

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES FECHADAS QUE MINIMIZAM ÁREA EM VARIEDADES
TRIDIMENSIONAIS

por

Franciele Conrado dos Santos

Mestrado Acadêmico em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001
São Cristóvão-SE

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Rigidez de Superfícies Fechadas que Minimizam Área em Variedades
Tridimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão-SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Franciele Conrado
S237r Rigidez de superfícies fechadas que minimizam área em variedades tridimensionais / Franciele Conrado dos Santos ; orientador Almir Rogério Silva Santos. - São Cristóvão, 2019.
107 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Superfícies (Matemática). 3. Curvas. 4. Cônicas. 5. Espaço e tempo I. Santos, Naldisson dos orient. II. Título.

CDU 512.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

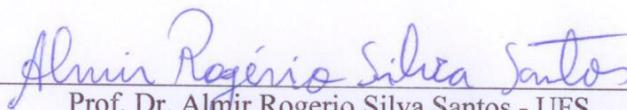
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Rigidez de Superfícies Fechadas que Minimizam Área em
Variedades Tridimensionais**

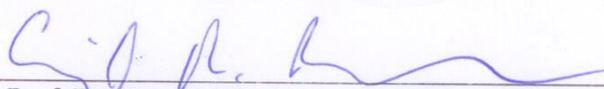
por

Franciele Conrado dos Santos

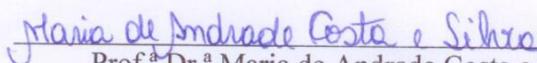
Aprovada pela banca examinadora:



Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador



Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa - UFMG
Primeiro Examinador



Prof.^a Dr.^a Maria de Andrade Costa e Silva - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 04 de Março de 2016

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Métricas Riemannianas e Curvatura	5
1.2 O Teorema de Gauss-Bonnet	9
1.3 O Fluxo de Ricci e a Equação de Evolução da Curvatura Escalar	10
1.4 Subvariedades Riemannianas Mínimas	11
1.5 O Problema de Yamabe	16
1.6 Fibrados Vetoriais	17
1.7 Superfícies de 1-lado e de 2-lados	19
1.8 Fórmulas de Variação	22
1.8.1 Primeira Fórmula de Variação de Área	22
1.8.2 Segunda Fórmula de Variação de Área	25
1.8.3 Subvariedades Estáveis	30
1.9 Existência de Superfícies Minimizando Área em Classes de Isotopia	36
1.10 Espaços de Recobrimento	37
1.11 Princípios do Máximo	39

2 Superfícies Hiperbólicas	41
2.1 Prova da Desigualdade	42
2.2 Caso Igualdade	43
3 Superfícies Esféricas	57
3.1 Prova da Desigualdade	58
3.2 Caso Igualdade	58
4 Planos Projetivos	72
4.1 Prova das Desigualdades (4.1) e (4.2)	73
4.2 Caso Igualdade em (4.1)	81
5 Toros	88
5.1 Demonstração do Teorema 5.1	89
Referências Bibliográficas	100

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste em expor os resultados obtidos em quatro artigos, [2], [3], [28] e [6]. De forma geral, estes artigos fazem um estudo da geometria de variedades Riemannianas tridimensionais com curvatura escalar limitada inferiormente que possuem superfícies fechadas que são localmente de menor área. Tais superfícies podem ser homeomorfas à esfera, ao plano projetivo, ao toro ou à superfícies hiperbólicas. No artigo [6], Cai e Galloway consideram o caso em que a superfície é um toro de 2-lados e mostram que neste caso a variedade é plana em uma vizinhança da superfície, desde que sua curvatura escalar seja não-negativa. Nos outros casos, Bray-Brendle-Eichmair-Neves [2], Bray-Brendle-Neves [3] e Nunes [28] obtiveram desigualdades envolvendo a curvatura escalar da variedade, a área da superfície e sua característica de Euler. Além disso, caracterizaram a variedade no caso em que ocorre a igualdade.

Palavras Chaves: Variedades Tridimensionais, Curvatura Escalar, Superfícies Mínimas, Rigidez.

Abstract

The main task of this work is to study the results established in the papers [2], [3], [28] and [6]. Roughly speaking, these papers work with Riemannian 3-manifolds with lower bounded scalar curvature which have locally area-minimizing closed surfaces. Such surfaces may be homeomorphic to the sphere, to the projective plane, to the torus or to the hyperbolic surfaces. In the paper [6], Cai and Galloway have considered the case in which the surface is a 2-sided torus. They showed under the assumption that the scalar curvature is nonnegative that the manifold is flat in a neighborhood of the surface. In the other cases, Bray-Brendle-Eichmair-Neves [2], Bray-Brendle-Neves [3] and Nunes [28] have obtained inequalities involving the scalar curvature of the manifold, the area of the surface and its Euler characteristic. Furthermore, they characterize the manifold in case of equality.

Key Words: 3-Manifolds, Scalar Curvature, Minimal Surfaces, Rigidity.

Introdução

Um fato interessante em geometria diferencial é que a limitação inferior da curvatura seccional, da curvatura de Ricci ou da curvatura escalar de uma variedade Riemanniana M pode influenciar na geometria de M ou até mesmo em sua topologia. O Teorema de Synge afirma que dada uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão n que possui curvatura seccional positiva, então ela será orientável se n é ímpar, ou simplesmente conexa se n é par e M é orientável. O Teorema de Bonnet-Myers nos diz que se a curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana completa M é maior que uma constante positiva então M é compacta.

Em [32] o autor observou que em uma variedade de curvatura de Ricci positiva não existem hipersuperfícies fechadas mínimas estáveis de 2-lados. Neste trabalho estaremos interessados no estudo da geometria de uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar limitada inferiormente admitindo a existência de uma superfície fechada que localmente é de menor área. As principais ferramentas para este estudo é a segunda fórmula de variação de área, a Equação de Gauss e o Teorema de Gauss-Bonnet.

Em 1979 R. Schoen e S. T. Yau em [31] mostraram que toda variedade Riemanniana tridimensional orientada com curvatura escalar positiva não possui uma superfície fechada orientável mínima imersa com gênero positivo. Usando esse fato, eles mostraram o seguinte resultado.

Teorema 0.1 (R. Schoen e S. T. Yau). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional orientada compacta com curvatura escalar não-negativa. Se M contém uma superfície compacta orientável incompressível Σ com gênero maior ou igual a 1, então M é plana.*

Em 1980 Fischer-Colbrie e Schoen em [15] mostraram que se M é uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com curvatura escalar não-negativa e se Σ é um toro de 2-lados mínimo estável em M , então Σ é plana e totalmente geodésica. Ainda neste trabalho, os autores observaram que para que o Teorema 0.1 fosse válido seria suficiente que existisse um toro de 2-lados de menor área em M (não necessariamente incompressível), e então inspirados no Teorema da Decomposição de Cheeger-Gromoll (1971) eles lançaram a seguinte conjectura.

Conjectura: Se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3 com curvatura escalar não-negativa e Σ é um toro de 2-lados que é de menor área em M , então M é plana.

Esta conjectura foi provada em 2000 por M. Cai e G. Galloway em [6], que assumiram que Σ é de menor área em sua classe de isotopia. A prova desta conjectura segue do seguinte resultado local.

Teorema 0.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar não-negativa, $R_g \geq 0$. Se Σ é um toro de 2-lados mergulhado em M que é localmente de menor área, então M é plana em uma vizinhança de Σ .*

A demonstração deste teorema consiste primeiramente em utilizar uma perturbação com curvatura escalar positiva da métrica g , para mostrar que Σ não é estritamente de menor área. Com isso, pode-se concluir que em uma vizinhança normal V existem toros de 2-lados Σ^+ e Σ^- , um em cada lado de Σ , que são localmente de menor área. A partir de duas cópias da região em V limitada pelos toros Σ^+ e Σ^- , obtemos um toro tridimensional \mathbb{T}^3 com curvatura escalar não-negativa. Finalmente, o resultado segue do fato que \mathbb{T}^3 não admite uma métrica com curvatura escalar positiva.

O Teorema [0.2](#), provado por M. Cai e G. Galloway, é um exemplo de que a existência de uma superfície localmente de menor área em uma variedade Riemanniana tridimensional M com curvatura escalar limitada inferiormente influencia na geometria de M . Inspirado neste trabalho, surgiram outros resultados.

Em [\[2\]](#), H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair e A. Neves estenderam o estudo para as variedades Riemannianas tridimensionais que admitem superfícies fechadas homeomorfas ao plano projetivo. Eles denotaram por $\mathcal{A}(M, g)$ o ínfimo das áreas de todas as superfícies homeomorfas ao plano projetivo mergulhadas em M , e deram uma cota superior para esta quantidade em termos de sua característica de Euler e o ínfimo da curvatura escalar de M . Além disso, mostraram que se a igualdade é válida então M é isométrica ao espaço projetivo tridimensional. Mais precisamente eles mostraram o seguinte resultado.

Teorema 0.3. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta. Assuma que M contém uma superfície mergulhada homeomorfa ao plano projetivo. Então*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi, \tag{1}$$

e

$$\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi} (\text{sys}(M, g))^2 > 0, \tag{2}$$

onde $\text{sys}(M, g)$ denota a systole de (M, g) que é definida por

$$\text{sys}(M, g) = \inf\{L(\gamma); \gamma \text{ é uma curva fechada não-contrátil em } M\}.$$

Além disso, se a igualdade em [\(1\)](#) é satisfeita, então (M, g) é isométrica a \mathbb{RP}^3 .

A demonstração da Desigualdade [2](#), usa essencialmente a Desigualdade de Pu [\[29\]](#) e a compacidade da variedade M . Para a demonstração da Desigualdade [1](#), mostra-se que o ínfimo $\mathcal{A}(M, g)$ é atingido por algum plano projetivo mergulhado em M . Com isso, esta desigualdade segue fazendo uso da segunda fórmula de variação de área, observando-se que planos projetivos admitem mergulhos de 1-lado. Para a demonstração do resultado de rigidez, basta submeter a métrica g em M a um fluxo de Ricci e usar a equação de evolução da curvatura escalar.

Em [\[3\]](#) H. Bray, S. Brendle e A. Neves estudaram o caso de superfícies fechadas Σ homeomorfas à esfera \mathbb{S}^2 imersas em uma variedade Riemanniana tridimensional compacta (M, g) . Neste caso,

não é necessário preocupar-se se Σ é de 2-lados ou de 1-lado, já que a esfera \mathbb{S}^2 é sempre de 2-lados independentemente do ambiente. Eles mostraram uma desigualdade similar a Desigualdade [1](#) e se válida a igualdade então M é um cilindro em uma vizinhança de Σ . Além disso, a variedade produto $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, h + dt^2)$, onde h é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^2 , é o recobrimento universal de (M, g) . Mais precisamente eles mostraram o seguinte resultado.

Teorema 0.4. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com curvatura escalar positiva e com segundo grupo de homotopia não-trivial. Então*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 8\pi, \quad (3)$$

onde $\mathcal{A}(M, g)$ é o ínfimo das áreas de todas as esferas mergulhadas em (M, g) . Além disso, se vale a igualdade, então o recobrimento universal de (M, g) é isométrico ao cilindro $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, h + dt^2)$, onde h é a métrica canônica da esfera.

Sacks, Uhlenbeck, Meeks e Yau mostraram em [17](#) que sob as hipóteses do Teorema [0.4](#) existe uma esfera mínima imersa em M que é de menor área em sua classe de homotopia, isto é, o ínfimo em $\mathcal{A}(M, g)$ é atingido. Com isso, a desigualdade [3](#) segue essencialmente da segunda fórmula de variação de área. Para a prova do resultado de rigidez, é usado o Teorema da Função Implícita para encontrar uma família a 1-parâmetro de esferas imersas em M com curvatura média constante e em seguida mostra-se que todas elas são superfícies mínimas em M . A partir daí, é construída uma isometria local entre o cilindro $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, h + dt^2)$ e (M, g) .

Um resultado similar a este último foi mostrado por I. Nunes em [28](#), que considerou superfícies fechadas Σ orientáveis de 2-lados com gênero maior ou igual a 2 que são localmente de menor área mergulhadas em uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar maior ou igual a -2 . Ele mostrou uma desigualdade envolvendo a área destas superfícies e a sua topologia, e que se vale a igualdade então M é um cilindro em uma vizinhança de Σ . Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 0.5. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar $R_g \geq -2$. Se $\Sigma \subset M$ é uma superfície fechada orientável de 2-lados mergulhada de gênero $g(\Sigma) \geq 2$ que é localmente de menor área, então*

$$|\Sigma|_g \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1) = -2\pi\chi(\Sigma), \quad (4)$$

onde $|\Sigma|_g$ é a área de Σ com respeito à métrica induzida. Além disso, se vale a igualdade, então Σ tem uma vizinhança isométrica ao cilindro $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$, onde $\varepsilon > 0$ e g_Σ é a métrica em Σ que possui curvatura Gaussiana constante igual a -1 . Mais precisamente, a isometria é dada por $f(t, x) = \exp_x(tN(x))$, $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ .

A prova da Desigualdade [4](#) segue essencialmente da segunda fórmula de variação de área e do Teorema de Gauss-Bonnet. Para caracterizar as superfícies satisfazendo a igualdade em [4](#), é usado o Teorema da Função Implícita para construir uma família a 1-parâmetro de superfícies mergulhadas todas homeomorfas a Σ e com curvatura média constante. Em seguida usa-se o Princípio do Máximo de Hopf e a solução do Problema de Yamabe para variedades com fronteira para mostrar que essas

superfícies tem todas a mesma área que Σ , em particular, que todas elas são superfícies mínimas em M . Por fim, obtém-se uma isometria local entre o cilindro $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$ e a variedade Riemanniana (M, g) , para algum número real ε positivo.

É importante mencionar aqui que após estes trabalhos surgiram outros nesta direção, como por exemplo, o trabalho de Micallef e Moraru [27] que deu uma prova unificada para os Teoremas 0.2, 0.4 e 0.5. Além deste, Ambrozio [1] mostrou um resultado nesta direção em variedades tridimensionais com fronteira e superfícies de 2-lados de fronteira livre.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar com detalhes as demonstrações originais dos Teoremas 0.2, 0.3, 0.4 e 0.5. Iniciamos no Capítulo 1 apresentando resultados preliminares que serão necessários para um bom entendimento dos capítulos seguintes. Definimos métricas Riemannianas, subvariedade mínimas, fibrados vetoriais, superfícies de 1-lado e de 2-lados e espaços de recobrimento. Recordamos o fluxo de Ricci e uma versão do Problema de Yamabe com bordo. Apresentamos ferramentas que serão importantes nas demonstrações tais como o Teorema de Gauss-Bonnet, as fórmulas de variação de área, Princípios do Máximo e um resultado de existência de superfícies minimizando área em sua classe de isotopia. Os capítulos seguintes são dedicados as demonstrações dos resultados principais desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos da geometria Riemanniana, bem como ferramentas de geometria, topologia e da análise que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Em todo trabalho usaremos a notação de Einstein que diz que índices repetidos abaixo e acima representam somas variando de 1 até a dimensão da variedade, como por exemplo,

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^n a_i b^i.$$

1.1 Métricas Riemannianas e Curvatura

Aqui denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M e $C^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções suaves definidas em uma variedade diferenciável suave M .

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é um tensor suave g do tipo $(2,0)$ em M tal que em cada ponto $p \in M$, a aplicação $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g_p(u, v) := g(U, V)(p),$$

onde $U, V \in \mathcal{X}(M)$ são tais que $U(p) = u$ e $V(p) = v$ é um produto interno em $T_p M$.

Teorema 1.1. *Toda variedade diferenciável Hausdorff com base enumerável admite uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.2. *Seja M uma variedade diferenciável. A operação $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definida por*

$$[X, Y] := XY - YX$$

é chamada de Colchete de Lie X e Y .

Proposição 1.1. *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ campos diferenciáveis em M e $f, g \in C^\infty(M)$, então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anticomutatividade);

2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*Identidade de Jacobi*);
3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y + gY(f)X$.

Seja M uma variedade diferenciável e $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais em M . Note que, $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ pois

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i},$$

para toda função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave.

Definição 1.3. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, que será denotada por

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y),$$

e satisfaz

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Teorema 1.2 (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo as condições

- (i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (*simétrica*);
- (ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$ (*compatível com a métrica*).

A conexão afim dada pelo Teorema [1.2](#) é chamada de conexão Riemanniana ou de Levi-Civita. A partir daqui, sempre que falarmos em conexão estaremos nos referindo a ela.

Seja M uma variedade Riemanniana e $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização de M . Os símbolos de Christoffel são as componentes da conexão Riemanniana e são definidos em U por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}.$$

Aqui e em todo o texto (g_{ij}) são as componentes da métrica no sistema de coordenadas dado e (g^{ij}) são as componentes de sua inversa neste mesmo sistema de coordenadas.

Definição 1.4 (Gradiente). Definimos o gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, como o único campo de vetores $\nabla_g f$ em $\mathcal{X}(M)$ tal que

$$\nabla f(X) = g(\nabla_g f, X).$$

Em um sistema de coordenadas pode-se mostrar que

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 1.5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Considere a aplicação $\phi : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por $\phi(Y) = \nabla_Y X$ onde $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo fixo. Definimos o divergente do campo X com respeito à métrica g como sendo

$$\operatorname{div}_g(X) = \operatorname{tr}_g(\phi).$$

Considere $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais em M . Se escrevermos $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, onde $a_i : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves para cada $1 \leq i \leq n$, podemos mostrar que

$$\operatorname{div}_g X = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_j \Gamma_{ij}^i.$$

Seja $f \in C^\infty(M)$. O Laplaciano de f com respeito à métrica g é definido como

$$\Delta_g f := \operatorname{div}_g(\nabla_g f) = \operatorname{tr}_g \nabla^2 f,$$

onde $\nabla^2 f$ é a hessiana de f .

Em coordenadas

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$.

Definição 1.6. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . O tensor curvatura de M é um tensor de tipo $(3, 1)$ definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana.

Suas componentes são

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Usando a métrica g obtemos um tensor do tipo $(4, 0)$ definido por

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

Suas componentes são

$$R_{ijkl} := R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = R_{ijk}^m g_{ml},$$

onde

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

Proposição 1.2. *Tem-se as seguintes propriedades para o tensor curvatura*

1. $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{jilk} = R_{lkji}$
2. $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ (*1ª Identidade de Bianchi*)

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$. Definimos a curvatura seccional de σ como

$$K_\sigma = \frac{R(u, v, v, u)}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2},$$

onde $\{u, v\}$ é uma base qualquer de σ . Pode-se mostrar que a curvatura seccional de σ em um ponto p de M não depende da escolha da base.

O tensor de Ricci de (M, g) é definido por

$$Ric(X, Y) = tr(Z \rightarrow R(Z, X)Y).$$

Em um sistema de coordenadas

$$R_{ij} = g^{kl} R_{kijl}.$$

A curvatura escalar é dada pelo traço do tensor de Ricci, isto é

$$R_g := tr(Ric_g) = g^{ij} R_{ij}.$$

O tensor curvatura pode ser escrito como

$$\begin{aligned} R &= W_g - \frac{R_g}{2(n-1)(n-2)} g \odot g + \frac{1}{n-2} Ric_g \odot g \\ &= W_g + A_g \odot g, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde W_g é o tensor de Weyl,

$$A_g = \frac{1}{n-2} \left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)} g \right) \tag{1.2}$$

é o tensor de Schouten e \odot é o produto de Kulkarni-Nomizu que é definido como

$$\begin{aligned} A \odot B(X, Y, Z, W) &= A(X, W)B(Y, Z) + A(Y, Z)B(X, W) \\ &\quad - A(X, Z)B(Y, W) - A(Y, W)B(X, Z), \end{aligned}$$

para quaisquer tensores simétricos A e B do tipo $(2,0)$.

O tensor de Weyl tem as mesmas simetrias algébricas do tensor curvatura, Proposição [1.2](#), todos os seus traços são zero, incluindo $g^{ik}W_{ijkl} = 0$, e é identicamente nulo para $n = 3$. Além disso, o tensor de Weyl é conformemente invariante, isto é

$$W_{e^f g} = e^f W_g$$

para qualquer função suave f sobre M . Veja [9](#) para mais detalhes.

Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [8](#).

1.2 O Teorema de Gauss-Bonnet

Em geometria diferencial o Teorema de Gauss-Bonnet é um importante resultado sobre superfícies, que relaciona a sua geometria (no sentido de curvatura) com a sua topologia (no sentido de característica de Euler). Nesta seção vamos apresentar o Teorema de Gauss-Bonnet tanto para superfícies orientáveis quanto para não-orientáveis. Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [16](#), [22](#) e [8](#).

Definição 1.7. *Uma triangulação de uma região R é uma família de triângulos $\{T_i\}_{i=1}^n$ tal que*

1. $R = \bigcup_{i=1}^n T_i$,
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ com $i \neq j$ então $T_i \cap T_j$ é um vértice ou uma aresta comum a T_i e T_j .

Para efeito de notação chamaremos $\tau = \{T_i\}_{i=1}^n$ uma triangulação de uma região R e V, A e F o número de vértices, arestas e faces da triangulação, respectivamente. Mostra-se que o número $V - A + F$ independe da escolha da triangulação da região R .

Definição 1.8. *Dada uma superfície Σ , definimos a característica de Euler como*

$$\chi(\Sigma) = V - A + F.$$

Exemplo 1.1. $\chi(\mathbb{S}^2) = 2, \chi(\mathbb{T}^2) = 0$ e $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$.

Em todo este trabalho apenas trataremos de superfícies compactas, por isso enunciaremos o Teorema de Gauss-Bonnet somente para este caso.

Teorema 1.3 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Se (Σ, g) é uma superfície Riemanniana Compacta e orientável, então*

$$\int_{\Sigma} K d\sigma_g = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde K e $d\sigma_g$ é a curvatura Gaussiana e o elemento de área de Σ , respectivamente.

Definição 1.9. *Seja M uma variedade diferenciável não-orientável. Dizemos que uma variedade diferenciável orientável \overline{M} é o recobrimento duplo orientável de M , se existe uma aplicação diferenciável sobrejetiva $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ tal que cada $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ com $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são abertos disjuntos em \overline{M} e π restrita a cada $V_i, i = 1, 2$, é um difeomorfismo sobre U . A aplicação π é chamada de aplicação de recobrimento.*

Proposição 1.3. *Toda variedade diferenciável não-orientável admite um recobrimento duplo orientável. Além disso, este é único a menos de difeomorfismo.*

Exemplo 1.2. *A esfera \mathbb{S}^2 é o recobrimento duplo orientável do plano projetivo \mathbb{RP}^2 e o toro \mathbb{T}^2 é o recobrimento duplo orientável da garrafa de Klein \mathbb{K}^2 .*

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana não-orientável e $f \in C^\infty(M)$. A integral de f sobre M é definida por

$$\int_M f dv_g = \frac{1}{2} \int_{\bar{M}} \pi^* f dv_{\pi^*g},$$

onde \bar{M} é o recobrimento duplo orientável de M e π é a aplicação de recobrimento.

O teorema a seguir nos dá uma versão do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas não-orientáveis, que pode ser encontrado em ([16], página 147).

Teorema 1.4. *Sejam (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta não-orientável e $\pi : \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ o recobrimento duplo orientável de Σ . Então*

1. $\chi(\bar{\Sigma}) = 2\chi(\Sigma)$;
2. $\tilde{K} = \pi^*K$, onde \tilde{K} é a curvatura Gaussiana da métrica Riemanniana $\tilde{g} := \pi^*g$ em $\bar{\Sigma}$;
3. $2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K d\sigma_g$.

1.3 O Fluxo de Ricci e a Equação de Evolução da Curvatura Escalar

Seja M uma variedade diferenciável e $g(t)$, $t \in [0, T)$, uma família a 1-parâmetro de métricas Riemannianas em M . Dizemos que $g(t)$ é solução para o fluxo de Ricci se

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

O matemático Richard Streit Hamilton mostrou que se M é compacta e g_0 é uma métrica Riemanniana em M , existem um número real $T > 0$ e uma família a 1-parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$, $t \in [0, T)$ que é solução para o fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$. Além disso, ele mostrou que a solução $g(t)$ é única.

Vejam alguns exemplos. Considere $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ a esfera unitária com a métrica canônica. Defina uma métrica em \mathbb{S}^n por $g_0 = r_0^2 g_{\mathbb{S}^n}$ com $r_0 > 0$ e a família a 1-parâmetro de métricas

$$g(t) := (r_0^2 - 2(n-1)t)g_{\mathbb{S}^n}.$$

Note que para que de fato $g(t)$ defina uma métrica devemos ter que $\lambda(t) = r_0^2 - 2(n-1)t$ seja um número positivo, consequentemente $g(t)$ está definida no intervalo $(-\infty, T)$ com $T = \frac{r_0^2}{2(n-1)}$.

Desde que o tensor de Ricci de uma métrica é invariante por multiplicação por escalar e a métrica canônica da esfera é uma métrica Einstein, então temos que $Ric_{g(t)} = Ric_{g_{\mathbb{S}^2}} = (n-1)g_{\mathbb{S}^2}$, logo

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2(n-1)g_{\mathbb{S}^2} = -2Ric_{g(t)}.$$

Portanto $g(t)$, $t \in (-\infty, T)$ com $T = \frac{r_0^2}{2(n-1)}$ e $g(0) = g_0$ é solução para o fluxo de Ricci.

De forma mais geral, se (M, g_0) é uma variedade Einstein, isto é, $Ric_{g_0} = \rho g_0$ pra alguma constante ρ , então a família a 1-parâmetro $g(t) = (1 - 2\rho t)g_0$ é solução para o fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$. Como por exemplo as formas espaciais: Espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , esfera \mathbb{S}^n e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Seja (M, g_0) uma variedade Riemanniana e $g(t)$, $t \in [0, T)$, a família a 1 parâmetro de métricas Riemannianas em M que é solução para o fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$. Então a curvatura escalar de M com respeito à métrica $g(t)$ satisfaz a equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{g(t)} = \Delta R_{g(t)} + 2|Ric_{g(t)}|^2. \quad (1.3)$$

Podemos ainda reescrever a equação de evolução [\(1.3\)](#) em função do tensor de Ricci sem traço como segue

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{g(t)} = \Delta R_{g(t)} + \frac{2}{3}R_{g(t)}^2 + 2|Ric_{g(t)}^\circ|^2, \quad (1.4)$$

onde o tensor Ricci sem traço é definido por

$$Ric_{g(t)}^\circ(X, Y) = Ric(X, Y) - \frac{1}{n}R_{g(t)}g(X, Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Para mais detalhes sobre fluxo de Ricci ver [\[4\]](#) e [\[9\]](#).

1.4 Subvariedades Riemannianas Mínimas

Sejam M^n e \overline{M}^{m+n} variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão. Pelo Teorema da Função Inversa, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V de p em M , tal que $f : V \rightarrow \overline{M}$ é um mergulho. Segue que $f(V)$ é uma subvariedade mergulhada de \overline{M} . Como V e $f(V)$ são difeomorfos, temos que $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}(f(V))$ é um isomorfismo para todo $p \in V$. Assim podemos identificar V com $f(V)$ e campos $X \in \mathcal{X}(V)$ com $df(X) \in \mathcal{X}(f(V))$. Se (\overline{M}, g) é uma variedade Riemanniana, então considerando a métrica f^*g em M teremos que f é uma imersão isométrica. Daqui por diante iremos considerar que $M \subset \overline{M}$. Observe que para todo $p \in M$, podemos decompor $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp.$$

Considere $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathcal{X}(M)$ e defina $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\top,$$

onde \bar{X} e \bar{Y} são extensões locais de X e Y a \bar{M} , respectivamente. Pode-se mostrar que ∇ assim definida é a conexão Riemanniana de M .

A segunda forma fundamental da imersão f é a aplicação bilinear simétrica $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow (\mathcal{X}(M))^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y,$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e \bar{X} e \bar{Y} são extensões locais de X e Y , respectivamente, a \bar{M} . Pode-se mostrar que para todos $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ o valor de $B(X, Y)$ não depende das extensões escolhidas.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, defina a aplicação linear $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$S_\eta(u) = -(\bar{\nabla}_u N)^\top,$$

onde $(\cdot)^\top$ denota a componente tangente e N é uma extensão local do vetor η normal a M . Observe que a aplicação S_η satisfaz

$$\langle S_\eta(u), v \rangle = \langle B(u, v), \eta \rangle,$$

para todo $u, v \in T_p M$. Segue da simetria da aplicação B que S_η é uma aplicação auto-adjunta.

O exemplo a seguir mostra que quando $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação $-S_\eta$ tem uma interpretação geométrica interessante, a saber, neste caso ela coincide com a derivada da aplicação normal de Gauss.

Exemplo 1.3. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Considere N uma extensão local de η a um campo normal em M . Seja \mathbb{S}^n a esfera unitária em \mathbb{R}^{n+1} e defina a aplicação normal de Gauss $\mathcal{G} : M \rightarrow \mathbb{S}^n$, trasladando a origem do campo N para a origem do \mathbb{R}^{n+1} e fazendo*

$$\mathcal{G}(q) = \text{ponto final do traslado de } N(q).$$

Observe que para cada $q \in M$ o vetor $N(q)$ é normal tanto ao espaço tangente $T_q M$ quanto ao espaço tangente $T_{\mathcal{G}(q)} \mathbb{S}^n$, segue que estes espaços tangente são paralelos e consequentemente podem ser vistos como o mesmo espaço vetorial. Daí, considerando uma curva suave $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ em M tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v$, temos que $d\mathcal{G}_q : T_q M \rightarrow T_q M$ é dada por

$$d\mathcal{G}_q(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N \circ \alpha(t) = \bar{\nabla}_v N.$$

Desde que $|N| = 1$ temos que $\langle \bar{\nabla}_v N, N \rangle = 0$, consequentemente, $(\bar{\nabla}_v N)^\perp = 0$. Portanto,

$$d\mathcal{G}_q(v) = (\bar{\nabla}_v N)^\top = -S_\eta.$$

O teorema que enunciaremos a seguir nos permite relacionar a curvatura seccional de M com a curvatura seccional de \bar{M} e a segunda forma fundamental.

Teorema 1.5 (Gauss). *Seja e_1, \dots, e_n um referencial ortonormal tangente a M . Então*

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk},$$

onde R e \bar{R} são os tensores curvatura de M e \bar{M} , respectivamente.

