



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Aleff de Jesus Santos

Obtenção dos Harmônicos Hiperesféricos em N
Dimensões

São Cristóvão – SE

2019

Aleff de Jesus Santos

Obtenção dos Harmônicos Hiperesféricos em N Dimensões

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física da Universidade
Federal de Sergipe, como requisito parcial para
obtenção do Grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Andrei Smirnov

São Cristovão - SE

2019

Resumo

Construímos neste trabalho os harmônicos hiperesféricos em N dimensões. A equação de Laplace em N dimensões nas coordenadas hiperesféricas é obtida com o uso do operador de Laplace-Beltrami com a métrica da geometria esférica. O método usado para a obtenção dos harmônicos hiperesféricos é baseado no método usual de separação de variáveis e não envolve a teoria de polinômios harmônicos, teoria de momento angular generalizado ou teoria de representação de grupo. As equações ordinárias são reduzidas equação de Schrödinger com o potencial simétrico de Pöschl-Teller. As soluções das equações ordinárias são apresentadas na forma da solução da equação de Schrödinger multiplicada por um fator funcional computado no processo de solução. Os harmônicos hiperesféricos são obtidos como o produto das soluções das equações ordinárias e são expressos em termos dos polinômios de Gegenbauer. O resultado é comparado com os resultados obtidos por outros métodos. Para a ilustração gráfica dos resultados são apresentadas as imagens das projeções dos harmônicos hiperesféricos em 4 dimensões nos hiperplanos tridimensionais.

Palavra-chave: Operador de Laplace-Beltrami, Harmônicos Hiperesféricos, Polinômios de Gegenbauer.

Abstract

In this work we build hyperspherical harmonics in N dimensions. The Laplace equation in N dimensions in hyperspherical coordinates is obtained using the Laplace-Beltrami operator with the spherical geometry metric. The method used to obtain hyperspherical harmonics is based on the usual method of separating variables and does not involve harmonic polynomial theory, generalized angular momentum theory, or group representation theory. Ordinary equations are reduced to the Schrödinger equation with the Pöschl-Teller symmetrical potential. The solutions of the ordinary equations are presented in the form of the solution of the Schrödinger equation multiplied by a functional factor computed in the solution process. Hyperspherical harmonics are obtained as the product of solutions of ordinary equations and are expressed in terms of Gegenbauer polynomials. The result is compared with the results obtained by other methods. For the graphical illustration of the results are presented the images of the projections of the 4-dimensional hyperspherical harmonics in the three-dimensional hyperplanes.

Keywords: Laplace-Beltrami Operator, Hyperspherical Harmonics, Gegenbauer Polynomials.

Agradecimentos

A mim, por não ter desistido e superar as adversidades desse curso.

A minha mãe, meu pai, minha avó, minhas tias e alguns primos por me darem apoio financeiro.

Não posso deixar de agradecer a essa universidade por ser um local que disponibiliza conhecimento de diversas áreas.

Ao meu orientador Pr. Dr. Andrei Smirnov pelo suporte.

Aos meus amigos, em especial: Amanda Carvalho, Luiza Miranda, Thaynara Santos, Thulio Silva, Vitor Breno, Emanuel Junior, Jeverson Santos, Lis Barreto, Heloisa Miranda e até Rubianne do Carmo; por todas as conversas, pelo apoio emocional e pelo conhecimento que me motivaram a chegar até aqui.

Agradeço aos meus professores, pois sem eles este trabalho não seria possível.

Por fim, agradeço a todos aqueles que passaram pelo meu caminho e de alguma forma me auxiliaram.

Lista de Figuras

5.1	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 0, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$; $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$	73
5.2	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 1, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$; $l_3 = 2, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$	73
5.3	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2, l_2 = 2$, e $l_1 = 0$	74
5.4	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2, l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$	74
5.5	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3, l_2 = 2$, e $l_1 = 0$	75
5.6	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3, l_2 = 3$, e $l_1 = 1$	75
5.7	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 3$, e $l_1 = 3$;	76
5.8	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 0, l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$	76
5.9	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 1, l_2 = 1$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$	77
5.10	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2, l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 2, l_2 = 1$ e $l_1 = 0$	77
5.11	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2, l_2 = 2$, e $l_1 = 1$	78
5.12	Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2, l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2, l_2 = 2$, e $l_1 = 2$	78

5.13	Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 =$ 3, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3$; $l_2 = 1$ e $l_1 = 0$	79
5.14	Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 =$ 3, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 0$	79
5.15	Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 =$ 3, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$	80
5.16	Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 =$ 3, $l_2 = 3$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$ e $l_1 = 1$	80
5.17	Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 =$ 3, $l_2 = 3$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 3$	81

Sumário

Resumo	2
Abstract	3
Agradecimentos	4
Lista de Figuras	6
1 Introdução	9
2 Obtenção do Laplaciano em coordenadas hiperésfericas na esfera em 4 dimensões.	17
2.1 Transformação de coordenadas.	18
2.2 Uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares. . .	23
2.3 Uso do operador de Laplace-Beltrami.	28
2.4 Separação de variáveis em 3 dimensões.	30
3 Obtenção do Laplaciano em coordenadas hiperesféricas na esfera em $N + 1$ dimensões.	34
4 Solução da Equação de Laplace em N dimensões.	41
4.1 Separação de variáveis	41
4.2 O problema de Pöschl-Teller.	45
4.3 Soluções das equações diferenciais ordinárias.	47
4.4 Normalização e Ortogonalidade.	63
5 Apresentação gráfica dos harmônicos hiperesféricos em S^3.	69
6 Conclusão	82

Capítulo 1

Introdução

Os harmônicos hiperéfericos são a generalização dos harmônicos esféricos. São as soluções da equação de Laplace generalizada, sua obtenção é conhecida e encontrada em diferentes formas na literatura. Na Ref. [1] é demonstrada uma generalização do teorema da divergência em N dimensões que em seguida é usada, junto ao operador de Laplace-Beltrami, para obter a equação de Laplace em N dimensões. O método utilizado na Ref. [1] obtém a equação de Laplace em N dimensões e suas soluções de uma forma mais didática, de maneira mais detalhada, sendo possível a fácil compreensão de alunos de graduação em física ou matemática. É abordada inicialmente a equação para dimensões menores e em seguida é realizada sua generalização. Na Ref. [2] harmônicos hiperéfericos são descritos mais formalmente por meio de teoria de representação de grupo, onde relaciona o grupo de rotações $SO(N)$ com representações que atuam no espaço de funções. Na Ref. [3] foram obtidos os autovalores e degenerescências dos harmônicos hiperesféricos. Na referência [4] foi deduzida a conclusão sobre completeza dos harmônicos hiperesféricos baseada no teorema sobre polinômios homogêneos em S . Na Ref. [5], os harmônicos hiperesféricos são apresentados parcialmente em termos dos polinômios de Gegenbauer. A expressão final não é apresentada, é indicada somente uma função geratriz das soluções.

Reproduzimos duas formas bem conhecidas de obtenção dos harmônicos hiperesféricos, descritas na Ref. [2] e na Ref. [6]. Porém para um melhor entendimento do método desenvolvido, descrevemos neste trabalho o método descrito na Ref. [6]. Os métodos verificados requerem uma maior dedicação e esforço para a compreensão, aumentando consequentemente o tempo necessário de aprendizagem.

Na Ref. [6] (Capítulo 11) é descrita a obtenção dos harmônicos hiperesféricos,

essa descrição é baseada na teoria dos polinômios harmônicos. Denota-se $H_n(\vec{x})$ como um polinômio homogêneo harmônico de grau n e $p+2$ variáveis, isto é, $\Delta H_n(\vec{x}) = 0$ e $r^{-n}H_n(\vec{x}) = H_n(r^{-1}\vec{x}) = H_n(\vec{\xi})$ com $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{p+2})$ e $\vec{\xi} = r^{-1}\vec{x}$. O polinômio $r^{-n}H_n(\vec{x}) = H_n(\vec{\xi})$ é uma função unívoca e contínua na esfera unitária ($r = 1$) de dimensão $p+1$, S^{p+1} . As coordenadas euclidianas $\vec{x}$ são expressas nas coordenadas hiperesféricas $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \varphi)$ na forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ &\vdots \\ x_p &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1} \cos \theta_p, \\ x_{p+1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1} \sin \theta_p \cos \varphi, \\ x_{p+2} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1} \sin \theta_p \sin \varphi, \\ 0 &\leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

Na dedução dos harmônicos hiperesféricos da Ref. [6] são usadas as seguintes relações: o resultado da ação do Laplaciano no espaço de $p+2$ dimensões na função $r^l (\vec{x}, \vec{y})^m$, onde $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{p+2} x_k y_k$ é o produto escalar e r é a coordenada radial das coordenadas esféricas:

$$\Delta [r^l (\vec{x}, \vec{y})^m] = \left[\frac{m(m-1)(\vec{y}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{y})^2} + \frac{l(l+p+2)}{r^2} \right] r^l (\vec{x}, \vec{y})^m \tag{1.0.2}$$

e a função geratriz de polinômios de Gegenbauer $C_n^\nu(x)$:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) t^n, \quad \nu \neq 0. \tag{1.0.3}$$

Também é deduzido o número de polinômios harmônicos linearmente independentes de grau n e de $p+2$ variáveis $h(n, p)$,

$$h(n, p) = \frac{(2n+p)(n+p-1)!}{p!n!}$$

estabelecendo a seguinte propriedade para $h(n, p)$:

$$h(n, p) = h(n, p-1) + h(n-1, p-1) + \dots + h(0, p-1). \quad (1.0.4)$$

A construção dos harmônicos hiperesféricos é feita a partir da observação que não existem polinômios homogêneos harmônicos (exceto no caso de $n = 0$) que são invariantes relativo todas as transformações ortogonais do espaço Euclidiano, porém existe um polinômio $H_n(\vec{x})$ que é invariante relativo essas transformações que deixam um ponto na esfera unitária fixado, isto é, sem deslocamento. Para tais transformações ortogonais que deixam o ponto $\vec{\eta}$ na esfera unitária fixado temos que $(O\vec{x}, \vec{\eta}) = (\vec{x}, \vec{\eta})$, portanto, o polinômio deve ter a forma:

$$c_0(\vec{x}, \vec{\eta})^n + c_1 r(\vec{x}, \vec{\eta})^{n-1} + \dots + c_{n-1} r^{n-1}(\vec{x}, \vec{\eta}) + c_n r^n,$$

onde $c_0, c_1, \dots, c_n$ são coeficientes constantes. Da condição que $\Delta H_n(\vec{x}) = 0$ e com o uso da Eq. (1.0.2) pode ser obtida a seguinte relação de recorrência para os coeficientes:

$$(n-m)(n-m-1)c_m + (m+2)(2n-m-2+p)c_{m+2} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ e } c_1 = 0.$$

Seja $\vec{u}$ um vetor com o seu início na origem e com norma dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} = r$ e apresentado na forma

$$\vec{u} = \tau \vec{\eta} - \vec{x},$$

escolhe-se os vetores $\vec{x}$ e $\vec{\eta}$ apropriadamente obedecendo que: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = r$ e $\|\vec{\eta}\| = \sqrt{(\vec{\eta}, \vec{\eta})} = 1$; e um parâmetro τ , com. Por um lado

$$\|\vec{u}\|^{-p} = r^{-p},$$

e da Eq. (1.0.2) temos:

$$\Delta \|\vec{u}\|^{-p} = \Delta r^{-p} = 0. \quad (1.0.5)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\| &= \|\tau\vec{\eta} - \vec{x}\| = (\tau\vec{\eta} - \vec{x}, \tau\vec{\eta} - \vec{x})^{1/2} \\
 &= [\tau^2 (\vec{\eta}, \vec{\eta}) - 2\tau (\vec{\eta}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{x})]^{1/2} \\
 &= [\tau^2 - 2\tau (\vec{\eta}, \vec{x}) + r^2]^{1/2}
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\|^{-p} &= [\tau^2 - 2\tau (\vec{\eta}, \vec{x}) + r^2]^{-p/2} = [\tau^2 - 2\tau r (\vec{\eta}, \vec{\xi}) + r^2]^{-p/2} \\
 &= [\tau^2 (1 - 2\tau^{-1} (\vec{\eta}, \vec{x}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2} = \tau^{-p} [(1 - 2\tau^{-1} (\vec{\eta}, \vec{x}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2} \\
 &= \tau^{-p} [(1 - 2\tau^{-1} r (\vec{\eta}, \vec{\xi}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2}, \quad \vec{x} = r\vec{\xi}.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\|^{-p} &= [\tau^2 (1 - 2\tau^{-1} r (\vec{\eta}, \vec{\xi}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2} \\
 &= \tau^{-p} [(1 - 2\tau^{-1} r (\vec{\eta}, \vec{\xi}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2}.
 \end{aligned}$$

Então, da Eq. (1.0.5) temos:

$$\Delta \|\vec{u}\|^{-p} = \tau^{-p} \Delta [(1 - 2\tau^{-1} r (\vec{\eta}, \vec{\xi}) + \tau^{-2} r^2)]^{-p/2} = 0.$$

Impondo $\tau = t^{-1}$, e usando a Eq. (1.0.3) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta [(1 - 2(\vec{\eta}, \vec{\xi})rt + r^2t^2)]^{-p/2} &= \Delta \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{p/2} ((\vec{\eta}, \vec{\xi})) r^n t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta C_n^{p/2} ((\vec{\eta}, \vec{\xi})) r^n] t^n = 0
 \end{aligned}$$

que leva a conclusão que para cada n :

$$\Delta [r^n C_n^{p/2} ((\vec{\eta}, \vec{\xi}))] = 0.$$

Então, para cada vetor unitário $\vec{\eta}$ o polinômio harmônico de grau n e de $p+2$ variáveis

$H_n(\vec{x})$ pode ser apresentado como:

$$H_n(\vec{x}) = b_n r^n C_n^{p/2} \left(\left(\vec{\eta}, \vec{\xi} \right) \right), \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{r},$$

onde b_n é um fator que serve para uma normalização dos polinômios. Uma das possibilidades de determinação do fator b_n é impondo a condição:

$$H_n(\vec{\eta}) = 1.$$

Neste caso temos:

$$H_n(\vec{\eta}) = H_n(r^{-1}\vec{y}) = r^{-n} H_n(\vec{y}) = r^{-n} b_n r^n C_n^{p/2}((\vec{\eta}, \vec{\eta})) = b_n C_n^{p/2}(1) = 1,$$

portanto

$$b_n = \frac{1}{C_n^{p/2}(1)}$$

Chega-se então à expressão final:

$$H_n(\vec{x}) = r^n \frac{C_n^{p/2} \left(\left(\vec{\eta}, \vec{\xi} \right) \right)}{C_n^{p/2}(1)}, \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{r}.$$

Para construir o sistema completo dos polinômios harmônicos de grau n linearmente independentes é introduzida a notação para os polinômios harmônicos de grau m que não dependem das primeiras variáveis $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$:

$$H_{m,k}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{p+2}).$$

É possível demonstrar que para todos valores do parâmetro t é obedecida a relação:

$$\Delta \left[(1 - 2x_1 t + r^2 t^2)^{-m-p/2} H_{m,2} \right] = 0 \quad (1.0.6)$$

onde m pode tomar vários valores começando de 0. A Eq. (1.0.3) permite determinar todos os polinômios harmônicos de $p+2$ variáveis se são disponíveis os polinômios de $p+1$

variáveis. Com o uso da Eq. (1.0.3) vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta \left[r^n C_n^{m+p/2} \left(\frac{x_1}{r} \right) H_{m,2} \right] t^n = 0$$

e portanto todos os polinômios da forma $r^n C_n^{m+p/2} \left(\frac{x_1}{r} \right) H_{m,2}$ são harmônicos. Entre eles, os polinômios

$$r^{n-m} C_{n-m}^{m+p/2} \left(\frac{x_1}{r} \right) H_{m,2} \quad (1.0.7)$$

que são de grau n , porém possuem o grau $n - m$ em relação a x_1 . O numero dos polinômios linearmente independentes $H_{m,2}$ é $h(m, p - 1)$. Então na Eq. (1.0.7) são descritos $h(m, p - 1)$ polinômios linearmente independentes, com $m = 0, 1, 2, \dots, n$ e da relação (1.0.4)

$$h(n, p - 1) + h(n - 1, p - 1) + \dots + h(0, p - 1) = h(n, p),$$

na Eq. (1.0.7) são obtidos todos os polinômios linearmente independentes $H_n(\vec{x})$ de grau n . Além disso os polinômios da forma

$$(x_{p+1} \pm ix_{p+2})^m$$

formam o sistema completo dos polinômios linearmente independentes $H_{m,p+1}$.

