UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

JONAS FERREIRA DE SOUZA

CÁLCULO DIFERENCIAL:
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

ITABAIANA

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

JONAS FERREIRA DE SOUZA

CÁLCULO DIFERENCIAL:
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Marta Elid Amorim Mateus

ITABAIANA

2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S729c

Souza, Jonas Ferreira de.
Cálculo diferencial: uma proposta de abordagem no ensino médio / Jonas Ferreira de Souza; orientação: Marta Elid Amorim Mateus. – Itabaiana, 2019.
114 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Cálculo Diferencial. 3. Física. I. Mateus, Marta Elid Amorim. II. Título.

CDU 517.2

FOLHA DE APROVAÇÃO DA BANCA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Cálculo Diferencial: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio

por

Jonas Ferreira de Souza

Aprovada pela banca examinadora:

Marta Elid Amorim Mateus
Profa. Marta Elid Amorim Mateus - UFS
Orientadora

Profa. Angélica da Fontoura Garcia Silva – UNIAN/SP
Primeira Examinadora

Samuel Brito Silva
Prof. Samuel Brito Silva - UFS
Segundo Examinador

Charles Braga Amorim
Prof. Charles Braga Amorim - UFS
Terceiro Examinador

São Cristóvão, 02 de agosto de 2019.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel (00 55 79) 2104 6887

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, José Ferreira e Antônia Maria.

A Maristela e Claudinho, esposa e filho.

Aos amigos e familiares.

AGRADECIMENTOS

Certamente, tenho muito a agradecer, pelas palavras de apoio, pela compreensão diante de minha ausência, pelas ações concretas que muitos tiveram com o intuito de que essa missão fosse cumprida.

A Deus, sempre em meus pensamentos, dando-me forças, coragem, e a certeza de que venceríamos todas as barreiras, que foram muitas.

À Maristela, minha esposa, pelas palavras de estímulo, por acreditar, sempre, que seria possível essa conquista, e por cuidar de nosso filho, durante esse período de formação.

Ao meu filho, Cláudio Henrique, por existir, por ser minha maior alegria, por compreender o esforço do seu pai como sendo necessário para que tenhamos uma vida melhor. Essa conquista nos trará bons frutos, e que isso sirva de exemplo para o Claudinho, meu filho.

Aos amigos e familiares que desejaram o meu sucesso.

Aos bravos colegas da turma de mestrado, que foram companheiros em todos os momentos de nossa formação.

Ao amigo Valdemir José, companheiro de sala, parceiro nas viagens a Sergipe, incentivador e, hoje, por sua hombridade e sua presteza, um grande irmão.

Ao amigo Gonçalves, que conduzia o automóvel, na maioria das viagens da Bahia a Sergipe, aliviando o cansaço, meu e de Valdemir. Agradeço, grande irmão.

A um grande incentivador, sempre aberto a debates, apreciador da bela Matemática, meu grande amigo professor Dario Arcoverde. Obrigado pelos incentivos.

Aos membros da Secretaria do PROMAT, pela presteza em todos os momentos.

Ao professor Dr. Bruno Luís de Andrade Santos, coordenador do PROFMAT no polo de Aracaju, pelo apoio dado em todos os momentos que precisei ao iniciar o mestrado.

Ao professor Dr. Eder Mateus de Souza, por contribuir com a minha continuidade no mestrado, acolhendo-me como discente no polo de Itabaiana/SE, onde é coordenador do PROFMAT.

A todos os professores do PROFMAT, sem exceção, mas, em especial, àqueles do polo de Itabaiana/SE, pela dedicação, competência e apreço prestados junto ao programa.

Aos membros da Banca avaliadora deste trabalho, pelas valiosas observações que conduziram à sua aprovação.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por proporcionar o programa PROFMAT, em rede nacional, em parceria com grandes instituições de ensino.

À Universidade Federal de Sergipe (UFS), por acolher o PROFMAT em seus programas de mestrado, fornecendo excelentes instalações e, atendendo a uma premissa do programa, garantindo profissionais de altíssimo nível na condução do mesmo.

Em especial, à minha orientadora, Dra. Marta Elid Amorim Mateus, por se fazer presente na condução dessa dissertação. Foram muitas as suas contribuições. Certamente, pela juventude, conhecimento e presteza, estará em notas de agradecimento em muitas outras dissertações.

RESUMO

Este trabalho é destinado a professores do Ensino Médio, e tem como propósito apresentar metodologias de abordagem do Cálculo Diferencial com uma variável nas três séries do Ensino Médio, levando em consideração que, com esse conhecimento, os estudantes terão um ganho na capacidade de interpretação do comportamento das funções, algébricas e transcendentes, que são tópicos tratados na Matemática e outras disciplinas, em boa parte deste ciclo de estudo, além de auxiliar os estudantes em uma preparação sólida visando o enfrentamento das disciplinas iniciais de alguns cursos universitários, principalmente de exatas, que vêm apresentando resultados negativos para as notas dos discentes em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral I e Física I. Com o objetivo de aproximar as ideias de Cálculo a situações reais e relacionar a Matemática com outras disciplinas, neste trabalho, defendemos que, no primeiro ano do Ensino Médio, seja feita uma abordagem, inicialmente, do estudo da derivada voltado para a disciplina Física, já na definição de taxa de variação instantânea, em conteúdos de Cinemática Escalar, com o auxílio dos professores dessa disciplina, e que essas ideias iniciais sejam aproveitadas para o estudo da Função Polinomial do 2º grau, na disciplina Matemática, tratando da equação da reta tangente, do comportamento gráfico e dos problemas de máximos e mínimos, relacionados a essa função. No segundo ano, a Física continuará como participante ativa no estudo de taxa de variação com o auxílio da derivada, e a Matemática terá no binômio de Newton a oportunidade da abordagem de algumas regras de derivação. No terceiro ano, a Física manterá seu papel, como nas séries anteriores, enquanto a Matemática apresentará aos estudantes que querem se dedicar mais à disciplina um conteúdo mais formal, com o auxílio de noções de limites e continuidade, abordando desde a definição de derivada até o estudo das regras de derivação, com as devidas justificativas, além de um tratamento mais amplo no esboço de gráficos e problemas de otimização, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de apoio.

Palavras-chave: Ensino Médio. Matemática. Cálculo Diferencial. Física. Gráficos. GeoGebra.

ABSTRACT

This work is aimed for high school teachers, and is intended to present methodologies to approach Differential Calculus with one variable within the three grades of high school, taking into account that, with this knowledge, students will be able to interpret the behavior of algebraic and transcendent functions, which are Mathematical topics and other subjects in most part of this study cycle, as well as assisting students in a solid preparation aiming at facing the initial subjects of some university courses, mainly in the area of exact sciences, which have been presenting negative results on the student grades in subjects such as Differential and Integral Calculus I and Physics I. In order to bring Calculus ideas closer to real situations and relate Mathematics with other disciplines, in this paper, we argue that in the first year of high school, an approach should be made initially to the derivative study focused on the Physical discipline, in the definition of the rate of change instantaneous, in content of Scalar Kinematics, with this subject teachers' help, and that these initial ideas are harnessed to the study of the Polynomial Function of the 2nd degree, in the Mathematical discipline, equation of the tangent line, the graphical behavior and the problems of maximum and minimum values related to this function. In the second year, Physics will continue as an active participant in the rate of change study with the help of derivative, and mathematics will have in Newton's binomial the opportunity of approach some derivation rules. In the third year, physics will maintain its role, as in previous series, while Mathematics will present to the students who want to devote more discipline to more formal content, with the aid of notions of limits and continuity, addressing since the definition derivative until the study of the rules of derivation, with the appropriate justifications, in addition to a broader treatment of graphing and problem solving optimization, using GeoGebra software as a support tool.

KEYWORDS: High School. Mathematics. Differential calculation. Physics. Graphics. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

É notável, em todas as séries do Ensino Médio, na própria Matemática e em outras disciplinas, como Física, Química e Biologia, os conceitos de taxa de variação média e instantânea, na maioria dos livros, sem que haja uma introdução à matéria Cálculo Diferencial, por este ser um tópico abordado, normalmente, em períodos iniciais nas escolas de ensino superior, e para cursos bastante específicos. Essa omissão, porém, acaba limitando nossos estudantes ao conhecimento de problemas hipotéticos, que possam ser resolvidos, apenas, com recursos matemáticos abordados sem o auxílio do Cálculo.

Sem as noções de Cálculo, o esboço do gráfico, a busca por valores máximos e mínimos e a taxa de variação de uma função serão tópicos limitados a fórmulas prontas, voltadas principalmente para as funções polinomiais de 1º e 2º graus. No caso de funções polinomiais de grau maior do que 2, na abordagem, por exemplo, de problemas de otimização, são elaboradas soluções bem específicas, não padronizadas, e que, geralmente, são mais longas do que deveriam, em comparação com o simples processo de derivar a função, polinomial ou transcendente, e igualar o resultado a zero.

Certamente, essa espera para se ter um primeiro contato com o Cálculo contribui para que haja resultados negativos nos primeiros semestres dos estudantes universitários ingressos em cursos, principalmente, de ciências exatas, onde as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral são exploradas desde os capítulos iniciais em disciplinas como Física e Química, por exemplo, além da própria disciplina Cálculo.

A introdução de Derivada no Ensino Médio, portanto, seria um elemento chave para um melhor entendimento de alguns tópicos da Matemática e outras ciências, além de, normalmente, trazer soluções mais simples para problemas de taxas de variação e otimização.

Dessa forma, reforçamos as palavras de Ávila (1991), que analisa a ausência do Cálculo no Ensino Médio como um fato grave, pois deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual, onde a interdisciplinaridade é fundamental.

O objetivo deste trabalho, diante do exposto, é apresentar uma proposta para a abordagem do Cálculo Diferencial, aplicado a funções com uma variável, nas três séries do Ensino Médio.

Com foco no estudo da derivada e suas aplicações, este trabalho está organizado em quatro capítulos e uma seção para as considerações finais.

No primeiro capítulo, apresentamos um breve histórico sobre a abordagem do Cálculo no Ensino Médio, a forma de apresentação e os conteúdos que eram tratados, além das principais mudanças curriculares ocorridas até os dias atuais e as tendências futuras, com a formalização da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No segundo capítulo, tomado como motivação, apresentamos o Cálculo como elemento facilitador na resolução de problemas específicos de Matemática, a partir da comparação entre as resoluções realizadas sem e com os tópicos de Cálculo Diferencial, e expomos situações em que outras ciências, especialmente Física e Química, dariam um tratamento mais completo para o Ensino Médio, caso os conceitos iniciais do Cálculo fizessem parte do conhecimento dos estudantes.

No terceiro capítulo, apresentamos uma proposta para a abordagem do Cálculo nos dois primeiros anos do Ensino Médio, mostrando que deve haver uma conexão muito próxima entre a Matemática e Física, em virtude das aplicações do Cálculo em tópicos dessa última.

O quarto capítulo é dedicado à abordagem do Cálculo no terceiro ano do Ensino Médio. Os conteúdos vistos nos dois primeiros anos serão revistos num contexto mais amplo, onde conceitos serão formalizados, alguns resultados serão justificados de forma mais consistente, e serão apresentadas regras de derivação para funções algébricas e transcendentes, com algumas aplicações.

Concluímos o trabalho com as considerações finais, destacando a importância da proposta e as expectativas em relação à sua aplicação.

CAPÍTULO 1

ENSINO DE CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PASSADO E FUTURO

Nesse capítulo, constam um breve histórico quanto à abordagem do Cálculo na educação básica, com observações críticas quanto à forma e aos conteúdos ensinados, e alguns tópicos que fazem parte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com seus objetivos e promessas, e como esse documento vai contribuir, a partir de sua efetiva introdução, para a abordagem do Cálculo Diferencial no Ensino Médio.

1.1 Breve histórico do ensino do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo começou a fazer parte dos programas secundários das escolas brasileiras no final do século XIX, mais precisamente em 1890, com a Reforma Benjamin Constant (BRASIL, Decreto nº 981,1890). Houve várias alterações, a partir de então, na grade curricular do ensino da Matemática, com retiradas e retornos dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, voltados para cursos secundários.

Em 1931 surgiu a reforma implementada por Francisco Campos (BRASIL, Decreto nº 19.890, 1931; Decreto nº 21.241, 1932). Os decretos dessa reforma impunham que o Ensino Secundário, oficialmente reconhecido, seria ministrado no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, e em estabelecimentos sob regime de inspeção oficial. Nessa reforma, o Cálculo, ausente dos programas desde 1901, retornou ao Ensino Secundário.

Dentre os livros de Matemática para o Ensino Secundário, produzidos seguindo a reforma de 1931, destaquemos os de autoria de Ary Quintella, um dos maiores escritores de livros didáticos de matemática, publicados entre os anos 40 e 60. Os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral eram abordados na 3ª série do Ensino Secundário, contemplando o estudo de funções, limites e continuidade, derivadas, esboço de gráficos, fórmula de Taylor para polinômios e integrais definidas, sendo as demonstrações dos principais teoremas desses tópicos apresentadas, na maioria das vezes, com rigor na linguagem matemática.

Segundo Valente (2008), a carreira profissional de Ary Quintella lhe permitiu fazer parte do quadro da Companhia Editora Nacional e os livros didáticos de matemática de sua autoria foram transformados em best-sellers educacionais.

Sobre os livros de autoria de Ary Quintella, na Figura 1, temos o índice que apresenta os conteúdos de Cálculo abordados na terceira série do Ensino Secundário.

Figura 1 - Índice parcial de livro da 3ª série do Ensino Secundário, nos anos 60.

ÍNDICE GERAL

Fonte: QUINTELLA, ARY, 1965 (p. 6 e 7).

Neste índice, que contempla tópicos do programa destinado à 3ª série do Ensino Secundário, destaca-se, como mostra a Figura 2, o estudo de funções e gráficos (sem as ferramentas do Cálculo).

Figura 2 – Conteúdos de funções na 3ª série, nos anos 60.

1) FUNÇÕES. GRÁFICOS

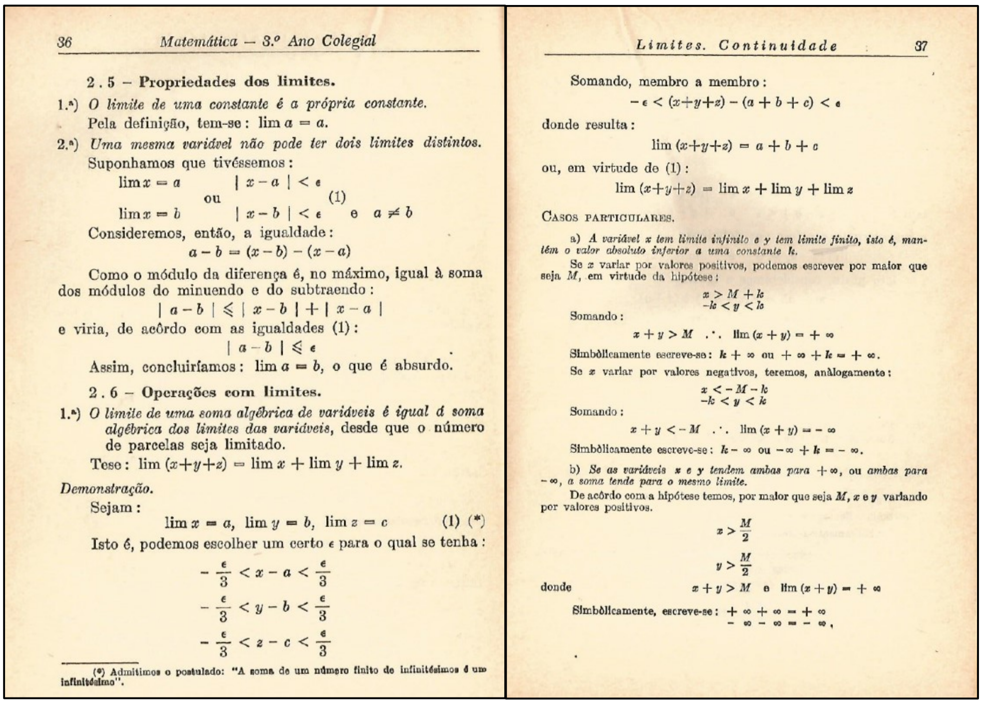
1.1 – Intervalo.......... 13
1.2 – Variável. Constante.... 14
1.3 – Variável progressiva.... 15
1.4 – Representação gráfica duma variável real contínua.......... 15
1.5 – Função.......... 16
1.6 – Função real de variável real.......... 17
1.7 – Notação funcional...... 17
1.8 – Função definida em um ponto.......... 18
1.9 – Função definida em um intervalo.......... 18
1.10 – Classificação das funções 19
1.11 – Funções inversas....... 21
1.12 – Funções periódicas..... 22
1.13 – Funções pares e ímpares 22
1.14 – Função de função...... 22
1.15 – Representação gráfica das funções.......... 22
1.16 – Gráfico das funções usuais 25

Fonte: QUINTELLA, ARY, 1965 (p. 5).

Porém, dos três livros de Ary Quintella para o Ensino Secundário, apenas o da 3ª série faz um estudo das funções, algébricas e transcendentes, com objetivo claro de dar subsídio para se chegar a limites e continuidade e já tratar a abordagem do gráfico de uma função qualquer com o conhecimento de derivada.

Explorando as páginas deste livro, na abordagem do Cálculo, notamos algumas formalidades em tópicos que necessitam um amadurecimento maior por parte dos estudantes, como as demonstrações de propriedades de limites, utilizando a definição formal de limite, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Demonstrações de propriedades de limites na 3ª série, nos anos 60.



36 *Matemática — 3.º Ano Colegial*

2.5 – Propriedades dos limites.

1.ª) *O limite de uma constante é a própria constante.*

Pela definição, tem-se: $\lim a = a$.

2.ª) *Uma mesma variável não pode ter dois limites distintos.*

Suponhamos que tivéssemos:

$$\lim x = a \qquad |x - a| < \epsilon$$
ou (1)
$$\lim x = b \qquad |x - b| < \epsilon \quad \text{e} \quad a \neq b$$

Consideremos, então, a igualdade:

$$a - b = (x - b) - (x - a)$$

Como o módulo da diferença é, no máximo, igual à soma dos módulos do minuendo e do subtraendo:

$$|a - b| \leqslant |x - b| + |x - a|$$

e viria, de acôrdo com as igualdades (1):

$$|a - b| \leqslant \epsilon$$

Assim, concluiríamos: $\lim a = b$, o que é absurdo.

2.6 – Operações com limites.

1.ª) *O limite de uma soma algébrica de variáveis é igual à soma algébrica dos limites das variáveis*, desde que o número de parcelas seja limitado.

Tese: $\lim (x+y+z) = \lim x + \lim y + \lim z$.

Demonstração.

Sejam:

$$\lim x = a, \ \lim y = b, \ \lim z = c \qquad (1)\ (*)$$

Isto é, podemos escolher um certo ϵ para o qual se tenha:

$$-\frac{\epsilon}{3} < x - a < \frac{\epsilon}{3}$$
$$-\frac{\epsilon}{3} < y - b < \frac{\epsilon}{3}$$
$$-\frac{\epsilon}{3} < z - c < \frac{\epsilon}{3}$$

(*) Admitimos o postulado: "A soma de um número finito de infinitésimos é um infinitésimo".

Limites. Continuidade 37

Somando, membro a membro:

$$-\epsilon < (x+y+z) - (a + b + c) < \epsilon$$

donde resulta:

$$\lim (x+y+z) = a + b + c$$

ou, em virtude de (1):

$$\lim (x+y+z) = \lim x + \lim y + \lim z$$

CASOS PARTICULARES.

a) *A variável x tem limite infinito e y tem limite finito, isto é, mantém o valor absoluto inferior a uma constante k.*

Se x variar por valores positivos, podemos escrever por maior que seja M, em virtude da hipótese:

$$x > M + k$$
$$-k < y < k$$

Somando:

$$x + y > M \quad \therefore \quad \lim (x + y) = +\infty$$

Simbòlicamente escreve-se: $k + \infty$ ou $+\infty + k = +\infty$.

Se x variar por valores negativos, teremos, anàlogamente:

$$x < -M - k$$
$$-k < y < k$$

Somando:

$$x + y < -M \quad \therefore \quad \lim (x + y) = -\infty$$

Simbòlicamente escreve-se: $k - \infty$ ou $-\infty + k = -\infty$.

b) *Se as variáveis x e y tendem ambas para $+\infty$, ou ambas para $-\infty$, a soma tende para o mesmo limite.*

De acôrdo com a hipótese temos, por maior que seja M, x e y variando por valores positivos.

$$x > \frac{M}{2}$$
$$y > \frac{M}{2}$$

donde $\quad x + y > M$ e $\lim (x + y) = +\infty$

Simbòlicamente, escreve-se: $+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$.

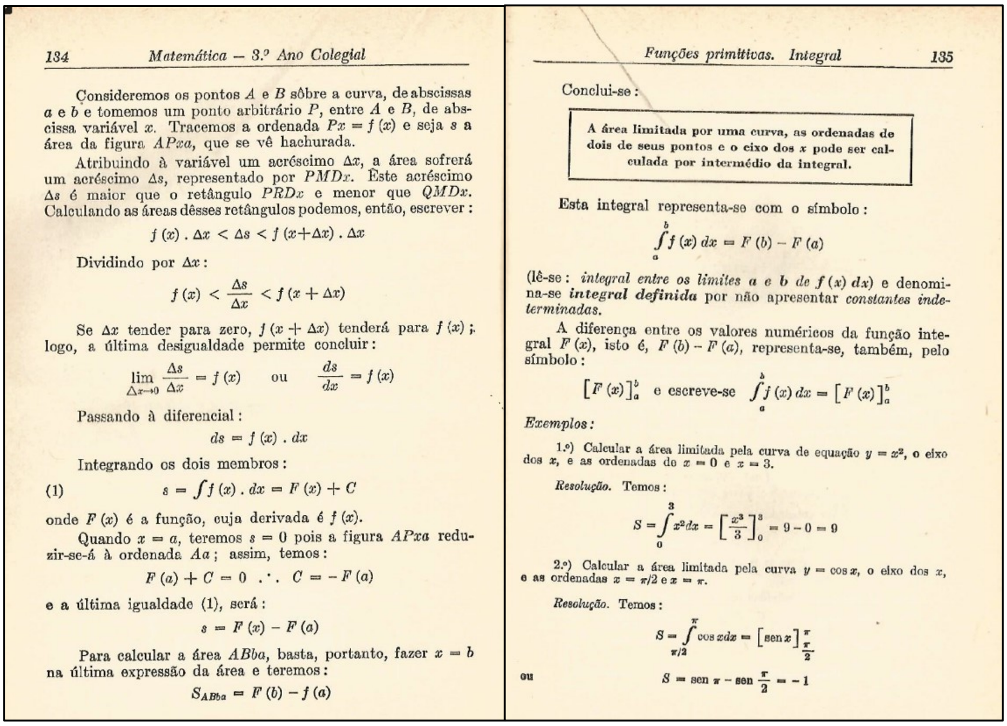
Fonte: QUINTELLA, ARY, 1965 (p. 36 e 37).

As demonstrações de praticamente todos os teoremas apresentados é uma das características dos livros de Ensino Secundário de autoria de Ary Quintella, e com os tópicos de Cálculo não foi diferente. Certamente, para resultados mais elementares, que não incluem o Cálculo, as demonstrações são absorvidas pelos estudantes de maneira mais consistente, pois, normalmente, há uso de conhecimentos já consolidados, necessários para o entendimento das mesmas. Por exemplo, há pouco a acrescentar, teoricamente, quando se pretende demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Os resultados sobre limites, derivadas e integrais, porém, dependem de novos conceitos, como a definição de limite de uma função, diferencial de uma função, infinitésimo, etc. Isso demanda tempo para a devida compreensão.

Ary Quintella, como mostram as imagens do seu livro para o terceiro ano, no nosso entendimento, adotava para o Ensino Secundário uma antecipação dos conteúdos iniciais de cursos universitários, pelos tópicos abordados e o rigor em sua apresentação.

Em outro exemplo, a Figura 4 apresenta uma demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, utilizando a ideia de diferencial de uma função, tópico pouco explorado nas páginas anteriores do livro do referido autor. Ou seja, a abordagem dos tópicos de Cálculo no Ensino Médio, nessa época, acumulou diversos temas em um curto espaço de tempo, mantendo uma proximidade com a linguagem dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados em escolas de ensino superior, reduzindo, porém, a exploração de diversos pontos que normalmente são tratados de forma mais cuidadosa nesse nível de ensino, para que haja a devida compreensão.

Figura 4 – Demonstrações sobre integral definida na 3ª série, nos anos 60.



134 *Matemática — 3.º Ano Colegial*

Consideremos os pontos A e B sôbre a curva, de abscissas a e b e tomemos um ponto arbitrário P, entre A e B, de abscissa variável x. Tracemos a ordenada $Px = f(x)$ e seja s a área da figura $APxa$, que se vê hachurada.

Atribuindo à variável um acréscimo Δx, a área sofrerá um acréscimo Δs, representado por $PMDx$. Êste acréscimo Δs é maior que o retângulo $PRDx$ e menor que $QMDx$. Calculando as áreas dêsses retângulos podemos, então, escrever:

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta s < f(x+\Delta x) \cdot \Delta x$$

Dividindo por Δx:

$$f(x) < \frac{\Delta s}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

Se Δx tender para zero, $f(x + \Delta x)$ tenderá para $f(x)$; logo, a última desigualdade permite concluir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = f(x)$$

Passando à diferencial:

$$ds = f(x) \cdot dx$$

Integrando os dois membros:

(1) $$s = \int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

onde $F(x)$ é a função, cuja derivada é $f(x)$.

Quando $x = a$, teremos $s = 0$ pois a figura $APxa$ reduzir-se-á à ordenada Aa; assim, temos:

$$F(a) + C = 0 \quad \therefore \quad C = -F(a)$$

e a última igualdade (1), será:

$$s = F(x) - F(a)$$

Para calcular a área $ABba$, basta, portanto, fazer $x = b$ na última expressão da área e teremos:

$$S_{ABba} = F(b) - f(a)$$

Funções primitivas. Integral 135

Conclui-se:

A área limitada por uma curva, as ordenadas de dois de seus pontos e o eixo dos x pode ser calculada por intermédio da integral.

Esta integral representa-se com o símbolo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

(lê-se: *integral entre os limites a e b de $f(x)\, dx$*) e denomina-se ***integral definida*** por não apresentar *constantes indeterminadas*.

A diferença entre os valores numéricos da função integral $F(x)$, isto é, $F(b) - F(a)$, representa-se, também, pelo símbolo:

$$\left[F(x)\right]_a^b \quad \text{e escreve-se} \quad \int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

Exemplos:

1.º) Calcular a área limitada pela curva de equação $y = x^2$, o eixo dos x, e as ordenadas de $x = 0$ e $x = 3$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9 - 0 = 9$$

2.º) Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, o eixo dos x, e as ordenadas $x = \pi/2$ e $x = \pi$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

ou $$S = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1$$

Fonte: QUINTELLA, ARY, 1965 (p. 134 e 135).

Sem fazer uma análise dos resultados obtidos naquela época, e tomando como referência os livros do professor Ary Quintella, fica clara, no tratamento do Cálculo, a concentração de muitos tópicos em uma mesma série, que deveriam ser, no nosso entendimento, fracionados nos três anos destinados ao Ensino Secundário, por conta do amadurecimento dos estudantes. Além disso, compreendemos que no estudo do Cálculo existiu uma antecipação de assuntos destinados essencialmente ao Ensino Superior, inclusive na abordagem, haja vista, ao invés de noções, foram utilizados alguns conceitos e definições bastante específicos, merecedores de uma leitura mais ampla para que houvesse a devida compreensão.

Até a década de 50, praticamente uma tendência mundial, o ensino de Matemática seguia uma programação tradicional, onde a ênfase era dada, entre outros tópicos, aos cálculos complexos, às identidades trigonométricas, às demonstrações de teoremas geométricos, aos problemas de longos enunciados e longas resoluções (MOTEJUNAS, 1995, p. 161).

Houve, no entanto, movimentos no sentido de modernizar o ensino da Matemática, dando foco a conteúdos específicos da disciplina. A exemplo disso, no ano de 1934, cinco jovens professores franceses, André Weil, Claude Chevalley, Henri Cartan, Jean Delsarte e Jean Dieudonné, criaram o Grupo Bourbaki (nome fictício escolhido pelo grupo), visando, a princípio, melhorar a qualidade dos livros de Análise disponíveis à época, que, para eles, não apresentavam os resultados matemáticos de maneira satisfatória. André Weil, no entanto, colocou para o Grupo a necessidade do então chamado Tratado de Análise ser útil à Matemática, como um todo, e, com isso, a tarefa foi ampliada grandiosamente, pois foram incorporados temas de Álgebra, da Teoria dos Conjuntos e da Topologia, antes dos já previstos conteúdos de Análise (ESQUINCALHA, 2012).

