cada $x \in X$, segue que

$$x = \lambda(H(\lambda)x - \hat{a}(\lambda)H(\lambda)Ax) = \lambda H(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)x.$$

Assim, o operador $I - \hat{a}(\lambda)A$ é bijetivo e

$$(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} = \lambda H(\lambda) \quad (2.12)$$

é limitado.

Em particular, $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo λ tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$. De fato, supomos por absurdo que $\hat{a}(\lambda_0) = 0$ para algum λ_0 com $\mathcal{R}e(\lambda_0) > \omega$, como $\hat{a}(\lambda)$ é holomorfa e λ_0 é um zero isolado de multiplicidade finita e $H(\lambda_0) = I/\lambda_0$. Tomando um pequeno círculo Γ ao redor de λ_0 que está inteiramente contido no semi-plano $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega$, tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ em Γ , então

$$AH(\lambda) = \frac{(H(\lambda) - \frac{I}{\lambda})}{\hat{a}(\lambda)}$$

está bem definido e holomorfo em Γ , portanto, pela fórmula de Cauchy¹, obtemos

$$\begin{aligned} A &= A\lambda_0 H(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} A \int_{\Gamma} \frac{\lambda H(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda H(\lambda) - I}{(\lambda - \lambda_0)\hat{a}(\lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

e assim A é limitado, uma contradição! Assim $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ para $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega$.

Essas propriedades de $\hat{a}(\lambda)$ e A em combinação com 2.11 caracterizam resolventes do tipo (M, ω) .

Teorema 2.2. *(de Geração de Resolventes Exponencialmente Limitados) Seja A um operador linear em X fechado e ilimitado, com domínio denso $D(A)$. Seja $a(\cdot) \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{C})$ satisfazendo*

$$\int_0^\infty e^{-\omega t} |a(t)| dt < \infty.$$

Então 2.1 admite um resolvente exponencialmente limitado $S(t)$, do tipo (M, ω) se, e somente se, as seguintes condições são válidas

¹Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ não vazio, aberto e simplesmente conexo. Sejam $f : \Omega \rightarrow X$ holomorfa e $\gamma : I \rightarrow \Omega$ um caminho fechado simples e positivamente orientado. Se $z_0 \in \mathbb{R}e(\lambda)$, então

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

1. $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo real $\lambda > \omega$;

2. A aplicação $H : (\omega, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, dada por

$$H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda, \quad (2.13)$$

satisfaz as estimativas

$$\|H^{(n)}(\lambda)\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - \omega)^{-(n+1)}}, \quad (2.14)$$

em que $\lambda > \omega$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração. Ver [43], Capítulo 2, Teorema 2.3.2 e também em [40], Capítulo 2, Teorema 1.3. □

2.4 Resolventes analíticos

Esta seção é dedicada à teoria dos resolventes analíticos, caso análogo a teoria de semigrupos analíticos para as equações de Volterra do tipo escalar. Uma completa caracterização de tais resolventes em termos da transformada de Laplace é dada. A regularidade espacial dos resolventes analíticos é estudada e uma caracterização de semigrupos analíticos nesses termos é apresentada. É mostrado que os resolventes analíticos levam a melhores resultados de perturbação e propriedades mais fortes das fórmulas de variação e parâmetros.

Nesta seção, consideramos novamente a equação de Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, \quad t \in [0, \infty), \quad (2.15)$$

onde $a \in L^1_{loc}([0, \infty), \mathbb{C})$, $f(t)$ é uma função contínua sobre $[0, \infty)$ com valores em X e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear ilimitado, fechado e densamente definido. Denotamos por $\Sigma(\omega, \theta)$ o setor aberto com vértice $\omega \in \mathbb{R}$ e ângulo de abertura $0 < 2\theta \leq 2\pi$:

$$\Sigma(\omega, \theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}; |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}.$$

Todo elemento de $\Sigma(\omega, \theta)$ (Figura 2.1) tem a forma $\omega + re^{i\alpha}$, com $r > 0$ e $|\alpha| < \theta$.

Definição 2.5. Um resolvente $S(t)$ para 2.15 é dito ser analítico se a função $S(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ admite extensão analítica ao setor $\Sigma(0, \theta_0)$ para algum $0 < \theta_0 \leq \pi/2$. Um resolvente

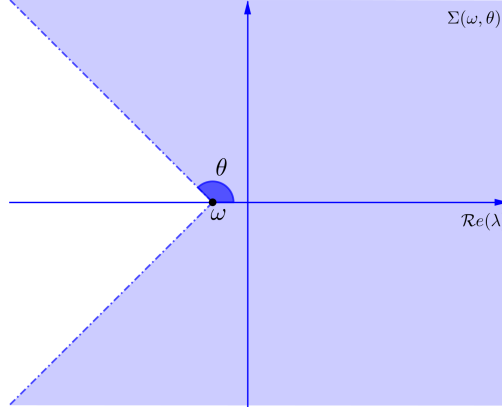


Figura 2.1: Setor $\Sigma(\omega, \theta)$

analítico é dito de analiticidade do tipo (ω_0, θ_0) se, para cada $0 < \theta < \theta_0$ e $\omega > \omega_0$, existe $M = M(\omega, \theta)$ tal que

$$\|S(z)\| \leq M e^{\omega \operatorname{Re}(z)}, \quad z \in \Sigma(0, \theta_0). \quad (2.16)$$

Como uma simples consequência da definição de resolventes analíticos, obtemos estimativas sobre as derivadas de $S(t)$ por meio da fórmula de integral de Cauchy.

Proposição 2.6. *Seja $S(t)$ um resolvente para 2.15 de analiticidade do tipo (ω_0, θ_0) . Então, para cada $\omega > \omega_0$ e $0 < \theta < \theta_0$, existe $M = M(\omega, \theta) \leq 0$ tal que*

$$\|S^{(n)}(t)\| \leq M n! \frac{e^{\omega(1+\sin \theta)}}{(t \sin \theta)^n}, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. [43] Dados $\omega > \omega_0$ e $0 < \theta < \theta_0$ fixos e escolhemos $M = M(\omega, \theta)$ de acordo com Definição 2.5, escolhemos também $0 < \theta' < \theta$ arbitrário. Dado $t > 0$, sejam $r = t \sin \theta'$ e $\gamma : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho dado por

$$\gamma(s) = t + r e^{is} = t(1 + \sin \theta') e^{is}.$$

em que $r = t \sin \theta' < t \sin \theta$ e que $t \sin \theta$ é a distância entre o ponto t e o conjunto complementar de $\Sigma(0, \theta)$ em $\mathbb{C}$ (ver Figura 2.2). Assim, a imagem de $\gamma((-\pi, \pi])$ está inteiramente contido em $\Sigma(0, \theta)$. Da fórmula da integral de Cauchy temos

$$S^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} S(z)(z - t)^{-(n+1)} dz, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|S^{(n)}(t)\| &\leq \frac{n! M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\omega(t+r \cos s)} r^{-n} ds \\ &\leq n! M e^{\omega(t+r)} r^{-n} \end{aligned}$$

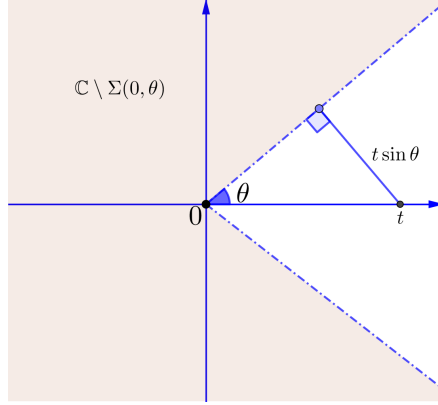


Figura 2.2: Distância entre o ponto t e o conjunto $\mathbb{C} \setminus \Sigma(0, \theta)$

para $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. Fazendo a substituição temos

$$\|S^{(n)}(t)\| \leq n! M e^{\omega t(1+\sin \theta')}(t \sin \theta')^{-n},$$

fazendo $\theta' \rightarrow \theta$, o resultado segue. $\square$

Lema 2.1. *Seja $g : \Sigma(0, \theta_0) \rightarrow X$ uma função holomorfa. Suponha que g é limitada em cada subsetor $\Sigma(0, \theta)$, com $0 < \theta < \theta_0$. Em particular, $\hat{g}(\lambda)$ existe para $\Re(\lambda) > 0$. Então $\hat{g}(\lambda)$ admite extensão holomorfa $G(\lambda)$ ao setor $\Sigma(0, \theta_0 + \pi/2)$ e $\lambda G(\lambda)$ é limitada em cada subsetor $\Sigma(0, \theta + \pi/2)$, com $0 < \theta < \theta_0$.*

Demonstração. Ver [43], Capítulo 2, Lema 2.4.2. $\square$

A seguir, caracterizamos os resolventes analíticos do tipo (ω_0, θ_0) em termos do espectro de A e da transformada de Laplace de $a(t)$. Assumiremos que $a(t)$ cresce exponencialmente. Primeiramente, vamos assumir que $S(t)$ existe para derivarmos as condições necessárias. Consideramos então um resolvente analítico $S(t)$ do tipo (ω_0, θ_0) para 2.15.

- (i) Definindo $H(\lambda) = \hat{S}(\lambda)$, $\Re(\lambda) > \omega_0$. Como $S(z)$ é holomorfo em $\Sigma(0, \theta_0)$, $H(\lambda)$ admite extensão analítica para o setor $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$, para cada $\omega > \omega_0$, $\theta < \theta_0$ existe uma constante $C(\omega, \theta)$ tal que a estimativa

$$\|H(\lambda)\| \leq \frac{C(\omega, \theta)}{|\lambda - \omega|},$$

para $\lambda \in \Sigma(\omega, \theta_0 + \pi/2)$ é válida.

- (ii) Em seguida, mostramos que a função holomorfa $a(t)$ admite extensão meromorfa para o mesmo setor $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$. De fato, do Teorema 2.2 já sabemos

$$H(\lambda) = \frac{(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}}{\lambda}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1 \quad (2.17)$$

em que $\omega_1 > \omega_0$ é escolhido grande o suficiente de modo que

$$\int_0^\infty |a(t)|e^{-\omega_1 t} dt < \infty,$$

isto é, $\hat{a}(\lambda)$ existe para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$. Seja $x \in D(A)$ e $x^* \in X^*$ seja tal que

$$\varphi(\lambda) = \lambda \langle H(\lambda)x, x^* \rangle.$$

Temos que x, x^* existe, caso contrário $\lambda H(\lambda) = I$ isso implica que $\hat{a}(\lambda) = 0$ ou $A = 0$, contradição, pois nossas hipóteses são $a(t) \neq 0$ e A ilimitado.

Como $\varphi(\lambda)$ é holomorfa em $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$, sua derivada $\varphi'(\lambda)$ também é. Para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \hat{a}'(\lambda) \langle (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-2} Ax, x^* \rangle \\ &= \hat{a}'(\lambda) \lambda^2 \langle H(\lambda)^2 Ax, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma(\lambda) = \lambda^2 \langle H(\lambda)^2 Ax, x^* \rangle$, temos que σ é holomorfa em $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$ e $\sigma(\lambda) \neq 0$, desde que, caso contrario

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = \langle \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda H(\lambda)x, x^* \rangle,$$

que daria $\varphi(\lambda) = \langle x, x^* \rangle$, pelo Corolário 1.6, Capítulo 1, [40], em contradição com a escolha de x e x^* . Isso nos mostra que $\hat{a}'(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\sigma(\lambda)}$ é meromorficamente extensível neste setor. Temos também que

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \hat{a}'(\lambda) \langle A(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-2} x, x^* \rangle \\ &= \hat{a}'(\lambda) \lambda^2 \langle H(\lambda)^2 Ax, x^* \rangle \\ &= \hat{a}'(\lambda) \mu(\lambda), \end{aligned}$$

em que $\mu(\lambda) = \langle \lambda^2 H(\lambda)^2 x - \lambda H(\lambda)x, x^* \rangle$, temos que μ é holomorfa em $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$, isso implica

$$\hat{a}(\lambda) = \frac{\mu(\lambda)}{\sigma(\lambda)},$$

isto é, $\hat{a}(\lambda)$ admite extensão meromórfica para $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$.

(iii) A Equação 2.17, agora pode ser estendida a $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$, da seguinte forma:

Seja

$$\Omega = \{\lambda \in \Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2); \lambda \neq 0, \hat{a}(\lambda) \neq 0, \infty\},$$

ou seja, Ω é o conjunto dos pontos no setor que não são polos nem raízes de $\hat{a}$. Para $x \in D(A)$ temos

$$\lambda H(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)x = x, \quad \forall \lambda \in \Omega, \quad (2.18)$$

para $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega_1$, isto é, $I - \hat{a}(\lambda)$ é injetiva para todo $\lambda \in \Omega$. Por outro lado, tomando $\beta \in \rho(A)$ fixo, para $\mathcal{R}e(\lambda) > \omega_1$, temos que $H(\lambda)$ comuta com A , ou seja

$$(\beta - A)^{-1}H(\lambda) = H(\lambda)(\beta - A)^{-1}.$$

Por unicidade de continuação analítica, temos que essa relação vale para todo $\lambda \in \Omega$, portanto, $H(\lambda)D(A) \subset D(A)$ para todo $\lambda \in \Omega$, assim $AH(\lambda)x$ é analítico em Ω . Mas isso implica também na identidade

$$\lambda(I - \hat{a}(\lambda)A)H(\lambda)x = x, \quad \lambda \in \Omega,$$

para todo os $x \in D(A)$, uma vez que isso é válido para $\mathcal{R}e\lambda > \omega_1$. Portanto, o operador $(I - \hat{a}(\lambda)A)$ tem imagem densa em X , e assim ele é invertível para todo $\lambda \in \Omega$.

(iv) Seja $\lambda_0 \in \Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$ um ponto isolado, tal que $\hat{a}(\lambda)$, então podemos escolher um pequeno círculo Γ centrado em λ_0 contido em $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$, dentro do qual o único zero de $\hat{a}(\lambda)$ seja λ_0 . Aplicamos a fórmula integral de Cauchy temos

$$A = A\lambda_0 H(\lambda_0) = A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda H(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\lambda H(\lambda) - I}{(\lambda - \lambda_0)\hat{a}(\lambda)} d\lambda,$$

isto é, A é limitado, em contradição com as hipóteses permanentes sobre A . Assim $\hat{a}(\lambda)$ não tem zeros no setor $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$.

Teorema 2.3. *(Teorema de geração de Resolventes Analíticos) Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear ilimitado, fechado e densamente definido, e seja $a \in L^1_{loc}([0, \infty))$ satisfazendo*

$$\int_0^\infty |a(t)|e^{-\omega_0 t} dt < \infty$$

para algum $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Então 2.15 admite um resolvente analítico $S(t)$ de analiticidade do tipo (ω_0, θ_0) se, e somente se, as seguintes condições valem

A1 $\hat{a}(\lambda)$ admite extensão meromorfa a $\Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$;

A2 $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo $\lambda \in \Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$;

A3 Se $\omega_0 < 0$, então $\lambda = 0$ é um polo de $\hat{a}(\lambda)$;

A4 Para cada $\omega > \omega_0$ e $0 < \theta < \theta_0$ existe uma constante $C = C(\omega, \theta)$ tal que o operador

$$H(\lambda) = (1/\hat{a}(\lambda) - A)^{-1}/(\lambda\hat{a}(\lambda))$$

satisfaz a estimativa

$$\|H(\lambda)\| \leq \frac{C}{|\lambda - \omega|}$$

para cada $\lambda \in \Sigma(\omega_0, \theta_0 + \pi/2)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [40], Capítulo 2, Teorema 2.1 e mais detalhada em [43], Capítulo 2, Teorema 2.5.1. $\square$

A seguir, trazemos dois exemplos para kernel $a(t)$ e operador A satisfazendo **(A1)- (A3)**, que faz com que 2.15 admita um resolvente analítico.

Exemplo 2.1. Considerando o kernel

$$a(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad t > 0$$

onde $\beta \in (0, 2)$ e Γ denota a função gama. Vamos examinar para quais operadores 2.15 admite um resolvente analítico limitado $S(t)$. Para tal, aplicamos a transformada de Laplace em $a(t)$, obtemos

$$\hat{a}(\lambda) = \lambda^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

consequentemente $\hat{a}(\lambda)$ admite a extensão analítica ao plano complexo cortado ao longo do eixo real negativo; assim (A1) vale para o setor $\Sigma(0, \pi)$. A função $1/\hat{a}(\lambda)$ mapeia o setor $\Sigma(0, \theta_0 + \pi/2)$ para o setor $\Sigma(0, \theta_1)$, onde $\theta_1 = \beta(\theta_0 + \pi/2)$ portanto (A2) com $\omega_0 = 0$ é equivalente a $\Sigma(0, \theta_1) \subset \rho(A)$, para algum $\theta_1 > \beta\pi/2$. Finalmente, $S(t)$ será limitado em algum setor $\Sigma(0, \theta)$ se (A3) se mantiver uniformemente em $\omega > 0$, o que equivale a

$$|\alpha(\alpha - A)^{-1}| \leq M, \quad \forall \alpha \in \Sigma(0, \beta\pi/2).$$

Assim, o par $\left(\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, A\right)$ gera um resolvente analítico limitado se, e somente se

$$\Sigma(0, \beta\pi/2) \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad |\alpha(\alpha - A)^{-1}| \leq M,$$

para todo $\alpha \in \Sigma(0, \beta\pi/2)$.

2.5 Viscoelasticidade Linear

A **viscoelasticidade** é uma propriedade mecânica de alguns materiais que apresentam simultaneamente elasticidade e viscosidade, como por exemplo, os materiais feitos de polímeros. Tais materiais, apresentam propriedades que em determinados aspectos se assemelham a um sólido elástico que obedece à lei de Hooke para a elasticidade; e em outros, à lei de Newton para a viscosidade. A mecânica contínua é uma fonte rica de equações de Volterra com valor vetorial.

A seguir, apresentamos uma aplicabilidade da teoria de equações de Volterra, visto na seção 2.1, que trata basicamente em modelar a viscoelasticidade e outras propriedades mecânicas. Aqui as letras caligráficas $\mathcal{A}, \mathcal{E}, \dots$ são tensores. Para esta parte do trabalho fizemos uso do livro do Prüss [40], Capítulo 5, seções 5.1 a 5.5. Mais detalhes, o leitor pode consultar essa fonte, como também o livro do Mainard, [31].