O processo descrito acima é repetido para os polinômios com número de variáveis diminuído por 1. Nesse processo são obtidos todos os polinômios harmônicos linearmente independentes de grau n e de $p + 2$ variáveis em termos de polinômios de Gegenbauer. Para expressa-los na forma compacta na Ref. [6] é introduzida a notação:

$$r_k = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \dots + x_{p+2}^2}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, p$ e $r_0 = r$. Para os números inteiros

$$n = m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_p \geq 0$$

as funções

$$H(M, \vec{x}) = \left(\frac{x_{p+1}}{r_p} + i \frac{x_{p+2}}{r_p} \right)^{\pm m_p} r_p^{m_p} \prod_{k=0}^{p-1} r_k^{m_k - m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + (p-k)/2} \left(\frac{x_{k+1}}{r_k} \right), \quad (1.0.8)$$

com

$$M = (n, m_1, m_2, \dots, m_{p-1}, \pm m_p)$$

formando o sistema completo de $h(n, p)$ polinômios linearmente independentes de grau n e de $p+2$ variáveis. Na coordenadas esféricas (1.0.1) os polinômios $H(M, \vec{x})$ são expressos como:

$$H(M, \vec{x}) = r^n Y_M(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \pm\varphi) = r^n Y_M(\theta, \varphi) \quad (1.0.9)$$

com

$$Y_M(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \pm\varphi) = e^{\pm i m_p \varphi} \prod_{k=0}^{p-1} (\sin \theta_{k+1})^{m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + (p-k)/2} (\cos \theta_{k+1}) \quad (1.0.10)$$

As funções $Y_M(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \pm\varphi)$ representam os harmônicos esféricos na superfície da esfera S^{p+1} . Na Ref. [6] é demonstrada a ortogonalidade dos harmônicos esféricos e provado o teorema de adição.

São diversas as aplicações dos harmônicos hiperesféricos na física, como: teoria do potencial, problema de muitos corpos, problemas cosmológicos, entre outros. Na Ref. [7] são mostradas projeções harmônicas de forma alternativa ao tratamento do momento angular e o momento angular generalizado, levando em conta várias teoremas para integrações hiperangulares, ressaltando as aplicações, por estarem ligadas a "Coulomb Sturmians" através das projeções de Fock, tanto os "Sturmianos" quanto suas generalizações mostram-se exatamente úteis na teoria quântica. Na Ref. [7] é demonstrado uma generalização do teorema da divergência para dimensão N que em seguida é usado, junto ao operador de Laplace-Beltrami, para obter a equação de Laplace para dimensão N .

As soluções da equação de Schrödinger para átomos hidrogenoides obtidas de Fock [8] são usadas como funções para problemas $3N$ -dimensões em que N é o número de partícula, porém os orbitais tridimensionais semelhantes ao do hidrogênio não formam um conjunto completo para a representação de soluções para estados ligados da equação de

Schrödinger. Porém, foi introduzido por Shull e Löwdin um tipo de função básica que se tornou conhecido como "Coulomb Sturmians". Tais funções possuem a mesma forma dos orbitais atômicos tridimensionais para átomos semelhantes. Os "Coulomb Sturmians" formam um conjunto completo para estados ligados da equação de Schrödinger para uma partícula e são amplamente utilizados na física atômica. Osvaldo Goscinski em um artigo de 2003 [9] generalizou o conceito Sturmians considerando os "Sturmianos" como solução isoenergética para equação de Schrödinger N -dimensional.

O método desenvolvido de obtenção dos harmônicos hiperesféricos mostra-se ser mais eficaz que os descritos nas Ref. [2] e na Ref. [6] por utilizar ferramentas conhecidas das disciplinas de física matemática, física teórica e afins. É baseado na utilização das soluções da equação de Schrödinger com potencial simétrico de Pöschl-Teller. Para melhor compreensão, é obtido inicialmente o Laplaciano em coordenadas hiperesféricas em 3 dimensões por três métodos distintos (transformações de coordenadas, uso dos operadores diferenciais vetoriais e o uso do operador de Laplace-Beltrami covariante) e com o uso do método de separação de variáveis o conjunto de equações diferenciais ordinárias. Em seguida é generalizado para caso N dimensional obtendo o conjunto de equações diferenciais ordinária, suas soluções e consequentemente os harmônicos hiperesféricos em N dimensões. Também é mostrada sua ortogonalidade e obtida a constante de normalização. Por fim, realizamos algumas apresentações gráficas dos harmônicos hiperesféricos para 4 dimensões em dois hiperplanos (x_1, x_2, x_4) e (x_1, x_3, x_4) , usando uma parametrização apropriada que foi definida no projeto. Essas projeções são realizadas fixando $\theta_1 = \pi$ para o primeiro hiperplano e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ para o segundo, fazendo uma abordagem didática para a compreensão dos harmônicos.

Capítulo 2

Obtenção do Laplaciano em coordenadas hiperésfericas na esfera em 4 dimensões.

Obtemos o operador de Laplace (Laplaciano) em coordenadas hipersféricas em 4 dimensões por três métodos distintos: transformações de coordenadas, uso de operadores diferenciais vetoriais e usando o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante explorando o tensor métrico e algumas de suas propriedades. Da equação de Laplace obtemos em seguida três equações diferenciais ordinárias por meio do método de separação de variáveis.

Definimos as coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3, x_4) em termos das coordenadas hiperésfericas $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ da seguinte forma:

$$x_4 = r \cos \theta_3, \tag{2.0.1}$$

$$x_3 = r \sin \theta_3 \cos \theta_2,$$

$$x_2 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1,$$

$$x_1 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1.$$

E as expressões das coordenadas hipersféricas em termos das coordenadas cartesianas

como:

$$\begin{aligned} q_1 = \theta_1 &= \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right), \\ q_2 = \theta_2 &= \arctan\left(\frac{r_2}{x_3}\right), \quad r_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ q_3 = \theta_3 &= \arctan\left(\frac{r_3}{x_4}\right), \quad r_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ q_4 = r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = r_4. \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

As coordenadas possuem os seguintes intervalos: $r \in (0, \infty)$, $\theta_1 \in (0, 2\pi)$ e $\theta_2, \theta_3 \in (0, \pi)$. Para facilitar nos cálculos introduzimos uma notação generalizada para as coordenadas hiperesféricas (q_1, q_2, q_3, q_4) .

2.1 Transformação de coordenadas.

Uma forma de obter o Laplaciano nas coordenadas hiperesféricas $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ é com o uso de transformação de coordenadas. O método consiste em escrever o Laplaciano em termos das derivadas relativa as coordenadas hiperesféricas usando a regra da cadeia. O método de transformação de coordenadas é direto, porém sua dificuldade aumenta conforme a quantidade de coordenadas aumenta.

O Laplaciano nas coordenadas cartesianas é expresso como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \tag{2.1.1}$$

Calculamos a primeira derivada da função u em relação a coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{2.1.2}$$

e em seguida a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \tag{2.1.3}$$

Então o Laplaciano é escrito:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}.\end{aligned}\quad (2.1.4)$$

Encontramos as primeiras e segundas derivadas $\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_j^2} \right)$, para q_1, q_2, q_3 e q_4 .

Para coordenada q_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial x_1} &= \frac{x_2}{r_2^2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{r_2^2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_3} = \frac{\partial q_1}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{2x_1x_2}{r_2^4}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1x_2}{r_2^4}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_4^2} = 0.\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

Para a coordenada q_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_2}{\partial x_1} &= \frac{x_3x_1}{r_2r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = \frac{x_3x_2}{r_2r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_3} = -\frac{r_2}{r_3^2}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_1^2} &= \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_3^2} - \frac{x_1^2}{r_2^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_2^2} = \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_3^2} - \frac{x_2^2}{r_2^2} \right) \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_3^2} &= \frac{2x_3r_2}{r_3^4}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_4^2} = 0.\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

Para a coordenada q_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_3}{\partial x_1} &= \frac{x_4x_1}{r_3r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_2} = \frac{x_4x_2}{r_3r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{x_4x_3}{r_3r_4^2}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x_4} = -\frac{r_3}{r_4^2}, \\ \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_1^2} &= \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_4^2} - \frac{x_1^2}{r_3^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_2^2} = \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_4^2} - \frac{x_2^2}{r_3^2} \right), \\ \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_3^2} &= \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_3^2}{r_4^2} - \frac{x_3^2}{r_3^2} \right), \quad \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_4^2} = \frac{2x_4r_3}{r_4^4}.\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

Para a coordenada q_4 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_4}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{r_4}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{r_4} - \frac{x_1^2}{r_4^3}, \quad \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_2^2} = \frac{1}{r_4} - \frac{x_2^2}{r_4^3}, \\ \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{r_4} - \frac{x_3^2}{r_4^3}, \quad \frac{\partial^2 q_4}{\partial x_4^2} = \frac{1}{r_4} - \frac{x_4^2}{r_4^3}.\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

Usando as derivadas em (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) e (2.1.8) agrupamos os coeficientes que acompanham as segundas derivadas da função u na Eq. (2.1.4), para as derivadas em relação a coordenadas q_1, q_2, q_3 e q_4 .

Em relação a coordenada q_1 :

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \frac{r_2^2}{r_2^4} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}. \quad (2.1.9)$$

Em relação a coordenada q_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} &= \frac{1}{r_3^4} \left[r_2^2 + \frac{x_3^2 (x_1^2 + x_2^2)}{r_2^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \\ &= \frac{1}{r_3^4} (r_2^2 + x_3^2) \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} = \frac{1}{r_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Em relação a coordenada q_3 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_3}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} &= \frac{1}{r_4^4} (r_3^2 + x_4^2) \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} \\ &= \frac{1}{r_4^4} r_4^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} = \frac{1}{r_4^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Em relação a coordenada q_4 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial q_4}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} &= \left(\frac{x_4^2}{r_4^2} + \frac{x_3^2}{r_4^2} + \frac{x_2^2}{r_4^2} + \frac{x_1^2}{r_4^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} \\ &= \frac{1}{r_4^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Em seguida, calculamos os coeficientes das derivadas mistas. Em relação a coordenadas q_1 e q_2 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \left(-\frac{x_3 x_2}{r_2 r_3^2} \frac{x_1}{r_2^2} + \frac{x_3 x_1}{r_4 r_4^2} \frac{x_2}{r_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \\ &= 2(1-1) \frac{x_3 x_2 x_1}{r_2^3 r_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Em relação as coordenadas q_1 e q_3 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \left(\frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2} \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_2^2} \frac{x_4 x_2}{r_3 r_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} \\ &= 2 (x_2 - x_2) \frac{x_4 x_1}{r_3 r_4^2 r_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Em relação a coordenadas q_1 e q_4 :

$$2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} = 2 \left(-\frac{x_1 x_2}{r_4 r_3^2} + \frac{x_1 x_2}{r_4 r_3^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_4} = 0. \quad (2.1.15)$$

Em relação a coordenadas q_2 e q_3 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} &= 2 \frac{x_4 x_3}{r_3^3 r_4^2} \left[-r_2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{r_2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} \\ &= 2 \frac{x_4 x_3}{r_3^3 r_4^2} (-r_2 + r_2) \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_3} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Em relação a coordenadas q_2 e q_4 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_2}{\partial x_i} &= \left(-\frac{x_3}{r_4} \frac{r_2}{r_3^2} + \frac{x_2}{r_4} \frac{x_3 x_2}{r_2 r_3^2} + \frac{x_1}{r_4} \frac{x_3 x_1}{r_2 r_4^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} \\ &= 2 \frac{x_2}{r_3^2 r_4} (-r_2 + r_2) \frac{\partial^2 u}{\partial q_2 \partial q_4} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Em relação a coordenadas q_3 e q_4 :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} \frac{\partial q_4}{\partial x_i} \frac{\partial q_3}{\partial x_i} &= \left[-\frac{x_4 r_3}{r_4^3} + \frac{x_4}{r_3 r_4^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} \\ &= 2 \frac{x_1 r_3}{r_4^3} (r_3 - r_3) \frac{\partial^2 u}{\partial q_3 \partial q_4} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Agrupamos e simplificamos os coeficientes relacionados a primeiras derivadas. Para a coordenada q_1 :

$$\left[\frac{2x_1 x_2}{r_2^4} - \frac{2x_1 x_2}{r_2^4} \right] \frac{\partial u}{\partial q_1} = 0. \quad (2.1.19)$$

Para a coordenada q_2 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x_3r_2}{r_3^4} + \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_3^2} - \frac{x_1^2}{r_2^2} \right) \\
 & + \frac{x_3}{r_2r_3^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_3^2} - \frac{x_2^2}{r_2^2} \right) \frac{\partial u}{\partial q_2} \\
 & = \frac{x_3}{r_3^4r_2} (2r_2^2 - 2r_2^2 + r_3^2) \frac{\partial u}{\partial q_2} \\
 & = \frac{x_3}{r_3^2r_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}.
 \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Para a coordenada q_3 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x_4r_3}{r_4^4} + \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_2^2}{r_4^2} - \frac{x_2^2}{r_3^2} \right) \\
 & + \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_1^2}{r_4^2} - \frac{x_1^2}{r_3^2} \right) + \frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(1 - \frac{2x_3^2}{r_4^2} - \frac{x_3^2}{r_3^2} \right) \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
 & = \left[\frac{x_4}{r_3r_4^2} \left(3 - \frac{2r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_3^2}{r_3^3} \right) + \frac{2x_4r_3}{r_4^4} \right] \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
 & = \frac{x_4}{r_3r_4^4} (2r_4^2 - 2r_3^2 + 2r_3^2) \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
 & = \frac{2x_4}{r_4^2r_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}.
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Para a coordenada q_4 :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_4^3} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 \\
 & + x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \frac{\partial u}{\partial q_4} \\
 & = \frac{3}{r_4^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \frac{\partial u}{\partial q_4} \\
 & = \frac{3}{r_4} \frac{\partial u}{\partial q_4}.
 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Substituindo então os coeficientes das Eqs. (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.19), (2.1.20), (2.1.21) e (2.1.22) na Eq. (2.1.4), encontrando que:

$$\begin{aligned}
 \Delta u & = \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} + \frac{3}{r_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} + \frac{1}{r_4^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} + \frac{2x_4}{r_4^2r_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \\
 & + \frac{1}{r_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} + \frac{x_3}{r_3^2r_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2},
 \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

com

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_4^2} &= \frac{1}{r^2}; \quad \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3}; \\ \frac{1}{r_2^2} &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2}; \\ \frac{x_3}{r_3^2 r_2} &= \frac{\cos \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}; \quad \frac{2x_4}{r_3 r_4^2} = 2 \frac{\cot \theta_3}{r^2}.\end{aligned}\tag{2.1.24}$$

Substituindo os termos de (2.1.23) na Eq. (2.1.24), obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_3^2} + 2 \frac{\cot \theta_3}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_2^2} + \frac{\cos \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2},\end{aligned}\tag{2.1.25}$$

que também é escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2}.\end{aligned}\tag{2.1.26}$$

A Eq. (2.1.26) representa o Laplaciano nas coordenadas hiperesféricas em 4 dimensões. Ao comparar com o Laplaciano nas coordenadas esféricas em 3 dimensões, nota-se que há um acréscimo de um termo referente a derivada em relação a θ_1 , há um acréscimo em 1 nas potências de r da derivada radial e um termo de seno no quociente do coeficiente da derivada em relação a θ_2 .