Considere o caso particular em que a codimensão da imersão é igual a 1, isto é, o caso em que $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície. Sabemos que dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ com $|\eta| = 1$, a transformação linear S_η é auto-adjunta, segue do Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos que existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ formada por autovetores de S_η , ou seja, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Os autovalores de S_η são chamados de curvaturas principais e seus autovetores de direções principais. Neste caso temos que,

$$\begin{aligned} B(e_i, e_i) &= \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle \eta \\ &= \langle S_\eta(e_i), e_i \rangle \eta \\ &= \lambda_i \eta \end{aligned}$$

Analogamente temos que $B(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Segue do Teorema [1.5](#) que

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Em particular, se $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície, dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ a aplicação normal de Gauss coincide com a aplicação $-S_\eta$, conseqüentemente $S_\eta(e_1) = k_1 e_1$ e $S_\eta(e_2) = k_2 e_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais e e_1 e e_2 as direções principais. Assim

$$K(e_1, e_2) - \overline{K}(e_1, e_2) = k_1 k_2.$$

Desde de que a curvatura seccional do \mathbb{R}^3 é igual a zero temos que $K(e_1, e_2) = k_1 k_2$. Isso mostra que neste caso a curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana.

Definição 1.10. *Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se $B(u, v) = 0$ para todo $u, v \in T_p M$. A imersão f é dita totalmente geodésica se esta é geodésica em todo ponto $p \in M$, isto é, $B \equiv 0$.*

Proposição 1.4. *Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \overline{M} em p .*

Mostraremos mais adiante que se Σ é uma superfície compacta e totalmente geodésica mergulhada na esfera \mathbb{S}^3 , então Σ é isométrica à esfera \mathbb{S}^2 .

Definição 1.11. *Dizemos que uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que o traço de S_η é identicamente nulo, isto é, $\text{tr}(S_\eta) = 0$.*

Seja e_1, \dots, e_n um referencial local ortonormal em torno de $p \in M$, isto é, existe uma vizinhança V de p em M tal que para cada ponto $q \in V$ o conjunto $\{e_1(q), \dots, e_n(q)\}$ é uma base de $T_q M$. Defina o vetor normal

$$H = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} B(e_i, e_j).$$

Pode-se mostrar que H não depende do referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ escolhido. O vetor H é chamado de vetor curvatura média de f . É claro que a imersão f é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

Exemplo 1.4. Considere uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ definida como sendo o equador de \mathbb{S}^3 , isto é,

$$\Sigma := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3; x_4 = 0\}.$$

Observe que Σ com a métrica induzida do mergulho (neste caso, o mergulho é a aplicação inclusão de Σ em \mathbb{S}^3) é isométrica a esfera \mathbb{S}^2 com a métrica canônica. Consequentemente, toda geodésica em Σ é uma geodésica em \mathbb{S}^3 . Segue da Proposição 1.4 que Σ é totalmente geodésica. Com isso, podemos ver que as curvaturas principais de Σ são ambas iguais a zero. Logo $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ é uma esfera bidimensional mergulhada mínima e totalmente geodésica.

Exemplo 1.5. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

Observe que f é diferenciável e

$$df(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin u & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin v \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos v \end{pmatrix}.$$

Note que f é uma imersão e que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \times \mathbb{S}^1_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \mathbb{T}^2$. Isso nos diz que f nada mais é que uma imersão de \mathbb{R}^2 na esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ cuja imagem é um toro \mathbb{T}^2 . Por um simples cálculo mostra-se que

$$\bar{\nabla}_{f_u} f_v = 0, \bar{\nabla}_{f_u} f_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, 0, 0) \text{ e } \bar{\nabla}_{f_v} f_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\cos v, -\sin v),$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana do \mathbb{R}^4 . Note que $\bar{\nabla}_{f_u} f_u$ e $\bar{\nabla}_{f_v} f_v$ pertence ao espaço normal $(T_{f(u,v)}\mathbb{T}^2)^\perp$. Consequentemente,

$$(\bar{\nabla}_{f_u} f_u)^\top = (\bar{\nabla}_{f_v} f_v)^\top = 0.$$

Como o \mathbb{R}^4 tem curvatura seccional constante igual a zero segue do Teorema 1.5 que

$$\begin{aligned} K(f_u, f_v) &= \langle B(f_u, f_u), B(f_v, f_v) \rangle - \langle B(f_u, f_v), B(f_u, f_v) \rangle \\ &= \left\langle (\bar{\nabla}_{f_u} f_u)^\perp, (\bar{\nabla}_{f_v} f_v)^\perp \right\rangle - \left\langle (\bar{\nabla}_{f_u} f_v)^\perp, (\bar{\nabla}_{f_u} f_v)^\perp \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (-\cos u, -\sin u, 0, 0), (0, 0, -\cos v, -\sin v) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo a imagem de f é um toro bidimensional $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$ com curvatura seccional constante igual a zero.

Considere os vetores

$$e_1 = (-\sin u, \cos u, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 0, -\sin v, \cos v),$$

e

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v).$$

Note que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente $T_p\mathbb{T}^2$ e η é uma base ortonormal para o complemento ortogonal de $T_p\mathbb{T}^2$ relativo ao espaço $T_p\mathbb{S}^3$, $p \in \mathbb{T}^2$. Por um simples cálculo mostra-se que

$$S_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe que $\text{tr}(S_\eta) = 0$. Logo a imersão do toro \mathbb{T}^2 na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ induzida por f é uma imersão mínima. Este toro é chamado de toro de Clifford (Ver [8], cap. 6, exercício 8).

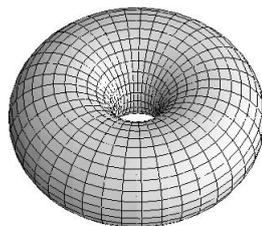


Figura 1.1: Toro de Clifford

Exemplo 1.6. O catenóide é a superfície de revolução em \mathbb{R}^3 que é obtida ao girar a catenária $\alpha(t) = (0, \cosh t, t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ em torno do eixo Oz . Esta superfície tem a parametrização

$$\phi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < +\infty$.

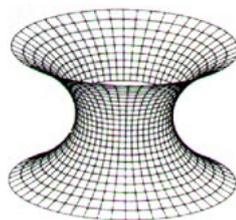


Figura 1.2: Catenóide

Por um simples cálculo mostra-se que as suas curvaturas principais são

$$k_1 = -\frac{1}{\cosh^2(v)} \text{ e } k_2 = \frac{1}{\cosh^2(v)}.$$

Portanto, o catenóide é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 (Ver [7], sec. 3.5).

Exemplo 1.7. Considere a projeção natural $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$. A partir do mergulho $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ obtemos o mergulho $\mathbb{RP}^2 = \pi(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{RP}^3$. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma geodésica do plano projetivo. Como π é uma isometria local, então existe uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\alpha = \pi \circ \gamma$, além disso γ é uma geodésica de \mathbb{S}^2 . Como \mathbb{S}^2 é uma subvariedade totalmente geodésica de \mathbb{S}^3 , segue que γ também é uma geodésica da esfera \mathbb{S}^3 , conseqüentemente, a curva $\pi \circ \gamma = \alpha$ é uma geodésica do espaço projetivo \mathbb{RP}^3 . Segue da Proposição 1.4 que $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$ é totalmente geodésica. Com isso, podemos ver que as curvaturas principais de \mathbb{RP}^2 são ambas iguais a zero. Logo, o plano projetivo $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$ é uma superfície mergulhada mínima e totalmente geodésica.

Ainda neste trabalho daremos uma interpretação geométrica para subvariedades mínimas, a saber, elas são pontos críticos do funcional volume, que a princípio podem ou não minimizar volume.

Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [8].

1.5 O Problema de Yamabe

Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e \bar{g} em M são ditas *conformes* se existe uma função positiva suave f tal que $\bar{g} = fg$. O conjunto de todas as métricas conformes à métrica g de uma variedade diferenciável M é denotado por $[g]$. Assim, se $\bar{g} \in [g]$ então $\bar{g} = fg$, para alguma função suave positiva f , conseqüentemente, podemos sempre escrever \bar{g} como $\bar{g} = e^{2u}g$, onde $u = \frac{1}{2} \ln(f)$.

A proposição a seguir relaciona as curvaturas escalares de duas métricas conformes em uma variedade diferenciável M .

Proposição 1.5. *Sejam g e \bar{g} duas métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável n -dimensional M . Se $\bar{g} = e^{2u}g$, então*

$$R_{\bar{g}} = e^{-2u}(R_g - 2(n-1)\Delta_g u - (n-1)(n-2)|\nabla_g u|^2),$$

onde $R_{\bar{g}}$ e R_g são as curvaturas escalares de M relativas às métricas \bar{g} e g , respectivamente.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com fronteira $\partial M \neq \emptyset$. Uma versão do Problema de Yamabe com fronteira consiste em encontrar uma métrica na classe conforme de g com curvatura escalar constante e curvatura média da fronteira nula. É um fato bem conhecido que este problema é equivalente a existência de uma função suave positiva $u \in C^\infty(M)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_g u - \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}Cu^{\frac{(n+2)}{(n-2)}} = 0 \text{ em } M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2(n-1)}uH_g = 0 \text{ em } \partial M, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde η é a normal para fora da fronteira ∂M com respeito à métrica g .

Se u é solução para (1.5), então u é um ponto crítico do funcional $Q_g : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$Q_g(\phi) = \frac{\int_M \left(|\nabla_g \phi|_g^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g \phi^2 \right) dv_g + \frac{n-2}{2(n-1)} \int_{\partial M} H_g \phi^2 d\sigma_g}{\left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{(n-2)}{n}}},$$

onde dv_g e $d\sigma_g$ são os elementos de volume com respeito à métrica g em M e ∂M , respectivamente.

O quociente de Sobolev $Q(M)$ é então definido por

$$Q(M) = \inf \{ Q_g(\phi) : \phi \in C^1(M), \phi \neq 0 \}.$$

É um fato bastante conhecido que $Q(M) \leq Q(\mathbb{S}_+^n)$ e $Q(\mathbb{S}_+^n) > 0$, onde \mathbb{S}_+^n é o hemisfério superior da esfera \mathbb{S}^n , e se $Q(M) < Q(\mathbb{S}_+^2)$, então existe uma função u suave positiva que é ponto de mínimo do funcional Q_g . Mais precisamente, existe uma função suave positiva u tal que a métrica $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ satisfaz

$$R_{\bar{g}} = C \text{ em } M \text{ e } H_{\bar{g}} = 0 \text{ em } \partial M.$$

Além disso, o sinal da constante C é o mesmo que o de $Q(M)$.

Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [14].

1.6 Fibrados Vetoriais

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de fibrados vetoriais que serão úteis para um melhor entendimento deste trabalho. Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [19] e [24].

Sejam M e E variedades diferenciáveis. Considere uma aplicação sobrejetiva suave $\pi : E \rightarrow M$, tal que para cada $p \in M$ a fibra $\pi^{-1}(p)$ tem uma estrutura de espaço vetorial de dimensão r . Uma *carta trivializante* sobre um aberto $U \subset M$ é um difeomorfismo que preserva fibras $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$, e que é um isomorfismo linear em cada fibra, isto é, para cada $q \in U$, $\phi : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$ é um isomorfismo linear entre espaços vetoriais. Uma coleção $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, com $\{U_\alpha\}$ sendo uma cobertura aberta de M , onde cada (U_α, ϕ_α) é uma carta trivializante, é chamada de trivialização local para E . A variedade E junto com uma aplicação suave sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$ que possui uma estrutura de espaço vetorial em cada fibra, é um *fibrado vetorial r -dimensional* se existe uma trivialização local para E . A variedade E é chamada de espaço total do fibrado vetorial e a variedade M de espaço base. Denotaremos um fibrado vetorial sobre uma variedade M como sendo a tripla (E, π, M) , porém, por abuso de notação, as vezes vamos nos referir a E como sendo um fibrado vetorial sobre M . Um fibrado vetorial (E, π, M) é chamado de *fibrado linha* se para todo $p \in M$, a fibra $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial de dimensão 1.

Exemplo 1.8 (Fibrado Produto). A tripla $(M \times \mathbb{R}^n, \pi, M)$ onde $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é a projeção no primeiro fator, é um fibrado vetorial n -dimensional sobre M . Este fibrado vetorial é chamado de fibrado produto ou trivial.

Exemplo 1.9 (Fibrado Normal). Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Sigma \subset M$ uma subvariedade Riemanniana. Para cada $p \in \Sigma$, dizemos que um vetor $\eta \in T_p M$ é normal a Σ em p se $g(\eta, u) = 0$, para todo $u \in T_p \Sigma$. O conjunto $N_p \Sigma$ de todos os vetores $\eta \in T_p M$ normais a Σ em p é chamado de espaço normal a Σ em p . Defina o espaço

$$N\Sigma := \bigcup_{p \in \Sigma} N_p \Sigma = \{(p, v); p \in \Sigma \text{ e } v \in N_p \Sigma\}.$$

A tripla $(N\Sigma, \pi, \Sigma)$ onde $\pi : N\Sigma \rightarrow \Sigma$ é a projeção dada por $\pi(p, v) = p$, é um fibrado vetorial sobre Σ chamado de fibrado normal.

Sejam (E_1, π_1, M) e (E_2, π_2, N) fibrados vetoriais, possivelmente de dimensões distintas. Um isomorfismo de E_1 para E_2 é um par de aplicações (f, \tilde{f}) , $f : M \rightarrow N$ e $\tilde{f} : E_1 \rightarrow E_2$ tais que

1. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

é comutativo, isto é, $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$.

2. \tilde{f} é um isomorfismo linear em cada fibra, isto é, para cada $p \in M$, $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(f(p))$ é um isomorfismo linear entre espaços vetoriais.

Um fibrado vetorial r -dimensional (E, π, M) é dito *trivial*, se é isomorfo ao fibrado produto $M \times \mathbb{R}^r$.

Uma *seção* de um fibrado vetorial (E, π, M) é uma aplicação $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$. Dizemos que uma seção é suave se é uma aplicação diferenciável de M para E . Denotaremos $\Gamma(E)$ como sendo o conjunto de todas as seções suaves de um fibrado vetorial E .

Exemplo 1.10. Considere o fibrado tangente (TM, π, M) de uma variedade diferenciável M . Um campo de vetores $X : M \rightarrow TM$ nada mais é que uma seção do fibrado tangente TM . O conjunto de todos os campos de vetores tangentes definido em M é dado por $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$.

Teorema 1.6. Seja (E, π, M) um fibrado linha sobre uma variedade diferenciável M . Se E é trivial, então E admite uma seção não-nula.

Considere um fibrado vetorial (E, π, M) sobre uma variedade diferenciável M e uma aplicação diferenciável $f : N \rightarrow M$, onde N é uma variedade diferenciável. Definimos o *pullback* de E pela aplicação f por

$$f^*(E) = \{(p, q) \in N \times E; f(p) = \pi(q)\}.$$

O conjunto $f^*(E)$ junto com a aplicação $\tilde{\pi} : f^*(E) \rightarrow N$ dada pela projeção no primeiro fator, é um fibrado vetorial sobre N . Toda seção $s \in \Gamma(E)$ induz uma seção em $f^*s \in \Gamma(f^*(E))$ chamada de pullback da seção s pela aplicação f , e é definida por $f^*s := s \circ f$.

Uma *orientação* em um fibrado vetorial (E, π, M) consiste de uma orientação em cada fibra $\pi^{-1}(p)$ com a propriedade: para cada $p \in M$ existe uma carta trivializante (φ, U) com $p \in U$, tal que φ transporta para cada $q \in U$ a orientação dada em $\pi^{-1}(q)$ na orientação canônica de \mathbb{R}^n . Outra maneira de expressar essa condição seria dizer que a orientação das fibras de E pode ser definida por n -uplas ordenadas de seções locais independentes. Um fibrado vetorial é dito orientável, se possui uma orientação.

Teorema 1.7. *Todo fibrado linha sobre a esfera unitária \mathbb{S}^n é trivial.*

Demonstração. Ver [19], página 25. □

1.7 Superfícies de 1-lado e de 2-lados

Nesta seção estudaremos dois tipos de superfícies, que diferem na maneira que estão situadas em seu espaço ambiente (as superfícies podem estar imersas ou mergulhadas), são elas as superfícies de 1-lado e as superfícies de 2-lados. Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [23] e [34].

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Dizemos que uma curva suave fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ inverte a orientação se para toda base ortonormal $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}M$, $t \in [0, 1]$, onde $e_i : [0, 1] \rightarrow TM$ são campos contínuos unitários de vetores tangentes a M ao longo de α , as bases $\{e_1(0), \dots, e_n(0)\}$ e $\{e_1(1), \dots, e_n(1)\}$ estão em orientações opostas de T_pM , $p = \alpha(0) = \alpha(1)$. Se o contrário acontece, dizemos que α preserva orientação.

Teorema 1.8. *Uma superfície Σ é orientável se, e somente se, todo círculo mergulhado em Σ preserva orientação.*

Demonstração. Ver [23], página 13, Teorema 1. □

Seja Σ uma superfícies conexa imersa em uma variedade Riemanniana tridimensional M . A superfície Σ é dita de *2-lados* se o fibrado normal $N\Sigma$ é trivial, isto é, se existe um campo normal unitário contínuo N globalmente definido em Σ . Caso contrário, dizemos que Σ é de *1-lado*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11. *A faixa de Möbius F imersa em \mathbb{R}^3 é uma superfície de 1-lado. Para ilustrar esse fato, considere uma curva fechada suave $\alpha : [0, 1] \rightarrow F$ como mostra a figura [1.3]. Seja $\nu : [0, 1] \rightarrow F$ um campo de vetores normais a F ao longo da curva α . Note que ao movermos ν ao longo da curva α e retornando ao ponto de partida, a normal ν tem direção oposta a direção original, isto é, $\nu(0) = -\nu(1)$.*

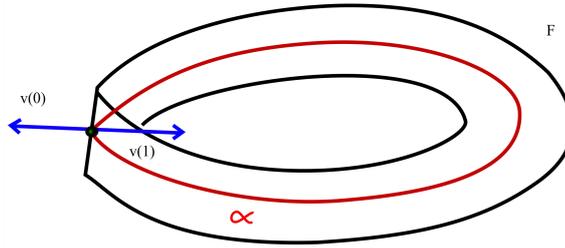


Figura 1.3: Faixa de Möbius

Segue do Exemplo 1.11 que toda superfície imersa em \mathbb{R}^3 que contém uma faixa de Möbius é de 1-lado, pois em particular, a curva α deste último exemplo inverte a direção da normal. Como exemplos que ilustram este fato temos, o plano projetivo \mathbb{RP}^2 e a garrafa de Klein \mathbb{K}^2 .

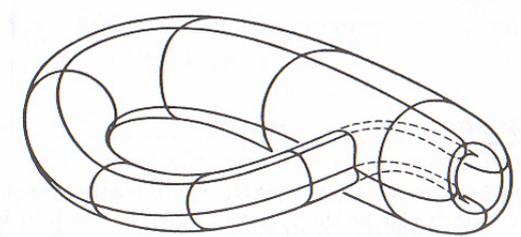


Figura 1.4: Garrafa de Klein

Exemplo 1.12. A esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de 2-lados, onde $N : \mathbb{S}^2 \rightarrow N\mathbb{S}^2$ definido por $N(p) = p$ é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em \mathbb{S}^2 . Em geral, considere a esfera $\mathbb{S}^2 \subset M$, onde M é uma variedade Riemanniana tridimensional. Desde que o fibrado normal de \mathbb{S}^2 é um fibrado linha, segue do Teorema 1.7 que $N\mathbb{S}^2$ é trivial. Logo, a esfera \mathbb{S}^2 imersa em qualquer variedade Riemanniana tridimensional é uma superfície de 2-lados.

Em geral, uma superfície ser de 2-lados não é equivalente a ela ser orientável. Veremos agora alguns exemplos que ilustram este fato.

Exemplo 1.13. A superfície $\mathbb{RP}^2 \times \{q\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^1$, onde $q \in \mathbb{S}^1$, é não-orientável. Além disso, esta é uma superfície de 2-lados, pois o campo de vetores $N = (0, N_1)$, onde N_1 é um campo unitário contínuo de vetores tangentes a \mathbb{S}^1 , é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em $\mathbb{RP}^2 \times \{q\}$.

Exemplo 1.14. Sabemos que o plano projetivo \mathbb{RP}^2 é uma superfície não-orientável. Daí, pelo Teorema 1.8 temos que existe um círculo \mathbb{S}^1 mergulhado em \mathbb{RP}^2 que inverte orientação. Considere uma parametrização $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^2$ deste círculo com $\alpha(0) = \alpha(1) = \bar{q} \in \mathbb{S}^1$. De agora em diante denotaremos a curva α como sendo o círculo que inverte a orientação mergulhado no plano projetivo. Defina um mergulho do toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$ no qual o círculo \mathbb{S}^1 do segundo fator do produto é levado na curva α em \mathbb{RP}^2 . Afirmamos que $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$ é uma superfície de 1-lado. De fato, suponha que isso não é verdade, isto é, que existe um campo normal unitário contínuo N globalmente definido em \mathbb{T}^2 . Podemos escrever $N = (N_1, N_2)$, onde N_1 e N_2 são

campos unitários contínuos de vetores tangentes a \mathbb{S}^1 e \mathbb{RP}^2 , respectivamente. Considere os campos $e_1 = (V_1, 0)$ e $e_2 = (0, V_2)$, onde V_1 é um campo contínuo unitário não-nulo de vetores tangentes a \mathbb{S}^1 e V_2 é um campo de vetores tangentes a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ dado por $V_2(p, q) = V_2(\alpha(t)) := \alpha'(t)$, $q = \alpha(t)$. Supondo que a curva α tem todos seus vetores velocidade de comprimento constante igual a 1, temos que $\{e_1, e_2\}$ é um referencial ortonormal em $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$. Podemos completar este referencial a um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, N\}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$ em pontos de \mathbb{T}^2 . Note que

$$0 = \langle e_1(p, q), N(p, q) \rangle = \langle V_1(p, q), N_1(p, q) \rangle,$$

para todo $(p, q) \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$. Assim, como $V_1(p, q), N_1(p, q) \in T_p\mathbb{S}^1$ e este tem dimensão 1, concluímos que $N_1 \equiv 0$. Isso implica que para todo $(p, q) \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$ temos que $N(p, q) \in T_q\mathbb{RP}^2$. Fixe $p \in \mathbb{S}^1$ e faça $N(t) = N(p, \alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{RP}^2$, $t \in [0, 1]$. Daí o conjunto $\{\alpha'(t), N(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\mathbb{RP}^2$ para todo $t \in [0, 1]$. Desde que α é uma curva que inverte orientação temos que $\{\alpha'(0), N(0)\}$ e $\{\alpha'(1), N(1)\}$ são bases em orientações opostas de $T_{\bar{q}}\mathbb{RP}^2$, onde $\bar{q} = \alpha(0) = \alpha(1)$. Daí, como $N(0) = N(1)$ temos que $\alpha'(0) = -\alpha'(1)$. Mas isso é uma contradição, pois como α é suave implica que $\alpha'(0) = \alpha'(1)$. Portanto o toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^2$ é uma superfície orientável de 1-lado.

O teorema a seguir, nos dá uma condição sobre a variedade ambiente para que orientabilidade seja equivalente a ser de 2-lados.

Teorema 1.9. *Seja $\Sigma \subset M$ uma superfície imersa em uma variedade Riemanniana tridimensional orientável. Então, a superfície Σ é orientável se, e somente se, é de 2-lados.*

Demonstração. Suponha que Σ é orientável, mas é de 1-lado. Assim, para todo campo normal unitário ν definido em Σ , existe uma curva suave fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\nu(\alpha(0)) = -\nu(\alpha(1))$. Considere $\{e_1(t), e_2(t)\}$ uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\Sigma$ para cada $t \in [0, 1]$, onde $e_i : [0, 1] \rightarrow T\Sigma$ são campos contínuos ao longo de α . Chamemos $\nu(t) = \nu(\alpha(t))$ e completemos a base $\{e_1(t), e_2(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}\Sigma$ a uma base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t), \nu(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}M$. Como $\nu(0) = -\nu(1)$, então as bases $\{e_1(0), e_2(0), \nu(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1), \nu(1)\}$ são bases em orientações opostas de T_pM , $p = \alpha(0) = \alpha(1)$. Mas isso é uma contradição, pois M é orientável.

Suponha agora que Σ é de 2-lados, mas é não-orientável. Daí, existe uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ que inverte a orientação, ou seja, se $\{e_1(t), e_2(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\Sigma$, onde $e_i : [0, 1] \rightarrow T\Sigma$ são campos contínuos ao longo de α , então $\{e_1(0), e_2(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1)\}$ são bases em orientações opostas de $T_{\alpha(t)}\Sigma$. Completemos agora a base $\{e_1(t), e_2(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}\Sigma$ a uma base $\{e_1(t), e_2(t), N(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}M$, onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ e $N(t) := N(\alpha(t))$, conseqüentemente $\{e_1(0), e_2(0), N(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1), N(1)\}$ são bases em orientações opostas de T_pM , $p = \alpha(0) = \alpha(1)$. Mas isso é uma contradição, pois M é orientável. \square

A partir do Teorema 1.9 concluímos que o toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, o catenóide $S \subset \mathbb{R}^3$ e o toro de Clifford $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{S}^3$ são superfícies de 2-lados. Lembremos que o espaço projetivo n -dimensional é orientável se, e somente se, n é par (Ver [8], página 36). Com isso, segue do Teorema 1.9 que o plano projetivo $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$ é uma superfície de 1-lado.

1.8 Fórmulas de Variação

1.8.1 Primeira Fórmula de Variação de Área

Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , M uma variedade diferenciável de dimensão m e $F_0 : M \rightarrow N$ uma imersão suave. Considere $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ uma variação suave qualquer de F_0 . Vamos supor que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixo, a função suave $F_t : M \rightarrow N$ definida por $F_t = F(\cdot, t)$ é uma imersão. Denote por $M_t = F_t(M)$.

Como $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m + 1$ podemos considerar uma carta local $x : U \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ com coordenadas (x_1, \dots, x_m, t) . Observe que para todo $p \in V = x(U)$ o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p), \frac{\partial}{\partial t}(p) \right\}$ é uma base de $T_p(M \times (-\varepsilon, \varepsilon))$. Daí

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}, \frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{X}(F(V)),$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = dF \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial t} = dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right),$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Além disso, $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(q) \right\}$ é base de $T_q M_t$ para todo $q \in F(V)$. O campo $X = \frac{\partial F}{\partial t}$ é chamado de campo variacional da variação F e note que X é um campo definido em M_t , mas não necessariamente tangente a esta.

Pela propriedade da naturalidade do colchete de Lie temos que

$$0 = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right] = dF \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right],$$

pois $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, m$.

Analogamente, temos

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, X \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Seja g_t a métrica riemanniana em M obtida pelo do pullback da métrica g em N por F_t , isto é, $g_t = F_t^* g$. Por abuso de notação chamaremos $g_0 = g$. Considere $Vol : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional volume definido por

$$Vol(M, h) = \int_M dv_h,$$

onde $\mathcal{C} = \{(M, h); h \text{ é uma métrica Riemanniana em } M\}$ e dv_h é o elemento de volume de (M, h) dado em coordenadas por

$$dv_h = \sqrt{\det(h_{ij}(t))} dx.$$

Queremos calcular

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(M, g_t) = \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dv_{g_t}.$$

Primeiramente note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ij}(t) &= \frac{d}{dt}F_t^*g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= X\left\langle dF\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), dF\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\rangle \\ &= X\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right\rangle.\end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = \left\langle \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle, \quad (1.6)$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana da métrica g em N . Como $\left[\frac{\partial F}{\partial x_j}, X\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, X\right] = 0$ e a conexão $\bar{\nabla}$ é simétrica temos que

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X = \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

para todo $i, j = 1, \dots, m$. Daí

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X\right)^\top, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X\right)^\top, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (1.7)$$

Nos cálculos feitos abaixo estaremos utilizando a notação de Einstein. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(dv_{g_t}) &= \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}(t)}} \cdot \frac{d}{dt}(\det g_{ij}(t))dx \\ &= \frac{\det g_{ij}(t)}{2\sqrt{\det g_{ij}(t)}} \left(g^{ij}(t) \frac{d}{dt}g_{ij}(t)\right) dx\end{aligned}$$

O que implica que

$$\frac{d}{dt}(dv_{g_t}) = \frac{1}{2} \left(g^{ij}(t) \frac{d}{dt}g_{ij}(t)\right) dv_{g_t}. \quad (1.8)$$

Por (1.7) obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(dv_{g_t}) &= \frac{1}{2} \left(g^{ij}(t) \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X\right)^\top, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + g^{ij}(t) \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X\right)^\top, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle\right) dv_{g_t} \\ &= Tr(Y \mapsto (\bar{\nabla}_Y X)^\top) dv_{g_t}.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}(dv_{g_t}) = \operatorname{div}_{g_t} X \cdot dv_{g_t}.$$

Agora fazemos a seguinte decomposição:

$$X = X^\top + X^\perp,$$

onde X^\perp e X^\top são as componentes normal e tangente de X , respectivamente. Assim,

$$\operatorname{div}_{g_t} X = \operatorname{div}_{g_t} X^\top + \operatorname{div}_{g_t} X^\perp.$$

Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{g_t} X^\perp &= \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X^\perp, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \left\langle X^\perp, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle X^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \right) \\ &= - \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} \left\langle X^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} \left\langle X^\perp, \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} + B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

onde ∇ e B são a conexão riemanniana e a segunda forma fundamental de M , respectivamente. Segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{g_t} X^\perp &= - \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} \left\langle X^\perp, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= - \left\langle X^\perp, \sum_{i,j=1}^m g_t^{ij} B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= - \langle X^\perp, H_{M_t} \rangle, \end{aligned}$$

onde H_{M_t} é a curvatura média de M_t . Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \operatorname{Vol}(M, g_t) &= \int_M \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} dv_{g_t} \\ &= \int_M \operatorname{div}_g X dv_g \\ &= \int_M \operatorname{div}_g X^\top dv_g + \int_M \operatorname{div}_g X^\perp dv_g \\ &= \int_M \operatorname{div}_g X^\top dv_g - \int_M \langle X^\perp, H_M \rangle dv_g. \end{aligned}$$

Se X tem suporte compacto em M , pelo Teorema da Divergência temos que

$$\int_M \operatorname{div}_g X^\top dv_g = \int_{\operatorname{Supp}(X)} \operatorname{div}_g X^\top dv_g = \int_{\partial(\operatorname{Supp}(X))} \langle X^\top, \eta \rangle dv_g,$$

onde η é a normal unitária para fora na fronteira de M . Como X se anula na fronteira de seu suporte, obtemos

$$\int_M \operatorname{div}_g X^\top dv_g = 0.$$

Portanto,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Vol}(M, g_t) = - \int_M \langle X^\perp, H_M \rangle dv_g. \quad (1.9)$$

A expressão (1.9) é chamada *Primeira Fórmula de Variação de Área*. Note que M é ponto crítico do funcional volume se, e somente se,

$$- \int_M \langle X^\perp, H_M \rangle dv_g = 0,$$

para todo campo X com suporte compacto em M . Logo, M é ponto crítico do funcional volume se, e somente se $H_M = 0$.