Bourbaki não tem o mérito de ter provado um importante teorema, tampouco foi esta sua intenção, que residia na divulgação de uma síntese madura e articulada, uma reorganização da Matemática por meio da utilização de estruturas, da Teoria dos Conjuntos, e do método axiomático, uniformizando notações e terminologias, tornando-as comuns a diversas áreas da Matemática (ESQUINCALHA, 2012).

Apesar de não se destinar, formalmente, ao Ensino Secundário (Pires, 2006), o efeito positivo das ideias do Grupo Bourbaki em diversos países, nas décadas de 1960 e 1970, fez surgir no Brasil um movimento que marcou a história da Educação Matemática e provocou mudanças significativas nas práticas escolares. Trata-se do Movimento da Matemática Moderna, que, já deflagrado em âmbito internacional, atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática.

Os livros didáticos de Matemática dos anos 60, como os de autoria de Ary Quintella, foram inspirados, de certo modo, por esse movimento.

Segundo CARVALHO (1988), as ideias que sustentaram o Movimento da Matemática Moderna estavam baseadas na Matemática do século XX, sendo que esta repousa, conforme Bourbaki, sobre as noções de estrutura e de axiomatização, seguindo quatro grandes correntes:

- As extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra abstrata;
- O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da geometria;
- O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica;
- A aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área.

Nesse movimento, o objetivo era que o ensino da Matemática tivesse ênfase nas estruturas matemáticas, valorizando o estudo dos conjuntos e ampliando o rigor no uso da simbologia. Porém, a linguagem dos conjuntos foi ensinada com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de grande quantidade de terminologias comprometia o ensino do Cálculo, da Geometria e das Medidas (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004). Com esse contexto, o ensino do Cálculo voltou a ser retirado dos currículos (BRASIL, Lei nº 4.024, 1961).

Mesmo com a retirada do Cálculo dos programas oficiais, muitos autores, principalmente nos anos 70 e 80, continuaram incluindo em seus livros capítulos destinados ao estudo de limites e derivadas, totalmente confinados na terceira série do Ensino Médio, e muitos deles, ainda, com uso de simbologias, defendido pela Matemática Moderna, que não mostrou ser cabível, devido ao alto grau de abstração dos assuntos a serem abordados e da pequena carga horária disponível para tal.

Entendemos que demanda tempo para que os estudantes se familiarizem com novos conceitos tão específicos e, inicialmente, abstratos, como temos no Cálculo. O entrosamento dos estudantes com a matéria, da forma que era apresentada, necessitaria uma experiência maior dos mesmos na linguagem rigorosa que o assunto exige.

É fato, no entanto, que deixar de lado, por completo, o estudo do Cálculo no Ensino Médio, contribui para os resultados negativos relativos às notas de estudantes universitários matriculados na disciplina Cálculo I, que normalmente aborda o Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável. Várias estatísticas mostram um grande percentual de reprovações de estudantes nessa disciplina, mesmo para aqueles de cursos na área de exatas.

Sem dúvida, o que os professores ensinam no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, deveria ter uma conexão com o que os estudantes vão encontrar no Ensino Superior. A esse respeito, Barbosa (1994) diz: “certamente, a falta de elo, de um relacionamento maior entre os níveis de ensino, principalmente entre o nível secundário e o universitário, tem trazido grandes dificuldades na relação ensino-aprendizagem dos alunos que fazem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I”.

Hoje, pouquíssimos autores abordam em seus livros os conteúdos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Poucos colégios, também, abordam o Cálculo no Ensino Médio. Sua apresentação é voltada principalmente para estudantes que buscam preparação para os poucos vestibulares que cobram o Cálculo em seus programas.

1.2 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o ensino do Cálculo

A BNCC promove a ideia da fixação de conteúdos mínimos para o Ensino Básico. Dessa forma, estaria sendo assegurada a formação básica comum a ser complementada, em cada estabelecimento escolar, com uma parte diversificada (BRASIL, 2018). Uma das propostas para o currículo de Matemática prevê a introdução do cálculo da taxa de variação de funções no Ensino Médio como tópico suplementar.

Nessa subseção apresentamos alguns elementos da BNCC que julgamos se aproximarem do nosso tema de estudo.

1.2.1 A BNCC e suas competências

Elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento, a BNCC é um documento completo e contemporâneo, que corresponde às demandas do estudante desta época, preparando-o para o futuro, tendo sido concluída após amplos debates com a sociedade e os educadores do Brasil, o texto referente ao Ensino Médio possibilitará dar sequência ao trabalho de adequação dos currículos regionais e das propostas pedagógicas das escolas públicas e particulares brasileiras.

Trata-se de um instrumento que servirá de referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares. A BNCC integra a política nacional da Educação Básica e irá contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de materiais educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento das atividades.

Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018).

A BNCC (BRASIL, 2018) traz dez competências gerais para nortear as áreas de conhecimento e seus componentes curriculares.

São elas:

1. Conhecimento
2. Pensamento científico, crítico e criativo
3. Repertório cultural
4. Comunicação

5. Cultura digital
6. Trabalho e projeto de vida
7. Argumentação
8. Autoconhecimento e autocuidado
9. Empatia e cooperação
10. Responsabilidade e cidadania

Dentre as dez Competências Gerais da Educação Básica, podemos destacar a de número 2, apresentada a seguir, que contribui fortemente ao incentivo da abordagem de alguns tópicos relevantes para formação dos estudantes do Ensino Médio, como é o Cálculo Diferencial:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 5).

Certamente, informações que deem acesso a conhecimentos que agucem o senso crítico, buscando tratar situações reais, e que criem padrões para análise de problemas gerais e específicos devem ser amplamente colocadas em pauta quando da criação do currículo escolar em quaisquer disciplinas.

1.2.2 O compromisso com a Educação Integral

Segundo a BNCC, a educação integral tem como propósito a formação e o desenvolvimento global dos estudantes, compreendendo “a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva” (BRASIL, 2018, p. 14).

A Educação Integral enquanto concepção educacional se sustenta por quatro princípios: equidade, inclusão, contemporaneidade e sustentabilidade (WEFFORT, ANDRADE, COSTA, 2019, p. 17 e 18), ou seja:

- Promove a **equidade** ao reconhecer o direito de todos e todas de aprender e acessar oportunidades educativas diferenciadas e diversificadas a partir da interação com múltiplas linguagens, recursos, espaços, saberes e agentes, condição fundamental para o enfrentamento das desigualdades educacionais;

- É **inclusiva** porque reconhece a singularidade dos sujeitos, suas múltiplas identidades e se sustenta na construção da pertinência do projeto educativo para todos e todas;

- É uma proposta **contemporânea** porque, alinhada às demandas do século XXI, tem como foco a formação de sujeitos críticos, autônomos e responsáveis consigo mesmos e com o mundo;

- É uma proposta alinhada com a noção de **sustentabilidade** porque se compromete com processos educativos contextualizados e com a interação permanente entre o que se aprende e o que se pratica;

O que aprender, para que aprender, como ensinar, como promover redes de aprendizagem colaborativa e como avaliar o aprendizado são os focos dos atuais processos educativos.

No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações, requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BRASIL, 2018).

Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem

– e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades. Além disso, a escola, como espaço de aprendizagem e de democracia inclusiva, deve se fortalecer na prática coercitiva de não discriminação, não preconceito e respeito às diferenças e diversidades (BRASIL, 2018).

Independentemente da duração da jornada escolar, o conceito de educação integral com o qual a BNCC está comprometida se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea. Isso supõe considerar as diferentes infâncias e juventudes, as diversas culturas juvenis e seu potencial de criar novas formas de existir (BRASIL, 2018).

Assim, a BNCC propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida (BRASIL, 2018).

Desse modo, “promover aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes” nos leva a uma flexibilização do currículo escolar, de fundamental importância para que, além de um currículo mínimo, possamos promover uma programação seletiva, específica para o interesse dos alunos. É aí que teremos a oportunidade de apresentar o Cálculo Diferencial, com uma programação mínima, cabível à formação de todos, e dar um tratamento mais amplo, para quem assim escolher. Não há outro conteúdo da Matemática tão presente no início da formação de estudantes universitários, que dela dependam, quanto o Cálculo Diferencial e Integral.

Vale salientar que a BNCC, apesar das alterações, não propõe uma ruptura com a visão sobre a disciplina adotada desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), texto que durante anos serviu de referência para as escolas brasileiras. Ao delimitar as competências específicas da disciplina, que indicam como as competências gerais da Base devem ser expressas naquele componente, a Matemática é conceituada como “ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos” e, ainda, “uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções". A Base foca no que o aluno precisa desenvolver, para que o conhecimento matemático seja uma ferramenta para ler, compreender e transformar a realidade (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

Perceba-se que verbos selecionados para descrever objetivos e habilidades já dão mostras do que mudou. Nos PCN, era comum encontrar palavras como "reconhecer", "identificar" e "utilizar" (para o trabalho com ferramentas e procedimentos de cálculo). Na Base, elas deram lugar a ações como "interpretar", "classificar", "comparar" e "resolver". O novo texto deixa mais claro o propósito de levar o aluno a pensar a partir das informações recebidas, de analisá-las e de responder com uma postura ativa (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

1.2.3 A Matemática e suas competências específicas para o Ensino Médio

No Ensino Fundamental, muito além dos cálculos, da aplicação de fórmulas e da leitura quantitativa da realidade que nos cerca, a BNCC propõe um novo lugar para a Matemática. O foco é o **letramento matemático** dos alunos.

Letramento matemático significa desenvolver habilidades de raciocínio, representação, comunicação e argumentação, para que o aluno possa assumir uma postura ativa nos mais diferentes contextos, seja posicionando-se sobre uma dada questão, seja buscando meios de investigar soluções para ela. A formação no Ensino Fundamental também prevê a utilização de conceitos e recursos da Matemática para formular e resolver problemas, dentro e fora da escola. Esse processo de letramento será aplicado de maneira mais consistente no Ensino Médio, onde situações do cotidiano serão associadas de forma mais ampla (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

Os processos matemáticos são vistos, ao mesmo tempo, como objeto e estratégia para a aprendizagem, permitindo o desenvolvimento de competências específicas, que devem ser garantidas aos alunos, segundo a Base.

As competências específicas para o Ensino Médio, conforme o texto da BNCC, são (BRASIL, 2018, p. 531):

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos

das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Embora os objetos de conhecimento tenham sido apresentados em uma lista organizada em unidades temáticas, o ensino não deve ser linear, centrado nos conteúdos que precisam ser estudados, um a um. O ideal é que o professor planeje a sua prática em sequências de aula que dialoguem entre as diversas áreas do conhecimento (outras disciplinas escolares, por exemplo) e entre as unidades temáticas daquele campo. Assim, poderá auxiliar os alunos a estabelecerem relações e a realizarem sínteses e fechamentos para explicar as conexões percebidas (CHICA; BARNABÉ; TENUTA, 2017).

Nesse contexto, seguindo a ideia da interdisciplinaridade, o Cálculo pode ser um tema relevante por ser uma ferramenta utilizada pela Matemática e outras ciências, principalmente a Física, na produção de seus conteúdos. Sem conhecimentos básicos de Cálculo, como a derivada e sua interpretação geométrica, muitos tópicos das ciências estudadas no Ensino Médio ficam limitados a fórmulas prontas, sem uma justificativa matemática.

CAPÍTULO 2

O CÁLCULO DIFERENCIAL COMO FACILITADOR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA E OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Nesse capítulo, apresentamos o Cálculo como ferramenta facilitadora na resolução de alguns problemas da Matemática e outras ciências, além de mostrarmos situações em que, com o conhecimento de derivada, o cálculo da taxa de variação instantânea, bastante explorado, por exemplo, na Física, pode ser ampliado a funções diferentes daquelas que os estudantes estão acostumados a fazer, com fórmulas prontas, quando nos limitamos aos casos em que figuram funções polinomiais de 1º e 2º graus.

2.1 Comparando soluções de um problema: sem e com o Cálculo

Com o intuito de visualizarmos a força do Cálculo Diferencial na resolução de problemas, e acreditando que a boa intuição dos estudantes também será sensibilizada, vejamos a solução de um problema de geometria, por três caminhos, dentre eles a derivação, que poderia ser aplicado a um grupo de alunos que já tenham tido uma experiência com o Cálculo, pelo menos no que será exposto aqui, até a conclusão desse trabalho, fazendo uma breve análise das dificuldades que seriam encontradas em cada uma delas.

O problema, com as devidas soluções, foi abordado na Revista do Professor de Matemática, a de número 53, sendo o artigo de autoria de dois colaboradores da revista, José Paulo Carneiro – UERJ e Eduardo Wagner – FGV.

Problema: Dentre todos os cilindros circulares retos de área total constante, qual é o de maior volume?

Comentário ao problema:

Certamente, um problema comum para quem possui o conhecimento das aplicações do Cálculo Diferencial. Notemos que poderia ser uma pergunta de um bom estudante da primeira série do Ensino Médio, logo após ter estudado a função quadrática e ter resolvido problemas parecidos, só que, agora, a função terá um grau acima do que lhe foi oferecido (uma boa oportunidade de apresentar o Cálculo). Vamos às soluções.

Solução 1:

Sendo x o raio da base e y a altura do cilindro, o que se deseja é encontrar o maior valor de $V = \pi x^2 y$, para x e y positivos, satisfazendo a condição:

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = C.$$

Sem perda de generalidade, podemos colocar $C = 2\pi a^2$, onde $a = \sqrt{C/2\pi}$.

A condição fica na forma: $x^2 + xy = a^2$ ou $y = \frac{a^2}{x} - x$

Substituindo, queremos maximizar $f(x) = \frac{V}{\pi} = x(a^2 - x^2)$, para $0 < x < a$, que é a condição para que $y > 0$.

Como $f(0) = f(a) = 0$ e $f(x) = x(a^2 - x^2) > 0$, para $0 < x < a$, o problema recai em achar o máximo de $f(x)$ no intervalo fechado e limitado $I = [0;\ a]$. É intuitivo que esse máximo existirá, e de fato sua existência está garantida por ser f contínua em I (Teorema do Valor Extremo).

Seja então b um valor de x para o qual f assume seu valor máximo em I, ou seja: $f(b) - f(x) > 0$, para todo $x \in I$.

Essa condição se traduz em:

$$a^2 b - b^3 - (a^2 x - x^3) > 0 \Longrightarrow a^2(b - x) + (x - b)(x^2 + bx + b^2) > 0$$

$$\Longrightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2 - a^2) > 0 \ (*)$$

Como $b < a$, o trinômio $x^2 + bx + b^2 - a^2$ tem discriminante tal que:

$$\Delta = 4a^2 - 3b^2 > 4a^2 - 3a^2 = a^2 > 0.$$

Portanto, o trinômio em questão tem duas raízes reais x_1 e x_2, de sinais contrários, pois $x_1.x_2 = b^2 - a^2 < 0$.

Desse modo, a condição $(*)$ fica: $(x-b)(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$, onde:

$$x_1 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \ \sqrt{\Delta}}{2}$$

Como $x - x_2$ é sempre positivo, a condição fica reduzida a: $(x-b)(x-x_1) \geq 0$.

Porém: $\quad 0 < b < a \Rightarrow 0 < b^2 < a^2 \Rightarrow -3a^2 < -3b^2$

$$\Rightarrow 4a^2 - 3a^2 < 4a^2 - 3b^2 < 4a^2 \Rightarrow a^2 < 4a^2 - 3b^2 < 4a^2$$

$$\Rightarrow a < \sqrt{\Delta} < 2a \Rightarrow a - b < -b + \sqrt{\Delta} < 2a - b$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{a-b}{2} < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} < a - \frac{b}{2} < a$$

Ou seja: $0 < x_1 < a \implies x_1 \in I$.

Logo, a única maneira de satisfazer $(x-b)(x-x_1) \geq 0$ para todo $x \in I$ é ter $x_1 = b$, pois, caso contrário, $f(x)$ seria negativa para x entre b e x_1.

Assim: $b = (b - \sqrt{\Delta})/2$, ou seja, $3b = \sqrt{4a^2 - 3b^2}$, implicando $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Pela condição $y = a^2/x - x$, com $x = b = a/\sqrt{3}$, obtemos $y = 2a/\sqrt{3}$.

Conclusão: o volume máximo ocorre quando a altura do cilindro tem o mesmo comprimento que o diâmetro da base.

Logo: $\quad V = \pi x^2 y = \pi . \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$

Comentário à solução 1: Solução bastante engenhosa, exigindo domínio pleno da função quadrática e tópicos de desigualdades em intervalos reais. A definição de valor máximo de uma função foi explorada adequadamente como ponto de partida para a resolução do problema, chegando às desigualdades cabíveis. Bons alunos, dedicados à Matemática, certamente, ficariam encantados com essa solução, porém, apesar da matemática elementar ter sido o caminho utilizado em todas as etapas, nota-se que algumas particularidades do problema foram aproveitadas para que cada passo fosse dado. O caminho não garante um padrão a ser seguido quando se pede o valor máximo ou mínimo de uma função.

Solução 2

Com as ideias iniciais da Solução 1, façamos $V = \pi x^2 y$.

Notemos que: $\frac{1}{4}\left(\frac{V}{\pi}\right)^2 = \frac{x^4y^2}{4} = x^2\frac{xy}{2}\frac{xy}{2}$

Pela desigualdade das médias, se u, v e w forem números positivos, teremos:

$$u.v.w \leq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3$$

Nesse caso, a igualdade só ocorrerá quando $u = v = w$.

Então: $$\frac{1}{4}\left(\frac{V}{\pi}\right)^2 = \frac{x^4y^2}{4} = x^2\frac{xy}{2}\frac{xy}{2} \leq \left(\frac{x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}}{3}\right)^3 = \left(\frac{x^2 + xy}{3}\right)^3$$

Portanto, usando a condição $x^2 + xy = a^2$, apresentada na Solução 1, teremos:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 \Rightarrow V \leq \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$$

A igualdade nesta última sentença nos dá o valor máximo do volume, e ela é obtida, pela propriedade das médias, quando tivermos $x^2 = xy/2$, ou seja, $y = 2x$, que, substituindo na condição $x^2 + xy = a^2$, teremos $x = a/\sqrt{3}$.

Comentário à solução 2: Uma das aplicações da desigualdade das médias é a resolução de problemas de máximos e mínimos. Certamente, é um método que auxilia na resolução de alguns problemas, onde as variáveis envolvidas possam ser relacionadas de tal forma que possamos aproveitar o fato de que $M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_Q$, sendo M_H, M_G, M_A e M_Q as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática de

n números reais positivos, com $n \in \mathbb{N}$. Porém, aqui, também, exige-se bastante engenhosidade por parte do aluno, pois a escolha dos números em questão não é aleatória.

Solução 3

Consideremos a função f como definida na solução 1: $f(x) = V/\pi = x(a^2 - x^2)$

Usando conhecimentos de Cálculo Diferencial, calculamos as derivadas, $f'(x)$ e $f"(x)$, da função $f(x) = x(a^2 - x^2)$:

$$f'(x) = a^2 - 3x^2 \text{ e } f"(x) = -6x,$$

Se $f'(x) = a^2 - 3x^2 = 0,$ encontramos $x = b = a/\sqrt{3}$ como sendo a única raiz de $f'(x)$ no intervalo $I = [0;\ a]$.

Sabemos que $f'(b) = 0,$ com $f"(b) < 0$, é condição suficiente para a função $f(x)$, contínua e derivável no intervalo aberto $I =]0; a[$, possuir um valor máximo local em $x = b$. Assim, como $f"(b) = -6a/\sqrt{3} < 0$, a função $f(x)$ tem valor máximo no ponto de abscissa $x = b = a/\sqrt{3}$.

O volume máximo é $V = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\pi\left(a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \dfrac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$

Comentário à solução 3: Sem sombra de dúvida, a solução 3 é a mais atraente, e se o tratamento dado ao Cálculo, com seus teoremas rigorosos, for realizado de forma mais branda, substituindo, dentro do possível, demonstrações cheias de artifícios algébricos por visualizações geométricas, é cabível abordar tópicos de Cálculo Diferencial no Ensino Médio, visando ampliar o número de problemas que podem ser resolvidos (não só em Matemática) como, também, reduzir suas contas.

Pelas soluções apresentadas, fica claro que a de número 3, utilizando o Cálculo Diferencial, demanda um número bem menor de ações, tendo como requisitos os conhecimentos sobre regras de derivação e a devida interpretação sobre os pontos críticos encontrados a partir da primeira derivada, além do sinal da segunda derivada da função contínua e derivável envolvida nos já encontrados pontos críticos.

2.2 O Cálculo como instrumento em algumas disciplinas do Ensino Médio

É certa a presença da derivada de uma função em muitos problemas de Física, no estudo, principalmente, de Cinemática. É conveniente frisarmos aqui que em todas as séries do Ensino Médio o Cálculo seria uma ferramenta facilitadora na disciplina Física para a obtenção de inúmeros resultados, nas diversas divisões dessa disciplina, da Cinemática à Eletricidade. E não é somente na Física. Vejamos algumas aplicações em algumas áreas abordadas no Ensino Médio, através da resolução de alguns problemas. Focaremos Física e Química.

I.) Na Física.

Problema 1 - **Cinemática**. Um corpo descreve um movimento variado, em linha reta, em que a equação horária do espaço é dada por: $s(t) = t^2 - 7t + 10$, onde t é o instante dado em segundo e $s(t)$ é a posição em metros ocupada pelo corpo.

Calcule a velocidade e a aceleração desse corpo, nos instantes $t = 1s$ e $t = 10s$.

Solução: Os estudantes não terão problemas, com o conhecimento de derivada, em calcular as taxas de variação média e instantânea. Não precisarão de fórmulas prontas.

Ao invés disso, eles farão: $v(t) = s'(t) = 2t - 7 \; e \; a(t) = v'(t) = 2 \, m/s^2$

Assim, para $t = 1s$, teremos:

$$v = -5 \, m/s \; e \; a = 2 \, m/s^2$$

Para $t = 10s$, teremos:

$$v = 13 \, m/s \; e \; a = 2 \, m/s^2$$

Problema 2 - **Oscilações Harmônicas**. Uma partícula descreve um movimento harmônico simples (MHS) cuja posição projetada ao longo de um segmento de reta é dada por $\mathrm{s(t) = 20.sen(\pi t)}$, onde t é o instante dado em segundo e $s(t)$ é a posição, em metro. Qual a função horária da aceleração ao longo desse segmento?

Solução: É imediato: $v(t) = s'(t) = [20. cos(\pi t)].(\pi t)' = 20\pi. cos(\pi t)(m/s)$

E, ainda: $a(t) = v'(t) = [-20\,\pi.sen(\pi t)].(\pi t)' = -20\pi^2.sen(\pi t)\ (m/s^2)$

Nesse exemplo, geralmente, abordado na 2ª série do Ensino Médio, os estudantes terão a oportunidade de aprender a calcular as derivadas do seno e do cosseno. Como as funções trigonométricas são estudadas, normalmente, no final da 1ª série ou no início da 2ª série do Ensino Médio, essas derivadas podem ser calculadas sem maiores problemas.

Nota-se aqui uma boa oportunidade de apresentarmos a regra da cadeira, apresentando o resultado: $(sen\,u)' = u'.(cos\,u)$

Problema 3 - **Eletricidade**. Um aparelho de ultrassonografia funciona, após ser dado o comando, a partir do momento em que a corrente elétrica em seu circuito de força atinge 5 ampères. Se a quantidade de carga elétrica, em coulomb, varia com o tempo, em segundo, pela relação $q(t) = 2{,}5t^2$, a partir de que instante t esse aparelho começa a funcionar?

Solução: É imediato que $i(t) = q'(t) = 5t$. Dessa forma, $5t = 5$, ou seja, $t = 1s$.

Obs.: Analisando alguns livros de Física do Ensino Médio, tanto em edições antigas quanto as recentes, poucos definiram a intensidade de corrente elétrica instantânea como sendo $i = \frac{dq}{dt}$, e os que usaram a definição por derivada não apresentaram exemplos com o uso de tal ferramenta, como fizeram em Cinemática. Dessa forma, a premissa de que o estudante deveria estar apto a aplicar conhecimentos básicos de Cálculo permitiu ao autor usar tal linguagem, sem a necessidade de explorá-la novamente, nem mesmo com exercícios básicos sobre o tema.

Problema 4 - **Gravitação.** Um corpo é lançado no vácuo, verticalmente para cima, em algum astro celeste, a partir do solo, com a altura atingida no decorrer do tempo obedecendo à lei: $H(t) = -0{,}8t^2 + 32t$, onde t é o tempo em segundos e H é altura, em metros. Qual é o instante em que a altura máxima atingida? Qual a altura máxima atingida? Lembrando que a aceleração gravitacional da Lua é cerca de 6 vezes menor do que a da Terra, verifique que é provável que o lançamento foi feito na Lua.

Solução: De imediato, $H' = -1{,}6t + 32 = 0$, ou seja, $\mathrm{t} = 5\ \mathrm{s}$. Como $H''(t) < 0$, temos que o instante procurado é $\mathrm{t} = 5\ s$.

A altura máxima será $H(5) = -0{,}8\,.\,5^2 + 32\,.\,5 = -20 + 160 = 140\ (m)$.

Notemos que $H'(t) = -1{,}6t\ + 32$ corresponde à velocidade do corpo no instante t, e $H''(t) = -1{,}6$ corresponde à aceleração (em m/s^2). Logo, a aceleração da gravidade local é $g = -1{,}6\ m/s^2$, que corresponde a $1/6$ da aceleração terrestre e, desse modo, o lançamento, provavelmente, foi da Lua.

Problema 5 - Eletromagnetismo. Uma espira circular de área $A = 3{,}0\ m^2$ está imersa em um campo de indução magnética uniforme, perpendicular ao plano da espira, de intensidade $B = 3{,}0\ t^2 + 4{,}0\ t + 5{,}0$, onde t representa o tempo, em segundos, com B dado em teslas, de modo que a direção e o sentido de $\vec{B}$ se mantêm constantes.

Determine a força eletromotriz induzida no instante $t = 2\ s$.

Solução: Como se trata da força eletromotriz instantânea, devemos nos valer do conhecimento de derivada, conforme a definição de taxa instantânea.

Logo: $|\mathrm{E}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \left|\frac{d(A\,.\,B)}{dt}\right| = A.\left|\frac{dB}{dt}\right|$ (Nesse caso, a área A é constante.)

A partir do enunciado, temos: $\frac{dB}{dt} = 6\,.\,2 + 4 = 16\ (T/s)$

Para *t = 2s*, temos:

Assim, devemos ter: $|\mathrm{E}| = A.\left|\frac{dB}{dt}\right| = 3\,.\,16 = 48\ (volts)$

Esses cinco problemas de Física puderam ser encontrados, com poucas alterações, nos livros da coleção Física Clássica, aqui mencionada, com resolução similar, utilizando os conhecimentos de Cálculo.

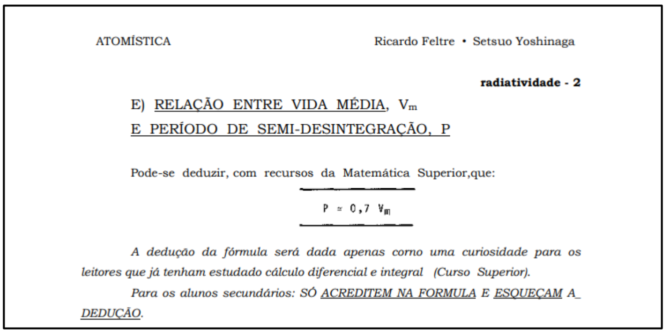
II.) Na Química.

Para a Química, foram poucos os exemplos obtidos abordados no Ensino Médio, apesar de haver muitos tópicos onde o Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta necessária, como: Radiatividade, Cinética Química e Eletroquímica. A abordagem, porém, nos diversos livros e artigos consultados, é dirigida ao Ensino Superior, com o devido domínio das técnicas de derivação e integração. Por exemplo, dois autores tradicionais, Ricardo Feltre e Setsuo Yoshinaga, que eram coautores em livros de Química para o Ensino Médio, pela editora Moderna, apresentavam algumas demonstrações com conteúdos de Cálculo, claramente, sem a preocupação de que os estudantes iriam tirar algum proveito do que foi escrito, como podemos ver quando os autores apresentam a demonstração de um resultado em um problema de Radiatividade, como mostra a Figura 5.

Problema - Radiatividade. Qual é a relação entre vida média e período de semidesintegração?

Na Figura 5, temos a cópia de parte da página com a resolução do problema, onde é usado o conhecimento de taxa de variação, diferencial e integração, mas antecipadamente, vem uma frase curiosa: *"SÓ ACREDITEM NA FÓRMULA E ESQUEÇAM A DEDUÇÃO".*

Figura 5 – Alerta de que a demonstração não será compreendida.