2.2 Uso dos operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares.

Um outro método de obtenção do Laplaciano em coordenadas hiperesféricas $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ é usando os operadores gradiente e divergência nas coordenadas curvilineares. O Laplaciano é definido como:

$$\Delta u = \text{div} (\text{grad } u).\tag{2.2.1}$$

Descrevemos o caso em 3 dimensões para assim generalizar para o caso em 4 dimensões. Ressaltando as expressões de gradiente e de divergência em 3 dimensões, com o gradiente

de uma função escalar definido como:

$$\vec{A} = \text{grad } u = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}, \quad (2.2.2)$$

sendo q_1, q_2 e q_3 coordenadas curvilineares ortogonais; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ vetores unitários das linhas das coordenadas e h_1, h_2 e h_3 os coeficientes métricos determinados pela expressão:

$$h_j = \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{com } j = 1, 2, 3; \quad (2.2.3)$$

sabendo que x_1, x_2 e x_3 são coordenadas cartesianas.

A divergência de um campo vetorial é definida como:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]. \quad (2.2.4)$$

Substituindo as componentes da Eq. (2.2.2) na Eq. (2.2.4), chegamos à expressão para o Laplaciano em coordenadas curvilineares:

$$\begin{aligned} \Delta u = \text{div} (\text{grad } u) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Introduzimos as coordenadas esféricas na seguinte forma:

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2 \quad \text{e} \quad q_3 = r \quad (2.2.6)$$

essa forma de notação não é comum, mas é mais conveniente para o objetivo desse trabalho. As relações das coordenadas cartesianas em termos das coordenadas curvilineares são:

$$x_3 = r \cos \theta_2, \quad x_2 = r \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad x_1 = r \sin \theta_2 \sin \theta_1. \quad (2.2.7)$$

As derivadas das coordenadas cartesianas em relação as coordenadas esféricas da Eq.(2.2.5)

são escritas na forma da matriz:

$$G_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

$$= \begin{bmatrix} r \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ -r \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ 0 & -r \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Das Eqs. (2.2.3) e (2.2.8) obtemos os coeficientes métricos na forma:

$$h_1 = r \sin \theta_2, \quad h_2 = r \quad \text{e} \quad h_3 = 1. \quad (2.2.9)$$

Substituindo os coeficientes métricos na Eq. (2.2.5) e usando a notação da Eq. (2.2.6), chegamos ao Laplaciano nas coordenadas esféricas

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (2.2.10)$$

ou

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right).$$

Usando um processo parecido generalizamos para o caso em 4 dimensões.

Fizemos o mesmo procedimento para o caso em 4 dimensões. Sendo o gradiente de uma função escalar u escrito na forma:

$$\vec{A} = \text{grad } u = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} + \vec{e}_4 \frac{1}{h_4} \frac{\partial u}{\partial q_4}, \quad (2.2.11)$$

onde h_1, h_2, h_3 e h_4 são os coeficientes métricos definidos por:

$$h_j = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.2.12)$$

q_1, q_2, q_3 e q_4 são coordenadas curvilineares ortogonais e $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ e $\vec{e}_4$ são vetores unitários

das linhas das coordenadas. A divergência de $\vec{A}$ é definida como:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4} & \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 h_4 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 h_4 A_2) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 h_4 A_3) + \frac{\partial}{\partial q_4} (h_1 h_2 h_3 A_4) \right], \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

dessa forma o Laplaciano é:

$$\begin{aligned} \Delta u = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4} & \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3 h_4}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3 h_4}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_4}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) + \frac{\partial}{\partial q_4} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_4} \frac{\partial u}{\partial q_4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

O Laplaciano foi obtido nas seguintes coordenadas hiperesféricas:

$$q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = \theta_3 \text{ e } q_4 = r. \quad (2.2.15)$$

As relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas hiperesféricas são:

$$x_4 = r \cos \theta_3, \quad (2.2.16)$$

$$x_3 = r \sin \theta_3 \cos \theta_2,$$

$$x_2 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1,$$

$$x_1 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1;$$

já citadas na Eq. (2.0.1). Representamos as derivadas das coordenadas hiperesféricas pelas coordenadas curvilineares na forma de matriz

$$\begin{aligned} G_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_1}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial q_1} & \frac{\partial x_4}{\partial q_2} & \frac{\partial x_4}{\partial q_3} & \frac{\partial x_4}{\partial q_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \\ \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_4}{\partial r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ 0 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 & r \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & -r \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

e calculamos os coeficientes métricos da Eq. (2.2.12).

Para h_1 temos:

$$h_1^2 = r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2. \quad (2.2.18)$$

Para h_2 :

$$\begin{aligned} h_2^2 &= r^2 (\sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2) \\ &= r^2 \sin^2 \theta_3. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Para h_3 :

$$\begin{aligned} h_3^2 &= r^2 (\cos^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \cos^2 \theta_2) + \sin^2 \theta_3) \\ &= r^2 (\cos^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) + \sin^2 \theta_3) = r^2. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Para h_4 :

$$\begin{aligned} h_4^2 &= \sin^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_2) + \cos^2 \theta_3 \\ &= \sin^2 \theta_3 (\sin^2 \theta_2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + \cos^2 \theta_2) + \cos^2 \theta_3 = 1. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Simplificando os termos que acompanham as derivadas da Eq. (2.2.14) e substituindo os coeficientes métricos calculados em (2.2.18), (2.2.19), (2.2.20) e (2.2.21) encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{h_2 h_3 h_4}{h_1} &= \frac{r}{\sin \theta_2}, \\ \frac{h_1 h_3 h_4}{h_2} &= r \sin \theta_2, \\ \frac{h_1 h_2 h_4}{h_3} &= r \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2, \\ \frac{h_1 h_2 h_3}{h_4} &= r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2, \\ h_1 h_2 h_3 h_4 &= r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Substituindo os termos encontrados acima na Eq. (2.2.14) encontramos o Laplaciano em

coordenadas hiperesféricas

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = & \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{r}{\sin \theta_2} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(r \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(r \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

sendo escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2}. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

A Eq. (2.2.24) é o Laplaciano em coordenadas hiperesféricas em 4 dimensões e é a mesma expressão da Eq.(2.1.26).

2.3 Uso do operador de Laplace-Beltrami.

O operador de Laplace-Beltrami na forma covariante é definido como:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial q_j} \right), \quad (2.3.1)$$

onde g^{ij} é o tensor métrico inverso do tensor métrico g_{ij} e g é o determinante do tensor métrico. O tensor métrico pode ser determinado como:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = G^T G. \quad (2.3.2)$$

onde G representa a matriz com componentes $G_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$. A matriz G é determinada na seção anterior na Eq. (2.2.17) e a matriz transposta G^T tem a forma:

$$G^T = \begin{bmatrix} r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & r \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1 & -r \sin \theta_3 \sin \theta_2 & 0 \\ r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & r \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & r \cos \theta_3 \cos \theta_2 & -r \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_3 \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.3.3)$$

Da Eq. (2.3.3) e Eq. (2.2.17) encontramos a matriz do tensor métrico:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Onde o determinante g é

$$g = \det g_{ij} = r^6 \sin^4 \theta_3 \sin^2 \theta_2. \quad (2.3.5)$$

Com a raiz de g e a Eq. (2.3.4) calculamos o tensor métrico inverso g^{ij} , na forma seguinte:

$$g^{ij} = \frac{1}{r^6 \sin \theta_3 \sin^2 \theta_2} \begin{bmatrix} r^4 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^4 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \sin \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^6 \sin \theta_3 \sin^2 \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Para $\sqrt{|g|}g^{ij}$ temos:

$$\sqrt{|g|}g^{ij} = \frac{\sin \theta_3}{r^3 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} r^4 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^4 \sin^2 \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 \sin \theta_3 \sin^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^6 \sin \theta_3 \sin^2 \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3.7)$$

a expressão para cada coordenada curvilínea referente a Eq. (2.3.1) é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2) \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left[\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\left(\frac{r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta_1} \right). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Utilizando as Eqs. (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) e (2.3.11) o Laplaciano é escrito como:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta_1^2}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

A Eq. (2.3.12) repete os resultados das Eqs.: (2.2.24) e (2.1.26). Por conveniência e praticidade é utilizado o método com o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante para a generalização do Laplaciano em coordenadas hiperesféricas em N dimensões.

2.4 Separação de variáveis em 3 dimensões.

Usaremos o método de separação de variáveis na equação de Laplace nas coordenadas hiperesféricas

$$\Delta u = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^3} u = 0 \quad (2.4.1)$$

nas coordenadas hiperesféricas, em que Δ_{S^3} é o operador de Laplace na esfera em 3 dimensões (S^3) em coordenadas hiperesféricas que são definidas na Eq. (2.3.12), o operador de Laplace na esfera S^3 (Δ_{S^3}) é definido como:

$$\begin{aligned} \Delta_{S^3} &= \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Escrevemos a função u na forma:

$$u(r, \theta_3, \theta_2, \theta_1) = R(r)W_3(\theta_3, \theta_2, \theta_1). \quad (2.4.3)$$

Utilizando o método de separação de variáveis para a Eq. (2.4.1) obtemos que:

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) W_3 = -\frac{1}{r^2} (\Delta_{S^3} W_3) R. \quad (2.4.4)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (2.4.4) por $\frac{r^2}{RW_3}$ encontramos:

$$\frac{1}{rR} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3. \quad (2.4.5)$$

A Eq. (2.4.5) só tem validade caso seja igual a uma constante, essa constante é chamada de constante de separação que foi denotada de λ_3 , assim:

$$\frac{1}{rR} \left(r^3 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3 = \lambda_3. \quad (2.4.6)$$

A equação radial para o propósito desse trabalho não é tão importante quanto as equações angulares, então não foi considerada nesse momento. Continuando para a equação angular, dada por:

$$-\frac{1}{W_3} \Delta_{S^3} W_3 = \lambda_3 \quad (2.4.7)$$

ou

$$\Delta_{S^3} W_3 = -\lambda_3 W_3. \quad (2.4.8)$$

Apresentamos a função W_3 como:

$$W_3(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = Y_3(\theta_3) W_2(\theta_2, \theta_1) \quad (2.4.9)$$

e a Substituímos na Eq. (2.4.8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) W_2 + \frac{Y_3}{\sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dW_2}{d\theta_2} \right) \\ & + \frac{Y_3}{\sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{d^2 W_2}{d\theta_1^2} = -\lambda_3 Y_3 W_2. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Simplificando e agrupando os termos da Eq. (2.4.10) chegamos à expressão :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) W_2 + \frac{Y_3}{\sin^2 \theta_3} \Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_3 Y_3 W_2, \quad (2.4.11)$$

onde Δ_{S^2} é o operador de Laplace na esfera em 2 dimensões (S^2) e é definido como:

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{d}{d\theta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \left(\frac{d^2}{d\theta_1^2} \right). \quad (2.4.12)$$

Multiplicando a Eq. (2.4.11) por $\frac{\sin^2 \theta_3}{Y_3 W_2}$ encontramos que:

$$\frac{1}{Y_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) + \frac{1}{W_2 \sin^2 \theta_2} \Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_3 \sin^2 \theta_3 \quad (2.4.13)$$

que agrupando os termos obtemos:

$$\frac{1}{Y_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 + \frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2 = 0, \quad (2.4.14)$$

ou ainda

$$\frac{1}{Y_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{\partial Y_3}{\partial \theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 = -\frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2. \quad (2.4.15)$$

A Eq. (2.4.15) tem validade caso seja igual a uma constante de separação λ_2 , assim:

$$\frac{1}{Y_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) + \lambda_3 \sin^2 \theta_3 = -\frac{1}{W_2} \Delta_{S^2} W_2 = \lambda_2. \quad (2.4.16)$$

É encontrado duas equações, uma para Y_3 e outra para W_2 . A equação para Y_3 tem a forma:

$$\frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) + (\lambda_3 \sin^2 \theta_3 - \lambda_2) Y_3 = 0 \quad (2.4.17)$$

e para W_2 é:

$$\Delta_{S^2} W_2 = -\lambda_2 W_2. \quad (2.4.18)$$

Denotamos a função W_2 como:

$$W_2(\theta_2, \theta_1) = Y_2(\theta_2)Y_1(\theta_1). \quad (2.4.19)$$

e a substituímos na Eq. (2.4.18), obtendo que:

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) Y_1 + \frac{Y_2}{\sin^2 \theta_2} \frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} = -\lambda_2 Y_2 Y_1, \quad (2.4.20)$$

em seguida multiplicamos a Eq. (2.4.20) por $\frac{\sin^2 \theta_2}{Y_2 Y_1}$ e encontramos a equação

$$\frac{\sin \theta_2}{Y_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) + \frac{1}{Y_1} \frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} = -\lambda_2 \sin^2 \theta_2 \quad (2.4.21)$$

ou ainda:

$$\frac{\sin \theta_2}{Y_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) + \lambda_2 \sin^2 \theta_2 = -\frac{1}{Y_1} \frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} = \lambda_1, \quad (2.4.22)$$

onde λ_1 é a constante de separação. Da Eq. (2.4.22) ficamos com duas equações, uma em relação a Y_1 e outra em relação a Y_2 . Para Y_1 temos a seguinte equação:

$$\frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} + \lambda_1 Y_1 = 0 \quad (2.4.23)$$

e para Y_2 a seguinte equação:

$$\frac{\sin \theta_2}{Y_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) + \lambda_2 \sin^2 \theta_2 = \lambda_1 \quad (2.4.24)$$

que também é escrita como:

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0. \quad (2.4.25)$$

Utilizando o método de separação de variáveis encontramos as seguintes equações diferenciais ordinárias: para Y_1

$$\frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} + \lambda_1 Y_1 = 0, \quad (2.4.26)$$

para Y_2

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} \right) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0 \quad (2.4.27)$$

e para Y_3

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^2 \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} \right) + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{\sin^2 \theta_3} \right) Y_3 = 0. \quad (2.4.28)$$

Capítulo 3

Obtenção do Laplaciano em coordenadas hiperesféricas na esfera em $N + 1$ dimensões.

Para obter o Laplaciano em coordenadas hiperesféricas na esfera em $N + 1$ dimensões fazemos o uso do operador de Laplace-Beltrami na forma covariante. O método faz uso de algumas propriedades do tensor métrico, facilitando a obtenção do Laplaciano. Inicialmente obtemos o tensor métrico e conseqüentemente seu determinante, em seguida encontramos o tensor métrico inverso. Por fim, substituímos os resultados obtidos na definição do operador de Laplace-Beltrami e encontramos o Laplaciano em coordenadas hiperesféricas. Adotamos, por conveniência a seguinte notação:

$$\partial_{q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (3.0.1)$$

para realizarmos os cálculos necessários.