1.8.2 Segunda Fórmula de Variação de Área

Vimos que uma subvariedade M de uma variedade Riemanniana N é mínima se é ponto crítico do funcional volume. Porém, ser ponto crítico deste funcional não quer dizer que M minimiza volume em N . Vamos agora obter condições sobre a geometria de M que nos ajude a dizer quando uma subvariedade mínima minimiza volume. Para isso, vamos encontrar a segunda fórmula de variação de M , que nada mais é do que a segunda derivada do funcional volume.

Para simplificar os cálculos, a partir de agora denotaremos

$$g'_{ij}(t) = \frac{d}{dt}(g_{ij}(t)) \text{ e } g''_{ij}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(g_{ij}(t)).$$

Vimos em (1.8) que

$$2 \frac{d}{dt}(dv_{g_t}) = g^{ij}(t) g'_{ij}(t) dv_{g_t}.$$

Vamos calcular

$$\begin{aligned} 2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} dv_{g_t} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g'_{ij}(t) g^{ij}(t)) dv_g + g'_{ij}(0) g^{ij}(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dv_{g_t} \\ &= g''_{ij}(0) g^{ij}(0) dv_g + g'_{ij}(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^{ij}(t) dv_g + \frac{1}{2} g'_{ij}(0) g^{ij}(0) g'_{kl}(0) g^{kl}(0) dv_g \\ &= \left(\operatorname{tr}(g''_{ij}(0)) + g'_{ij}(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^{ij}(t) + \frac{1}{2} [\operatorname{tr}(g'_{ij}(0))]^2 \right) dv_g. \end{aligned}$$

Vamos primeiramente obter uma expressão para $\frac{d}{dt}g^{ij}(t)$. Para isso, observe que

$$g^{ik}(t)g_{kl}(t) = \delta_{il}.$$

Assim

$$\left(\frac{d}{dt}g^{ik}(t)\right)g_{kl}(t) + g^{ik}(t)g'_{kl}(t) = 0.$$

Multiplicando ambos os lados desta última igualdade por $g^{jl}(t)$ e somando em l obtemos

$$\left(\frac{d}{dt}g^{ik}(t)\right)g_{kl}(t)g^{jl}(t) = -g^{ik}(t)g'_{kl}(t)g^{jl}(t).$$

Daí

$$\frac{d}{dt}g^{ij}(t) = -g^{ik}(t)g'_{kl}(t)g^{jl}(t). \quad (1.10)$$

Por (1.10) temos que

$$g'_{ij}(0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^{ij}(t) = -g'_{ij}(0)g^{ik}(0)g'_{kl}(0)g^{jl}(0) = -|g'(0)|^2.$$

Logo

$$2 \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} dv_{g_t} = (tr(g''(0)) - |g'(0)|^2 + \frac{1}{2}[tr(g'(0))]^2)dv_g.$$

Note que se $X^\top = 0$ e $H_M = 0$ temos que

$$div_M X = div_M X^\perp = -\langle X^\perp, H_M \rangle = 0.$$

Por outro lado por (1.8)

$$div_M X = \frac{1}{2}tr(g'_{ij}(0)).$$

Segue que $tr(g'(0)) = 0$. Consequentemente

$$2 \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} dv_{g_t} = (tr(g''(0)) - |g'(0)|^2)dv_g.$$

Lema 1.1. *Se $X^\top = 0$, então temos que*

$$|g'(0)|^2 = 4|\langle B(\cdot, \cdot), X \rangle|^2.$$

Demonstração. Note que se $X^\top = 0$ então em $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial x_i} \left\langle X^\perp, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle X^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \left\langle X^\perp, \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} + B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Segue que

$$\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle X^\perp, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle. \quad (1.11)$$

Por (1.7) e (1.11) temos que

$$g'_{ij}(0) = -2 \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle.$$

O que implica que

$$|g'(0)|^2 = 4g^{ik}g^{jl} \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right) \right\rangle.$$

Portanto

$$|g'(0)|^2 = 4| \langle B(\cdot, \cdot), X \rangle |^2.$$

□

Lema 1.2. Se $X^\top = 0$, então temos que

$$\text{tr}(g''(0)) = 2| \langle B(\cdot, \cdot), X \rangle |^2 + 2| \nabla^\perp X |^2 + 2\text{tr}(\langle \bar{R}(X, \cdot)X, \cdot \rangle) + 2\text{div}_M(\bar{\nabla}_X X),$$

onde \bar{R} é o tensor curvatura de (N, g) .

Demonstração. Inicialmente note que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Como $\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, X \right] = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, temos que $\bar{\nabla}_{\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, X \right]} X = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \bar{\nabla}_{\left[X, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X - \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X - \bar{\nabla}_{\left[X, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right]} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

O que implica que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = \bar{R} \left(X, \frac{\partial F}{\partial x_i}, X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.12)$$

Por (1.7) temos que

$$g''_{ij}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Segue de (1.12) e da simetria do tensor curvatura que

$$\begin{aligned} g''_{ij}(0) &= \bar{R} \left(X, \frac{\partial F}{\partial x_i}, X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &+ \bar{R} \left(X, \frac{\partial F}{\partial x_j}, X, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Disto obtemos

$$Tr(g''(0)) = 2g^{ij} \bar{R} \left(X, \frac{\partial F}{\partial x_i}, X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + 2g^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + 2g^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.13)$$

Vamos encontrar agora uma expressão para $\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top$. Para isso escreva

$$\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top = \sum_{l=1}^m a_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l}.$$

Daí

$$\left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle = \sum_{l=1}^m a_{il} g_{lk}.$$

O que implica que

$$a_{il} = g^{kl} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Logo

$$\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top = g^{kl} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial x_l}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\top \right\rangle &= g^{kl} g^{ab} g_{lb} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X, \frac{\partial F}{\partial x_a} \right\rangle \\ &= g^{kl} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right\rangle. \end{aligned}$$

Segue de (1.11) que

$$\left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\top \right\rangle = g^{kl} \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) \right\rangle \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right) \right\rangle.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right\rangle &= \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top + \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\perp, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\top + \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\perp \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\top, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\top \right\rangle + \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\perp, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\perp \right\rangle. \\ &= g^{kl} \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) \right\rangle \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\perp, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\perp \right\rangle \end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (1.13) obtemos,

$$\begin{aligned} tr(g''(0)) &= 2g^{ij} \bar{R} \left(X, \frac{\partial F}{\partial x_i}, X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + 2g^{ij} g^{kl} \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) \right\rangle \left\langle X, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_l} \right) \right\rangle \\ &\quad + 2g^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \bar{\nabla}_X X, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle + 2g^{ij} \left\langle \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} X \right)^\perp, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_j}} X \right)^\perp \right\rangle \\ &= 2|\langle B(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + 2|\nabla^\perp X|^2 + 2tr(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) + 2div_M(\bar{\nabla}_X X). \end{aligned}$$

□

Segue dos Lemas 1.1 e 1.2 que

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (dv_{g_t}) = (-|\langle B(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + |\nabla^\perp X|^2 - tr(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) + div_M(\bar{\nabla}_X X)) dv_g.$$

O que implica que

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} Vol(M, g_t) = \int_M (-|\langle B(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + |\nabla^\perp X|^2 - tr(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) + div_M(\bar{\nabla}_X X)) dv_g.$$

Façamos a seguinte decomposição,

$$\bar{\nabla}_X X = (\bar{\nabla}_X X)^\top + (\bar{\nabla}_X X)^\perp.$$

Daí

$$\operatorname{div}_M \bar{\nabla}_X X = \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\top + \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\perp.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\perp &= g^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} (\bar{\nabla}_X X)^\perp, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \left\langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \right) \\ &= -g^{ij} \left\langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \left\langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, g^{ij} B \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= - \left\langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, H_M \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, como o campo variacional X tem suporte compacto, pelo Teorema da Divergência temos que

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\top dv_g &= \int_{\operatorname{Supp}(X)} \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\top dv_g \\ &= \int_{\partial(\operatorname{Supp}(X))} \langle (\bar{\nabla}_X X)^\top, \eta \rangle dv_g, \end{aligned}$$

onde η é a normal unitária para fora na fronteira de M . Como a conexão riemanniana $\bar{\nabla}$ é tensorial na primeira variável e X se anula na fronteira de seu suporte, concluímos que

$$\int_M \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X)^\top dM = 0.$$

Segue que

$$\int_M \operatorname{div}_M (\bar{\nabla}_X X) dM = 0.$$

Logo

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \operatorname{Vol}(M, g_t) = \int_M (-|\langle X, B(\cdot, \cdot) \rangle|^2 - \operatorname{tr}(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) + |\nabla^\perp X|^2) dv_g. \quad (1.14)$$

A expressão (1.14) é chamada *Segunda Fórmula de Variação de Área*.

1.8.3 Subvariedades Estáveis

Definição 1.12. *Seja Σ^n uma subvariedade imersa em uma variedade Riemanniana (M^{n+k}, h) . Defina o operador $L : \Gamma(N\Sigma) \rightarrow \Gamma(N\Sigma)$ como*

$$L(V) = \Delta^\perp V + \operatorname{tr}[\bar{R}(V, \cdot)] + A(V),$$

onde para um referencial local ortonormal E_1, \dots, E_n de vetores em Σ , o operador A é dado por

$$A(V) = \sum_{i,j=1}^m \langle B(E_i, E_j), V \rangle B(E_i, E_j),$$

e Δ^\perp é o Laplaciano no fibrado normal definido por

$$\Delta^\perp V = \sum_{i=1}^k (\bar{\nabla}_{E_i}^\perp \bar{\nabla}_{E_i}^\perp V) - \sum_{i=1}^m (\bar{\nabla}_{(\bar{\nabla}_{E_i}^\perp E_i)^\top} V).$$

O operador L é chamado de operador de estabilidade ou operador de Jacobi.

Observe que usando o Teorema da Divergência obtemos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(\Sigma, g_t) = - \int_\Sigma \langle L(X), X \rangle d\sigma_g,$$

para toda variação com suporte compacto.

Definição 1.13. Dizemos que uma subvariedade mínima $\Sigma^n \subset M^{n+k}$ é estável se

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(\Sigma, g_t) \geq 0,$$

para toda variação com suporte compacto. Caso contrário, dizemos que Σ é instável.

Note que por definição Σ é estável se, e somente se

$$- \int_\Sigma \langle L(X), X \rangle d\sigma_g \geq 0,$$

para toda seção $X \in \Gamma(N\Sigma)$ com suporte compacto.

Em alguns casos de subvariedades imersas, o operador de estabilidade pode ser escrito de forma mais simples. Descreveremos a seguir, dois deste casos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Caso 1. Considere Σ^n uma subvariedade mínima imersa em M^{n+1} de dois lados, isto é, Σ possui um campo normal unitário contínuo N globalmente definido. Assim, podemos escrever qualquer seção X do fibrado normal $N\Sigma$ como $X = fN$, onde $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Tome e_1, \dots, e_n um referencial local ortonormal em torno de um ponto $p \in \Sigma$ e observe que

$$\bar{\nabla}_{e_i} X = \bar{\nabla}_{e_i}(fN) = f\bar{\nabla}_{e_i} N + e_i(f)N.$$

Isso implica que

$$\bar{\nabla}_{e_i}^\perp X = e_i(f)N.$$

Segue que

$$|\bar{\nabla}^\perp X|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}^\perp X, \bar{\nabla}_{e_i}^\perp X \rangle = \sum_{i=1}^n (e_i(f))^2.$$

Logo,

$$|\bar{\nabla}^\perp X|^2 = |\nabla_\Sigma f|^2. \quad (1.15)$$

Temos ainda que

$$\text{tr}(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) = \sum_{i=1}^n \bar{R}(X, e_i, e_i, X) = f^2 \sum_{i=1}^n \bar{R}(N, e_i, e_i, N).$$

Segue que

$$\text{tr}(\langle \bar{R}(X, \cdot), X \rangle) = f^2 \sum_{i=1}^n \bar{R}(e_i, N, N, e_i) = f^2 \text{Ric}(N, N). \quad (1.16)$$

Além disso,

$$|\langle X, B(\cdot, \cdot) \rangle|^2 = \sum_{i,j=1}^n (\langle X, B(e_i, e_j) \rangle)^2 = f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle N, B(e_i, e_j) \rangle)^2.$$

O que implica que

$$|\langle X, B(\cdot, \cdot) \rangle|^2 = f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle)^2 = f^2 |B|^2. \quad (1.17)$$

Assim, por (1.15), (1.16) e (1.17) podemos reescrever a segunda fórmula de variação para uma hipersuperfície mínima de dois lados da seguinte forma

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Vol}(\Sigma, g_t) = \int_\Sigma (|\nabla_\Sigma f|^2 - (|B|^2 + \text{Ric}(N, N))f^2) d\sigma_g.$$

Além disso, o operador de estabilidade $L : C_0^\infty(\Sigma) \rightarrow C_0^\infty(\Sigma)$ é dado por

$$L(f) = \Delta_\Sigma f + (|B|^2 + \text{Ric}(N, N))f.$$

Assim, uma hipersuperfície $\Sigma \subset M$ é estável se, e somente se

$$- \int_\Sigma f L(f) d\sigma_g \geq 0,$$

para toda função $f \in C_0^\infty(\Sigma)$.

Uma outra condição necessária e suficiente para que uma hipersuperfície mínima de 2-lados $\Sigma \subset M$ seja estável é que o primeiro autovalor de Dirichlet de seu operador de estabilidade seja não-negativo, isto é,

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Sigma (|\nabla_g \phi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2)\phi^2) d\sigma_g; \int_\Sigma \phi^2 d\sigma_g = 1 \right\} \geq 0.$$

Exemplo 1.15. Considere o mergulho $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ do Exemplo 1.4. Desde que \mathbb{S}^2 é uma superfície mínima e totalmente geodésica mergulhada em \mathbb{S}^3 temos que o operador de estabilidade de \mathbb{S}^2 é dado por

$$L(f) = \Delta_{\mathbb{S}^2} f + 2f,$$

onde $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, pois \mathbb{S}^3 é uma variedade Eistein com $\text{Ric}_{g_{\mathbb{S}^3}} = 2g_{\mathbb{S}^3}$. Note que para a função constante $f \equiv 1$ temos que

$$-\int_{\mathbb{S}^2} fL(f)d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} = -\int_{\mathbb{S}^2} L(1)d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} = -8\pi < 0.$$

Logo a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ é instável.

Caso 2. Vamos agora considerar o caso em que Σ é uma superfície compacta não-orientável de um lado imersa em uma variedade Riemanniana tridimensional (M, g) e com $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$ como seu recobrimento duplo orientável. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão mínima, então $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ é uma imersão mínima de \mathbb{S}^2 em M . Assim, podemos ver \mathbb{S}^2 como uma subvariedade imersa de M . Vamos considerar o fibrado normal $(N\mathbb{S}^2, \tilde{\pi}, \mathbb{S}^2)$ de \mathbb{S}^2 , onde $\tilde{\pi} : N\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a projeção no primeiro fator. Observe que para cada $x \in \mathbb{S}^2$, a fibra

$$\tilde{\pi}^{-1}(x) = \{(x, v); v \in (T_{\phi(x)}\Sigma)^\perp\},$$

é isomorfa a $(T_{\phi(x)}\Sigma)^\perp$, que por sua vez, é isomorfo a \mathbb{R} . Segue que $N\mathbb{S}^2$ é um fibrado linha em \mathbb{S}^2 . Desde que todo fibrado linha em \mathbb{S}^2 é trivial, temos que o fibrado normal $N\mathbb{S}^2$ é trivial, isto é, \mathbb{S}^2 tem dois lados.

Considere agora, o fibrado vetorial $(\pi^*(N\Sigma), \tilde{\pi}, \mathbb{S}^2)$ em \mathbb{S}^2 obtido pelo pullback do fibrado normal $N\Sigma$ pela aplicação π . Analogamente, mostramos que $\pi^*(N\Sigma)$ é um fibrado linha em \mathbb{S}^2 , consequentemente, $\pi^*(N\Sigma)$ é trivial. Assim, existe uma seção não-nula $\nu \in \Gamma(\pi^*(N\Sigma))$ tal que $|\nu(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Note que para cada $x \in \mathbb{S}^2$ temos que $\nu(x) \in (T_{\pi(x)}\Sigma)^\perp$, ou seja, $\nu(x)$ é normal a Σ no ponto $\pi(x)$. Assim, como Σ tem um lado temos que $\nu(\tau(x)) = -\nu(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$, onde τ é a involução relativa ao recobrimento \mathbb{S}^2 , isto é, $\tau : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é um difeomorfismo tal que $\pi \circ \tau = \pi$. Temos que o fibrado normal $N\mathbb{S}^2$ é isomorfo ao fibrado $\pi^*(N\Sigma)$. Assim, dada uma seção $\eta \in \Gamma(N\Sigma)$ existe uma seção $\tilde{\eta} \in \Gamma(N\mathbb{S}^2)$ obtida pelo pullback da seção η por π , isto é, $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi$. Como o fibrado $N\mathbb{S}^2$ é trivial, podemos escrever $\tilde{\eta} = f\nu$, onde $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave. Observe que $\tilde{\eta}(\tau(x)) = \tilde{\eta}(x)$, consequentemente a aplicação f satisfaz $f(\tau(x)) = f(x)$. Assim, podemos fazer a seguinte identificação

$$\Gamma(N\mathbb{S}^2) \equiv \{f \in C^\infty(\mathbb{S}^2); f \circ \tau = f\}.$$

Sejam L e \tilde{L} os operadores de estabilidade de Σ e \mathbb{S}^2 , respectivamente. Desde que \mathbb{S}^2 é o recobrimento duplo orientável de Σ temos que

$$-\int_{\Sigma} \langle L(\eta), \eta \rangle d\sigma_g = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} f\tilde{L}(f)d\sigma_{\pi^*g},$$

onde, neste caso, o operador L pode ser reescrito como

$$L(\eta) = \Delta^\perp \eta + (\text{Ric}(\nu, \nu) + |B|^2)\eta.$$

Daí, Σ é estável se, e somente se,

$$- \int_{\mathbb{S}^2} f \tilde{L}(f) d\sigma_{\pi^*g} \geq 0,$$

para toda função $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ satisfazendo $f \circ \tau = f$.

Para mais detalhe sobre o que foi descrito neste último caso ver [33].

Teorema 1.10. *Se Σ^{n-1} é uma hipersuperfície imersa em (M^n, g) , então*

$$2\overline{Ric}_g(\nu, \nu) + R_g + |B|^2 = \overline{R}_g + |H_\Sigma|^2,$$

onde H_Σ é a curvatura média de Σ e ν é um vetor unitário normal a Σ em um ponto $p \in \Sigma$.

Demonstração. Considere $p \in \Sigma$ e $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_p\Sigma$. Complete esta base a uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM , onde $e_n = \nu$ é um vetor unitário ortogonal a $T_p\Sigma$. Segue do Teorema de Gauss [1.5] que

$$\overline{R}_{ijji} = R_{ijji} - B_{ii}B_{jj} + B_{ij}B_{ij}, \quad (1.18)$$

onde R e \overline{R} são os tensores curvatura de Σ e M , respectivamente. Lembremos que a curvatura escalar de Σ em relação a métrica g é dada por

$$R_g = \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n-1} R_{ijji}.$$

Note que

$$2\overline{R}_{nn} = \sum_{i=1}^n \overline{R}_{inni} + \overline{R}_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{R}_{inni} + \overline{R}_{nn}.$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{a=1}^n \overline{R}_{iaai} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \overline{R}_{ijji} = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{R}_{inni}.$$

Assim,

$$2\overline{R}_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{a=1}^n \overline{R}_{iaai} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \overline{R}_{ijji} + \overline{R}_{nn}.$$

Segue da equação (1.18) que,

$$\begin{aligned}
2\bar{R}_{nn} &= \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{R}_{i11i} + \cdots + \bar{R}_{inni}) - \sum_{i,j=1}^{n-1} (R_{ijji} - B_{ii}B_{jj} + B_{ij}B_{ij}) + \bar{R}_{nn} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \bar{R}_{i11i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{R}_{inni} - \sum_{i,j=1}^{n-1} R_{ijji} + \sum_{i,j=1}^{n-1} B_{ii}B_{jj} - \sum_{i,j=1}^{n-1} B_{ij}B_{ij} + \sum_{a=1}^n \bar{R}_{anna} \\
&= \sum_{a=1}^n \bar{R}_{aa} - \sum_{a=1}^n \bar{R}_{naan} - R_g + |H_\Sigma|^2 - |B|^2 + \sum_{a=1}^n \bar{R}_{naan} \\
&= \bar{R}_g - R_g + |H_\Sigma|^2 - |B|^2.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$2\bar{Ric}_g(\nu, \nu) + R_g + |B|^2 = \bar{R}_g + |H_\Sigma|^2.$$

□

Teorema 1.11. *Se Σ é uma superfície mínima estável fechada de 2-lados imersa em uma 3-variedade Riemanniana (M, g) com curvatura escalar positiva, então ou Σ é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 ou Σ é homeomorfa ao plano projetivo \mathbb{RP}^2 .*

Demonstração. Desde que Σ é de 2-lados, podemos escrever o operador de estabilidade de Σ da seguinte forma

$$L(f) = \Delta_\Sigma f + (|B|^2 + \bar{Ric}(N, N))f,$$

onde N é um campo normal unitário globalmente definido em Σ . Desde que Σ é estável temos que

$$\int_\Sigma (|B|^2 + \bar{Ric}(N, N))f^2 d\sigma_g \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2 d\sigma_g,$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Em particular, se $f \equiv 1$ temos

$$\int_\Sigma (|B|^2 + \bar{Ric}(N, N))d\sigma_g \leq 0. \tag{1.19}$$

Pelo Teorema (1.10) temos que

$$\int_\Sigma (|B|^2 + \bar{Ric}(N, N))d\sigma_g = \frac{1}{2} \int_\Sigma (|B|^2 - 2K_\Sigma + \bar{R}_g)d\sigma_g.$$

Segue de (1.19) que

$$\int_\Sigma (|B|^2 + \bar{R}_g)d\sigma_g \leq \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma_g.$$

Desde que $\bar{R}_g > 0$, pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos

$$0 < \int_{\Sigma} (|B|^2 + \bar{R}_g) d\sigma_g \leq 2\pi\chi(\Sigma).$$

Assim, temos que a característica de Euler de Σ é positiva. Segue do teorema de classificação de superfícies que ou Σ é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 ou Σ é homeomorfa ao plano projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. \square

Exemplo 1.16. *Como a curvatura escalar da esfera \mathbb{S}^3 é positiva, pelo Teorema [1.11](#) concluímos que o toro de Clifford \mathbb{T}^2 imerso em \mathbb{S}^3 é instável.*

Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão suave mínima de uma superfície compacta de dois lados Σ em uma variedade tridimensional M . Considere $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ uma variação suave de f . Denote por $\Sigma_t = \{\phi(t, x); x \in \Sigma\}$ as superfícies da variação ϕ , $N(t)$ um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ_t e $H(t)$ a curvatura média de Σ_t com respeito a $N(t)$.

Teorema 1.12. *Seja $\rho(t) = \rho(t, x) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x), N(t) \right\rangle$. Então*

$$\frac{d}{dt} H(t) = L_{\Sigma_t}(\rho(t)),$$

onde L_{Σ_t} é o operador de estabilidade de Σ_t .

Demonstração. Ver [\[20\]](#), Teorema 3.2. \square

Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [\[12\]](#).

1.9 Existência de Superfícies Minimizando Área em Classes de Isotopia

Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta tridimensional e $\Sigma \subset M$ uma superfícies compacta mergulhada.

Dizemos que uma superfície compacta $\tilde{\Sigma}$ mergulhada em M é *homotópica* a Σ se existe uma aplicação suave $\phi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que $\phi(1, \Sigma) = \tilde{\Sigma}$ e $\phi(0, \cdot) = Id_M$. Se além disso, para todo $t \in [0, 1]$ fixo, a aplicação $\phi_t = \phi(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$ for um mergulho dizemos que $\tilde{\Sigma}$ é *isotópica* a Σ .

A classe de isotopia de Σ , denotada por $\mathcal{I}(\Sigma)$, é definida como

$$\mathcal{I}(\Sigma) = \{\tilde{\Sigma} : \tilde{\Sigma} \text{ é isotópica a } \Sigma\}.$$

Definição 1.14. *Uma superfície compacta de 2-lados mergulhada em uma variedade Riemanniana tridimensional (M, g) é localmente de menor área desde que em alguma vizinhança normal V de Σ em M , $|\Sigma|_g \leq |\Sigma'|_g$ para toda superfície Σ' isotópica a Σ em V , onde $|\cdot|_g$ denota o funcional área em relação a métrica g . Se a desigualdade é estrita para $\Sigma' \neq \Sigma$, dizemos que Σ é estritamente localmente de menor área.*

Uma variedade tridimensional M é dita *irreduzível* se toda esfera bidimensional mergulhada em M limita uma bola tridimensional mergulhada em M , e é dita $\mathbb{R}P^2$ -*irreduzível* se é irreduzível e não contém um plano projetivo de 2-lados mergulhado. Pode-se mostrar que se o recobrimento universal de uma variedade tridimensional M é irreduzível então M é irreduzível. Uma esfera bidimensional mergulhada em uma variedade tridimensional é *incompressível* em M se não limita uma bola tridimensional mergulhada em M . Uma superfície mergulhada $\Sigma \subset M$ diferente de uma esfera bidimensional é dita *incompressível* em M se sempre que D for um disco bidimensional mergulhado em M tal que $D \cap \Sigma = \partial D$, então ∂D limita um disco bidimensional mergulhado em Σ . Pode-se mostrar que uma superfície mergulhada de 2-lados diferente de uma 2-esfera é incompressível se, e somente se, a aplicação induzida pela inclusão sobre os grupos fundamentais é injetiva.

O teorema a seguir nos dá condições sobre a variedade M e a superfície mergulhada $\Sigma \subset M$, que garantem a existência de uma superfície mergulhada que minimiza área na classe de isotopia de Σ .

Teorema 1.13 (J. Hass, P. Scott). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada tridimensional $\mathbb{R}P^2$ -irreduzível e que não contém uma superfície compacta de 1-lado mergulhada. Se Σ é uma superfície fechada de 2-lados incompressível mergulhada em M , então existe uma superfície mergulhada $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{I}(\Sigma)$ tal que*

$$|\tilde{\Sigma}|_g = \inf_{\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)} |\Sigma'|_g.$$

Demonstração. Ver Teorema 5.1 em [17]. □

O teorema acima é verdadeiro quando $\partial M \neq \emptyset$. Neste caso devemos assumir que a curvatura média na fronteira de M com respeito a normal para fora de ∂M é sempre não-negativa (Ver seção 6 em [17]).

Para mais detalhes sobre o conteúdo desta seção ver [17] (ver também [26]).

1.10 Espaços de Recobrimento

Nesta seção citaremos algumas definições e resultados da topologia algébrica, mais especificamente, da teoria de espaços de recobrimento, que serão úteis para melhor entendimento deste trabalho. O material desta seção pode ser encontrado em [10], [18] e [21].

Seja X um espaço topológico. Um recobrimento para X é um espaço topológico \tilde{X} junto com uma aplicação contínua sobrejetiva $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, tal que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X , tal que a imagem inversa

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \Gamma} V_i,$$

é a união disjunta de abertos em \tilde{X} , onde π restrita a cada um desses abertos V_i é um homeomorfismo sobre U . A aplicação π é chamada de aplicação de recobrimento, o conjunto X é chamado de espaço

base, \tilde{X} de espaço total e os abertos V_i de folhas do recobrimento. Se \tilde{X} for simplesmente conexo dizemos que este é o recobrimento universal de X .

Todo espaço topológico conexo por caminhos possui um recobrimento universal, além disso, este é único a menos de homeomorfismos.

Exemplo 1.17. A esfera \mathbb{S}^n é o recobrimento universal do espaço projetivo n -dimensional $\mathbb{R}P^n$, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é o recobrimento universal do toro \mathbb{T}^n e a reta real \mathbb{R} é o recobrimento universal do círculo \mathbb{S}^1 .

Observação 1.1. Se estivermos trabalhando com uma variedade diferenciável que, em particular, é um espaço topológico, o seu recobrimento também será uma variedade diferenciável e sua aplicação de recobrimento será um difeomorfismo restrita as folhas.

Pode-se mostrar que se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento e \tilde{X} é compacto, então X é compacto e é coberto por um número finito de folhas. Neste caso, dizemos que \tilde{X} é o recobrimento de X por n - folhas e temos que

$$\chi(\tilde{X}) = n\chi(X),$$

onde $\chi(\tilde{X})$ e $\chi(X)$ denota a característica de Euler de \tilde{X} e X , respectivamente.

Teorema 1.14. Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow N$ uma isometria local. Se M é completa, então f é uma aplicação de recobrimento e N é completa.

Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento e $\varphi : Y \rightarrow X$ é uma aplicação contínua entre os espaços topológicos Y e X , um levantamento de φ é uma aplicação contínua $\tilde{\varphi} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Teorema 1.15. Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que Y é um espaço topológico conexo, $\varphi : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua e $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ levantamentos de φ tal que $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2(x)$ para algum $x \in Y$. Então $\tilde{\varphi}_1$ é identicamente igual a $\tilde{\varphi}_2$.