ATOMÍSTICA — Ricardo Feltre • Setsuo Yoshinaga

radiatividade - 2

E) RELAÇÃO ENTRE VIDA MÉDIA, V_m
E PERÍODO DE SEMI-DESINTEGRAÇÃO, P

Pode-se deduzir, com recursos da Matemática Superior,que:

$$P \simeq 0,7\ V_m$$

A dedução da fórmula será dada apenas como uma curiosidade para os leitores que já tenham estudado cálculo diferencial e integral (Curso Superior).

Para os alunos secundários: SÓ ACREDITEM NA FORMULA E ESQUEÇAM A DEDUÇÃO.

Fonte: FELTRE; YOSHINAGA, 1974 (p. 69)

Em seguida, os autores fazem a dedução da relação, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Dedução de fórmula em Química, com o Cálculo.

Para os alunos secundários: SÓ ACREDITEM NA FORMULA E ESQUEÇAM A DEDUÇÃO.

Sabemos que a velocidade de desintegração instantânea é:

$$v = \frac{dn}{dt}$$

a constante radiativa é:

$$v = -C.n$$

(O sinal menos é porque se trata de uma velocidade que diminui o número de átomos na amostra).

Então:

$$\frac{dn}{dt} = -C.n \quad \text{ou} \quad \frac{dn}{n} = -C.dt$$

Após a integração da diferencial temos:

$$\int \frac{dn}{n} = \int -C.dt$$

$$\log_e n = -C.t + k$$

e → base dos logaritmos neperianos = 2,718...
k → constante

Eliminando a forma logarítmica:

$$n = e^{-C.t+K}$$

$$\text{ou} \quad n = e^{-C.t} \times e^{k}$$

Quando: $t = 0$

teremos: $n = n_0$.

Mas: $t = 0$, $e^{-C.t} = 1$ e $n = e^{k}$

donde: $e^{k} = n_0$.

Fonte: FELTRE; YOSHINAGA, 1974 (p. 69 e 70)

Como, normalmente, o conteúdo Radiatividade é estudado nas unidades finais da 3ª série do Ensino Médio, teríamos (os professores das disciplinas Matemática e Química) aqui uma boa oportunidade para explorarmos a derivada da função $y = e^x$, além de regras da cadeia e, sem o compromisso com maiores atividades, apresentarmos a integração como operação inversa da derivação.

A essa altura, obtendo-se a função procurada, conhecidos C e n_0, temos suas derivadas de primeira e segunda ordem calculadas (ou citadas) com facilidade e, consequentemente, por conta de a primeira ser negativa e a segunda, positiva, o aspecto do gráfico seria compatível com conhecimento já produzido (em sua maior parte, no estudo da função polinomial do 2º grau, na primeira série do Ensino Médio, como é apresentado como proposta no decorrer desse trabalho).

Para fechar o problema, na Figura 7, os autores apresentam o gráfico da função obtida:

Figura 7 – Resultado gráfico da função de decaimento.

ATOMISTICA — Ricardo Feltre • Setsuo Yoshinaga

Então, a formula geral será:

$$n = n_0 \cdot e^{-C.t}$$

Onde:

n_0 -> número de átomos ou massa inicial

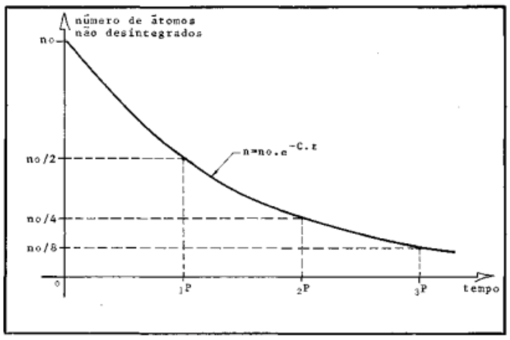
n -> número de átomos ou massa após o tempo " t"

C -> constante radiativa

t -> tempo decorrido

Trata-se de uma função exponencial decrescente.

Façamos um gráfico para relacionar o n com o tempo, representando alguns pontos importantes como: 1IP, 2P, 3P, ..., etc.



Vamos analisar um instante, por exemplo "IP", quando temos apenas $n_n/2$ átomos.

Então: Quando $t = 1P$ temos $n = n_0/2$.

$n = n_0 \cdot e^{-C.t}$ $\quad$ $n = \frac{n_0}{e^{C.t}}$

Então: $e^{C.P} = 2$

Passando a log (de base 10): $C.P. \log e = \log 2$

$\frac{n_0}{2} = \frac{n_0}{e^{C.P}}$ $\quad$ $C.P = \frac{\log 2}{\log e} = \frac{0,301}{0,43} = 0,7$

Fonte: FELTRE; YOSHINAGA, 1974 (p. 70)

Por esses exemplos, percebemos uma estreita conexão interdisciplinar entre o Cálculo e a Física, o Cálculo e a Química, e o Cálculo e diversos outros campos do conhecimento que têm leis bem definidas por funções contínuas, cujas grandezas envolvidas influenciem matematicamente no crescimento ou decrescimento umas das outras.

Nesse último, os autores evitaram a fórmula pronta, possivelmente, entendendo que alguns de seus leitores poderiam ter conhecimentos de Cálculo, e, dessa forma, a obra se torna mais completa. Trata-se de um livro de 1974, justamente um período em que a Matemática Moderna priorizava outros conteúdos, e o estudo do Cálculo, que demanda uma carga horária considerável, já não fazia parte das prioridades no

Ensino Médio. Hoje, porém, deve-se reconhecer a necessidade de termos uma reestruturação dos tópicos de Matemática a serem abordados no Ensino Médio, dando espaço para o Cálculo. Este é indispensável para uma formação mais sólida e, apresentado no tempo certo e de uma forma mais sutil, só trará benefícios aos nossos estudantes do Ensino Médio.

2.3 Desenvolvendo tópicos de Cálculo em cada série

Diante do exposto anteriormente, onde foram apresentadas fases de nossa história do ensino de Matemática em que o Cálculo fez parte, sendo abordado, na maioria das vezes, num rigor acima do necessário, e diante das motivações para que o ensino do Cálculo retorne à grade curricular da Matemática do Ensino Médio, apresentamos, aqui, uma proposta em que a definição de derivada seja introduzida já na primeira série, juntamente com algumas aplicações, devendo, para tanto, termos um apoio da disciplina Física, haja vista seus conceitos iniciais em Cinemática Escalar acolherem de forma precisa e prática a definição de derivada. Assim, a escalada dos tópicos de Cálculo começará com o professor de Física.

Essa escolha dará condições de calcularmos as derivadas das funções polinomiais de 1º e 2º graus, com as devidas aplicações à Física, no estudo do movimento uniforme e do movimento uniformemente variado, dando sentido pleno ao conteúdo que está sendo apresentado. Além disso, na disciplina Matemática, o estudo da função polinomial do 2º grau dará a oportunidade de resolver um problema importante, que é a determinação da equação da reta tangente a uma parábola.

Na primeira série, o estudo da taxa de variação instantânea deve fazer parte do programa de conteúdos de Física já sendo introduzida a definição de derivada. Nessa mesma série, na disciplina Matemática, trataremos o problema da reta tangente ao gráfico de uma função, apresentando-se o significado geométrico da derivada de uma função como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico dessa função em um de seus pontos. No estudo do crescimento da função polinomial do 2º grau, já com o conhecimento do significado de sua derivada, há a oportunidade de esboçarmos o gráfico dessa função e verificarmos se haverá ponto de máximo ou de mínimo.

Nessa fase, ainda na disciplina Física, a derivada da função polinomial de grau $n > 2$ poderá ser apresentada sem demonstrações formais, verificando-se sua validade, pela definição de derivada, apenas, para funções polinomiais de primeiro e segundo graus, e estendendo essa validade para funções de grau maior do que dois.

Na segunda série do Ensino Médio, alguns tópicos da Matemática serão aproveitados para introduzirmos algumas regras de derivação. O binômio de Newton, por exemplo, será utilizado para nos auxiliar na regra da cadeia. Normalmente, a trigonometria é tratada nessa segunda série, ou final da primeira, em Matemática, e, na Física, o estudo de oscilações dependem de conhecimentos básicos de funções trigonométricas, e nessas duas oportunidades, na Matemática e na Física, pode-se tratar das regras de derivação das funções seno e cosseno.

Para a Física, desde a primeira série, entendeu-se que a derivada da função espaço, que depende da variável tempo, representa a velocidade a cada instante. Se a função espaço for polinomial ou trigonométrica, não mudará a ideia de que a velocidade será a derivada da função espaço em questão. Ou seja, caso a função seja trigonométrica, o(a) professor(a) de Física não terá a preocupação em demonstrar o resultado, como o fez na série anterior, com a função polinomial, no estudo de Cinemática Escalar.

A partir dessas apresentações, já iniciadas bem no começo da primeira série, em Física, ficará cômodo, também, para professores de outras disciplinas, como Química e Biologia, tratarem alguns conceitos ligados à taxa de variação instantânea já com o conhecimento de derivada, fazendo o uso das regras de derivação. Vale ressaltar que essas duas disciplinas, Química e Biologia, fazem estudo de populações diversas cujo crescimento (ou decrescimento) ocorre na natureza, normalmente, a partir de uma função exponencial, não sendo necessária, porém, naquela fase do curso, a busca pela obtenção da derivada da função exponencial a partir da definição. É suficiente o aluno saber (relembrar) o que é taxa de variação instantânea, de modo que a função sobre a qual será calculada a derivada é apenas um detalhe.

Conforme a BNCC, o estudante do Ensino Médio deve passar por uma formação comum, implementada para todos os estudantes, e por uma formação específica, escolhida pelo estudante, conforme seus desejos e aptidões. A Matemática estará presente na formação comum, e essa forma de apresentarmos o Cálculo, já na primeira série, garantirá a todos os estudantes as noções desse conteúdo tão presente, seja na formação que esses estudantes terão após o Ensino Médio, como também no dia a dia, haja vista a interpretação de gráficos, as taxas de crescimento e decrescimento, além de problemas de otimização estarão sempre presentes.

Na terceira série, formalmente, logo após o estudo de geometria analítica, números complexos e polinômios, podemos abrir um capítulo: *Estudo da derivada de uma função e suas aplicações.* Nesse momento, as definições de taxa de variação média e taxa de variação instantânea (ou seja, num ponto) não serão mais uma surpresa, diante do trabalho realizado nos anos anteriores. A derivada de uma função será vista, no início, como uma revisão, no caso de funções polinomiais, e as regras operatórias de derivação, além das derivadas das principais funções transcendentes, poderão ser exploradas, inclusive, com as demonstrações cabíveis, em virtude do amadurecimento em conteúdos de Matemática apresentados até então.

Agora, com uma justificativa algébrica, ainda explorando a visualização geométrica, um sentido para as derivadas de primeira e segunda ordem poderá ser dado no estudo de gráficos, principalmente, de funções polinomiais, verificando-se um caminho para obtermos os valores máximos e mínimos locais que possam existir, estendendo-se a abordagem para funções algébricas e transcendentes.

Esta última etapa, em que se busca apresentar as derivadas de funções algébricas e transcendentes, com foco nas demonstrações, poderá ficar destinada aos estudantes que, em sua formação específica, por opção de itinerário, conforme a BNCC, desejam se aprofundar em conteúdos de Matemática.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA PARA O ESTUDO DE DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES PARA OS DOIS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO MÉDIO.

3.1 Proposta para o primeiro ano do Ensino Médio

Nesse capítulo, apresentamos como a Física e a Matemática podem ter seus currículos adequados para a introdução do Cálculo no primeiro ano do Ensino Médio. Exploraremos, inicialmente, a Física, já nos primeiros capítulos de Cinemática, onde são estudadas a velocidade e a aceleração instantâneas. A partir daí, nascerá a definição de derivada de uma função e essa será a ferramenta utilizada quando for tratada a taxa de variação instantânea, em qualquer conteúdo de Física, a partir de então. Teremos aqui algumas regras de derivação.

Da Física sairá o entendimento de que a taxa de variação do espaço em um instante t corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico do espaço, em relação ao tempo, no instante t. Sem a preocupação com ideias formais de continuidade e limites, trabalharemos com funções polinomiais.

Para a Matemática, usaremos o estudo da função polinomial do 2º grau para introduzirmos a noção de derivada de uma função. Os resultados já obtidos da Física deverão ser apresentados para funções que dependem não somente do tempo. Agora, teremos a taxa de variação de uma função qualquer, $f(x)$, num ponto de abscissa x_o, e teremos a equação da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto. A análise do gráfico da função polinomial do 2º grau e os problemas de máximos e mínimos deverão ser apresentados pelos caminhos tradicionais, sem o Cálculo, e, em seguida, utilizando a nova ferramenta. Deveremos mostrar a vantagem do conhecimento da derivada, verificando, com o uso do software GeoGebra, que os procedimentos utilizados para os resultados obtidos com a função polinomial do 2º grau serão os mesmos para funções polinomiais de grau maior do que 2.

3.1.1 Proposta para o primeiro ano do Ensino Médio - Física

Começando com a Física, já na definição de velocidade escalar instantânea, deve surgir o conceito de derivada.

Na Cinemática Escalar, considerando que um ponto material está em movimento em uma trajetória, e sua posição (ou espaço) ao longo dessa trajetória é regida por uma função dependente do tempo, $s(t)$, teremos a definição de taxa de variação média do espaço, em relação ao tempo, corresponde ao conceito de velocidade escalar média. A taxa de variação instantânea, nesse caso, corresponde à velocidade escalar instantânea, ou seja, a velocidade num instante t, e sua definição matemática é apresentada, na maioria dos livros de Física, da seguinte forma:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Onde $v(t)$ é a função da velocidade no instante t, sendo Δs e Δt as variações, respectivamente, de espaço e tempo, entre dois instantes, que sejam t e $t + \Delta t$.

A questão, agora, é fazer o cálculo desse limite, a partir de funções, $s(t)$, que sejam polinomiais, incluindo, então, as funções polinomiais de primeiro e segundo graus, que irão caracterizar os movimentos, respectivamente, uniforme e uniformemente variado.

Esse limite será, então, definido pelo(a) professor(a) de Física como "*A derivada da função $s(t)$ em relação ao tempo*", e concluirá que a derivada do espaço num instante t está medindo a velocidade escalar naquele instante.

Essa forma de apresentar a derivada na disciplina Física foi muito bem conduzida no livro Cinemática, da coleção Física Clássica, dos autores Caio Sérgio Calçada e José Luiz Sampaio, pela editora Atual, em sua 2ª edição, em linguagem simples, sem perder o rigor, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Derivada aplicada à Cinemática.

9. VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

A velocidade escalar média nos dá uma idéia geral do movimento. De fato, se dissermos que a velocidade escalar média de um carro, em certo percurso, é de $60\ \frac{km}{h}$, não significa necessariamente que a velocidade escalar é, em cada instante, $60\ \frac{km}{h}$. Estamos apenas dizendo que, em média, o carro percorreu 60 km em uma hora.

Para sabermos o que aconteceu em cada instante, devemos definir a *velocidade escalar instantânea*.

Esta pode ser entendida como uma velocidade escalar média para um intervalo de tempo Δt muito pequeno, isto é, Δt tendendo a zero ($\Delta t \longrightarrow 0$), ou seja, t_2 tendendo a t_1 ($t_2 \longrightarrow t_1$).

Quando Δt tende a zero, Δs também tende a zero, mas o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tende a um valor limite, que é a velocidade escalar instantânea.

Assim, se s é o espaço de um móvel num instante t e $s + \Delta s$ é o espaço num instante $t + \Delta t$, a velocidade escalar v no instante t é o limite para o qual tende $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero e escreve-se:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O limite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero recebe o nome de *derivada do espaço em relação ao tempo* e indica-se por $\frac{ds}{dt}$. Assim:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Fonte: CALÇADA; SAPAIO, Vol. 1, 1998 (p. 19)

Registre-se que, já na página 19 desse livro, após os conceitos iniciais de Cinemática, contemplados com exercícios diversos, os autores, de forma bastante simples, definem a velocidade instantânea como sendo a *derivada do espaço em relação ao tempo*.

Diferentemente da maioria dos livros de Física destinados ao Ensino Médio, Física Clássica define a velocidade instantânea por meio de um limite, chamando-a de derivada do espaço em relação ao tempo, e apresenta exemplos, como mostra a Figura 9. Sem muita cerimônia, os autores já emplacam a derivada da função $s(t) = m.t^n$, a partir do exemplo elementar $s(t) = 4t^2$, e denota mais duas regras básicas, que sejam a derivada de uma constante e a derivada da soma de funções.

Figura 9 – Exemplos: velocidade instantânea e derivada.

Exemplos:

a) Seja a equação horária do espaço $s = 4t^2$, para *s* em metros e *t* em segundos. Calculemos $v = \frac{ds}{dt}$. Sendo *s* o espaço do móvel no instante *t* e $s + \Delta s$ o espaço no instante $t + \Delta t$, vem:

$$t \longrightarrow s = 4t^2 \quad (1)$$

$$t + \Delta t \longrightarrow s + \Delta s = 4(t + \Delta t)^2$$

$$s + \Delta s = 4t^2 + 8t\,\Delta t + 4(\Delta t)^2 \quad (2)$$

Subtraindo membro a membro as equações (2) e (1), vem:

$\Delta s = 8t\,\Delta t + 4(\Delta t)^2$

Dividindo ambos os membros por Δt, vem:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 8t + 4\,\Delta t$

Logo: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (8t + 4\,\Delta t)$

Como Δt tende a zero, vem:

$v = 8t \left(v \text{ em } \frac{m}{s} \text{ e } t \text{ em s}\right)$.

Assim, a derivada em relação ao tempo de $s = 4t^2$ é $v = 8t$, e ela constitui a *equação horária da velocidade*. Note que a cada valor de *t* corresponde um valor de *v*.

A partir de $s = 4t^2$ podemos obter diretamente $v = 8t$ através da seguinte regra:

multiplica-se o expoente (2) pelo coeficiente de t^2 (que é 4) e subtrai-se uma unidade do expoente de t^2.

$s = 4t^2 \longrightarrow v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot 4t^{2-1} = 8t$

Generalizando, sendo $s = m \cdot t^n$, com *n* real, vem:

$$v = \frac{ds}{dt} = n \cdot m \cdot t^{n-1}$$

b) Considere um móvel cujo espaço não varia com o tempo, isto é, $s = C$ (constante). Nesse caso, $\Delta s = 0$ em qualquer intervalo de tempo e $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$. Portanto, concluímos que a *derivada de uma constante* é nula.

Outros exemplos:

- $s = 6 + 4t + 3t^2$ (*s* em m, *t* em s)

  $v = \frac{ds}{dt} = 0 + 1 \cdot 4 \cdot t^{1-1} + 2 \cdot 3t^{2-1}$

  $v = 4 + 6t \left(v \text{ em } \frac{m}{s}, t \text{ em s}\right)$

Fonte: CALÇADA; SAPAIO, Vol.1, 1998 (p. 20)

Explorando essa nova ferramenta para o cálculo da velocidade instantânea, os autores apresentam mais exemplos, inclusive, com equação horária do espaço sendo um polinômio de grau superior a 2, como mostra a Figura 10.

Essa forma de exploração do Cálculo, sem formalidades, será bem-vinda para o propósito de familiarizar a derivada nas linguagem dos estudantes. A taxa de variação instantânea faz parte de conteúdos da Física nas três séries do Ensino Médio.

Figura 10 – Exercícios sobre velocidade instantânea.

- $s = 8 + 10t$ (s em m, t em s)

  $v = \frac{ds}{dt} = 0 + 1 \cdot 10 \cdot t^{1-1}$

  $v = 10\ \frac{m}{s}$
- $s = 4t^3$ (s em m, t em s)

  $v = \frac{ds}{dt} = 3 \cdot 4t^{3-1}$

  $v = 12t^2 \left(v \text{ em } \frac{m}{s},\ t \text{ em s}\right)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

63 É dada a equação horária do espaço de um móvel: $s = 8 - 3t + 6t^2$, para s em metros e t em segundos. Determine:

a) a equação horária da velocidade;
b) a velocidade escalar no instante 3 s;
c) o instante no qual a velocidade escalar é nula.

Resolução:

a) A derivada de s em relação ao tempo nos fornece v:

$s = 8 - 3t + 6t^2$

$v = \frac{ds}{dt} = 0 - 1 \cdot 3t^{1-1} + 2 \cdot 6t^{2-1}$

$\boxed{v = -3 + 12t}$ $\left(v \text{ em } \frac{m}{s} \text{ e } t \text{ em s}\right)$

b) Na equação anterior devemos fazer $t = 3$ s: $v = -3 + 12 \cdot 3$ $\boxed{v = 33\ \frac{m}{s}}$

c) Fazendo $v = 0$ na equação horária da velocidade, tiramos t:

$v = -3 + 12t$

$0 = -3 + 12t$ $\boxed{t = 0{,}25\ s}$

64 A equação horária do espaço de um móvel é $s = 5 + 6t^3$ (SI). Determine a velocidade escalar no instante $t = 2$ s.

Resolução:

Inicialmente, deriva-se s obtendo-se a equação horária da velocidade. A seguir, substitui-se t por 2 s:

$s = 5 + 6t^3$

$v = \frac{ds}{dt} = 0 + 3 \cdot 6 \cdot t^{3-1}$

$v = 18 \cdot t^2$ (SI)

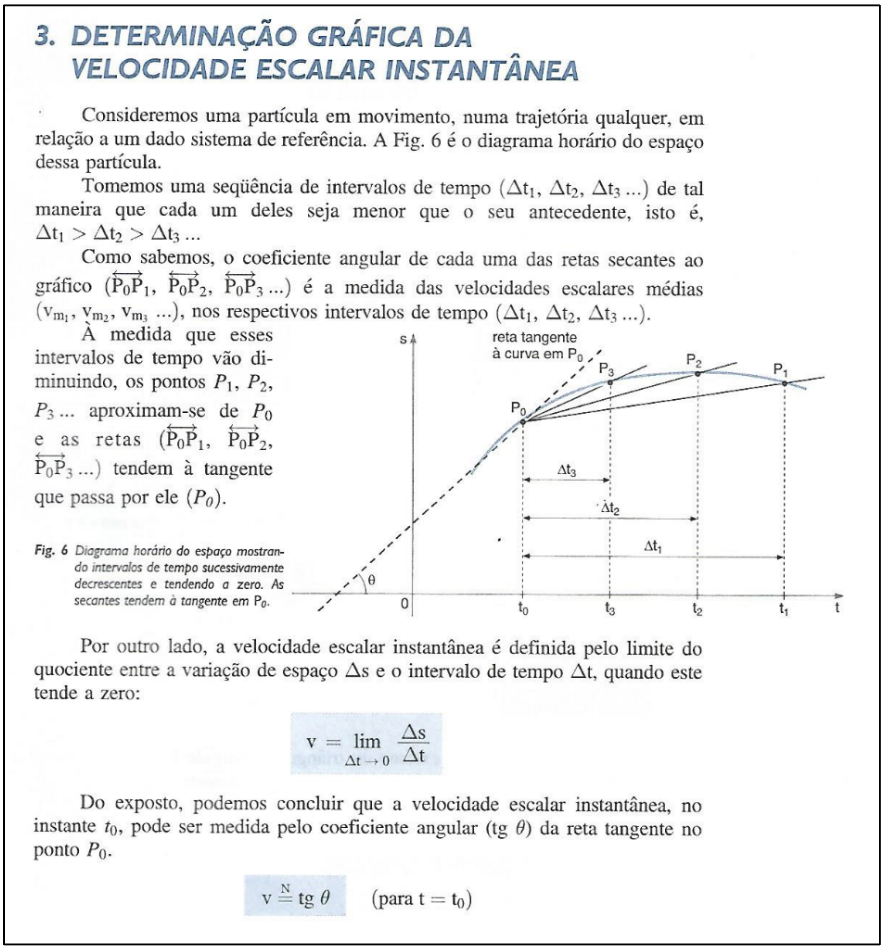
Para $t = 2$ s: $v = 18 \cdot 2^2$ $\boxed{v = 72\ \frac{m}{s}}$

Fonte: CALÇADA; SAPAIO, Vol. 1, 1998 (p. 21)

Com essa apresentação da derivada como taxa de variação instantânea, os autores deram condição de se definir as diversas outras taxas de variação instantâneas que são abordadas na Física, agora, com o auxílio da derivada. Assim, a aceleração escalar instantânea foi definida, nas páginas seguintes desse livro, a princípio, como $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, que é traduzida, de imediato, já pelos estudantes, como sendo $a(t) = \frac{dv}{dt}$, ou seja, a *aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo*.

Um outro ponto forte nesse livro de Cinemática, dando uma contribuição bastante importante para o estudo do Cálculo, é a interpretação geométrica da derivada em um ponto. Na Figura 11, os autores tratam de mostrar que a velocidade escalar instantânea em um instante $t = t_o$ é o coeficiente angular, $\mathrm{tg}\,\theta$, da reta tangente ao gráfico da equação (função) horária do espaço no em questão.

Figura 11 - Interpretação geométrica da derivada.



3. DETERMINAÇÃO GRÁFICA DA VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

Consideremos uma partícula em movimento, numa trajetória qualquer, em relação a um dado sistema de referência. A Fig. 6 é o diagrama horário do espaço dessa partícula.

Tomemos uma seqüência de intervalos de tempo (Δt_1, Δt_2, Δt_3 ...) de tal maneira que cada um deles seja menor que o seu antecedente, isto é, $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$ ...

Como sabemos, o coeficiente angular de cada uma das retas secantes ao gráfico ($\overleftrightarrow{P_0P_1}$, $\overleftrightarrow{P_0P_2}$, $\overleftrightarrow{P_0P_3}$ ...) é a medida das velocidades escalares médias (v_{m_1}, v_{m_2}, v_{m_3} ...), nos respectivos intervalos de tempo (Δt_1, Δt_2, Δt_3 ...).

À medida que esses intervalos de tempo vão diminuindo, os pontos P_1, P_2, P_3 ... aproximam-se de P_0 e as retas ($\overleftrightarrow{P_0P_1}$, $\overleftrightarrow{P_0P_2}$, $\overleftrightarrow{P_0P_3}$ ...) tendem à tangente que passa por ele (P_0).

Fig. 6 Diagrama horário do espaço mostrando intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e tendendo a zero. As secantes tendem à tangente em P_0.

Por outro lado, a velocidade escalar instantânea é definida pelo limite do quociente entre a variação de espaço Δs e o intervalo de tempo Δt, quando este tende a zero:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Do exposto, podemos concluir que a velocidade escalar instantânea, no instante t_0, pode ser medida pelo coeficiente angular ($\mathrm{tg}\,\theta$) da reta tangente no ponto P_0.

$$v \overset{N}{=} \mathrm{tg}\,\theta \qquad (\text{para } t = t_0)$$

Fonte: CALÇADA; SAPAIO, Vol. 1,1998 (p. 117)

Na Figura 11, notamos que o desenvolvimento da interpretação geométrica da derivada só foi abordado na página 117, após respeitar uma sequência didática de tópicos que o antecederam. A abordagem do capítulo em questão, com título *Diagramas horários*, poderá preceder outros conteúdos, caso se queira antecipar a interpretação geométrica da derivada.

Mantendo-se essa sequência valiosa apresentada no livro de Cinemática, com autoria de Calçada e Sampaio, concluímos o importante papel da Física nos passos iniciais do estudo de derivadas, frisando que os autores exploraram esse conhecimento inicial de Cálculo em todos os livros que formam a coleção Física Clássica, em

5 volumes, onde a taxa de variação instantânea é a derivada de alguma função. Os autores, nos momentos que precisaram da derivada de alguma função transcendente, principalmente trigonométrica, não se preocuparam em demonstrar, limitando-se a informar que, por exemplo, a derivada do seno é o cosseno.

3.1.2 Proposta para o primeiro ano do Ensino Médio – Matemática

A derivada de uma função polinomial já é conhecida pelos estudantes. Com aplicações à Física, a derivada foi introduzida para definir a velocidade escalar instantânea.

Um problema particular, referente às funções afim e quadrática, será um bom ponto de partida: *Qual é a equação da reta tangente à parábola em um ponto?*

O exercício a seguir (Problema 1) será resolvido, a princípio, sem o uso da derivada (Resolução I), como um exercício comum, normalmente, abordado nas salas de aula, durante o estudo da função quadrática, e, em seguida, usando o Cálculo (Resolução II).

Problema 1: Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função polinomial do 2º grau $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto $(4, -7)$.

Resolução I: É imediato que a reta procurada tem equação

$$y - (-7) = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m - 7$$

Onde m é o coeficiente angular da reta em questão.