O operador de Laplace-Beltrami é escrito:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{N+1} \partial_{q_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_{q_j} u \right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{q_i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_{q_j} u \right) \quad (3.0.2)$$

onde g^{ij} é o tensor métrico inverso do tensor métrico g_{ij} e g é o determinante do tensor

métrico. O tensor métrico é determinado como:

$$g_{ij} = \sum_k \partial_{q_i} x_k \partial_{q_j} x_k = G^T G. \quad (3.0.3)$$

onde x_i são coordenadas cartesianas e q_i são coordenadas curvilineares,

$$G = G_{ij} = \partial_{q_j} x_i \quad (3.0.4)$$

e G^T é a matriz transposta. Para as coordenadas curvilineares utilizaremos as coordenadas hiperesféricas em $N + 1$ dimensões, que são definidas como:

$$\begin{aligned} q_{N+1} &= r, \quad q_i = \theta_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \theta_1 &\in (0, 2\pi), \quad \theta_i \in (0, \pi), \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

As coordenadas cartesianas em termos das coordenadas hiperesféricas $(r, \theta_N, \dots, \theta_2, \theta_1)$ são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= r \cos \theta_N, \\ x_N &= r \sin \theta_N \cos \theta_{N-1}, \\ x_{N-1} &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \cos \theta_{N-2}, \\ &\dots \\ x_3 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \cos \theta_2, \\ x_2 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ x_1 &= r \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \sin \theta_{N-2} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

ou na forma compacta:

$$x_i = r \prod_{k=i}^N \sin \theta_k \cos \theta_{i-1}, \quad \text{com } \theta_0 = 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (3.0.7)$$

Algumas propriedades das coordenadas escritas na Eq. (3.0.6) são:

$$\sum_{k=1}^{N+1} x_k^2 = r^2; \quad \sum_{k=1}^j x_k^2 = x_{j+1}^2 \tan^2 \theta_j, \quad j \geq k. \quad (3.0.8)$$

Inicialmente calculamos o tensor métrico definido na Eq. (3.0.3). As derivadas das coordenadas cartesianas em relação a coordenada $q_{N+1} = r$ são:

$$\partial_r x_k = \frac{x_k}{r}. \quad (3.0.9)$$

Da Eq. (3.0.6) vemos que para $i \leq N$ as derivadas são:

$$\partial_{q_i} x_k = 0 \text{ para } k \geq i + 2, \quad (3.0.10)$$

$$\partial_{q_i} x_k = \partial_{q_i} x_{i+1} = -x_{i+1} \tan \theta_i, \quad k = i + 1, \quad (3.0.11)$$

$$\partial_{q_i} x_k = x_k \cot \theta_i \text{ para } k \leq i. \quad (3.0.12)$$

Com as derivadas calculadas, utilizamos a Eq. (3.0.9) para calcular o tensor métrico, efetuamos os cálculos para

$$g_{N+1, N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} (\partial_r x_k)^2 = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x_k^2}{r^2} = 1. \quad (3.0.13)$$

E em seguida agrupamos as derivadas das Eqs. (3.0.10), (3.0.11) e (3.0.12) para encontrar os termos diagonais ($i = j$) da matriz que representa o tensor métrico para $i \leq N$, sendo eles:

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \sum_{k=1}^{N+1} (\partial_{q_i} x_k)^2 = \sum_{k=1}^i (\partial_{q_i} x_k)^2 + (\partial_{q_i} x_{i+1})^2 + \sum_{k=i+2}^{N+1} (\partial_{q_i} x_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^i x_k^2 \cot^2 \theta_i + x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i + 0. \end{aligned} \quad (3.0.14)$$

Usando a Eq. (3.0.14) escrevemos que:

$$\begin{aligned} g_{ii} &= x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i \cot^2 \theta_i + x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i \\ &= x_{i+1}^2 (1 + \tan^2 \theta_i) = \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} \\ &= r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_i \frac{1}{\cos^2 \theta_i} = r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k. \end{aligned} \quad (3.0.15)$$

Para os termos não diagonais da matriz ($j \neq i$) que representa o tensor métrico, temos:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{N+1} (\partial_{q_i} x_k) (\partial_{q_j} x_k) = \sum_{k=1}^i (\partial_{q_i} x_k) (\partial_{q_j} x_k) \quad (3.0.16)$$

$$+ (\partial_{q_i} x_{i+1}) (\partial_{q_j} x_{i+1}) + \sum_{k=i+2}^{N+1} (\partial_{q_i} x_k) \partial_{q_j} x_k.$$

Substituindo as Eqs.: (3.0.10), (3.0.11) e (3.0.12) na Eq. (3.0.16), obtemos que:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^i x_k \cot \theta_i x_k \cot \theta_j - x_{i+1} \tan \theta_i x_{i+1} \cot \theta_j + 0 \quad (3.0.17)$$

$$= \sum_{k=1}^i x_k^2 \cot \theta_i \cot \theta_j - x_{i+1}^2 \tan \theta_i \cot \theta_j$$

e usando a Eq. (3.0.8) escrevemos g_{ij} como:

$$g_{ij} = x_{i+1}^2 \tan^2 \theta_i \cot \theta_i \cot \theta_j - x_{i+1}^2 \tan \theta_i \cot \theta_j \quad (3.0.18)$$

$$= x_{i+1}^2 (\tan \theta_i \cot \theta_j - \tan \theta_i \cot \theta_j) = 0.$$

As componentes da matriz que representa o tensor métrico são:

$$g_{ij} = 0 \text{ } i \neq j, \quad (3.0.19)$$

$$g_{N+1, N+1} = 1, \quad g_{NN} = r^2, \quad (3.0.20)$$

$$g_{ii} = \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} = r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin \theta_k \text{ para } i \leq N-1. \quad (3.0.21)$$

Fazendo uso dos resultados das Eqs.: (3.0.19), (3.0.20) e (3.0.21) calculamos o determinante de g_{ij}

$$g = \det g_{ij} = \prod_{i=1}^{N+1} g_{ii} = \prod_{i=1}^N \frac{x_{i+1}^2}{\cos^2 \theta_i} \quad (3.0.22)$$

$$= \prod_{i=1}^N r^2 \prod_{k=i+1}^N \sin^2 \theta_k = r^{2N} \prod_{k=2}^N \sin^{2(k-1)} \theta_k.$$

A raiz de g é:

$$\sqrt{|g|} = \prod_{i=1}^N \frac{x_{i+1}}{\cos \theta_i} = r^N \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k. \quad (3.0.23)$$

Agora calcularemos o tensor métrico inverso. Para as componentes não diagonais temos:

$$g^{ij} = 0, i \neq j; \quad (3.0.24)$$

e para as componentes diagonais:

$$g^{ii} = \frac{1}{g} \prod_{k=1}^{i-1} g_{kk} \prod_{j=1}^{i+1} g_{jj} = \frac{1}{g} \frac{g}{g_{ii}} = \frac{x_{i+1}^{-2}}{\cos^{-2} \theta_i} = r^{-2} \prod_{k=i+1}^N \sin^{-2} \theta_k. \quad (3.0.25)$$

As componentes da matriz que representa o tensor métrico inverso são:

$$g^{N+1, N+1} = 1, g^{NN} = r^{-2}, \quad (3.0.26)$$

$$g^{ii} = r^{-2} \prod_{k=1+i}^N \sin^{-2} \theta_k = \frac{x_{i+1}^{-2}}{\cos^{-2} \theta_i} \text{ para } i \leq N-1. \quad (3.0.27)$$

Definimos em seguida, que

$$h^i = g^{ii} \text{ e } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

O operador de Laplace-Beltrami na forma covariante (3.0.2), também é escrito na forma:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \right) \partial_j u + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_i \partial_j u \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} \right) g^{ij} \partial_j u + (\partial_i g^{ij}) \partial_j u + g^{ij} \partial_i \partial_j u \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} \right) g^{ij} \partial_j u + (\partial_i g^{ij}) \partial_j u + h^i \partial_i^2 u. \end{aligned} \quad (3.0.28)$$

Foi calculado em seguida $\partial_i \sqrt{|g|}$:

$$\partial_{N+1} \sqrt{|g|} = N r^{N-1} \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k = N r^{-1} \sqrt{|g|} \text{ para } i = N+1, \quad (3.0.29)$$

$$\partial_1 \sqrt{|g|} = 0 \text{ para } i = 1, \quad (3.0.30)$$

$$\begin{aligned}\partial_i \sqrt{|g|} &= r^N \prod_{k=2}^N \sin^{k-1} \theta_k (i-1) \sin^{-1} \theta_i \cos \theta_i \\ &= \sqrt{|g|} (i-1) \cot \theta_i \text{ para } N \geq i \geq 2.\end{aligned}\quad (3.0.31)$$

As derivadas do tensor métrico inverso são:

$$\partial_i g^{ij} = 0. \quad (3.0.32)$$

Substituindo na Eq. (3.0.28) as Eqs. (3.0.29), (3.0.30), (3.0.31) e (3.0.32) obtemos que:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=2}^N \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sqrt{|g|} (i-1) \cot \theta_i g^{ij} \partial_j u \\ &+ \frac{1}{\sqrt{|g|}} N r^{-1} \sqrt{|g|} \partial_r u + \sum_{i=1}^{N+1} h^i \partial_i^2 u \\ &= \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ij} \partial_j u + N r^{-1} \partial_r u + \sum_{i=1}^N h^i \partial_i^2 u + \partial_r^2 u \\ &= \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + \sum_{i=1}^N g^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u),\end{aligned}\quad (3.0.33)$$

que simplificamos e encontramos

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=2}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + \sum_{i=1}^N g^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) \quad (3.0.34)$$

e agrupando os termos

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=1}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + g^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u). \quad (3.0.35)$$

A Eq. (3.0.35) é o Laplaciano em coordenadas hiperesféricas em $N+1$ dimensões.

A Eq. (3.0.35) também é escrita como:

$$\Delta u = r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) + r^{-2} \Delta_{S^N} u \quad (3.0.36)$$

onde o

$$\Delta_{S^N} u = \sum_{i=1}^N (i-1) \cot \theta_i g^{ii} \partial_i u + g^{ii} \partial_i^2 u \quad (3.0.37)$$

é a generalização do operador de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões.

Capítulo 4

Solução da Equação de Laplace em N dimensões.

Neste capítulo obtemos a solução para equação de Laplace em coordenada hiperesféricas em N dimensões. Usando o método de separação de variáveis obtemos equações diferenciais ordinárias. As soluções das equações ordinárias com dependências angulares, são reduzidas a uma forma da equação de Schrödinger com potencial simétrico de Pöchl-Teller. As soluções para as equações ordinárias são escritas como o produto de um fator funconal pela solução da equação de Schrödinger com potencial simétrico de Pöchl-Teller. A solução da equação de Schrödinger com potencial simétrico de Pöchl-Teller é escrita em termos dos polinômios de Gegenbauer, esses polinômios são também conhecidos como polinômios ultrasféricos. São uma generalização dos polinômios de Legendre e Chebyshev, sendo também um caso especial dos polinômios de Jacobi. O produto das soluções das equações ordinárias dá origem aos harmônicos hiperesféricos em N dimensões. Encontramos, por fim o fator de normalização e mostramos a ortogonalidade dos harmônicos hiperesféricos com o uso de algumas das propriedades dos polinômios de Gegenbauer.

4.1 Separação de variáveis

Repetindo os passos do caso em 4 dimensões obtemos as equações diferenciais ordinárias. Aplicamos o método de separação de variáveis para a equação de Laplace em

coordenadas hiperesféricas definida a seguir:

$$\Delta u = r^{-2} \sum_{i=1}^N (i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i u + g_N^{ii} \partial_i^2 u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) = 0. \quad (4.1.1)$$

onde g_N^{ij} é o tensor métrico hiperesférico sem dependência radial. Reescrevemos a Eq. (4.1.1) como:

$$\Delta u = r^{-2} \Delta_{S^N} u + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r u) = 0, \quad (4.1.2)$$

onde Δ_{S^N} é o operador de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões definido na Eq. (3.0.37).

Definimos u como o produto de duas funções da seguinte forma:

$$u = R(r) W_N(\theta_N, \dots, \theta_2, \theta_1). \quad (4.1.3)$$

Utilizando o método de separação de variáveis na Eq. (4.1.2), encontramos:

$$r^{-2} \Delta_{S^N} (RW_N) + r^{-N} \partial_r (r^N \partial_r RW_N) = 0, \quad (4.1.4)$$

multiplicamos a Eq. (4.1.4) por $\frac{r^2}{RW_N}$, obtendo:

$$\frac{1}{W_N} \Delta_{S^N} W_N + \frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) = 0 \quad (4.1.5)$$

ou ainda

$$\frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) = -\frac{1}{W_N} \Delta_{S^N} W_N \quad (4.1.6)$$

a validade da Eq. (4.1.6) é obtida igualando a uma constante de separação, nesse caso λ_N , logo:

$$-\frac{1}{W_N} \Delta_{S^N} W_N = \frac{1}{R} r^{2-N} \partial_r (r^N \partial_r R) = \lambda_N. \quad (4.1.7)$$

Como no caso de 4 dimensões a equação radial não tem tanta importância quanto as equações angulares nesse momento, então as desconsideramos.

Continuando com a equação angular, dada por:

$$\Delta_{S^N} W_N = -\lambda_N W_N, \quad (4.1.8)$$

aplicamos o operador de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões Eq. (3.0.37) na Eq. (4.1.8) e encontramos:

$$\sum_{i=1}^N (i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N = -\lambda_N W_N, \quad (4.1.9)$$

onde o tensor métrico hiperesférico sem dependência radial é:

$$g_N^{ij} = g_{N-1}^{ij} \sin^{-2} \theta_N. \quad (4.1.10)$$

O primeiro termo da Eq. (4.1.9) é expresso como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (i-1) \cot \theta_i g_N^{ii} \partial_i W_N + g_N^{ii} \partial_i^2 W_N \\ &+ (N-1) \cot \theta_N g_N^{NN} \partial_N W_N + g_N^{NN} \partial_N^2 W_N \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} & \sin^{-2} \theta_N \sum_{i=1}^{N-1} (i-1) \cot \theta_i g_{N-1}^{ii} \partial_i W_N + g_{N-1}^{ii} \partial_i^2 W_N \\ &+ (N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N = -\lambda_N W_N. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Notamos que g_{N-1}^{ij} não possui dependência θ_N , então definimos que:

$$\Delta_{S^{N-1}} = \sum_{i=1}^{N-1} (i-1) \cot \theta_i g_{N-1}^{ii} \partial_i + g_{N-1}^{ii} \partial_i^2 \quad (4.1.13)$$

é o operador de Laplace para $N-1$ coordenadas hiperesféricas.

Analisamos a Eq. (4.1.9) com o operador de Laplace para $N-1$ coordenadas da Eq. (4.1.13), percebendo que:

$$\sin^{-2} \theta_N \Delta_{S^{N-1}} W_N + (N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N = -\lambda_N W_N, \quad (4.1.14)$$

reescrevemos a Eq. (4.1.14) na forma:

$$\Delta_{S^{N-1}} W_N + \sin^2 \theta_N [(N-1) \cot \theta_N \partial_N W_N + \partial_N^2 W_N + \lambda_N W_N] = 0. \quad (4.1.15)$$

Definimos W_N como:

$$W_N = W_{N-1}(\theta_{N-1}, \dots, \theta_2, \theta_1) Y_N(\theta_N), \quad (4.1.16)$$

substituindo a Eq. (4.1.16) na Eq. (4.1.15) e obtemos que:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_N (N-1) \cot \theta_N \partial_N W_{N-1} Y_N \\ + \partial_N^2 W_{N-1} Y_N + \lambda_N W_{N-1} Y_N = -\Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} Y_N, \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

multiplicando a Eq. (4.1.17) por $\frac{1}{W_{N-1} Y_N}$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y_N} \sin^2 \theta_N [(N-1) \cot \theta_N \partial_N Y_N + \partial_N^2 Y_N + \lambda_N Y_N] \\ = -\frac{1}{W_{N-1}} \Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} = \lambda_{N-1} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

onde λ_{N-1} é uma constante de separação. Foram obtidas duas equações, uma com dependência θ_N :

$$\begin{aligned} (N-1) \cot \theta_N \frac{dY_N}{d\theta_N} + \frac{d^2 Y_N}{d\theta_N^2} + \lambda_N Y_N = \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} Y_N \\ \frac{d^2 Y_N}{d\theta_N^2} + (N-1) \cot \theta_N \frac{dY_N}{d\theta_N} + \left(\lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right) Y_N = 0, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

e outra com dependências $(\theta_{N-1}, \dots, \theta_2, \theta_1)$:

$$-\Delta_{S^{N-1}} W_{N-1} = \lambda_{N-1} W_{N-1}. \quad (4.1.20)$$

Aplicamos o método de separação de variáveis repetindo as manipulações anteriores e reduzimos a Eq. (4.1.20) até chegarmos há:

$$-\Delta_{S^2} W_2 = \lambda_2 W_2, \quad (4.1.21)$$

Usamos mais uma vez o método de separação de variáveis, dessa vez na Eq. (4.1.21) para

obtermos:

$$\cot \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} + \frac{d^2 Y_2}{d\theta_2^2} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} Y_2 \quad (4.1.22)$$

ou ainda

$$\frac{d^2 Y_2}{d\theta_2^2} Y_2 + \cot \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0. \quad (4.1.23)$$

Aplicamos o método de separação de variáveis na Eq. (4.1.21) encontrando a seguinte equação:

$$-\Delta_{S^1} W_1 = \lambda_1 W_1. \quad (4.1.24)$$

Com o método de separação de variáveis encontramos as seguintes equações ordinárias:

$$\frac{d^2 Y_N}{d\theta_N^2} + (N-1) \cot \theta_N \frac{dY_N}{d\theta_N} + \left(\lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right) Y_N = 0, \quad (4.1.25)$$

$$\frac{d^2 Y_{N-1}}{d\theta_{N-1}^2} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{dY_{N-1}}{d\theta_{N-1}} + \left(\lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right) Y_{N-1} = 0, \quad (4.1.26)$$

$\vdots$

$$\frac{d^2 Y_3}{d\theta_3^2} + \cot \theta_3 \frac{dY_3}{d\theta_3} + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_2}{\sin^2 \theta_3} \right) Y_3 = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\frac{d^2 Y_2}{d\theta_2^2} + \cot \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0, \quad (4.1.28)$$

$$\frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} + \lambda_1 Y_1 = 0. \quad (4.1.29)$$

4.2 O problema de Pöschl-Teller.

Em prol de resolvermos as equações diferenciais ordinárias encontradas anteriormente, usaremos a solução da equação de Schrödinger com potencial de Pöschl-Teller simétrico.