Proposição 1.6. Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ é uma curva em X tal que $\alpha(0) = x, x \in X$. Então para cada \tilde{x} pertencente a fibra $\pi^{-1}(\{x\})$, existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.

Suponha que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento. Uma transformação deck do recobrimento \tilde{X} é um homeomorfismo $F : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ F = \pi$. Denotaremos por $G(\tilde{X})$ o conjunto de todas as transformações deck do recobrimento \tilde{X} , este forma um grupo com a operação de composição. Pela propriedade de unicidade de um levantamento (Teorema 1.15), uma transformação deck fica unicamente determinada se soubermos seu valor em um ponto de \tilde{X} .

Suponha que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento e $x \in X$. Existe uma ação do grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ sobre a fibra $\pi^{-1}(x)$. Seguiremos descrevendo esta ação. Considere

$[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, temos que para cada $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Definimos a ação da classe de homotopia $[\alpha]$ em \tilde{x} por

$$[\alpha].\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1).$$

Observe que esta definição não depende da escolha feita, a saber, se ao invés de α usássemos uma curva homotópica, o resultado desta ação seria o mesmo. Sabemos que existe uma única transformação deck $\varphi_\alpha : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\varphi_\alpha(\tilde{x}) = [\alpha].\tilde{x}$. Isso nos induz a definir uma aplicação $[\alpha] \mapsto \varphi_\alpha$ do grupo $\pi_1(X, x)$ em $G(\tilde{X})$. Pode-se mostrar que se \tilde{X} é o recobrimento universal de X , então a aplicação $[\alpha] \mapsto \varphi_\alpha$ é um isomorfismo (Ver [21], capítulo 12).

Teorema 1.16. *Se \tilde{X} é o recobrimento universal de M , então $\tilde{X}/G(\tilde{X})$ é homeomorfo a X .*

1.11 Princípios do Máximo

Nesta seção enunciaremos os princípios do máximo que utilizaremos neste trabalho.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Considere um operador linear diferencial A em Ω de segunda ordem da seguinte forma.

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Suponha que a matriz $a_{ij}(x)$ é simétrica para todo $x \in \Omega$ e A é um operador uniformemente elíptico, isto é, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_i \eta_j \geq \lambda |\eta|^2, \forall x \in \Omega, \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, vamos supor também que existe uma contante $C > 0$ tal que

$$|a_{ij}(x)|, |b_j(x)|, |c(x)| \leq C, \forall x \in \Omega.$$

Teorema 1.17 (Princípio do Máximo de Hopf). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo e A um operador diferencial linear em Ω de segunda ordem tal que $c(x) \leq 0$. Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $A(u) \geq 0$. Se u atinge seu máximo $M \geq 0$ em Ω , então u é constante igual a M em Ω . Caso contrário, se $u(x_0) = M$ em $x_0 \in \partial\Omega$ e $M \geq 0$, então a derivada normal para fora, se esta existe, satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, desde que x_0 pertença a fronteira de uma bola contida em Ω . Além disso, se $c(x) \equiv 0$, as mesmas conclusões são válidas para um máximo $M < 0$.*

Demonstração. Ver [30], página 44. □

Daremos a seguir uma versão do Princípio do Máximo Forte para variedade Riemannianas.

Teorema 1.18 (Princípio do Máximo Forte I). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana conexa, h uma função suave não negativa e $u \in C^2(M)$ satisfazendo*

$$(-\Delta_g + h)u \geq 0.$$

Se u atinge seu mínimo $m \leq 0$, então u é constante sobre M .

Capítulo 2

Superfícies Hiperbólicas

Nesta seção vamos expor os resultados obtidos em [28]. O principal objetivo de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar $R_g \geq -2$. Se $\Sigma \subset M$ é uma superfície fechada orientável de 2-lados mergulhada de gênero $g(\Sigma) \geq 2$ que é localmente de menor área, então*

$$|\Sigma|_g \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1) = -2\pi\chi(\Sigma), \quad (2.1)$$

onde $|\Sigma|_g$ é a área de Σ com respeito à métrica induzida. Além disso, se vale a igualdade, então Σ tem uma vizinhança isométrica ao cilindro $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$, onde $\varepsilon > 0$ e g_Σ é a métrica em Σ que possui curvatura Gaussiana constante igual a -1 . Mais precisamente, a isometria é dada por $f(t, x) = \exp_x(tN(x))$, $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ .

Iniciaremos a demonstração do Teorema [2.1] provando a desigualdade ([2.1]). Segue do fato de Σ minimizar área localmente que Σ é uma superfície mínima estável. Com isso, a desigualdade ([2.1]) segue essencialmente da Segunda Fórmula de Variação de Área e do Teorema de Gauss-Bonnet. Para caracterizar as superfícies satisfazendo a igualdade em ([2.1]), usaremos o Teorema da Função Implícita para construir uma família a 1-parâmetro de superfícies mergulhadas todas homeomorfas a Σ e com curvatura média constante. Em seguida usaremos o Princípio do Máximo de Hopf e a solução do Problema de Yamabe para variedades com fronteira para mostrar que essas superfícies tem todas a mesma área que Σ , em particular, que todas elas são superfícies mínimas em M . Por fim, construiremos uma isometria local entre o cilindro $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$ e a variedade Riemanniana (M, g) , para algum número real ε positivo.

2.1 Prova da Desigualdade

Seja N um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ . Como Σ minimiza área localmente, então Σ é uma superfície mínima estável. Segue da condição de estabilidade que

$$\int_{\Sigma} (Ric(N, N) + |B|^2)\phi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} |\nabla_g \phi|^2 d\sigma, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Sigma),$$

onde B e $d\sigma$ denotam a segunda forma fundamental e o elemento de área de Σ , respectivamente. Em particular, escolhendo $\phi = 1$, obtemos

$$\int_{\Sigma} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma \leq 0. \quad (2.2)$$

Agora, do Teorema [1.10](#) temos

$$Ric(N, N) = \frac{1}{2}R_g - K_\Sigma - \frac{1}{2}|B|^2, \quad (2.3)$$

onde K_Σ denota a curvatura Gaussiana de Σ .

Somando $|B|^2$ em ambos os lados da igualdade [\(2.3\)](#) obtemos

$$Ric(N, N) + |B|^2 = \frac{1}{2}R_g - K_\Sigma + \frac{1}{2}|B|^2.$$

Daí, por [\(2.2\)](#)

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2}R_g - K_\Sigma + \frac{1}{2}|B|^2 \right) d\sigma \leq 0.$$

O que implica que

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R_g + |B|^2) d\sigma \leq \int_{\Sigma} K_\Sigma d\sigma.$$

Como $R_g \geq -2$ e $|B|^2 \geq 0$, temos

$$- \int_{\Sigma} d\sigma \leq \int_{\Sigma} K_\Sigma d\sigma.$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$-|\Sigma|_g \leq 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\chi(\Sigma)$ denota a característica de Euler de Σ . Como

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g(\Sigma),$$

onde $g(\Sigma)$ é o gênero de Σ , então

$$|\Sigma|_g \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

2.2 Caso Igualdade

Proposição 2.1. *Se Σ satisfaz a igualdade em (2.1), então Σ é totalmente geodésica. Além disso, $Ric(N, N) = 0$ e $R_g = -2$ em Σ e a curvatura Gaussiana da métrica g_Σ é igual a -1 .*

Demonstração. Pelo Teorema 1.10 temos que

$$Ric(N, N) + |B|^2 = \frac{1}{2}R_g - K_\Sigma + \frac{1}{2}|B|^2.$$

Como $R_g \geq -2$ temos que

$$Ric(N, N) + |B|^2 \geq -1 - K_\Sigma + \frac{1}{2}|B|^2.$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma &\geq - \int_\Sigma d\sigma - \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma + \frac{1}{2} \int_\Sigma |B|^2 d\sigma \\ &\geq - \int_\Sigma d\sigma - \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet e pela igualdade em (2.1) temos que

$$\int_\Sigma (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma \geq 0.$$

Por outro lado, pela condição de estabilidade,

$$\int_\Sigma (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma \leq 0.$$

Segue que

$$\int_\Sigma (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma = 0 \tag{2.4}$$

Considere o operador de estabilidade $L(\phi) = \Delta_\Sigma \phi + (|B|^2 + Ric(N, N))\phi$. Seu primeiro autovalor é dado por

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Sigma (|\nabla_g \phi|^2 - (Ric(N, N) + |B|^2)\phi^2) d\sigma; \int_\Sigma \phi^2 d\sigma = 1 \right\}.$$

Desde que Σ é estável temos que $\lambda_1 \geq 0$. Note que a função constante $\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|_g}}$ é tal que

$$\int_\Sigma \varphi^2 d\sigma = 1 \text{ e } \int_\Sigma |\nabla_g \varphi|^2 d\sigma = 0.$$

Além disso, por (2.4)

$$\int_{\Sigma} (|\nabla_g \varphi|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2)\varphi^2) d\sigma = -\frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) d\sigma = 0.$$

Segue que $\lambda_1 = 0$. Assim, $L(\varphi) = 0$, o que implica que $\text{Ric}(N, N) + |B|^2 = 0$ em pontos de Σ . Como $R_g \geq -2$, pelo Teorema 1.10 temos que $|B|^2 \leq 2 + 2K_{\Sigma}$, daí, pelo Teorema de Gauss-Bonnet obtemos que

$$\int_{\Sigma} |B|^2 d\sigma_g \leq 2|\Sigma|_g + 4\pi\chi(\Sigma).$$

Desde que é válida a igualdade em (2.1) concluímos que

$$\int_{\Sigma} |B|^2 d\sigma_g = 0.$$

Segue que $B \equiv 0$. Consequentemente, Σ é totalmente geodésica e $\text{Ric}(N, N) = 0$ em pontos de Σ . Com isso, pelo Teorema 1.10 temos que $K_{\Sigma} = \frac{1}{2}R_g \geq -1$, o que implica que $K_{\Sigma} + 1 \geq 0$. Pela igualdade em (2.1) e o Teorema de Gauss-Bonnet temos que $\int_{\Sigma} (K_{\Sigma} + 1) d\sigma = 0$. Portanto, $K_{\Sigma} = -1$ em Σ . \square

Proposição 2.2. *Se Σ satisfaz a igualdade em (2.1), então existe $\varepsilon > 0$ e uma família suave $\Sigma_t \subset M$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de superfícies compactas mergulhadas satisfazendo:*

- $\Sigma_t = \{\exp_x(w(t, x)N(x)) : x \in \Sigma\}$, onde $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que

$$w(0, x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0.$$

- Σ_t tem curvatura média constante para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demonstração. Da Proposição 2.1, temos que o operador de estabilidade de Σ é $L_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma}$. Fixe $\alpha \in (0, 1)$ e considere os espaços $X = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} u d\sigma = 0\}$ e $Y = \{u \in C^{0,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} u d\sigma = 0\}$. Note que X e Y são fechados em $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ e $C^{0,\alpha}(\Sigma)$, respectivamente, logo são espaços de Banach. Para cada função $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, defina $\varphi_u : \Sigma \rightarrow M$ por

$$\varphi_u(x) = \exp_x(u(x)N(x)),$$

onde N é um campo normal unitário definido ao longo de Σ . Chame $\Sigma_u = \varphi_u(\Sigma)$. Escolha $\varepsilon, \delta > 0$, tais que φ_{u+t} com $u \in B(0, \delta) = \{v \in X; \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Sigma)} < \delta\}$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ seja um difeomorfismo. Com essa escolha, Σ_{u+t} é uma superfície compacta mergulhada de classe $C^{2,\alpha}$. Denote por H_{u+t} a curvatura média de Σ_{u+t} .

Defina $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, \delta) \rightarrow Y$ por

$$F(t, u) = H_{u+t} - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} H_{u+t} d\sigma.$$

Note que F está bem definida, pois

$$\int_{\Sigma} F(t, u) d\sigma = \int_{\Sigma} H_{u+t} d\sigma - \frac{|\Sigma|_g}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} H_{u+t} d\sigma = 0.$$

Note ainda que $F(0, 0) = 0$, pois H_0 é a curvatura média de Σ que é mínima. Tome $v \in X$ e veja que

$$\begin{aligned} DF_{(0,0)}(0, v) &= \left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} (0, sv) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} H_{sv} - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} H_{sv} d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema [1.12](#) e pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} DF_{(0,0)}(0, v) &= L_{\Sigma}(v) - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} L_{\Sigma}(v) d\sigma \\ &= \Delta_{\Sigma} v - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} v d\sigma \\ &= \Delta_{\Sigma} v. \end{aligned}$$

Afirmção 2.1. *O operador $\Delta_{\Sigma} : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo.*

Injetividade: Sejam $f, \bar{f} \in X$ e suponha que $\Delta_{\Sigma} f = \Delta_{\Sigma} \bar{f}$. faça $h = f - \bar{f}$ e note que como Σ é compacta, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq h(x)$ para todo $x \in \Sigma$. Como $\int_{\Sigma} h d\sigma_g = 0$ temos que $m|\Sigma|_g \leq 0$. Segue que h atinge mínimos $m \leq 0$, pelo Princípio do Máximo Forte h é constante. Como $\int_{\Sigma} h d\sigma_g = 0$ concluímos que $h = 0$ e portanto $f = \bar{f}$.

Sobrejetividade: Considere $f \in Y$. Assim, existe $u \in H^1(\Sigma)$ solução fraca de $\Delta u = f$ com $\int_{\Sigma} u d\sigma_g = 0$. Como $f \in Y \subseteq C^{0,\alpha}(\Sigma)$, segue do Teorema de Regularidade Elíptica Global que $u \in X \subseteq C^{2,\alpha}(\Sigma)$.

Pela Afirmção [2.1](#) temos que $DF_{(0,0)}$ é isomorfismo de X em Y . Como $F(0, 0) = 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existe $\varepsilon_1 < \varepsilon$ e uma função $u : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow B(0, \delta)$ tal que

$$u(0) = u(0, \cdot) = 0 \text{ e } F(t, u(t, \cdot)) = 0, \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1).$$

Defina $w(t, \cdot) = u(t, \cdot) + t$, onde $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Note que como $F(t, u(t, \cdot)) = 0$, a superfície $\Sigma_t = \varphi_{w(t, \cdot)}(\Sigma)$ tem curvatura média constante para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Além disso, $w(0, x) = u(0, x) = 0$ e como $u(t, \cdot) \in B(0, \delta)$ temos

$$\int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) d\sigma = \int_{\Sigma} u(t, \cdot) d\sigma = 0.$$

Defina $\phi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \Sigma \rightarrow M$ por

$$\phi(t, x) = \exp_x(w(t, x)N(x)). \quad (2.5)$$

Como $w(0, x) = 0$, então

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x), \quad \forall x \in \Sigma. \quad (2.6)$$

Agora observe que como $F(t, u(t, \cdot)) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, temos

$$H_{w(t, \cdot)} - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} H_{w(t, \cdot)} d\sigma = 0.$$

O que implica que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_{w(t, \cdot)} - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_{w(t, \cdot)} d\sigma = 0.$$

Pelo Teorema [1.12](#) temos

$$\Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) - \frac{1}{|\Sigma|_g} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = 0.$$

Assim

$$\Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0.$$

O que implica que

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = 0.$$

Por outro lado, pela Primeira Identidade de Green

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \Delta_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma = - \int_{\Sigma} \left| \nabla_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) \right|^2 d\sigma.$$

Segue que

$$\int_{\Sigma} \left| \nabla_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) \right|^2 d\sigma = 0,$$

e então

$$\nabla_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0.$$

Logo $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante. Agora, como $\int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0$, temos

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot) - 1 \right) d\sigma = 0.$$

O que implica que

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot) d\sigma = |\Sigma|_g.$$

Como $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante, obtemos que $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) = 1$. \square

Vamos considerar a função $\phi : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \Sigma \rightarrow M$ definida em (2.5) por $\phi(t, x) = \exp_x(w(t, x)N(x))$. A família $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ dada pela Proposição 2.2 tem curvatura média constante para todo $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Seja $H(t)$ a curvatura média de Σ_t , e considere $\vec{H}(t) = -H(t)N_t$, onde N_t é um campo normal globalmente definido em Σ_t . Defina para cada $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ a função $\rho_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho_t(x) = \left\langle N_t(x), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \right\rangle. \quad (2.7)$$

Pela Proposição 2.2 temos que $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) = 1$, assim, por (2.6) obtemos que $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = N(x)$, consequentemente, $\rho_0(x) = 1, \forall x \in \Sigma$. Pela continuidade de ρ_t podemos encontrar um número real positivo $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tal que $\rho_t(x) > 0, \forall x \in \Sigma$ e $\forall t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$.

Proposição 2.3. *Existe $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_1$, tal que $H(t) \leq 0$, para todo $t \in [0, \varepsilon_3]$.*

Demonstração. Suponha por contradição que existe (ε_k) sequência de números reais positivos com $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$, tal que, $H(\varepsilon_k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere (V_k, g_k) , onde $V_k = [0, \varepsilon_k] \times \Sigma$ e g_k métrica em V_k obtida a partir do pullback de g por $\phi_k = \phi|_{V_k}$. Assim, (V_k, g_k) é uma variedade compacta de dimensão 3 com bordo e

$$\partial V_k = (\{0\} \times \Sigma) \cup (\{\varepsilon_k\} \times \Sigma) = \Sigma \cup \Sigma_{\varepsilon_k}.$$

Note que

- A variedade Riemanniana (V_k, g_k) é isométrica a $(\phi_k(V_k), g)$. Assim como $\{0\} \times \Sigma \subset V_k$ e $\Sigma \subset \phi_k(V_k)$ são isométricas temos que

$$|\Sigma|_{g_k} = |\Sigma|_g = 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

- Como ϕ_k é um difeomorfismo local, temos que (V_k, g_k) é localmente isométrica a (M, g) . Disto, e do fato que $R_g \geq -2$ segue que $R_{g_k} \geq -2$.
- Denote por $H_{\partial V_k}$ a curvatura média da fronteira em relação a normal para fora. Como $\partial V_k = \Sigma \cup \Sigma_{\varepsilon_k}$, então os pontos de ∂V_k que pertencem a Σ tem curvatura média zero e os que pertencem a Σ_{ε_k} tem curvatura média constante positiva. Segue que $H_{\partial V_k} \geq 0$.

Afirmção 2.2. *Para k suficientemente grande, o Quociente de Sobolev Q de V_k é tal que, $Q(V_k) < 0$. Em particular, $Q(V_k) < Q(\mathbb{S}_+^3)$.*

Como $R_g = -2$ em Σ e a função curvatura escalar é contínua, podemos considerar $-2 \leq R_{g_k} \leq -1$, para k suficientemente grande. Escolha $\varphi \equiv 1$ e note que

$$Q_{g_k}(1) = \frac{\frac{1}{8} \int_{V_k} R_{g_k} dv_{g_k} + \frac{1}{4} \int_{\partial V_k} H_{\partial V_k} d\sigma_{g_k}}{\text{Vol}_{g_k}(V_k)^{\frac{1}{3}}}.$$

Como $\partial V_k = \Sigma \cup \Sigma_{\varepsilon_k}$, segue que $H_{\partial V_k} = 0$ em Σ . Assim

$$\begin{aligned} Q_{g_k}(1) &= \frac{\frac{1}{8} \int_{V_k} R_{g_k} dv_{g_k} + \frac{1}{4} H(\varepsilon_k) \int_{\Sigma_{\varepsilon_k}} d\sigma_{g_k}}{\text{Vol}_{g_k}(V_k)^{\frac{1}{3}}} \\ &\leq \frac{-\frac{1}{8} \int_{V_k} dv_{g_k} + \frac{1}{4} H(\varepsilon_k) |\Sigma_{\varepsilon_k}|_{g_k}}{\text{Vol}_{g_k}(V_k)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$Q_{g_k}(1) \leq \frac{-\frac{1}{8} \text{Vol}(V_k) + \frac{1}{4} H(\varepsilon_k) |\Sigma_{\varepsilon_k}|_{g_k}}{\text{Vol}_{g_k}(V_k)^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.8)$$

Vimos que $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x) = N(x)$ para todo $x \in \Sigma$. Assim $\rho_0(x) = \langle N(x), N(x) \rangle = 1$. Segue da Proposição [1.12](#) que $H'(0) = L_{\Sigma}(\rho_0) = 0$. Fazendo a expansão de $H : [0, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}$ em série de Taylor, obtemos que $H(t) = H(0) + H'(0)t + O(t^2)$, o que implica que $H(\varepsilon_k) = O(\varepsilon_k^2)$, pois $H(0) = 0$.

Considere $V(t) = [0, t] \times \Sigma$ e $g_t = \phi|_{V(t)}^* g$. Note que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V(t), g_t) &= \int_{[0, t] \times \Sigma} dv_{g_t} \\ &= \int_{[0, t] \times \Sigma} \phi|_{V(t)}^* (dv_g). \end{aligned}$$

Como o espaço das 3-formas em V_k tem dimensão 1, $\phi|_{V(t)}^* (dv_g)$ e $ds \wedge d\sigma$ diferem por uma função $h : [0, t] \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja

$$\phi|_{V(t)}^* (dv_g) = h(s, x) ds \wedge d\sigma.$$

Vamos encontrar uma expressão para h . Para isso, considere $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal positivo em Σ e veja que

$$\phi|_{V(t)}^* (dv_g) \left(\frac{\partial}{\partial s}, e_1, e_2 \right) = h(s, x) (ds \wedge d\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial s}, e_1, e_2 \right).$$

O que implica que,

$$dv_g \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, x), D\phi(s, x)(e_1), D\phi(s, x)(e_2) \right) = h(s, x) ds \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) d\sigma(e_1, e_2).$$

Segue que,

$$h(s, x) = dv_g \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(s, x), D\phi(s, x)(e_1), D\phi(s, x)(e_2) \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} Vol(V(t), g_t) &= \int_{[0, t] \times \Sigma} h(s, x) ds \wedge d\sigma \\ &= \int_0^t \int_{\Sigma} h(s, x) ds \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{d}{dt} Vol(V(t)) = \int_{\Sigma} h(t, x) d\sigma. \quad (2.9)$$

Lembre-se que $\frac{\partial \phi}{\partial s}(0, x) = N(x)$, e daí

$$h(0, x) = dv_g(N(x), D\phi(0, x)(e_1), D\phi(0, x)(e_2)).$$

Observe que $\{N(x), D\phi(0, x)(e_1), D\phi(0, x)(e_2)\}$ é um referencial ortonormal positivo, o que implica que $h(0, x) = 1$. Com isso e pela igualdade (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Vol(V(t)) &= \int_{\Sigma} h(0, x) d\sigma = \int_{\Sigma} d\sigma \\ &= |\Sigma|_g = |\Sigma|_{g_k}. \end{aligned}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor da função real que associa a cada t o volume de $V(t)$ obtemos

$$Vol(V(t)) = Vol(V(0)) + t \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Vol(V(t)) + O(t^2).$$

Observe que $V(0) = \Sigma$ e esta tem medida 3-dimensional nula. Assim

$$Vol(V_k) = \varepsilon_k |\Sigma|_{g_k} + O(\varepsilon_k^2). \quad (2.10)$$

Assim, como $H(\varepsilon_k) = O(\varepsilon_k^2)$, segue de (2.8) e (2.10) que $Q_{g_k}(1) < 0$. Lembremos que o Quociente de Sobolev de V_k é definido por

$$Q(V_k) = \inf \{ Q_{g_k}(\phi); \phi \in C^1(V_k), \phi \neq 0 \}.$$

Consequentemente $Q(V_k) \leq Q_{g_k}(\phi)$ para toda função não-nula $\phi \in C^1(V_k)$, em particular, $Q(V_k) \leq Q_{g_k}(1)$. Segue que $Q(V_k) \leq Q_{g_k}(1) < 0$ para k suficientemente grande. Logo, $Q(V_k) < Q(\mathbb{S}_+^3)$.

Decorre da solução do problema de Yamabe para variedades Riemannianas compactas com fronteira de dimensão $n \geq 3$ que existe $u \in C^\infty(V_k)$ positiva tal que a curvatura escalar da métrica $\bar{g} = u^4 g_k$ é constante negativa e o bordo é uma superfície mínima, ou seja,

$$R_{\bar{g}} = C < 0, \quad C \in \mathbb{R} \text{ e } H_{\bar{g}} = 0 \text{ em } \partial V_k.$$

Faça $f = 2 \log u$ e note que $\bar{g} = e^{2f} g_k$. Pela Proposição [1.5](#) temos

$$R_{\bar{g}} = e^{-2f} (R_g - 4\Delta_g f - 2|\nabla_g f|^2).$$

Multiplicando a métrica \bar{g} pela constante $-\frac{C}{2} > 0$ temos que a métrica obtida tem curvatura escalar igual a -2 . Assim podemos supor $R_{\bar{g}} = C = -2$. Assim, u é solução de

$$\begin{cases} \Delta_{g_k} u - \frac{1}{8} R_{g_k} u - \frac{1}{4} u^5 = 0 & \text{em } V_k \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{4} u H_{\partial V_k} = 0 & \text{em } \partial V_k \end{cases}$$

onde η é a normal para fora da fronteira de V_k . Note que como $R_{g_k} \geq -2$ temos

$$\Delta_{g_k} u + \frac{1}{4} u - \frac{1}{4} u^5 \geq 0 \text{ em } V_k.$$

Defina $v = u - 1$ e $h = \frac{1}{4}(u + u^2 + u^3 + u^4)$ e veja que

$$\begin{aligned} \Delta_{g_k} v - hv &= \Delta_{g_k} u - \frac{(u-1)}{4}(u + u^2 + u^3 + u^4) \\ &= \Delta_{g_k} u - \frac{1}{4} u^5 + \frac{1}{4} u \geq 0. \end{aligned}$$

Agora defina o operador linear elíptico $\bar{L} : C^\infty(V_k) \rightarrow C^\infty(V_k)$ por $\bar{L}(f) = \Delta_{g_k} f - hf$. Note que, $\bar{L}(v) \geq 0$. Como $v \in C^\infty(V_k)$ e V_k é compacto, v assume máximo em algum $x_0 \in V_k$. Suponha $v(x_0) \geq 0$. Como $h > 0$ e $\bar{L}(v) \geq 0$, pelo Princípio do Máximo de Hopf: ou v é constante ou $x_0 \in \partial V_k$ com $\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) > 0$. Note que v não pode ser constante pois se fosse u também seria, daí teríamos que $\lambda H_{\partial V_k} = 0$, onde λ é uma constante positiva, o que implica que $H_{\partial V_k} = 0$, isso não é verdade pois há pontos em ∂V_k com curvatura média positiva. Segue que $x_0 \in \partial V_k$ e $\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) > 0$. Assim $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$, que implica que $u(x_0) H_{\partial V_k}(x_0) < 0$, o que é uma contradição pois $u > 0$ e $H_{\partial V_k} \geq 0$. Logo $v(x_0) < 0$.

Como $v(x) \leq v(x_0) < 0$ para todo $x \in V_k$, então $u(x) < 1$. Desde que $\bar{g} = u^4 g_k$ temos

$$\begin{aligned} |\Sigma|_{\bar{g}} &= \int_{\Sigma} dv_{\bar{g}} \\ &= \int_{\Sigma} u^6 dv_{g_k} \\ &< \int_{\Sigma} dv_{g_k} = |\Sigma|_{g_k}. \end{aligned}$$

Segue que

$$|\Sigma|_{\bar{g}} < |\Sigma|_{g_k} = 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Afirmção 2.3. *A superfície Σ é incompressível em V .*

Como Σ é de 2-lados diferente de uma 2-esfera (pois Σ tem gênero maior ou igual a 2), temos que ela é incompressível em V_k se, e somente se, a aplicação $i_{\#} : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(V_k)$ definida por $i_{\#}([\alpha]) = [i(\alpha)]$ é injetiva, onde $i : \Sigma \rightarrow V_k$ é a aplicação inclusão. Faremos a demonstração desta afirmação por contradição. Suponha que a aplicação $i_{\#}$ não é injetiva. Considere $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(\Sigma)$ tais que $[\gamma] \neq [\beta]$ e $i_{\#}([\gamma]) = i_{\#}([\beta])$. Daí, as curvas $\bar{\gamma}(t) = (0, \gamma(t))$ e $\bar{\beta}(t) = (0, \beta(t))$ em V_k são homotópicas. Considere F uma homotopia entre as curvas $\bar{\gamma}$ e $\bar{\beta}$. Note que a aplicação $G = \pi_2 \circ F$ é uma homotopia entre as curvas γ e β , onde a aplicação $\pi_2 : V_k \rightarrow \Sigma$ é a projeção no segundo fator. Mas isso é uma contradição, pois $[\gamma] \neq [\beta]$. Logo segue a afirmação.

Afirmção 2.4. *V_k não contém uma superfície compacta de 1-lado mergulhada.*

De fato, como Σ tem gênero maior ou igual a 2, pelo Teorema de Classificação de superfícies compactas, Σ é homeomorfa a soma conexa de n toros, $n \geq 2$. Assim, existe um mergulho suave $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de Σ no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Defina uma aplicação $F : V_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(t, x) = \exp_{f(x)}(tN(f(x))),$$

onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Podemos tomar k suficientemente grande para que F seja um mergulho suave. Suponha por contradição que V_k contém uma superfície S mergulhada compacta de 1-lado. Daí, como V_k é orientável, pelo Teorema 1.9 temos que S é não-orientável. Defina a superfície $\bar{S} = F(S)$. Observe que \bar{S} é uma superfície compacta não-orientável mergulhada em \mathbb{R}^3 . Mas isso é uma contradição, pois toda superfície compacta mergulhada em \mathbb{R}^3 é orientável. Portanto, segue a afirmação.

Afirmção 2.5. *A 3-variedade V_k é \mathbb{RP}^2 -irreduzível.*

De fato, note que a 3-variedade $\tilde{V}_k = [0, \varepsilon_k] \times \mathbb{R}^2$ é o recobrimento universal de V_k , pois \mathbb{R}^2 é o recobrimento universal de Σ , já que Σ é homeomorfa a soma conexa de n toros, $n \geq 2$. Obviamente, \tilde{V}_k é uma variedade irreduzível. Segue do fato de que se o recobrimento universal de uma 3-variedade N é irreduzível, então N é irreduzível, que a variedade V_k é irreduzível. Além disso, como Σ é orientável temos que V_k é orientável. Segue do Teorema 1.9 que V_k não contém um plano projetivo de 2-lados mergulhado. Portanto, segue a afirmação.