Para que exista ponto em comum entre a reta e a parábola, o sistema a seguir deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 1 \\ y = mx - 4m - 7 \end{cases}$$

Ou seja: $x^2 - 6x + 1 = mx - 4m - 7 \Rightarrow x^2 - (6 + m)x + 4m + 8 = 0$

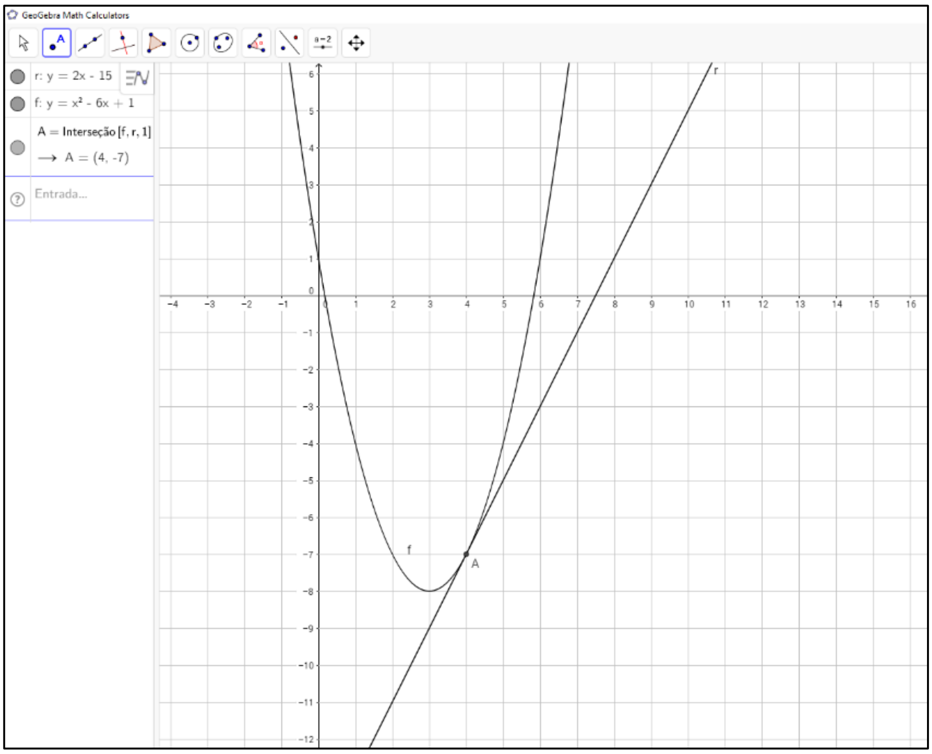
Assim, para que exista apenas um ponto em comum entre a reta e a parábola, devemos ter apenas uma raiz para equação do segundo grau em destaque, acima, ou seja, devemos ter $\Delta = 0$.

Logo: $[-(6+m)]^2 - 4.1.(4m+8) = 0 \implies m^2 - 4m + 4 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; m = 2$

Desse modo, a equação da reta tangente é $y = 2x - 15$.

Pelo software GeoGebra, podemos verificar que a reta obtida e a parábola têm um só ponto em comum, que é o ponto $A = (4, -7)$, e este é o ponto de tangência, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Solução gráfica para a reta tangente, com o GeoGebra.



Fonte: Produzida pelo autor.

A verificação da solução pelo GeoGebra é um instrumento que contribui para o entendimento dos estudantes.

Agora, vamos dar um tratamento com as ferramentas do Cálculo.

Terá um impacto interessante, certamente, se o(a) professora(a) de Matemática, após mostrar a solução acima, para o problema da reta tangente proposto, apresentar, em seguida, a solução com a derivada:

Resolução II: A reta procurada tem equação $y = mx - 4m - 7$, onde m é o seu coeficiente angular. Mas, o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função f no ponto de abscissa $x = 4$. Logo, $\frac{df}{dx} = 2x - 6$ e, desse modo, $m = 2 \,.\, 4 - 6 = 2$. Assim, a reta tangente é $y = 2x - 15$.

Acabamos de estimular os estudantes a saberem o porquê da solução tão simples apresentada com um recurso, a derivada, que eles entendiam como algo aplicável à Física.

Chegamos, então, a um momento em que o(a) professor(a) de Matemática apresentará a derivada de uma função num contexto mais amplo, onde a taxa de variação instantânea, tratada, na Física, como a velocidade ou a aceleração de um corpo, em determinado instante, é algo que se obtém para qualquer função, sob certas condições (que não serão tratadas no momento).

Uma revisão, usando inicialmente as ideias da Física, é necessária. A derivada para funções polinomiais deve ser exercitada, e o resultado a seguir deve ser apresentado:

> *A derivada da função f no ponto de abscissa x_o é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ neste ponto, isto é, $(x_o, f(x_o))$ é o ponto de tangência.*

Notemos que esse resultado corresponde ao que consta na página 117 do livro Cinemática, conforme a Figura 11, onde há a prova, para o movimento dos corpos, de que:

> *A velocidade escalar instantânea, no instante t_o, é igual à derivada do espaço nesse instante, e pode ser medida pelo coeficiente angular $(\tan\theta\,)$ da reta tangente no ponto P_o.*

Mesmo que a chegada a esse resultado já tenha sido alcançada na disciplina Física, é importante que o(a) professor(a) de Matemática o faça, também, podendo até repetir a demonstração realizada para o caso da Física, por ser algo mais presente no dia a dia dos estudantes. Esse resultado consolida o entendimento do problema da reta tangente proposto e trará mais um resultado para o alunado:

> *A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$, no ponto (x_o, y_o), é* $\boldsymbol{y - y_o = f'(x_o).(x - x_o)}$, *onde $f'(x_o)$ é a derivada da função $f(x)$, no ponto de abscissa x_o.*

É conveniente a construção de alguns resultados para a função polinomial do 2º grau antes da utilização da derivada. Assim foi feito com o problema da reta tangente, e, dessa forma, tópicos como *intervalos de crescimento da função*, *vértice da parábola* e *ponto de máximo ou mínimo* devem ser apresentados pela forma tradicional, sem a derivada da função, e, após as atividades exploratórias dos conteúdos, podemos mostrar as versões dos mesmos tópicos a partir da derivada da função. O uso da derivada mostrará uma maior facilidade na obtenção dos resultados.

A intuição, somada ao apelo visual, deve ser a maneira de buscarmos os resultados e formalizarmos regras. Não há necessidade de buscarmos demonstrações formais para o assunto em questão (aplicações da derivada), pois se está dando aulas a um grupo de estudantes recém-chegados ao Ensino Médio, precisando amadurecer ainda em tópicos da Matemática.

Exploremos um exemplo (Problema 2), mostrando caminhos que podem ser seguidos para apresentarmos aplicações da derivada a questionamentos da função polinomial do 2º grau.

Problema 2: Dada a função polinomial do 2º grau $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, determine, com o auxílio da derivada:

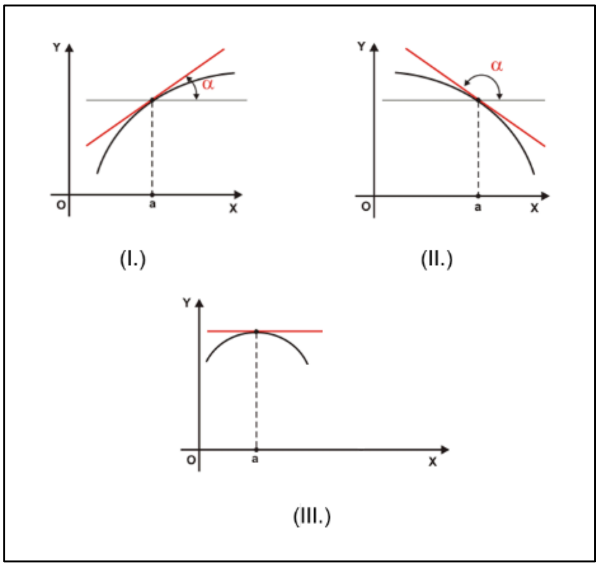
a) os intervalos de crescimento e decrescimento;
b) as coordenadas do ponto de ordenada máxima.

Resolução: Pela proposta que aqui apresento, já é fato para o estudante que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, por análise do seu gráfico, que é uma parábola, terá ordenada máxima em seu vértice, dado pelo ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, e, além disso, $y = f(x)$ é crescente, para $x < \frac{-b}{2a}$, e decrescente, para $x > \frac{-b}{2a}$ · A partir do gráfico da função, já conhecido, os estudantes não têm dificuldade em saber os intervalos de crescimento e decrescimento.

Mas, agora, já há o entendimento de que a derivada da função $y = f(x)$ representa o coeficiente angular da reta tangente em um ponto do gráfico dessa função, de modo que, com a devida revisão de trigonometria básica (já introduzida no 9º ano do Ensino Fundamental), as implicações (I.), (II.) e (III.), a seguir, em conjunto com a Figura 13, constituem um importante resultado, relacionando o sinal da derivada dessa função em um ponto com o ângulo formado pela reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto:

> Seja α o ângulo, no sentido anti-horário, entre o eixo das abscissas e a reta tangente ao gráfico de uma função quadrática $f(x)$, no ponto $(a, f(a))$, e seja $m = tg\alpha = f'(a)$ o coeficiente angular dessa reta.
>
> É certo que a derivada dessa função no ponto de abscissa a, ou seja, $f'(a)$, é tal que:
>
> (I.) Se α é agudo, então $m = tg\alpha > 0$, ou seja, $f'(a) > 0$.
>
> (II.) Se α é obtuso, então $m = tg\alpha < 0$, ou seja, $f'(a) < 0$.
>
> (III.) Se $\alpha = 0^{\circ}$, então $m = tg\alpha = 0$, ou seja, $f'(a) = 0$.

Figura 13 – Sinal da derivada.

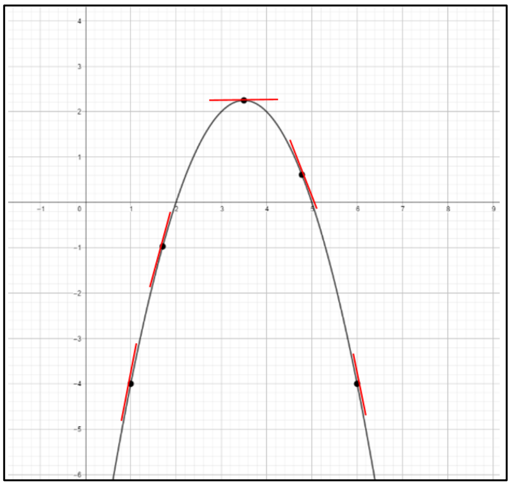


Fonte: Produzida pelo autor.

O gráfico (III.) da Figura 13 mostra que no ponto em que a derivada é nula, temos uma mudança de crescimento da função, ou seja, a função muda o sinal de sua derivada, de modo que, se antes a função crescia, após esse ponto em que a derivada é zero, passará a decrescer. O mesmo vale se antes a função é decrescente e passa a crescente, como será visto mais à frente.

Na Figura 14, temos o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, que consta no exercício proposto, mostrando, em vermelho, alguns traços de retas tangentes ao gráfico dessa função.

Figura 14 – Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 7x - 10}$.



Fonte: Produzida pelo autor, com o GeoGebra.

A Figura 13 foi produzida para termos um entendimento pleno no exercício proposto. Nota-se que os três gráficos dessa figura reproduzem, ao juntarmos suas partes, aproximadamente, o gráfico da Figura 14.

Assim, entendidas as implicações (I), (II) e (III), e observando os gráficos correspondentes, os estudantes devem solucionar o problema como segue:

Solução: Se $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, então $f'(x) = -2x + 7$.

a) Crescimento e decrescimento:

- A função $f(x)$ é crescente quando $-2x + 7 > 0$, ou seja, $x < 3{,}5$.
- A função $f(x)$ é decrescente quando $-2x + 7 < 0$, ou seja, $x > 3{,}5$.

b) Ficará fácil os estudantes perceberem, com auxílio do gráfico da função dada, que existe um ponto que nos dá a maior ordenada que a função possa gerar. Esse ponto, pelo exposto, é o vértice da parábola, cuja abscissa é obtida quando a derivada da função se anula, ou seja, $-2x + 7 = 0$.

Assim, $x = 7/2 = 3{,}5$ e $y = f(7/2) = 9/4 = 2{,}25$

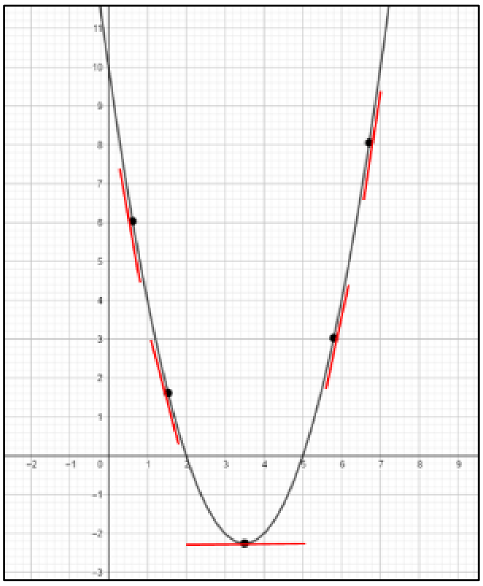
O ponto de ordenada máxima é $(3{,}5;\ 2{,}25)$.

Uma abordagem gráfica para o caso em que a parábola tem concavidade voltada para cima, mostrando o traçado das retas tangentes, seria suficiente para a compreensão de que o crescimento/decrescimento da função polinomial do 2º grau segue as mesmas regras do sinal da derivada dessa função, como feito nesse último exercício.

Notemos que o software GeoGebra pode ser também uma ferramenta utilizada pelos professores de Física para o esboço gráficos. O estudo de gráficos, na Física, normalmente, acontece antes que se faça o estudo de gráficos de funções, na Matemática, no Ensino Médio.

Para a função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, o gráfico é apresentado na Figura 15, produzido com o GeoGebra, de modo que algumas retas tangentes foram traçadas indicando o sinal da derivada desta função.

Figura 15 – Gráfico da função $\mathbf{f(x) = x^2 - 7x + 10}$.



Fonte: Produzida pelo autor.

Claramente, à esquerda do vértice da parábola desta função, temos tangentes com declividades negativas, ou seja, derivadas negativas, indicando ser a função decrescente antes do vértice. Após o vértice, com derivadas positivas, constata-se o crescimento.

Nesse caso, com o auxílio da figura, fica fácil para os estudantes perceberem que esta função atinge um valor mínimo em sua ordenada para um valor de x tal que $f'(x) = 0$.

Estamos tratando, até o momento, da função polinomial do 2º grau, onde o comportamento do gráfico, quanto à concavidade, já é conhecido dos estudantes. Esse entendimento é suficiente para que o estudante saiba se a função em questão tem um ponto de máximo ou de mínimo. O sinal do coeficiente de x^2, sem uma justificativa simples, é quem estabelece tal entendimento.

Podemos estabelecer, pelas regras dos sinais da derivada, que a função polinomial do 2º grau $y = f(x)$ terá *valor máximo* para um certo x_o se forem atendidas as duas condições a seguir:

- $f'(x_o) = 0$
- Para $x < x_o$, a função f é crescente, ou seja, $f'(x) > 0$, e para $x > x_o$, a função f é decrescente, ou seja, $f'(x) < 0$.

A Figura 14 mostra bem esse resultado, para o caso de *valor máximo* da função.

De modo similar, observando agora a Figura 15, podemos estabelecer que a função polinomial do 2º grau $y = f(x)$ terá *valor mínimo* para certo x_o se forem atendidas as duas condições a seguir:

- $f'(x_o) = 0$
- Para $x < x_o$, a função f é decrescente, ou seja, $f'(x) < 0$, e para $x > x_0$, a função f é crescente, ou seja, $f'(x) > 0$.

Essas conclusões, porém, nos darão a oportunidade de apresentar as aplicações da derivada para uma função polinomial de grau maior do que 2.

Nessa oportunidade, com o auxílio do GeoGebra, podemos fazer um esboço do gráfico de uma função polinomial com grau 3, onde a derivada será um polinômio de grau 2, cujas raízes podem ser encontradas com facilidade. É um momento importante para que se faça distinção entre máximo (ou mínimo) absoluto e relativo, como mostra o Problema 3.

Problema 3: Dada a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1$, determine, com o auxílio da derivada:

a) os intervalos de crescimento e decrescimento;

b) as coordenadas do(s) ponto(s) de ordenada máxima e/ou mínima, “locais”, caso existam.

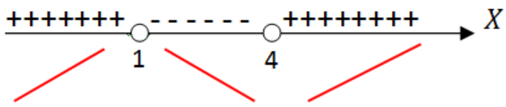
Solução:

A primeira derivada nos dá $f'(x) = x^2 - 5x + 4$

Se há ponto de máximo ou mínimo, seguindo a ideia para a função quadrática, devemos ter $f'(x) = 0$, ou seja: $x^2 - 5x + 4 = 0 \ \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Substituindo em $f'(x)$ valores reais para x, ou fazendo, formalmente, o estudo do sinal desta função derivada (algo já praticado pelos estudantes, no estudo de inequações), encontramos:

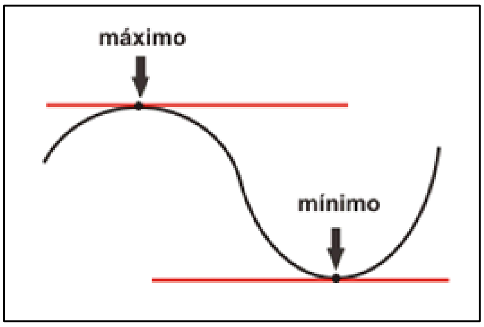
Estudo do sinal de $f'(x)$:



Para $x \in \mathbb{R}$, o estudo do sinal da derivada da função $y = f(x)$, indica que para $x = 1$, temos um ponto de mudança de crescimento da função, com a derivada passando de positiva para negativa, indicando um ponto de ordenada máxima (ponto de máximo), e para $x = 4$, temos um ponto de mudança de crescimento da função, com a derivada passando de negativa para positiva, indicando um ponto de ordenada mínima (ponto de mínimo).

Esse resultado, em virtude do que foi compreendido para a função polinomial do 2º grau, nos leva a um esboço do gráfico como apresentado na Figura 16, apenas com foco na derivada da função, sem levar em consideração outros detalhes.

Figura 16 – Esboço gráfico de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1$.

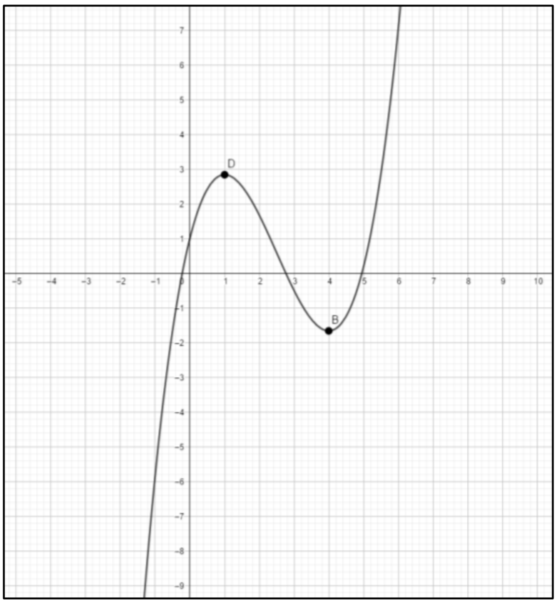


Fonte: Produzida pelo autor.

O esboço na Figura 16 é uma percepção natural por parte dos estudantes, diante da extensão do que foi compreendido com a função polinomial do 2º, para funções polinomiais de grau maior do que 2.

Usando o GeoGebra, obtemos o gráfico da função dada, como mostra a Figura 17, ratificando o entendimento.

Figura 17 – Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1}$.



Fonte: Produzida pelo autor, com o GeoGebra.

O problema, então, pode ser solucionado e ter o gráfico como verificação dos resultados.

a) Assim, devemos ter, sendo $x \in \mathbb{R}$:

- A função $f(x)$ é crescente quando $x^2 - 5x + 4 > 0$, ou seja, $x < 1$ ou $x > 4$.
- A função $f(x)$ é decrescente quando $x^2 - 5x + 4 < 0$, ou seja, $1 < x < 4$.

b) Para obtermos os pontos de ordenada máxima ou mínima, devemos esclarecer que a função assume valores tão grandes quanto se queira, tendendo a $+\infty$, conforme o valor de x tenda para $+\infty$, como mostra o gráfico, e assumirá valores que tendem a $-\infty$, conforme o valor de x tenda para $-\infty$.

Essa noção de $+\infty$ e $-\infty$ é algo, normalmente, explorado em conjuntos numéricos, de modo que os estudantes não devem sentir impacto negativo quando da exploração dessa linguagem.

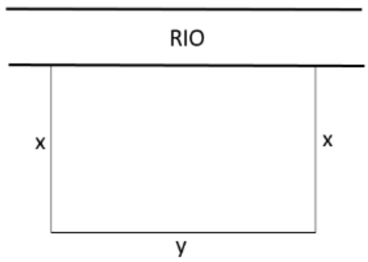
Nessa proposta, julgamos desnecessária a exploração de uma abordagem mais rígida no trato de limites no infinito, nesse momento. Esse tópico poderá ser abordado com uma turma de estudantes que façam a opção em aprofundar os estudos na área de Matemática, no terceiro ano, como será apresentado adiante neste trabalho.

Resta, então, deixar clara a ideia de que existem, dentro de determinados intervalos, valores de x que têm ordenada máxima ou mínima. Diremos, nesses casos, que a função possui máximo(s) e/ou mínimo(s) local(ais) (ou relativo(s)).

Fazendo, na função $y = f(x)$, $x = 1$ e $x = 4$, que são valores que anulam a derivada, encontramos os pontos $(1; 2{,}83)$ e $(4; -1{,}67)$, obtendo os dois pontos, respectivamente, com ordenadas máxima e mínima, locais.

Agora, após formalizarmos a ideia de máximos e mínimos relativos, o Problema 4 trata de uma situação de otimização.

Problema 4: Uma área retangular será limitada por uma cerca de arame em três de seus lados e por um rio reto no quarto lado, como mostra o esboço abaixo. Ache as dimensões do terreno de área máxima que pode ser cercado com $500\ m$ de arame.



Solução:

O retângulo do problema, de lados x e y, é tal que $2x + y = 500$.

Logo: $y = 500 - 2x$

Como a área desse retângulo é dada por $S = y \cdot x$, devemos ter:

$$S = y \cdot x = (500 - 2x).x \quad \therefore \quad S(x) = -2x^2 + 500x$$

Desse modo, devemos ter: $S'(x) = -4x + 500 = 0$

Assim, $x = 125m$ e $y = 250m$.

Nesse caso, a área máxima é $S(125) = 31.250$ (m^2).

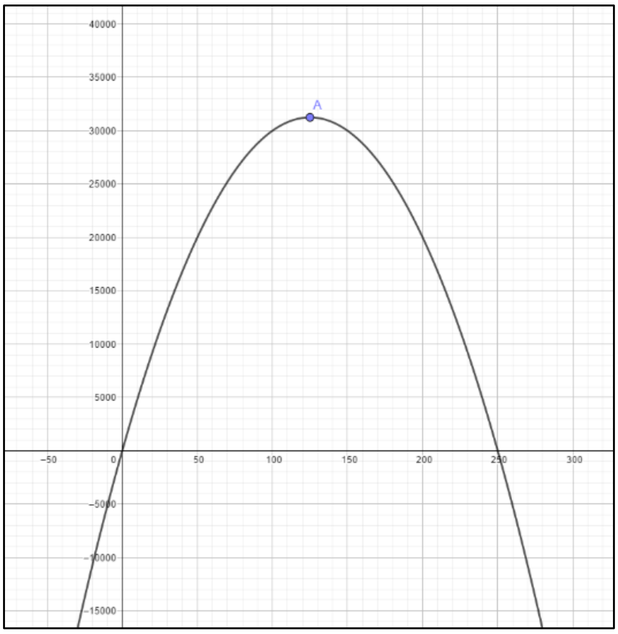
O estudo do sinal de $S'(x) = -4x + 500$, nos dá:

$x < 125 \quad \Rightarrow \quad S'(x)$ é $positiva\ e\ S(x)$ é $crescente.$

$x > 125 \quad \Rightarrow \quad S'(x)$ é $negativa\ e\ S(x)$ é $decrescente.$

O esboço do gráfico da função $S(x) = -2x^2 + 500x$ é apresentado na Figura 18, colaborando com a solução, onde o vértice da parábola está representado pelo ponto $A = (125; 31.250)$.

Figura 18 – Gráfico da função $S(x) = -2x^2 + 500x$.

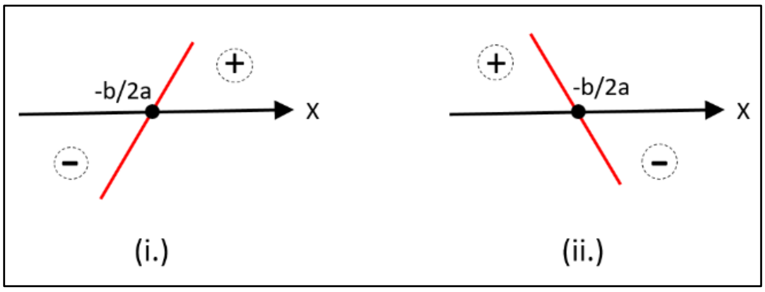


Fonte: Produzida pelo autor, com o GeoGebra.

Outras questões interessantes já poderiam ser tratadas nesse momento, como, por exemplo, uma justificativa para a relação entre o parâmetro a da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais, e $a \neq 0$, e a concavidade da parábola que seria a representação gráfica de $f(x)$. Nesse caso, teremos $f'(x) = 2ax + b$, ou seja, uma função polinomial do 1º grau, que é crescente, se $a > 0$, e é decrescente, se tivermos $a < 0$, como já sabem os estudantes, pois estudaram anteriormente tal função.

O zero da função $f'(x) = 2ax + b$, é $x = -b/2a$, e, desse modo, a Figura 19 apresenta os esquemas que mostram o sinal dessa derivada.

Figura 19 – Sinal da derivada para $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.



Fonte: Produzida pelo autor.

Dessa forma, se $a > 0$, o sinal da derivada, conforme o esquema (i.), na Figura 19, passa de negativo para positivo, de modo que $x = -b/2a$ é a abscissa do *ponto de mínimo*, e, se $a < 0$, o sinal da derivada, conforme o esquema (ii.), também na Figura 19, passa de positivo para negativo, de modo que $x = -b/2a$ é a abscissa do *ponto de máximo.*

No caso da função polinomial do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, ficará fácil frisar a existência de um máximo ou mínimo *absoluto,* em todo seu domínio.

Para a primeira série do Ensino Médio, com o apoio inicial da Física, produzimos um contato com o Cálculo, no tópico derivada de uma função polinomial, abrangendo o cálculo da derivada, sua interpretação geométrica e suas aplicações, evitando demonstrações formais, buscando apoio nos tópicos já conhecidos dos estudantes, contextualizados sem o Cálculo.

No decorrer dos conteúdos seguintes, normalmente estudados nesta série, como as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, não vemos conveniência em apresentar uma demonstração para o cálculo das derivadas dessas funções, por haver bastantes particularidades, diferenciando cada caso. Isso não impede os professores de mencionarem que a derivada da função $f(x) = sen\ x$ é $f'(x) = cos\ x$, e até mesmo, apresentar uma tabela com as derivadas das principais funções. O primeiro passo foi dado. Na terceira série, porém, teremos a oportunidade de dar um tratamento mais amplo, apresentando mais detalhes dos gráficos (como pontos de inflexão), ampliando os resultados obtidos com as funções polinomiais para as funções algébricas e as transcendentes, demonstrando alguns resultados operatórios e discutindo os limites fundamentais e a continuidade das funções.

3.2 Proposta para o segundo ano do Ensino Médio

No segundo ano, em Física, o Cálculo continuará presente sempre que o conteúdo a ser estudado abordar taxa de variação instantânea. Isso acontecerá, principalmente, no estudo das oscilações. Agora, porém, teremos a derivada de funções trigonométricas, que, normalmente, representam matematicamente as expressões para o espaço em uma direção, para a velocidade e para a aceleração de um corpo que esteja, por exemplo, em movimento harmônico simples (MHS).

Para a Matemática, teremos o acréscimo de algumas regras de derivação. O estudo do binômio de Newton será uma oportunidade para a demonstração de que que a derivada da função $f(x) = x^n$, com n natural, é $f'(x) = n.x^{n-1}$. Ainda nesse capítulo, poderá ser apresentada a regra da cadeia para o caso em que $f(x) = g^n(x)$. As funções trigonométricas podem ter suas derivadas apresentadas, caso o assunto trigonometria seja abordado nessa série, sem a necessidade de demonstrações, pois seria necessário o conhecimento de alguns limites que, preferencialmente, serão abordados no terceiro ano.

3.2.1 Proposta para o segundo ano do Ensino Médio - Física

Para a Física, agora, a taxa de variação instantânea é vista como a derivada de uma função. Diversas grandezas físicas variam com o tempo, de modo que a taxa de variação média ou instantânea serão obtidas como realizado em Cinemática.

A velocidade, a aceleração e a potência, por exemplo, serão assuntos presentes, também, na segunda série, no estudo do movimento harmônico, das equações das ondas, do fluxo térmico, entre outros.