2.5.1 Equações modelo

Considere um corpo tridimensional que é representado por um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 . Pontos em Ω serão denotados por $x, y, \dots$. Associado a este corpo existe uma função estritamente positiva $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ chamada *densidade de massa*. As forças atuantes deformarão o corpo, fazendo com que o ponto material x seja deslocado para uma nova direção $x + u(t, x)$ no tempo t . O campo vetorial $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamado de campo de *deslocamento*. A velocidade do ponto material $x \in \Omega$ no tempo t é então dado por $v(t, x) = \dot{u}(t, x)$, onde o ponto indica derivada parcial em relação a t .

A deformação do corpo provoca uma *tensão* que é a medida normalizada da deformação do material, a qual denotaremos por $\mathcal{E}(t, x)$, que dependerá linearmente do gradiente $\nabla u(t, x)$ ², desde que a deformação seja pequena o suficiente. A *tensão* será definida por

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{2}(\nabla u(t, x) + (\nabla u(t, x))^T), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.19)$$

isto é, $\mathcal{E}(t, x)$ é a parte simétrica do gradiente de deslocamento ∇u , uma vez que podemos escrever

$$\nabla u(t, x) = \mathcal{E}(t, x) + \mathcal{T}(t, x),$$

²A matriz 3×3 de derivadas parciais de u que pode ser denotada $Du(t, x)$ e é chamada o gradiente de deformação, aqui denotaremos pela notação usual de gradiente ∇u .

em que $\mathcal{E}$ é a parte simétrica e $\mathcal{T}$ é a parte antissimétrica.

Uma dada história-tensão do corpo causa *estresse*³ em um caminho a ser especificado. O *estresse* é descrito pelo tensor simétrico $\mathcal{S}(t, x)$, ambos, $\mathcal{E}(t, x)$ e $\mathcal{S}(t, x)$ são simétricos. Então o *equilíbrio de força* no corpo pode ser descrito pela seguinte equação

$$\rho_0(x)\ddot{u}(t, x) = \operatorname{div}\mathcal{S}(t, x) + \rho_0(x)g(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.20)$$

onde g representa forças externas agindo no corpo, como a gravidade ou forças eletromagnéticas. Nas componentes, a Equação 2.20 lê-se da forma

$$\rho_0(x)\ddot{u}_i(t, x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{S}_{ij}(t, x) + \rho_0(x)g_i(t, x), \quad i = 1, 2, 3$$

em que 2.20 deve ser complementada por condições de contorno, sendo estas deslocamento prescrito ou tensão normal prescrita (tração) na superfície $\partial\Omega$ do corpo. Considere $\partial\Omega := \Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_s$, sendo Γ_d e Γ_s fechados, $\overset{\circ}{\Gamma}_d = \Gamma_d$ e $\overset{\circ}{\Gamma}_s = \Gamma_s$ são tais que $\overset{\circ}{\Gamma}_d \cap \overset{\circ}{\Gamma}_s = \emptyset$, $n(x)$ denota a normal externa de Ω em $x \in \Gamma$. As condições de contorno podem então ser descritas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_d(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \overset{\circ}{\Gamma}_d, \\ \mathcal{S}(t, x)n(x) &= g_s(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \overset{\circ}{\Gamma}_s. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Consideramos que as funções $g(t, x)$, $u_d(t, x)$, $g_s(t, x)$ aqui consideradas são conhecidas. Em muitos problemas práticos, entretanto, o campo de força $g(t, x)$ e a tração $g_s(t, x)$ são realmente dependentes de u ou de suas derivadas $\dot{u}$ e ∇u . Por exemplo, se o corpo está sujeito a um campo de força externa h que depende somente da posição espacial, então $f(t, x) = h(x + u(t, x))$; outros exemplos são leis de feedback de fronteira como $g_s(t, x) = -\gamma v(t, x)$.

Suponha que o corpo esteja em repouso até o tempo $t = 0$, mas seja então exposto às forças $g(t, x)$ e $g_s(t, x)$ e a uma mudança súbita de velocidade $\dot{u}(0, x) = u_1(x)$. Tomando o produto interno de 2.20 com $\dot{u}$ e integrando sobre Ω , obtemos por um lado que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \langle \rho_0(x)\ddot{u}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt &= \int_{\Omega} \rho_0(x) \int_0^t \langle \ddot{u}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dt dx \\ &= \int_{\Omega} \rho_0(x) \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t, x)|^2 \right) dt dx. \end{aligned}$$

³O estresse é uma grandeza física que expressa as forças internas que as partículas vizinhas de um material contínuo exercem umas sobre as outras.

No cálculo acima, utilizamos o Teorema de Fubini e o fato que $|\dot{u}(t, x)|^2$ é diferenciável e possui como derivada $\frac{d}{dt}|\dot{u}(t, x)|^2 = 2\langle \ddot{u}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle$. Portanto, concluímos que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \langle \rho_0(x) \ddot{u}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0(x) (|\dot{u}(t, x)|^2 - |u_1(x)|^2) dx. \quad (2.22)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \langle \rho_0(x) \ddot{u}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt &= \int_0^t \int_{\Omega} \langle \operatorname{div} \mathcal{S}(t, x) + \rho_0(x) g(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \langle \operatorname{div} \mathcal{S}(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \langle \rho_0(x) g(t, x), \dot{u}(t, x) \rangle dx dt \end{aligned}$$

usando integração por partes, temos a igualdade de energia

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\dot{u}(t, x)|^2 \rho_0(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{S}(\tau, x) : \dot{\mathcal{E}}(\tau, x) dx d\tau \\ &= \int_{\Omega} |u_1(x)|^2 \rho_0(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} g(\tau, x) \cdot \dot{u}(\tau, x) \rho_0(x) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} g_s(\tau, y) \cdot \dot{u}(\tau, y) \rho_0(x) dy d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como a energia cinética total do corpo no tempo t não pode exceder seu valor inicial mais o trabalho realizado pelo corpo atuante e forças de superfície, a desigualdade

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{S}(\tau, x) : \dot{\mathcal{E}}(\tau, x) dx d\tau \geq 0, \quad (2.24)$$

devemos considerar todos os valores de $t > 0$ para qualquer escolha de valores e forças iniciais.

Um material é chamado **incompressível** se não houver mudanças de volume do corpo Ω durante uma deformação, ou seja, se

$$\det(I + \nabla u(t, x)) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.25)$$

é satisfeito; caso contrário, o material é chamado **compressível**. A Equação 2.25 é uma restrição não linear para o sistema formado pelas Equações 2.20 e 2.21; para a teoria linear a Equação 2.25 pode ser simplificada para

$$\operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad (2.26)$$

De fato, se o material é linear, então $u(t, x)$ em (2.25) pode ser substituído por μu , onde $\mu > 0$; tomando a derivada em (2.25) com respeito a μ em $\mu = 0$, (2.26) segue. Como consequência das restrições (2.25) ou (2.26), para materiais incompressíveis, o tensor de estresse $\mathcal{S}(t, x)$ não pode ser completamente determinado por u e suas derivadas, então conveniente decompor $\mathcal{S}(t, x)$ como

$$\mathcal{S}(t, x) = -\pi(t, x)I + \mathcal{S}_e(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.27)$$

onde a função escalar π é chamada de *pressão*, e $\mathcal{S}_e(t, x)$ é o estresse extra, que satisfaz $\operatorname{tr} \mathcal{S}_e(t, x) = 0$. Assim, temos a relação

$$-\pi(t, x) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathcal{S}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad (2.28)$$

Enquanto que para materiais compressíveis (2.28) é apenas uma definição, para o caso incompressível $\pi(t, x)$ é uma função desconhecida, que tem que ser determinada por (2.20), (2.21) e (2.26). Para uma introdução orientada matematicamente aos conceitos básicos de mecânica do contínuo, referimos, por exemplo, o livro de Gurtin [24].

Ainda temos que descrever como o estresse $\mathcal{S}(t, x)$ depende da tensão $\mathcal{E}$. Isso é feito por uma lei constitutiva ou uma relação estresse-tensão. Tal equação completa o sistema na medida em que relaciona o estresse $\mathcal{S}(t, x)$ com o desconhecido u e suas derivadas. Se o material for puramente elástico, então o estresse $\mathcal{S}(t, x)$ dependerá (linearmente) apenas da tensão $\mathcal{E}(t, x)$. No entanto, o estresse também pode depender da história da tensão e sua derivada de tempo. Neste caso, o material é chamado viscoelástico. A lei constitutiva geral para materiais compressíveis é dada por

$$\mathcal{S}(t, x) = \int_0^\infty d\mathcal{A}(\tau, x) \dot{\mathcal{E}}(t - \tau, x) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad (2.29)$$

onde $\mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\operatorname{Sym}\{3\})$ é localmente de variação limitada em relação a $t \geq 0$. O símbolo $\operatorname{Sym}\{N\}$ denota o espaço de matrizes simétricas reais N -dimensionais. Como consequência disso, as relações de simetria

$$\mathcal{A}_{ijkl}(t, x) = \mathcal{A}_{jikl}(t, x) = \mathcal{A}_{ijlk}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \Omega \quad (2.30)$$

tem que ser satisfeito para todos os $i, j, k, l \in 1, 2, 3$. A função $\mathcal{A}$ é chamada de função de relaxamento do material. Suas funções componentes $\mathcal{A}_{ijkl}(t, x)$, são chamadas de módulos de relaxamento de estresse do material e devem ser determinados em experimentos.

Alternativamente, (2.29) pode ser escrito na forma

$$\mathcal{E}(t, x) = \int_0^\infty d\mathcal{K}(\tau, x) \mathcal{S}(t - \tau, x) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad (2.31)$$

onde $\mathcal{K} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\text{Sym}\{3\})$ é localmente de variação limitada em $t \in \mathbb{R}_+$. Os componentes de $\mathcal{K}$ são chamados de módulos de fluência do material e também aproveitam as simetrias (2.30). Relações (2.29), (2.31) produzem a identidade

$$(\mathcal{A} * d\mathcal{K})(t, x) = (\mathcal{K} * d\mathcal{A})(t, x) = t\mathcal{I} \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{I}$ denota o tensor identidade.

Vamos considerar alguns casos especiais que foram estudados extensivamente na mecânica clássica contínua.

(i) *Sólidos elásticos ideais*

A elasticidade clássica postula as relações tensão-deformação

$$\mathcal{S}(t, x) = \mathcal{A}^\infty(x) \mathcal{E}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$$

com $\mathcal{A}^\infty \in L^\infty(\Omega; B(\text{Sym}\{3\}))$ definida positiva, uniformemente em Ω . Isto corresponde ao tensor de relaxamento de tensão

$$\mathcal{A}(t, x) = t\mathcal{A}^\infty(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

e para um tensor de fluência da forma

$$\mathcal{K}(t, x) = \mathcal{K}^0(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

onde

$$\mathcal{A}^\infty(x) \mathcal{K}^0(x) = \mathcal{K}^0(x) \mathcal{A}^\infty(x) = \mathcal{I}$$

(ii) *Fluidos viscosos ideais*

Para tais fluidos, as relações tensão-deformação são

$$\mathcal{S}(t, x) = \mathcal{A}^0(x) \dot{\mathcal{E}}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$$

com $\mathcal{A}^0 \in L^\infty(\Omega; \mathcal{B}(\text{Sym}\{3\}))$, definida posita, uniformemente em Ω . Obtemos que

$$\mathcal{A}(t, x) = \mathcal{A}^0(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

e

$$\mathcal{K}(t, x) = t\mathcal{K}^\infty(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

onde

$$\mathcal{A}^0(x)\mathcal{K}^\infty(x) = \mathcal{K}^\infty(x)\mathcal{A}^0(x) = \mathcal{I}, \quad x \in \Omega.$$

(iii) *Sólidos de Kelvin-Voigt*

Tais materiais são regidos por leis constitutivas da forma

$$\mathcal{S}(t, x) = \mathcal{A}^0(x)\dot{\mathcal{E}}(t, x) + \mathcal{A}^\infty(x)\mathcal{E}(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$$

com $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^\infty \in L^\infty(\Omega; \mathcal{B}(\text{Sym}\{3\}))$, definida positiva, uniformemente em Ω . Neste caso, temos

$$\mathcal{A}(t, x) = \mathcal{A}^0(x) + t\mathcal{A}^\infty(x) \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

(iv) *Fluidos de Maxwell*

Esta classe de materiais é caracterizada pela relação tensão-deformação

$$\mathcal{S}(t, x) = \int_0^\infty \mu e^{-\mu s} \mathcal{A}^1(x) \dot{\mathcal{E}}(t - s, x) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$$

com $\mathcal{A}^1 \in L^\infty(\Omega; \mathcal{B}(\text{Sym}\{3\}))$ positiva definida, uniformemente em Ω e $\mu > 0$. Neste caso, temos

$$\mathcal{A}(t, x) = (1 - e^{-\mu t})\mathcal{A}^1(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Um material é chamado homogêneo se $\rho_0, \mathcal{A}, \mathcal{K}$ não dependem dos pontos materiais $x \in \Omega$. É chamado isotrópico se a lei constitutiva é invariante sob o grupo de rotações. Pode-se demonstrar que o tensor isotrópico geral de relaxação é dado por

$$\mathcal{A}_{ijkl}(t, x) = \frac{1}{3} (3b(t, x) - 2a(t, x)) \delta_{ij} \delta_{kl} + a(t, x) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

onde δ denota o símbolo de Kronecker, similarmente

$$\mathcal{K}_{ijkl}(t, x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} l(t, x) - \frac{1}{2} k(t, x) \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4} k(t, x) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Isso resulta nas leis constitutivas

$$\mathcal{S}(t, x) = 2 \int_0^\infty da(\tau, x) \dot{\mathcal{E}}(t - \tau, x) + \frac{1}{3} \mathcal{I} \int_0^\infty (3db(\tau, x) - 2da(\tau, x)) \text{tr} \dot{\mathcal{E}}(t - \tau, x) \quad (2.33)$$

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk(\tau, x) \mathcal{S}(t - \tau, x) + \frac{1}{3} \mathcal{I} \int_0^\infty \left(\frac{1}{3} dl(\tau, x) - dk(\tau, x) \right) tr \mathcal{S}(t - \tau, x), \quad (2.34)$$

em que $\mathcal{I}$ é o tensor identidade. Os núcleos b e l descrevem o comportamento do material sobre compressão, enquanto que a e k determinam sua resposta ao cisalhamento, portanto, db é chamado de módulo de compressão e da é chamado de módulo de cisalhamento. Um material é chamado sícrono se existir a igualdade $b(t, x) = \beta a(t, x)$, para alguma constante $\beta > 0$ e é chamado de homogêneo se $\rho_0, \mathcal{A}, \mathcal{K}$ não dependem de $x \in \Omega$.

Se o material for incompressível, isotrópico e homogêneo, com $\rho_0(x) = 1$, então

$$\begin{cases} \ddot{u}(t, x) = \int_0^\infty da(\tau) \Delta \dot{u}(t - \tau, x) d\tau - \nabla p(t, x) + h(t, x); \\ \nabla u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.35)$$

em que p é a pressão hidrostática. Estas equações são complementadas por condições de fronteira.

Materiais lineares isotrópicos e homogêneos são descritos por meio de duas funções materiais, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db . Se o material é além disso incompressível, apenas o módulo de cisalhamento é necessário. Vamos mencionar brevemente alguns modelos padrão bem conhecidos

(i) Sólido de Hookean

$$a(t) = \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu}, \quad t > 0.$$

(ii) Fluido Newtoniano

$$a(t) = \nu, \quad k(t) = \frac{t}{\nu}, \quad t > 0.$$

(iii) Sólido de Kelvin-Voigt

$$a(t) = \nu + \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad t > 0.$$

(iv) Fluido de Maxwell

$$a(t) = \nu (1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \quad t > 0.$$

(v) Sólido Poynting-Thompson

$$a(t) = \mu_0 t + \nu (1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \mu_0^{-1} \left[1 - \mu (\mu_0 + \mu)^{-1} e^{-\frac{\mu \mu_0 t}{\nu (\mu + \mu_0)}} \right], \quad t > 0.$$

(vi) Material tipo-potência

$$a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad k(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad t > 0,$$

em que $\alpha \in (0, 1)$.

2.5.2 Fluidos isotrópicos incompressíveis

Se considerarmos um fluido viscoelástico incompressível isotrópico e homogêneo que ocupa uma região Ω , o campo velocidade $v(t, x)$ do fluido é governado por 2.35, daí o problema de condição inicial correspondente torna-se

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(t, x) = \int_0^t da(\tau) \Delta v(t - \tau, x) d\tau - \nabla p(t, x) + h(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla v(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.36)$$

utilizando as condições de contorno antiderrapantes, nesse problema $p(t, x)$ denota a pressão hidrostática no fluido e o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$, e 2.36 torna-se então o conhecido sistema linear de Navier-Stokes.