Válidas as afirmações acima, como $H_{\bar{g}} = 0$ podemos aplicar o Teorema [1.13](#), que garante a existência de uma superfície $\bar{\Sigma} \in \mathcal{I}(\Sigma)$ tal que

$$|\bar{\Sigma}|_{\bar{g}} = \inf_{\mathcal{I}(\Sigma)} |\tilde{\Sigma}|_{\bar{g}},$$

onde $\mathcal{I}(\Sigma)$ denota a classe de isotopia de Σ em V_k . Em particular,

$$|\bar{\Sigma}|_{\bar{g}} \leq |\Sigma|_{\bar{g}} < |\Sigma|_{g_k} = 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Isso é uma contradição, pois como $\bar{\Sigma} \subset M$ é uma superfície compacta, mergulhada, de dois lados e $g(\bar{\Sigma}) = g(\Sigma) \geq 2$, temos que $|\bar{\Sigma}|_{\bar{g}} \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1) = |\Sigma|_g$. Portanto existe $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_1$ tal que $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_3]$. \square

Proposição 2.4. *Se Σ satisfaz a igualdade em [\(2.1\)](#), então Σ está contida em uma vizinhança isométrica ao cilindro $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$, onde $\varepsilon > 0$ e g_Σ é a métrica induzida em Σ com curvatura gaussiana igual a -1 .*

Demonstração. Pela Proposição [2.3](#) $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon_3]$. Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, daí $\rho_t > 0$ e $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$, onde ρ_t é a função definida em [\(2.7\)](#). Assim, pela Primeira Fórmula de Variação de Área

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t|_g = H(t) \int_{\Sigma} \rho_t d\sigma_g \leq 0.$$

Segue que a função que associa a cada $t \in [0, \varepsilon]$ a área de Σ_t é não-crescente. O que implica que $|\Sigma_t|_g \leq |\Sigma|_g$, mas como Σ é mínima concluímos que $|\Sigma_t|_g = |\Sigma|_g = 4\pi(g(\Sigma) - 1)$. Assim, Σ_t é mínima estável e pela Proposição [2.1](#) é totalmente geodésica e $Ric(N_t, N_t) = 0$ em Σ_t para todo $t \in [0, \varepsilon]$. Com isso, o operador de estabilidade de Σ_t é $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t}$. Pela Proposição [1.12](#) temos que $H'(t) = L_{\Sigma_t}(\rho(t)) = \Delta_{\Sigma_t}(\rho_t) = 0$, pois Σ_t é mínima. Como Σ_t é compacta sem fronteira, segue que ρ_t não depende de x , já que toda função harmônica em uma superfície fechada é constante.

Considere $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ uma carta local com coordenadas (x_1, x_2) . Como Σ_t é totalmente geodésica temos que sua segunda forma fundamental é identicamente nula, isto é, $B_t \equiv 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$. Assim temos que $\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} N_t = 0$, para todo $i = 1, 2$ e todo $t \in [0, \varepsilon]$. Além disso, como $\langle N_t, N_t \rangle = 1$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_t, N_t \rangle = 0.$$

O que implica que

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t, N_t \right\rangle = 0.$$

Assim,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t \right)^\perp = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle N_t, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\
&= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\
&= - \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_t \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2$, pois ρ_t é constante para cada $t \in [0, \varepsilon)$. Segue que

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t \right)^\top = 0.$$

Consequentemente,

$$\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t = 0.$$

Seja $\alpha_x : [0, \varepsilon) \rightarrow M$, $x \in \Sigma$ fixo, uma curva suave em M dada por

$$\alpha_x(t) = \phi(t, x) = \exp_{f(x)}(w(t, x)N(x)).$$

Note que

$$\alpha'_x(t) = d(\exp_x)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right),$$

e

$$\nabla_{\alpha'_x} N_t = \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t = 0.$$

Isso nos diz que N_t é um campo paralelo ao longo da curva α_x , e ainda que transporta paralelamente o vetor $N(x) = \alpha'_x(0)$ ao longo de α_x , pois $w(0, x) = 0$. Por outro lado, como α_x é geodésica temos que $\nabla_{\alpha'_x} \alpha'_x = 0$. Assim α'_x é um campo paralelo ao longo de α_x que também transporta paralelamente o vetor $N(x) = \alpha'_x(0)$ ao longo de α_x . Por unicidade do transporte paralelo concluímos que

$$N_t(x) = \alpha'_x(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x). \quad (2.11)$$

Como $\langle N_t(x), N_t(x) \rangle = 1$, temos

$$\left\langle d(\exp_x)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right), d(\exp_x)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right) \right\rangle = 1.$$

O que implica que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \frac{1}{w(t, x)} \left\langle d(\exp_x)_{w(t, x)N(x)}(w(t, x)N(x)), d(\exp_x)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right) \right\rangle = 1.$$

Segue do Lema de Gauss que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \right)^2 = 1.$$

Como $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1$, obtemos que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = 1, \quad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

Assim, temos que $w(t, x) = t$, $\forall t \in [0, \varepsilon]$, pois $w(0, x) = 0$. Portanto, podemos concluir que $\phi(t, x) = \exp_x(tN(x))$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$.

Vamos verificar agora que a métrica produto $\tilde{g} = dt^2 + g_\Sigma$, em $[0, \varepsilon) \times \Sigma$, onde g_Σ é a métrica induzida em Σ coincide com a métrica induzida por ϕ . Para isso, basta mostrar que as componentes dos tensores métricos são iguais. Considere $\phi = \phi|_{[0, \varepsilon) \times \Sigma}$ e a métrica $\bar{g} = \phi^*g$. Sabemos que,

- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = 1$
- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0$
- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = (g_\Sigma)_{ij}$

Vamos agora calcular as componentes da métrica \bar{g} . Temos que

$$\bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \phi^*g \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = g \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right).$$

Note que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = d(\exp_x)_{tN(x)}(N(x)).$$

Se $t = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) &= \langle d(\exp_x)_0(N(x)), d(\exp_x)_0(N(x)) \rangle \\ &= \langle N(x), N(x) \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se $t \neq 0$, pelo Lema de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
\bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) &= \langle d(\exp_x)_{tN(x)}(N(x)), d(\exp_x)_{tN(x)}(N(x)) \rangle \\
&= \frac{1}{t} \langle d(\exp_x)_{tN(x)}(tN(x)), d(\exp_x)_{tN(x)}(N(x)) \rangle \\
&= \frac{1}{t} \langle tN(x), N(x) \rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por (2.11) temos que

$$\begin{aligned}
\bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= g \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \\
&= \left\langle N_t(x), \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = g \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = (g_\Sigma)_{ij}.$$

Assim as componentes das métricas coincidem, o que implica que são iguais. Logo $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$ é isométrica a $(\phi([0, \varepsilon) \times \Sigma), g)$. Note que $\phi([0, \varepsilon) \times \Sigma)$ é aberto de M que contém Σ . Portanto Σ está contida em uma vizinhança isométrica a variedade Riemanniana $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$.

Para $t \leq 0$, basta fazer argumentos análogos aos feitos para $t > 0$ com a normal $\tilde{N} = -N$. \square

Proposição 2.5. *Considere a variedade Riemanniana produto $(\Sigma \times \mathbb{R}, g_\Sigma + dt^2)$. A aplicação $\phi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por $\phi(x, t) = \exp_x(tN(x))$ é uma isometria local.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\phi|_{\Sigma \times [0, +\infty)}$ é uma isometria local. Suponha por absurdo que isto é falso. Considere t o maior número real positivo tal que $\phi|_{\Sigma \times [0, t]}$ é uma isometria local. Defina a superfície imersa $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ com respeito a métrica induzida $g_t = \phi_t^*g$, onde $\phi_t := \phi(\cdot, t)$. Note que Σ e Σ_t são homotópicas via a homotopia suave ϕ , assim elas tem o mesmo gênero. Além disso, como $\phi|_{\Sigma \times [0, t]}$ é uma isometria local temos que para cada $s \in [0, t]$ a métrica ϕ_s^*g coincide com a métrica g_Σ , em particular, a métrica g_t em Σ_t coincide com a métrica g_Σ . Consequentemente,

$$|\Sigma_t|_{g_t} = |\Sigma|_{g_\Sigma} = 4\pi(g(\Sigma) - 1)$$

Segue que Σ_t é uma superfície mínima que satisfaz a igualdade em (2.1). Pela Proposição 2.4, existe um número real $\delta > 0$ tal que $\phi|_{\Sigma \times [0, t+\delta)}$ é uma isometria local. Pela maximalidade de t temos uma contradição. Logo $\phi|_{\Sigma \times [0, +\infty)}$ é uma isometria local. Analogamente mostra-se que $\phi|_{\Sigma \times (-\infty, 0]}$ é uma isometria local. Portanto $\phi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma isometria local. \square

Desde que, (M, g) é completa segue do Teorema 1.14 que a aplicação ϕ dada pela Proposição 2.5 é uma aplicação de recobrimento. Portanto, $(\Sigma \times \mathbb{R}, g_\Sigma + dt^2)$ é um recobrimento para (M, g) .

Capítulo 3

Superfícies Esféricas

Nesta seção vamos expor os resultados obtidos em [3].

Para entender o principal teorema denote por \mathcal{F} o conjunto de todas as imersões suaves $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ que representam um elemento não-trivial do segundo grupo de homotopia $\pi_2(M)$ e defina

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf\{\text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g), f \in \mathcal{F}\}. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com curvatura escalar positiva e com segundo grupo de homotopia não-trivial. Então*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 8\pi, \quad (3.2)$$

onde R_g é a curvatura escalar de (M, g) . Além disso, se vale a igualdade, então o recobrimento universal de (M, g) é isométrico ao cilindro $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, dt^2 + h)$, onde h é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^2 .

Iniciaremos a demonstração deste teorema provando a desigualdade (3.2). Sacks, Uhlenbeck, Meeks e Yau mostraram que existe uma esfera mínima imersa em M que minimiza área em sua classe de homotopia (ver [17], Teorema 4.2), isto é, o ínfimo em (3.1) é atingido, mais precisamente temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2 (Sacks-Uhlenbeck, Meeks-Yau [17]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com segundo grupo de homotopia $\pi_2(M)$ não-trivial, então existe uma aplicação f em \mathcal{F} tal que $\text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g) = \mathcal{A}(M, g)$.*

Com isso, a desigualdade (3.2) segue essencialmente da segunda fórmula de variação de área. Para demonstrar o resultado de rigidez, ou seja, caracterizar as superfícies satisfazendo a igualdade em (3.2), podemos reescalonar a métrica, se necessário, tal que $\mathcal{A}(M, g) = 4\pi$ e $\inf_M R_g = 2$. Usaremos o Teorema da Função Implícita para encontrar uma família a 1-parâmetro de esferas imersas em M com curvatura média constante e em seguida mostramos que todas estas esferas tem área igual a $\mathcal{A}(M, g) = 4\pi$, em particular, todas elas são superfícies mínimas em M . A partir daí, construímos uma isometria local entre o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ com a métrica canônica e (M, g) .

3.1 Prova da Desigualdade

Pelo Teorema [3.2](#), existe uma imersão mínima suave $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g) = \text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g).$$

Vimos na seção [1.7](#), mais precisamente no Exemplo [1.12](#), que uma esfera imersa em qualquer variedade tridimensional é sempre de 2-lados, sendo assim, podemos considerar um campo normal unitário contínuo N globalmente definido em $f(\mathbb{S}^2)$.

Pela da condição de estabilidade para a superfície de 2-lados (\mathbb{S}^2, f^*g) temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} h^2(|B|^2 + \text{Ric}(N, N))d\sigma_{f^*g} \leq \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla h|_{f^*g}^2 d\sigma_{f^*g},$$

para toda $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, onde $d\sigma_{f^*g}$ é o elemento de área de (\mathbb{S}^2, f^*g) . Em particular, para $h \equiv 1$. Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (|B|^2 + \text{Ric}(N, N))d\sigma_{f^*g} \leq 0. \quad (3.3)$$

Note que

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g = \text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g) \inf_M R_g \leq \int_{\mathbb{S}^2} (R_g + |B|^2)d\sigma_{f^*g}.$$

Segue do Teorema [1.10](#) que

$$R_g + |B|^2 = 2K - |H|^2 + 2\text{Ric}(N, N) + 2|B|^2,$$

onde K e H denotam a curvatura Gaussiana e a curvatura média de $f(\mathbb{S}^2) \subset M$, respectivamente. Assim, como f é uma imersão mínima, temos que

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N, N) + |B|^2)d\sigma_{f^*g} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} K d\sigma_{f^*g}.$$

Por [\(3.3\)](#) e pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 8\pi.$$

3.2 Caso Igualdade

Suponhamos agora o caso em que vale a igualdade no Teorema [3.1](#), ou seja,

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g = 8\pi. \quad (3.4)$$

Neste caso, multiplicando a métrica por uma constante positiva, podemos supor que $\mathcal{A}(M, g) = 4\pi$ e $\inf_M R_g = 2$. Pelo Teorema [3.2](#), existe uma esfera mínima estável imersa em M . Considere $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ esta imersão. Assim

$$\mathcal{A}(M, g) = \text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi.$$

Proposição 3.1. *Se $\inf_M R_g = 2$ e $f \in \mathcal{F}$ é tal que $area(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi$, então $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ é totalmente geodésica. Além disso, $R_g = 2$ e $Ric(N, N) = 0$ em pontos de Σ .*

Demonstração. Como $R_g \geq 2$, então pelo Teorema [1.10](#) obtemos que

$$Ric(N, N) + |B|^2 \geq 1 - K + \frac{1}{2}|B|^2 \geq 1 - K.$$

O que implica que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} \geq \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{f^*g} - \int_{\mathbb{S}^2} K d\sigma_{f^*g}.$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} \geq area(\mathbb{S}^2, f^*g) - 2\pi\chi(\mathbb{S}^2).$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} \geq 0.$$

Por outro lado, pela condição de estabilidade temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} \leq 0.$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} = 0 \tag{3.5}$$

Considere o operador de estabilidade de (\mathbb{S}^2, f^*g) , $L(\phi) = \Delta_{f^*g}\phi + (|B|^2 + Ric(N, N))\phi$. Seu primeiro autovalor é dado por

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{S}^2} (|\nabla_{\mathbb{S}^2}\phi|^2 - (Ric(N, N) + |B|^2)\phi^2) d\sigma_{f^*g}; \int_{\mathbb{S}^2} \phi^2 d\sigma_{f^*g} = 1 \right\}.$$

Desde que $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ é estável temos que $\lambda_1 \geq 0$. Note que a função constante $\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ é tal que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \varphi^2 d\sigma_{f^*g} = 1 \text{ e } \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\mathbb{S}^2}\varphi|^2 d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Além disso, por [3.5](#) temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (|\nabla_{\mathbb{S}^2}\varphi|^2 - (Ric(N, N) + |B|^2)\varphi^2) d\sigma_{f^*g} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N, N) + |B|^2) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Segue que $\lambda_1 = 0$. Assim, $L(\varphi) = 0$, o que implica que $Ric(N, N) + |B|^2 = 0$ em pontos de Σ . Como $R_g \geq 2$, pelo Teorema [1.10](#) temos que $|B|^2 \leq -2 + 2K$. Daí, pelo Teorema de Gauss-Bonnet obtemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} |B|^2 d\sigma_{f^*g} \leq -2area(\mathbb{S}^2, f^*g) + 4\pi\chi(\mathbb{S}^2) = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{S}^2} |B|^2 d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Segue que $B \equiv 0$. Consequentemente, $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ é totalmente geodésica e $Ric(N, N) = 0$ em pontos de Σ . Consequentemente, pelo Teorema [1.10](#) e pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} R_g d\sigma_{f^*g} = 8\pi = 2 \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{f^*g}.$$

O que implica que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (R_g - 2) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Portanto, $R_g = 2$ em pontos de Σ , pois $R_g \geq 0$. □

Proposição 3.2. *Se $\inf_M R_g = 2$ e $f \in \mathcal{F}$ é tal que $area(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi$. Então existe $\delta_1 > 0$ e uma função suave $w : \mathbb{S}^2 \times (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

a) *Para cada ponto de \mathbb{S}^2 , temos $w(x, 0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} w(x, t) = 1$.*

b) *Para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$, temos $\int_{\mathbb{S}^2} (w(\cdot, t) - t) d\sigma_{f^*g} = 0$.*

c) *Para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$, a superfície*

$$\Sigma_t = \{exp_{f(x)}(w(x, t)N(x)) : x \in \mathbb{S}^2\}$$

tem curvatura média constante.

Demonstração. Da Proposição [3.1](#), temos que o operador de estabilidade associado a imersão mínima f é $L = \Delta_{f^*g}$. Fixe $\alpha \in (0, 1)$ e considere os espaços $X = \{u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{f^*g} = 0\}$ e $Y = \{u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{f^*g} = 0\}$. Note que X e Y são fechados em $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2)$ e $C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^2)$, respectivamente, logo são espaços de Banach. Para cada função $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, defina $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ por

$$\varphi_u(x) = exp_{f(x)}(u(x)N(x)),$$

onde N é o campo normal unitário definido ao longo de $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$. Faça $\Sigma_u = \varphi_u(\mathbb{S}^2)$ e escolha $\varepsilon, \delta > 0$, tais que φ_{u+t} com $u \in B(0, \delta) = \{v \in X; \|v\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2)} < \delta\}$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ seja um difeomorfismo. Com essa escolha, Σ_{u+t} é uma superfície compacta mergulhada de classe $C^{2,\alpha}$. Denote por H_{u+t} a curvatura média de Σ_{u+t} .

Defina $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B(0, \delta) \rightarrow Y$ por

$$F(t, u) = H_{u+t} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{u+t} d\sigma_{f^*g}.$$

Note que F está bem definida, pois

$$\int_{\mathbb{S}^2} F(t, u) d\sigma_{f^*g} = \int_{\mathbb{S}^2} H_{u+t} d\sigma_{f^*g} - \frac{\text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g)}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{u+t} d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Note ainda que $F(0, 0) = 0$, pois H_0 é a curvatura média de $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ que é mínima. Tome $v \in X$ e veja que

$$\begin{aligned} DF_{(0,0)}(0, v) &= \left. \frac{\partial F}{\partial s} \right|_{s=0} (0, sv) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} H_{sv} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} H_{sv} d\sigma_{f^*g}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema [1.12](#) e pelo Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned} DF_{(0,0)}(0, v) &= L(v) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} L(v) d\sigma_{f^*g} \\ &= \Delta_{f^*g} v - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_{f^*g} v d\sigma_{f^*g} \\ &= \Delta_{f^*g} v \end{aligned}$$

Afirmção 3.1. *O operador linear $\Delta_{f^*g} : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo.*

Injetividade: Sejam $\bar{h}, \bar{f} \in X$ tais que $\Delta_{f^*g} \bar{h} = \Delta_{f^*g} \bar{f}$. Faça $h = \bar{h} - \bar{f}$ e note que como \mathbb{S}^2 é compacta, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Como $\int_{\mathbb{S}^2} h d\sigma_{f^*g} = 0$ temos que $\text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g) \cdot m \leq 0$. Segue que h atinge o valor mínimo $m \leq 0$, pelo Princípio do Máximo Forte h é constante. Como $\int_{\mathbb{S}^2} h d\sigma_{f^*g} = 0$ concluímos que $h = 0$ e portanto $\bar{h} = \bar{f}$.

Sobrejetividade: Considere $f \in Y$. Segue que existe $u \in H^1(\mathbb{S}^2)$ solução fraca de $\Delta u = f$ com $\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{f^*g} = 0$. Como $f \in Y \subseteq C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^2)$, pelo Teorema de Regularidade Elíptica Global concluímos que $u \in X \subseteq C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2)$.

Pela Afirmção [3.1](#) segue que $DF_{(0,0)}$ é um isomorfismo de X em Y . Como $F(0, 0) = 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existe $\delta_1 < \varepsilon$ e uma função $u : (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow B(0, \delta) \subset X$ tal que

$$u(0) = u(0, \cdot) = 0 \text{ e } F(t, u(t, \cdot)) = 0, \forall t \in (-\delta_1, \delta_1).$$

Defina $w(t, \cdot) = u(t, \cdot) + t$, onde $t \in (-\delta_1, \delta_1)$. Note que como $F(t, u(t, \cdot)) = 0$, então a superfície $\Sigma_t = \varphi_{w(t, \cdot)}(\mathbb{S}^2)$ tem curvatura média constante para todo $t \in (-\delta_1, \delta_1)$. Além disso, $w(0, x) = u(0, x) = 0$ e como $u(t, \cdot) \in B(0, \delta) \subset X$ temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} (w(t, \cdot) - t) d\sigma_{f^*g} = \int_{\mathbb{S}^2} u(t, \cdot) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Defina $\phi : (-\delta_1, \delta_1) \times \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ por

$$\phi(t, x) = \exp_{f(x)}(w(t, x)N(x)).$$

Como $w(0, x) = 0$ e $d(\exp_{f(x)})_0 \equiv Id$, então

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial w}{\partial t}(0, x)N(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^2.$$

Além disso, $F(t, u(t, \cdot)) = 0$ para todo $t \in (-\delta_1, \delta_1)$, implica que

$$H_{w(t, \cdot)} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{w(t, \cdot)} d\sigma_{f^*g} = 0,$$

e assim

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_{w(t, \cdot)} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_{w(t, \cdot)} d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Pelo Teorema [1.12](#) temos

$$\Delta_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Assim

$$\Delta_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0.$$

O que implica que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \Delta_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Por outro lado, pela Primeira Identidade de Green

$$- \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \Delta_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) d\sigma_{f^*g} = \int_{\mathbb{S}^2} \left| \nabla_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) \right|^2 d\sigma_{f^*g}.$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left| \nabla_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) \right|^2 d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Assim

$$\nabla_{f^*g} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \right) = 0.$$

Logo, $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante. Agora note que $\int_{\mathbb{S}^2} (w(t, \cdot) - t) d\sigma_{f^*g} = 0$, implica que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot) - 1 \right) d\sigma_{f^*g} = 0.$$

Daí

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot) d\sigma_{f^*g} = 4\pi.$$

Como $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot)$ é constante, obtemos que $\frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) = 1$. □

Para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$, definimos a aplicação $\phi_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ por

$$\phi_t(x) = \phi(t, x) = \exp_{f(x)}(w(t, x)N(x)).$$

É claro que $\phi_0(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^2$, já que $w(0, x) = 0$. A partir daqui, denotaremos por N_t o campo normal globalmente definido em $\Sigma_t = \phi_t(\mathbb{S}^2)$, tal que $N_0 = N$. Além disso, denotaremos por B_t a segunda forma fundamental da imersão ϕ_t .

Lema 3.1. *Existe $\delta_2 < \delta_1$ tal que, para todo $t \in (-\delta_2, \delta_2)$ e $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ tal que $\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{g_t} = 0$ (onde $g_t = \phi_t^*g$), temos que*

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} u|^2 d\sigma_{g_t} - \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) u^2 d\sigma_{g_t} \geq 0.$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante $c > 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (u - \bar{u})^2 d\sigma_{g_t} \leq c \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} u|^2 d\sigma_{g_t},$$

onde

$$\bar{u} = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{g_t}}{\int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{g_t}}.$$

Por hipótese, $\int_{\mathbb{S}^2} u d\sigma_{g_t} = 0$, o que implica que $\bar{u} = 0$. Assim, existe uma constante $\bar{c} > 0$ tal que

$$\bar{c} \int_{\mathbb{S}^2} u^2 d\sigma_{g_t} \leq \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} u|^2 d\sigma_{g_t}.$$

Vimos na Proposição [3.1](#) que $\text{Ric}(N, N) + |B|^2 = 0$. O que implica que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \{\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2\} = 0.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $t \in (-\delta, \delta)$, temos que $\sup\{\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2\} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, tomando $\varepsilon = \bar{c}$, tem-se que

$$\sup\{\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2\} < \bar{c}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

O que implica que

$$\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2 < \bar{c}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Tome $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} u|^2 d\sigma_{g_t} &\geq \bar{c} \int_{\mathbb{S}^2} u^2 d\sigma_{g_t} \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) u^2 d\sigma_{g_t}, \end{aligned}$$

para todo $t \in (-\delta_2, \delta_2)$. Portanto

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} u|^2 d\sigma_{g_t} - \int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) u^2 d\sigma_{g_t} \geq 0, \quad \forall t \in (-\delta_2, \delta_2).$$

□

Lema 3.2. Para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \geq 0.$$

Demonstração. Como (\mathbb{S}^2, f^*g) minimiza área em sua classe de homotopia, temos que $area(\mathbb{S}^2, f^*g) \leq area(\mathbb{S}^2, g_t)$, para todo $t \in (-\delta_1, \delta_1)$. Assim, de (3.4),

$$\begin{aligned} 8\pi &\leq area(\mathbb{S}^2, g_t) \inf_M R_g \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^2} R_g d\sigma_{g_t}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (R_g + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \geq 8\pi. \quad (3.6)$$

Pelo Teorema 1.10, temos

$$R_g + |B_t|^2 \leq 2(Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) + 2K.$$

Integrando a desigualdade acima e usando o Teorema de Gauss-Bonnet, obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} (R_g + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \leq 2 \int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} + 8\pi.$$

Portanto, de (3.6)

$$\int_{\mathbb{S}^2} (Ric(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \geq 0, \quad \forall t \in (-\delta_1, \delta_1).$$

□

A família de superfícies Σ_t dada pela Proposição [3.2](#) tem curvatura média constante para todo $t \in (-\delta_1, \delta_1)$. O vetor curvatura média de Σ_t pode ser escrito por $\vec{H}(t) = -H(t)N_t$, onde $H(t)$ é uma função suave de t . Defina para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ a função $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho_t(x) = \left\langle N_t(x), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \right\rangle.$$

Como $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = N(x)$, temos que $\rho_0(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Pela continuidade de ρ_t podemos encontrar um número real positivo $\delta_3 < \delta_2$ tal que $\rho_t(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^2$ e $t \in (-\delta_3, \delta_3)$. Desde que a curvatura média de Σ_t em relação a normal N_t é $-H(t)$, segue da Proposição [1.12](#) que

$$-H'(t) = \Delta_{f^*g}\rho_t + (\text{Ric}_g(N_t, N_t) + |B_t|^2)\rho_t. \quad (3.7)$$

Proposição 3.3. *Temos que $\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t) = 4\pi$, para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$.*

Demonstração. Considere a média da função ρ_t

$$\bar{\rho}_t = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t}}{\int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{g_t}},$$

e note que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\rho_t - \bar{\rho}_t) d\sigma_{g_t} = \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t} - \frac{\int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t}}{\int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{g_t}} \cdot \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma_{g_t} = 0.$$

Assim, pelo Lema [3.1](#) obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} \rho_t|^2 d\sigma_{g_t} - \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2)(\rho_t - \bar{\rho}_t)^2 d\sigma_{g_t} \geq 0, \quad \forall t \in (-\delta_2, \delta_2). \quad (3.8)$$

Como $\bar{\rho}_t$ é constante, pelo Lema [3.2](#) temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) \bar{\rho}_t^2 d\sigma_{g_t} = \bar{\rho}_t^2 \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \geq 0, \quad \forall t \in (-\delta_1, \delta_1).$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} \rho_t|^2 d\sigma_{g_t} - \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2)(\rho_t - \bar{\rho}_t)^2 d\sigma_{g_t} &\leq - \int_{\mathbb{S}^2} (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) \bar{\rho}_t^2 d\sigma_{g_t} \\ &+ \int_{\mathbb{S}^2} 2\rho_t \bar{\rho}_t (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \\ &+ \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} \rho_t|^2 d\sigma_{g_t}. \end{aligned}$$

De (3.8) obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} \rho_t|^2 d\sigma_{g_t} + \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} \geq 0, \quad \forall t \in (-\delta_2, \delta_2). \quad (3.9)$$

Por (3.7) temos que

$$\Delta_{g_t} \rho_t + (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) \rho_t = -H'(t).$$

Multiplicando esta igualdade por $(2\bar{\rho}_t - \rho_t)$, integrando e usando o fato que para cada $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ a curvatura média $H(t)$ é constante, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (2\bar{\rho}_t - \rho_t) \Delta_{g_t} \rho_t d\sigma_{g_t} + \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} &= -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\sigma_{g_t} \\ &= -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t}. \end{aligned}$$

Pela Primeira Identidade de Green,

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_t} \rho_t|^2 d\sigma_{g_t} + \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) (\text{Ric}(N_t, N_t) + |B_t|^2) d\sigma_{g_t} = -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t}, \quad \forall t \in (-\delta_1, \delta_1).$$

Assim, por (3.9) temos que

$$H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t} \leq 0, \quad \forall t \in (-\delta_2, \delta_2).$$

Como $\rho_t > 0$ para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$, temos que $H'(t) \leq 0$, para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$. Segue que $H : (-\delta_3, \delta_3) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-crescente. Como $H(0) = 0$, temos que $H(t) \leq 0$ para $t \in [0, \delta_3)$ e $H(t) \geq 0$ para $t \in (-\delta_3, 0]$. Como $H(t)$ é constante, pela Primeira Fórmula de Variação de Área, temos

$$\frac{d}{dt}(\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t)) = H(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\sigma_{g_t}.$$

Note que para $t \in (-\delta_3, 0]$, a derivada $\frac{d}{dt}(\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t)) \geq 0$, ou seja, a função que associa a cada $t \in (-\delta_3, 0]$ a área de (\mathbb{S}^2, g_t) é não-decrescente. Assim,

$$\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t) \leq (\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi.$$

Por outro lado (\mathbb{S}^2, f^*g) é mínima estável. Segue que $\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t) = 4\pi$, para todo $t \in (-\delta_3, 0]$. Analogamente mostramos que $\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t) = 4\pi$, para todo $t \in [0, \delta_3)$. Portanto,

$$\text{area}(\mathbb{S}^2, g_t) = 4\pi, \quad \forall t \in (-\delta_3, \delta_3).$$

□

Proposição 3.4. Para cada $t \in (-\delta_3, \delta_3)$, a superfície $\Sigma_t = \phi_t(\mathbb{S}^2)$ é totalmente geodésica, $R_g = 2$ e $Ric(N_t, N_t) = 0$ em Σ_t . Além disso, a função $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é constante.