Agora, porém, as funções envolvidas podem não ser polinomiais, como é o caso das equações das ondas, que são, normalmente, trigonométricas. Nesse caso, chega a oportunidade de os estudantes conhecerem as derivadas das funções trigonométricas fundamentais, $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$, caso já não tenha havido um contato sobre esse tópico, quando o(a) professor(a) de Matemática abordou as funções trigonométricas, normalmente, no final da primeira série ou início da segunda série do Ensino Médio. Não haverá dificuldade em afirmar, mesmo sem demonstração, por parte dos professores de Física, que:

- Se $f(x) = sen\,x$, então $f'(x) = cos\,x$
- Se $f(x) = cos\,x$, então $f'(x) = -sen\,x$

E, ainda:

Sendo g(x) uma função que possui derivada, temos:

- Se $f(x) = sen[g(x)]$, então $f'(x) = g'(x)\,.\,cos[g(x)]$.
- Se $f(x) = cos[g(x)]$, então $f'(x) = -g'(x)\,.\,sen[g(x)]$.

Afirmar algo sobre derivada de uma função não causará uma reação de desconhecimento por parte dos estudantes. Eles já sabem o que é a derivada de uma função, e viram as suas aplicações na Física e na Matemática.

Desse modo, os problemas a seguir, terão um mesmo significado na interpretação dos estudantes, pois, agora, eles sabem derivar as funções em questão:

1.) A equação horária do movimento de um corpo é dada por $S(t) = 4t^2$. Qual a velocidade desse corpo no instante $t = 2s$?

2.) A equação horária do movimento de um corpo é dada por $S(t) = sen\,t$. Qual a velocidade desse corpo no instante $t = \pi\ s$?

Ainda, porém, estamos carentes de regras de derivação. Ficaríamos limitados, caso fosse solicitada a aceleração instantânea para um corpo em que a equação horária do espaço seja, por exemplo, $S(t) = sen(2t^2 + 5)$.

É fato que, sendo $v(t)$ e $a(t)$, respectivamente, a velocidade e a aceleração instantâneas, suas equações seriam obtidas por derivação:

$$v(t) = S'(t) = (2t^2 + 5)'.cos(2t^2 + 5) = 4t.cos(2t^2 + 5)$$

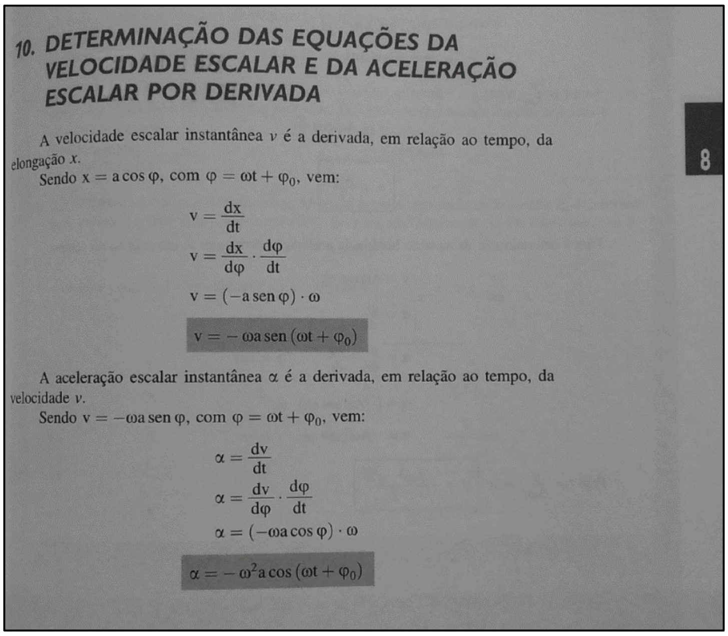
Nesse caso, teríamos, $a(t) = v'(t)$, e nós não temos ainda a derivada do produto de duas funções.

Se formos abraçar todas as possibilidades, o foco seria aprender as propriedades operatórias da derivação de funções, mas esse não é o objeto de estudo da Física e da Matemática, pelo menos, nesse momento.

Mas, a Física foi agraciada por leis mais simples, que recorrem à derivação de funções conforme nos limitamos até agora. A Figura 20 mostra um exemplo que aborda a taxa de variação instantânea para o cálculo da velocidade e da aceleração de um corpo que realiza um *movimento harmônico simples* (MHS).

Trata-se de mais uma contribuição dada pelos autores da coleção Física Clássica, Calçada e Sampaio, citados neste trabalho, mantendo o uso da derivada desde as primeiras páginas desta coleção que aborda toda a Física do Ensino Médio.

Figura 20 – Velocidade e aceleração no MHS.



10. DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA VELOCIDADE ESCALAR E DA ACELERAÇÃO ESCALAR POR DERIVADA

8

A velocidade escalar instantânea v é a derivada, em relação ao tempo, da elongação x.

Sendo $x = a\cos\varphi$, com $\varphi = \omega t + \varphi_0$, vem:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = (-a\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \omega$$

$$\boxed{v = -\,\omega a\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)}$$

A aceleração escalar instantânea α é a derivada, em relação ao tempo, da velocidade v.

Sendo $v = -\omega a\,\text{sen}\,\varphi$, com $\varphi = \omega t + \varphi_0$, vem:

$$\alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\alpha = (-\omega a\cos\varphi) \cdot \omega$$

$$\boxed{\alpha = -\,\omega^2 a\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Fonte: CALÇADA; SAPAIO, Vol. 4,1998 (p. 299)

A Física irá contribuir nas três séries com o estudo do Cálculo, explorando a derivada de uma função quando for necessário obter a taxa de variação em um ponto.

3.2.2 Proposta para o segundo ano do Ensino Médio - Matemática

Certamente, em Matemática, a derivada terá uma importância maior para os estudantes em tópicos abordados na primeira e na terceira série, onde são explorados as funções, a geometria analítica e os polinômios. Porém, a manutenção do que foi aprendido sobre derivada na primeira série é fundamental para que os estudantes mantenham contato com o assunto. A Física, naturalmente, vai manter esse contato, como foi visto.

Mas, temos a oportunidade, em binômio de Newton, de desenvolver mais algumas propriedades operacionais da derivada.

Após uma revisão da definição de derivada, e já com os conhecimentos sobre binômio de Newton, a demonstração de que $(x^n)' = n.x^{n-1}$, com x real e n natural, é o próximo passo.

A demonstração consiste em encontrar a taxa de variação média da função $f(x) = x^n$ e tomar o seu limite para um acréscimo h tendendo a zero.

Para $n = 0$ e $n = 1$, temos situações elementares. Façamos o desenvolvimento para $n > 1$.

O quociente é:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}$$

Ou seja:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + h.(\binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1})$$

Tomando o limite para h tendendo a zero, obtemos o resultado esperado:

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$

Os estudantes já praticaram esse resultado no primeiro ano, em Física e em Matemática, tendo, assim, com esse resultado, a formalização de sua validade.

É importante frisarmos aos estudantes que esse resultado é válido para o caso em que n é um número real qualquer, e que a demonstração desse fato poderá ser feita no terceiro ano, que é o que defendemos nessa proposta.

Vamos explorar, agora, o desenvolvimento do binômio de Newton, e as propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de um número real por uma função, conhecidas já no primeiro ano.

Por exemplo, pode ser solicitada aos estudantes a derivada da função $f(x) = (x^2 + 2x)^3$.

É imediata a ideia de desenvolver a potência e, em seguida, calcular a derivada da função.

Devemos ter: $f(x) = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3$

Assim: $f'(x) = 6x^5 + 30x^4 + 48x^3 + 24x^2 = 6x^2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$

A ideia, agora, é apresentar uma nova regra de derivação. A regra da cadeia vai tomando forma em exemplos, como já tivemos para a função $f(x) = sen[g(x)]$.

Considerando que existe a derivada de $g(x) \neq 0$, podemos escrever o seguinte resultado:

Se $f(x) = [g(x)]^n$, com $n \in \mathbb{R}$, então: $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$

Para o exemplo, teremos que $g(x) = x^2 + 2x$, e, desse modo:

$$f'(x) = 3.(x^2 + 2x)^2.(2x + 2) = 6x^2.(x + 2)^2.(x + 1)$$

Logo: $f'(x) = 6x^2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$

Obviamente, diante dos conteúdos a serem apresentados na segunda série, não há urgência em apresentar esse resultado.

Essa propriedade será mais expressiva para o estudante se a função em questão tiver um expoente de valor elevado (ou não inteiro), inviabilizando o desenvolvimento do binômio, ou mesmo se tivéssemos a potência de um polinômio com mais de duas parcelas.

Assim, se tivéssemos $f(x) = (x^2 + 2x)^{20}$, o estudante perceberia a força da nova regra de derivação, pois seria inviável o desenvolvimento do binômio.

O momento, também, é propício para apresentarmos outras regras de derivação, como, por exemplo, a regra para a derivada do produto de duas funções.

Podemos apresentar, para duas funções deriváveis, $g(x)$ e $h(x)$, que:

Se $f(x) = g(x).h(x)$, então $f'(x) = g(x).h'(x) + g'(x).h(x)$

O exemplo dado pode ser mantido, modificando a apresentação da função, da seguinte forma:

$$f(x) = (x^2 + 2x)^3 = x^3(x + 2)^3$$

Assim, pela regra do produto, temos: $f'(x) = x^3.3(x + 2)^2 + 3x^2.(x + 2)^3$

Ou seja: $f'(x) = 3x^2.(x + 2)^2.(2x + 2) = 6x^2.(x + 2)^2.(x + 1)$

De um modo recreativo, utilizando aulas extras, podemos avançar com algumas regras de derivação. Os resultados obtidos não nos trazem aplicações novas para o que se sabe de derivada, de modo que tal abordagem é, apenas, um aproveitamento de tópicos, normalmente vistos na segunda série, para dar validade a algumas regras de derivação, sem necessidade, inclusive, de provas avaliativas, mas é um estímulo para dar continuidade ao estudo do Cálculo.

Claro, já tínhamos como demonstrar esta última regra de derivação, a partir da definição de derivada, mas é um resultado que não será aplicado, com relevância, a qualquer dos tópicos abordados nesta série.

CAPÍTULO 4

PROPOSTA PARA O ESTUDO DE DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES PARA O TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO.

Nesse capítulo, dada a experiência adquirida pelos estudantes nos dois primeiros anos, podemos abordar o Cálculo de forma mais consistente, com as demonstrações da maioria dos teoremas que serão apresentados (alguns já citados nos dois primeiros anos), fazendo a abordagem das diversas regras operacionais de derivação e apresentando caminhos para o esboço do gráfico de funções contínuas, sendo estas algébricas ou transcendentes.

4.1 Proposta para o terceiro ano do Ensino Médio – Física

Para a Física, continuará a abordagem da taxa de variação em um ponto com o uso da derivada. Alguns tópicos importantes poderão ser tratados de maneira mais abrangente, por exemplo, no estudo do eletromagnetismo.

4.2 Proposta para o terceiro ano do Ensino Médio – Matemática

Satisfeitos com o apoio da Química, da Biologia e, principalmente, da Física, por fazerem do Cálculo um instrumento presente, quando necessário, agora, na terceira série, os professores de Matemática poderão formalizar os estudos realizados sobre o Cálculo nas duas séries anteriores, fazendo o estudo das derivadas das funções fundamentais, algébricas e transcendentes, bem como das suas aplicações, relevantes para o Ensino Médio.

A partir da definição de taxa de variação média, seguida da definição de taxa de variação num ponto, chegaremos à definição de derivada. A expressão “taxa de variação num ponto” nos liberta da concepção que temos da ligação entre derivada e “taxa de variação instantânea”, de modo que a variação pode ser em relação a uma grandeza qualquer, e não tão somente em relação ao tempo.

Destaquemos um dos livros de grande sucesso na década de 80, para a terceira série do Ensino Médio, da coleção Tópicos de Matemática, tendo Gelson Iezzi como um dos autores, pela Atual Editora. O livro adota linguagem simples e ares de modernidade em sua diagramação, com muitas ilustrações em sua abordagem.

Na Figura 21, temos a capa desse livro e a apresentação do índice que mostra o conteúdo de Cálculo que é abordado no capítulo V, penúltimo capítulo do livro, com título bastante pertinente: *Rudimentos de Cálculo*.

Figura 21 – Capa e Índice – Tópicos de Matemática, vol. 3.

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, Capa e Índice).

O livro aborda, em seu índice, os seguintes pontos, em ordem de apresentação:

1. Taxas de Variação
2. Taxa de Variação Média
3. Taxa de Variação no Ponto
4. Existência da Derivada
5. Derivação da Função Polinomial
6. Máximos e Mínimos – Gráficos
7. Gráficos – Concavidade e Inflexão
8. Máximos e Mínimos – Aplicações
9. Continuidade e Limites: Noções
10. Continuidade e Limites: Propriedades
11. Limites: Os Símbolos $+\infty$ e $-\infty$
12. Dois Limites Fundamentais
13. O Teorema do Valor Médio
14. Regras de Derivação.

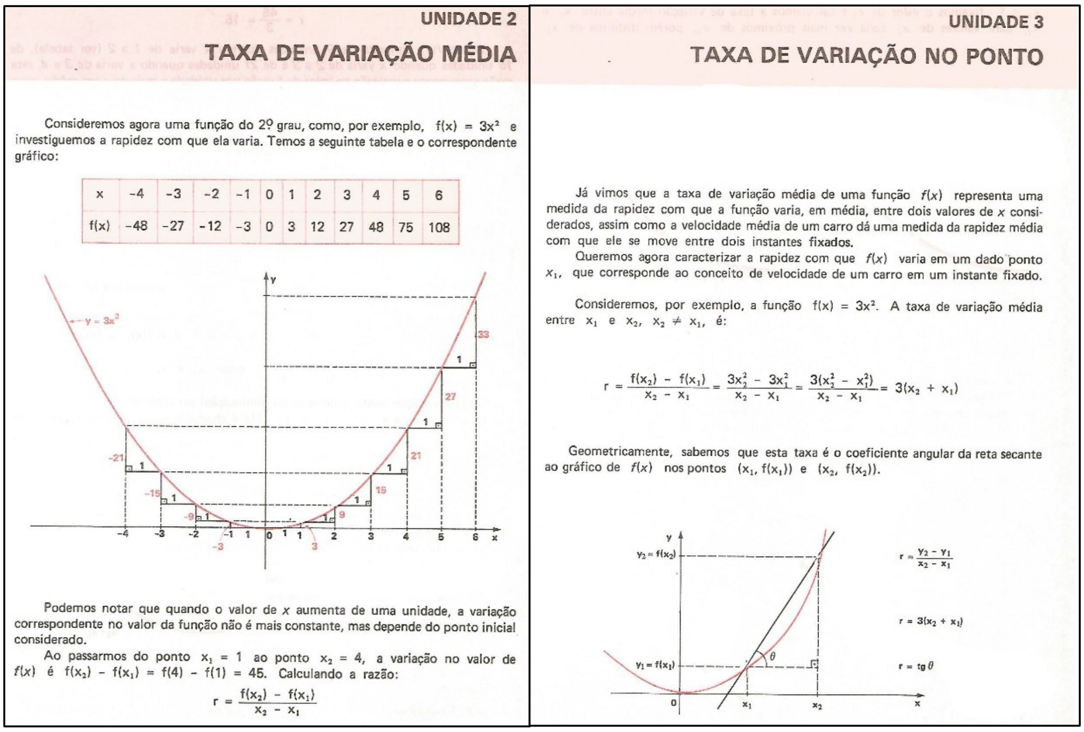
Para um primeiro curso de Cálculo, com os pré-requisitos atendidos, que sejam os conhecimentos sobre funções, geometria analítica e polinômios, acreditamos que essa programação compreenda o que há de essencial. Dada a existência do livro, que vai ao encontro da proposta de ensino do Cálculo, para a terceira série do Ensino Médio, que aqui defendemos, apresentamos comentários sobre alguns pontos dos tópicos que nele são abordados.

4.2.1 Taxa de Variação no Ponto

É essa a expressão que os autores usam para a derivada de uma função $f(x)$ no ponto de abscissa x_1. Desde o início, o tratamento da derivada indica que a taxa de variação pode ser em relação não apenas ao tempo, como acontece, na maioria das vezes, na Física. A essência do que apresentamos para a primeira série do Ensino Médio foi mantida.

As Figuras 22 e 23 apresentam trechos do livro que buscam a definição de derivada.

Figura 22 – Taxa de Variação Média e Instantânea.



UNIDADE 2

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Consideremos agora uma função do 2º grau, como, por exemplo, $f(x) = 3x^2$ e investiguemos a rapidez com que ela varia. Temos a seguinte tabela e o correspondente gráfico:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-48	-27	-12	-3	0	3	12	27	48	75	108

Podemos notar que quando o valor de x aumenta de uma unidade, a variação correspondente no valor da função não é mais constante, mas depende do ponto inicial considerado.

Ao passarmos do ponto $x_1 = 1$ ao ponto $x_2 = 4$, a variação no valor de $f(x)$ é $f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(1) = 45$. Calculando a razão:

$$r = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

UNIDADE 3

TAXA DE VARIAÇÃO NO PONTO

Já vimos que a taxa de variação média de uma função $f(x)$ representa uma medida da rapidez com que a função varia, em média, entre dois valores de x considerados, assim como a velocidade média de um carro dá uma medida da rapidez média com que ele se move entre dois instantes fixados.

Queremos agora caracterizar a rapidez com que $f(x)$ varia em um dado ponto x_1, que corresponde ao conceito de velocidade de um carro em um instante fixado.

Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = 3x^2$. A taxa de variação média entre x_1 e x_2, $x_2 \neq x_1$, é:

$$r = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3x_2^2 - 3x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = 3(x_2 + x_1)$$

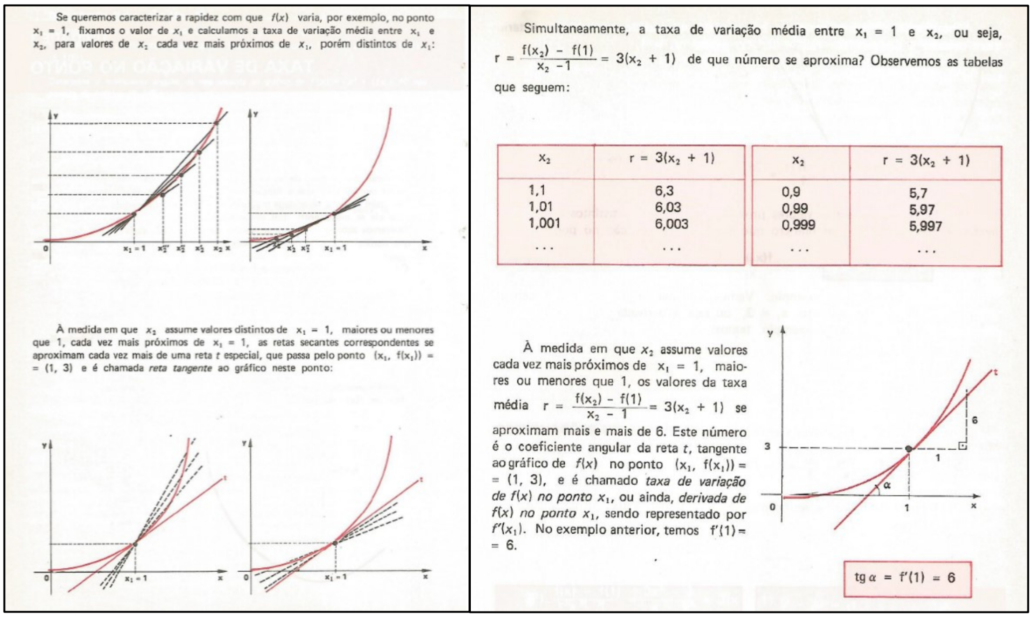
Geometricamente, sabemos que esta taxa é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $f(x)$ nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 171 e 175).

Notemos, na Figura 22, que dado o gráfico de uma função $y = f(x)$, e seus pontos de abscissas x_1 e x_2, temos a interpretação geométrica da taxa de variação média entre esses pontos, como sendo o coeficiente angular da reta secante ao gráfico da $f(x)$ que passa pelos pontos em questão, ou seja, $(x_1, f(x_1))\ e\ (x_2, f(x_2))$.

A taxa de variação no ponto, também na Figura 22, é seguida dos trechos mostrados na Figura 23, que levam à definição intuitiva de derivada e à respectiva interpretação geométrica.

Figura 23 – Definição intuitiva de derivada.



Se queremos caracterizar a rapidez com que $f(x)$ varia, por exemplo, no ponto $x_1 = 1$, fixamos o valor de x_1 e calculamos a taxa de variação média entre x_1 e x_2, para valores de x_2 cada vez mais próximos de x_1, porém distintos de x_1:

À medida em que x_2 assume valores distintos de $x_1 = 1$, maiores ou menores que 1, cada vez mais próximos de $x_1 = 1$, as retas secantes correspondentes se aproximam cada vez mais de uma reta t especial, que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1)) = (1, 3)$ e é chamada *reta tangente* ao gráfico neste ponto:

Simultaneamente, a taxa de variação média entre $x_1 = 1$ e x_2, ou seja, $r = \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} = 3(x_2 + 1)$ de que número se aproxima? Observemos as tabelas que seguem:

x_2	$r = 3(x_2 + 1)$
1,1	6,3
1,01	6,03
1,001	6,003
...	...

x_2	$r = 3(x_2 + 1)$
0,9	5,7
0,99	5,97
0,999	5,997
...	...

À medida em que x_2 assume valores cada vez mais próximos de $x_1 = 1$, maiores ou menores que 1, os valores da taxa média $r = \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} = 3(x_2 + 1)$ se aproximam mais e mais de 6. Este número é o coeficiente angular da reta t, tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1)) = (1, 3)$, e é chamado *taxa de variação de $f(x)$ no ponto x_1*, ou ainda, *derivada de $f(x)$ no ponto x_1*, sendo representado por $f'(x_1)$. No exemplo anterior, temos $f'(1) = 6$.

$\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 6$

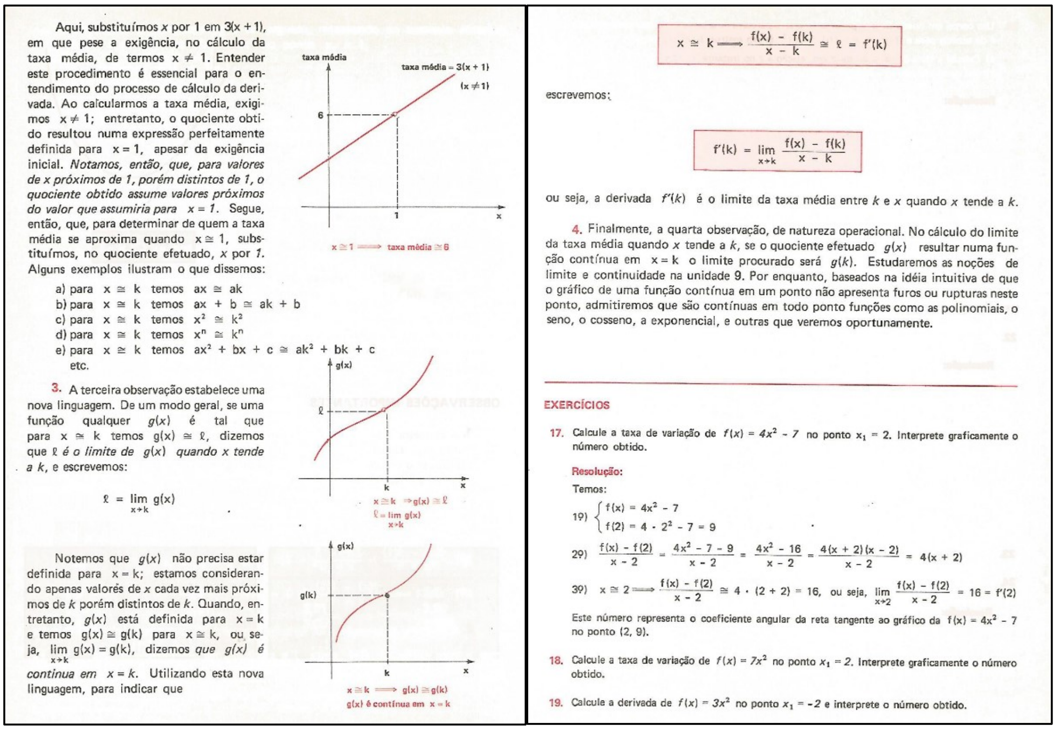
Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 176 e 177).

Notemos que a abordagem segue de forma muito próxima ao que foi feito na Física, sendo agora adotada uma função de variável x que não é, como na cinemática, necessariamente, o tempo.

Ou seja, estamos nos afastando da Física para dar um contexto geral para a definição de derivada de uma função. No primeiro ano, o ideal foi ter as duas disciplinas, inicialmente, concatenadas.

Focando ainda o livro do terceiro ano da coleção Tópicos de Matemática, como mostra a Figura 24, na sequência, os autores fazem um breve comentário sobre limite e continuidade de uma função para, só assim, definir a derivada da forma que a conhecemos.

Figura 24 – Limite, continuidade e a definição de derivada.



Aqui, substituímos x por 1 em $3(x + 1)$, em que pese a exigência, no cálculo da taxa média, de termos $x \neq 1$. Entender este procedimento é essencial para o entendimento do processo de cálculo da derivada. Ao calcularmos a taxa média, exigimos $x \neq 1$; entretanto, o quociente obtido resultou numa expressão perfeitamente definida para $x = 1$, apesar da exigência inicial. *Notamos, então, que, para valores de x próximos de 1, porém distintos de 1, o quociente obtido assume valores próximos do valor que assumiria para x = 1.* Segue, então, que, para determinar de quem a taxa média se aproxima quando $x \cong 1$, substituímos, no quociente efetuado, x por 1. Alguns exemplos ilustram o que dissemos:

a) para $x \cong k$ temos $ax \cong ak$
b) para $x \cong k$ temos $ax + b \cong ak + b$
c) para $x \cong k$ temos $x^2 \cong k^2$
d) para $x \cong k$ temos $x^n \cong k^n$
e) para $x \cong k$ temos $ax^2 + bx + c \cong ak^2 + bk + c$
etc.

3. A terceira observação estabelece uma nova linguagem. De um modo geral, se uma função qualquer $g(x)$ é tal que para $x \cong k$ temos $g(x) \cong \ell$, dizemos que *ℓ é o limite de $g(x)$ quando x tende a k*, e escrevemos:

$$\ell = \lim_{x \to k} g(x)$$

Notemos que $g(x)$ não precisa estar definida para $x = k$; estamos considerando apenas valores de x cada vez mais próximos de k porém distintos de k. Quando, entretanto, $g(x)$ está definida para $x = k$ e temos $g(x) \cong g(k)$ para $x \cong k$, ou seja, $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$, dizemos *que $g(x)$ é contínua em $x = k$*. Utilizando esta nova linguagem, para indicar que

$$\boxed{x \cong k \Longrightarrow \frac{f(x) - f(k)}{x - k} \cong \ell = f'(k)}$$

escrevemos:

$$\boxed{f'(k) = \lim_{x \to k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k}}$$

ou seja, a derivada $f'(k)$ é o limite da taxa média entre k e x quando x tende a k.

4. Finalmente, a quarta observação, de natureza operacional. No cálculo do limite da taxa média quando x tende a k, se o quociente efetuado $g(x)$ resultar numa função contínua em $x = k$ o limite procurado será $g(k)$. Estudaremos as noções de limite e continuidade na unidade 9. Por enquanto, baseados na idéia intuitiva de que o gráfico de uma função contínua em um ponto não apresenta furos ou rupturas neste ponto, admitiremos que são contínuas em todo ponto funções como as polinomiais, o seno, o cosseno, a exponencial, e outras que veremos oportunamente.

EXERCÍCIOS

17. Calcule a taxa de variação de $f(x) = 4x^2 - 7$ no ponto $x_1 = 2$. Interprete graficamente o número obtido.

Resolução:

Temos:

1º) $\begin{cases} f(x) = 4x^2 - 7 \\ f(2) = 4 \cdot 2^2 - 7 = 9 \end{cases}$

2º) $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{4x^2 - 7 - 9}{x - 2} = \dfrac{4x^2 - 16}{x - 2} = \dfrac{4(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = 4(x + 2)$

3º) $x \cong 2 \Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} \cong 4 \cdot (2 + 2) = 16$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 16 = f'(2)$

Este número representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da $f(x) = 4x^2 - 7$ no ponto $(2, 9)$.