Estamos interessados em discutir a boa-posição de 2.36 em $L^q(\Omega)^3$, com $1 < q < \infty$, no caso $q = 2$, o mesmo cálculo foi feito em [40] e na monografia [43]. Encontramos também esse mesmo problema na tese [44]. Para tal utilizaremos teoria de operadores e espaços intermediários. Definimos inicialmente os espaços

$$E^q(\Omega) = \{\nabla p; p \in W_{loc}^{1,q}(\Omega), \nabla p \in L^q(\Omega)^3\},$$

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \nabla \circ u = 0\}, \quad \text{e} \quad L_\sigma^q(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)},$$

onde o fecho é tomado em $L^q(\Omega)^3$. Sabe-se que, pela chamada decomposição de Helmholtz do espaço $L^q(\Omega)^3$, podemos escrever para $q = 2$

$$L^2(\Omega)^3 = E^2(\Omega) \oplus L_\sigma^2(\Omega),$$

e seja P_2 a projeção de $L^2(\Omega)^3$ sobre $L_\sigma^2(\Omega)$ ao longo de $E^2(\Omega)$ associada à decomposição de Helmholtz, temos que P_2 é limitado e ortogonal. O operador de Stokes A_2 é definido em

$X = L^2_\sigma(\Omega)$ por

$$(A_2u)(x) = (P_2\Delta u)(x), \quad x \in \Omega, \quad u \in D(A),$$

com domínio

$$D(A) = \{u \in W^{2,2}(\Omega)^3 \cap X; u(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Aplicando formalmente P_2 em 2.36, temos

$$(P_2v_t)(t, x) = \int_0^t da(t - \tau)(P_2\Delta u)(\tau, x)d\tau - (P_2\nabla p)(t, x) + (P_2g)(t, x).$$

Assumindo que $v_t \in L^2_\sigma(\Omega)$ e $\nabla p \in E^2(\Omega)$ para cada $t > 0$. Então, como $(P_2\nabla pu)(\tau, x) = 0$ pela definição de P_2 , temos que

$$v_t(t) = \int_0^t da(t - \tau)A_2v(\tau)d\tau + (P_2g)(t, x), \quad t > 0,$$

assim integrando formalmente de 0 a t obtemos

$$v(t, x) - v_0(x) = \int_0^t a(t - \tau)A_2v(\tau, x)ds + \int_0^t (P_2g)(\tau, x)d\tau.$$

Fazendo $f(t, x) = v_0(x) + \int_0^t (P_2g)(\tau, x)d\tau$, temos

$$v(t, x) = f(t, x) + \int_0^t a(t - \tau)A_2v(\tau, x)ds, \quad t \geq 0. \quad (2.37)$$

Por [40], sabe-se que $A_2 : D(A_2) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado e densamente definido em $X = L^2_\sigma(\Omega)$ e que $\sigma(A_2) \subset (-\infty, 0)$. Além disso, para cada $0 \leq \theta < \pi/2$, existe uma constante $M(\theta, 2) \geq 1$ tal que

$$|(z - A_2)^{-1}|_{X_2} \leq \frac{M(\theta, 2)}{|z|}, \quad z \in \Sigma(0, \theta + \pi/2).$$

Seja $\alpha \in (0, 1)$ e substituimos na Equação 2.37, o núcleo

$$a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad t > 0.$$

Assim com

$$\theta_0 = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \pi/2,$$

2.37 admite um resolvente analítico $S(t)$ do tipo $(0, \theta_0)$. Pelo Exemplo 2.1, dado $\beta > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$\|A_2S(t)\| \leq Me^{\beta t}(1 + t^{-(\alpha+1)}), \quad t > 0.$$

Dessas observações, temos o seguinte resultado, a cerca da boa-posição

Teorema 2.4. [43] *Sejam*

$$a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad t > 0,$$

com $\alpha \in (0, 1)$ e sejam $A_2 : D(A_2) \subset X \rightarrow X$ o operador de Stokes $P_2\Delta$ sobre $X_2 = L^2_\sigma(\Omega)$ e, para cada $t > 0$, $g(t, \cdot) \in L^2(\Omega)^3$.

1. Se a aplicação $t \mapsto (P_2g)(t, \cdot)$ pertence a $L^1_{loc}([0, \infty), X_2)$ e $v(0, \cdot) = v_0 \in X_2$, então a equação

$$v(t, x) = f(t, x) + \int_0^t a(t - \tau) A_2 v(\tau, x) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.38)$$

onde $f(t, x) = v_0(x) + \int_0^t (P_2g)(\tau, x) d\tau$, admite uma única solução branda $v : [0, \infty) \rightarrow X_2$ que é dada por

$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t - \tau)(P_2g)(\tau) d\tau.$$

2. Se $t \mapsto (P_2g)(t, \cdot)$ pertence a $L^1_{loc}([0, \infty); X_{A_2})$ e $v(0, \cdot) = v_0$ em $D(A_2)$, então 2.38 admite uma única solução forte $v : [0, \infty) \rightarrow X$ que é, dada novamente por

$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t - \tau)(P_2g)(\tau) d\tau.$$

Demonstração. Se $t \mapsto (P_2g)(t, \cdot)$ pertence a $L^1_{loc}([0, \infty), X_2)$ e $v(0, \cdot) = v_0 \in X_2$, então $f \in W^{1,1}([0, \infty); X_A)$ e pela Proposição 2.4, $v(t)$ dada por 2.38 é a solução branda da Equação 2.37. Analogamente, segue da Proposição 2.4 o segundo item. $\square$

2.5.3 Materiais síncronos isotrópicos

A equação para materiais isotrópicos homogêneos em geral é dada por

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t, x) &= \int_0^\infty da(\tau) \Delta \dot{u}(t - \tau, x) \\ &+ \int_0^\infty (db(\tau) + \frac{1}{3}da(\tau)) \nabla \nabla \cdot \dot{u}(t - \tau, x) + g(t, x), \end{aligned} \quad (2.39)$$

tal material, ocupa uma região Ω do $\mathbb{R}^3$. Esta equação envolve dois núcleos, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db . A priori, não há razões físicas pelas quais esses kernels devem estar relacionados, e assim 2.39 não pode ser transformada em uma equação da forma 2.1, em alguns espaços de funções, exceto para configurações muito especiais. No

entanto, se o material for síncrono, isto é, existe $\beta > 0$ tal que $b(t) = \beta a(t)$, para todo $t > 0$, então 2.39 pode ser escrita da forma 2.1.

De fato, seja Ω um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 . Definindo em $X = L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ o operador A por meio de

$$(Au)(x) = \Delta u(x) + (\beta + 1/3)\nabla\nabla \cdot u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.40)$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^3); u|_{\Gamma_d} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n} + (\nabla u)^T \cdot n + n(\beta - 2/3)\nabla \cdot u \right) |_{\Gamma_s} = 0 \right\}.$$

Sabemos que o operador de elasticidade A é auto-adjunto e semi-definido negativo em X . Além disso, $0 \in \rho(A)$ se, e somente se $\Gamma_d \neq \emptyset$, $Ker(A) \oplus CD(A) = X$ se $\Gamma_d = \emptyset$, em que $CD(A)$ é o contradomínio de A . Assim, podemos escrever o problema de valor inicial para 2.39 como

$$v(t) = \int_0^t a(t - \tau)Av(\tau) + f(t), \quad t > 0,$$

no espaço $CD(A) \subset X$.

Para obter a boa-posição da viscoelasticidade isotrópica linear em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ para o caso de materiais síncronos, aplicamos o Corolário 1.2, Seção 1.3 [40], ao qual garante a boa-posição da Equação 2.1, se A for semi-definido negativo e auto-adjunto num espaço de Hilbert X , e $a \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ é tal que a medida da é do tipo positiva.

CAPÍTULO 3

SOBRE UMA EQUAÇÃO DE VOLTERRA DE REAÇÃO-DIFUSÃO

Neste capítulo buscamos estudar a solução para um problema de evolução, dado por uma equação não linear de reação-difusão. Utilizaremos ao longo deste capítulo estratégias para o estudo desta equação, nosso principal objetivo é descobrir como estudá-lo, o que não é tarefa fácil. E, de fato, a própria questão do que significa “resolver” um determinada EDP pode ser sutil, dependendo em grande parte da estrutura específica do problema em questão.

Num primeiro momento, estudaremos a boa-posição do problema. A noção informal de um problema bem posicionado capta muitas das características desejáveis do que significa resolver uma EDP. Dizemos que um dado problema para uma equação diferencial parcial é bem colocado se o problema de fato tem uma solução, essa solução é única e se tal solução depende continuamente dos dados fornecidos no problema.

Antes de definir precisamente o sentido ao qual buscaremos as soluções para o problema, dado pela equação integro diferencial

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \partial_t \int_0^t g_\alpha(s) \Delta u(t-s, x) ds + |u(t, x)|^{\rho-1} u(t, x), & \text{em } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N; \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.1)$$

precisaremos fazer algumas considerações. Temos que $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, em que $1 < p < \infty$, $\rho > 1$ e $p = \frac{\alpha N}{2}(\rho - 1)$. Para $x \in \mathbb{R}^N$, $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota o operador Laplaciano de u .

Definimos a função $g_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como segue.

Definição 3.1. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. Considere a função g_α dada por*

$$g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

para $t > 0$, em que $\Gamma(\alpha)$ é a função gama.

Observação 3.1. *g_α é conhecida como o núcleo da Equação 3.1.*

Uma técnica básica para encontrar as soluções para o problema de reação-difusão 3.1, engloba as transformadas, nesse caso a transformada de Laplace. Que consiste basicamente em transformar a equação diferencial, em uma outra equação de modo que, se torne mais simples de resolver do que a anterior. Logo após, aplica-se a transformada inversa, para inverter todo processo e assim encontrar a solução da equação inicial.

Integrando formalmente a primeira equação do sistema 3.1, temos que o problema pode ser visto como

$$u(t, x) = u_0(x) + \int_0^t g_\alpha(t-s) \Delta u(s, x) ds + \int_0^t |u(s, x)|^{p-1} u(s, x) ds. \quad (3.2)$$

Sabe-se do Exemplo 1.2 que o operador laplaciano Δ é setorial, isto é, dado $\nu_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|R(\lambda, \Delta)| \leq \frac{M}{|\lambda|},$$

para todo $\lambda \in S_{\nu_0}$, em que $R(\lambda, \Delta) = (\lambda - \Delta)^{-1}$ e $S_{\nu_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \nu_0\}$.

A observação à seguir será muito útil quando aplicarmos a Transformada de Laplace na Equação 3.2.

Observação 3.2. *Note que, se $\lambda \in H_a$ então $\lambda^\alpha \in \rho(\Delta)$, onde H_a é o caminho de Hankel*

$$\begin{aligned} H_a(r, \nu) &:= \{se^{i\nu} : r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is} : |s| \leq \nu\} \cup \{se^{-i\nu} : r \leq s < \infty\} \\ &= H_{a_1} + H_{a_2} - H_{a_3} \end{aligned}$$

onde $\nu \in (\frac{\pi}{2}, \nu_0)$.

Aplicando, formalmente, a Transformada de Laplace em 3.2 obtemos

$$\mathcal{L}[u(\lambda, x)](\lambda) = \mathcal{L}[u_0(x) + \int_0^t g_\alpha(\lambda) \Delta u(\lambda, x) + \int_0^t f(t, u(t)) dt](\lambda),$$

usando propriedades básicas da transformada de Laplace e o fato que $\int_0^t g_\alpha(t) \Delta u(t-s, x) ds = (g_\alpha * \Delta u)(t)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_0(x)](\lambda) &= \lambda^{-1} u_0(x), \\ \mathcal{L} \left[\int_0^t |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) dt \right] (\lambda) &= \lambda^{-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda), \\ \mathcal{L}[g_\alpha(x)](\lambda) &= \lambda^{-\alpha}, \end{aligned}$$

assim

$$\mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) = \lambda^{-1} u_0(x) + \lambda^{-\alpha} \Delta \mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) + \lambda^{-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda),$$

multiplicando a equação acima por λ^α

$$\lambda^\alpha \mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) = \lambda^\alpha \lambda^{-1} u_0(x) + \lambda^\alpha \lambda^{-\alpha} \Delta \mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) + \lambda^\alpha \lambda^{-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda),$$

isso implica em

$$(\lambda^\alpha - \Delta) \mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) = \lambda^{\alpha-1} u_0(x) + \lambda^{\alpha-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda),$$

assim

$$\mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) = \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} u_0(x) + \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda).$$

Aplicamos na ultima equação a inversa da transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}[u(t, x)](\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\infty-bi}^{\infty+bi} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} u_0(x) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\infty-bi}^{\infty+bi} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} \mathcal{L}[|u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)](\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

que por sua vez equivale a

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \left(\int_{H_\alpha} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} d\lambda \right) |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Definição 3.2. Definimos, para $t \geq 0$,

$$E_\alpha(\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - \Delta)^{-1} d\lambda,$$

para um caminho arbitrário de Hankel H_a , a função Mittag-Leffler associada ao operador Laplaciano.

Portanto, pela Definição 3.2 temos a seguinte formulação integral para a solução

$$u(t, x) = u_0(x)E_\alpha(\Delta t) + \int_0^t E_\alpha(\Delta t) |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) ds. \quad (3.4)$$

Assim, podemos concluir que toda solução clássica do sistema 3.1 satisfaz a equação integral 3.4. Usaremos essa formulação como noção de solução, as soluções da equação integral 3.4, as quais chamaremos de soluções branda do sistema.

Definição 3.3. Uma função contínua $u : (0, \infty) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a Equação 3.4 é chamada de **solução branda** do problema 3.1.

Note que a Equação 3.4, tem a forma abstrata dado por 2.1, fazendo $f(t) = u_0(x)E_\alpha(\Delta t)$. Além disso, o passo em que aplicamos a transformada de Laplace, pode ser justificado pelo fato de, $E_\alpha(\Delta t)$ ser um resolvente para a equação 3.1.

Observação 3.3. Observe que Δt não indica o Laplaciano de t , isso não faz sentido, este abuso de notação é para indicar que $E_\alpha(\Delta t)$ está associada ao Laplaciano e é dada em função de t . Ao longo deste trabalho usaremos esse abuso de notação, mas ele não representa um problema nas estimativas que faremos.

3.1 Estimativas para a família Mittag-Leffler

O objetivo desta seção é estudar o comportamento da família de equações Mittag-Leffler $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t \geq 0}$ dada na Definição 3.2 nos espaços L^q e L_ω^q . Para isso, estabelecemos uma relação entre a família Mittag-Leffler $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t \geq 0}$, $\alpha \in (0, 1)$ e o semigrupo $\{e^{\Delta t}\}_{t \geq 0}$. Vamos recordar de algumas definições e resultados. Para $\alpha \in (0, 1)$, consideramos a função Wright dada pela representação integral

$$\Psi_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \mu^{\alpha-1} e^{\mu-z\mu^\alpha} d\mu,$$

onde H_a é o contorno de Hankel. Notemos que, se tomarmos $\lambda = \frac{\mu}{t}$, com $t > 0$, na representação integral acima, obtemos

$$t^{-\alpha}\Psi_{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \lambda^{\alpha-1} e^{t\lambda - z t^{\alpha} \lambda^{\alpha}} d\lambda,$$

assim

$$t^{-\alpha}\Psi_{\alpha}(st^{-\alpha}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \lambda^{\alpha-1} e^{t\lambda - s\lambda^{\alpha}} d\lambda, \quad t > 0. \quad (3.5)$$

A função Ψ_{α} pode ser relacionada à função Mittag-Leffler E_{α} pela transformação Laplace. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Psi_{\alpha}(t)](z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda - t\lambda^{\alpha}} d\lambda dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\lambda} \lambda^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-t(z+\lambda^{\alpha})} dt d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\lambda} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^{\alpha} + z)^{-1} d\lambda = E_{\alpha}(-z), \end{aligned}$$

a última igualdade, segue da representação integral 1.43. Além desta propriedade, neste trabalho, estamos interessados nas propriedades contidas na Proposição 1.13 da função Wright.

Proposição 3.1. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. Então para toda distribuição φ , vale*

$$E_{\alpha}(\Delta t)\varphi = \int_0^{\infty} \Psi_{\alpha}(s) e^{st^{\alpha}\Delta} \varphi ds, \quad t > 0. \quad (3.6)$$

Demonstração. Considerando o operador dado por

$$E_{\alpha}(t)\varphi = \int_0^{\infty} \Psi_{\alpha}(s) e^{st^{\alpha}\Delta} \varphi ds, \quad t > 0.$$

Então, tomando a transformada de Laplace de $E(t)\varphi$, usando a Equação 3.5 segue que para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} E(t)\varphi dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \Psi_{\alpha}(s) e^{st^{\alpha}\Delta} \varphi ds dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \Psi(st^{-\alpha}) e^{s\Delta} t^{-\alpha} \varphi ds dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{s\Delta} \varphi \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{-\alpha} \Psi(st^{-\alpha}) dt ds \\ &= \lambda^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-s\lambda^{\alpha}} e^{s\Delta} \varphi ds = \lambda^{\alpha-1} (\lambda^{\alpha} - \Delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Por unicidade da transformada de Laplace, temos $E(t)\varphi = E_{\alpha}(\Delta t)\varphi$ para todo $t > 0$. $\square$

No lema a seguir, mostraremos que a família de funções Mittag-Leffler está bem definida no espaço L^q e que é fortemente contínua. Para tal, utilizamos o fato dela ser escrita em termos do semigrupo $e^{st^\alpha \Delta}$, com isso ganhamos propriedades importantes de semigrupos para estimar e mostrar sua continuidade forte.