A solução do problema de Pöschl-Teller da mecânica quântica é descrita na Ref. [10], problema 38; onde:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right] \psi = E\psi \quad (4.2.1)$$

com $\kappa > 1, \lambda > 1; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2\alpha}$.

A Eq. (4.2.1) também é escrita na forma:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2 \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right] \psi = q^2 \psi, \quad q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (4.2.2)$$

Seu espectro é dado como:

$$q^2 = \alpha^2 (2n + \kappa + \lambda)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.2.3)$$

e suas autofunções são:

$$\psi_n = A_n \sin^\kappa(\alpha x) \cos^\lambda(\alpha x) {}_2F_1 \left(-n, n + \kappa + \lambda, \kappa + \frac{1}{2}; \sin^2(\alpha x) \right) \quad (4.2.4)$$

com ${}_2F_1(a, b, c, x)$ a função hipergeométrica, definida da seguinte forma:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad (4.2.5)$$

com $(a)_n$ o símbolo de Pochhammer, escrito como:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (4.2.6)$$

Para o caso do potencial simétrico de Pöschl-Telle, em que $\kappa = \lambda$, o potencial toma a forma:

$$V(x) = \alpha^2 \kappa(\kappa-1) \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \right) = \frac{4\alpha^2 \kappa(\kappa-1)}{\sin^2(2\alpha x)}, \quad (4.2.7)$$

com seguinte espectro:

$$q^2 = 4\alpha^2 (n + \kappa)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.8)$$

As autofunções são:

$$\psi_n = A'_n \sin^\kappa(2\alpha x) {}_2F_1 \left(-n, n + 2\kappa, \kappa + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \cos 2(\alpha x)) \right), \quad (4.2.9)$$

em seguida definimos uma nova variável:

$$\theta = 2\alpha x \quad (4.2.10)$$

e então a Eq. (4.2.2) assume a forma:

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + (n + \kappa)^2 \psi - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{\sin^2 \theta} \psi = 0 \quad (4.2.11)$$

com as autofunções dada por:

$$\psi_n(\theta) = A'_n \sin^\kappa \theta {}_2F_1 \left(-n, n + 2\kappa, \kappa + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \right). \quad (4.2.12)$$

Os polinômios de Jacobi são definidos como:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1}{2}(1 - x) \right), \quad (4.2.13)$$

na Ref. [11], número da equação (8.932.1).

Os polinômios de Gegenbauer são uma particularização dos polinômios de Jacobi e são expressos como:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1 \left(-n, n + 2\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - x) \right), \quad (4.2.14)$$

uma outra definição bem importante é a fórmula de Rodrigues, mostrada a seguir:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(\lambda + n)\Gamma(2\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda + 2n)} (1 - x^2)^{-2\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^{n + \lambda - \frac{1}{2}} \right]. \quad (4.2.15)$$

Por fim, a solução da Eq. (4.2.11) é da forma:

$$\psi_n(\theta) = A'_n \sin^\kappa(\theta) C_n^\kappa(\cos \theta). \quad (4.2.16)$$

4.3 Soluções das equações diferenciais ordinárias.

Obtemos as soluções das equações diferenciais ordinárias encontradas anteriormente. Iniciamos com a Eq. (4.1.29), com dependência de θ_1 , onde:

$$\frac{d^2 Y_1}{d\theta_1^2} + \lambda_1 Y_1 = 0. \quad (4.3.1)$$

Devido a variação azimutal

$$Y_1(\theta_1) = Y_1(\theta_1 + 2\pi) \quad (4.3.2)$$

isso significa que:

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi. \quad (4.3.3)$$

Fazemos com que $\lambda_1 = l_1^2$, da condição (4.3.2) $l_1 \in \mathbb{Z}$ e a solução da Eq. (4.3.1) é:

$$Y_1(\theta_1) = A_1 e^{il_1\theta_1}. \quad (4.3.4)$$

Obtemos a solução para a equação com dependência θ_2 da seguinte forma

$$\frac{d^2 Y_2}{d\theta_2^2} + \cot \theta_2 \frac{dY_2}{d\theta_2} + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) Y_2 = 0. \quad (4.3.5)$$

Definimos Y_2 como produto de duas funções, da seguinte forma:

$$Y_2 = \xi_2 \varphi_2,$$

substituindo na Eq. (4.3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} & (\xi_2'' \varphi_2 + 2\xi_2' \varphi_2' + \xi_2 \varphi_2'') + \cot \theta_2 (\xi_2' \varphi_2 + \xi_2 \varphi_2') \\ & + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right) \xi_2 \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

multiplicando a Eq. (4.3.6) por $\frac{1}{\xi_2}$ e colocando os termos em evidência, encontramos:

$$\varphi_2'' + \left[2\frac{\xi_2'}{\xi_2} + \cot \theta_2 \right] \varphi_2' + \left[\frac{\xi_2''}{\xi_2} + \cot \theta_2 \frac{\xi_2'}{\xi_2} + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \right] \varphi_2 = 0. \quad (4.3.7)$$

Por conveniência tornamos a Eq. (4.3.7) em uma forma conhecida, que nesse caso é a da equação de Schrödinger com potencial Pöschl-Teller simétrico. Comparando Eq. (4.3.7) com a equação

$$\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + (n + \kappa)^2 \psi - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{\sin^2 \theta} \psi = 0, \quad (4.3.8)$$

mostrada anteriormente na Eq. (4.2.11), notamos que o termo que acompanha a primeira derivada de φ_2 tem que ser nulo. Consideramos então que:

$$2\frac{\xi_2'}{\xi_2} + \cot \theta_2 = 0 \quad (4.3.9)$$

ou ainda

$$\frac{\xi_2'}{\xi_2} = -\frac{1}{2} \cot \theta_2. \quad (4.3.10)$$

Recordamos a seguinte relação:

$$\frac{d}{d\theta_2} (\ln h_2) = \frac{h_2'}{h_2}, \quad (4.3.11)$$

Usando a igualdade (4.3.11) na Eq. (4.3.10), obtemos que:

$$\frac{d}{d\theta_2} (\ln \xi_2) = -\frac{1}{2} \cot \theta_2, \quad (4.3.12)$$

integrando os dois lados da Eq. (4.3.12), encontramos:

$$\ln(\xi_2) = -\frac{1}{2} \ln(\sin \theta_2) + C \quad (4.3.13)$$

com $C = 0$. Aplicamos a exponencial dos dois lados da Eq. (4.3.13), de tal forma que:

$$e^{\ln(\xi_2)} = e^{\ln(\sin^{-\frac{1}{2}} \theta_2)} \quad (4.3.14)$$

e encontramos:

$$\xi_2 = \sin^{-\frac{1}{2}} \theta_2. \quad (4.3.15)$$

As derivadas de ξ_2 são:

$$\xi_2' = -\frac{1}{2} \cot \theta_2 \xi_2, \quad (4.3.16)$$

$$\xi_2'' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \xi_2 - \frac{1}{2} \cot \theta_2 \xi_2'; \quad (4.3.17)$$

multiplicamos a Eqs.: (4.3.16) e (4.3.17) por $\frac{1}{\xi_2}$, tornando-as:

$$\frac{\xi_2'}{\xi_2} = -\frac{1}{2} \cot \theta_2, \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\xi_2''}{\xi_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{2} \cot \theta_2 \frac{\xi_2'}{\xi_2}; \quad (4.3.19)$$

ao substituir a Eq. (4.3.18) na Eq. (4.3.19), deparamos com:

$$\frac{\xi_2''}{\xi_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{2} \cot \theta_2 - \frac{1}{2} \cot \theta_2 \quad (4.3.20)$$

que é escrita como:

$$\frac{\xi_2''}{\xi_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \frac{1}{4} \cot^2 \theta_2. \quad (4.3.21)$$

Substituímos a Eq. (4.3.21) no coeficiente de φ_2 na Eq. (4.3.7), que quando simplificamos, encontramos:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_2''}{\xi_2} + \cot \theta_2 \frac{\xi_2'}{\xi_2} + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \frac{1}{4} \cot^2 \theta_2 \\ &+ \cot \theta_2 - \frac{1}{2} \cot \theta_2 + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

escrevemos a Eq. (4.3.22) como:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_2''}{\xi_2} + \cot \theta_2 \frac{\xi_2'}{\xi_2} + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \frac{1}{4} \cot^2 \theta_2 - \frac{1}{2} \cot^2 \theta_2 + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

simplificando

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{4} \cot^2 \theta_2 + \lambda_2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_2} - 1 \right) + \lambda_2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \lambda_2 + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

agrupamos alguns termos e simplificamos a Eq. (4.3.24), tornando-a:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_2''}{\xi_2} + \cot \theta_2 \frac{\xi_2'}{\xi_2} + \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\sin^2 \theta_2} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \lambda_1 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \lambda_2 + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Substituímos a Eq. (4.3.25) na Eq. (4.3.7) conseguindo obter:

$$\varphi_2'' + \left[\left(\frac{1}{4} - \lambda_1 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} + \lambda_2 + \frac{1}{4} \right] \varphi_2 = 0 \quad (4.3.26)$$

que ao simplificarmos, é escrita da forma:

$$\varphi_2'' + \left[\lambda_2 + \frac{1}{4} - \left(\lambda_1 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \right] \varphi_2 = 0. \quad (4.3.27)$$

Para encontrar o autovalor comparamos a Eq. (4.3.25) com a Eq. (4.2.11), e concluímos a seguinte relação:

$$\lambda_2 + \frac{1}{4} = (n_2 + \kappa_2)^2 \Rightarrow \lambda_2 = (n_2 + \kappa_2)^2 - \frac{1}{4} \quad (4.3.28)$$

reescrevemos a Eq. (4.3.28) na forma:

$$(n_2 + \kappa_2)^2 - \frac{1}{4} = \left(n_2 + \kappa_2 + \frac{1}{2} \right) \left(n_2 + \kappa_2 - \frac{1}{2} \right) = \lambda_2. \quad (4.3.29)$$

Escrevemos a seguinte igualdade:

$$\kappa_2 (\kappa_2 - 1) = \lambda_1 - \frac{1}{4}, \quad (4.3.30)$$

usando a Eq. (4.3.29) simplificamos a Eq (4.3.30) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \kappa_2 (\kappa_2 - 1) &= (n_1 + \kappa_1)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= (n_1 + \kappa_1)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Em seguida mostramos que:

$$\begin{aligned} (n_1 + \kappa_1)^2 - \frac{1}{4} &= \left(n_1 + \kappa_1 + \frac{1}{2} \right) \left(n_1 + \kappa_1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\kappa_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\kappa_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right); \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

escrevemos a Eq. (4.3.32) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\kappa_2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \left[\left(\kappa_2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \left(n_1 + \kappa_1 + \frac{1}{2} \right) \left(n_1 + \kappa_1 - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

logo

$$\kappa_2 - \frac{1}{2} = n_1 + \kappa_1, \text{ fazendo } \kappa_1 = 0. \quad (4.3.34)$$

Usando a Eq. (4.3.34) encontramos que:

$$\kappa_2 = n_1 + \frac{1}{2}, \quad (4.3.35)$$

das Eq's.: (4.3.30) e (4.3.31) obtemos que:

$$n_1 = l_1, \quad (4.3.36)$$

e definimos:

$$l_2 = n_1 + n_2; \quad (4.3.37)$$

chamamos l_2 de número característico. Dessa forma a Eq. (4.3.35) torna-se

$$\kappa_2 = l_1 + \frac{1}{2}. \quad (4.3.38)$$

Substituímos a Eq. (4.3.36) na Eq. (4.3.29) obtendo os autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (n_2 + \kappa_2)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(n_1 + n_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(n_1 + n_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= l_2 (l_2 + 1). \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

substituindo a Eq. (4.3.37) na Eq. (4.3.39) encontrado os autovalores da seguinte forma:

$$\lambda_2 = l_2 (l_2 + 1). \quad (4.3.40)$$

A solução para φ_2 assim como a solução do problema de Pöschl-Teller é dada em termos dos polinômios de Gegenbauer da seguinte forma:

$$\varphi_2(\theta_2) = A_2 \sin^{\kappa_2} \theta_2 \left[C_{n_2}^{\kappa_2}(\cos \theta_2) \right], \quad (4.3.41)$$

usando as Eqs. (4.3.15) e (4.3.41) encontramos a solução para Y_N na forma:

$$Y_2 = A_2 \sin^{\kappa_2} \theta_2 \sin^{-\frac{1}{2}} \theta_2 [C_{n_2}^{\kappa_2} (\cos \theta_2)] . \quad (4.3.42)$$

Repetimos o procedimento para as outras equações ordinárias até chegarmos na equação para θ_{N-1} , Eq. (4.1.28), da seguinte forma:

$$\frac{d^2 Y_{N-1}}{d\theta_{N-1}^2} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{dY_{N-1}}{d\theta_{N-1}} + \left(\lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right) Y_{N-1} = 0, \quad (4.3.43)$$

Y_{N-1} é definido como produto de duas funções, da seguinte forma:

$$Y_{N-1} = \xi_{N-1} \varphi_{N-1},$$

que substituindo na Eq. (4.3.43) obtemos

$$\begin{aligned} & (\xi_{N-1}'' \varphi_{N-1} + 2\xi_{N-1}' \varphi_{N-1}' + \xi_{N-1} \varphi_{N-1}'') \\ & + (N-2) \cot \theta_{N-1} (\xi_{N-1}' \varphi_{N-1} + \xi_{N-1} \varphi_{N-1}') \\ & + \left(\lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right) \xi_{N-1} \varphi_{N-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

multiplicando as Eq. (4.3.44) por $\frac{1}{\xi_{N-1}}$ encontramos:

$$\begin{aligned} & \varphi_{N-1}'' + \left[2 \frac{\xi_{N-1}'}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \right] \varphi_{N-1}' \\ & + \left[\frac{\xi_{N-1}''}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{\xi_{N-1}'}{\xi_{N-1}} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right] \varphi_{N-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Comparamos a Eq. (4.3.45) com Eq. (4.3.8) e novamente notamos que os termos que acompanham as derivadas sejam nulos. Dessa forma

$$2 \frac{\xi_{N-1}'}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} = 0 \quad (4.3.46)$$

ou ainda:

$$\frac{\xi_{N-1}'}{\xi_{N-1}} = -\frac{N-2}{2} \cot \theta_{N-1}. \quad (4.3.47)$$

Usando a relação que

$$\frac{d}{d\theta_{N-1}} (\ln h_{N-1}) = \frac{h_{N-1}'}{h_{N-1}}, \quad (4.3.48)$$

e substituindo a igualdade (4.3.48) na Eq. (4.3.47), obtemos que:

$$\frac{d}{d\theta_{N-1}} (\ln \xi_{N-1}) = -\frac{N-2}{2} \cot \theta_{N-1}, \quad (4.3.49)$$

integrando os dois lados da Eq. (4.3.49), encontramos:

$$\ln (\xi_{N-1}) = -\frac{N-2}{2} \ln (\sin \theta_{N-1}) + C \quad (4.3.50)$$

com $C = 0$, aplicamos a exponencial dos dois lados da Eq. (4.3.50), de tal forma que:

$$e^{\ln(\xi_{N-1})} = e^{\ln\left(\sin^{-\frac{N-2}{2}} \theta_{N-1}\right)} \quad (4.3.51)$$

encontrando então que

$$\xi_{N-1} = \sin^{-\frac{N-2}{2}} \theta_{N-1} \quad (4.3.52)$$

com derivadas:

$$\xi'_{N-1} = -\frac{N-2}{2} \cot (\theta_{N-1}) \xi_{N-1}, \quad (4.3.53)$$

$$\xi''_{N-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} \xi_{N-1} - \frac{1}{2} \cot (\theta_{N-1}) \xi'_{N-1}; \quad (4.3.54)$$

multiplicamos a Eqs. (4.3.53) e (4.3.54) por $\frac{1}{\xi_{N-1}}$, tornando-as:

$$\frac{\xi'_{N-1}}{\xi_{N-1}} = -\frac{N-2}{2} \cot \theta_{N-1}, \quad (4.3.55)$$

$$\frac{\xi''_{N-1}}{\xi_{N-1}} = \frac{N-2}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} - \frac{N-2}{2} \cot (\theta_{N-1}) \frac{\xi'_{N-1}}{\xi_{N-1}}. \quad (4.3.56)$$