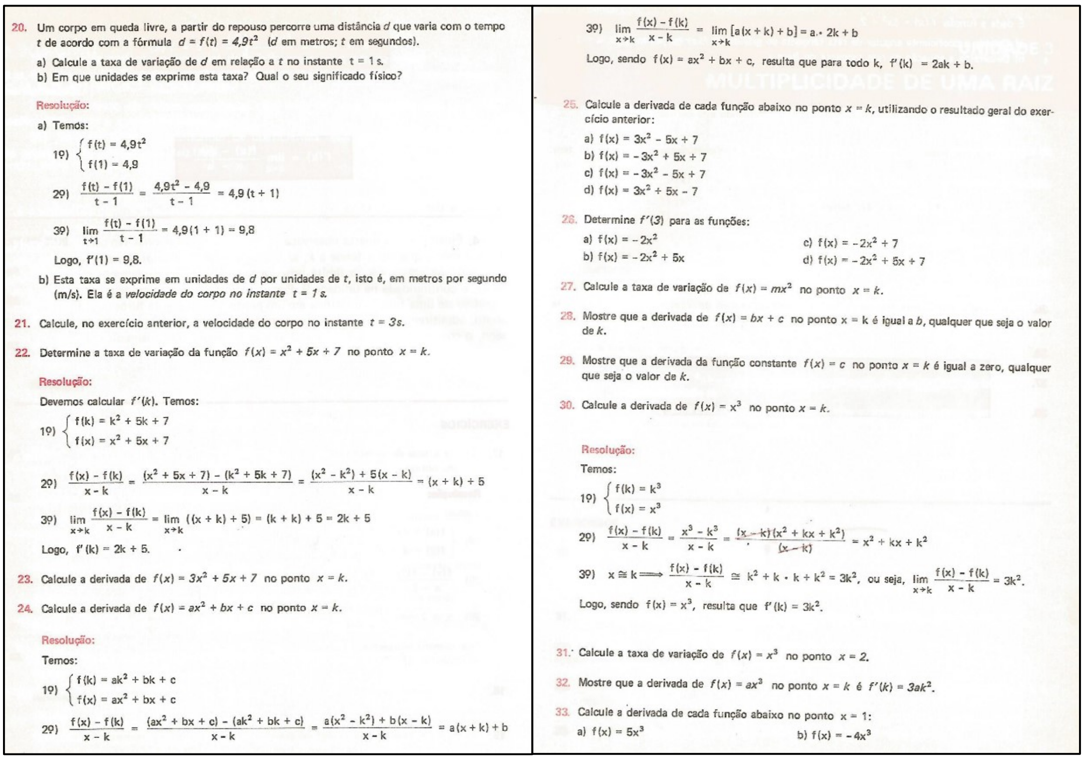
18. Calcule a taxa de variação de $f(x) = 7x^2$ no ponto $x_1 = 2$. Interprete graficamente o número obtido.

19. Calcule a derivada de $f(x) = 3x^2$ no ponto $x_1 = -2$ e interprete o número obtido.

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 180 e 181).

A Figura 25 apresenta alguns exercícios propostos nesta etapa inicial do capítulo.

Figura 25 – Exercícios sobre a definição de derivada.



20. Um corpo em queda livre, a partir do repouso percorre uma distância d que varia com o tempo t de acordo com a fórmula $d = f(t) = 4{,}9t^2$ (d em metros; t em segundos).

a) Calcule a taxa de variação de d em relação a t no instante $t = 1$ s.
b) Em que unidades se exprime esta taxa? Qual o seu significado físico?

Resolução:

a) Temos:

1º) $\begin{cases} f(t) = 4{,}9t^2 \\ f(1) = 4{,}9 \end{cases}$

2º) $\dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \dfrac{4{,}9t^2 - 4{,}9}{t - 1} = 4{,}9(t + 1)$

3º) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = 4{,}9(1 + 1) = 9{,}8$

Logo, $f'(1) = 9{,}8$.

b) Esta taxa se exprime em unidades de d por unidades de t, isto é, em metros por segundo (m/s). Ela é a *velocidade do corpo no instante t = 1 s.*

21. Calcule, no exercício anterior, a velocidade do corpo no instante $t = 3s$.

22. Determine a taxa de variação da função $f(x) = x^2 + 5x + 7$ no ponto $x = k$.

Resolução:

Devemos calcular $f'(k)$. Temos:

1º) $\begin{cases} f(k) = k^2 + 5k + 7 \\ f(x) = x^2 + 5x + 7 \end{cases}$

2º) $\dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = \dfrac{(x^2 + 5x + 7) - (k^2 + 5k + 7)}{x - k} = \dfrac{(x^2 - k^2) + 5(x - k)}{x - k} = (x + k) + 5$

3º) $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim\limits_{x \to k} ((x + k) + 5) = (k + k) + 5 = 2k + 5$

Logo, $f'(k) = 2k + 5$.

23. Calcule a derivada de $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ no ponto $x = k$.

24. Calcule a derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ no ponto $x = k$.

Resolução:

Temos:

1º) $\begin{cases} f(k) = ak^2 + bk + c \\ f(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$

2º) $\dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = \dfrac{(ax^2 + bx + c) - (ak^2 + bk + c)}{x - k} = \dfrac{a(x^2 - k^2) + b(x - k)}{x - k} = a(x + k) + b$

3º) $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim\limits_{x \to k} [a(x + k) + b] = a \cdot 2k + b$

Logo, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, resulta que para todo k, $f'(k) = 2ak + b$.

25. Calcule a derivada de cada função abaixo no ponto $x = k$, utilizando o resultado geral do exercício anterior:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$
b) $f(x) = -3x^2 + 5x + 7$
c) $f(x) = -3x^2 - 5x + 7$
d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$

26. Determine $f'(3)$ para as funções:

a) $f(x) = -2x^2$
b) $f(x) = -2x^2 + 5x$
c) $f(x) = -2x^2 + 7$
d) $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$

27. Calcule a taxa de variação de $f(x) = mx^2$ no ponto $x = k$.

28. Mostre que a derivada de $f(x) = bx + c$ no ponto $x = k$ é igual a b, qualquer que seja o valor de k.

29. Mostre que a derivada da função constante $f(x) = c$ no ponto $x = k$ é igual a zero, qualquer que seja o valor de k.

30. Calcule a derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $x = k$.

Resolução:

Temos:

1º) $\begin{cases} f(k) = k^3 \\ f(x) = x^3 \end{cases}$

2º) $\dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = \dfrac{x^3 - k^3}{x - k} = \dfrac{\cancel{(x - k)}(x^2 + kx + k^2)}{\cancel{(x - k)}} = x^2 + kx + k^2$

3º) $x \cong k \Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cong k^2 + k \cdot k + k^2 = 3k^2$, ou seja, $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} = 3k^2$.

Logo, sendo $f(x) = x^3$, resulta que $f'(k) = 3k^2$.

31. Calcule a taxa de variação de $f(x) = x^3$ no ponto $x = 2$.

32. Mostre que a derivada de $f(x) = ax^3$ no ponto $x = k$ é $f'(k) = 3ak^2$.

33. Calcule a derivada de cada função abaixo no ponto $x = 1$:

a) $f(x) = 5x^3$
b) $f(x) = -4x^3$

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 182 e 183).

Notemos, assim, que a abordagem feita neste livro é de linguagem bastante acessível aos estudantes do Ensino Médio. Com exercícios explorados em ordem crescente de dificuldade, os autores mantêm essa forma de apresentação dos conteúdos em todos os tópicos explorados neste capítulo sobre o Cálculo.

Defendemos que essa forma de abordagem atende aos objetivos de aplicarmos o Cálculo em pontos da Matemática e outras ciências que sejam essenciais para uma boa formação no Ensino Médio, como o estudo das taxas de variação, o esboço e a interpretação do gráfico de uma função contínua, e a resolução de problemas de máximos e mínimos e otimização.

4.2.2 Existência da Derivada

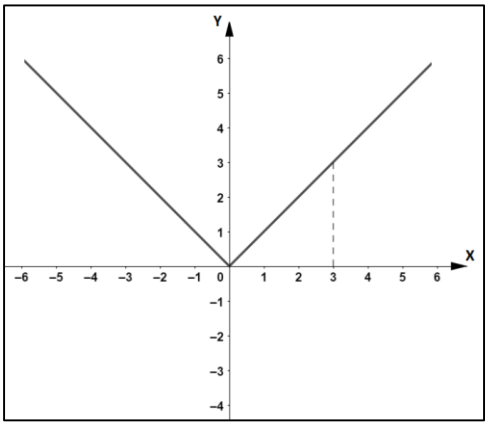
Passada a revisão nas unidades anteriores, a abordagem agora é novidade. Se, para as funções polinomiais, não havia restrição para se achar a derivada, agora, devemos apresentar situações em que ela não existe.

Calculemos a derivada da função $f(x) = |x|$, cujo gráfico é apresentado na Figura 26, no ponto de abscissa $x = 3$, ou seja, $f'(3)$, e tentemos calcular $f'(0)$.

Devemos ter, para $x \cong 3$:

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{|x| - |3|}{x - |3|} = \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

Figura 26 – Gráfico da função f(x) = |x|.



Fonte: Produzida pelo autor.

Percebemos que para valores de x próximos de 3, à esquerda ou à direita, a taxa média se mantém constante e igual a 1. Ou seja, seu limite quando x tende a 3 é igual a 1. Desse modo, $f'(3) = 1$.

Para $x \cong 0$, porém, teremos:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{se x} > 0 \\ -1, \text{se x} < 0 \end{cases}$$

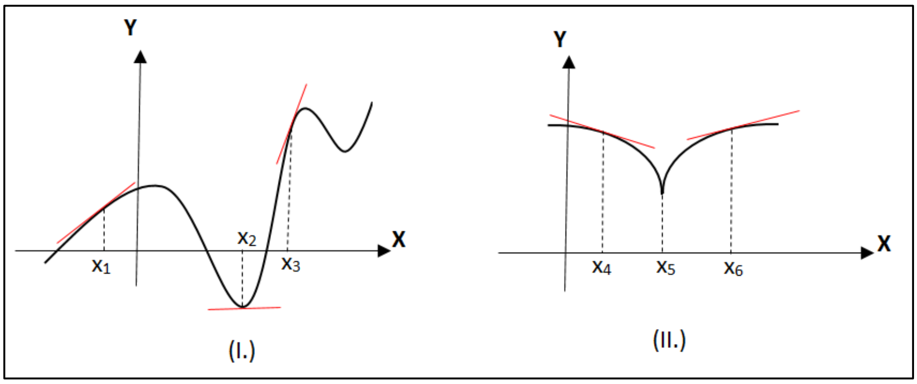
Portanto, não existe um valor fixado para a taxa média quando x se aproxima de 0.

Concluímos, então, algebricamente, que não existe $f'(0)$.

Graficamente, conforme Iezzi e colaboradores (1981, p. 186), nesse ponto, o gráfico apresenta um aspecto “anguloso”, produzindo a inexistência da derivada nesse ponto, enquanto sua existência está condicionada a haver uma “suavidade” desse gráfico no ponto em questão, no sentido de que deve existir uma reta tangente nesse ponto.

A Figura 27 mostra o que os autores em questão entendem como “anguloso” e “suavidade”, onde, dos pontos destacados, a derivada não existe tão somente no ponto de abscissa x_5.

Figura 27 – A existência da derivada.



Fonte: Produzida pelo autor.

Podemos entender que a derivada da função $y = f(x)$ só existe em um ponto x_o se $f'(x_o)$ for único, e, geometricamente, para existir a derivada em um ponto da curva, esta deve ter uma “suavidade” na qual o ponto em questão está inserido, garantindo uma única reta tangente neste ponto.

Uma outra situação para não existência da derivada em um ponto é apresentada pelos autores do livro ao procurarem a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto $x = 0$. Como $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, seu limite, para x tendendo a zero é +∞, ou seja, não existe um número para o qual a taxa de variação média se aproxime, quando x se aproxima de zero. Nesse exemplo, a reta tangente coincidiria com o eixo das ordenadas, que forma um ângulo de 90° com o eixo das abscissas, e, para este caso, não se define coeficiente angular.

Podemos falar um pouco para os estudantes sobre Isaac Newton e Leibniz, precursores do Cálculo que conhecemos, de modo que a taxa média aqui citada possa ser chamada, como sabemos, de *quociente de Newton*, e concluirmos que existe a derivada em x = k, se o limite do quociente de Newton existir.

Aos poucos, a linguagem do Cálculo vai sendo apresentada, como *função derivada*, *função derivável*, etc.

4.2.3 Derivação da Função Polinomial

Não há o que acrescentar, essencialmente, ao que já foi dito nas séries anteriores.

Já foi demonstrado no segundo ano que a derivada da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, é $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Podemos apresentar, com as devidas demonstrações, mais dois teoremas:

1. Se $u(x)$ e $v(x)$ são funções deriváveis no ponto x, então as funções $f(x) = u(x) + v(x)$ e $g(x) = c.v(x)$, com $c \in \mathbb{R}$, são deriváveis e suas derivadas são, respectivamente $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ e $g'(x) = c.v'(x)$.

2. Dada a função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, sua derivada é:

$$f'(x) = n.a_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

Os estudantes, agora, podem contribuir com as demonstrações, a partir da definição de derivada.

Para o primeiro resultado do teorema 1, devemos começar com o quociente de Newton:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$
$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Tomando o limite para Δx tendendo a zero, encontramos:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

De modo análogo, chegamos ao segundo resultado do primeiro teorema:

$$g'(x) = c.v'(x)$$

Com esses resultados, e o conhecimento de que $(x^n)' = n.x^{n-1}$, com x real e n natural, será imediata a demonstração para o segundo teorema.

Podemos inserir nos exercícios propostos, a exemplo de Iezzi e colaboradores (1981), derivadas de ordem superior, como é o caso da derivada de segunda ordem, em que $f''(x)$ é a derivada de $f'(x)$, conveniente na abordagem de gráficos e na decisão sobre um ponto crítico ser de máximo, mínimo ou de inflexão.

4.2.4 Máximos e Mínimos – Gráficos

Temos, agora, conceitos muito importantes que serão abordados na construção de gráficos e na resolução de alguns problemas com uso de derivadas.

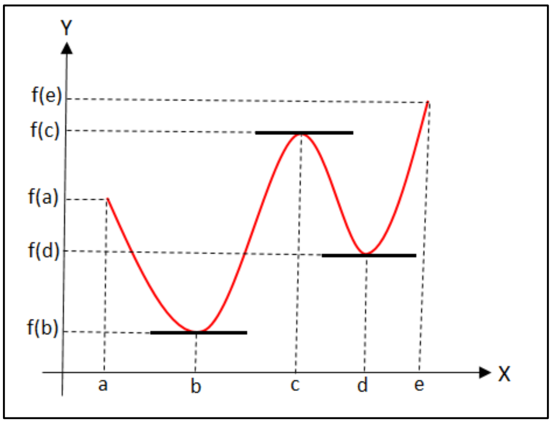
Considerando a função $f(x)$ definida em um intervalo I, e sendo x_o um ponto desse intervalo, dizemos que x_o *é um ponto de máximo de* $f(x)$ se $f(x) \leq f(x_o)$ para todo $x \in I$. Neste caso, $f(x_o)$ *é o valor máximo de* $f(x)$ *em* I. Se, porém, nós tivermos

$f(x) \geq f(x_o)$, dizemos que x_o *é um ponto de mínimo de* $f(x)$, e $f(x_o)$ *é o valor mínimo de* $f(x)$ *em* I.

Na Figura 28, considerando a função f(x) definida no domínio I = [a; e], temos:

- b é ponto de mínimo e f(b) é o valor mínimo da função;
- e é ponto de máximo e f(e) é o valor máximo da função.

Figura 28 – Máximos e mínimos de uma função.



Fonte: Produzida pelo autor.

Sem muitas formalidades, se nas proximidades de um ponto x_o, este tem a ordenada mínima (máxima), diremos que x_o é um ponto de *mínimo* (máximo) *local*.

Na Figura 28, temos, então:

- b *e* d são pontos de mínimo local;
- a*,* c *e* e são pontos de máximo local.

Como f(b) e f(e), são, respectivamente, as ordenadas de menor valor e maior valor, podemos dizer que esses são, respectivamente, o *valor mínimo absoluto* e o *valor máximo absoluto* da função f(x).

Como fizemos no primeiro ano, podemos afirmar que, sendo x_o um ponto de um intervalo I, e considerando uma função $f(x)$ derivável nesse ponto, então:

$$\boxed{x_0 \text{ é ponto de máximo ou de mínimo} \Longrightarrow f'(x_0) \ = \ 0}$$

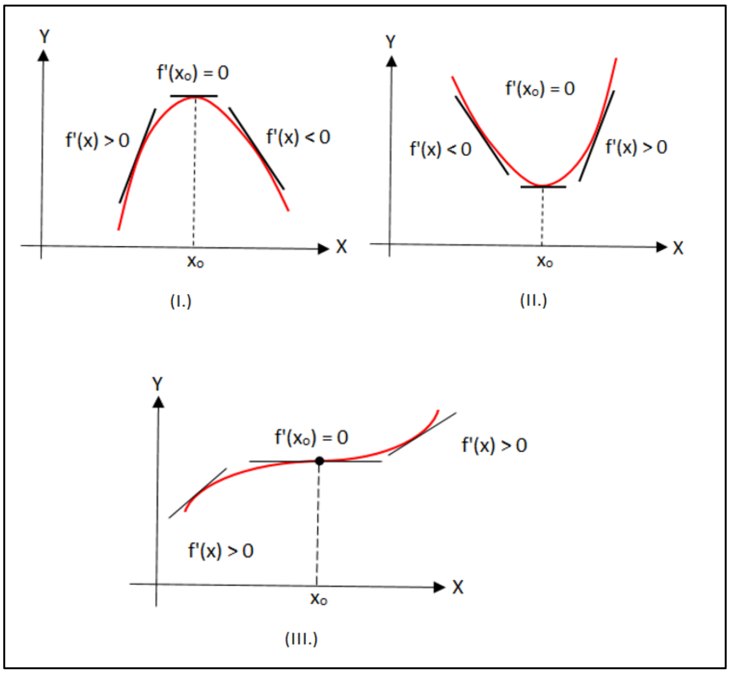
Na Figura 28, temos $f'(\mathrm{b}) = f'(\mathrm{c}) = f'(\mathrm{d}) = 0$, em virtude das retas tangentes ao gráfico da função nos pontos com abscissas b, c *e* d serem paralelas ao eixo horizontal.

A ideia de máximo local e mínimo local é utilizada a partir da primeira derivada para a abordagem do crescimento de uma função.

Como feito na primeira série, a representação geométrica do comportamento da função, associada ao que se aprendeu sobre derivada e reta tangente, é suficiente para afirmarmos que uma função $f(x)$ será *estritamente crescente* em determinado intervalo se $f'(x) > 0$, *estritamente decrescente*, se $f'(x) < 0$, e *constante*, se $f'(x) = 0$, para todo x do intervalo em questão.

Podemos concluir a abordagem chegando à ideia de *pontos críticos*, que são os valores de x num intervalo I tal que $f'(x) = 0$, e que podem corresponder a pontos de máximo local, mínimo local ou de *inflexão*. Para máximo ou mínimo, como visto na primeira série, teremos uma mudança no crescimento da função, o que não acontece para os pontos de inflexão, que são, assim, pontos críticos em que o sinal de $f'(x)$ é o mesmo, antes e depois dos mesmos, como mostra a Figura 29.

Figura 29 – Crescimento e ponto crítico.



Fonte: Produzida pelo autor.

Até o momento, possivelmente, os estudantes não teriam se preocupado com a concavidade do gráfico da função, que será um conteúdo tratado com a derivada segunda da função, conforme o item seguinte.

4.2.5 Gráficos: Concavidade e Inflexão

Chega o momento de calcularmos derivada de segunda ordem da função.

O sinal da 1ª derivada, $f'(x)$, nos dá informações sobre o crescimento da função derivável $f(x)$, e, de modo análogo, o sinal da 2ª derivada, $f''(x)$, nos dá informações sobre o crescimento da função derivável $f'(x)$, nos levará à determinação da concavidade do gráfico da função $f(x)$ em certo intervalo, e facilitará a confirmação de que um ponto crítico é de máximo, mínimo ou de inflexão.

Dada a função $f(x)$, derivável até, pelo menos, a segunda ordem, é fato que:

- o sinal de $f'(x)$ nos informa o crescimento de $f(x)$;
- $f''(x)$ é a derivada de $f'(x)$ e, desse modo, nos informa o crescimento de $f'(x)$.

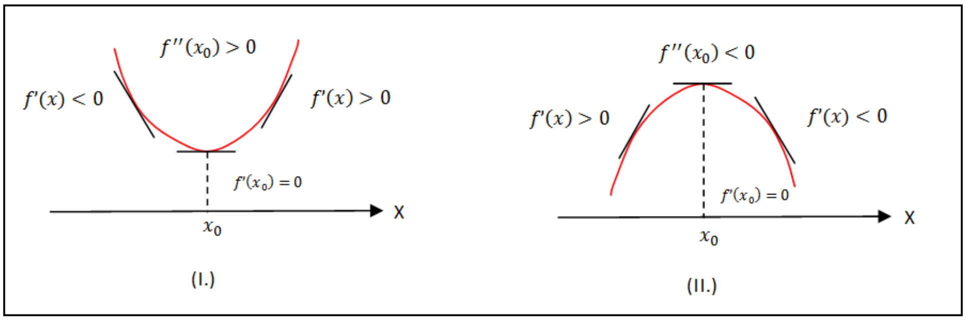
Desse modo, se num ponto x_o do domínio de $f(x)$ tivermos $f'(x_o) = 0$, o sinal de $f''(x_o)$ nos indicará se $f'(x)$ cresce ou decresce ao passar por x_o.

Teremos:

a) $f''(x_o) > 0 \Longrightarrow f'(x)$ é crescente ao passar por x_o, e, desse modo, devemos ter $f'(x) < 0$, antes de x_o e $f'(x) > 0$, depois de x_o, ou seja, x_o é um *ponto de mínimo local*.
b) $f''(x_o) < 0 \Longrightarrow f'(x)$ é decrescente ao passar por x_o, e, desse modo, devemos ter $f'(x) > 0$, antes de x_o e $f'(x) < 0$, depois de x_o, ou seja, x_o é um *ponto de máximo local*.

A Figura 30 retrata essas afirmações e nos ajudar a chegar a algumas conclusões relevantes sobre a concavidade do gráfico.

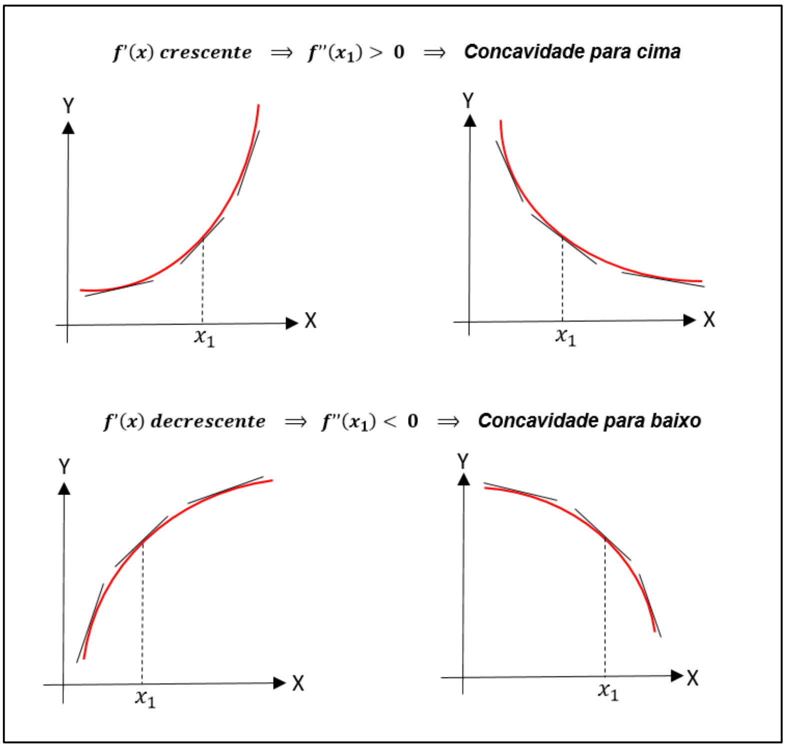
Figura 30 – Interpretação da 2ª derivada.



Fonte: Produzida pelo autor.

Podemos entender também que, de um modo geral, dado um ponto qualquer x_1, pertencente a um intervalo do domínio da função $f(x)$, se $f''(x_1) > 0$, a *concavidade* da curva que é gráfico da função, no intervalo dado, será voltada *para cima*, e se $f''(x_1) < 0$, a *concavidade* será voltada *para baixo*, como mostra a Figura 31.

Figura 31 – Concavidade e sinal de $f''(x)$.

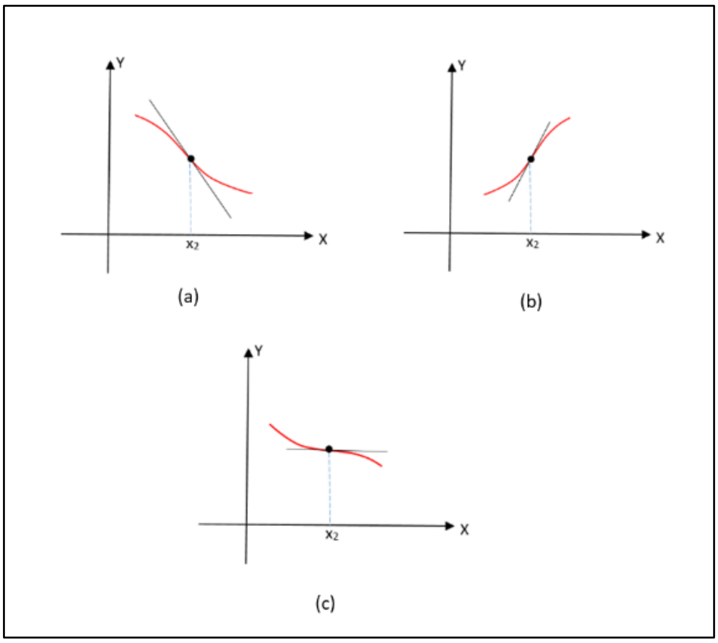


Fonte: Produzida pelo autor.

Caso tenhamos um ponto x_2, tal que $f''(x_2) = 0$, e se o sinal da segunda derivada $f''(x)$ muda ao passar por x_2, significa que, nesse ponto, há mudança de concavidade, e dizemos que o ponto é de *inflexão*.

Na Figura 32, nos gráficos (a) e (b), temos a situação em que $f'(x_2) \neq 0$, e $f''(x_2) = 0$, que nos dá uma inflexão não paralela aos eixos, e, consolida-se a ideia de ponto de inflexão, se x_2 é ponto crítico, ou seja, $f'(x_2) = 0$, e, além disso, $f''(x_2) = 0$, então esse ponto é de *inflexão com reta tangente horizontal* (Figura 34(c)).

Figura 32 – Ponto de inflexão.

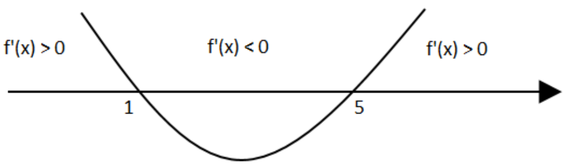


Fonte: Produzida pelo autor.

Vejamos o esboço do gráfico da função dada por $f(x) = x^3/3 - 3x^2 + 5x$.

Pontos críticos: $f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$

Crescimento, com estudo do sinal de $f'(x)$:



Ou seja: $f(x)$ é crescente para $x \leq 1$ e $x \geq 5$, e é decrescente para $1 \leq x \leq 5$, e, desse modo, $x = 1$ é ponto de máximo local, e $x = 5$ é ponto de mínimo local.

Essa conclusão sobre os pontos críticos poderia ser obtida com o sinal da segunda derivada: $f''(x) = 2x - 6 \Longrightarrow f''(1) = -4 < 0$ e $f''(5) = 4 > 0 \Longrightarrow x = 1$ é ponto de máximo e $x = 4$ é ponto de mínimo.

Ponto(s) de inflexão: $f''(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$

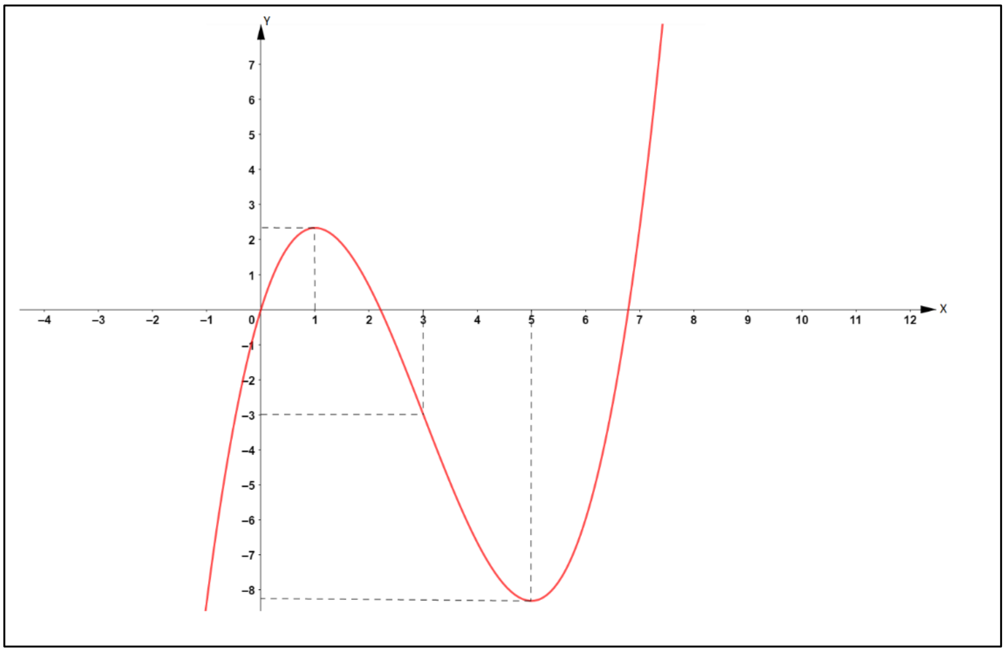
Assim, só há um ponto de inflexão, em $x = 3$, e como $f'(3) = -4 \neq 0$, temos que uma inflexão não paralela aos eixos ortogonais, ou seja, o ponto de inflexão não é com reta tangente horizontal.