Lema 3.1. *Seja $1 \leq q \leq r \leq \infty$ tal que $\frac{N}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) < 1$. Então*

$$\|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{L^q}$$

para toda $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a família $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua em $L^r(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Para mostrar tal fato, primeiro notemos que

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} &= \left\| \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) e^{st^\alpha \Delta} \varphi ds \right\|_{L^r} \\ &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \|e^{st^\alpha \Delta} \varphi\|_{L^r} ds. \end{aligned}$$

Por Lunardi e colaboradores[35], temos a seguinte representação, definida como fórmula de Gauss-Weierstrass, para o semigrupo do calor $\{T(t)\}_{t>0}$,

$$(T(t)\varphi)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy,$$

assim, quando $T(t) = e^{st^\alpha \Delta}$

$$(e^{st^\alpha \Delta} \varphi)(x) = \frac{1}{(4\pi st^\alpha)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4st^\alpha}} \varphi(y) dy.$$

Para fazer a estimativa que queremos, primeiro definimos

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi st^\alpha)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4st^\alpha}}, \quad (3.7)$$

como

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{N/2} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x) dx = 1.$$

Dessa forma, $\|G_t\|_{L^1} = 1$ e portanto $G_t \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Temos a seguinte igualdade, facilmente verificável

$$e^{st^\alpha \Delta} \varphi = G_t * \varphi.$$

Tendo essas informações a disposição, vamos agora estimar a L^r -norma da família Mittag-Leffler

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|e^{st^\alpha}\Delta\varphi\|_{L^r}ds \\ &= \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|G_t * \varphi\|_{L^r}ds.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1 para espaços de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|G_t * \varphi\|_{L^r}ds \\ &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|G_t\|_{L^m}\|\varphi\|_{L^q}ds,\end{aligned}$$

para $1 \leq m \leq \infty$ satisfazendo

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r}.$$

Calculando $\|G_t\|_{L^m}$ por 3.7

$$\|G_t\|_{L^m} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| (4\pi st^\alpha)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4st^\alpha}} \right|^m dx \right)^{\frac{1}{m}},$$

como $(4\pi st^\alpha)^{-N/2}$ e $e^{-\frac{|x|^2}{4st^\alpha}}$ são positivas, temos que o valor absoluto nesse caso são elas mesmas, assim

$$\begin{aligned}\|G_t\|_{L^m} &= (4\pi st^\alpha)^{-N/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{m|x|^2}{4st^\alpha}} \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= (4\pi st^\alpha)^{-N/2} \left(\frac{\pi}{\frac{m}{4st^\alpha}} \right)^{N/2m} \\ &= \frac{(4\pi)^{N/2m-N/2}}{m^{N/2m}} (st^\alpha)^{N/2m-N/2}.\end{aligned}$$

Fazendo $C_{N,m} = \frac{(4\pi)^{N/2m-N/2}}{m^{N/2m}}$, obtemos

$$\|G_t\|_{L^m} = C_{N,m} s^{-\frac{N}{2}(1-1/m)} t^{-\frac{\alpha N}{2}(1-1/m)},$$

como $1 - \frac{1}{m} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$

$$\|G_t\|_{L^m} = C_{N,m} s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} t^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})},$$

portanto

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|G_t\|_{L^m}\|\varphi\|_{L^q} \\
&= \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)C_{N,m}s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}t^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}ds\|\varphi\|_{L^q} \\
&= C_{N,m}t^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\int_0^\infty \Psi_\alpha(s)s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}ds\|\varphi\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Como por hipótese $\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right) < 1$, segue então que $-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right) > -1$. Como a função Wright satisfaz as propriedades em 1.13, temos

$$\|E_\alpha(\Delta t)\varphi\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^q},$$

em que C é uma constante dada em termos de N, m, r e α . Assim, $E_\alpha(\Delta t) : L^q(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ está bem definida para todo $t \geq 0$.

Mostraremos em seguida que a família $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua em $L^r(\mathbb{R}^N)$. Para tal utilizaremos o fato que $T(t) = e^{st^\alpha \Delta}$ é um semigrupo fortemente contínuo. De fato, para $0 \leq t_1 < t_2$, temos

$$\begin{aligned}
\|E_\alpha(\Delta t_2)\varphi - E_\alpha(\Delta t_1)\varphi\|_{L^r} &= \left\| \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)e^{st_2^\alpha \Delta}\varphi ds - \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)e^{st_1^\alpha \Delta}\varphi ds \right\|_{L^r} \\
&= \left\| \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)(e^{st_2^\alpha \Delta} - e^{st_1^\alpha \Delta})\varphi ds \right\|_{L^r} \\
&= \left\| \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)e^{st_1^\alpha \Delta}[e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\Delta}\varphi - \varphi]ds \right\|_{L^r},
\end{aligned}$$

como a função Wright é positiva, segue que

$$\|E_\alpha(\Delta t_2)\varphi - E_\alpha(\Delta t_1)\varphi\|_{L^r} \leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|e^{st_1^\alpha \Delta}[e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\Delta}\varphi - \varphi]\|_{L^r} ds.$$

Como temos que,

$$\|e^{st^\alpha \Delta}\|_{\mathcal{L}(L^r)} \leq 1,$$

e

$$\|e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\Delta}\varphi - \varphi\|_{L^r} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t_2 \rightarrow t_1^+,$$

pontualmente com $s > 0$. Além disso,

$$\Psi_\alpha(s)\|e^{st_1^\alpha \Delta}[e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\Delta}\varphi - \varphi]\|_{L^r} \leq 2\Psi_\alpha(s)\|\varphi\|_{L^r},$$

pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \|e^{st_1^\alpha \Delta} [e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha) \Delta} \varphi - \varphi]\|_{L^r} ds = 0,$$

de onde segue que $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t>0}$ é fortemente contínua. $\square$

Observação 3.4. *Fazendo algumas modificações na demonstração acima, temos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(\Delta t_2)\varphi - E_\alpha(\Delta t_1)\varphi\|_{L^r} &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \|e^{st_1^\alpha \Delta} [e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha) \Delta} \varphi - \varphi]\|_{L^r} ds \\ &\leq t_1^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})} \|e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha) \Delta} - I\|_{\mathcal{L}(L^r)} \|\varphi\|_{L^r} ds. \end{aligned}$$

essa estimativa será muito útil adiante.

A seguir, definimos o espaço L_ω^q e fazemos o estudo do comportamento da família de equações $\{E_\alpha(\Delta t)\}_{t \geq 0}$.

Definição 3.4. *Definimos o espaço de Lebesgue **com peso** L_ω^q como sendo o espaço de todas as funções mensuráveis $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ munido da norma*

$$\|\varphi\|_{L_\omega^q} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega(x)^\gamma \varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

em que o peso $\omega : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\omega(x) = 1 + |x|$ e $\gamma \geq 0$.

Observação 3.5. *Note que $\|\varphi\|_{L_\omega^q} = \|\omega^\gamma \varphi\|_{L^q}$.*

A seguir provamos a estimativa para $e^{t\Delta}\varphi$ no espaço de Lebesgue com peso, para tal nos baseamos na demonstração do Teorema 2.1 de [5].

Lema 3.2. *Assumindo que $1 \leq r \leq q \leq \infty$. Temos que para todo t ,*

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L_\omega^q} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) + \frac{\gamma}{2}} \|\varphi\|_{L^r} + Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \||x|^\gamma \varphi\|_{L^r},$$

em que $\gamma \geq 0$.

Demonstração. Como feito no Lema 3.1, denotamos por $G_t(x)$ o núcleo do calor em todo o espaço $\mathbb{R}^N$, já sabemos que a fórmula de Gauss-Weierstrass para o semigrupo do calor é dada por

$$(T(t)\varphi)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy,$$

assim quando $T(t) = e^{t\Delta}$

$$(e^{t\Delta}\varphi)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy.$$

Portanto temos a seguinte expressão

$$e^{t\Delta}\varphi = G_t * \varphi.$$

Definindo o peso $\omega(x) = (1 + |x|)$. Então

$$|e^{t\Delta}\varphi|\omega(x)^\gamma \leq Ct^{-N/2}\omega(x)^\gamma \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y)| dy. \quad (3.8)$$

De fato,

$$\begin{aligned} |e^{t\Delta}\varphi|\omega(x)^\gamma &= \left| \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy \right| \omega(x)^\gamma \\ &\leq Ct^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y)| dy \omega(x)^\gamma \\ &= Ct^{-N/2} \omega(x)^\gamma \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y)| dy, \end{aligned}$$

em que $C = (4\pi)^{-N/2}$.

De posse dessas informações passamos para a prova do lema. Vejamos que $\omega^\gamma \leq C_1(1 + |x|^\gamma)$ para alguma constante C_1 que depende de γ . Dessa forma, por um lado

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L_\omega^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega^\gamma(x) e^{t\Delta}\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |C_1(1 + |x|^\gamma) e^{t\Delta}\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^N} |e^{t\Delta}\varphi(x) + |x|^\gamma e^{t\Delta}\varphi(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

em que C é dada em termos de γ . Pela desigualdade de Minkowski

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L_{\omega^\gamma}^q} \leq C_1 \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^q} + C_1 \| |x|^\gamma e^{t\Delta}\varphi \|_{L^q}. \quad (3.9)$$

Além disso, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^q} &= \|G_t * \varphi\|_{L^q} \\ &\leq \|G_t\|_{L^m} \|\varphi\|_{L^r}, \end{aligned}$$

para $1 \leq m \leq \infty$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r} - 1$, daí como

$$\begin{aligned}\|G_t\|_{L^m} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= C_{N,m} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})},\end{aligned}$$

segue que

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^q} \leq C_{N,m} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \|\varphi\|_{L^r}. \quad (3.10)$$

A seguir, vamos estimar a segunda parte da Desigualdade 3.9. Para tal, note que

$$\begin{aligned}|x|^\gamma &= |y + x - y|^\gamma \\ &\leq C(|y|^\gamma + |x - y|^\gamma)\end{aligned}$$

para alguma constante C que depende de γ , temos

$$\begin{aligned}|e^{t\Delta}\varphi||x|^\gamma &\leq C t^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^\gamma |\varphi(y)| dy + C t^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |x-y|^\gamma |\varphi(y)| dy \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Portanto, $\|e^{t\Delta}\varphi|x|^\gamma\|_{L^q} \leq \|I_1\|_{L^q} + \|I_2\|_{L^q}$. Como $I_1 = CG_t * b$, onde $b(x) = |x|^\gamma \varphi(x)$, pela desigualdade de Young

$$\|I_1\|_{L^q} \leq C \|G_t\|_{L^m} \|b\|_{L^r},$$

para $1 \leq m \leq \infty$ satisfazendo

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r} - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^q} &\leq C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \|b\|_{L^r} \\ &= C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \||x|^\gamma \varphi\|_{L^r}.\end{aligned} \quad (3.11)$$

Para $I_2 = CK_t * \varphi$, onde $K_t(x) = |x|^\gamma G_t(x)$ pela desigualdade de Young

$$\|I_2\|_{L^q} \leq C \|K_t\|_{L^m} \|\varphi\|_{L^r},$$

observe que

$$\begin{aligned}\|K_t\|_{L^m} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\gamma m} e^{-m\frac{|x|^2}{4t}} dx \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= t^{-\frac{N}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{N}{2m}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{\gamma m} e^{-|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= C_2 t^{-\frac{N}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{N}{2m}} \\ &= C_2 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) + \frac{\gamma}{2}},\end{aligned}$$

assim

$$\|I_2\|_{L^q} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r}. \quad (3.12)$$

Por fim, por 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12 temos a seguinte desigualdade

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L_\omega^q} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|\varphi\|_{L^r} + Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\||x|^\gamma\varphi\|_{L^r} + Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r}. \quad (3.13)$$

Temos em particular

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L_\omega^q} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r} + Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\||x|^\gamma\varphi\|_{L^r}.$$

□

Lema 3.3. *Assumindo que $1 \leq r \leq q \leq \infty$ e $\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right) < 1$. Temos que, vale para todo $t > 0$ e $\gamma \geq 0$*

$$\|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_\omega^q} \leq Ct^{-\beta}[t^{\frac{\alpha\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r} + \||x|^\gamma\varphi\|_{L^r}] \quad (3.14)$$

Demonstração. Temos que

$$\|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_\omega^q} \leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)\|e^{st^\alpha\Delta}\varphi\|_{L_{\omega_\gamma}^q} ds,$$

pelo Lema 3.2,

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_{\omega_\gamma}^q} &\leq \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \left[C(st^\alpha)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r} + C(st^\alpha)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\||x|^\gamma\varphi\|_{L^r} \right] ds \\ &= Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\alpha\gamma}{2}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r} ds \\ &\quad + Ct^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\||x|^\gamma\varphi\|_{L^r} ds, \end{aligned}$$

fazendo $\beta = \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)$, temos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_\omega^q} &\leq Ct^{-\beta+\frac{\alpha\gamma}{2}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})+\frac{\gamma}{2}}\|\varphi\|_{L^r} ds \\ &\quad + Ct^{-\beta} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\||x|^\gamma\varphi\|_{L^r} ds, \end{aligned}$$

usando o fato que $-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right) > -1$ e $\gamma \geq 0$, seja

$$\kappa = \frac{-N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right) + \frac{\gamma}{2},$$

e

$$r = \frac{-N}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right),$$

segue que $\kappa, r > -1$. Usando a igualdade ??, obtemos

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_\omega^q} &\leq C t^{-\beta+\frac{\alpha\gamma}{2}} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\alpha\kappa+1)} \|\varphi\|_{L^r} + C t^{-\beta} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)} \|\varphi\|_{L_{\omega_\gamma}^r} \\ &= C_1 t^{-\beta+\frac{\alpha\gamma}{2}} \|\varphi\|_{L^r} + C_2 t^{-\beta} \| |x|^\gamma \varphi \|_{L^r} \end{aligned}$$

tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$, temos

$$\|E_\alpha(t\Delta)\varphi\|_{L_\omega^q} \leq C t^{-\beta} [t^{\frac{\alpha\gamma}{2}} \|\varphi\|_{L^r} + \| |x|^\gamma \varphi \|_{L^r}].$$

Como queríamos. □

3.2 Solução Branda Global

O principal objetivo desta seção é mostrar resultados de existência e unicidade de soluções no espaço L^q .

3.2.1 Estudo da boa-posição global

Nesta parte faremos o estudo da boa-posição global das soluções do problema 3.1 para os dados iniciais $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ no caso crítico $p = \frac{\alpha N}{2}(\rho - 1)$. Para tal, definiremos o espaço funcional no qual a solução reside e daremos a definição precisa de solução branda global.

Definição 3.5. *Sejam $1 < p < r < \infty$ e $\beta = \frac{\alpha N}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$. O espaço de Banach X_β é o conjunto de todas as funções $u : (0, \infty) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ Bochner¹ integráveis, tais que $t^\beta u$ são funções contínuas limitadas. A norma deste espaço é dada por*

$$\|u\|_{X_\beta} = \sup_{t>0} t^\beta \|u(t, \cdot)\|_{L^r} < \infty. \quad (3.15)$$

A seguir, daremos a definição precisa de solução branda global em L^q associada as equações de reação-difusão 3.1.

¹Ver Apêndice

Definição 3.6. *Seja $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, onde $1 < p < r < \infty$ e $u(0, x) = u_0(x)$. Dizemos que $u = u(t, x)$ é uma solução branda global em X_β do problema de valor inicial 3.1, quando u satisfaz a equação integral 3.4, ou seja,*

$$u(t, x) = u_0(x)E_\alpha(\Delta t) + \int_0^t E_\alpha(\Delta t)|u(s, x)|^{p-1}u(s, x)ds,$$

em que $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Antes de passarmos para a demonstração do Teorema de existência e unicidade mostraremos alguns resultados, cuja demonstração é uma aplicação do Lema 3.1, primeiro note que a formulação integral 3.4 é a soma da parte linear, com a parte não linear, que chamaremos de I_2 .

Lema 3.4. *(Estimativa do termo linear) Seja $E_\alpha(\Delta t)u_0$, em que $\beta = \frac{\alpha N}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$, então temos que para $1 < p < r < \infty$, vale a seguinte estimativa*

$$\|E_\alpha(\Delta t)u_0\|_{L^r} \leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p}.$$

Demonstração. Estimativa para $E_\alpha(\Delta t)u_0$, procede do Lema 3.1, com pequenas modificações.

$$\|E_\alpha(\Delta t)u_0\|_{L^r} \leq \int_0^\infty \Psi_\alpha \|e^{st^\alpha \Delta} u_0\|_{L^r},$$

como já é conhecido, podemos escrever $e^{st^\alpha \Delta} u_0 = G_t * u_0$ e aplicamos a desigualdade de Young, em que $1 < p < r < \infty$, tem-se $\|G_t * u_0\|_{L^r} \leq \|G_t\|_{L^m} \|u_0\|_{L^p}$, calculando $\|G_t\|_{L^m}$, onde $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{m}$, temos

$$\|G_t\|_{L^m} = Cs^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} t^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}.$$

Portanto, $\|G_t * u_0\|_{L^r} \leq Cs^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} t^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u_0\|_{L^p}$. Assim a estimativa para $E_\alpha(\Delta t)u_0$ se reduz a

$$\|E_\alpha(\Delta t)u_0\|_{L^r} \leq Ct^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u_0\|_{L^p}.$$

Como por hipótese o parâmetro β está relacionado pela igualdade $\beta = \frac{\alpha N}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$, finalmente

$$\|E_\alpha(\Delta t)u_0\|_{L^r} \leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p},$$

como desejado. □

Lema 3.5. (*Estimativa do termo não linear*) *Seja*

$$I_2 = \int_0^t E_\alpha(\Delta(t-s)) |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) ds,$$

em que $\beta = \frac{\alpha N}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$, assumindo que $1 < p < r < \infty$, $\rho\alpha > 1$ e

$$p = \frac{\alpha}{2} N(\rho - 1).$$

Além disso,

$$\frac{N}{2}(\rho - 1) < r < \rho p \quad \text{e} \quad r \geq \rho.$$

Então vale a seguinte estimativa

$$\|I_2\|_{L^r} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds.$$

Demonstração. Usando o Lema 3.1, seja $p = \frac{r}{\rho}$ e $1 < p < r$ assim obtemos

$$\|I_2\|_{L^r} \leq \int_0^t \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \|e^{s(t-s)\Delta} |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x)\|_{L^r} ds ds,$$

como já é sabido, podemos escrever $e^{s(t-s)\Delta} |u|^{\rho-1} u = B_t * (|u|^{\rho-1} u)$, em que

$$B_t(x) = \frac{1}{(4\pi s(s-t)^\alpha)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4s(s-t)^\alpha}}$$

aplicamos a desigualdade de Young, em que $1 < \frac{r}{\rho} < r < \infty$, assim tem-se $\|B_t * (|u|^{\rho-1} u)\|_{L^r} \leq \|G_t\|_{L^m} \| |u|^{\rho-1} u \|_{L^{\frac{r}{\rho}}}$, calculando $\|B_t\|_{L^m}$, onde $1 + \frac{1}{r} = \frac{\rho}{r} + \frac{1}{m}$, temos

$$\|B_t\|_{L^m} = C s^{\frac{-N}{2}(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r})} (t-s)^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r})}.$$

Portanto,

$$\|B_t * (|u|^{\rho-1} u)\|_{L^r} \leq C s^{\frac{-N}{2}(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r})} (t-s)^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r})} \| |u|^{\rho-1} u \|_{L^{\frac{r}{\rho}}}.$$

A estimativa para I_2 se reduz a

$$\|I_2\|_{L^r} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\alpha \frac{N}{2}(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{r})} \| |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) \|_{L^{\frac{r}{\rho}}} ds.$$

Note que,

$$\| |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) \|_{L^{\frac{r}{\rho}}} = \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho,$$

assim temos

$$\|I_2\|_{L^r} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds,$$

como desejado. □

A seguir iremos provar a boa-posição da solução branda global, antes disso, passamos a demonstração de um lema muito útil para nosso objetivo.