Demonstração. Pela Proposição 3.3 temos que

$$area(\mathbb{S}^2, \phi_t^*g) = 4\pi, \quad \forall t \in (-\delta_3, \delta_3).$$

Assim, pela Proposição 3.1 tem-se que Σ_t é totalmente geodésica, $R_g = 2$ e $Ric(N_t, N_t) = 0$ em pontos de Σ_t . Daí, pela Proposição 1.12 temos que

$$-H'(t) = L_{\Sigma_t}(\rho_t) = \Delta_{\phi_t^*g}(\rho_t).$$

Desde que a superfície (\mathbb{S}^2, f^*g) é mínima e $area(\mathbb{S}^2, f^*g) = area(\mathbb{S}^2, \phi_t^*g) = 4\pi$ para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$, temos que as superfícies Σ_t são mínimas para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$. Segue que $\Delta_{\phi_t^*g}(\rho_t) = 0$. Desde que \mathbb{S}^2 é compacta e $\rho_t > 0$ para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$, temos que ρ_t assume valor máximo para algum $x_0 \in \mathbb{S}^2$ com $\rho_t(x_0) > 0$. Portanto, pelo Princípio do Máximo Forte temos que para cada $t \in (-\delta_3, \delta_3)$ a aplicação $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é constante. \square

Pelo Teorema 1.10 e pela Proposição 3.1 a curvatura Gaussiana de (\mathbb{S}^2, f^*g) é constante igual a 1, conseqüentemente, as superfícies (\mathbb{S}^2, f^*g) é isométrica a (\mathbb{S}^2, h) , onde h é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^2 (Ver [22], capítulo 11). Isso nos diz que as métricas h e f^*g em \mathbb{S}^2 são as mesmas.

Proposição 3.5. Se $f \in \mathcal{F}$ é tal que $area(\mathbb{S}^2, h) = 4\pi$, então $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ está contida em uma vizinhança isométrica ao cilindro $((-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + h)$.

Demonstração. Considere $x : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow (-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2$ uma carta local com coordenadas (x_1, x_2, t) . Como Σ_t é totalmente geodésica temos que sua segunda forma fundamental é idênticamente nula, isto é, $B_t \equiv 0$. Conseqüentemente, temos que $\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} N_t = 0$ para todo $t \in (-\delta_3, \delta_3)$. Além disso, como $\langle N_t, N_t \rangle = 1$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_t, N_t \rangle = 0.$$

O que implica que

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t, N_t \right\rangle = 0.$$

Assim,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t \right)^\perp = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle N_t, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle N_t, \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\
&= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \\
&= - \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_t \\
&= 0, \quad \forall i = 1, 2,
\end{aligned}$$

pois pela Proposição 3.4 a função ρ_t é constante para cada $t \in (-\delta_3, \delta_3)$. Segue que

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t \right)^\top = 0.$$

Consequentemente,

$$\nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t = 0.$$

Seja $\alpha_x : (-\delta_3, \delta_3) \rightarrow M$, $x \in \mathbb{S}^2$ fixo, uma curva suave em M dada por

$$\alpha_x(t) = \phi(t, x) = \exp_{f(x)}(w(t, x)N(x)).$$

Note que

$$\alpha'_x(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = d \left(\exp_{f(x)} \right)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right),$$

e

$$\nabla_{\alpha'_x} N_t = \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} N_t = 0.$$

Isso nos diz que N_t é um campo paralelo ao longo da curva α_x , e ainda que transporta paralelamente o vetor $N(x)$ ao longo de α_x . Por outro lado, como α_x é geodésica temos que $\nabla_{\alpha'_x} \alpha'_x = 0$. Assim, α'_x é um campo paralelo ao longo de α_x que também transporta paralelamente o vetor $N(x) = \alpha'_x(0)$ ao longo de α_x . Por unicidade do transporte paralelo concluímos que

$$N_t(x) = \alpha'_x(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x). \quad (3.10)$$

Como $\langle N_t(x), N_t(x) \rangle = 1$, temos

$$\left\langle d \left(\exp_{f(x)} \right)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right), d \left(\exp_{f(x)} \right)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right) \right\rangle = 1.$$

O que implica que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \frac{1}{w(t, x)} \left\langle d \left(\exp_{f(x)} \right)_{w(t, x)N(x)} (w(t, x)N(x)), d \left(\exp_{f(x)} \right)_{w(t, x)N(x)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)N(x) \right) \right\rangle = 1.$$

Segue do Lema de Gauss que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \right)^2 = 1.$$

Como $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1$, obtemos que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = 1, \quad \forall t \in (-\delta_3, \delta_3).$$

Assim, temos que $w(t, x) = t$, $\forall t \in (-\delta_3, \delta_3)$, pois $w(0, x) = 0$. Portanto, podemos concluir que $\phi(t, x) = \exp_{f(x)}(tN(x))$.

Vamos verificar agora que a métrica produto $\tilde{g} = dt^2 + h$, em $(-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2$ coincide com a métrica induzida por ϕ . Para isso, basta mostrar que as componentes dos tensores métricos são iguais. Considere $\phi = \phi|_{(-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2}$ e a métrica $\bar{g} = \phi^*g$. Sabemos que,

- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = 1$
- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0$
- $\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = h_{ij}$

Vamos agora calcular as componentes da métrica \bar{g} . Temos que

$$\bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \phi^*g \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = g \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right).$$

Note que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = d \left(\exp_{f(x)} \right)_{tN(x)} (N(x)).$$

Se $t = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) &= \left\langle d \left(\exp_{f(x)} \right)_0 (N(x)), d \left(\exp_{f(x)} \right)_0 (N(x)) \right\rangle \\ &= \langle N(x), N(x) \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se $t \neq 0$, pelo Lema de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) &= \left\langle d\left(\exp_{f(x)}\right)_{tN(x)}(N(x)), d\left(\exp_{f(x)}\right)_{tN(x)}(N(x)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{t} \left\langle d\left(\exp_{f(x)}\right)_{tN(x)}(tN(x)), d\left(\exp_{f(x)}\right)_{tN(x)}(N(x)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{t} \langle tN(x), N(x) \rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por [\(3.10\)](#) temos que

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= g\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) \\
&= \left\langle N_t(x), \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) = h_{ij}.$$

Assim as componentes das métricas coincidem, o que implica que são iguais. Logo $((-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + h)$ é isométrica a $(\phi((-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2), g)$. Note que $\phi((-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2)$ é aberto de M que contém Σ . Portanto Σ está contida em uma vizinhança isométrica a variedade Riemanniana $((-\delta_3, \delta_3) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + h)$. \square

Proposição 3.6. *Considere a variedade Riemanniana produto $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, h + dt^2)$. A aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ dada por $\phi(x, t) = \exp_{f(x)}(tN(x))$ é uma isometria local.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, +\infty)}$ é uma isometria local. Suponha por absurdo que isto é falso. Considere τ o maior número real positivo tal que $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau]}$ é uma isometria local. Defina $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ por $\tilde{f}(x) := \phi(x, \tau)$. Observe que \tilde{f} e f são homotópicas via a homotopia suave ϕ . Desde que f representa um elemento não-trivial de $\pi_2(M)$ e \tilde{f} é homotópica a f , temos que $[\tilde{f}] \in \pi_2(M)$ é tal que $[\tilde{f}] \neq 0$. Como $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau]}$ é uma isometria local temos que para cada $t \in [0, \tau]$ a métrica ϕ_t^*g coincide com $f^*g = h$, em particular, a métrica \tilde{f}^*g coincide com a métrica f^*g . Consequentemente

$$area(\mathbb{S}^2, \tilde{f}^*g) = area(\mathbb{S}^2, h) = 4\pi.$$

Segue que a imersão \tilde{f} tem área mínima dentre todas as imersões em \mathcal{F} . Assim temos que $\tilde{\Sigma} = \tilde{f}(\mathbb{S}^2)$ é uma superfície mínima em M e $area(\mathbb{S}^2, \tilde{f}^*g) = 4\pi$. Pela Proposição [3.5](#), existe um número real $\delta > 0$ tal que $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau + \delta)}$ é uma isometria local. Pela maximalidade de τ temos uma

contradição. Logo $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, +\infty)}$ é uma isometria local. Analogamente mostra-se que $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times (-\infty, 0]}$ é uma isometria local. Portanto $\phi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma isometria local. \square

Segue da Teorema [1.14](#) que a aplicação ϕ dada na Proposição [3.6](#) é uma aplicação de recobrimento. Desde que a variedade produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é simplesmente conexa, concluímos que o recobrimento universal de (M, g) é isométrico ao cilindro $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, h + dt^2)$.

Capítulo 4

Planos Projetivos

Neste capítulo vamos expor os resultados obtidos em [2].

Para entender melhor o teorema principal denote por \mathcal{F} o conjunto de todas as superfícies mergulhadas $\Sigma \subset M$ tal que Σ é homeomorfa ao plano projetivo \mathbb{RP}^2 , ou seja,

$$\mathcal{F} = \{\Sigma \subset M; \Sigma \text{ é homeomorfa a } \mathbb{RP}^2\}.$$

Vamos assumir que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Defina

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf\{|\Sigma|_g; \Sigma \in \mathcal{F}\},$$

onde $|\Sigma|_g$ é a área de Σ em relação a métrica g .

Teorema 4.1. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana compacta. Assuma que M contém uma superfície mergulhada homeomorfa ao plano projetivo. Então*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi, \tag{4.1}$$

e

$$\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi}(\text{sys}(M, g))^2 > 0, \tag{4.2}$$

onde $\text{sys}(M, g)$ denota a systole de (M, g) que é definida por

$$\text{sys}(M, g) = \inf\{L(\gamma); \gamma \text{ é uma curva fechada não-contrátil em } M\}.$$

Além disso, se a igualdade em (4.1) é satisfeita, então (M, g) é isométrica a \mathbb{RP}^3 .

Iniciaremos a demonstração do Teorema 4.1 mostrando que se Σ é um plano projetivo mergulhado em M então a aplicação induzida pela inclusão nos grupos fundamentais é injetiva. Com isso, a desigualdade (4.2) segue essencialmente da Desigualdade de Pu's em [29] e da compacidade da variedade M . Para provar a desigualdade (4.1), primeiramente usaremos resultados e notações de [26] para garantir que o ínfimo $\mathcal{A}(M, g)$ é atingido por uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$. Daí, consideraremos

dois casos: Σ é de 2-lados ou Σ é de 1-lado. No caso em que Σ é de 2-lados, podemos considerar um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ , daí a desigualdade (4.1) segue diretamente da Segunda Fórmula de Variação de Área. No caso em que Σ é de 1-lado não podemos utilizar a Segunda Fórmula de Variação de Área de forma direta, neste caso, a desigualdade (4.1) segue do procedimento descrito na seção 1.8 deste trabalho. Para demonstrar o resultado de rigidez, consideraremos a métrica g_0 em M satisfazendo igualdade em (4.1). Podemos reescalonar a métrica g_0 , se necessário, tal que $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$ e $\inf_M R_{g_0} = 6$. Submeteremos a métrica g_0 a um fluxo de Ricci. Usando a equação de evolução da curvatura escalar e alguns princípios do máximo mostramos que $R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t}$, e daí segue que a variedade Riemanniana (M, g_0) tem curvatura seccional contante igual a 1. Concluimos a prova do resultado de rigidez utilizando alguns fatos topológicos, mais precisamente, fatos envolvendo a teoria de espaço de recobrimento.

4.1 Prova das Desigualdades (4.1) e (4.2)

Proposição 4.1. *Seja $\Sigma \in \mathcal{F}$. Então a aplicação induzida $i_{\#} : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetiva.*

Demonstração. Suponha por contradição que $i_{\#}$ é não injetiva.

Afirmção 4.1. *Se $i_{\#}$ não é injetiva, então $TM|_{\Sigma}$ é orientável.*

De fato, como Σ é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 então $\pi_1(\Sigma)$ é isomorfo a $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$, que por sua vez, é isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Segue que $\pi_1(\Sigma)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Dizer que $i_{\#}$ é não injetiva é, neste caso, dizer que qualquer curva não-contrátil em Σ é contrátil em M . Suponha por contradição que $TM|_{\Sigma}$ é não-orientável. Então existe uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ que inverte orientação, isto é, se $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}M$, onde $e_i : [0, 1] \rightarrow TM$ são campos unitários contínuos ao longo da curva α , então $\{e_1(0), e_2(0), e_3(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1), e_3(1)\}$ são bases em orientações opostas de $T_{\alpha(0)}M$. Daí, por continuidade, todas as curvas homotópicas a α invertem orientação. Como α é contrátil temos então que uma curva constante inverte orientação, mas isso é uma contradição. Portanto $TM|_{\Sigma}$ é orientável.

Afirmção 4.2. *Se $TM|_{\Sigma}$ é orientável, então Σ tem um lado.*

De fato, desde que Σ é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 temos que Σ é não-orientável, isto implica que como fibrado vetorial, o fibrado tangente $T\Sigma$ de Σ é não-orientável (Ver seção 1.6). Vamos supor por contradição que o fibrado normal $N\Sigma$ é trivial. Então Σ possui um campo normal unitário contínuo N globalmente definido. Como $T\Sigma$ é não-orientável existe uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ com $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ que inverte a orientação, ou seja, se $\{e_1(t), e_2(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\alpha(t)}\Sigma$, onde $e_i : [0, 1] \rightarrow T\Sigma$ são campos unitários contínuos ao longo da curva α , então $\{e_1(0), e_2(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1)\}$ são bases em orientações opostas de $T_p\Sigma$. Denote por $N(t) = N(\alpha(t))$ o campo normal unitário N ao longo da curva α . Complete agora a base $\{e_1(t), e_2(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}\Sigma$ a uma base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t), N(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}M$. Consequentemente $\{e_1(0), e_2(0), N(0)\}$ e $\{e_1(1), e_2(1), N(1)\}$ são bases em orientações opostas de $T_{\alpha(t)}M$. Mas isso é uma contradição, pois $TM|_{\Sigma}$ é orientável.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma curva fechada não-contrátil. Para cada $t \in [0, 1]$ temos a seguinte decomposição

$$T_{\gamma(t)}M = T_{\gamma(t)}\Sigma \oplus (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp.$$

Como $(T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp$ tem dimensão 1, encontramos para cada $t \in [0, 1]$ um vetor $\eta(t) \in T_{\gamma(t)}M$ que é ortogonal ao plano tangente $T_{\gamma(t)}\Sigma$. Além disso, podemos supor que $\eta(t)$ depende continuamente de t . Pela Afirmação [4.2](#) temos que o fibrado normal $N\Sigma$ é não-trivial, isso implica que $\eta(1) = -\eta(0)$.

Defina para cada $\varepsilon > 0$ uma curva $\gamma_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow M$ por

$$\gamma_\varepsilon(t) = \exp_{\gamma(t)}(\varepsilon \sin(\pi t)\eta(t)).$$

Note que γ_ε é uma curva suave, $\gamma_\varepsilon(0) = \exp_{\gamma(0)}(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_\varepsilon(1) = \exp_{\gamma(1)}(0) = \gamma(1)$. Daí como γ é fechada temos que γ_ε também é fechada. Além disso, obtemos que para cada $t \in (0, 1)$ o ponto $\gamma_\varepsilon(t)$ correspondente ao ponto da geodésica de M que sai ortogonalmente de Σ no tempo $d(t) \in (0, \text{epsilon})$. Assim, para ε suficientemente pequeno a curva γ_ε intersecta a superfície Σ em exatamente um ponto, a saber, o ponto $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, e como $\eta(1) = -\eta(0)$ esta interseção é transversal. Disto concluímos que γ_ε é não-contrátil em M . caso contrário, γ_ε teria que intersectar Σ em pelo menos dois pontos, já que Σ é fechada. Observe ainda, que γ_ε e γ são homotópicas via a homotopia suave $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ dada por

$$F(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(s\varepsilon \sin(\pi t)\eta(t)).$$

Isso é uma contradição, pois por $i_\#$ ser não-injetiva e γ ser não-contrátil em Σ , implica que γ é contrátil em M , e consequentemente toda curva homotópica a γ tem que ser contrátil em M . \square

Corolário 4.1.1. *Temos que $\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi}(\text{sys}(M, g))^2 > 0$.*

Demonstração. Tome $\Sigma \in \mathcal{F}$. Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ e $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curvas não-contráteis de menor comprimento em Σ e M , respectivamente. Pela Proposição [4.1](#) a aplicação $i_\#$ é injetiva, assim α é não-contrátil em M . Se $\beta([0, 1]) \subset \Sigma$ então $L(\alpha) = L(\beta)$, o que implica que $\text{sys}(M, g) = \text{sys}(\Sigma, g)$. Se $\beta([0, 1]) \not\subset \Sigma$ então $L(\alpha) \geq L(\beta)$, e assim, $\text{sys}(\Sigma, g) \geq \text{sys}(M, g)$. Logo

$$(\text{sys}(\Sigma, g))^2 \geq (\text{sys}(M, g))^2. \tag{4.3}$$

A Desigualdade de Pu em [29](#) diz que se Σ é um plano projetivo então

$$|\Sigma|_g \geq \frac{2}{\pi}(\text{sys}(\Sigma, g))^2.$$

Consequentemente, por [4.3](#) temos que

$$\mathcal{A}(M, g) \geq \frac{2}{\pi}(\text{sys}(M, g))^2.$$

Vamos mostrar agora que $sys(M, g) > 0$. Para isso suponha que $sys(M, g) = 0$, isso implica que

$$\inf\{L(\alpha); \alpha \text{ é não-contrátil em } M\} = 0.$$

Segue que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma curva $\alpha_n : I \rightarrow M$ fechada não-contrátil em M tal que $L(\alpha_n) < \frac{1}{n}$. Observe que (α_n) é uma sequência de curvas em M tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\alpha_n) = 0.$$

Considere $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ uma sequência de pontos de M tal que $p_n \in \alpha_n(I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que M é compacta, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Digamos que $p_k \rightarrow p$ com $p \in M$ e considere $V \subset M$ uma vizinhança coordenada em torno p . Daí, para k suficientemente grande $p_k \in V$. Como $\lim L(\alpha_n) = 0$ e $p_k \in \alpha_k(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}'$, temos que para k suficientemente grande $\alpha_k(I) \subset V$. Como V é homeomorfo a um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, concluímos que para k arbitrariamente grande α_k é contrátil. O que é uma contradição, pois tomamos α_n não-contrátil para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $sys(M, g) > 0$. \square

O teorema a seguir mostra que o ínfimo $\mathcal{A}(M, g)$ é atingido por uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$. Para demonstrá-lo, usaremos resultados e notações de [26]. Por serem muito técnicos não entraremos em muito detalhes.

Proposição 4.2. *Existe uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $|\Sigma|_g = \mathcal{A}(M, g)$.*

Demonstração. Pela propriedade de ínfimo, existe uma sequência de superfícies $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$|\Sigma_k|_g \leq \mathcal{A}(M, g) + \varepsilon_k,$$

onde $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Denote por \mathcal{C} a coleção de todas as superfícies conexas compactas e sem bordo mergulhadas em M e $\mathcal{I}(\Sigma)$ a classe de isotopia de uma superfície $\Sigma \in \mathcal{C}$. Observe que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{I}(\Sigma_k) \subset \mathcal{F}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, daí temos que

$$\mathcal{A}(M, g) \leq \inf_{\Sigma \in \mathcal{I}(\Sigma_k)} |\Sigma|_g.$$

Assim temos que $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ e

$$|\Sigma_k|_g \leq \mathcal{A}(M, g) + \varepsilon_k \leq \inf_{\Sigma \in \mathcal{I}(\Sigma_k)} |\Sigma|_g + \varepsilon_k.$$

Além disso, como Σ_k é homeomorfa a $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $g(\Sigma_k) = g(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 1$, consequentemente

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} (|\Sigma_k|_g + g(\Sigma_k)) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} (|\Sigma_k|_g + 1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (|\Sigma_k|_g + 1) \\ &\leq \mathcal{A}(M, g) + 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup(|\Sigma_k|_g + g(\Sigma_k)) < \infty.$$

Daí a sequência $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é minimizante. Assim pelo Teorema 1 em [26] encontramos números inteiros positivos R, n_1, \dots, n_R e superfícies mínimas mergulhadas $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(R)} \in \mathcal{C}$ duas a duas disjuntas tais que

$$\sum_{j=1}^R n_j \int_{\Sigma^{(j)}} f d\sigma_g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_k} f d\sigma_g,$$

para toda função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, para a função constante $f \equiv 1$. Daí temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^R n_j |\Sigma^{(j)}|_g &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Sigma_k|_g \\ &\leq \mathcal{A}(M, g) + \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \\ &= \mathcal{A}(M, g). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^R n_j |\Sigma^{(j)}|_g \leq \mathcal{A}(M, g). \quad (4.4)$$

Vamos agora definir superfícies $S_k^{(1)}, \dots, S_k^{(R)}$ da seguinte forma: se $n_j = 2m_j$, então

$$S_k^{(j)} = \bigcup_{r=1}^{m_j} \left\{ x \in M; d(x, \Sigma^{(j)}) = \frac{r}{k} \right\},$$

e se $n_j = 2m_j + 1$, então

$$S_k^{(j)} = \Sigma^{(j)} \bigcup_{r=1}^{m_j} \left\{ x \in M; d(x, \Sigma^{(j)}) = \frac{r}{k} \right\}.$$

Segue da Observação 3.27 em [26] que podemos encontrar superfícies mergulhadas $S_k^{(0)}$ e $\tilde{\Sigma}_k$ com as seguintes propriedades:

(i) A superfície $S_k = \bigcup_{j=0}^R S_k^{(j)}$ é isotópica a $\tilde{\Sigma}_k$ para k suficientemente grande.

(ii) A superfície $\tilde{\Sigma}_k$ é obtida a partir de $\Sigma_{q_k} \in (\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por uma γ_0 -redução (Ver [26], Sec. 3).

(iii) $S_k^{(0)} \cap (\bigcup_{j=1}^R S_k^{(j)}) = \emptyset$. Além disso, $|S_k^{(0)}|_g \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Desde que $\Sigma_{q_k} \in (\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ temos que Σ_{q_k} é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 , assim como $\tilde{\Sigma}_k$ é obtida a partir de Σ_{q_k} por uma γ_0 -redução então $\tilde{\Sigma}_k$ tem componente conexa $\tilde{\Sigma}_k^*$ também homeomorfa a \mathbb{RP}^2 .

Pelo item (i), para k suficientemente grande temos que S_k é isotópica a $\tilde{\Sigma}_k$. Em particular, existe um homeomorfismo $f : \tilde{\Sigma}_k \rightarrow S_k$. Daí $E_k := f(\tilde{\Sigma}_k^*) \subset S_k$ é uma componente conexa de S_k homeomorfa a $\tilde{\Sigma}_k^*$. Logo E_k é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 . Segue que $E_k \subset S_k$ é conexo e $E_k \in \mathcal{F}$. Assim

$$|E_k|_g \geq \mathcal{A}(M, g) > 0.$$

Por outro lado, pelo item (iii), $|S_k^{(0)}|_g \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim para k suficientemente grande $|E_k|_g > |S_k^{(0)}|_g$, conseqüentemente, $E_k \not\subset S_k^{(0)}$. Desde que $E_k \subset S_k$ e $S_k^{(0)} \cap (\bigcup_{j=1}^R S_k^{(j)}) = \emptyset$ temos que

$$E_k \subset \bigcup_{j=1}^R S_k^{(j)}.$$

Observe que para k suficientemente grande e $i \neq j$ temos que $S_k^{(j)} \cap S_k^{(i)} = \emptyset$. Daí E_k é uma componente conexa de $S_k^{(i)}$ para algum $i \in \{1, \dots, R\}$. Temos duas possibilidades:

- (1) Considere o caso em que $\Sigma^{(i)}$ tem 2-lados. Note que para ε suficientemente pequeno o conjunto $\{x \in M; d(x, \Sigma^{(i)}) = \varepsilon\}$ tem duas componentes conexas ambas isotópicas a $\Sigma^{(i)}$. Assim, independentemente de n_i ser par ou ímpar teremos que para k suficientemente grande todas as componentes conexas de $S_k^{(i)}$ são isotópicas a $\Sigma^{(i)}$. Em particular, E_k é homeomorfo $\Sigma^{(i)}$.
- (2) Considere agora que $\Sigma^{(i)}$ tem 1-lado. Observe que para ε suficientemente pequeno o conjunto $\{x \in M; d(x, \Sigma^{(i)}) = \varepsilon\}$ é conexo e nos dá um recobrimento duplo para $\Sigma^{(i)}$. Se n_i é par, então para k suficientemente grande E_k é um recobrimento duplo para $\Sigma^{(i)}$. Se n_i é ímpar, então ou $E_k = \Sigma^{(i)}$ ou E_k é um recobrimento duplo para $\Sigma^{(i)}$.

Segue de (1) e (2) que ou E_k é homeomorfo a $\Sigma^{(i)}$ ou é um recobrimento duplo de $\Sigma^{(i)}$. Se E_k é um recobrimento duplo de $\Sigma^{(i)}$, segue que $\chi(E_k) = 2\chi(\Sigma^{(i)})$. Desde que E_k é homeomorfo a \mathbb{RP}^2 e $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ temos que $2\chi(\Sigma^{(i)}) = 1$. Mas isso é uma contradição pois a característica de Euler de uma superfície é sempre um número inteiro. Logo, E_k é homeomorfo a $\Sigma^{(i)}$ e conseqüentemente $\Sigma^{(i)}$ é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 . Segue que $\Sigma^{(i)} \in \mathcal{F}$, e com isso

$$|\Sigma^{(i)}|_g \geq \mathcal{A}(M, g).$$

Portanto, por (4.4)

$$|\Sigma^{(i)}|_g = \mathcal{A}(M, g).$$

□

Proposição 4.3. *Se $\Sigma \in \mathcal{F}$ é tal que $|\Sigma|_g = \mathcal{A}(M, g)$, então*

$$\int_{\Sigma} (Ric(\nu, \nu) + |B|^2) d\sigma_g \leq 4\pi.$$

Demonstração. Primeiramente suponha que Σ tem 2-lados. Neste caso, Σ possui um campo normal unitário contínuo N globalmente definido. Desde que Σ é estável, segue da condição de estabilidade que

$$\int_{\Sigma} f^2(Ric(N, N) + |B|^2)d\sigma_g \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 d\sigma_g,$$

para toda função $f \in C^{\infty}(\Sigma)$, onde L é o operador de estabilidade de Σ . Consequentemente, se tomarmos $f \equiv 1$ temos que

$$\int_{\Sigma} (Ric(N, N) + |B|^2)d\sigma_g < 0 < 4\pi.$$

Considere agora que Σ tem 1-lado. Neste caso, não podemos usar a condição de estabilidade de forma direta, já que Σ não possui um campo normal contínuo unitário globalmente definido. Desde que quaisquer superfícies suaves homeomorfas são difeomorfas, considere um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \Sigma$. Considere a métrica $\bar{h} = \varphi^*g$ em \mathbb{RP}^2 obtida pelo pullback de g por φ e $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a projeção natural. Considere agora a métrica $\tilde{h} = \pi^*\bar{h}$ em \mathbb{S}^2 . Pelo Teorema da Uniformização de Riemann existe uma função positiva $u \in C^{\infty}(\mathbb{S}^2)$ tal que a curvatura Gaussiana da métrica $\tilde{g} = u\tilde{h}$ é constante e igual a 1. Além disso, é possível mostrar que $u(p) = u(-p)$. Consequentemente, a superfície Riemanniana $(\mathbb{S}^2, \tilde{g})$ é isométrica a $(\mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^2})$, onde $g_{\mathbb{S}^2}$ é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^2 . É conhecido que a métrica canônica de \mathbb{RP}^2 é dada pelo pushforward de $g_{\mathbb{S}^2}$ por π , isto é, $g_{\mathbb{RP}^2} = (\pi^{-1})^*g_{\mathbb{S}^2}$, onde π^{-1} é a inversa local da aplicação π . Segue daí que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{RP}^2} &= (\pi^{-1})^*\tilde{g} \\ &= (u \circ \pi^{-1})(\pi^{-1})^*\tilde{h} \\ &= (u \circ \pi^{-1})(\pi^{-1})^*(\pi^*\bar{h}) \\ &= (u \circ \pi^{-1})\bar{h}, \end{aligned}$$

isto é, a métrica φ^*g é conforme a métrica canônica do plano projetivo. Considere $\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$. Observe que $\bar{\varphi}$ é um difeomorfismo local e $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$, consequentemente \mathbb{S}^2 é o recobrimento duplo orientável de Σ onde $\bar{\varphi}$ é a aplicação de recobrimento. Além disso,

$$\bar{\varphi}^*g = \pi^*(\varphi^*g) = v\pi^*(g_{\mathbb{RP}^2}),$$

para alguma função positiva $v \in C^{\infty}(\mathbb{S}^2)$. Consequentemente $\bar{\varphi}^*g = vg_{\mathbb{S}^2}$, ou seja, a métrica $\bar{\varphi}^*g$ é conforme a métrica canônica da esfera.

Vamos agora considerar o fibrado vetorial $(\bar{\varphi}^*(N\Sigma), \tilde{\pi}, \mathbb{S}^2)$ obtido pelo pullback do fibrado normal $N\Sigma$ de Σ pela aplicação $\bar{\varphi} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$. Observe que para cada $x \in \mathbb{S}^2$ tem-se que a fibra

$$\tilde{\pi}^{-1}(x) = \{(x, v); v \in (T_{\bar{\varphi}(x)}\Sigma)^{\perp}\},$$

é isomorfa a $(T_{\bar{\varphi}(x)}\Sigma)^{\perp}$, que por sua vez, é isomorfo a \mathbb{R} . Segue que $\bar{\varphi}^*(N\Sigma)$ é um fibrado linha em \mathbb{S}^2 . Desde que todo fibrado linha em \mathbb{S}^2 é trivial, temos que o fibrado vetorial $\bar{\varphi}^*(N\Sigma)$ é trivial. Consequentemente, existe uma seção não-nula $\nu \in \Gamma(\bar{\varphi}^*(N\Sigma))$ tal que $|\nu(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Note que para cada $x \in \mathbb{S}^2$ temos que $\nu(x) \in (T_{\bar{\varphi}(x)}\Sigma)^{\perp}$, ou seja, $\nu(x)$ é normal a Σ no ponto $\bar{\varphi}(x)$. Assim, como Σ tem um lado temos que $\nu(x) = -\nu(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.