Substituindo a Eq. (4.3.55) na Eq. (4.3.56) temos que:

$$\frac{\xi''_{N-1}}{\xi_{N-1}} = \frac{N-2}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} + \frac{(N-2)^2}{4} \cot^2 \theta_{N-1}. \quad (4.3.57)$$

e em seguida substituindo na Eq. (4.3.45) no coeficiente de φ_N encontrando:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi''_{N-1}}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{\xi'_{N-1}}{\xi_{N-1}} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \\ &= \frac{N-2}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} + \frac{(N-2)^2}{4} \cot^2 \theta_{N-1} \\ &+ (N-2) \cot \theta_{N-1} - \frac{N-2}{2} \cot \theta_{N-1} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}}, \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

escrevemos a Eq. (4.3.58) como:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi''_{N-1}}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{\xi'_{N-1}}{\xi_{N-1}} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \\ &= \frac{N-2}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} + \frac{(N-2)^2}{4} \cot^2 \theta_{N-1} \\ &- \frac{(N-2)^2}{2} \cot^2 \theta_{N-1} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{N-2}{2} - \lambda_{N-2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} - \frac{(N-2)^2}{4} \cot^2 \theta_{N-1} + \lambda_{N-1} \\ &= \left(\frac{N-2}{2} - \lambda_{N-2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} - \frac{(N-2)^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} - 1 \right) + \lambda_{N-1} \\ &= \left[\frac{N-2}{2} - \frac{(N-2)^2}{4} - \lambda_{N-2} \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} + \lambda_{N-1} + \frac{(N-2)^2}{4} \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

agrupamos alguns termos e simplificamos obtemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi''_{N-1}}{\xi_{N-1}} + (N-2) \cot \theta_{N-1} \frac{\xi'_{N-1}}{\xi_{N-1}} + \lambda_{N-1} - \frac{\lambda_{N-2}}{\sin^2 \theta_{N-1}} \\ &= \left[\frac{N-2}{2} \left(1 - \frac{N-2}{2} \right) - \lambda_{N-2} \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} + \lambda_{N-1} + \frac{(N-2)^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

Substituímos a Eq. (4.3.61) na Eq. (4.3.45)

$$\begin{aligned} & \varphi''_{N-1} + \left\{ \left[\frac{N-2}{2} \left(1 - \frac{N-2}{2} \right) - \lambda_{N-2} \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right. \\ & \left. + \lambda_{N-1} + \frac{(N-2)^2}{4} \right\} \varphi_{N-1} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

que ao simplificarmos, é escrita da forma:

$$\begin{aligned} \varphi''_{N-1} + \left\{ \lambda_{N-1} + \frac{(N-2)^2}{4} \right. \\ \left. - \left[\lambda_{N-2} - \frac{N-2}{2} \left(1 - \frac{N-2}{2} \right) \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_{N-1}} \right\} \varphi_{N-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

Comparamos a Eq. (4.3.63) com a Eq. (4.3.8) e obtemos o autovalor da seguinte relação:

$$\lambda_{N-1} + \frac{(N-2)^2}{4} = (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 \Rightarrow \lambda_{N-1} = (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 - \frac{(N-2)^2}{4} \quad (4.3.64)$$

reescrevemos a Eq. (4.3.64) na forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{N-1} &= (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 - \frac{(N-2)^2}{4} \\ &= \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} + \frac{N-2}{2} \right) \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} - \frac{N-2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

Expressamos então que:

$$\kappa_{N-1} (\kappa_{N-1} - 1) = \left[\lambda_{N-2} - \frac{N-2}{2} \left(1 - \frac{N-2}{2} \right) \right], \quad (4.3.66)$$

usando a Eq. (4.3.65) simplificamos a Eq (4.3.66) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \kappa_{N-1} (\kappa_{N-1} - 1) &= (n_{N-2} + \kappa_{N-2})^2 - \frac{[(N-2) - 1]^2}{4} \\ &\quad - \frac{(N-2)}{2} + \frac{(N-2)^2}{4} = (n_{N-2} + \kappa_{N-2})^2 - \frac{(N-2)^2}{4} \\ &\quad + \frac{N-2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{N-2}{2} + \frac{(N-2)^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

Assim mostramos que:

$$\begin{aligned} &(n_{N-2} + \kappa_{N-2})^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(n_{N-2} + \kappa_{N-2} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{N-2} + \kappa_{N-2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\kappa_{N-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\kappa_{N-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right); \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

escrevemos a Eq. (4.3.68) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\kappa_{N-1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \left[\left(\kappa_{N-1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \left(n_{N-2} + \kappa_{N-2} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{N-2} + \kappa_{N-2} - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.3.69)$$

logo

$$\left(\kappa_{N-1} - \frac{1}{2} \right) = n_{N-2} + \kappa_{N-2}. \quad (4.3.70)$$

Da Eq. (4.3.70) encontramos que:

$$\kappa_{N-1} = n_{N-2} + \kappa_{N-2} + \frac{1}{2}, \quad (4.3.71)$$

observe que os valores de κ_{N-1} são escritos a partir dos seus valores anteriores. Reescrevemos a Eq. (4.3.71) na forma:

$$\kappa_{N-1} = n_1 + \dots + n_{N-2} + \frac{N-2}{2} = \sum_{j=1}^{N-2} n_j + \frac{N-2}{2} \quad (4.3.72)$$

e definimos:

$$l_{N-1} = n_1 + n_2 + \dots + n_{N-1} = \sum_{j=1}^{N-1} n_j, \quad (4.3.73)$$

onde l_{N-1} é um número característico. Dessa forma a Eq. (4.3.72) torna-se

$$\kappa_{N-1} = l_{N-2} + \frac{N-2}{2}. \quad (4.3.74)$$

Substituímos a Eq. (4.3.74) na Eq. (4.3.66) obtendo os autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_{N-1} &= (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 - \frac{(N-2)^2}{4} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} n_j + \frac{N-2}{2} + \frac{N-2}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} n_j + \frac{N-2}{2} - \frac{N-2}{2} \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} n_j + N-2 \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} n_j \right). \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

substituindo a Eq. (4.3.73) na Eq. (4.3.75) encontrado os autovalores da seguinte forma:

$$\lambda_{N-1} = l_{N-1} (l_{N-1} + N - 2). \quad (4.3.76)$$

A solução para φ_{N-1} , assim como a solução do problema de Pöschl-Teller é dada em termos dos polinômios de Gegenbauer da seguinte forma:

$$\varphi_{N-1}(\theta_{N-1}) = A_{N-1} \sin^{\kappa_{N-1}}(\theta_{N-1}) \left[C_{n_{N-1}}^{\kappa_{N-1}}(\cos \theta_{N-1}) \right], \quad (4.3.77)$$

usando as Eqs. (4.3.52) e (4.3.77) encontramos a solução para Y_{N-1} na forma:

$$Y_{N-1} = A_{N-1} \sin^{\kappa_{N-1}}(\theta_{N-1}) \sin^{-\frac{N-2}{2}}(\theta_{N-1}) \left[C_{n_{N-1}}^{\kappa_{N-1}}(\cos \theta_{N-1}) \right]. \quad (4.3.78)$$

Por fim, repetimos o método para a equação com dependência θ_N

$$\frac{d^2 Y_N}{d\theta_N^2} + (N-1) \cot \theta_N \frac{dY_N}{d\theta_N} + \left(\lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right) Y_N = 0, \quad (4.3.79)$$

de modo que:

$$Y_N = \xi_N \varphi_N, \quad (4.3.80)$$

substituindo a Eq. (4.3.80) na Eq. (4.3.79), encontramos que:

$$\begin{aligned} \varphi_N'' + \left[2 \frac{\xi_N'}{\xi_N} + (N-1) \cot \theta_N \right] \varphi_N' \\ + \left[\frac{\xi_N''}{\xi_N} + (N-1) \cot \theta_N \frac{\xi_N'}{\xi_N} + \lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \right] \varphi_N = 0. \end{aligned} \quad (4.3.81)$$

Assim como nos casos anteriores o coeficiente que acompanham a primeira derivada deve ser nulo, de tal forma que:

$$2 \frac{\xi_N'}{\xi_N} + (N-1) \cot \theta_N = 0 \quad (4.3.82)$$

ou ainda:

$$\frac{\xi_N'}{\xi_N} = -\frac{N-1}{2} \cot \theta_N. \quad (4.3.83)$$

Obtemos então que

$$\ln(\xi_N) = -\frac{N-1}{2} \ln(\sin \theta_N) + C \quad (4.3.84)$$

com $C = 0$, aplicamos a exponencial dos dois lados da Eq. (4.3.85), de tal forma que:

$$e^{\ln(\xi_N)} = e^{\ln\left(\sin^{-\frac{N-1}{2}} \theta_N\right)} \quad (4.3.85)$$

e encontramos:

$$\xi_N = \sin^{-\frac{N-1}{2}} (\theta_N). \quad (4.3.86)$$

As relações da segunda derivada de ξ_N multiplicadas por $\frac{1}{\xi_N}$ são:

$$\frac{\xi_N''}{\xi_N} = \frac{N-1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta_N} + \frac{(N-1)^2}{4} \cot^2 \theta_N \quad (4.3.87)$$

Substituímos a Eq. (4.3.87) no coeficiente de φ_N na Eq. (4.3.79), que quando simplificamos, encontramos:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_N''}{\xi_N} + (N-1) \cot \theta_N \frac{\xi_N'}{\xi_N} + \lambda_N - \frac{\lambda_{N-1}}{\sin^2 \theta_N} \\ &= \left[\frac{N-1}{2} \left(1 - \frac{N-1}{2} \right) - \lambda_{N-1} \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_N} + \lambda_N + \frac{(N-1)^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.3.88)$$

Substituímos a Eq. (4.3.88) na Eq. (4.3.79) conseguindo obter:

$$\varphi_N'' + \left\{ \lambda_N + \frac{(N-1)^2}{4} \left[\lambda_{N-1} - \frac{N-1}{2} \left(1 - \frac{N-1}{2} \right) \right] \frac{1}{\sin^2 \theta_N} \right\} \varphi_N = 0. \quad (4.3.89)$$

Os autovalores são obtidos da mesma forma que as equações anteriores, assim:

$$\lambda_N + \frac{(N-1)^2}{4} = (n_N + \kappa_N)^2 \Rightarrow \lambda_N = (n_N + \kappa_N)^2 - \frac{(N-1)^2}{4} \quad (4.3.90)$$

reescrevemos a Eq. (4.3.90) na forma:

$$\begin{aligned} & (n_N + \kappa_N)^2 - \frac{(N-1)^2}{4} \\ &= \left(n_N + \kappa_N + \frac{N-1}{2} \right) \left(n_N + \kappa_N - \frac{N-1}{2} \right) = \lambda_N. \end{aligned} \quad (4.3.91)$$

Das Eq. (4.3.8) e Eq. (4.3.89) escrevemos a seguinte igualdade:

$$\kappa_N (\kappa_N - 1) = \left[\lambda_{N-1} - \frac{N-1}{2} \left(1 - \frac{N-1}{2} \right) \right], \quad (4.3.92)$$

usando a Eq. (4.3.29) simplificamos a Eq (4.3.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \kappa_N (\kappa_N - 1) &= (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 \\
 &- \frac{[(N-1)-1]^2}{4} - \frac{(N-1)}{2} + \frac{(N-1)^2}{4} \\
 &= (n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 - \frac{(N-1)^2}{4} \\
 &+ \frac{N-1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{N-1}{2} + \frac{(N-1)^2}{4}.
 \end{aligned} \tag{4.3.93}$$

Em seguida mostramos que:

$$\begin{aligned}
 &(n_{N-1} + \kappa_{N-1})^2 - \frac{1}{4} \\
 &= \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \left(\kappa_N - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\kappa_N - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right);
 \end{aligned} \tag{4.3.94}$$

escrevemos a Eq. (4.3.94) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(\kappa_N - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] \left[\left(\kappa_N - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\
 &= \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} + \frac{1}{2} \right) \left(n_{N-1} + \kappa_{N-1} - \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.3.95}$$

logo

$$\left(\kappa_N - \frac{1}{2} \right) = n_{N-1} + \kappa_{N-1}, \tag{4.3.96}$$

ou ainda

$$\kappa_N = n_{N-1} + \kappa_{N-1} + \frac{1}{2}, \tag{4.3.97}$$

observe que os valores de κ_N são escritos a partir dos seus valores anteriores, ou seja,

$$\kappa_N = \sum_{j=1}^{N-1} n_j + \frac{N-1}{2} \tag{4.3.98}$$

e definimos que:

$$l_N = \sum_{j=1}^N n_j, \tag{4.3.99}$$

chamamos l_N de número característico. Dessa forma a Eq. (4.3.97) torna-se

$$\kappa_N = l_{N-1} + \frac{N-1}{2}. \quad (4.3.100)$$

A solução para φ_2 também é da forma da solução do problema de Pöschl-Teller, ou seja,

$$\varphi_N(\theta_N) = A_N \sin^{\kappa_N}(\theta_N) [C_{n_N}^{\kappa_N}(\cos \theta_N)], \quad (4.3.101)$$

usando as Eqs. (4.3.96) e (4.3.101) encontramos a solução para Y_2 na forma:

$$Y_N = A_N \sin^{\kappa_N}(\theta_N) \sin^{-\frac{N-1}{2}}(\theta_N) [C_{n_N}^{\kappa_N}(\cos \theta_N)]. \quad (4.3.102)$$

As soluções das equações diferenciais ordinárias são:

$$\begin{aligned} Y_N(\theta_N) &= A_N \sin^{\kappa_N}(\theta_N) \sin^{-\frac{N-1}{2}}(\theta_N) [C_{n_N}^{\kappa_N}(\cos \theta_N)], \\ Y_{N-1}(\theta_{N-1}) &= A_{N-1} \sin^{\kappa_{N-1}}(\theta_{N-1}) \sin^{-\frac{N-2}{2}}(\theta_{N-1}) [C_{n_{N-1}}^{\kappa_{N-1}}(\cos \theta_{N-1})], \\ &\dots \\ Y_3(\theta_3) &= A_3 \sin^{\kappa_3}(\theta_3) \sin^{-\frac{1}{2}}(\theta_3) [C_{n_3}^{\kappa_3}(\cos \theta_3)], \\ Y_2(\theta_2) &= A_2 \sin^{\kappa_2}(\theta_2) \sin^{-\frac{1}{2}}(\theta_2) [C_{n_2}^{\kappa_2}(\cos \theta_2)], \\ Y_1(\theta_1) &= A_1 e^{il_1\theta_1}. \end{aligned}$$

Com os seus respectivos autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= l_1^2, \\ \lambda_2 &= l_2(l_2 + 1), \\ \lambda_3 &= l_3(l_3 + 2), \\ &\dots \\ \lambda_{N-1} &= l_{N-1}(l_{N-1} + N - 2), \\ \lambda_N &= l_N(l_N + N - 1). \end{aligned} \quad (4.3.103)$$

Por indução, obtemos uma forma geral das soluções das equações ordinárias obtidas

no método de separação de variáveis para a equação de Laplace

$$Y_k(\theta_k) = A_k \sin^{\kappa_k}(\theta_k) \sin^{-\frac{k-1}{2}}(\theta_k) [C_{n_k}^{\kappa_k}(\cos \theta_k)] \text{ com } 2 \leq k \leq N, \quad (4.3.104)$$

$$Y_1(\theta_1) = A_1 e^{il_1 \theta_1}$$

onde

$$\kappa_k = l_{k-1} + \frac{k-1}{2} \text{ com } l_0 = 0, \quad (4.3.105)$$

$$l_k = \sum_{j=1}^N n_j. \quad (4.3.106)$$

A solução da equação de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões é o produto das soluções das equações ordinárias, ou seja,

$$W_{l_1, l_2, \dots, l_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = Y_N(\theta_N) Y_{N-1}(\theta_{N-1}) \dots Y_1(\theta_1) \quad (4.3.107)$$

assim

$$W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = D_\gamma e^{il_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{j-1}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \quad (4.3.108)$$

onde γ é um índice condensado definido como:

$$\gamma = [l_1, l_2, \dots, l_N]. \quad (4.3.109)$$

Os números característicos l_k são definidos como:

$$l_1 = n_1, \quad (4.3.110)$$

$$l_2 = n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = l_2 - l_1,$$

$$l_3 = n_1 + n_2 + n_3 = l_3 + l_2 - l_1 + n_3 = l_2 + n_3 \Rightarrow n_3 = l_3 - l_2,$$

$\vdots$

$$l_{N-1} = n_1 + \dots + n_{N-1} = l_1 + \dots + l_{N-2} + n_{N-1} \Rightarrow n_{N-1} = l_{N-1} - l_{N-2},$$

$$l_N = n_1 + \dots + n_{N-1} + n_N \Rightarrow n_N = l_N - l_{N-1};$$

com $l_N \geq l_{N-1} \geq \dots \geq l_1 \geq 0$, concluímos então que:

$$n_k = l_k - l_{k-1}, \text{ com } k \geq 2. \quad (4.3.111)$$

substituindo n_k e κ_k na Eq. (4.3.107) obtemos os harmônicos hiperesféricos:

$$W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = D_\gamma e^{\pm i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{l_{j-1}}(\theta_j) C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{j-1}{2}}(\cos \theta_j). \quad (4.3.112)$$

A Eq. (4.3.112) corresponde a solução da Equação de Laplace em coordenadas hiperesféricas em N dimensões e são chamadas de harmônicos hiperesféricos em N dimensões. Para fim de confirmação de veracidade do resultado apresentado na Eq. (4.3.112) foi efetuada a sua comparação com os resultados das Refs.: [6] e [2] em que os harmônicos hiperesféricos também foram expressos em termos dos polinômios de Gegenbauer. A expressão dos harmônicos hiperesféricos da Eq. (4.3.112) coincide com as fórmulas da Refs.: [6] e [2] a menos de um fator de normalização.