Lema 3.6. *Assumindo $r \geq \rho$. A não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, induz uma aplicação de L^r em $L^{\frac{r}{\rho}}$ satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{r}{\rho}}} \leq C\|u - v\|_{L^r}(\|u\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v\|_{L^r}^{\rho-1}). \quad (3.16)$$

Demonstração. Seja $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, com $\rho > 1$. Derivando, temos

$$f'(u) = \rho|u|^{\rho-1}$$

. Pelo teorema do valor médio, para todos $u, v \in \mathbb{R}$, existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$f(u) - f(v) = f'(tu + (1-t)v)(u - v),$$

isso implica que

$$|f(u) - f(v)| = \rho|tu + (1-t)v|^{\rho-1}|u - v|.$$

Por [15], pagina 181, temos que para $p > 0$ e $f, g \in L^p$ vale

$$|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

além disso

$$|tu + (1-t)v|^{\rho-1} \leq (|u| + |v|)^{\rho-1},$$

com isso temos

$$|f(u) - f(v)| \leq C(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})|u - v|, \quad (3.17)$$

onde C é uma constante dada em termos de ρ .

Observe que, por definição

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{r}{\rho}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(u) - f(v)|^{\frac{r}{\rho}} dx \right)^{\frac{\rho}{r}}.$$

Pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{r}{\rho}}} \leq C\|u - v\|_{L^r}(\|u\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v\|_{L^r}^{\rho-1}).$$

Assim, f aplica $L^r(\mathbb{R}^N)$ em $L^{\frac{r}{\rho}}(\mathbb{R}^N)$. □

Teorema 3.1. *Sejam os parâmetros p, r, α, N e β relacionados da seguinte maneira*

$$1 < p < r < \infty, \quad \frac{N}{2}(\rho - 1) < r < \rho p \quad \text{e} \quad r \geq \rho,$$

$$\beta = \frac{\alpha N}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right), \text{ em que } \rho > 1, p = \frac{\alpha N}{2}(\rho - 1), \text{ e } \rho\beta < 1.$$

Se $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ é suficientemente pequena, então existe uma única solução branda global $u \in X_\beta$ para 3.1, que depende continuamente dos dados iniciais. Em particular,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^r} \leq Ct^{-\beta}$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, se u_0 é uma função não-negativa (positiva), então $u(t, \cdot)$ também é não-negativa (positiva), para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Esta demonstração será feita baseada em [3]. Como em [3] dividiremos em quatro partes: primeiro mostraremos a existência, em seguida a unicidade, dependência contínua e positividade.

(i) **Existência:** Consideramos a métrica $d_B(\cdot, \cdot)$ definida por

$$d_B(x, y) = \|x - y\|_{X_\beta}$$

na bola $B_{X_\beta}(R)$ e seja $\Lambda : B_{X_\beta}(R) \rightarrow B_{X_\beta}(R)$ o operador definido por

$$\Lambda u(t) = E_\alpha(\Delta t)u_0(x) + \int_0^t E_\alpha(\Delta(t-s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)ds \quad (3.18)$$

onde $R > (2MC)^{\frac{1}{1-\rho}}$. Se $u \in B_{X_\beta}(R)$, temos

$$\|\Lambda u(t)\|_{L^r} \leq \|E_\alpha(\Delta t)u_0\|_{L^r} + \int_0^t \left\| E_\alpha(\Delta(t-s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x) \right\|_{L^r} ds.$$

Pelos Lemas 3.4 e 3.5, temos que

$$\|\Lambda u(t)\|_{L^r} \leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds. \quad (3.19)$$

Nosso objetivo é estimar 3.19 no espaço funcional X_β definido anteriormente, que é onde nossa solução reside. Para isso, fazemos algumas manipulações algébricas para obter o

desejado

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\|_{L^r} &\leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds \\
&= Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} s^{\beta\rho} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds \\
&= Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} \|s^\beta u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds \\
&\leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \sup_{t \geq 0} \|s^\beta u(s, x)\|_{L^r}^\rho.
\end{aligned}$$

Como $\sup_{t \geq 0} \{\|s^\beta u(s, x)\|_{L^r}\} = \|u(s, x)\|_{X_\beta}$, segue

$$\|\Lambda u(t)\|_{L^r} \leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho.$$

Fazendo mudança de variáveis na segunda parcela acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\|_{L^r} &\leq Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + C \int_0^t t^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} (1-s/t)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho \\
&= Ct^{-\beta}\|u_0\|_{L^p} + Ct^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)-\beta\rho+1} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho.
\end{aligned}$$

Note que $-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1) - \beta\rho + 1 = -\beta$. Além disso, pela definição da função Beta, Capítulo 1, temos

$$\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds = \mathbf{B}\left(1 - \frac{\alpha N}{2r}(\rho-1), 1 - \beta\rho\right),$$

assim definimos $M = \mathbf{B}\left(1 - \frac{\alpha N}{2r}(\rho-1), 1 - \beta\rho\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\|_{L^r} &\leq Ct^{-\beta}(\|u_0\|_{L^p} + M\|u\|_{X_\beta}^\rho) \\
&\Rightarrow \|t^\beta \Lambda u(t)\|_{L^r} \leq C(\|u_0\|_{L^p} + M\|u\|_{X_\beta}^\rho).
\end{aligned}$$

Tomando a norma no espaço X_β , temos pela escolha de R ,

$$\|u_0\|_{L^p} \leq R(1/c - MR^{\rho-1}),$$

assim

$$\|\Lambda u(t)\|_{X_\beta} \leq C(\|u_0\|_{L^p} + M\|u\|_{X_\beta}^\rho) \leq R. \quad (3.20)$$

Além disso, para $0 < t_1 < t_2$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda u)(t_2) - (\Lambda u)(t_1)\|_{L^r} &\leq \|(E_\alpha(\Delta t_2) - E_\alpha(\Delta t_1))u_0\|_{L^r} + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|E_\alpha(\Delta(t_2 - s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^r} ds + \\
&\quad + \int_0^{t_1} \|[E_\alpha(\Delta(t_2 - s)) - E_\alpha(\Delta(t_1 - s))]|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^r} ds \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela J_i ; onde $i = 1, 2, 3$. A convergência de J_1 , com $t_2 \rightarrow t^+$ decorre da continuidade forte da família Mittag-Leffler $(E_\alpha(t\Delta))_{t \geq 0}$ obtida no Lema 3.1.

Para J_2 temos a seguinte estimativa, fazendo substituição de variáveis

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \|E_\alpha(\Delta(t_2 - s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^r} ds \\
&\leq C \int_{t_1}^{t_2} t_2^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} (1 - s/t_2)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds \\
&= C \int_{t_1}^{t_2} t_2^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} (1 - s/t_2)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\rho\beta} s^{\rho\beta} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds \\
&= C \int_{t_1}^{t_2} t_2^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} (1 - s/t_2)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\rho\beta} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho \\
&= C t_2^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)-\beta\rho+1} \int_{\frac{t_1}{t_2}}^1 (1 - s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\rho\beta} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho.
\end{aligned}$$

Pelo fato de $u \in B_{X_\beta}(R)$ temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \|E_\alpha(\Delta(t_2 - s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^r} ds \leq C R^\rho t_2^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)-\beta\rho+1} \int_{\frac{t_1}{t_2}}^1 (1 - s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\rho\beta} ds,$$

que tende a zero quando $t_2 \rightarrow t_1^+$.

Para estimar J_3 , lembramos da Observação 3.4 em que obtemos

$$\|E_\alpha(\Delta t_2)\varphi - E_\alpha(\Delta t_1)\varphi\|_{L^r} \leq t_1^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) s^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \|e^{s(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\Delta} - I\|_{\mathcal{L}(L^r)} \|\varphi\|_{L^r} ds.$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} \|[E_\alpha((t_2 - s)\Delta) - E_\alpha((t_1 - s)\Delta)]|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^r} ds \\
&\leq \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{-\frac{\alpha N}{2} \frac{\rho-1}{r}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(\omega) \omega^{-\frac{N}{2} \frac{\rho-1}{r}} \|e^{\omega((t_2-s)^\alpha - (t_1-s)^\alpha)\Delta} - I\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{r}{\rho}})} \| |u(s, \cdot)|^{\rho-1}u(s, \cdot) \|_{L^{\frac{r}{\rho}}} d\omega ds \\
&\leq \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{-\frac{\alpha N}{2} \frac{\rho-1}{r}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(\omega) \omega^{-\frac{N}{2} \frac{\rho-1}{r}} \|e^{\omega((t_2-s)^\alpha - (t_1-s)^\alpha)\Delta} - I\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{r}{\rho}})} \|u(s, \cdot)\|_{L^r}^\rho d\omega ds.
\end{aligned}$$

Por hipótese do teorema e o fato que $u \in X_\beta$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} \|e^{\omega((t_2-s)^\alpha - (t_1-s)^\alpha)\Delta} - I\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{r}{\rho}})} = 0.$$

Assim provamos que Λ está bem definida sobre o espaço X_β .

O próximo passo é provar que Λ é uma contração, para tal note que pelo Lema 3.6, temos

$$\begin{aligned} & \|\Lambda u(t, \cdot) - \Lambda v(t, \cdot)\|_{L^r} \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{\rho}{r} - \frac{1}{r})} \| |u(s, \cdot)|^{\rho-1} u(s, \cdot) - |v(s, \cdot)|^{\rho-1} v(s, \cdot) \|_{L^{\frac{r}{\rho}}} ds \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} s^\beta \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} s^{\beta(\rho-1)} (\|u(s, \cdot)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(s, \cdot)\|_{L^r}^{\rho-1}) ds \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \|u - v\|_{X_\beta} (\|u\|_{X_\beta}^{\rho-1} + \|v\|_{X_\beta}^{\rho-1}). \end{aligned}$$

Fazendo substituição de variáveis e usando o fato que $u \in B_{X_\beta}(R)$

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t, \cdot) - \Lambda v(t, \cdot)\|_{L^r} & \leq C t^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1) - \beta\rho + 1} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} ds \|u - v\|_{X_\beta} (R^{\rho-1} + R^{\rho-1}) \\ & = C t^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1) - \beta\rho + 1} M \|u - v\|_{X_\beta} 2R^{\rho-1} \\ & = 2MR^{\rho-1} C t^{-\beta} \|u - v\|_{X_\beta} \\ & < t^{-\beta} \|u - v\|_{X_\beta}. \end{aligned}$$

uma vez que $R > (2MC)^{\frac{1}{1-\rho}}$ e $\rho > 1$. Dessa forma, Λ é uma contração sobre $B_{X_\beta}(R)$ e, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, Λ tem um único ponto fixo sobre $B_{X_\beta}(R)$. Assim provamos que Λ está bem definida em X_β .

(ii) Unicidade: Para provar a unicidade da solução seja $v \in X_\beta$ outra solução branda do problema 3.1. Então, existe $R' > 0$ tal que $v \in B_{X_\beta}(R')$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} & \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2}(\frac{\rho}{r} - \frac{1}{r})} \| |u(s, \cdot)|^{\rho-1} u(s, \cdot) - |v(s, \cdot)|^{\rho-1} v(s, \cdot) \|_{L^{\frac{r}{\rho}}} ds \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho} s^\beta \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} s^{\beta(\rho-1)} (\|u(s, \cdot)\|_{L^r}^{\rho-1} + \|v(s, \cdot)\|_{L^r}^{\rho-1}) ds \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho + \beta} \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} ds (\|u\|_{X_\beta}^{\rho-1} + \|v\|_{X_\beta}^{\rho-1}) \\ & \leq C(R^{\rho-1} + R'^{\rho-1}) \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2r}(\rho-1)} s^{-\beta\rho + \beta} \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} ds. \end{aligned}$$

Existe T tal que $u(t) = v(t)$ em $[0, T]$. Pelo Lema de Grönwall Singular $\|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^r} = 0$, para todo $t \in [0, T]$, assim temos $u(t, \cdot) = v(t, \cdot)$ quase sempre para todo $t \geq 0$. Logo, temos a unicidade da solução branda.

(iii) Dependência Contínua: Seja u, v soluções suaves de 3.1 começando em u_0 e v_0 , respectivamente. Estimando como no passo da existência, obtém-se

$$\|u - v\|_{X_\beta} < \|u_0 - v_0\|_{L^p} + 2MR^{\rho-1}C\|u - v\|_{X_\beta}.$$

que produz a continuidade Lipschitz

$$\|u - v\|_{X_\beta} < \frac{1}{2MR^{\rho-1}C}\|u_0 - v_0\|_{L^p}.$$

Isso conclui a prova.

(iv) Positividade: Agora, assuma que u_0 não é negativa. Portanto, $e^{t\Delta}u_0 \geq 0$, para todo $t > 0$. Então, lembrando que a função de Wright é positiva e sabemos que

$$E_\alpha(t\Delta) = \int_0^\infty \Psi_\alpha(s)e^{st^\alpha\Delta}\varphi ds$$

para concluir que $E_\alpha(t\Delta)u_0 \geq 0$. A não-negatividade da solução segue do fato que, a solução u é o limite em X_β de uma sequência de Picard $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, definida recursivamente por

$$\begin{cases} u_1(t, x) = E_\alpha(\Delta t)u_0(x); \\ u_{k+1}(t, x) = u_1(t, x) + \int_0^t E_\alpha(\Delta(t-s))|u_k(s, x)|^{\rho-1}u_k(s, x)ds, \end{cases}$$

essa é uma sequência não-negativa. □

Faremos alguns comentários sobre a continuidade da solução em $t = 0$. De fato, acabamos de provar que $u : (0, \infty) \rightarrow L^r$ é contínua. Em particular, $u : (0, \infty) \rightarrow L^{p'}$ para qualquer $p' \leq r$ também é contínua. Portanto para $1 \leq p' \leq p$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_0^t \|E_\alpha(\Delta(t-s))|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)\|_{L^{p'}} ds \\ \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{p}{r}-\frac{1}{p'}\right)} \|u(s, x)\|_{L^r}^\rho ds, \end{aligned}$$

fazendo substituição de variáveis

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \|E_\alpha(\Delta(t-s))|u(s,x)|^{\rho-1}u(s,x)\|_{L^{p'}} ds \\
& \leq Ct^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right)-\rho\beta+1} \int_0^t (1-s)^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right)} s^{-\rho\beta} s^{\rho\beta} \|u(s,x)\|_{L^r}^\rho ds \\
& = Ct^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right)-\rho\beta+1} \int_0^t (1-s)^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right)} s^{-\rho\beta} ds \|u\|_{X_\beta}^\rho \\
& = Ct^{-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right)-\rho\beta+1} \mathbf{B}\left(1-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right), 1-\rho\beta\right) \|u\|_{X_\beta}^\rho.
\end{aligned}$$

Temos que $\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right) < 1$ e $-\frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\rho}{r}-\frac{1}{p'}\right) - \rho\beta + 1 > 0$. Então, a partir disso e do Lema 3.1, se $u_0 \in L^p \cap L^{p'}$, concluímos que

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^{p'}} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

3.3 Soluções autossimilares

A formulação integral 3.4 pode ser estudada em diversos espaços funcionais. Nesta dissertação um dos nossos objetivos é obter soluções auto-similares. Para tal, precisaremos que o dado inicial u_0 seja homogêneo de um certo grau, portanto estudaremos a equação integral em espaços funcionais dependentes do tempo e baseados em espaços os quais contém funções homogêneas. Inicialmente fornecemos condições suficientes para obter tais soluções.

Assumindo que $u(t, x)$ é uma solução branda do problema 3.1 sujeito a condição inicial u_0 então provaremos que a relação de *scaling* de u satisfaz

$$u_\lambda(t, x) := \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t, \lambda x). \quad (3.21)$$

De fato, a relação de *scaling* de u satisfaz, em geral,

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x),$$

com $\lambda > 0$ e a, b e c variáveis não-negativas. Para u_λ ser a relação de *scaling* de u , ela deve satisfazer a equação 3.2. Calculando

$$u_\lambda(t, x) = (u_0)_\lambda(x) + \int_0^t g_\alpha(s) \Delta u_\lambda(t-s, x) ds + \int_0^t |u_\lambda(s, x)|^{\rho-1} u_\lambda(s, x) ds$$

fazendo

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x)$$

e usando a regra da cadeia para calcular o Laplaciano

$$\Delta u_\lambda = \lambda^a \lambda^{2c} \Delta u(\lambda^b t, \lambda^c x).$$

Obtemos por um lado

$$\begin{aligned} \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x) &= \lambda^a u_0(\lambda^c x) + \lambda^{a+2c} \int_0^t g_\alpha(s) \Delta u(\lambda^b(t-s), \lambda^c x) ds \\ &\quad + \lambda^{a\rho} \int_0^t |u(\lambda^b s, \lambda^c x)|^{\rho-1} u(\lambda^b s, \lambda^c x) ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por outro lado, como u é solução, aplicamos em $(\lambda^b t, \lambda^c x)$ e multiplicamos por λ^a ,

$$\begin{aligned} \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x) &= \lambda^a u_0(\lambda^c x) + \lambda^a \int_0^{\lambda^b t} g_\alpha(\bar{s}) \Delta u(\lambda^b t - \bar{s}, \lambda^c x) d\bar{s} \\ &\quad + \lambda^a \int_0^{\lambda^b t} |u(\bar{s}, \lambda^c x)|^{\rho-1} u(\bar{s}, \lambda^c x) d\bar{s}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Devemos ter 3.22 igual a 3.23. Fazendo a substituição de variáveis $\lambda^b t - \bar{s} = \lambda^b(t-s) \Rightarrow s = \lambda^{-b}\bar{s}$ na primeira e segunda integral de 3.22 obtemos

$$\begin{aligned} \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x) &= \lambda^a u_0(\lambda^c x) + \lambda^{a+2c} \int_0^{\lambda^b t} g_\alpha(\lambda^{-b}\bar{s}) \Delta u(\lambda^b t - \bar{s}, \lambda^c x) \lambda^{-b} d\bar{s} \\ &\quad + \lambda^{a\rho} \int_0^{\lambda^b t} |u(\lambda^b \lambda^{-b}\bar{s}, \lambda^c x)|^{\rho-1} u(\lambda^b \lambda^{-b}\bar{s}, \lambda^c x) \lambda^{-b} d\bar{s}. \end{aligned}$$

Usamos o fato que $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ assim $g_\alpha(\lambda^{-b}\bar{s}) = \lambda^{-b(\alpha-1)} g_\alpha(\bar{s})$

$$\begin{aligned} \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x) &= \lambda^a u_0(\lambda^c x) + \lambda^{a+2c-b(\alpha-1)-b} \int_0^{\lambda^b t} g_\alpha(\lambda^{-b}\bar{s}) \Delta u(\lambda^b t - \bar{s}, \lambda^c x) d\bar{s} \\ &\quad + \lambda^{a\rho-b} \int_0^{\lambda^b t} |u(\bar{s}, \lambda^c x)|^{\rho-1} u(\bar{s}, \lambda^c x) d\bar{s}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora por fim, comparando 3.24 com 3.23 serão iguais quando cada expoente de λ dos termos correspondentes forem iguais. Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a + 2c - b\alpha + b - b = a \\ a\rho - b = a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c - b\alpha = 0 \\ a\rho - b = a. \end{cases}$$

Tem duas equações e quatro variáveis e esse sistema é possível e indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções. Vamos determinar a e b em função de ρ e α . Fazendo $c = 1$

$$b\alpha = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{\alpha}$$

e

$$a\rho - a = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow a = \frac{2}{\alpha(\rho - 1)}.$$

Assim a relação scaling que u satisfaz é tal que

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t, \lambda x).$$

Temos a seguinte definição de solução auto-similar a considerar.