Alguns pontos notáveis têm imagens:

$$f(0) = 0, f(1) = 7/3, f(3) = -3 \text{ e } f(5) = -25/3$$

O gráfico está exposto na Figura 33.

Figura 33 - Gráfico da função $\mathbf{f(x) = x^3/3 - 3x^2 + 5x}$.



Fonte: Produzida pelo autor, com o GeoGebra.

É importe expor um quadro com etapas que direcionem os estudantes para realizarem o esboço de gráficos, inclusive, em alguns casos convenientes, podemos solicitar as raízes da função polinomial, para enriquecer o gráfico e explorar conteúdos estudados em equações algébricas.

À medida que novas regras de derivação forem estudadas, poderemos abordar os gráficos de funções que não sejam polinomiais.

4.2.6 Máximos e Mínimos: Aplicações

Além dos gráficos, a resolução de problemas práticos em que devemos calcular o valor máximo ou mínimo de uma função é uma das principais aplicações do Cálculo.

A abordagem de problemas que envolvam funções polinomiais ainda será nosso foco, até quando chegarmos a regras de derivação para diversas funções conhecidas, como a exponencial e as trigonométricas, além das funções algébricas racionais, e, desse modo, termos a liberdade de apresentar a força do Cálculo em diversas situações.

Os problemas seguintes são bons exemplos a serem abordados nesse momento.

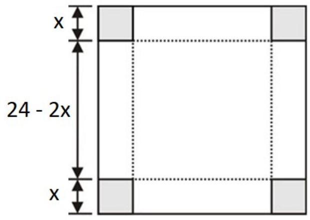
A. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com lado $24\ \mathrm{cm}$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado em cada canto para se obter uma caixa com o maior volume possível.

B. Numa lata cilíndrica, sem tampa, com volume fixo igual a V, qual o valor do raio para que o material usado na construção da mesma seja mínimo?

Podemos seguir as três etapas a seguir para resolver esses problemas:

1) Explicitar a variável cujo valor máximo ou mínimo queremos obter em função unicamente da variável independente;
2) Encontrar os pontos críticos dessa função, bem como a sua caracterização;
3) Identificar o ponto de máximo ou mínimo, ou concluir sobre a não existência de tais pontos.

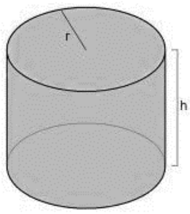
Para o problema A, teríamos:



Conforme as etapas, teríamos:

1) O volume da caixa formada é: $V(x) = \ x(24-2x)^2 = 4x^3 - 96x^2 + 576x$
2) Se $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576$, os pontos críticos são tais que $V'(x) = 0$, ou seja: $x = 12$ ou $x = 4$. Porém, $x = 12$ não convém pois $24 - 2x$ dará zero.
3) Como $V''(x) = 24x - 192$ e $V''(4) < 0$, temos que $x = 4$ é um ponto de máximo. Logo, o quadrado deve ter lado medindo $4\ cm$.

Para o problema B, teríamos:



1) A expressão para o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. Assim, $h = V/\pi r^2$.
   A expressão para a área do cilindro, sem a tampa, é $S = 2\pi rh + \pi r^2$.
   Ou seja, $S(r) = \frac{2V}{r} + \pi r^2 = 2Vr^{-1} + \pi r^2$.
2) Para a obtenção dos pontos críticos de $S(r)$, devemos ter $S'(r) = 0$. Aqui, porém, surge um pequeno empecilho que poderá ser contornado pelo professor, ao afirmar que a regra para a derivada de x^n, com n natural, é válida para n inteiro, e isso será provado mais adiante, com a derivada do quociente.
   Assim, $S'(r) = -2Vr^{-2} + 2\pi r$, e só haverá um ponto crítico:
   $$-2Vr^{-2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{V/\pi}$$
3) Sendo $S''(r) = 4Vr^{-3} + 2\pi$ e $S''\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right) = 6\pi > 0$, o ponto crítico é de mínimo.

Certamente, podemos começar por problemas mais elementares, puramente algébricos e que se limitem às regras de derivação para funções polinomiais.

Os modelos de questões com geometria plana ou espacial, além de problemas elementares na área Álgebra e Economia, serão bem-vindos.

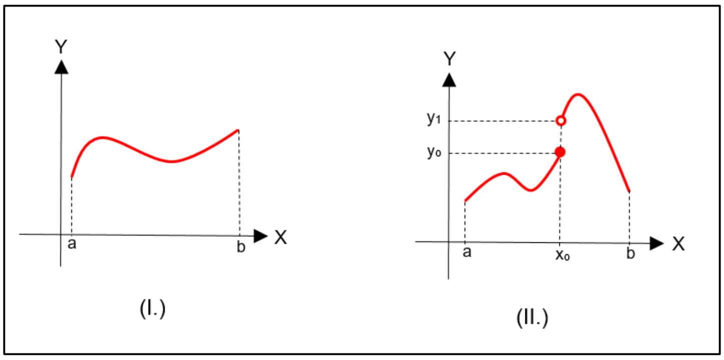
4.2.7 Noções de Continuidade e Limites. Propriedades.

Após o entendimento da derivada, chegaremos com segurança ao estudo das regras de derivação para as principais funções, se as noções de limite e continuidade, e suas propriedades, forem apresentadas. Fazer isso de forma sutil, sem as formalidades trazidas na definição de limite, é fundamental.

De maneira intuitiva, bastante elementar, sem usar a noção de limite, podemos dizer que *uma função é contínua num intervalo* I, real, *quando seu gráfico é uma curva sem interrupções*.

Na Figura 34, os gráficos (I.) e (II.) representam bem a ideia de continuidade, em um intervalo $I =]a, b[$. O gráfico (II.) indica uma descontinuidade no ponto x_o, ou seja, o gráfico é interrompido, de modo que um ponto imediatamente posterior ao que tem abscissa x_o terá uma ordenada que se aproxima de y_1, e não de y_o, com $y_1 > y_o$. O gráfico (I.), porém, representa uma função contínua em $I =]a, b[$.

Figura 34 - Função Contínua e Função descontínua.



Fonte: Produzida pelo autor.

Podemos expor as afirmações:

I.) Dada uma função $f(x)$, definida em *I* (um intervalo ou união de intervalos), devemos determinar para que valor se aproxima $f(x)$, quando tivermos valores de x próximos de x_o, fixado. *Se existir esse valor, L, único, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_o é L*, e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

II.) Se existe L, conforme o item anterior, e $f(x_o) = L$, dizemos que $f(x)$ é contínua em x_o.

III.) Se a função $f(x)$ for contínua em todos os pontos de seu domínio, diremos, simplesmente, que *a função* $f(x)$ *é contínua*.

Pelo exposto, mesmo que a função $f(x)$ não esteja definida em x_o, mas esteja definida em um pequeno intervalo centrado em x_o, garantindo aproximação à esquerda e à direita de x_o, poderá haver o limite.

Notemos, também, que, por III.), para calcularmos o limite de uma função contínua quando x tende a x_o, basta calcularmos $f(x_o)$.

Na Figura 35, exemplo b), temos uma situação clássica, onde a função não está definida em x_o.

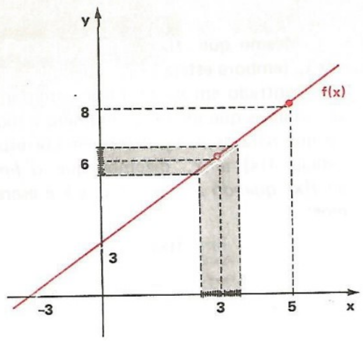
Figura 35 – Exemplo de cálculo de limite.

b) Consideremos a função $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ e o ponto $x_0 = 3$. Esta função não está definida para $x = 3$, não existindo, portanto, $f(3)$. Se devemos ter sempre $x \neq 3$, podemos, efetuando uma simplificação, representar esta função na forma:

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} = x + 3,$$

para $x \neq 3$

O seu gráfico está ao lado.



Notamos que:

$$x \cong 3 \Longrightarrow f(x) \neq 6,$$

ou seja, podemos ter $f(x)$ tão próximo de 6 quanto quisermos desde que x esteja suficientemente próximo de 3. Dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a 3 é 6* e escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Naturalmente, em um outro ponto x_1, $x_1 \neq 3$, por exemplo, $x_1 = 5$, a função dada é contínua, e temos:

$$x \neq 5 \Longrightarrow f(x) \cong f(5) = 8$$

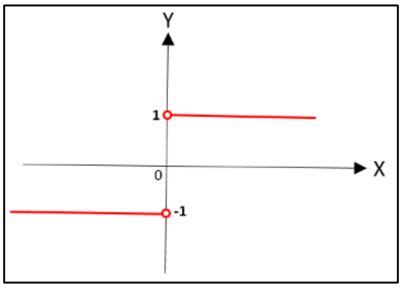
Temos, então, a equivalência:

$$f(x) \text{ é contínua em } x_1 = 5 \Longleftrightarrow \lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$$

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 216).

Podemos apresentar exemplos que nos levem a questionar a existência do limite. Vejamos o limite da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$, quando x tende a 0 (zero).

Nesse caso, para $x > 0, f(x) = x/x = 1$, e, sendo $x < 0, f(x) = -x/x = -1$.



Essa função não está definida para $x = 0$.

Seu gráfico, ao lado, diz que para $x \cong 0$, temos $f(x) = 1$ quando $x > 0$ e $f(x) = -1$ quando $x < 0$. Desse modo, não existe um número L fixado tal que $x \cong 0 \Rightarrow f(x) \cong L$.

Assim, esse limite não existe.

Esse último exemplo nos daria a oportunidade de apresentar as ideias sobre limites laterais, onde só precisaríamos formalizar a linguagem, haja vista a ideia de limite à esquerda e limite à direita já ficou implícita nesse exemplo apresentado.

Resta-nos, agora, fortalecer a ideia de que se uma função $f(x)$ é contínua, o seu limite quando x tende a x_o é $f(x_o)$, e citar as funções elementares que os estudantes deverão admitir que são contínuas.

Se $f(x)$ é contínua, então: $\boldsymbol{\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)}$

As funções polinomiais, as funções seno e cosseno, as funções exponenciais e logarítmicas, já foram estudadas em séries anteriores, conhecemos as características de seus gráficos, e sabemos que não apresentam "salto" em qualquer ponto do seu domínio. Estas, entre outras, fazem parte do grupo das funções contínuas, dentro do seu domínio.

Após as noções de continuidade e limites, algumas propriedades devem ser apresentadas, dando condições para calcularmos as derivadas de funções algébricas e transcendentes, de um modo geral.

Dadas duas funções $u(x)$ e $v(x)$, deve ser compreensível para os estudantes a ideia de que:

Se $\lim_{x \to x_0} u(x) = m$ e $\lim_{x \to x_0} v(x) = n$, podemos demonstrar que:

a) $\lim_{x \to x_0} \big(u(x) + v(x)\big) = m + n$

b) $\lim_{x \to x_0} \big(u(x) - v(x)\big) = m - n$

c) $\lim_{x \to x_0} \big(u(x) \cdot v(x)\big) = m \cdot n$

d) $\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{m}{n} \; (com\, n \neq 0)$

Isso nos garante que se $u(x)$ e $v(x)$ são contínuas em x_0, ou seja, $m = u(x_0)$ e $n = v(x_0)$, então a soma, a diferença, o produto e o quociente de funções contínuas em um ponto são, também, contínuas nesse ponto.

Desse modo, sendo contínuas as funções polinomiais, seno, cosseno, exponenciais e logarítmicas, fica garantida a continuidade de funções como

1.) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{5 - 10x} \; (com\, x \neq 2)$

2.) $f(x) = e^x + \cos x$

3.) $f(x) = \log_2 x + \cos x \;\; (com\, x > 0)$

4.) $f(x) = \tan x,\, com \cos x \neq 0.$

É fato que se uma função $f(x)$ é composta e suas funções componentes são contínuas, em certo domínio, então $f(x)$ também é contínua nesse domínio.

Assim, se $f(x) = \cos(2x + 3)$, suas funções componentes são $u = 2x + 3$ e $g(u) = \cos u$, e como as funções, u e $g(u)$, são ambas contínuas, podemos argumentar que $f(x)$ também é contínua, como a seguir:

$$x \cong x_o \Longrightarrow u \cong u_o = 2x_o + 3 \Longrightarrow g(u) \cong g(u_o) = \cos(2x_o + 3)$$

ou seja, $x \cong x_o \Longrightarrow f(x) \cong f(x_o) \Longrightarrow f(x)$ é contínua em x_o.

Os exemplos a seguir correspondem a funções compostas contínuas no seu domínio:

a) $f(x) \; = \; sen(2x - 1)$

b) $f(x) = \; (x^3 + 2)^{28}$

c) $f(x) = \; 5^{-x^2}$

4.2.8 Limites: Os Símbolos $+\infty$ e $-\infty$

Os estudantes já têm entendimento desses símbolos na linguagem dos conjuntos.

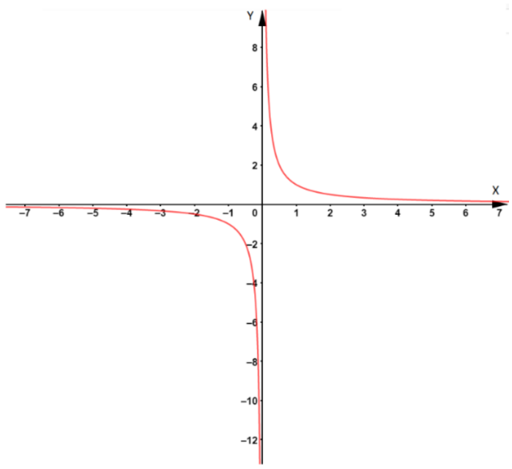
Para o limite de uma função, de forma bem elementar, podemos dizer que ao analisarmos o comportamento de uma função $f(x)$ para valores positivos de x cada vez maiores, utilizamos o símbolo $+\infty$ (lê-se "mais infinito") e para valores negativos de x cada vez menores, utilizamos o símbolo $-\infty$ (lê-se "menos infinito"), levando em consideração os dois seguinte significados:

1.) Se notarmos que $f(x)$ se aproxima cada vez mais de um número L quando x assume valores positivos cada vez maiores ou, mais precisamente, $f(x)$ assume valores tão próximos de L quanto quisermos, desde que x seja um valor positivo suficientemente grande, dizemos que *o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $+\infty$* e escrevemos: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

2.) Se notarmos que $f(x)$ se aproxima cada vez mais de um número L quando x assume valores negativos cada vez menores ou, mais precisamente, $f(x)$ assume valores tão próximos de L quanto quisermos, desde que x seja um valor negativo suficientemente pequeno, dizemos que *o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$* e escrevemos: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Uma aplicação para esse conhecimento poderá ser feita na abordagem de gráficos, em pontos próximos a um ponto de descontinuidade e em pontos cujas abscissas crescem ou decrescem, dando margem, assim, à abordagem do gráfico para x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Essa linguagem pode ser colocada em prática observando o gráfico da função $f(x) = 1/x$, ao lado.



Podemos escrever:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Certamente, a obtenção de pares (x, y), sendo $y = 1/x$, para x assumindo valores cada vez maiores, ajudará nessa análise:

x	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
y	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

O mesmo limite seria obtido, fazendo-se x assumir valores negativos cada vez menores.

Outro exemplo, onde o limite é $+\infty$, é $\lim_{x \to +\infty} x^2$.

Notamos que x assume valores cada vez maiores quando x assume valores cada vez maiores.

Escreveremos: $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

O esboço do gráfico da função $f(x) = x^2$ ajudará nesse entendimento.

De modo análogo, com auxílio do esboço do gráfico da função, podemos chegar a situações em tenhamos, por exemplo:

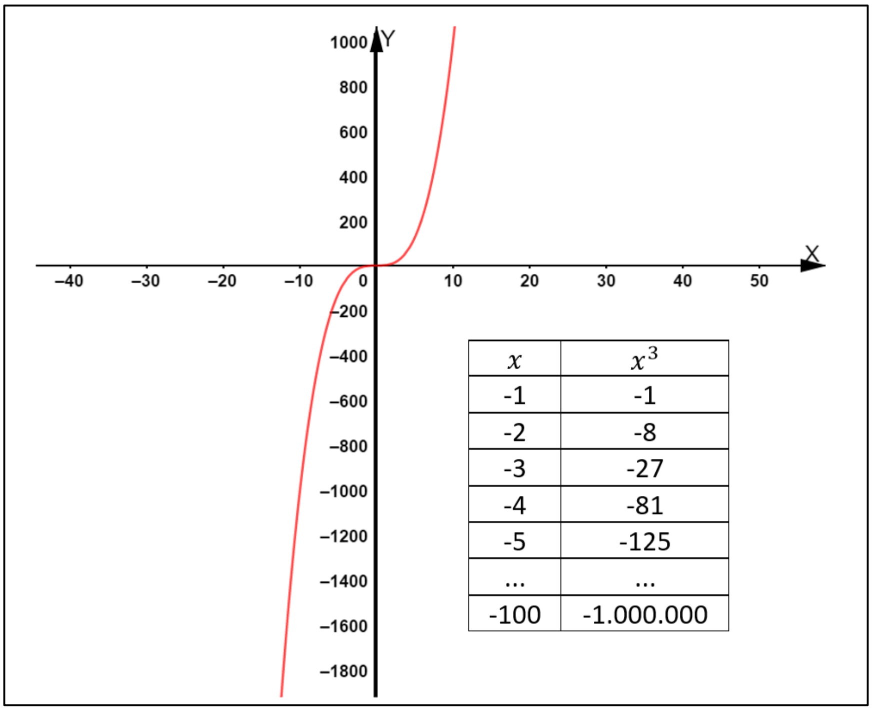
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplos: Com o esboço dos gráficos das funções, os limites seguintes, são obtidos com facilidade.

a) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
b) b) $\lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$
c) c) $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Uma análise numérica nos ajudaria, conforme a Figura 36, a seguir, contemplando o gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrando que para valores de x negativos que crescem, em valor absoluto, tanto quanto se queira, ou seja, que tendem a $-\infty$, teremos valores negativos de y que tendem a $-\infty$.

Figura 36 – Gráfico de $f(x) = x^3$.



x	x^3
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-4	-81
-5	-125
...	...
-100	-1.000.000

Fonte: Produzida pelo autor, com o GeoGebra.

Para o caso de termos um quociente, $\frac{u(x)}{v(x)}$, ao calcularmos $\lim_{x \to x_o} \frac{u(x)}{v(x)}$, no caso de $u(x)$ e $v(x)$ serem funções contínuas, teremos as possibilidades seguintes:

1ª) Se $v(x_o) \neq 0$ e $u(x_o)$ é qualquer, então: $\lim_{x \to x_o} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x_o)}{v(x_o)}$

Exemplo: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2}{2^x} = \frac{2}{1} = 2$

2ª) $v(x_o) = 0$ e $u(x_o) = 0$

Nesse caso, não podemos concluir algo geral sobre o limite de $(u(x))/(v(x))$. Porém, sendo $u(x)$ e $v(x)$ funções polinomiais, e ambas se anularem em x_o, garante-se a existência do fator comum $x - x_o$ para as duas funções. Simplificando este fator, podemos tentar calcular o limite do novo quociente, verificando se o novo denominador não mais se anula.

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$

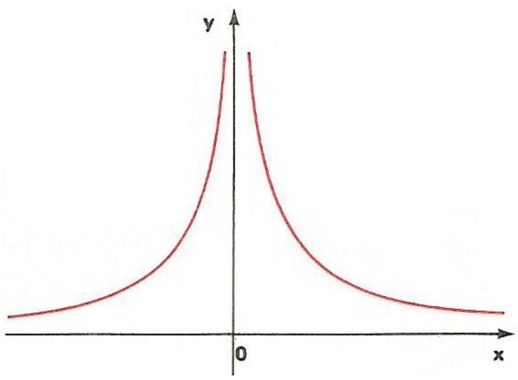
3ª) $v(x_o) = 0$ e $u(x_o) \neq 0$

Nesse caso, a função $\frac{u(x)}{v(x)}$ não está definida em x_o. Porém, para valores próximos de x_o, pela continuidade, o denominador $v(x)$ assume valores próximos de zero, enquanto o numerador se aproxima de $u(x_o) \neq 0$.

Vejamos, então, como se comporta esse quociente para x próximo de x_o, a partir de alguns exemplos.

a) $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1}{x^2}$

Para $x \cong 0$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ assume valores cada vez maiores, tornando-se, assim, maior do que qualquer número real k desde que x seja suficientemente próximo de zero, como mostra o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ao lado.



Escrevemos, então:

$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

b) $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1}{x}$

Para $x \cong 0$, sendo $x > 0$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ assume valores positivos cada vez maiores, e sendo $x < 0$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ assume valores negativos cada vez menores.

Dizemos, nestes casos, que:

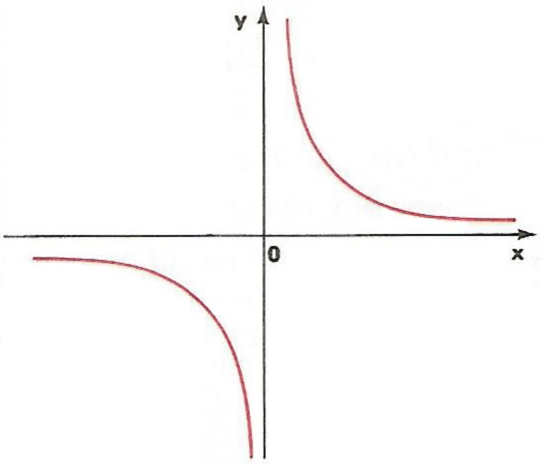
I.) O limite de $\frac{u(x)}{v(x)}$ quando x tende a zero pela direita é $+\infty$, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u(x)}{v(x)} = +\infty$$

II.) O limite de $\frac{u(x)}{v(x)}$ quando x tende a zero pela esquerda é $-\infty$, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{u(x)}{v(x)} = -\infty$$

O gráfico ao lado representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$, e facilita a visualização.



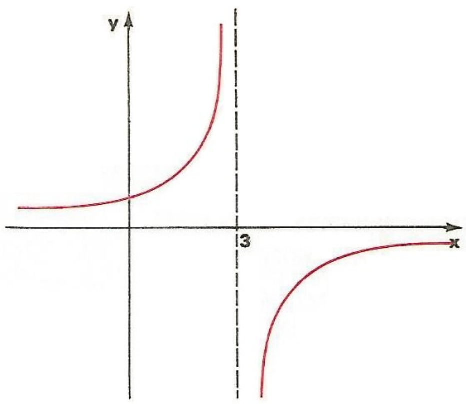
Nesse momento, os estudantes teriam o primeiro contato com a notação dos limites laterais. Porém, já nas ideias iniciais de limite e continuidade, não haveria empecilho para tal introdução, onde o estudante formalizaria a busca dos limites laterais, e se esses existissem e fossem iguais, diríamos que existe o limite da função no ponto em questão.

c) $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{-1}{x-3}$

Para $x \cong 3$, sendo $x > 3$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ assume valores negativos cada vez menores, e sendo $x < 3$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ assume valores positivos cada vez maiores, conforme seu gráfico ao lado.

Escrevemos, então:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{u(x)}{v(x)} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{u(x)}{v(x)} = +\infty$$



Essa visão sobre os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ deverá ser contemplada com exercícios de fixação, com o cálculo de limites, principalmente, a partir da análise do gráfico da função.

4.2.9 Dois limites fundamentais

O objetivo é apresentarmos as derivadas das principais funções elementares com, dentro do rigor possível, as devidas demonstrações. As funções polinomiais já foram atendidas. As funções trigonométricas $f(x) = sen\ x$ e $f(x) = cos\ x$, além da função exponencial $f(x) = e^x$, poderão ter suas derivadas obtidas com o conhecimento de dois limites fundamentais.

1º) Seja a função $f(x) = \frac{sen\ x}{x}$, com $x \neq 0$. Então:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

2º) Seja a função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, com $x < -1$ ou $x > 0$. Então:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

O primeiro limite, referente à trigonometria, pode ser obtido com auxílio da geometria plana, sem maiores problemas e o Teorema do Confronto (Sanduíche).

O Teorema do Confronto diz:

“Sejam f, g e h três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \neq a$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então existe $\lim_{x \to a} g(x)$ e este também é igual a L.”

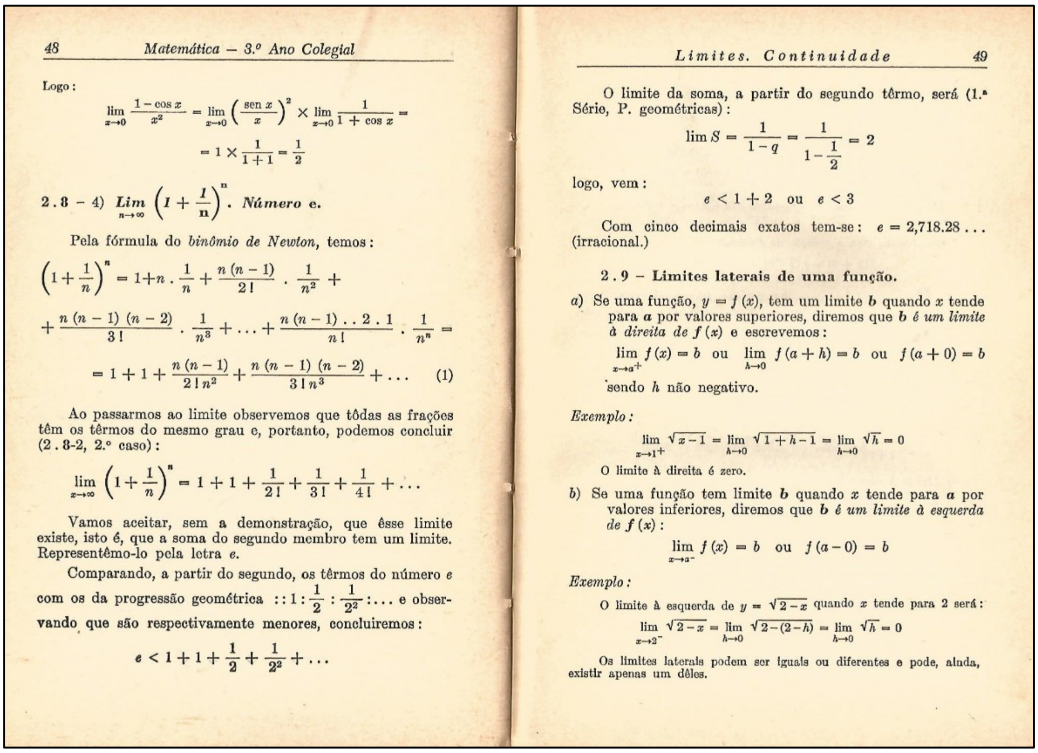
Nesse caso, o Teorema do Confronto, por ser bastante intuitivo, não será um problema para os estudantes, devendo ser aceito, sem demonstração.

Para o segundo limite fundamental, devemos apresentar formalmente o número de Euler, $\boldsymbol{e}$, como sendo o resultado do limite em questão.

Alguns textos apresentam caminhos para mostrar que $2 < \boldsymbol{e} < 3$, como acontece no livro de autoria de Ary Quintella, apresentado no começo desse trabalho.

A Figura 37 mostra os detalhes de como chegar a esse resultado, conforme Quintella (1965).

Figura 37 – O valor do número de Euler.



48 *Matemática — 3.º Ano Colegial*

Logo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2.8 – 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ***Número e.***

Pela fórmula do *binômio de Newton,* temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!\,n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3}+\ldots \qquad (1)$$

Ao passarmos ao limite observemos que tôdas as frações têm os têrmos do mesmo grau e, portanto, podemos concluir (2.8-2, 2.º caso):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Vamos aceitar, sem a demonstração, que êsse limite existe, isto é, que a soma do segundo membro tem um limite. Representêmo-lo pela letra *e*.