Vamos agora identificar a esfera \mathbb{S}^2 com a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ defina a seção $\sigma_j \in \Gamma(\bar{\varphi}^*(N\Sigma))$ por $\sigma_j(x) = f_j(x)\nu(x)$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, onde f_j são as funções coordenadas, isto é, $f_j(x) = x_j$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Desde que $\nu(x) = -\nu(-x)$, temos que $\sigma_j(x) = \sigma_j(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Como $\sigma_j \in \Gamma(\bar{\varphi}^*(N\Sigma))$, então σ_j é o pullback por $\bar{\varphi}$ de alguma seção $V_j \in \Gamma(N\Sigma)$, ou seja, $\sigma_j(x) = V_j \circ \bar{\varphi}(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Note que

$$\sum_{j=1}^3 |\sigma_j(x)|^2 = \sum_{j=1}^3 x_j^2 = 1,$$

e

$$|V_j(y)|^2 = |V_j(\bar{\varphi}(x))|^2 = |\sigma_j(x)|^2.$$

Consequentemente,

$$\sum_{j=1}^3 |V_j(y)|^2 = 1, \quad \forall y \in \Sigma.$$

Desde que Σ é estável temos que

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) |V_j|^2 d\sigma_g \leq \int_{\Sigma} |\nabla V_j|^2 d\sigma_g.$$

Como \mathbb{S}^2 é o recobrimento duplo orientável de Σ onde $\bar{\varphi}$ é a aplicação de recobrimento tem-se que

$$\int_{\Sigma} |\nabla V_j|^2 d\sigma_g = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \bar{\varphi}^*(|\nabla V_j|^2) d\sigma_{\bar{\varphi}^*g} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j|^2 d\sigma_{\bar{\varphi}^*g}.$$

Consequentemente

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) |V_j|^2 d\sigma_g \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j|^2 d\sigma_{\bar{\varphi}^*g}.$$

Somando em $1 \leq j \leq 3$ ambos os lados desta última desigualdade obtemos que

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) \sum_{j=1}^3 |V_j|^2 d\sigma_g \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=1}^3 |\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j|^2 d\sigma_{\bar{\varphi}^*g}.$$

O que implica que

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) d\sigma_g \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=1}^3 |\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j|^2 d\sigma_{\bar{\varphi}^*g}. \quad (4.5)$$

Vimos anteriormente que existe uma função positiva $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ tal que $\bar{\varphi}^*g = v g_{\mathbb{S}^2}$. Assim

$$d\sigma_{\bar{\varphi}^*g} = v d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}}. \quad (4.6)$$

Além disso, em um sistema de coordenadas o gradiente da função f_j em relação a métrica $\bar{\varphi}^*g$ é dado por

$$\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j = (\bar{\varphi}^*g)^{ik} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

O que implica que

$$\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j = \frac{1}{v} \nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j,$$

e conseqüentemente

$$|\nabla_{\bar{\varphi}^*g} f_j|^2 = \frac{1}{v} |\nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j|^2. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) e (4.7) em (4.5) temos que

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) d\sigma_g \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=1}^3 |\nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j|^2 d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}}.$$

Temos ainda que as funções coordenadas são autofunções para o laplaciano associadas ao autovalor 2, isto é, $\Delta_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j + 2f_j = 0$. Assim pela Primeira Identidade de Green temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j|^2 d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} &= \int_{\mathbb{S}^2} g_{\mathbb{S}^2}(\nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j, \nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j) d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} \\ &= - \int_{\mathbb{S}^2} f_j \Delta_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} 2f_j^2 d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}}. \end{aligned}$$

Somando em $1 \leq j \leq 3$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=1}^3 |\nabla_{g_{\mathbb{S}^2}} f_j|^2 d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} = \int_{\mathbb{S}^2} 2 \sum_{j=1}^3 f_j^2 d\sigma_{g_{\mathbb{S}^2}} = 2 \text{area}(\mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^2}) = 8\pi.$$

Portanto,

$$\int_{\Sigma} (Ric_g(\nu, \nu) + |B|^2) d\sigma_g \leq 4\pi.$$

□

Proposição 4.4. *Temos que $\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.10 temos que

$$R_g - 2Ric(\eta, \eta) - |B|^2 = 2K,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de Σ e R_g é a curvatura escalar de M com respeito à métrica g . Isso implica que

$$R_g + |B|^2 = 2Ric(\eta, \eta) + 2|B|^2 + 2K.$$

Segue que

$$\int_{\Sigma} (R_g + |B|^2) d\sigma_g = 2 \int_{\Sigma} (Ric(\eta, \eta) + |B|^2) d\sigma_g + 2 \int_{\Sigma} K d\sigma_g.$$

Como Σ é homeomorfa a \mathbb{RP}^2 temos que $\chi(\Sigma) = \chi(\mathbb{RP}^2) = 1$. Segue do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas não-orientáveis [1.4](#) e da Proposição [4.3](#) que

$$\int_{\Sigma} (R_g + |B|^2) d\sigma_g \leq 12\pi. \quad (4.8)$$

Pela Proposição [4.2](#), existe uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A}(M, g) = |\Sigma|_g$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g &= |\Sigma|_g \inf_M R_g \\ &\leq \int_{\Sigma} R_g d\sigma_g \\ &\leq \int_{\Sigma} (R_g + |B|^2) d\sigma_g \end{aligned}$$

Portanto, por [\(4.8\)](#) temos que

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R_g \leq 12\pi.$$

□

4.2 Caso Igualdade em [\(4.1\)](#)

Com o objetivo de demonstrar o resultado de rigidez no Teorema [4.1](#), isto é, caracterizar as variedades (M, g) satisfazendo a igualdade em [\(4.1\)](#), vamos a partir daqui considerar g_0 uma métrica Riemanniana em M tal que $\mathcal{A}(M, g_0) \inf_M R_{g_0} = 12\pi$. Reescalando a métrica, se necessário, podemos supor que $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$ e $\inf_M R_{g_0} = 6$. Vamos considerar agora $T > 0$ e a família de métricas $g(t)$, $t \in [0, T]$ que é solução do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

Proposição 4.5. *Temos que*

$$\mathcal{A}(M, g(t)) \geq \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Suponha por contradição que existe $\tau \in (0, T]$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g(\tau)) < \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi\tau.$$

Podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g(\tau)) < \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi\tau - 2\varepsilon\tau.$$

Defina

$$t_0 = \inf\{t \in [0, T]; \mathcal{A}(M, g(t)) < \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t - \varepsilon\tau - \varepsilon t\}.$$

Note que $t_0 < \tau$ e $t_0 \neq 0$ pois caso contrário teríamos que $\varepsilon\tau < 0$, o que não acontece já que $\varepsilon, \tau > 0$. Consequentemente, $t_0 \in (0, \tau)$. Além disso, para todo $t \in [0, t_0)$ temos

$$\mathcal{A}(M, g(t)) \geq \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t - \varepsilon\tau - \varepsilon t.$$

O que implica que

$$\mathcal{A}(M, g_0) < \mathcal{A}(M, g(t)) + 8\pi t + \varepsilon\tau + \varepsilon t.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M, g(t_0)) &< \mathcal{A}(M, g_0) - 8\pi t_0 - \varepsilon\tau - \varepsilon t_0 \\ &\leq \mathcal{A}(M, g(t)) + 8\pi t + \varepsilon\tau + \varepsilon t - 8\pi t_0 - \varepsilon\tau - \varepsilon t_0 \\ &= \mathcal{A}(M, g(t)) - (8\pi + \varepsilon)(t_0 - t). \end{aligned}$$

Segue que

$$\mathcal{A}(M, g(t_0)) - \mathcal{A}(M, g(t)) < -(8\pi + \varepsilon)(t_0 - t),$$

para todo $t \in [0, t_0)$. Pela Proposição [4.2](#) existe uma superfície $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{A}(M, g(t_0)) = |\Sigma|_{g(t_0)}.$$

Sempre temos que

$$-\mathcal{A}(M, g(t)) \geq -|\Sigma|_{g(t)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} |\Sigma|_{g(t_0)} - |\Sigma|_{g(t)} &\leq \mathcal{A}(M, g(t_0)) - \mathcal{A}(M, g(t)) \\ &< -(8\pi + \varepsilon)(t_0 - t), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, t_0)$. Isto implica que

$$\frac{|\Sigma|_{g(t_0)} - |\Sigma|_{g(t)}}{(t_0 - t)} < -(8\pi + \varepsilon).$$

Segue que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\Sigma|_{g(t_0)} - |\Sigma|_{g(t)}}{(t_0 - t)} \leq -8\pi - \varepsilon.$$

Consequentemente

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} |\Sigma|_{g(t)} \leq -8\pi - \varepsilon. \quad (4.9)$$

Por outro lado

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} |\Sigma|_{g(t)} = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d\sigma_{g(t)},$$

onde $d\sigma_{g(t)}$ é o elemento de área de Σ em relação a métrica $g(t)$. Como $g(t)$ é solução para o fluxo de Ricci para todo $t \in [0, T]$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d\sigma_{g(t)} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\det g_{ij}(t)) dx \\ &= \frac{\det(g_{ij}(t))}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \left(g^{ij}(t) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g_{ij}(t) \right) dx \\ &= - \left(g^{ij}(t) (Ric_{g(t)})_{ij} \right) d\sigma_{g(t)}. \end{aligned}$$

Considere $\{e_1, e_2\}$ um referencial local ortonormal em relação a métrica $g(t_0)$. Daí

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d\sigma_{g(t)} &= - (Ric_{g(t_0)}(e_1, e_1) + Ric_{g(t_0)}(e_2, e_2)) d\sigma_{g(t_0)} \\ &= (Ric_{g(t_0)}(e_1, e_1) + Ric_{g(t_0)}(e_2, e_2)) d\sigma_{g(t_0)} \\ &= (Ric_{g(t_0)}(e_1, e_1) + Ric_{g(t_0)}(e_2, e_2) + Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta) - Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta)) d\sigma_{g(t_0)} \\ &= (R_{g(t_0)} - Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta)) d\sigma_{g(t_0)}. \end{aligned}$$

O que implica que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} |\Sigma|_{g(t)} = - \int_{\Sigma} (R_{g(t_0)} - Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta)) d\sigma_{g(t_0)}.$$

Seque do Teorema [1.10](#) que

$$R_{g(t_0)} - Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta) = 2K + Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta) + |B|^2.$$

Integrando esta igualdade, aplicando o Teorema de Gauss-Bonnet e a Proposição 4.3 obtemos,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} |\Sigma|_{g(t)} &= - \int_{\Sigma} (R_{g(t_0)} - Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta)) d\sigma_{g(t_0)} \\
&= -2 \int_{\Sigma} K d\sigma_{g(t_0)} - \int_{\Sigma} (Ric_{g(t_0)}(\eta, \eta) + |B|^2) d\sigma_{g(t_0)} \\
&\geq -4\pi\chi(\Sigma) - 4\pi \\
&= -8\pi.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} |\Sigma|_{g(t)} \geq -8\pi.$$

O que por (4.9) é uma contradição. □

Proposição 4.6. *Temos que*

$$R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t},$$

para todo $t \in [0, T)$ com $T \leq \frac{1}{4}$.

Demonstração. Como $\mathcal{A}(M, g_0) = 2\pi$, segue da Proposição 4.5 que $\mathcal{A}(M, g(t)) \geq 2\pi(1-4t)$, para todo $t \in [0, T]$. Pela desigualdade (4.1) temos que

$$\inf_M R_{g(t)} \leq \frac{12\pi}{\mathcal{A}(M, g(t))}.$$

Logo,

$$\inf_M R_{g(t)} \leq \frac{6}{1-4t}.$$

Para mostrar a desigualdade contrária defina $\tau = \min\{T, \frac{1}{4}\}$ e a função $h : M \times (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(p, t) = R_{g(t)} - \frac{6}{1-4t}.$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \frac{\partial}{\partial t} R_{g(t)} - \frac{2}{3} \left(\frac{6}{1-4t} \right)^2.$$

Pela equação de evolução (1.3) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \Delta h + 2|Ric_{g(t)}|^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{6}{1-4t} \right)^2.$$

Observe que

$$\langle g(t), Ric_{g(t)} \rangle = g^{ij}(t) (Ric_{g(t)})_{ij} = R_{g(t)}.$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\langle g(t), Ric_{g(t)} \rangle|^2 \leq |g(t)|^2 |Ric_{g(t)}|^2.$$

O que implica que

$$R_{g(t)}^2 \leq 3|Ric_{g(t)}|^2.$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h &\geq \Delta h + \frac{2}{3} R_{g(t)}^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{6}{1-4t} \right)^2 \\ &= \Delta h + \beta h, \end{aligned}$$

onde $\beta : M \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave dada por

$$\beta(p, t) = \frac{2}{3} \left(R_{g(t)}(p) + \frac{6}{1-4t} \right).$$

Observe que como M é compacta a função curvatura escalar $R_{g(t)}$ é limitada. Consequentemente, para cada $t \in [0, \tau)$ existe um número real C_t dependendo apenas de t tal que $\beta(p, t) \leq C_t$, para todo $p \in M$. Além disso, note que $h(p, 0) \geq 0$ para todo $p \in M$. Segue do princípio do Máximo que $h(p, t) \geq 0$ para todo $p \in M$ e para todo $t \in [0, \tau)$ (Ver [11], página 95, Teorema 4.3). Consequentemente, $\inf_M R_{g(t)} \geq \frac{6}{1-4t}$ para todo $t \in [0, \tau)$.

Com isso concluímos que

$$\inf_M R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t},$$

para todo $t \in [0, T)$ com $T \leq \frac{1}{4}$. Portanto pelo Princípio do Máximo Estrito,

$$R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t},$$

para todo $t \in [0, T)$ com $T \leq \frac{1}{4}$. □

Proposição 4.7. *A variedade Riemanniana (M, g_0) tem curvatura seccional constante igual a 1.*

Demonstração. Pela Proposição 4.6 temos que $R_{g(t)} = \frac{6}{1-4t}$, para todo $t \in [0, T)$ com $T \leq \frac{1}{4}$. Substituindo este valor da curvatura escalar na equação de evolução (1.4), concluímos que $Ric_{g(t)} \equiv 0$ em $M \times [0, T)$. Como $R_{g_0} = 6$ e $Ric_{g(t)} \equiv 0$ temos que (M, g_0) é uma variedade Einstein com $Ric_{g_0} = 2g_0$. Consequentemente o tensor de Schouten definido em (1.2) em relação a métrica g_0 é $A_{g_0} = \frac{1}{2}g_0$. Desde que o tensor de Weyl é identicamente nulo para $n = 3$, temos por (1.1) que

$$R = A_{g_0} \odot g_0.$$

Assim, para qualquer par de vetores ortonormais e_1 e e_2 tangentes a (M, g_0) temos que

$$K(e_1, e_2) = R(e_1, e_2, e_2, e_1) = 1.$$

Portanto (M, g_0) tem curvatura seccional constante igual a 1. □

Considere $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . Podemos introduzir uma métrica \tilde{g} em \tilde{M} através do pullback de g_0 por π . Com isso, temos que (\tilde{M}, \tilde{g}) e (M, g_0) são localmente isométricas e conseqüentemente (\tilde{M}, \tilde{g}) tem curvatura seccional igual a 1. Desde que \tilde{M} e \mathbb{S}^3 são simplesmente conexos, concluímos que (\tilde{M}, \tilde{g}) e (\mathbb{S}^3, h) são isométricos, onde h é a métrica canônica da esfera (Ver [22], cap. 11).

Proposição 4.8. *Temos que $|\pi_1(M)| = 2$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.2 existe $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $|\Sigma|_{g_0} = \mathcal{A}(M, g_0)$. Assim, temos que $|\Sigma|_{g_0} \inf_M R_{g_0} = 12\pi$. Isto implica que

$$12\pi = |\Sigma|_{g_0} \inf_M R_{g_0} \leq \int_{\Sigma} R_{g_0} d\sigma_{g_0} \leq \int_{\Sigma} (R_{g_0} + |B|^2) d\sigma_{g_0}.$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.10, do Teorema de Gauss-Bonnet e da Proposição 4.2 que

$$\int_{\Sigma} (R_{g_0} + |B|^2) d\sigma_{g_0} \leq 12\pi.$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Sigma} (R_{g_0} + |B|^2) d\sigma_{g_0} = 12\pi.$$

Como $R_{g_0} = 6$, temos que

$$6|\Sigma|_{g_0} + \int_{\Sigma} |B|^2 d\sigma_{g_0} = 12\pi.$$

O que implica que

$$\int_{\Sigma} |B|^2 d\sigma_{g_0} = 0.$$

Assim temos que $B \equiv 0$, isto é, a superfície Σ é totalmente geodésica.

Vimos que existe uma isometria $f : (\mathbb{S}^3, g_{\mathbb{S}^3}) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ de \mathbb{S}^3 para o recobrimento universal de M , onde $\tilde{g} = \pi^* g_0$ e $g_{\mathbb{S}^3}$ é a métrica canônica da esfera. Defina $F := \pi \circ f : \mathbb{S}^3 \rightarrow M$ e note que F é uma isometria local. Segue do Teorema 1.14 que F é uma aplicação de recobrimento, conseqüentemente a esfera \mathbb{S}^3 é o recobrimento universal de M . Defina agora a superfície mergulhada $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{S}^3$ por $\tilde{\Sigma} = F^{-1}(\Sigma)$.

Afirmção 4.3. *A superfície $\tilde{\Sigma}$ é totalmente geodésica.*

De fato, sejam $p \in \tilde{\Sigma}$ e $c : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ a geodésica em $\tilde{\Sigma}$, tal que, $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Considere a curva $\beta = F \circ c : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ em Σ . Desde que F é uma isometria local e c é uma geodésica em $\tilde{\Sigma}$, temos que β é uma geodésica em Σ tal que $\beta'(0) = dF_p(v) = w$ e $\beta(0) = F(p)$. Como Σ é totalmente geodésica concluímos que β é uma geodésica em M . Seja \bar{c} a geodésica em \mathbb{S}^3 tal que $\bar{c}(0) = p$ e $\bar{c}'(0) = v$, novamente por F ser uma isometria local temos que a curva $\bar{\beta} = F \circ \bar{c}$ é a geodésica em M com $\bar{\beta}(0) = F(p)$ e $\bar{\beta}'(0) = w$. Por unicidade das geodésicas segue que $\bar{\beta} = \beta$, conseqüentemente, $\bar{c} = c$. Com isso, obtemos que c é uma geodésica em \mathbb{S}^3 e portanto $\tilde{\Sigma}$ é totalmente geodésica.

Afirmção 4.4. *A superfície $\tilde{\Sigma}$ é isométrica a \mathbb{S}^2 .*

Pela Afirmção 4.3 temos que $\tilde{\Sigma}$ é totalmente geodésica, segue do Teorema 1.5 que $K_{\tilde{\Sigma}} = K_{\mathbb{S}^3} = 1$, onde $K_{\tilde{\Sigma}}$ e $K_{\mathbb{S}^3}$ denotam a curvatura Gaussiana de $\tilde{\Sigma}$ e \mathbb{S}^3 , respectivamente. Conseqüentemente, ou $\tilde{\Sigma}$ é isométrica a \mathbb{S}^2 ou $\tilde{\Sigma}$ é isométrica a \mathbb{RP}^2 (Ver [8], sec. 8.4). Suponha que $\tilde{\Sigma}$ é um plano projetivo mergulhado em \mathbb{S}^3 , daí, pela Proposição 4.1 a aplicação induzida $i_{\#} : \pi_1(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3)$ é injetiva, o que é uma contradição, pois $\pi_1(\tilde{\Sigma}) = \mathbb{Z}_2$ e $\pi_1(\mathbb{S}^3) = \{0\}$.

Vamos agora considerar a aplicação induzida $i_{\#} : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$. Mostramos na Proposição 4.1 que $i_{\#}$ é injetiva. Afirmamos que $i_{\#}$ também é sobrejetiva. Para mostrar isso, considere uma curva fechada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com base no ponto $p \in M$. Considere a transformação deck $\phi = \phi_{\alpha}$ de \mathbb{S}^3 associada a curva α através do isomorfismo $[\alpha] \mapsto \phi_{\alpha}$ do grupo fundamental $\pi_1(M)$ em $G(\mathbb{S}^3)$. Defina a superfície mergulhada $\bar{\Sigma} \subset \mathbb{S}^3$ por $\bar{\Sigma} = \phi^{-1}(\tilde{\Sigma})$. Desde que ϕ é uma isometria, temos que $\bar{\Sigma}$ é totalmente geodésica. Fazendo um argumento análogo ao feito na Afirmção 4.4, concluímos que $\bar{\Sigma}$ é isométrica a uma esfera mergulhada em \mathbb{S}^3 . Desde que quaisquer duas esferas mergulhadas em \mathbb{S}^3 se intersectam, temos que $\tilde{\Sigma} \cap \bar{\Sigma} \neq \emptyset$. Fixemos um ponto $\tilde{q} \in \tilde{\Sigma} \cap \bar{\Sigma}$. Como $\tilde{\Sigma}$ é conexa por caminhos, podemos encontrar uma curva suave $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{q}$ e $\tilde{\gamma}(1) = \phi(\tilde{q})$. Vamos agora definir uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ por $\gamma(t) = F(\tilde{\gamma}(t))$. Note que

$$\gamma(0) = F(\tilde{\gamma}(0)) = F(\tilde{q})$$

e

$$\gamma(1) = F(\tilde{\gamma}(1)) = F(\phi(\tilde{q})) = F(\tilde{q}).$$

Segue que γ é uma curva fechada. Observe que a transformação deck ϕ satisfaz, $\phi(\tilde{q}) = [\gamma] \cdot \tilde{q} = \tilde{\gamma}(1)$, isto é, $\phi = \phi_{\alpha} = \phi_{\gamma}$. Desde que a aplicação $[\alpha] \mapsto \phi_{\alpha}$ é um isomorfismo de $\pi_1(M)$ em $G(\mathbb{S}^3)$, temos que α é homotópica a γ . Mais precisamente, $[\alpha] = [i(\gamma)]$. Segue que $i_{\#}$ é sobrejetiva e, conseqüentemente, bijetiva. Portanto, $|\pi_1(M)| = |\pi_1(\Sigma)| = 2$. \square

Vimos que $G(\mathbb{S}^3)$ é isomorfo a $\pi_1(M)$, que pela Proposição 4.8, é isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Segue do Teorema 1.16 que (M, g) é isométrica a $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$. Portanto, (M, g_0) é isométrica ao espaço projetivo \mathbb{RP}^3 (Ver [22], cap. 11).

Capítulo 5

Toros

Nesta seção vamos expor os resultados obtidos em [6] com o objetivo de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar não-negativa, $R_g \geq 0$. Se Σ é um toro de 2-lados mergulhado em M que é localmente de menor área, então M é plana em uma vizinhança de Σ .*

Observe que, sob as hipóteses do Teorema 5.1, M não é necessariamente globalmente plana. Para ilustrar esse fato, considere $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, onde \mathbb{S}^2 é uma esfera que é plana em uma vizinhança do equador E , como mostra a Figura 5.1.

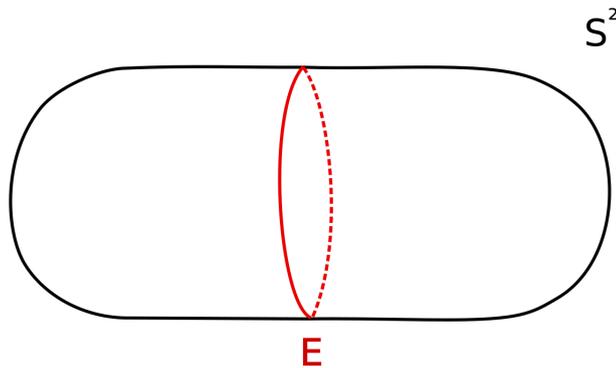


Figura 5.1: Esfera localmente plana

Note que $\mathbb{S}^1 \times E$ é um toro de 2-lados mergulhado em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ com campo normal unitário contínuo globalmente $N = 0 + \nu$, onde ν é um campo normal a E em \mathbb{S}^2 . Tome arbitrariamente um ponto $(p, q) \in \mathbb{S}^1 \times E$ e um vetor $u \in T_{(p,q)}(\mathbb{S}^1 \times E)$, $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in T_p\mathbb{S}^1$ e $u_2 \in T_qE$.

Veja que

$$\bar{\nabla}_u N = \nabla_{u_1}^1 0 + \nabla_{u_2}^2 \nu = \nabla_{u_2}^2 \nu,$$

onde ∇^1 e ∇^2 são as conexões Riemannianas de \mathbb{S}^1 e \mathbb{S}^2 , respectivamente. Desde que o campo ν é um campo paralelo ao longo de E , temos que $\bar{\nabla}_u N = 0$. Assim, a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}^1 \times E$ é identicamente nula, e consequentemente esta é totalmente geodésica e mínima. Desde que, a curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ na direção normal N é nula, temos que o operado de estabilidade de $\mathbb{S}^1 \times E$ é $L(f) = \Delta_\Sigma f$, onde $\Sigma = \mathbb{S}^1 \times E$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$. Daí,

$$- \int_\Sigma f L(f) d\sigma = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma f|^2 d\sigma \geq 0.$$

Logo, $\mathbb{S}^1 \times E$ é mínima estável, mas a variedade $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ não é plana, pois esta possui pontos onde a curvatura escalar é positiva.

Para demonstrar o Teorema [5.1](#), primeiramente mostraremos que Σ não é estritamente localmente de menor área. Se o contrário fosse verdade, então sob uma perturbação suficientemente pequena da métrica para uma métrica de curvatura escalar positiva, Σ seria perturbada para um toro de 2-lados mínimo estável que ainda é localmente de menor área, o que pelo Teorema [1.11](#) é uma contradição. Daí, concluímos que existem toros de 2-lados Σ^+ e Σ^- , um em cada lado de Σ em uma vizinhança normal de desta em M , que são localmente de menor área. Considerando duas cópias da região limitada pelos toros Σ^+ e Σ^- , e colando apropriadamente suas fronteiras, obteremos pelo Teorema *B* em [5](#) um toro tridimensional \mathbb{T}^3 com curvatura escalar não-negativa. Porém, Schoen-Yau em [31](#) mostraram o seguinte teorema:

Teorema 5.2 (Schoen-Yau, Teorema 5.2 em [31](#)). *Seja N ma variedade compacta orientada de dimensão 3. Suponha que N satisfaz uma das seguintes condições:*

- (i) $\pi_1(N)$ contém um subgrupo abeliano não-cíclico finitamente gerado, ou
- (ii) $\pi_1(N)$ contém um subgrupo abstratamente isomorfo ao grupo fundamental de uma superfície de gênero maior que 1.

Então N não admite métrica com curvatura escalar positiva. De fato, toda métrica com curvatura escalar não-negativa é plana.

Desde que \mathbb{Z}^2 é um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$, e este é abeliano não-cíclico finitamente gerado, concluímos que \mathbb{T}^3 não admite métrica com curvatura escalar positiva.

5.1 Demonstração do Teorema [5.1](#)

Considere Σ uma superfície compacta de 2-lados mergulhada em uma variedade Riemanniana tridimensional (M, g) . Defina uma variação suave $\phi : (-l, l) \times \Sigma \rightarrow M$ de Σ por

$$\phi(t, x) = \exp_x(tN(x)),$$

onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ . Como Σ é mergulhada, então podemos escolher $l > 0$ suficientemente pequeno para que ϕ seja um difeomorfismo. Por definição o conjunto $V = \phi((-l, l) \times \Sigma)$ é chamada vizinhança normal de Σ em M . Desde que $\phi : (-l, l) \times \Sigma \rightarrow V$ é um difeomorfismo, podemos identificar os pontos de V com os pontos de $(-l, l) \times \Sigma$, desta forma, muitas vezes iremos considerar $V = (-l, l) \times \Sigma$. Note que fixado $x \in \Sigma$, temos que $\phi(\cdot, x)$ é uma geodésica de M ortogonal a Σ . Além disso, esta geodésica é também ortogonais aos níveis $\phi(t, \Sigma)$. Isto implica que a métrica em V é dada por

$$g = dt^2 + \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(t, x) dx^i \otimes dx^j. \quad (5.1)$$

O lema a seguir serve para garantir que depois de certas operações de cortes e colagens a métrica resultante é suave.

Lema 5.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar não-negativa, $R_g \geq 0$. Suponha que Σ é um toro de 2-lados mergulhado em M que é localmente de menor área, então com respeito a um sistema de coordenadas normais ao longo de Σ ,*

$$\frac{\partial^n g_{ij}}{\partial t^n}(0, x) = 0,$$

para todo inteiro positivo n e todo $x \in \Sigma$.