Definição 3.7. (*Solução autossimilar*) *Seja $u = u(t, x)$ uma solução branda do problema 3.1 sujeito a condição inicial u_0 . Dizemos que esta solução é autossimilar, quando ela satisfaz a seguinte propriedade*

$$u(t, x) = u_\lambda(t, x), \quad (3.25)$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$.

A aplicação $u \mapsto u_\lambda$ dada por 3.25 é conhecida como relação *scaling* (ou escala), da equação 3.1. Observe que, se fizermos $t \rightarrow 0^+$ em 3.25, devemos esperar que $u(0, x)$ seja uma função de grau $\frac{-2}{\alpha(\rho-1)}$. De fato, quando $t = 0$ temos $u_0(x) = u_\lambda(0, \lambda x)$, como

$$u_\lambda(0, \lambda x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u(0, \lambda x),$$

assim $u_0(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u_0(\lambda x)$, o que implica em

$$u_0(\lambda x) = \lambda^{\frac{-2}{\alpha(\rho-1)}} u_0(x).$$

Isso indica que, os espaços adequados para se encontrar soluções auto-similares, são aqueles que contêm funções homogêneas de grau $\frac{-2}{\alpha(\rho-1)}$, estas são as candidatas naturais a serem condição inicial. Por outro lado, se desejarmos obter soluções auto-similares em certos espaços funcionais, uma condição necessária para tal é que as normas destes espaços devam ser invariantes pela relação de *scaling*. Nesse sentido, o espaço funcional X_β foi bem escolhido. De fato, usando a relação de *scaling* obtida acima em espaços $L^r(\mathbb{R}^N)$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *O espaço funcional X_β é invariante por scaling se, e somente se $p = \frac{\alpha}{2}N(\rho - 1)$.*

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(t, \cdot)\|_{X_\beta} &= \sup_{t>0} \|t^\beta u_\lambda(t, \cdot)\|_{L^p} \\
&= \sup_{t>0} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \|t^\beta u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t, \cdot)\|_{L^p} \\
&= \sup_{t>0} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \lambda^{\frac{-N}{p}} \|t^\beta u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t, x)\|_{L^p} \\
&= \sup_{t>0} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)} - \frac{N}{p}} \|t^\beta u(t, \cdot)\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Dessa forma $\|u_\lambda(t, \cdot)\|_{X_\beta} = \|u(t, \cdot)\|_{X_\beta}$ se, e somente se

$$\frac{2}{\alpha(\rho-1)} - \frac{N}{p} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\alpha}{2} N(\rho-1).$$

□

Teorema 3.3. *Sejam as suposições do Teorema 3.1. Se u_0 é uma função homogênea de grau $-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}$, ou seja, $u_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u_0(x)$. Então, a solução única global do Teorema 3.1 é autossimilar.*

Demonstração. Queremos mostrar que a solução global

$$u(t, x) = E_\alpha(t\Delta)u_0(x) + \int_0^t E_\alpha((t-s)\Delta)|u(s, x)|^{\rho-1}u(s, x)ds$$

é autossimilar, ou seja, $u_\lambda(t, x) = u(t, x)$. Vamos separar a provar em duas partes, a primeira com a parte linear e a segunda com a parte não linear. Primeiro para parte linear, notemos que pela Proposição 3.1 e pela relação de *scaling*, obtemos

$$\begin{aligned}
[E_\alpha(t\Delta)u_0(\cdot)]_\lambda(t, x) &= \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} [E_\alpha(t\Delta)u_0(\cdot)](\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t, \lambda x) \\
&= \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) e^{s\lambda^2 t^\alpha \Delta} u_0(\lambda x) ds
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Além disso, notemos que

$$e^{s\lambda^2 t^\alpha \Delta} \varphi(x) = e^{st^\alpha \Delta} \varphi \circ d_\lambda \left(\frac{x}{\lambda} \right), \tag{3.27}$$

em que $d_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é a função dilatação dada por $d_\lambda(x) = \lambda x$. Assim, como $u_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u_0(x)$, segue que

$$\begin{aligned}
e^{s\lambda^2 t^\alpha \Delta} u_0(\lambda x) &= \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} e^{s\lambda^2 t^\alpha \Delta} u_0(x) \\
&= \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} e^{st^\alpha \Delta} u_0 \circ d_\lambda \left(\frac{x}{\lambda} \right) \\
&= \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} e^{st^\alpha \Delta} u_0(x).
\end{aligned}$$

Desta forma, a Equação 3.26 resulta em

$$\begin{aligned} [E_\alpha(t\Delta)u_0(\cdot)]_\lambda(t, x) &= \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) \lambda^{-\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} e^{st^\alpha \Delta} u_0(x) ds \\ &= \int_0^\infty \Psi_\alpha(s) e^{st^\alpha \Delta} u_0(x) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[E_\alpha(t\Delta)u_0(x)]_\lambda(t, x) = E_\alpha(t\Delta)u_0(x). \quad (3.28)$$

Em seguida, fazemos a prova para parte não linear, temos

$$\left[\int_0^t E_\alpha((t-s)\Delta) |u(s, x)|^{\rho-1} u(s, x) ds \right]_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^{\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t} E_\alpha((\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t - s)\Delta) |u(s, \lambda x)|^{\rho-1} u(s, \lambda x) ds,$$

fazendo a mudança de variável $s \mapsto \lambda^{\frac{2}{\alpha}} s$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^{\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t} E_\alpha((\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t - s)\Delta) |u(s, \lambda x)|^{\rho-1} u(s, \lambda x) ds \\ = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^t E_\alpha((\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t - \lambda^{\frac{2}{\alpha}} s)\Delta) |u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, \lambda x)|^{\rho-1} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, \lambda x) \lambda^{\frac{2}{\alpha}} ds \\ = \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)} + \frac{2}{\alpha}} \int_0^t E_\alpha(\lambda^{\frac{2}{\alpha}}(t-s)\Delta) |u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, \lambda x)|^{\rho-1} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, \lambda x) ds \end{aligned}$$

Usamos novamente 3.27 obtemos

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} \int_0^{\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t} E_\alpha((\lambda^{\frac{2}{\alpha}} t - s)\Delta) |u(s, \lambda x)|^{\rho-1} u(s, \lambda x) ds \\ = \int_0^t E_\alpha((t-s)\Delta) |\lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, x)|^{\rho-1} \lambda^{\frac{2}{\alpha(\rho-1)}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}} s, x) ds \\ = \int_0^t E_\alpha((t-s)\Delta) |u_\lambda(s, x)|^{\rho-1} u_\lambda(s, x) ds. \end{aligned}$$

Combinando com a Equação 3.28, mostramos que

$$u_\lambda(s, x) = E_\alpha(t\Delta)u_0(x) + \int_0^t E_\alpha((t-s)\Delta) |u_\lambda(s, x)|^{\rho-1} u_\lambda(s, x) ds.$$

isto é, u_λ é uma solução branda para o problema. Então, temos, que $\|u_\lambda\|_{X_\beta} = \|u\|_{X_\beta}$ e pela parte de unicidade do Teorema 3.1, segue-se que $u = u_\lambda$, assim u é uma solução autossimilar. $\square$

APÊNDICE A

ESPAÇOS L^p

Definição A.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das classes¹ de funções definidas em Ω , cujos valores estão em $\mathbb{K}$, tais que $|f|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω com norma.*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.1})$$

e denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções f , mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω , equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} \text{ess} |f(x)|, \quad \text{para } p = \infty. \quad (\text{A.2})$$

É comum denotarmos $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ por $\|\cdot\|_p$. A função $\|\cdot\|_p$ define uma norma que faz de $L^p(\Omega)$ um espaço de normado.

Observação A.1. *No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Denotaremos por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$, o produto interno e a norma, respectivamente, deste espaço. Assim,*

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

¹Os elementos de L^p são na realidade classes de equivalência, pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim quaisquer dois representantes de uma mesma classe se coincidem q.t.p.

$$L^p(\Omega) := L^p(\Omega) / \sim$$

A seguir, listamos duas desigualdades conhecidas, a saber a desigualdade de Hölder e Minkowski que serão usados posteriormente. Para melhor se familiarizar com teoria de espaços L^p , bem como encontrar as demonstrações dessas duas desigualdades, indicamos o livro do Rudin, *Real and Complex Analysis*, [41].

Observação A.2. 1. Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então vale a **desigualdade de Hölder**: se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ com

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |g|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{A.3})$$

Também vale a **desigualdade de Minkowski**: Se $p \in [1, \infty]$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então

$$\left\{ \int_{\Omega} (f + g)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_{\Omega} f^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{\Omega} g^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.4})$$

2. Se $p = q = 2$, então a Desigualdade A.3 é conhecida como a **desigualdade de Schwarz**.

Teorema A.1. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (\text{A.5})$$

Observe que quando $p \in (1, \infty)$ a desigualdade A.5 é consequência da desigualdade de Hölder aplicada a $|f|$ e $|g|$. Para detalhes da demonstração, indicamos [41], página 65.

Teorema A.2. Se $p \in [1, \infty]$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Então $f + g \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (\text{A.6})$$

Para $p \in (1, \infty)$, a desigualdade em A.6 segue da desigualdade de Minkowski. Para detalhes da demonstração, indicamos [41], página 65.

Lema A.1. *Lema de Fatou*

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis, tais que $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $i = 1, \dots, n$. Então

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx$$

A seguir apresentamos alguns resultados a respeito a integração, a saber, por exemplo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema A.3. *Se $f \in L^1(\Omega)$, então*

$$\left| \int_{\Omega} f dx \right| \leq \int_{\Omega} |f| dx.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada, no livro do Rudin, [41], Capítulo 1, Teorema 1.33. $\square$

Teorema A.4. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Supondo que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis em Ω tal que*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

existe para todo $x \in \Omega$. Se existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \in \Omega),$$

então $f \in L^1(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = 0,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

Demonstração. Como $|f| \leq g$ e f é uma função mensurável, temos que $f \in L^1(\Omega)$. Além disso temos que, como $|f_n - f| \leq |f_n| + |f|$, segue que, $|f_n - f| \leq 2g$, de posse desta informação, aplicamos o Lema de Fatou, em que obtemos

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} [2g(x) - |f_n(x) - f(x)|] dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [2g(x) - |f_n(x) - f(x)|] dx$$

como $f = \lim f_n$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2g(x) dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [2g(x) - |f_n(x) - f(x)|] dx \\ &= \int_{\Omega} 2g(x) dx + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} -|f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{\Omega} 2g(x) dx - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

uma vez que $\liminf(-f_n) = -\limsup(f_n)$ (propriedade de $\liminf$ e $\limsup$, ver [41]). Como $\int_{\Omega} 2g(x)dx$, podemos subtraí-la da desigualdade, obtendo

$$0 \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|dx \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|dx \leq 0.$$

Se uma sequência de números reais não-negativos converge para zero, então seu limite superior é positivo, assim

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|dx \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

E pelo Teorema A.3, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

□

Agora, apresentaremos alguns resultados que provam que o L^p é um espaço de Banach. Como já foi frizado quando L^p é considerado como um espaço métrico, o espaço que realmente está sendo considerado não é um espaço cujos os elementos são funções, mas sim um espaço cujos os elementos são classes de equivalência de funções. Por uma questão de simplicidade de linguagem, continuaremos a falar de L^p como um espaço de funções.

Definição A.2. *Seja $(Y, \|\cdot\|_Y)$ um espaço vetorial normado. Uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ é de Cauchy se para todo ϵ positivo, existir um número inteiro positivo N correspondente tal que*

$$n, m > N \Rightarrow \|y_n - y_m\|_p < \epsilon.$$

Um espaço vetorial normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço de Banach, se toda sequência de Cauchy em Y converge em Y . Ou seja, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.

Lema A.2. *Seja $p \in [1, \infty)$ e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de funções em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ em $L^p(\Omega)$ que converge pontualmente para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mensurável.*

Demonstração. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 2^{-j}.$$

Uma vez que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, podemos fazer tal afirmação. Agora, definimos

$$g_j(x) = \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Tomando a norma $\|g_j\|_p$, temos que

$$\begin{aligned} \|g_j(x)\|_p &= \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\{ \int_{\Omega} (|f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_3} - f_{n_2}| + \dots + |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski, temos que

$$\begin{aligned} \|g_j(x)\|_p &\leq \left\{ \int_{\Omega} (|f_{n_2} - f_{n_1}|)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \dots + \left\{ \int_{\Omega} (|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p + \dots + \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p. \end{aligned}$$

Como $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 2^{-j}$, temos que

$$\|g_j(x)\|_p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^j} < 1.$$

Assim, concluímos que $\|g_j(x)\|_p < 1$.

Aplicando o lema de Fatou para $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ obtemos que $\|g(x)\|_p \leq 1$. Em particular, $g(x) < \infty$ a.e., de modo que a série

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), \quad (\text{A.7})$$

converge absolutamente para quase todos os pontos $x \in \Omega$. Denote a soma A.7 por $f(x)$, para aqueles x para os quais A.7 converge, fazendo $f(x) = 0$ no restante do conjunto de medida nula. Como

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) = f_{n_k}(x), \quad (\text{A.8})$$

temos que

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) \quad \text{a.e.} \quad (\text{A.9})$$

e temos o resultado. $\square$

Teorema A.5. *O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço de Banach, para todo p em $[1, \infty)$.*

Demonstração. Dada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, existe pelo Lema A.2 uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ e uma função mensurável tais que

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j}(x) \text{ a.e..}$$

Seja $\epsilon > 0$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \epsilon$$

Portanto, se $n > N$, temos pelo lema de Fatou que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}(x) - f_n(x)\|_p^p < \epsilon^p. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos da desigualdade acima que

1. $f - f_n \in L^p(\Omega)$, para $n > N$;
2. Consequentemente f está em $L^p(\Omega)$, uma vez que $f = (f - f_n) + f_n$;
3. E finalmente $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

E assim, concluímos que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach para $p \in [1, \infty)$. □

Teorema A.6. *O espaço $L^\infty(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\Omega)$ e considere os conjuntos

$$A_k = \{x \in \Omega; \|f_k(x)\|_\infty \leq |f_k(x)|\} \text{ e } B_{n,m} = \{x \in \Omega; \|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x) - f_m(x)|\}.$$

Então $\mu(A_k) = \mu(B_{n,m}) = 0$, para todos k, m , e n , onde μ representa a medida do conjunto. Seja F a união de todos os A_k e $B_{n,m}$, então $\mu(F) = 0$. Assim, no complementar de F , vale que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \|f_n - f_m\|_\infty \text{ e } |f_k(x)| < \|f_k\|_\infty. \quad (\text{A.10})$$

A partir da primeira desigualdade em A.10, existe $f : F^c \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ de maneira uniforme. Pela segunda desigualdade em A.10, temos que, todas $f_k : F^c \rightarrow \mathbb{K}$ são limitadas e como o limite é uniforme segue que,

$$f : F^c \rightarrow \mathbb{K}$$

é limitada. Vamos estender f da seguinte forma

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$$

pondo $f(x) = 0$, para todo $x \in F$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural N tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in F^c.$$

Como $|f_n - f|^{-1}((\epsilon, \infty]) \subset F$, para todo $n > N$, então ϵ pertence ao conjunto $S_n = \{\alpha \in [0, \infty], \mu(|f_n - f|^{-1}((\alpha, \infty])) = 0\}$. Logo, $\|f_n - f\|_\infty = \inf S_n \leq \epsilon$. Assim concluímos a prova. $\square$

Portanto, concluímos com esses dois ultimos resultados que o $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

APÊNDICE B

A INTEGRAL DE BOCHNER

B.1 A integral de Bochner

O objetivo desta seção é apresentar a construção e as propriedades básicas da integral Bochner. A abordagem apresentada aqui é baseada nas idéias de [32] onde a integral Bochner é apresentada para funções definidas no $\mathbb{R}^N$.

B.1.1 Funções Simples

Seja X um conjunto não vazio e seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach.

Definição B.1. Uma coleção $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X é chamada de **álgebra** de subconjuntos de X se $X \in \mathcal{R}$ e se é fechada por complementação e por uniões finitas de conjuntos de $\mathcal{R}$. Isto é $\mathcal{R}$ é uma álgebra se

1. $X \in \mathcal{R}$,
2. $A \in \mathcal{R} \Rightarrow A^c \in \mathcal{R}$,
3. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Definição B.2. Uma σ -álgebra de subconjuntos de X é uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X , isto é $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, tal que:

1. $X \in \mathcal{M}$,
2. Para todo $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$,
3. Para toda sequência de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \dots$ em $\mathcal{M}$, a união enumerável $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Exemplo B.1. O conjunto $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ou } A^c \text{ enumerável}\}$ é uma σ -álgebra de $\mathbb{R}$.