Comparando, a partir do segundo, os têrmos do número *e* com os da progressão geométrica $::1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2^2}:\ldots$ e observando que são respectivamente menores, concluiremos:

$$e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots$$

Limites. Continuidade 49

O limite da soma, a partir do segundo têrmo, será (1.ª Série, P. geométricas):

$$\lim S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

logo, vem:

$$e<1+2 \quad \text{ou} \quad e<3$$

Com cinco decimais exatos tem-se: $e = 2{,}718.28\ldots$ (irracional.)

2.9 – Limites laterais de uma função.

a) Se uma função, $y=f(x)$, tem um limite b quando x tende para a por valores superiores, diremos que b *é um limite à direita de* $f(x)$ e escrevemos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=b \quad \text{ou} \quad \lim_{h\to 0} f(a+h)=b \quad \text{ou} \quad f(a+0)=b$$

sendo h não negativo.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=\lim_{h\to 0}\sqrt{1+h-1}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$$

O limite à direita é zero.

b) Se uma função tem limite b quando x tende para a por valores inferiores, diremos que b *é um limite à esquerda de* $f(x)$:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=b \quad \text{ou} \quad f(a-0)=b$$

Exemplo:

O limite à esquerda de $y=\sqrt{2-x}$ quando x tende para 2 será:

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=\lim_{h\to 0}\sqrt{2-(2-h)}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$$

Os limites laterais podem ser iguais ou diferentes e pode, ainda, existir apenas um dêles.

Fonte: QUINTELLA, ARY (1965, p. 48 e 49).

Pela Figura 37, o autor faz uso do desenvolvimento do binômio de Newton para expandir a potência $(1+1/n)^n$, faz comparações com os termos de uma progressão geométrica, e verifica que o limite da expressão obtida é o número que representamos por $\boldsymbol{e}$, que sabemos ser irracional, tal que $2<\boldsymbol{e}<3$.

Por fim, apresenta o valor aproximado de $\boldsymbol{e}$, com cinco casas decimais.

$$\boldsymbol{e} \cong 2{,}71828$$

A Figura 38 mostra como Iezzi e colaboradores (1981) apresentam esse número, com menos formalidades, mas fazendo uso do gráfico correspondente a $(1+1/x)^x$, afirmando que seu limite quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$ corresponde ao valor $\boldsymbol{e} \cong 2{,}718281828459045$.

Esse número terá sentido para os estudantes quando houver a pergunta: *Existe função não nula cuja derivada é a própria função?* A resposta justificará o estudo do número de Euler.

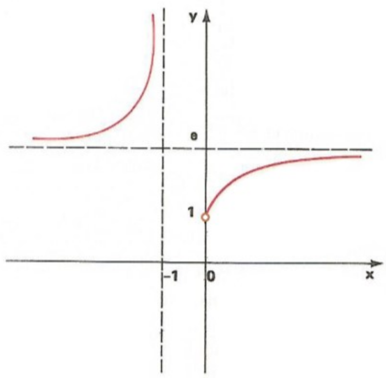
Figura 38 – Limite fundamental: o número de Euler.

2º) Consideremos, agora, a função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ definida para valores de x tais que $1 + \frac{1}{x} > 0$, ou seja, $x < -1$ ou $x > 0$.

É possível mostrar que para valores de x cada vez maiores, os valores correspondentes de $f(x)$ se tornam cada vez mais próximos de um número real fixo, ou seja, que existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Este limite é um número (irracional) que é representado por *e* e é chamado *número de Euler.* Ele surgiu de problemas concretos relacionados com o cálculo de juros compostos, tendo posteriormente se mostrado extremamente útil no estudo do crescimento de populações ou da desintegração radiativa. Ele é a base da função exponencial $y = e^x$ bem como de função logarítmica $y = \log_e x$ (ou $y = \ell n\, x$ = logaritmo natural de x). Como valor aproximado de *e*, temos

$$\boxed{e \cong 2{,}718281828459045}$$

Construindo o gráfico de $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, temos:



Notamos, então, que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e}$$

assim, como

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e}$$

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 233).

Os limites fundamentais apresentados serão importantes no cálculo da derivada de algumas funções.

Exercícios de fixação devem ser apresentados aos estudantes explorando esses dois limites fundamentais.

4.2.10 O Teorema do Valor Médio (TVM)

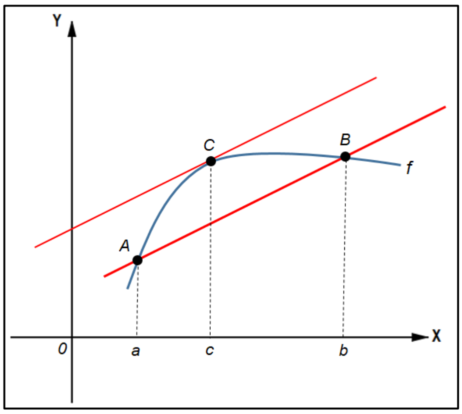
Alguns resultados vistos até agora, como o sinal da primeira derivada determinando o crescimento ou decrescimento de uma função, e o sinal da segunda derivada determinando a concavidade de um gráfico, poderão ser demonstrados a partir desse teorema. Dessa forma, o Teorema do Valor Médio é um resultado muito importante para as aplicações do Cálculo.

O teorema diz, de forma razoável, que:

"Considerando uma função $f(x)$ que seja derivável em todos os seus pontos entre as abscissas a e b, e a reta secante ao seu gráfico nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, deve existir um ponto de abscissa c entre a e b tal que a reta tangente ao gráfico em $C = (c, f(c))$ seja paralela à reta secante citada".

Isso pode ser interpretado geometricamente, como mostra a Figura 39:

Figura 39 – Gráfico para o TVM.



Fonte: Produzida pelo autor.

Dessa forma, o coeficiente angular da reta secante é igual ao coeficiente angular de uma sempre existente reta tangente.

Devemos ter, então:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O que diz o teorema é algo bastante intuitivo, não sendo necessária uma demonstração algébrica, que dependeria de outros resultados.

Duas observações são necessárias, com justificativas a partir de gráficos:

1.) Pode haver mais de um ponto entre a e b que atenda ao teorema;

2.) Não sendo garantida a derivabilidade da função $f(x)$ entre os pontos a e b, não podemos garantir a existência de c.

Como aplicação do Teorema do Valor Médio, podemos demonstrar um resultado já trabalhado com os estudantes, ligando a primeira derivada ao crescimento ou decrescimento de uma função, e, também, que se a derivada de uma função em determinado intervalo é sempre igual a zero, a função é constante nesse intervalo.

Poderíamos explorar um pouco mais o Teorema do Valor Médio, demonstrando que o sinal da segunda derivada em determinado intervalo nos dirá como será a concavidade da curva. Esta demonstração demandaria mais detalhes, de modo que a análise geométrica (intuitiva) feita anteriormente, quando foram abordadas as aplicações da segunda derivada, pode ser considerada suficiente.

Outro resultado, óbvio, mas que pode ser formalizado pelo Teorema do valor Médio, é que se duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, deriváveis em um intervalo I, possuem a mesma derivada para um ponto qualquer $x_0 \in I$, ou seja, $f'(x_0) = g'(x_0)$, então, $f(x) = g(x) + k$, onde k é uma constante real, e esse resultado é consequência do fato visto acima de que se $h'(x) = 0$, para todo x em que a função $h(x)$ é derivável, então $h(x) = c$, onde c é uma constante.

4.2.11 Regras de Derivação

Com as ferramentas necessárias, podemos formalizar as regras de derivação para as funções elementares, bem como apresentar as regras operatórias para as derivadas, por exemplo, de produtos e quocientes de funções.

Entendemos que algumas regras que serão apresentadas aparecerão na forma de exercícios propostos, ainda abraçando, mais uma vez, a proposta do livro Tópicos de Matemática.

1.) As derivadas das funções seno e cosseno.

Durante a apresentação de algumas regras, é importante uma revisão de conteúdos para dar base para as demonstrações dos resultados. Por exemplo, para o caso da função $f(x) = sen\, x$, será necessário conhecermos uma das fórmulas de transformação de somas em produtos, para funções trigonométricas.

Devemos mostrar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } f(x) = \ sen\, x \Longrightarrow f'(x) = cos\, x \\[2ex] \text{b) } f(x) = \ cos\, x \Longrightarrow f'(x) = -sen\, x \end{array}}$$

a) Sendo $f(x) = sen\ x$, devemos calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Temos:

$$\frac{\mathrm{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{\mathrm{sen\ (x + \Delta x) - sen\ x}}{\Delta \mathrm{x}}$$

Vamos transformar o numerador em produto, usando a identidade

$$sen\, p - sen\, q = 2 \cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Devemos ter:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2 \cdot sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Desse modo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot cos\ x = cos\ x$$

Dessa forma, a demonstração se baseou em tópicos já explorados pelos estudantes. Basta a apresentação da demonstração da letra a), ou seja, $(sen\ x)' = cos\ x$, para que os estudantes percebam o que precisam para dar continuidade, resolvendo, assim, a letra b).

Nos exercícios, a partir desses novos casos de derivação, são contempladas as regras já conhecidas pelos estudantes, que sejam: as regras de derivação para soma e subtração de funções, para uma constante não nula multiplicada por uma função e para funções polinomiais, haja vista, esses resultados terem sido demonstrados em unidades anteriores.

2.) Derivada do produto e derivada do quociente de funções.

Devemos mostrar que:

a) $f(x) = u(x).v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

b) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$

a) Devemos calcular:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

Vamos somar e subtrair $u(x).v(x+\Delta x)$ ao numerador da fração, e teremos, após reorganizarmos as parcelas:

$$\frac{u(x+\Delta x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x+\Delta x) + u(x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Calculando o limite dessa última expressão, para Δx tendendo a zero, entendendo que $u(x)$ e $v(x)$ são deriváveis (e, portanto, contínuas), encontramos o resultado desejado, ou seja:

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Podemos auxiliar os estudantes na demonstração do item b), deixando-o como exercício.

3.) As derivadas das funções tangente, secante, cossecante e cotangente.

A sequência de exercícios até agora é condição para calcularmos as derivadas de outras funções. As funções trigonométricas em questão são divisões entre funções cujas derivadas já conhecemos.

Para a função tangente, por exemplo, sabemos que, para $cos\ x \neq 0$:

$$tan\, x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

Logo, pela regra da derivada do quociente:

$$(tan\, x)' = \left(\frac{sen\ x}{cos\ x}\right)' = \frac{(cos\ x).\, cos\ x - sen\ x\ .\,(-sen\ x)}{(cos\ x)^2} = \frac{1}{(cos\ x)^2} = sec^2 x$$

Temos, então:

$$f(x) = \tan x \Longrightarrow f'(x) = sec^2 x$$

Uma revisão de trigonometria é conveniente para darmos prosseguimento às regras de derivação.

Logo, devemos apresentar, a título de revisão, dentro do domínio de cada função, que:

$$i.)\ tan\, x = \frac{sen\ x}{cos\ x} \qquad\qquad iii.)\ cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

$$ii.)\ sec\ x = \frac{1}{cos\ x} \qquad\qquad iv.)\ cotan\, x = \frac{1}{tan\, x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

Desse modo, reapresentadas as funções secante, cossecante e cotangente como sendo, respectivamente, os inversos das funções cosseno, seno e tangente, nos domínios cabíveis, as suas derivadas poderão ser calculadas, preferencialmente, como exercício, pelos estudantes.

Podemos ter, agora, exercícios explorando os tópicos vistos anteriormente, como determinação de pontos críticos e reta tangente, contando com novas funções, algébricas e transcendentes.

4.) Derivada da função composta (Regra da Cadeia).

Sendo $g(u)$ e $u(x)$ funções deriváveis, a função $f(x) = g(u(x))$ é derivável e devemos ter:

$$\boxed{f(x) = g\big(u(x)\big) \Rightarrow f'(x) = g'(u).u'(x)}$$

Para demonstrarmos, devemos calcular:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Temos:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{g\big(u(x + \Delta x)\big) - g(u(x))}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{g\big(u(x + \Delta x)\big) - g(u(x))}{u(x + \Delta x) - u(x)} \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g\big(u(x + \Delta x)\big) - g(u(x))}{u(x + \Delta x) - u(x)} \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right]$$

É fato que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right] = u'(x)$$

E para $\Delta x \cong 0$, como $u(x)$ é derivável e, portanto, contínua, devemos ter $u(x + \Delta x) - u(x) \cong 0$; a partir disso, pode ser mostrado, acolhendo todos os casos possíveis, que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g\big(u(x + \Delta x)\big) - g(u(x))}{u(x + \Delta x) - u(x)}\right] = g'(u)$$

Logo: $f(x) = g\big(u(x)\big) \Rightarrow f'(x) = g'(u).u'(x)$

Poderíamos, para evitar formalidades excessivas, trazer esse resultado à tona sem qualquer tentativa de demonstração. No segundo ano, com o auxílio do binômio de Newton, verificamos que o resultado funciona.

A única pendência na demonstração ficou para a obtenção de $g'(u)$. Porém, é intuitivo que o limite que nos dá $g'(u)$ é algo como

$$\lim_{b \to a} \left[\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right] = g'(a)$$

Isso permite uma melhor visão do resultado.

Os exemplos seguintes consolidam o entendimento.

1.) Calcule a derivada de:

$a)\ f(x) = cos(3 + 4x)$

$b)\ f(x) = (x^2 - 1)^{89}$

Teremos:

$a)\ f(x) = g(u) = cos\, u,\ \text{sendo}\ u = 3 + 4x$

$\text{Logo,} f'(x) = g'(u).u'(x) = (-sen\, u).4,\ \text{ou seja,} f'(x) = -4.sen\ (3 + 4x).$

$b)\ f(x) = g(u) = u^{89},\ \text{sendo}\ u = x^2 - 1$

$\text{Logo,} f'(x) = g'(u).u'(x) = 89u^{88}.2x,\ \text{ou seja,} f'(x) = 178.x.(x^2 - 1)^{88}.$

2.) Uma esfera inflável aumenta de raio a uma taxa de variação, no instante t_o, igual a $3\ cm/min$. Determine a taxa de variação do seu volume em relação ao tempo no instante t_o, sabendo que seu raio é de $15\ cm$ nesse instante.

Temos: O volume da esfera é função do seu raio r e é dado por:

$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

O raio varia com o tempo t, ou seja, é função do tempo:

$$r = r(t)$$

Dessa forma, o volume V é uma função composta do tempo, o que nos leva a:

$$V(t) = f(r(t)) = \frac{4}{3}\pi(r(t))^3$$

O que queremos é a taxa de variação de V em relação a t no instante t_o, ou seja, $V'(t_o)$.

$$V'(t) = f'(r).r'(t) = 4\pi(r(t))^2.r'(t)$$

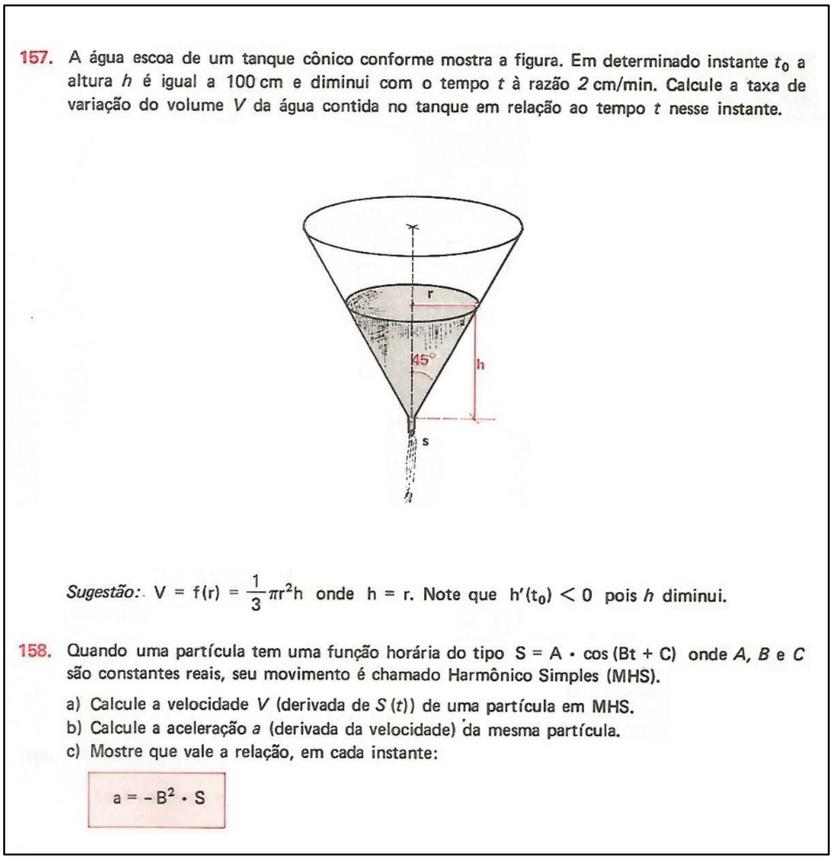
Logo:

No instante t_o, temos $r(t_o) = 15\ cm$ e $r'(t_o) = 3\ cm/min$. Desse modo:

$$V'(t_o) = 4\,\pi\big(r(t_o)\big)^2.r'(t_o) = 4\pi.15^2.3 = 2700\pi\ (cm^3/min.)$$

Temos agora uma ferramenta que facilitará a resolução de problemas sobre taxa de variação em um ponto, envolvendo função composta, aplicada à Matemática e à Física, como mostramos na Figura 40.

Figura 40 – Exercício de aplicação da Regra da Cadeia.



157. A água escoa de um tanque cônico conforme mostra a figura. Em determinado instante t_0 a altura h é igual a 100 cm e diminui com o tempo t à razão 2 cm/min. Calcule a taxa de variação do volume V da água contida no tanque em relação ao tempo t nesse instante.

Sugestão: $V = f(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ onde $h = r$. Note que $h'(t_0) < 0$ pois h diminui.

158. Quando uma partícula tem uma função horária do tipo $S = A \cdot \cos(Bt + C)$ onde A, B e C são constantes reais, seu movimento é chamado Harmônico Simples (MHS).

a) Calcule a velocidade V (derivada de $S(t)$) de uma partícula em MHS.
b) Calcule a aceleração a (derivada da velocidade) da mesma partícula.
c) Mostre que vale a relação, em cada instante:

$$\boxed{a = -B^2 \cdot S}$$

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 245).

5.) A derivada da função logarítmica e da função exponencial.

Diante do que foi visto sobre o número de Euler, a derivada da função logarítmica, a partir da definição de derivada e das propriedades operatórias dos logaritmos.

a) Função Logarítmica

$$f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Admitindo o campo de existência do logaritmo neperiano, devemos calcular:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Para um valor de x fixado, quando Δx tende a zero, $\alpha = \frac{x}{\Delta x}$ torna-se arbitrariamente grande, de modo que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Assim, teremos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} \right\} = \lim_{\alpha \to +\infty} \left\{ \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}$$

b) Função Exponencial

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$$

Temos então o momento que engrandece a existência do número de Euler, dentro do contexto, que seja a busca de uma função cuja derivada é a própria função.

A exemplo do Iezzi e colaboradores (1981), podemos utilizar as propriedades dos logaritmos da seguinte forma:

Sendo $x = \ln e^x$, podemos escrever $g(x) = \ln e^x$, de modo que, fazendo $h(u) = \ln u$ e $u(x) = e^x$, a Regra da Cadeia, $g'(x) = h'(u).u'(x)$, deve ser aplicada, utilizando o fato de que $g(x) = x$.

Obtemos:

$$1 = \frac{1}{u} \cdot u'(x) \Rightarrow u'(x) = u(x) = e^x$$

Podemos, como exercício, apresentar as demonstrações para o cálculo da derivada da função exponencial e da função logarítmica, a partir da definição de derivada, de modo que:

Se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo x real positivo, temos:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x . \ln a$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \, . \ln a}$$

Para a escolha dos conteúdos de Cálculo apresentados em alguns livros do terceiro ano do Ensino Médio, apesar de ser considerado antigo, o livro da coleção Tópicos de Matemática, de Iezzi e colaboradores (1981), no nosso entendimento, mostrou-se bastante completo, diante de nossa proposta. Os conteúdos abordados contemplam o estudo dos gráficos de funções polinomiais, as noções fundamentais sobre limite e continuidade, as regras de derivação e os problemas de máximos e mínimos.

A derivada da função inversa, o estudo de gráficos com assíntotas, cálculos mais específicos de limites e noções de integral são tópicos que podem ser abordados, principalmente este último, a depender do projeto escolhido que os professores queiram oferecer.

Finalizamos, dando destaque ao exercício 177 disposto no livro Tópicos de Matemática, que demonstra a regra da derivada de uma potência para o caso em que a base é positiva e o expoente é um número real qualquer, a partir do conhecimento da derivada da função exponencial e da função logarítmica, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Exercícios: Derivadas de exponenciais e logaritmos.

173. Calcule a derivada de:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{10}(3x + 5)$

174. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 5^x$ no ponto onde $x = 1$.

175. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \log_3 x$ no ponto onde $x = 9$.

176. Calcule a derivada de $f(x) = e^{5 \cdot \ell n\, x}$

177. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mostre que:

$$\boxed{f(x) = x^\alpha \Longrightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

Resolução:

Sabemos que $x = e^{\ell n\, x}$, e então, $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ell n\, x}$.

Logo, $f(x) = e^{\alpha \cdot \ell n\, x}$ é a função composta de $u = \alpha \cdot \ell n\, x$ com $g(u) = e^u$, e resulta que:

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = e^{\alpha \cdot \ell n\, x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

Temos, então, $f'(x) = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$, ou seja, $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

178. Calcule a derivada de:

a) $f(x) = x^{-3}$

b) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$

d) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

179. Calcule a derivada de:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$

180. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[5]{3x + 7}$

Resolução:

Temos: $f(x) = (3x + 7)^{\frac{1}{5}}$

Logo, $f(x)$ é a composta de $u = 3x + 7$ com $g(u) = u^{\frac{1}{5}}$ e segue que:

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot u^{\frac{1}{5} - 1} \cdot 3 = \frac{1}{5}(3x + 7)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3 \text{ ou seja, } f'(x) = \frac{3}{5}(3x + 7)^{-\frac{4}{5}}$$

181. Calcule $f'(x)$

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{5 - 3x}$

Fonte: IEZZI, GELSON, et al. (1981, p. 249).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos uma sequência de conteúdos de Cálculo Diferencial capaz de dar aos estudantes do Ensino Médio uma formação mais completa, de modo que eles consigam interpretar alguns problemas da Matemática e outras ciências, do ponto de vista da Matemática, com uma ferramenta simples de ser obtida, e que lhes dará informações preciosas sobre o comportamento das funções contínuas. É assim que a *derivada de uma função* será vista pelos estudantes.

Não substituímos conteúdos tradicionais da Matemática do Ensino Médio por tópicos de Cálculo Diferencial. Ao invés disso, a proposta é que o Cálculo seja apresentado, na disciplina Matemática, como mais uma opção para a resolução de alguns problemas. Naturalmente, esperamos que os estudantes percebam que o Cálculo é, num contexto mais amplo, a melhor opção.

Verificamos que o simples ato de derivar uma função e estudar o sinal da derivada obtida, geralmente, é o suficiente para responder a maioria dos questionamentos sobre o comportamento dessa função. Sem os recursos do Cálculo, muitos tópicos abordados no Ensino Médio são vistos de forma parcial, sem justificativas completas, deixando os estudantes amarrados a fórmulas prontas, justificadas, quando possível, por caminhos mais longos ou que exigem artifícios bastante específicos, como vimos na abordagem de problemas de máximos e mínimos, solucionados sem o Cálculo.

Com essa visão, apresentamos os principais pontos do estudo de derivadas já nos dois primeiros anos do Ensino Médio, deixando para o terceiro ano, para aqueles estudantes que assim desejarem e que precisarão do Cálculo em estudos futuros, conforme a BNCC, uma abordagem mais ampla, com justificativas baseadas em novas propriedades, principalmente, a partir das noções de limites e continuidade.

Dessa forma, todos os estudantes do Ensino Médio devem ser contemplados com o estudo do Cálculo. A palavra *derivada* deve ser algo tão comum para os estudantes como o é a palavra *função*.

Como vimos, é muito importante que o conteúdo seja abordado em outras disciplinas, conforme a necessidade, no sentido de garantir uma fluência com a ideia de derivada. Isso acontece, com frequência, na Física, que explorará a derivada de uma função nas três séries do Ensino Médio, seja na abordagem de taxas de variação, seja na análise de um gráfico.

Há a expectativa de que essa fluência sobre o conhecimento da derivada de uma função seja o caminho para que tenhamos estudantes em condições favoráveis para seguirem seus estudos nos cursos universitários, pois, atualmente, estatísticas mostram resultados negativos para a maioria dos estudantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, que é uma das matérias iniciais, principalmente, nos cursos de exatas.

Os estudantes do terceiro ano que optarem por uma formação mais ligada à matemática e suas tecnologias serão contemplados, ao estudarem o Cálculo, com uma formação sólida no estudo de funções, garantida pelo tempo que lhe foi destinado ao estudo da derivada de uma função. Certamente, no curso superior, apesar do grande número de conteúdos abordados em Cálculo I, desde as formalidades no estudo de limite e continuidade até as aplicações da derivada, teremos estudantes amadurecidos, conhecedores da maioria dos assuntos que serão abordados, prontos para terem resultados satisfatórios não apenas na disciplina Cálculo, mas em todas aquelas que fazem do Cálculo um de seus instrumentos.

Ainda para esses estudantes do Ensino Médio que optaram por mais aulas de Matemática, fica a possibilidade do estudo da *integral*. Apresentar a integração como a operação inversa da derivação, obtendo-se a função primitiva, não será difícil se o estudante conhece as regras de derivação. Em poucas aulas, pode-se apresentar noções da diferencial de uma função e apresentar o cálculo de áreas por somatórios e integral definida.

É certo, porém, que existem muitas barreiras para que esta apresentação do Cálculo seja colocada em prática, contemplando um público amplo. A formação básica, no Ensino Fundamental, de nossos estudantes, principalmente das escolas públicas, é uma dessas barreiras. Levará algum tempo para atingir a condição ideal necessária para podermos apresentar o Ensino Médio com esse perfil mais amplo.

Este trabalho se soma a muitos outros com o intuito de levar o Cálculo aos estudantes do Ensino Médio para dar-lhes uma formação matemática consistente, capaz de ampliar seus conhecimentos na formação secundária e prepará-los para o ingresso no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **O ensino de Cálculo no 2º Grau**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

BARBOSA, G. O. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: o caso da Universidade Federal do Ceará**. 1994. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: mar. 2018.

______. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. **Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal**.
Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html>.
Acesso em: 24 jan. 2019.

______. Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. **Dispõe sobre a organização do ensino secundário.**
Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>
Acesso em: 24 jan. 2019.

______. Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. **Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências.**
Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html>.
Acesso em: 24 jan. 2019.

______. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional.**
Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>.
Acesso em: 24 jan. 2019.

CALÇADA, C. S., SAMPAIO, J. L. ***Física Clássica, vol. 1*: Cinemática**, 2º grau. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998.

CALÇADA, C. S., SAMPAIO, J. L. ***Física Clássica, vol. 4*: Óptica e Ondas**, 2º grau. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998.

CALÇADA, C. S., SAMPAIO, J. L. ***Física Clássica, vol. 5*: Eletricidade**, 2º grau. 2. ed. São Paulo: Atual, 1998.

CARVALHO, João P. **As ideias fundamentais da Matemática Moderna**. Boletim n.23, p. 7-15,1988.

CHICA; BARNABÉ; TENUTA. **Novos temas e reorganização das áreas são as principais novidades em matemática**. Nova Escola. 2017

ESQUINCALHA, Agnaldo. **Revista de educação, Ciências e Matemática**, v2, n.3, p. 28 a 37.

IEZZI, G. et al. **Tópicos de Matemática: 3ª série**, 2º grau. 2. ed. rev. São Paulo: Atual, 1981.

FELTRE; YOSHINAGA. Química: Atomística, 2º grau. São Paulo: Moderna, 1974.

MOTEJUNAS, Paulo Roberto. **A Evolução do Ensino da Matemática no Brasil**. In: GARCIA, Walter E. (Coord.). Inovação Educacional no Brasil. Autores Associados, Campinas, pp. 161-176, 1995.

PIRES, R. C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

QUINTELLA, A. ***Matemática:* v.3**, Ensino Médio, 15. ed. São Paulo: Cia Editora Nacional, 1965.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. **Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna**. *Revista Horizontes*. Bragança Paulista, v.22, n.1, p.7-15, 2004.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática: uma história inseparável**. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp. v. 16, n. 30, 2008.

WEFFORT, H. F.; ANDRADE, J. P.; COSTA, N. G. **Currículo e educação integral na Prática: uma referência para estados e municípios**. São Paulo: Associação Cidade Escola Aprendiz, 2019.

WAGNER, E., CARNEIRO, J. P. **Vale a pena estudar Cálculo?** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 53, 2004.