4.4 Normalização e Ortogonalidade.

A solução angular para a equação de Laplace em N dimensões é:

$$\begin{aligned} W_\gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) &= D_\gamma e^{\pm i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{j-1}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \\ &= D_\gamma e^{i l_1 \theta_1} \prod_{j=2}^N \sin^{l_{j-1}}(\theta_j) C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{j-1}{2}}(\cos \theta_j) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

onde D_γ é o fator de normalização.

Encontramos o fator de normalização D_γ calculando a seguinte integral:

$$\int_{S^N} W_\gamma^* W_\gamma d\tau = 1, \quad (4.4.2)$$

substituímos a Eq. (4.3.112) na Eq. (4.4.1) obtendo que:

$$\int_{S^N} (D_\gamma)^2 (e^{il_1\theta_1})^* e^{il_1\theta_1} \left[\prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{j-1}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \right]^* \left[\prod_{j=2}^N \sin^{\kappa_j - \frac{j-1}{2}}(\theta_j) C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \right] d\tau = 1. \quad (4.4.3)$$

Observamos na Ref. [12] e na Ref. [2], que o elemento diferencial do hipervolume tem a forma:

$$d\tau = \sqrt{|\det g_{ij}|} d\theta_N \dots d\theta_1, \quad (4.4.4)$$

Determinamos anteriormente na Eq. (3.0.22) a $\sqrt{|\det g_{ij}|}$ e substituímos na Eq. (4.4.4)

$$d\tau = \prod_{j=2}^N \sin^{j-1} \theta_j d\theta_N \dots d\theta_1, \quad (4.4.5)$$

e em seguida substituindo na Eq. (4.4.3), obtendo:

$$D_\gamma^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \prod_{j=2}^N \sin^{2\kappa_j - (j-1)}(\theta_j) \sin^{j-1}(\theta_j) \left[C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \right]^2 d\theta_N d\theta_{N-1} \dots d\theta_1 = 1 \quad (4.4.6)$$

ou

$$D_\gamma^{-2} = \int_0^\pi \sin^{2\kappa_N} \left[C_{n_N}^{\kappa_N}(\cos \theta_N) \right]^2 d\theta_N \int_0^\pi \sin^{2\kappa_{N-1}} \left[C_{n_{N-1}}^{\kappa_{N-1}}(\cos \theta_{N-1}) \right]^2 d\theta_{N-1} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \quad (4.4.7)$$

como para cada valor de j temos uma dependência de θ_j diferente, a integral da Eq. (4.4.7) é escrita como:

$$D_\gamma^{-2} = 2\pi \prod_{j=2}^N \int_0^\pi \sin^{2\kappa_j} \theta_j \left[C_{n_j}^{\kappa_j}(\cos \theta_j) \right]^2 d\theta_j. \quad (4.4.8)$$

Computando a seguinte integral

$$\int_0^\pi \sin^{2\kappa} \theta \left[C_n^\kappa(\cos \theta) \right]^2 d\theta \quad (4.4.9)$$

e generalizando obtemos a constante de normalização dos harmônicos hiperesféricos. Definimos que:

$$y = \cos \theta, \quad (4.4.10)$$

$$dy = -\sin \theta \, d\theta \implies d\theta = -\sin^{-1} \theta dy$$

de tal modo que:

$$-1 \leq y \leq 1.$$

Utilizando a substituição da expressão (4.4.10) na Eq. (4.4.9), obtemos:

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\kappa-\frac{1}{2}} [C_n^\kappa(y)]^2 dy \quad (4.4.11)$$

Na Ref. [11], 22.2.3, encontramos a seguinte propriedade dos polinômios de Gegenbauer:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} [C_\lambda^\alpha(x)]^2 dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(\lambda+2\alpha)}{\lambda! (\lambda+\alpha) [\Gamma(\alpha)]^2}. \quad (4.4.12)$$

Desfrutando da Eq. (4.4.12) e comparando com a Eq. (4.4.11) encontramos que:

$$\alpha = \kappa \text{ e } \lambda = n.$$

Generalizando, obtemos que:

$$D_\gamma^{-2} = 2\pi \prod_{j=2}^N \frac{\pi 2^{1-2\kappa_j} \Gamma(n_j + 2\kappa_j)}{n_j! (n_j + \kappa_j) [\Gamma(\kappa_j)]^2} \quad (4.4.13)$$

e substituindo κ_j e n_j , obtemos:

$$D_\gamma^{-2} = 2\pi \prod_{j=2}^N \frac{\pi 2^{1-2(l_{j-1} + \frac{j-1}{2})} \Gamma(l_j + l_{j-1} + j - 1)}{(l_j - l_{j-1})! (l_j + \frac{j-1}{2}) [\Gamma(l_{j-1} + \frac{j-1}{2})]^2}. \quad (4.4.14)$$

A ortogonalidade dos harmônicos hiperesféricos W_γ é mostrada calculado a seguinte integral:

$$\int_{S^N} W_\gamma^* W_{\gamma'} \, d\tau = 0 \text{ se } \gamma \neq \gamma', \quad (4.4.15)$$

onde

$$\gamma = [l_1, l_2, \dots, l_N]$$

e

$$\gamma' = [l'_1, l'_2, \dots, l'_N].$$

A Eq. (4.4.15) tem a forma:

$$\begin{aligned} D_\gamma^* D_{\gamma'} \int_0^\pi \sin^{l_{N-1}} \theta_N \sin^{l'_{N-1}} \theta_N \left[C_{l_N - l_{N-1}}^{l_{N-1} + \frac{N-1}{2}} (\cos \theta_N) \right] \\ \left[C_{l'_N - l'_{N-1}}^{l'_{N-1} + \frac{N-1}{2}} (\cos \theta_N) \right] \sin^{N-1} \theta_N d\theta_N \int_0^\pi \sin^{l_{N-2}} \theta_N \sin^{l'_{N-2}} \theta_{N-1} \\ \left[C_{l_{N-1} - l_{N-2}}^{l_{N-2} + \frac{N-2}{2}} (\cos \theta_{N-1}) \right] \left[C_{l'_{N-1} - l'_{N-2}}^{l'_{N-2} + \frac{N-2}{2}} (\cos \theta_{N-1}) \right] \sin^{N-2} \theta_{N-1} d\theta_{N-1} \\ \dots \int_0^{2\pi} e^{-il_1 \theta_1} e^{il'_1 \theta_1} d\theta_1. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Escrevemos a integral da Eq. (4.4.16) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_\gamma^* D_{\gamma'} \int_0^{2\pi} e^{i\theta_1(l'_1 - l_1)} d\theta_1 \prod_{j=2}^N \int_0^\pi \sin^{l_{j-1}} \theta_j \sin^{l'_{j-1}} \theta_j \\ \left[C_{l_j - l_{j-1}}^{l_{j-1} + \frac{j-1}{2}} (\cos \theta_j) \right] \left[C_{l'_j - l'_{j-1}}^{l'_{j-1} + \frac{j-1}{2}} (\cos \theta_j) \right] \sin^{j-1} \theta_j d\theta_j. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Analisando a Eq. (4.4.17) para $l_1 \neq l'_1$, ou seja, a seguinte integral:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta_1(l'_1 - l_1)} d\theta_1 = \left[\frac{e^{i\theta_1(l'_1 - l_1)}}{i(l'_1 - l_1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi i(l'_1 - l_1)} - 1}{i(l'_1 - l_1)} = \delta_{l_1, l'_1} \quad (4.4.18)$$

implicando que:

$$\int_{S^N} W_\gamma^* W_{\gamma'} d\tau = 0 \text{ se } l_1 \neq l'_1. \quad (4.4.19)$$

Os polinômios de Gegenbauer são ortogonais, isso é mostrado na Ref. [11], onde:

$$\int_{-1}^1 [C_n^\alpha(x)] [C_{\tilde{n}}^\alpha(x)] (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = \delta_{n, \tilde{n}}. \quad (4.4.20)$$

Analisamos agora a seguinte integral:

$$\int_0^\pi \sin^{l_1} \theta_2 \sin^{l'_1} \theta_N \left[C_{l_2 - l_1}^{l_1 + \frac{1}{2}} (\cos \theta_2) \right] \left[C_{l'_2 - l'_1}^{l'_1 + \frac{1}{2}} (\cos \theta_2) \right] \sin \theta_2 d\theta_2. \quad (4.4.21)$$

Usando a substituição

$$y = \cos \theta_2, \quad (4.4.22)$$

$$dy = -\sin \theta_2 d\theta_2 \implies d\theta_2 = -\sin^{-1} \theta_2 dy$$

a integral da Eq. (4.4.21) torna-se:

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{l_1}{2}} \left[C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(y) \right] (1-y^2)^{\frac{l'_1}{2}} \left[C_{l'_2-l'_1}^{l'_1+\frac{1}{2}}(y) \right] dy \quad (4.4.23)$$

ou ainda

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{1}{2}(l_1+l'_1+1)-\frac{1}{2}} \left[C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(y) \right] \left[C_{l'_2-l'_1}^{l'_1+\frac{1}{2}}(y) \right] dy. \quad (4.4.24)$$

Para usar a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Gegenbauer mostrada na Eq. (4.4.20) temos que garantir que:

$$\alpha = l_1 + \frac{1}{2} = l'_1 + \frac{1}{2}, \quad (4.4.25)$$

da Eq. (4.4.18) mostramos $l_1 = l'_1$ validando a Eq. (4.4.25). Dessa forma se

$$l_1 = l'_1 \text{ e } l_2 \neq l'_2,$$

então a integral da Eq. (4.4.24) é

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{l_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \left[C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(y) \right] \left[C_{l'_2-l'_1}^{l'_1+\frac{1}{2}}(y) \right] dy = \delta_{l_2, l'_2}. \quad (4.4.26)$$

Generalizando para qualquer j ,

$$\int_0^\pi \sin^{l_{j-1}} \theta_j \sin^{l'_{j-1}} \theta_j \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{i-1}{2}}(\cos \theta_j) \right] \left[C_{l'_j-l'_{j-1}}^{l'_{j-1}+\frac{i-1}{2}}(\cos \theta_j) \right] \sin^{j-1} \theta_j d\theta_j, \text{ onde } j = 2, \dots, k; \quad (4.4.27)$$

usando a seguinte substituição

$$y = \cos \theta_j, \quad (4.4.28)$$

$$dy = -\sin \theta_j d\theta_j \implies d\theta_j = -\sin^{-1} \theta_j dy$$

a integral torna-se:

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{l_{j-1}}{2}} \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{j-1}{2}}(y) \right] (1-y^2)^{\frac{l'_{j-1}}{2}} \left[C_{l'_j-l'_{j-1}}^{l'_{j-1}+\frac{j-1}{2}}(y) \right] (1-y^2)^{\frac{j-2}{2}} dy \quad (4.4.29)$$

ou ainda

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{1}{2}(l_{j-1}+l'_{j-1}+j-1)-\frac{1}{2}} \left[C_{l_j-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{j-1}{2}}(y) \right] \left[C_{l'_j-l'_{j-1}}^{l'_{j-1}+\frac{j-1}{2}}(y) \right] dy. \quad (4.4.30)$$

Para usarmos a propriedade da Eq. (4.4.20) temos que garantir a seguinte igualdade:

$$\alpha = l_{j-1} + \frac{j-1}{2} = l'_{j-1} + \frac{j-1}{2},$$

implicando que o números característicos anteriores sejam

$$l_{j-1} = l'_{j-1}.$$

Dessa forma se $l_{j-1} = l'_{j-1}$ e $j = k$ com $l_k \neq l'_k$, então

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^{l_{j-1}+\frac{k-1}{2}-\frac{1}{2}} \left[C_{l_k-l_{j-1}}^{l_{j-1}+\frac{k-1}{2}}(y) \right] \left[C_{l'_k-l_{j-1}}^{l'_{j-1}+\frac{k-1}{2}}(y) \right] dy = \delta_{l_k, l'_k}. \quad (4.4.31)$$

Portanto concluímos que:

$$\int_{S^N} W_\gamma^* W_{\gamma'} d\tau = \int W_{l_1, l_2, \dots, l_N}^* W_{l'_1, l'_2, \dots, l'_N} d\tau = \delta_{\gamma, \gamma'}, \quad (4.4.32)$$

mostrando a ortogonalidade do harmônicos hiperesféricos.

Capítulo 5

Apresentação gráfica dos harmônicos hiperesféricos em S^3 .

Obtivemos anteriormente os harmônicos hiperesféricos para o S^N , com a virtude de comparação entre os harmônicos esféricos usuais no S^2 , que são apresentados graficamente em diversos materiais, como por exemplo a [13], realizamos algumas ilustrações dos resultados para o caso dos harmônicos hiperesféricos no S^3 apresentado-os graficamente. Enfatizamos que não é possível apresentar um objeto quadridimensional, mas é possível fazer projeções do objeto em hiperplanos tridimensionais, obtendo resultados análogos aos harmônicos esféricos usuais.

A partir da Eq. (4.4.1), obtemos a seguinte expressão dos harmônicos para o caso $S^3(N = 3)$:

$$W_{l_1, l_2, l_3}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = D_{l_1, l_2, l_3} e^{\pm i l_1 \theta_1} \sin^{l_1}(\theta_2) \left[C_{n_2}^{l_1 + \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right] \sin^{l_2}(\theta_3) \left[C_{n_3}^{l_2 + 1}(\cos \theta_3) \right], \quad (5.0.1)$$

com

$$l_3 = \sum_{j=1}^3 n_j, \quad (5.0.2)$$

onde:

$$l_1 = n_1, \quad (5.0.3)$$

$$l_2 = n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = l_2 - l_1,$$

$$l_3 = n_1 + n_2 + n_3 = l_3 + l_2 - l_1 + n_3 = l_2 + n_3 \Rightarrow n_3 = l_3 - l_2.$$

Substituindo na solução (5.0.1):

$$W_{l_1, l_2, l_3}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = D_{l_1, l_2, l_3} e^{il_1 \theta_1} \sin^{l_1}(\theta_2) \left[C_{l_2 - l_1}^{l_1 + \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right] \sin^{l_2}(\theta_3) \left[C_{l_3 - l_2}^{l_2 + 1}(\cos \theta_3) \right] \quad (5.0.4)$$

para

$$l_3 \geq l_2 \geq l_1. \quad (5.0.5)$$

Por conveniência fazemos:

$$D_{l_1, l_2, l_3} = 1. \quad (5.0.6)$$

Utilizamos a seguinte parametrização para as projeções:

$$x_4 = r \cos \theta_3,$$

$$x_3 = r \sin \theta_3 \cos \theta_2,$$

$$x_2 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1,$$

$$x_1 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1,$$

$$\theta_1 \in (0, 2\pi) \text{ e } \theta_2, \theta_3 \in (0, \pi);$$

fixamos um valor para 2 dos ângulos.