Definição B.3. Uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ é chamada de medida σ -aditiva se para qualquer sequência de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \dots$ em $\mathcal{M}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ temos

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definição B.4. Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$ onde:

- (a) X é um conjunto;
- (b) $\mathcal{M} \subset P(X)$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X ;
- (c) $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ é uma função tal que:
 - (c₁) $\mu(\emptyset) = 0$;
 - (c₂) μ é σ -aditiva;

Elementos de $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos mensuráveis (ou μ -mensuráveis) e μ de medida em X .

Observe que $\mu(A)$ é finito para todos os $A \in \mathcal{M}$. No que segue, denotamos a função característica desse conjunto como χ_A , onde $A \subset X$, dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Definição B.5. Uma função $f : X \rightarrow E$ é chamada de função simples se

$$f = v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots + v_n A_n,$$

em que $A_1, \dots, A_n$ pertencem a $\mathcal{M}$ e $v_1, \dots, v_n$ pertencem a E . O espaço vetorial de todas as funções simples com imagem em E será indicado por $\mathcal{S}(E)$.

Se $f \in \mathcal{S}(E)$ é uma função simples, então a função $|f|$ definida por $|f|(x) = \|f(x)\|$ é uma função real simples, isto é, $|f| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para uma função simples

$$f = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n,$$

com $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, definimos

$$\int f = \alpha_1 \mu(A_1) + \cdots + \alpha_n \mu(A_n).$$

Vamos usar o fato de que esta integral está bem definida e partimos para outras propriedades básicas.

B.2 A integral de Bochner

A integral de Bochner, recebe esse nome em homenagem a Salomon Bochner, ele foi um matemático austro-húngaro naturalizado estadunidense, fez trabalhos nas áreas de Análise, Teoria da Probabilidade e Geometria Diferencial. A integral de Bochner em questão, estende a definição de integral de Lebesgue para funções que tomam valores em um espaço de Banach, como o limite de integrais de funções simples.

Seja X um espaço real ou complexo de Banach. Consideramos a medida usual de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{M}$ a σ -álgebra que consiste em todos os subconjuntos mensuráveis de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Definição B.6. Se $I \in \mathcal{R}$, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita ser Bochner mensurável se houver uma sequência de funções simples $\{f_n\}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \|f_n(t) - f(t)\| dt = 0.$$

Então $n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t) dt$ é uma sequência de Cauchy em X .

Proposição B.1. Seja $I \in \mathcal{M}$ e seja $f : I \rightarrow X$. Então f é integrável se, e somente se, f é mensurável e $t \mapsto \|f(t)\|$ é Lebesgue integrável em I . Além disso,

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| dt.$$

A seguir, segue algumas notações e definições que foram utilizadas ao longo desta dissertação.

- Denotaremos campos de vetores por letras minúsculas em negrito, como por exemplo,

$$\mathbf{u}(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

- Os tensores denotaremos por letras maiúsculas caligráficas, como por exemplo,

$$\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{U}, \dots$$

- A derivada temporal de um campo vetorial $\mathbf{u}(t, x)$, onde $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$, será denotada por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$$

- Seja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, denotaremos o gradiente de $\mathbf{u}$ por

$$\text{grad } \mathbf{u} = (\text{grad } u_1, \text{grad } u_2, \text{grad } u_3)$$

onde $\text{grad } u_i = (\partial_1 u_i, \partial_2 u_i, \partial_3 u_i)$, $i = 1, 2, 3$, com $\partial_j u_i = \frac{\partial_j u_i}{\partial x_i}$.

- O divergente de um campo vetorial $\mathbf{a}(t, x)$, com $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$, será denotado por

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

- O rotacional de um campo vetorial $\mathbf{a}(t, x)$, com $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$, será denotado por

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$$

Observação C.1. *Nota-se que, o gradiente de um campo vetorial é um tensor, o rotacional é um vetor e o divergente é um escalar.*

- O produto escalar de dois tensores (também conhecido como produto interno ou pontual) é denotado pela notação vetorial por

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = c$$

ou em notação de índices

$$\mathcal{A}_{ij} \mathcal{B}_{ji} = c$$

Os dois pontos na notação vetorial indicam que ambos os índices devem serem somados. O resultado é um escalar.

C.1 Espaço de Funções Testes

Quando estudamos sobre funções temos que definir em qual conjunto ela está definida, para esse conjunto damos o nome de *domínio* e é nesse sentido que trabalhamos o espaço de funções testes, pois ele é o domínio de uma distribuição. Além disso, nesta seção destacamos alguns resultados, os quais fazem uso de uma operação nos espaços de funções: o produto convolução, já outro resultado constrói uma função teste constante em um compacto e que se anula fora de uma vizinhança do compacto.

Denotaremos por $x = (x_1, \dots, x_n)$ pontos em $\mathbb{R}^n$, por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos, por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ as n -uplas de números inteiros não negativos, a qual chamaremos de multi-índices.

Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $x \in \mathbb{K}^n$ define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Denotaremos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

o operador de derivação de ordem α . No caso $0 = (0, 0, \dots, 0)$, o operador D^0 estará representando o operador identidade, ou seja, $D^0 u = u$, para toda função u .

Observação C.2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, dizemos que $\beta \leq \alpha$, se $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Outra notação importante, é para integrais múltiplas. Usaremos a notação abreviada dx , em vez de $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ e para integral utilizaremos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, em vez de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Definição C.1. Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ é **localmente integrável** em $L^p(\Omega)$ e denotamos por $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$ tem-se

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Usando a desigualdade de Hölder, vide Apêndice A, temos o seguinte resultado.

Teorema C.1. Seja $1 \leq p \leq \infty$, então $L_{loc}^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Demonstração. Vamos provar apenas o caso em que $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$. Tomemos K um subconjunto compacto de Ω e $f \in L_{loc}^p(\Omega)$. Considere χ_K a função característica de K , isto é, a função que vale um nos pontos do conjunto K e zero fora deste. Temos que χ_K pertence a $L_{loc}^q(\Omega)$ para qualquer que seja q . Com isto, aplicando a desigualdade de Hölder, vemos que

$$\int_K |f(x)| dx = \int_K |f(x)| \chi_K(x) dx \leq \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |K|^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

em que q é o expoente conjugado de p . □

A seguir temos a definição clássica de suporte, como visto em cursos de Análise, em que f é função mensurável contínua e algumas propriedades que ao trabalhar com operações com funções, queremos saber como se comporta o suporte da operação.

Definição C.2. Se f é contínua em Ω , então o $\text{supp} f$ é igual ao fecho do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$, em símbolos

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que f possui suporte compacto.

Proposição C.1. Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$, então

- a. $\text{supp}(f') \subseteq \text{supp}(f)$;
- b. $\text{supp}(fg) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g)$;
- c. $\text{supp}(f + g) \subseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$.

Demonstração.

- a. Observe que, se $x \notin \text{supp}(f)$, então existe $r > 0$ tal que se $y \in B(x, r)$, $f(y) = 0$, logo $f'(x) = 0$, isso implica que

$$x \notin \text{supp}(f').$$

- b. Temos que $x \in \text{int}(\text{supp}(fg))$ se, e somente se, existir $r > 0$ tal que, se $y \in B(x, r)$, $f(y)g(y) \neq 0$

$$\Leftrightarrow f(y) \neq 0, g(y) \neq 0 \text{ em } B(x, r)$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{int}(\text{supp}(f)) \text{ e } x \in \text{int}(\text{supp}(g))$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{int}(\text{supp}(f)) \cap \text{int}(\text{supp}(g)).$$

- c. Notemos que se $x \notin \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$, então existe $r > 0$ tal que se $y \in B(x, r)$, $f(y) = g(y) = 0$, assim $f(y) + g(y) = 0$, para todo $y \in B(x, r)$, logo $x \notin \text{supp}(f + g)$. Concluindo assim, a demonstração. $\square$

Na definição a seguir, temos como funciona a convergência no espaço $L_{loc}^p(\Omega)$.

Definição C.3. Dizemos que uma sequência de funções (f_v) em $L_{loc}^p(\Omega)$ converge para $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, se para cada compacto E de Ω tem-se

$$p_E(f_v - f) = \left(\int_E |f_v(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Onde p_E é uma semi-norma.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto. Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço topológico $(C_0^\infty(\Omega), \mathcal{L})$, ou seja, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a topologia do limite indutivo $\mathcal{L}$.

Definição C.4. *Uma sequência de funções φ_r pertencentes a $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se*

1. *Existe um compacto K em Ω tal que $\text{supp}(\varphi_r) \subset K, \forall r$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;*
2. *para todo multi-índice α , as derivadas de ordem α das funções φ_r convergem uniformemente sobre K a derivada de ordem α de φ , em símbolos*

$$D^\alpha \varphi_r \rightarrow D^\alpha \varphi.$$

O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado o espaço de **funções testes** em Ω . Mostraremos a seguir que esse espaço não é vazio e que esta classe de funções é bastante significativa.

Lema C.1. *Seja $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{(-x^{-2})}, & x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Então $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Observe inicialmente a partir da Figura C.1, o gráfico da função acima traçado. Nele é possível observar que a função se aproxima de zero quando x se aproxima de 0 por valores positivos.

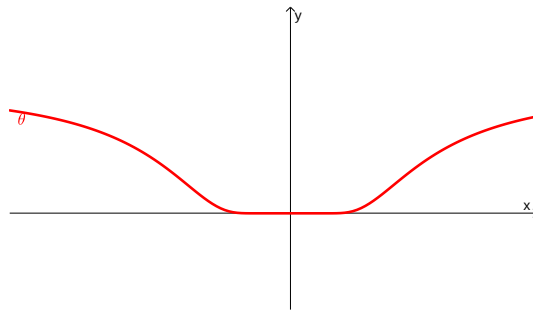


Figura C.1: Comportamento gráfico da função θ

Notemos que a função θ é infinitamente diferenciável. De fato, para $x \neq 0$ nada temos a provar. Quando $x \rightarrow 0$ e $x < 0$ então todas as derivadas são nulas, pois $\theta(x) = 0$. Por fim,

quando, $x \rightarrow 0$ e $x > 0$, temos que as derivadas são da forma

$$2x^{-3}e^{(-x^{-2})}, (-6x)^{-4}e^{(-x^{-2})} + 4x^{-6}e^{(-x^{-2})}, \dots$$

ou seja, as derivadas constituem numa combinação linear finita de termos da forma $x^{-n}e^{(-x^{-2})}$, n um inteiro positivo maior ou igual a zero. Assim, observamos que para mostrar que esses termos tendem a zero quando $x \rightarrow 0^+$ é suficiente mostrar, fazendo a mudança de variável $t = \frac{1}{x}$, que os termos

$$t^n e^{-t^2} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Aplicando a regra de L'Hospital obtemos

$$\frac{nt^{n-1}}{2te^{t^2}}, \frac{n(n-1)t^{n-2}}{2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2}}, \dots$$

Ao final, após aplicada a regra n -vezes obtemos o quociente em que o numerador é a constante $n!$ e o denominador é uma combinação linear de termos da forma $t^n e^{t^2}$, tal combinação tende ao ∞ quando $t \rightarrow \infty$, logo este quociente tende a 0.

Portanto, concluímos que $t^n e^{-t^2} \rightarrow 0$, na medida que $t \rightarrow \infty$. Logo, a função θ é infinitamente diferenciável. $\square$

Este lema nos permite construir diversos outros exemplos de funções testes, como mostrado a seguir.

Exemplo C.1. *Seja $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(\|x\|^2-1)^{-1}}, & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Em que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Note que, $\phi \in C_0^\infty$ e $\text{supp } \phi$ é igual a bola fechada centrada na origem e raio 1.

Nas Figuras C.2a e C.2b temos o gráfico da função ϕ , para o caso em que $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. É possível observar que a função tende a 0, quando $|x|$ se aproxima de 1 pela esquerda.

O exemplo a seguir, nos dá suporte para definir mais adiante sequência regularizante. Queremos aproximar funções contínuas e funções do espaço L^p por funções infinitamente diferenciáveis, para tal usaremos as sucessões regularizantes. Além disso, demonstraremos que o espaço das funções com suporte compacto e derivadas contínuas de qualquer ordem é denso em L^p .

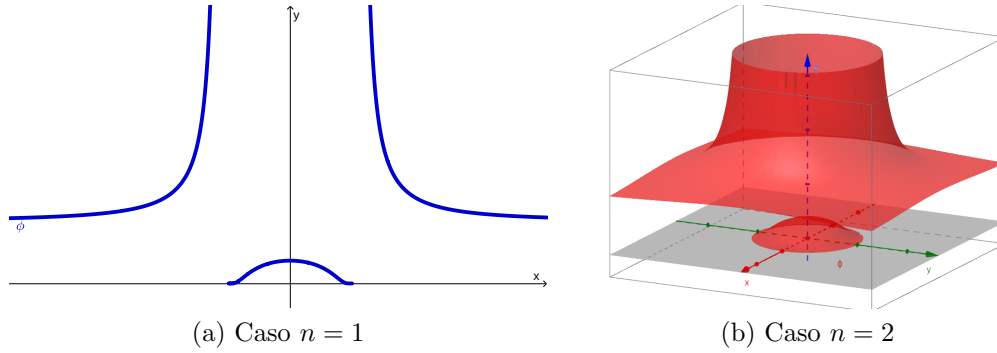


Figura C.2: Casos particulares da função ϕ

Exemplo C.2. Seja $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como no Exemplo C.1. Definimos

$$C = \left(\int_{\Omega} \phi(x) dx \right)^{-1},$$

e para cada r definimos $\phi_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_r(x) = Cr^n \phi(rx),$$

ou seja,

$$\phi_r(x) = \begin{cases} Cr^n e^{(|rx|^2 - 1)^{-1}}, & \text{se } |x| < \frac{1}{r} \\ 0, & \text{se } |x| \geq \frac{1}{r} \end{cases}$$

Temos que ϕ_r é, para cada r , uma função teste em Ω possuindo as seguintes propriedades

1. $0 \leq \phi_r \leq \frac{r^n}{C_e}$;
2. $\int_{\Omega} \phi_r dx = \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} \phi_r dx = 1$;
3. $\text{supp}(\phi_r) = \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$.

De fato, observamos que, o $\text{supp } \rho$ é igual a bola fechada de centro 0 e raio $\frac{1}{r}$, $\text{supp } \rho = \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$. Além disso, para cada r , aplicando o exemplo anterior, temos que $\rho_r \in C_0^\infty(\Omega)$, além disso

$$\int_{\Omega} \rho_r(x) dx = \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} Cr^n e^{(|rx|^2 - 1)^{-1}} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = rx$ resulta que,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho_r(x) dx &= \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} C r^n e^{(|rx|^2-1)^{-1}} dx \\ &= \int_{B_1(0)} C r^n e^{(|\xi|^2-1)^{-1}} \frac{1}{r} d\xi \\ &= \left(\int_{\Omega} \rho(x) dx \right)^{-1} \int_{\Omega} \rho(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \rho_r(x) dx = 1.$$

Assim, temos que, as funções ρ_r , à medida que r cresce, têm suportes cada vez menores, mas preservam o volume contido no gráfico. Quando r tende para o infinito essas funções estão concentradas na origem.

Definição C.5. Uma sequência regularizante é toda sequência $(\rho_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de funções tais que

$$\rho_r \in C_0^\infty, \quad \text{supp}(\rho_r) \subset \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}, \quad \int_{\Omega} \rho_r(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \rho_r \geq 0$$

A seguir iremos apresentar alguns resultados envolvendo sequência regularizante e funções localmente integrável, mas para tal faz-se necessário definir uma operação nos espaços de funções: a *convolução*.

Definição C.6. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p \in [1, \infty]$. Definimos a *convolução* de f por g pela integral,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau) g(\tau) d\tau,$$

onde $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Observação C.3. Se $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, k natural, e $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula de derivação

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Observação C.4. Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

De fato, fixando $x \in \mathbb{R}^n$, temos que a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável, esse fato segue da desigualdade de Young, ver Apendice A. Assim, temos que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)} f(x-y)g(y)dy,$$

uma vez que $f(x-y)g(y)$ é zero no complementar de $(x-\text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)$. Faremos a prova por contrapositiva, se $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$, então $(x-\text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ e assim $(f * g)(x) = 0$. Desta forma,

$$(f * g)(x) = 0, \text{ quase sempre em } (\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c.$$

De modo particular, $(f * g)(x) = 0$, quase sempre no interior de $(\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c$ e, portanto

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

Na proposição a seguir, ρ_r é uma sequência regularizante.

Proposição C.2. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Então $\rho_r * f$ tende para f uniformemente sobre todo compacto do $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e K um compacto do $\mathbb{R}^n$. Provaremos que $\rho_r * f \rightarrow f$ uniformemente sobre K .

Para isto, exibiremos um $r_0 \in \mathbb{N}$, que só depende de ϵ e de K , tal que para todo $r \leq r_0$ tenhamos

$$|(\rho_r * f)(x) - f(x)| < \epsilon,$$

seja qual for $x \in K$.

Tomando x qualquer em K . Temos

$$\begin{aligned} |(\rho_r * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x-y)f(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_r(y)dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\rho_r(y)dy \right| \\ &\leq \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} |f(x-y) - f(x)|\rho_r(y)dy. \end{aligned}$$

Usaremos a seguir a continuidade uniforme da função f em K de modo a majorarmos a integral por ϵ para um r suficientemente grande. Contudo, apesar de x pertencer a K , não temos a garantia que $x - y$ pertença a K para $y \in B_{\frac{1}{r}}(0)$. Definimos então,

$$K_1 = K - \overline{B_1(0)}.$$

Assim K_1 é um compacto e à medida que y varia na bola $B_{\frac{1}{r}}(0) \subset B_1(0)$ tem-se $x - y$ pertencente ao compacto K_1 . Então, com a continuidade uniforme da f , para o $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, $\forall z_1, z_2 \in K_1$ com

$$\|z_1 - z_2\| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Em particular, para os pontos x e $x - y$ temos

$$\|x - (x - y)\| = \|y\| < \delta \Rightarrow |f(x - y) - f(x)| < \epsilon.$$

Uma vez que, $y \in B_{\frac{1}{r}}(0)$, então $\|y\| < \frac{1}{r}$. Considerando, então $r_0 \in \mathbb{N}$ com $r_0 > \frac{1}{\delta}$. Logo, para todo $r \geq r_0$, temos $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_0}$ o que implica $\|y\| < \frac{1}{r} < \delta$. Portanto,

$$\|f(x - y) - f(x)\| < \epsilon$$

e, conseqüentemente,

$$\|(\rho_r * f)(x) - f(x)\| \leq \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} |f(x - y) - f(x)| \rho_r(y) dy < \epsilon \int_{B_{\frac{1}{r}}(0)} \rho_r(y) dy = \epsilon$$

para todo $r \geq r_0$ seja qual for $x \in K$.