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal em Σ . Note que como Σ é um toro, tal referencial existe. Estenda e_1 e e_2 para a vizinhança normal $V = (-l, l) \times \Sigma$ transportando-os paralelamente ao longo das geodésicas normais de Σ . Para $1 \leq i, j \leq 2$, considere $\lambda_{ij} = B(e_i, e_j)$. Pelo Teorema B em [5] temos que

$$\frac{\partial^n \lambda_{ij}}{\partial t^n}(0, x) = 0, \quad (5.2)$$

para todo inteiro não-negativo n e todo $x \in \Sigma$. Considere um sistema de coordenadas geodésicas normais $(t = x_0, x_1, x_2)$ em V . Neste sistema de coordenadas

$$g_{00} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1 \text{ e } g_{0j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = 0,$$

para todo $j = 1, 2$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= B \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= 2B_{ij}, \end{aligned}$$

onde $B_{ij} = B\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Segue que

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}. \quad (5.3)$$

Por (5.2) temos que

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} B_{ij}(0, x) = 0,$$

para todo inteiro não-negativo n e todo $x \in \Sigma$. Portanto, por (5.3) temos

$$\frac{\partial^n g_{ij}}{\partial t^n}(0, x) = 0,$$

para todo inteiro positivo n e todo $x \in \Sigma$. □

Lema 5.2. *Suponha que Σ é uma superfície compacta de 2-lados mergulhada em uma variedade Riemanniana tridimensional (M, g) com curvatura escalar não-negativa, $R_g \geq 0$. Então existem uma vizinhança U de Σ em M e uma sequência de métricas $\{g_n\}$ em U tal que $g_n \rightarrow g$ na topologia C^∞ em U , e para n suficientemente grande, cada g_n tem curvatura escalar positiva, $R_{g_n} > 0$.*

Demonstração. Seja $V = (-l, l) \times \Sigma$ uma vizinhança normal de Σ em M e a métrica g da forma (5.1). Defina uma sequência de métricas $g_n = e^{-2n^{-1}t^2} g$. Desde que, para cada n as métricas g_n e g são conformes com $g_n = e^{2u} g$, onde $u = -n^{-1}t^2$, pela Proposição 1.5 podemos relacionar as curvaturas escales de g_n e g pela equação

$$R_{g_n} = e^{2n^{-1}t^2} (R_g - 4\Delta_g u - 2|\nabla_g u|^2).$$

Observe que em um sistema de coordenadas $(x_1, x_2, x_3 = t)$ em V temos que,

$$\nabla_g u = g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ para $i \neq 3$, obtemos

$$\nabla_g u = g^{3j} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Além disso, $g^{3j} = 0$ para $j \neq 3$ e $g^{33} = 1$. Consequentemente,

$$\nabla_g u = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}.$$

O que implica que

$$|\nabla_g u|^2 = 4n^{-2}t^2. \quad (5.4)$$

Vamos agora encontrar uma expressão para $\Delta_g u$. Sabemos que,

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

onde $|g| = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Daí

$$\begin{aligned}\Delta_g u &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} g^{i3} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{|g|} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Mostramos na Seção [1.8.1](#) que

$$\frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial t} = \operatorname{div}_g \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sqrt{|g|} = H_t \sqrt{|g|},$$

onde H_t é a curvatura média da superfície $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ com respeito a métrica g . Assim,

$$\Delta_g u = -2n^{-1} t H_t - 2n^{-1}. \quad (5.5)$$

Segue de [\(5.5\)](#) e [\(5.4\)](#) que

$$R_{g_n} = e^{2n^{-1}t^2} (R_g + 8n^{-1}tH_t + 8n^{-1} - 4n^{-2}t^2).$$

Desde que $R_g \geq 0$, temos que para n suficientemente grande e l suficientemente pequeno temos que $R_{g_n} > 0$. \square

Lema 5.3. *Suponha que Σ é um toro de 2-lados mergulhado em uma variedade Riemanniana tridimensional que é estritamente localmente de menor área. Seja $\{g_n\}$ uma sequência de métricas tal que $g_n \rightarrow g$ na topologia C^∞ . Então para qualquer vizinhança U de Σ em M e qualquer inteiro positivo N existe, para algum $n \geq N$, uma superfície $\Sigma_n \subset U$ isotópica a Σ em U que é localmente de menor área em (M, g_n) .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de Σ em M . Escolha $l > 0$ suficientemente pequeno para que a vizinhança normal $V = [-l, l] \times \Sigma$ de Σ esteja contida em U . Vamos a partir de agora focar na variedade Riemanniana compacta (V, g) com bordo ∂V isométrico a $\Sigma_l \cup \Sigma_{-l}$, onde $\Sigma_l = \{l\} \times \Sigma$ e $\Sigma_{-l} = \{-l\} \times \Sigma$. Desde que Σ é estritamente localmente de menor área, diminuindo o valor de l se necessário, temos que

$$|\Sigma|_g < |\Sigma'|_g,$$

para todo $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$, $\Sigma' \neq \Sigma$, onde $\mathcal{I}(\Sigma)$ denota a classe de isotopia de Σ em V .

Defina $V_0 = [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \times \Sigma$. Considere uma função suave $f = f(t)$ não-negativa definida em $[-l, l]$ tal que $f = 0$ em $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$. Fazendo as derivadas $f'(l)$ e $f'(-l)$ suficientemente grandes em valor absoluto, com $f'(l) > 0$ e $f'(-l) < 0$, a métrica Riemanniana definida por $\bar{g} = e^f g$ satisfaz as seguintes condições:

- (a) $\bar{g}|_{V_0} = g|_{V_0}$.
- (b) A curvatura média na fronteira de (V, \bar{g}) com respeito à normal para dentro é positiva.
- (c) $|\Sigma|_{\bar{g}} < |\Sigma'|_{\bar{g}}$, para toda $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$, $\Sigma' \neq \Sigma$.

De fato,

- (a) Para demonstrar o item (a) basta notar que $e^f = 1$ em V_0 .
- (b) Denote por H_g e $H_{\bar{g}}$ as curvaturas médias de ∂V em relação as métricas g e \bar{g} , respectivamente. Recordemos que se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana e $u \in C^\infty(M)$ é uma função positiva, podemos relacionar a curvatura média H_g de ∂M em relação a métrica g com a curvatura média $H_{\bar{g}}$ de ∂M em relação a métrica $\bar{g} = u^{\frac{n}{n-2}}g$ pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{n-2}{2} H_g u = -H_{\bar{g}} u^{\frac{n}{n-2}},$$

onde η é a normal para dentro da fronteira em ∂M . Observe que em nosso caso $n = 3$ e $u = e^{\frac{f}{4}}$. Daí

$$H_{\bar{g}} = -\frac{1}{e^{\frac{3f}{4}}} \frac{\partial}{\partial \eta} (e^{\frac{f}{4}}) + \frac{1}{2e^{\frac{f}{2}}} H_g.$$

Note que em $t = l$ temos que $\eta = -\frac{\partial}{\partial t}$, consequentemente

$$H_{\bar{g}} = \frac{1}{4e^{\frac{f}{2}}} f'(l) + \frac{1}{2e^{\frac{f}{2}}} H_g > 0$$

para $f'(l)$ suficientemente grande em valor absoluto com $f'(l) > 0$.

Analogamente, em $t = -l$ temos que $\eta = \frac{\partial}{\partial t}$, consequentemente

$$H_{\bar{g}} = -\frac{1}{4e^{\frac{f}{2}}} f'(-l) + \frac{1}{2e^{\frac{f}{2}}} H_g > 0$$

para $f'(-l)$ suficientemente grande em valor absoluto com $f'(-l) < 0$.

Portanto, desde que $\partial V = \Sigma_l \cup \Sigma_{-l}$ concluímos que a curvatura média na fronteira de V em relação a métrica \bar{g} é positiva.

- (c) Considere uma superfície $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$ em (V, \bar{g}) . Note que

$$\begin{aligned} |\Sigma'|_{\bar{g}} &= \int_{\Sigma'} \sqrt{\det(e^f g_{ij})} dx \\ &= \int_{\Sigma'} \sqrt{e^{3f}} d\sigma_g \\ &\geq |\Sigma'|_g, \end{aligned}$$

pois $f \geq 0$ implica que $e^{3f} \geq 1$. Como Σ é estritamente localmente de menor área temos que

$$|\Sigma'|_{\bar{g}} > |\Sigma'|_g > |\Sigma|_g,$$

para toda $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$, $\Sigma' \neq \Sigma$. Desde que as métricas g e \bar{g} coincidem em $t = 0$ temos que $|\Sigma|_{\bar{g}} = |\Sigma|_g$. Consequentemente, $|\Sigma'|_{\bar{g}} > |\Sigma|_{\bar{g}}$ para toda $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$, $\Sigma' \neq \Sigma$.

Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ a métrica $\bar{g}_n = e^f g_n$. Note que \bar{g}_n satisfaz:

- (i) $\bar{g}_n|_{V_0} = g_n|_{V_0}$.
- (ii) $\bar{g}_n \rightarrow \bar{g}$ na topologia C^∞ .
- (iii) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, a curvatura média na fronteira de (V, \bar{g}_n) com respeito a normal para dentro é positiva, pois as curvaturas médias da fronteira em relação as métricas \bar{g}_n convergem para curvatura média da fronteira em relação a métrica \bar{g} .

Para cada n considere

$$\alpha_n = \inf_{\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)} |\Sigma'|_{\bar{g}_n}.$$

Afirmção 5.1. *A superfície Σ é incompressível em V .*

Como Σ é de 2-lados diferente de uma 2-esfera, temos que ela é incompressível em V se, e somente se, a aplicação $i_\# : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(V)$ definida por $i_\#([\alpha]) = [i(\alpha)]$ é injetiva, onde $i : \Sigma \rightarrow V$ é a aplicação inclusão. Faremos a demonstração desta afirmação por contradição. Suponha que a aplicação $i_\#$ não é injetiva. Considere $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(\Sigma)$ tais que $[\gamma] \neq [\beta]$ e $i_\#([\gamma]) = i_\#([\beta])$. Daí, as curvas $\bar{\gamma}(t) = (0, \gamma(t))$ e $\bar{\beta}(t) = (0, \beta(t))$ em V são homotópicas. Considere F uma homotopia entre as curvas $\bar{\gamma}$ e $\bar{\beta}$. Note que a aplicação $G = \pi_2 \circ F$ é uma homotopia entre as curvas γ e β , onde a aplicação $\pi_2 : V \rightarrow \Sigma$ é a projeção em Σ . Mas isso é uma contradição, pois $[\gamma] \neq [\beta]$. Logo segue a afirmação.

Afirmção 5.2. *A variedade V é $\mathbb{R}P^2$ -irredutível.*

De fato, note que a 3-variedade $\tilde{V} = [-l, l] \times \mathbb{R}^2$ é o recobrimento universal de V , pois \mathbb{R}^2 é o recobrimento universal de Σ , já que esta é um toro. Obviamente, \tilde{V} é uma variedade irredutível. Segue do fato de que se o recobrimento universal de uma 3-variedade N é irredutível, então N é irredutível, que a variedade V é irredutível. Além disso, como Σ é orientável temos que V é orientável. Segue do Teorema [1.9](#) que V não contém um plano projetivo de 2-lados mergulhado. Portanto, segue a afirmação.

Afirmção 5.3. *V não contém uma superfície compacta de 1-lado mergulhada.*

De fato, seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho suave de Σ no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Defina uma aplicação $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(t, x) = \exp_{f(x)}(tN(f(x))),$$

onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$. Podemos tomar l suficientemente pequeno para que F seja um mergulho suave. Suponha por contradição que V contém uma superfície S mergulhada compacta de 1-lado. Daí, como V é orientável, pelo Teorema 1.9 temos que S é não-orientável. Defina a superfície $\bar{S} = F(S)$. Observe que \bar{S} é uma superfície compacta não-orientável mergulhada em \mathbb{R}^3 . Mas isso é uma contradição, pois toda superfície compacta mergulhada em \mathbb{R}^3 é orientável. Portanto, segue a afirmação.

Válidas todas as afirmações acima, podemos aplicar o Teorema 1.13 que afirma que para cada $n \geq n_0$ existe uma superfície mergulhada $\Sigma_n \in \mathcal{I}(\Sigma)$ tal que $|\Sigma_n|_{\bar{g}_n} = \alpha_n$ (Neste caso, como $\partial V \neq \emptyset$ para aplicar o Teorema 1.13 é necessário que a curvatura média na fronteira de V em relação a métrica \bar{g}_n seja não-negativa para todo $n \geq n_0$, o que de fato acontece pelo item (iii)).

Para cada $n > n_0$, a superfície Σ_n é isotópica a Σ e minimiza área em sua classe de isotopia em (V, \bar{g}_n) assim temos que Σ_n é uma superfície compacta mínima estável mergulhada em (V, \bar{g}_n) . Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Sigma_n|_{\bar{g}_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\Sigma|_{\bar{g}_n} = |\Sigma|_{\bar{g}}. \quad (5.6)$$

O que implica que a sequência $\{\alpha_n\}$ é limitada. Com isso, temos que existe uma subsequência da sequência $\{\Sigma_n\}$ que localmente converge na topologia C^∞ para uma superfície mínima compacta $\tilde{\Sigma}$ mergulhada em (V, \bar{g}) (Ver [25]). Pela propriedade natural de convergência, podemos tomar n suficientemente grande para que todas as superfícies Σ_n estejam contidas em alguma vizinhança tubular W de $\tilde{\Sigma}$. Note que para n suficientemente grande, todas as superfícies Σ_n intersectam transversalmente as geodésicas normais de $\tilde{\Sigma}$ (Observe a Figura 5.2).

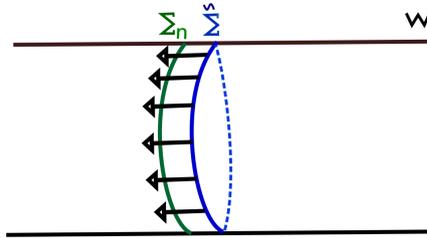


Figura 5.2: As superfícies Σ e Σ_n na vizinhança normal W .

Segue que Σ_n é um recobrimento para $\tilde{\Sigma}$ via a projeção ao longo das geodésicas normais de $\tilde{\Sigma}$. Desde que V não contém uma superfície compacta de 1-lado mergulhada, temos que a superfície $\tilde{\Sigma}$ é necessariamente de 2-lados. Segue que o recobrimento de $\tilde{\Sigma}$ por Σ_n é de 1-folha, isto é, a aplicação de recobrimento dada pela projeção ao longo das geodésicas normais de $\tilde{\Sigma}$ é injetiva, nos fornecendo um difeomorfismo entre Σ_n e $\tilde{\Sigma}$.

Como Σ_n é isotópica a Σ e difeomorfa a $\tilde{\Sigma}$, temos que $\tilde{\Sigma}$ é isotópica a Σ . Além disso, por (5.6) temos que

$$|\tilde{\Sigma}|_{\bar{g}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq |\Sigma|_{\bar{g}}.$$

Consequentemente, pelo item (c) concluímos que $\tilde{\Sigma} = \Sigma$. Logo, pela propriedade natural de

convergência, podemos tomar n suficientemente grande para que todas as superfícies Σ_n estejam contidas em $\text{int } V_0 = \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times \Sigma$, onde pelo item (i) tem-se $\bar{g}_n = g_n$. Assim temos que

$$|\Sigma_n|_{g_n} = \inf_{\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)} |\Sigma'|_{g_n} \leq |\Sigma'|_{g_n},$$

para toda $\Sigma' \in \mathcal{I}(\Sigma)$ em V_0 . Portanto, para n suficientemente grande, a superfície Σ_n é localmente de menor área em (M, g_n) . \square

Demonstração do Teorema 5.1. Seja $V = (-l, l) \times \Sigma$ uma vizinhança normal de Σ em M . Como Σ é localmente de menor área em (M, g) , podemos tomar l suficientemente pequeno para que Σ seja de menor área em sua classe de isotopia em (V, g) . Considere uma métrica \tilde{g} em V como da forma (5.1), isto é,

$$\tilde{g} = dt^2 + \sum_{i,j=1}^2 \tilde{g}_{ij}(t, x) dx^i \otimes dx^j,$$

onde as funções componentes \tilde{g}_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, são dadas por

$$\tilde{g}_{ij}(t, x) = \begin{cases} g_{ij}(t, x), & \text{se } t \in [0, l) \\ g_{ij}(-t, x), & \text{se } t \in (-l, 0] \end{cases}$$

Segue do Lema 5.1 que as funções componentes de \tilde{g} são suaves, pois como as derivadas parciais de todas as ordens em relação a t em $t = 0$ de $g_{ij}(t, x)$ se anulam, então o mesmo acontece com as derivadas parciais de todas as ordens em relação a t em $t = 0$ de $\tilde{g}_{ij}(t, x)$. Daí, (V, \tilde{g}) é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R_{\tilde{g}} \geq 0$, pois $R_{\tilde{g}}(t, x) = R_g(|t|, x) \geq 0$ para todo $(t, x) \in V$. Note que se $t > 0$, temos que as componentes da métrica \tilde{g} satisfaz a condição

$$\tilde{g}_{ij}(-t, x) = g_{ij}(t, x) = \tilde{g}_{ij}(t, x).$$

Assim temos que a reflexão ao longo de Σ , $(t, x) \mapsto (-t, x)$, é uma isometria. Segue que Σ minimiza área em sua classe de isotopia em (V, \tilde{g}) .

Afirmção 5.4. *A superfície Σ não é estritamente de menor área em sua classe de isotopia em (V, \tilde{g}) .*

Suponha que esta afirmação é falsa, isto é, que Σ é estritamente de menor área em sua classe de isotopia em (V, \tilde{g}) . Escolha l suficientemente pequeno para que o Lema 5.2 seja válido para $U = V$ e considere a sequência de métricas $\{\tilde{g}_n\}$ dada por este lema. Pelo Lema 5.3, para n suficientemente grande, existe um toro de 2-lados $\Sigma' \subset V$ próximo de Σ que é localmente de menor área em (V, \tilde{g}_n) . Desde que, para n suficientemente grande $R_{\tilde{g}_n} > 0$ temos que Σ' é um toro de 2-lados mínimo estável com respeito a uma métrica com curvatura escalar positiva. Mas pelo Teorema 1.11 isso é uma contradição. Portanto, segue a afirmação.

Segue da Afirmção 5.4 que existe $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{I}(\Sigma)$, $\tilde{\Sigma} \neq \Sigma$ tal que $|\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}} = |\Sigma|_{\tilde{g}}$. Assim a superfície $\tilde{\Sigma}$ também minimiza área em sua classe de isotopia em (V, \tilde{g}) .

Afirmção 5.5. *Os toros $\tilde{\Sigma}$ e Σ são totalmente geodésicos em (V, \tilde{g}) .*

De fato, desde de que Σ é mínima estável em (V, \tilde{g}) temos que

$$\int_{\Sigma} (Ric_{\tilde{g}}(N, N) + |B|^2) f^2 d\sigma_{\tilde{g}} \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\tilde{g}} f|^2 d\sigma_{\tilde{g}},$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$, onde N é um campo normal unitário contínuo globalmente definido em Σ , B é a segunda forma fundamental de Σ e $Ric_{\tilde{g}}$ é o tensor curvatura de Ricci de (V, \tilde{g}) . Em particular temos que

$$\int_{\Sigma} (Ric_{\tilde{g}}(N, N) + |B|^2) d\sigma_{\tilde{g}} \leq 0. \quad (5.7)$$

Pelo Teorema 1.10 temos que

$$Ric_{\tilde{g}}(N, N) + |B|^2 = \frac{1}{2} R_{\tilde{g}} + \frac{1}{2} |B|^2 - \frac{1}{2} K_{\Sigma}, \quad (5.8)$$

onde K_{Σ} é a curvatura Gaussiana de Σ com respeito a métrica \tilde{g} . Por (5.7) e (5.8) obtemos que

$$\int_{\Sigma} (R_{\tilde{g}} + |B|^2 - K_{\Sigma}) d\sigma_{\tilde{g}} \leq 0.$$

Como $\chi(\Sigma) = 0$, então pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos

$$\int_{\Sigma} (R_{\tilde{g}} + |B|^2) d\sigma_{\tilde{g}} \leq 0.$$

Desde que $R_{\tilde{g}} \geq 0$ concluímos que a segunda forma fundamental B de Σ é identicamente nula, isto é, que Σ é totalmente geodésica. Da mesma forma mostra-se que $\tilde{\Sigma}$ também é totalmente geodésica. Portanto segue a afirmação.

Afirmção 5.6. *Se Σ e $\tilde{\Sigma}$ se intersectam, então a interseção é transversal.*

De fato, se o contrário acontecesse existiria um ponto $p \in \Sigma \cap \tilde{\Sigma}$ tal que $T_p \Sigma = T_p \tilde{\Sigma} \subset T_p V$, e além disso quaisquer duas vizinhanças de p em Σ e em $\tilde{\Sigma}$ são distintas. Veja a Figura 5.3.

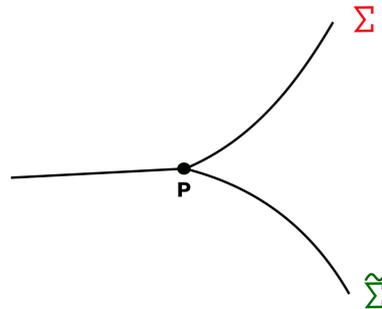


Figura 5.3: Localização do ponto p na interseção de Σ e $\tilde{\Sigma}$.

Porém, como pela Afirmação 5.5 Σ e $\tilde{\Sigma}$ são totalmente geodésicas, segue que as aplicações exponenciais de cada uma delas é a restrição da aplicação exponencial de V a Σ e a $\tilde{\Sigma}$. Mas como o domínio desta restrição é $T_p\Sigma = T_p\tilde{\Sigma} \subset T_pV$, segue que qualquer vizinhança normal de p em Σ também é uma vizinhança normal de p em $\tilde{\Sigma}$. Mas isso é uma contradição. Logo, segue a afirmação.

Afirmação 5.7. *A superfície $\tilde{\Sigma}$ está contida em uma das componentes de V/Σ .*

De fato, suponha que esta afirmação é falsa. Daí, temos que as superfícies $\tilde{\Sigma}$ e Σ se intersectam. Segue da Afirmação 5.6 que Σ e $\tilde{\Sigma}$ se intersectam transversalmente. Assim, temos que esta interseção consiste numa quantidade finita de círculos. Vamos refletir a porção de $\tilde{\Sigma}$ em $(-l, 0] \times \Sigma$ ao longo de Σ para $[0, l) \times \Sigma$. Considere a superfície $\bar{\Sigma}$ como a superfície em $[0, l) \times \Sigma$ obtida de $\tilde{\Sigma}$ como a parte de $\tilde{\Sigma}$ contida em $[0, l) \times \Sigma$ unida com a parte refletida de $\tilde{\Sigma}$ como na Figura 5.4

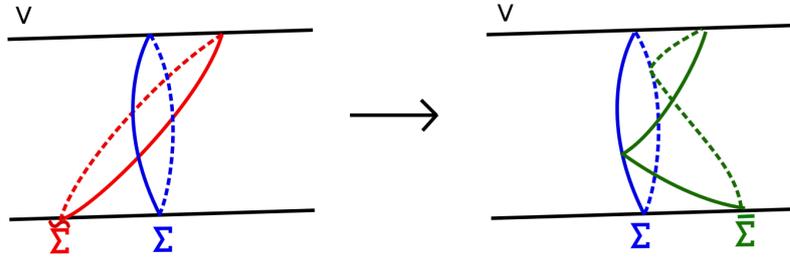


Figura 5.4: Reflexão de $\tilde{\Sigma}$.

Observe que $\bar{\Sigma}$ não é suave ao longo dos círculos de interseção, já que Σ e $\tilde{\Sigma}$ se intersectam transversalmente. Como $\bar{\Sigma}$ não é suave, segue que podemos suavizá-la de tal forma que obtemos uma nova superfície suave isotópica a Σ e com área com respeito a métrica \tilde{g} estritamente menor que $|\Sigma|_{\tilde{g}}$. O que é uma contradição, pois Σ minimiza área em sua classe de isotopia em (V, \tilde{g}) . Portanto, segue a afirmação.

Observe que, se $\tilde{\Sigma}$ estiver contida na porção $(0, l) \times \Sigma$ de V então temos que $|\tilde{\Sigma}|_{\tilde{g}} = |\tilde{\Sigma}|_g$, e se $\tilde{\Sigma}$ estiver contida na porção $(-l, 0) \times \Sigma$ de V então a reflexão de $\tilde{\Sigma}$ ao longo de Σ nos fornece uma superfície $\bar{\Sigma}$ isotópica a Σ contida na porção $(0, l) \times \Sigma$ tal que $|\bar{\Sigma}|_{\tilde{g}} = |\bar{\Sigma}|_g$. Em ambos os casos temos que na variedade original (V, g) existe um toro Σ^+ contido na porção $(0, l) \times \Sigma$ de V que é localmente de menor área. Considerando a métrica \tilde{g} em V como da forma (5.1), mas com as funções componentes \tilde{g}_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ dadas por

$$\tilde{g}_{ij}(t, x) = \begin{cases} g_{ij}(t, x), & \text{se } t \in (-l, 0] \\ g_{ij}(-t, x), & \text{se } t \in [0, l) \end{cases}$$

e fazendo argumentos análogos aos feitos anteriormente, concluímos que existe um toro Σ^- na porção $(-l, 0) \times \Sigma$ de V que é localmente de menor área em (V, g) . Seja W a região em V limitada por Σ^- e Σ^+ como mostra a Figura 5.5

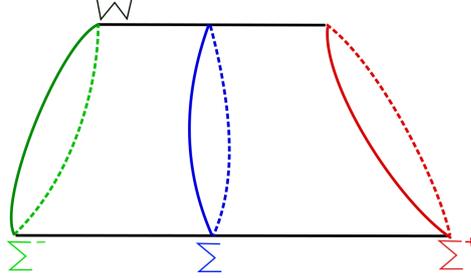


Figura 5.5: Região W .

Observe que W é difeomorfo a $[-1, 1] \times \mathbb{T}^2$. Considere duas cópias de (W, g) . Para efeito de notação, chame $W_1 = (W, g_1)$ e $W_2 = (W, g_2)$, onde as métricas Riemannianas g_1 e g_2 em W coincidem com a métrica g . Defina uma relação de equivalência em $W_1 \cup W_2$ identificando os pontos $(1, x)$ e $(-1, x)$ em W_1 com os pontos $(1, x)$ e $(-1, x)$ em W_2 , respectivamente. Aqui, por abuso de notação, estamos considerando que $\partial W = (\{-1\} \times \Sigma) \cup (\{1\} \times \Sigma)$. Seja \bar{M} o espaço quociente de $W_1 \cup W_2$ por esta relação de equivalência. Defina uma métrica em \bar{M} por

$$\bar{g}(t, x) = \begin{cases} g_1(t, x), & \text{se } (t, x) \in W_1 \\ g_2(t, x), & \text{se } (t, x) \in W_2 \end{cases}$$

Note que

$$g_1(1, x) = g_2(1, x) \text{ e } g_1(-1, x) = g_2(-1, x),$$

para todo $x \in \mathbb{T}^2$. Além disso, pelo Lema 5.1 temos que

$$\frac{\partial^n g_1}{\partial t^n}(1, x) = \frac{\partial^n g_2}{\partial t^n}(1, x) = 0$$

e

$$\frac{\partial^n g_1}{\partial t^n}(-1, x) = \frac{\partial^n g_2}{\partial t^n}(-1, x) = 0$$

para todo inteiro positivo n e todo $x \in \mathbb{T}^2$. Segue que (\bar{M}, \bar{g}) é uma variedade Riemanniana suave com curvatura escalar não-negativa difeomorfa ao toro tridimensional. Desde que \mathbb{Z}^2 é um subgrupo abeliano não-cíclico finitamente gerado de $\pi_1(\bar{M})$, pelo Teorema 5.2 segue que (\bar{M}, \bar{g}) é plana, e portanto (W, g) também é plana.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrozio, L. C.; *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*. J. Geom. Anal. **25** (2015), no. 2, 1001–1017.
- [2] Bray, H.; Brendle, S.; Eichmair, M.; Neves, A. *Area-Minimizing Projective Planes in Three-Manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **63** (2010), 1237-1247.
- [3] Bray, H.; Brendle, S.; Neves, A. *Rigidity of Area-Minimizing Two-Spheres in Three-Manifolds*, Comm. Anal. Geom. **18** (2010), 821-830.
- [4] Brendle, S. *Ricci Flow and the Sphere Theorem*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 111, American Mathematical Society (2010).
- [5] Cai, M.; Galloway, G.J. *Least area tori and 3-manifolds of nonnegative scalar curvature.*, Math. Z. **223** (1996), 387-395.
- [6] Cai, M.; Galloway, G. *Rigidity of area-minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 565-573.
- [7] Carmo, M. P. *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 4 ed. Rio de Janeiro, 2010.
- [8] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 5 ed. Rio de Janeiro, 2011.
- [9] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L. *Hamilton's Ricci flow*. Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press, New York, 2006. xxxvi+608 pp. ISBN: 978-0-8218-4231-7.
- [10] Cheeger, J.; Ebin, D. G. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Revised reprint of the 1975 original. AMS Chelsea, Providence R.I., 2008.
- [11] Chow, B.; Knopf, D.; *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [12] Colding, T. H.; Minicozzi, W. P. *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011.
- [13] Escobar, J. F. *Conformal deformation of a Riemannian metric to a constant scalar curvature metric with constant mean curvature on the boundary*. Indiana University Mathematics Journal, no. 4 (1996)

- [14] Escobar, J.F. *The Yamabe problem on manifolds with boundary*. J. Differ. Geom. **35**(1), 21–84 (1992)
- [15] Fischer-Colbrie, D.; Schoen, R.; *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 2, 199-211.
- [16] Godinho, L.; Natário, J.; *An Introduction to Riemannian Geometry*. Springer. (2014).
- [17] Hass, J.; Scott, P. *The existence of least area surfaces in 3-manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 87-114.
- [18] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [19] Hatcher, A. *Vector bundles and K-theory*. <http://www.math.cornell.edu/hatcher/> (2003).
- [20] Huisken, J.; Polden, A. *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro 1996), 45-84, Lecture Notes in Mathematics vol. 1713, Springer, Berlin, 1999.
- [21] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer Verlag.(2000).
- [22] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer Verlag.(1997).
- [23] John, W.; Woll, Jr.; *One-sided surfaces and orientability*, The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 2, **1** (1971), 5-18.
- [24] Loring W. Tu, *An introduction to manifolds*.
- [25] Masood-ul-Alam,A.K.M.; Ph. D. Thesis (1987), Australian National University, Canberra.
- [26] Meeks, W.; Simon, L.; Yau, S.T. ,*Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature*, Ann. of Math. 116, 621–659 (1982)
- [27] Micalef, M.; Moraru, V.; *Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 7, 2865–2872.
- [28] Nunes, I.,*Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds*, J. Geom. Anal. **23** (2013), no. 3, 1290–1302.
- [29] Pu, P.M., *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*. Pacific J. Math. **2**(1952), 55-71.
- [30] Pucci, P; Serrin, J.; *The Maximum Principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 73. Basel, Switzerland: Birkhuser-Verlag, 2007.
- [31] Schoen, R.; Yau, S.T., *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature.*, Ann. Math. **110**(1979),127–142.
- [32] Simons, J.;*Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.
- [33] Urbano, F. *Second variation of one-sided complete minimal surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), no. 2, 479–494.
- [34] Acessado em https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/One-sided_and_two-sided_surfaces.