□

Proposição C.3. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Então $f = 0$ em quase toda parte.

Demonstração. Para uma demonstração, vide [12], Capítulo 1, Proposição 3. □

Lema C.2. *(Du Bois Raymond)*

Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\psi \in C_0(\Omega)$ e consideremos (ρ_r) uma sequência regularizante. Pela Proposição C.2 temos que

$$\tilde{\psi}_r = \tilde{\psi} * \rho_r \rightarrow \tilde{\psi} \quad (\text{C.1})$$

uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$, onde $\tilde{\psi}$ é a extensão de ψ que se anula fora de Ω . Além disso, denotando-se por K o $\text{supp}(\psi)$, temos para $r \geq r_0$ que

$$\text{supp}(\tilde{\psi}) \subset \text{supp}(\psi) + \text{supp}(\rho_r) \subset K + \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)} \subset \Omega. \quad (\text{C.2})$$

Com efeito, seja $x \in K + \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$. Então $x = z + y$ para algum $z \in K$ e $y \in \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$. Como K é um compacto contido em Ω , existe $s > 0$ tal que $B_r(z) \subset \Omega$. Considerando, então, $r_0 > \frac{1}{s}$. Temos, para todo $r \geq r_0$ que

$$\|x - z\| = \|y\| \leq \frac{1}{r} < s, \text{ i.e., } x \in B_r(z) \subset \Omega$$

isso prova a continência em C.2. Fazendo

$$K_1 = K + \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$$

então,

$$\text{supp}(\tilde{\psi}_r) \subset K + \overline{B_{\frac{1}{r}}(0)} \subset K_1 \text{ e } \text{supp}(\psi) = K \subset K_1. \quad (\text{C.3})$$

Logo, para todo $r \geq r_0$ resulta que

$$\int_{\Omega} u \tilde{\psi}_r dx \rightarrow \int_{\Omega} u \psi dx \quad (\text{C.4})$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(\tilde{\psi} - \psi)| dx &= \int_{K_1} |u| |\tilde{\psi} - \psi| dx \\ &\leq \left(\max_{x \in K_1} |\tilde{\psi}_r(x) - \psi(x)| \right) \int_{K_1} |u| dx. \end{aligned}$$

a última expressão acima tende a zero, em virtude de C.1. Por C.3 temos que a sequência $\tilde{\psi}_r$ pertence a $C_0^\infty(\Omega)$. Logo, por hipótese temos que

$$\int_{\Omega} u \tilde{\psi}_r dx = 0$$

e de C.4 resulta que

$$\int_{\Omega} u \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0(\Omega).$$

Segue da proposição anterior que $u = 0$ quase sempre em Ω . □

Proposição C.4. *O espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $p \in [0, \infty)$.*

Demonstração. Sabemos da teoria de integração que $C_0(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Supondo então que, $p \in (1, \infty)$. E para demonstrar que $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, é suficiente comprovar se $h \in L^{p'}(\Omega)$ e verifica que $\int_{\Omega} hu = 0$ para todo $u \in C_0(\Omega)$ então $h = 0$. Com efeito, temos que $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ pois sendo K um compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω temos que

$$\|h\|_{L^1(K)} = \int_{\Omega} |h\chi_K| dx \leq \|h\|_{L^{p'}} \text{med}(K)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Desta forma, podemos aplicar a Proposição 3.3 para concluir que $h = 0$ quase sempre em Ω . $\square$

Procedendo de maneira análoga a proposição anterior temos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, como segue.

Observação C.5. *Temos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, \infty)$. De fato, é suficiente notar que qualquer função em $L^p(\Omega)$ com suporte compacto pode ser aproximada na L^p -norma por funções C_0^∞ . Tomando $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$ e $\int_{\Omega} \phi(x) dx = 1$, definindo para $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \phi(x/\varepsilon)$. Se $f \in L^p(\Omega)$ com suporte compacto, , então $\phi_\varepsilon * f$ tem suporte compacto, de classe C^∞ e $\phi_\varepsilon * f$ converge para $f \in L^p$.*

Proposição C.5. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\rho_r * f \rightarrow f \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Inicialmente observamos que, para cada $r \in \mathbb{N}$, $\rho_r * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideramos então, $\varepsilon > 0$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Usando o fato que $C_0(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^p , existe $f_1 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por outro lado, temos de resultados anteriores que

$$\rho_r * f_1 \rightarrow f_1$$

uniformemente sobre todo compacto do $\mathbb{R}^n$. Mas, para cada r ,

$$\text{supp}(\rho_r * f_1) \subset \text{supp}(\rho_r) + \text{supp}(f_1) \subset \overline{B_1(0)} + \text{supp}(f_1) \subset K$$

onde K é um compacto fixo do $\mathbb{R}^n$, assim, em particular,

$$\rho_r * f_1 \rightarrow f_1$$

uniformemente sobre K , o que implica que

$$\|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty \quad (\text{C.5})$$

pois dado

$$\frac{\varepsilon}{2(\text{med}(K))^{\frac{1}{p}}} > 0$$

existe r_0 natural tal que, para $r \geq r_0$ temos

$$\begin{aligned} \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |(\rho_r * f_1)(x) - f_1(x)|^p dx \\ &= \int_K |(\rho_r * f_1)(x) - f_1(x)|^p dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2(\text{med}(K))} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K dx = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\rho_r * f - \rho_r * f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|\rho_r * (f - f_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\rho_r\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Assim, os três últimos resultados nos fornece dados para mostrar que, para r suficientemente grande

$$\|\rho_r * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que prova o desejado. $\square$

C.2 Distribuições

Pela seção anterior, já sabemos como acontece a convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, assim podemos definir funcionais contínuos nesses conjuntos. A esses funcionais damos o nome de distribuições.

Definição C.7. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma distribuição T é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ isto é, é uma função que a todo elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associa um número complexo $T(\varphi)$, que também escrevemos como $\langle T, \varphi \rangle$, de tal modo que estejam satisfeitas as seguintes condições:*

1. *A função é linear, isto é, dadas duas funções $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e uma distribuição T , temos*

$$T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \text{ e } T(c\varphi_1) = cT(\varphi_1),$$

onde c é um número complexo;

2. *A função é contínua, isto é, se φ_i é sequência de funções em $\mathcal{D}(\Omega)$, que converge pontualmente para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então*

$$T(\varphi_i) \rightarrow T(\varphi).$$

Observação C.6. *Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições.*

Em $\mathcal{D}'(\Omega)$ definimos a seguinte topologia.

Definição C.8. *Seja (T_r) uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $T_r \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_r, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como vimos anteriormente, dada uma particular distribuição T ela pode ser naturalmente estendida para uma categoria mais geral de funções que as de $\mathcal{D}(\Omega)$ e para estas funções basta impor uma convergência “mais fraca” para poder assegurar que $T(\varphi_i)$ tende para $T(\varphi)$ quando φ_i tendem para φ . Vamos chamar a atenção para este fato nos exemplos que examinaremos a seguir e usá-lo para dar maior generalidade às fórmulas que demonstrarmos.

Exemplo C.3. *Uma função localmente integrável f define uma distribuição que indicamos por T_f ou simplesmente por f quando não houver perigo de confusão; para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a distribuição T_f é definida por*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como φ é nula fora de um certo compacto K e φ sendo contínua nesse conjunto (fechado e limitado) e portanto é limitada, ou seja, existe M tal que $|\varphi(x)| \leq M$ e a função f é integrável temos que,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)| dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &< M \int_K |f(x)| dx, \end{aligned}$$

que é finita e portanto $\langle T_f, \varphi \rangle$ está bem definida. É imediato que esse funcional é linear. Vamos demonstrar a sua continuidade:

Tomemos uma sequência $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$, então existe um compacto K tal que $\text{supp}(f) \subset K$. Todas as funções φ_j são nulas fora desse compacto e tendem uniformemente para zero bem como todas as suas derivadas, isto é, se $M_j = \sup_{x \in K} |\varphi_j(x)|$ então $M_j \rightarrow 0$ e da desigualdade abaixo

$$|T_f(\varphi_j)| \leq M_j \int_K |f(x)| dx,$$

segue que $T_f(\varphi_j)$ também tende para zero.

É oportuno observar que existem distribuições não definidas por funções localmente integráveis, como pode ser visto no exemplo que segue.

Exemplo C.4. Seja $x_0 \in \Omega$. Então δ_{x_0} definido por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω . Quando $x_0 = 0$, escreve-se δ_0 . Provaremos que a distribuição δ_{x_0} não pode ser representada por uma função localmente integrável f , isto é, não existe uma função localmente integrável f tal que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenhamos

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação C.7. De fato, se existisse uma tal função f , então, considerando a aplicação $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$\psi(x) = \xi(x) \|x - x_0\|^2, \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Da equação anterior temos que

$$\int_{\Omega} f(x)\xi(x)\|x - x_0\|^2 dx = \xi(x_0)\|x_0 - x_0\| = 0.$$

Pelo lema de Du Bois-Raymond tem-se $f(x)\|x - x_0\|^2 = 0$ quase sempre em Ω , mostrando que $f(x) = 0$ quase sempre em Ω . Resulta que $\varphi(x_0) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ o que é um absurdo.

Proposição C.6. *Existem sequências de funções (ρ_r) , localmente integráveis que convergem para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, mas o limite T não pode ser definido por uma função localmente integrável.*

Demonstração. Considerando a sucessão regularizante $(\rho_r)_{r \in \mathbb{R}^n}$ definida na Seção C, Definição C.5, temos que para cada $r \in \mathbb{N}$, $\rho_r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Provaremos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \rho_r, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) \varphi(0) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \\ &= \int_{\|x\| \leq \frac{1}{r}} \rho_r(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx, \end{aligned}$$

pois,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) dx = 1.$$

Pela continuidade uniforme da função φ , temos que, dado ε positivo, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| < \delta$ então $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$. Tomando $r_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $r_0 \geq \frac{1}{\delta}$, daí para cada $r \geq r_0$ tem-se $B_{\frac{1}{r}}(0) \subset B_{\delta}(0)$ e conseqüentemente $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$ para todo $\|x\| \leq \frac{1}{r}$, note que $x \in B_{\frac{1}{r}}(0) \subset B_{\frac{1}{r_0}}(0)$. Logo,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int_{\|x\| \leq \frac{1}{r}} \rho_r(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \varepsilon,$$

para todo $r \geq r_0$, isso mostra que existe sequências de funções que convergem para uma distribuição. Mas note que, podemos reescrever da seguinte forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \rho_r, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Com isso prova que, $\rho_r \rightarrow \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ou seja, T não é definida por uma função localmente integrável. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADAMS, R. A.: Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975. (Pure and Applied Mathematics).
- [2] ANDRADE, B.: On the well-posedness of a Volterra equation with applications in the Navier-Stokes problem. Math Meth Appl Sci. 2018; 41: 750-768.
- [3] ANDRADE, B., VIANA, A.: On a fractional reaction-diffusion equation. Z. Angew. Math. Phys. 68-59 (2017).
- [4] AVDONIN, S., PANDOLFI, L.: Simultaneous temperature and flux controllability for heat equations with memory. Q. Appl. Math. 71(2), 339-368 (2013).
- [5] BAE, H.-O., JIN, B.J.: Temporal and spatial decays for the Navier-Stokes equations. Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A 135(3), 461-477 (2005).
- [6] BERTRAND, J.: BERTRAND, P.; OVARLEZ, J. The Transforms and Applications Handbook, Second edition, Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
- [7] BREZİS, H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. 1 ed. Nova Iorque: Springer, 2011
- [8] CARILLO, S.: Existence, uniqueness and exponential decay: an evolution problem in heat conduction with memory. Q. Appl. Math. 69(4), 635-649 (2011).
- [9] CARILLO, S.: Some remarks on materials with memory: heat conduction and viscoelasticity. J. Nonlinear Math. Phys. 12(suppl. 1), 163-178 (2005).
- [10] CARILLO, S., VALENTE, V., VERGARA Caffarelli, G.: A linear viscoelasticity problem with a singular memory kernel: an existence and uniqueness result. Differ. Integral Equ. 26(9-10), 1115-1125 (2013).
- [11] CARVALHO NETO, P. M.: Equações Diferenciais Fracionárias: Um Novo Estudo de Soluções Locais e Globais em Espaços de Banach. Tese de Doutorado. ICMC-USP, São Carlos. 2013.

- [12] CAVALCANTI, M.M.; CAVALCANTI, V.N.D.: Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de sobolev. Maringá: EDUEM - Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2009.
- [13] ELFVING, G.: The History of Mathematics in Finland 1828-1918. Frenckell, Helsinki, 1981.
- [14] FOLLAND, G.B.: Fourier analysis and its applications. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software. Pacific Grove, California, 1992.
- [15] FOLLAND, G.B.: Real Analysis: modern techniques and their applications . 2nd ed. New York: JOHN WILEY e SONS, 1999.
- [16] FETAHU, E.: On Semigroups Of Linear Operators. Dissertação de Mestrado. Central European University, Budapest- Hungary, 2014.
- [17] GENTILI, G.: Regularity and stability for a viscoelastic material with a singular memory kernel. J. Elast. 37(2), 139-156 (1994/95).
- [18] GIGA, Yoshikazu: Solutions for semilinear parabolic equations in L_p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. Differ. Equ. 62(2), 186-212 (1986).
- [19] GIORGI, C.; PATA, V.: Asymptotic behavior of a nonlinear hyperbolic heat equation with memory. NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 8(2), 157-171 (2001).
- [20] GORENFLO, R. et al.: Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. New York: Springer, 2014.
- [21] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. Fixed Point Theory. New York: Springer, 2003.
- [22] GRIGOLETTO, E. C. Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler, Tese de Doutorado. Campinas, SP, 2014.
- [23] GURTIN, M.E., PIPKIN, A.C.: A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Arch. Ration. Mech. Anal. 31(2), 113-126 (1968)
- [24] GURTIN, M.E. An Introduction to Continuum Mechanics. Acad. Press, New York, 1981.
- [25] HANKEL, H. Die Eulerschen Integrale bei Unbeschränkter Variabilität des Argumentes, Habilitations-Dissertation, Leipzig, 1863.
- [26] HENRY, D. : Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1981. Lecture Notes in Mathematics, 840.
- [27] HILFER, R. Applications of fractional calculus in physics. New Jersey: World Scientific, 2000.
- [28] HIRATA, H.; MIAO, C. Space-time estimates of linear flow and application to some nonlinear integro-differential equations corresponding to fractional-order time derivative. Adv. Differential Equations 7 (2002), no. 2, 217-236.
- [29] KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA H. M.; TRUJILLO J. J. Theory and Applications of fractional differential equations. 1ª edição. Amsterdam - Holanda: Elsevier B.V., 2006.
- [30] KOELLER, R.C.: Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. Trans. ASME J. Appl. Mech. 51(2), 299-307 (1984).

- [31] MAINARDI, F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010.
- [32] MIKUSINSKI, J. The Bochner integral, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 55. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1978.
- [33] MUNKRES, J. R. Analysis on manifolds. USA: Westview Press, 1991.
- [34] OLDHAM, K.B.; SPANIER, J. The Fractional Calculus. Academic Press, 1974.
- [35] PALLARA, Luca Lorenzi, Alessandra Lunardi, Giorgio Metafuni, Diego. Analytic semigroups and reaction-diffusion problems. 01 jan. 2004, 31 dec. 2005. 127 p. Notas de Aula (Notas de seminários).
- [36] PANDOLFI, L. The controllability of the Gurtin-Pipkin equation: a cosine operator approach. Appl. Math. Optim. 52(2), 143-165 (2005).
- [37] PAZY, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [38] POLLARD, H. The representation of $\exp(-x^\lambda)$ as a Laplace integral, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 908-910.
- [39] POLLARD, H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1115-1116. Post, E.L. (1930). Generalized differentiation, Trans. Amer. Math. Soc. 32, 723-781.
- [40] PRÜSS, J. Evolutionary integral equations and applications, Monographs in Mathematics, 87. Birkhäuser, Basel (1993).
- [41] RUDIN, W. Real and Complex Analysis. McGraw Hill, 1987.
- [42] RUDIN, W. Functional Analysis. McGraw Hill, 1973.
- [43] SANTANA, M.G. Equações Integrais de Volterra e Aplicações. Monografia (Graduação). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.
- [44] SILVA, C. Análise assintótica e qualitativa de equações de evolução e aplicações a modelos físicos. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.
- [45] SIRACUSA, G. Sobre Equações Integro-diferenciais com Retardo Dependendo do Estado e Equações Semilineares Hiperbólicas. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.
- [46] SCHNEIDER, W.R., WYSS, W.: Fractional diffusion and wave equations. J. Math. Phys. 30(1), 134-144 (1989).
- [47] SNEDDON, I. N. Fourier Transforms, Dover Publications, New York, 1995.
- [48] SPIVAK, M. Calculus on Manifolds. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

- [49] STEIN, E. M. and WEISS, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, vol. 32 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.
- [50] TITCHMARSH, E. C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Chelsea Publishing Company, New York, 1986 (First Edition: Oxford University Press, Oxford, 1937).
- [51] TREVES, F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, 1967.
- [52] WANG, J.M.; GUO, B.Z.; FU, M.Y. Dynamic behavior of a heat equation with memory. Math. Methods Appl. Sci. 32(10), 1287-1310 (2009).
- [53] WEISSLER, F.B.: Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. Israel J. Math. 38, 29-40 (1981).
- [54] YONG, J.; ZHANG, X. Heat equation with memory in anisotropic and non-homogeneous media. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27(2), 219-254 (2011)