Realizamos 2 projeções diferentes, sendo elas:

1º: hiperplano (x_1, x_2, x_4) :

Nesse hiperplano tomamos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e fixamos os seguintes valores para o número característico $l_3 = 3, 2, 1$; as representações são apresentadas nas Figs.: (5.1), (5.2), (5.3),

(5.4), (5.5), (5.6) e (5.7). Com:

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ l_2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os seguintes casos:

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ l_2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ l_1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.0.7)$$

W_3 é nula, o motivo foi observado analisando o polinômio de Gegenbauer da Eq. (5.0.1) com dependência θ_2 , onde definimos:

$$y = \cos \theta_2, \quad (5.0.8)$$

fazendo com que $C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(\cos \theta_2)$ tome a seguinte forma:

$$C_{l_2-l_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(y) = \frac{(-2)^{l_2-l_1}}{(l_2-l_1)!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+l_2)\Gamma(l_1+1+l_2)}{\Gamma(l_1+\frac{1}{2})\Gamma(1+2l_2)} (1-y^2)^{-l_1+1} \frac{d^{l_2-l_1}}{dy^{l_2-l_1}} \left[(1-y^2)^{l_2} \right]. \quad (5.0.9)$$

Aplicamos os valores de l_2 e l_1 mostrados na lista (5.0.7) e verificamos os termos que aparecem com as derivadas da Eq. (5.0.9), para:

$$l_2 = 3 \text{ e } l_1 = 2:$$

$$\frac{d}{dy} \left[(1-y^2)^3 \right] = -6y(1-y^2)^2, \quad (5.0.10)$$

$$l_2 = 3 \text{ e } l_1 = 0:$$

$$\frac{d^3}{dy^3} \left[(1-y^2)^3 \right] = y(72(1-y^2) - 48y^2), \quad (5.0.11)$$

$$l_2 = 2 \text{ e } l_1 = 1:$$

$$\frac{d}{dy} (1-y^2)^2 = -4y(1-y^2), \quad (5.0.12)$$

$$l_2 = 1 \text{ e } l_1 = 0:$$

$$\frac{d}{dy} (1-y^2) = -2y; \quad (5.0.13)$$

como definimos $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ a Eq. (5.0.8) é nula, implicando em:

$$y = 0,$$

assim as derivadas (5.0.11), (5.0.12) e (5.0.13) também são nulas.

2ª hiperplano (x_2, x_3, x_4) :

Para esse hiperplano, tomamos $\theta_1 = \pi$ as Figs.: (5.8), (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17), são as representações gráficas dos harmônicos hiperesféricos para fixando $l_3 = 3, 2, 1$.

$$\begin{bmatrix} l_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ l_2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que para $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ projetamos o caso dos harmônicos esféricos usuais.

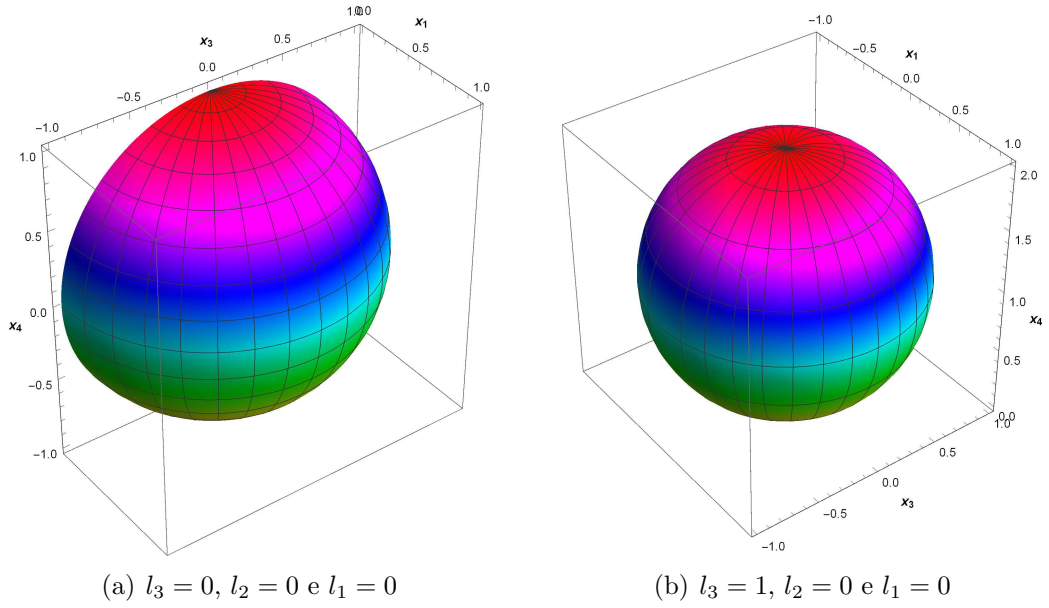


Figura 5.1: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 0, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$; $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

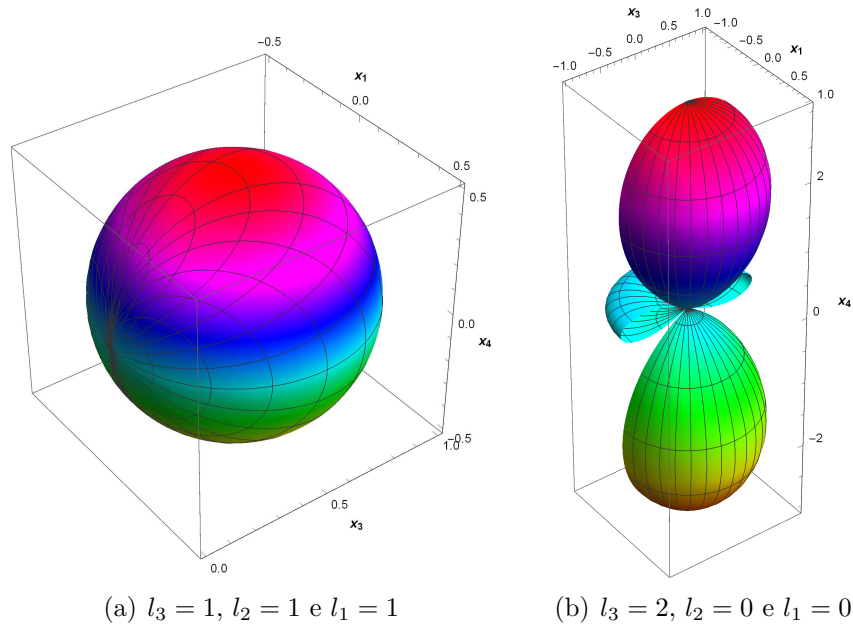


Figura 5.2: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 1, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$; $l_3 = 2, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

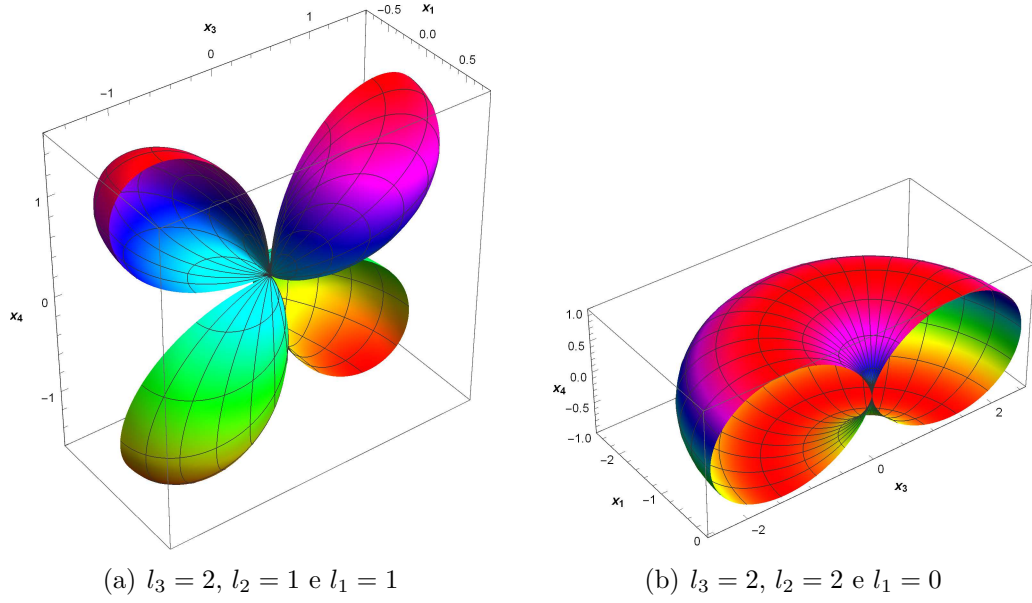


Figura 5.3: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 0$.

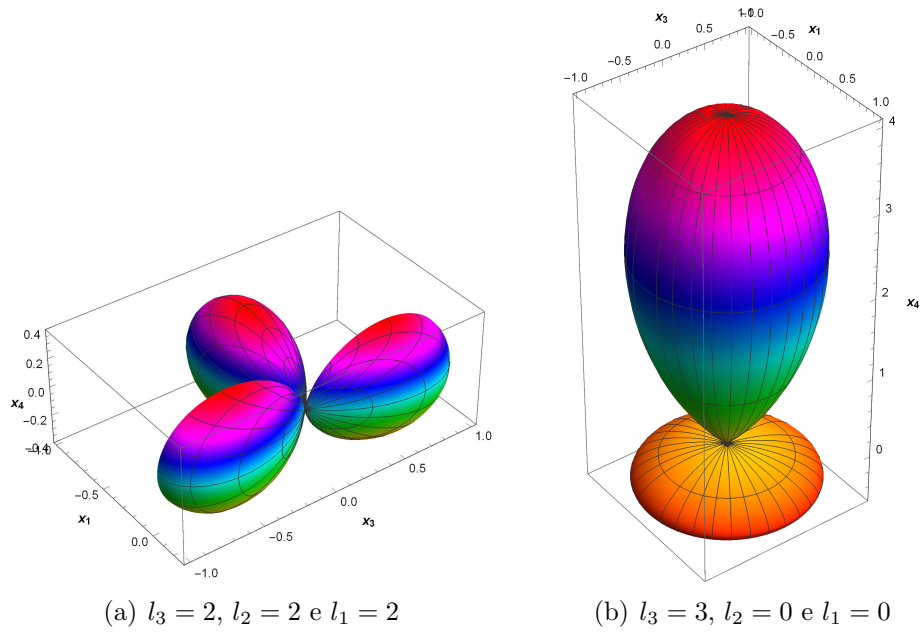
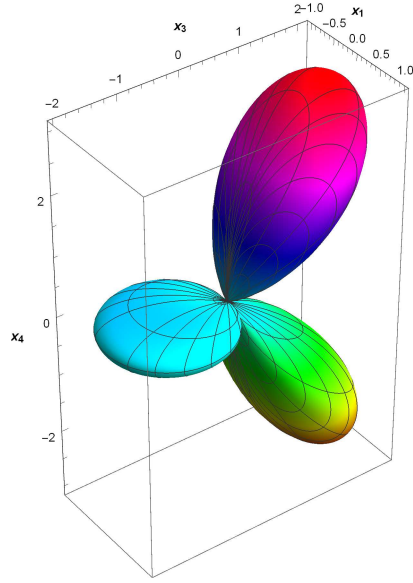
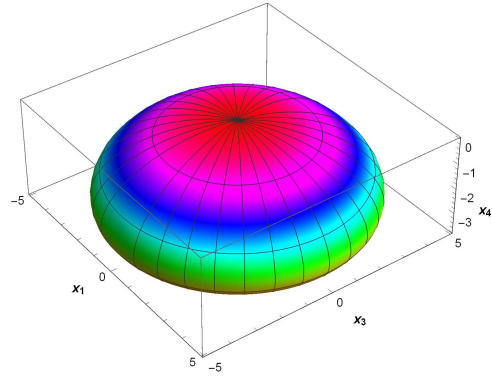


Figura 5.4: Projeção dos harmônicos hipersféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$; $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

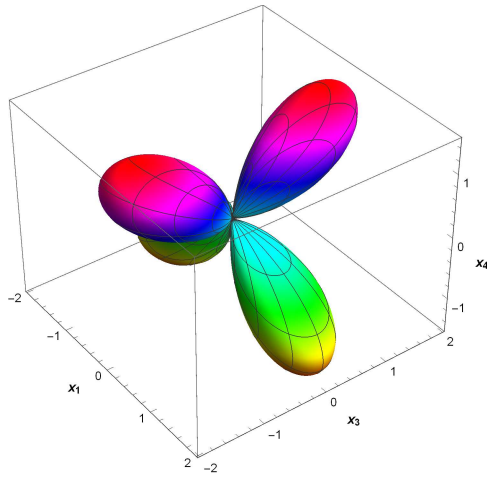


(a) $l_3 = 3, l_2 = 1$ e $l_1 = 1$

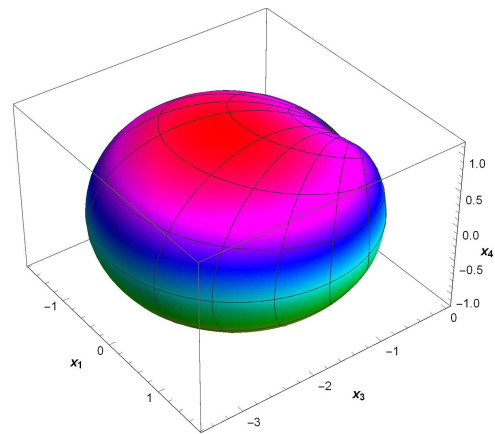


(b) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 0$

Figura 5.5: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3, l_2 = 2$, e $l_1 = 0$.

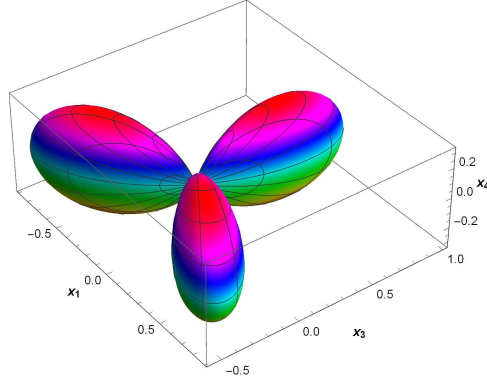


(a) $l_3 = 3, l_2 = 2$ e $l_1 = 2$



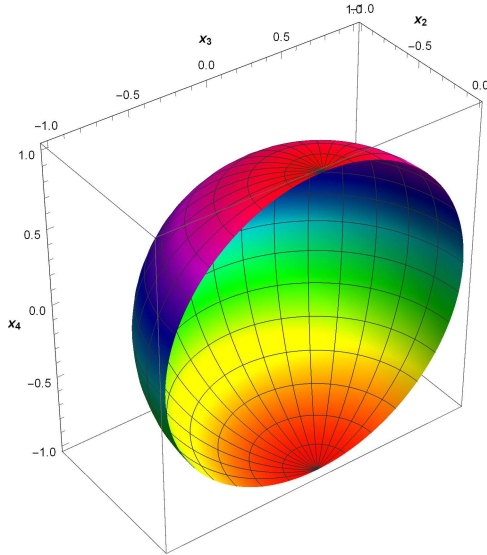
(b) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 1$

Figura 5.6: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 2$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3, l_2 = 3$, e $l_1 = 1$.

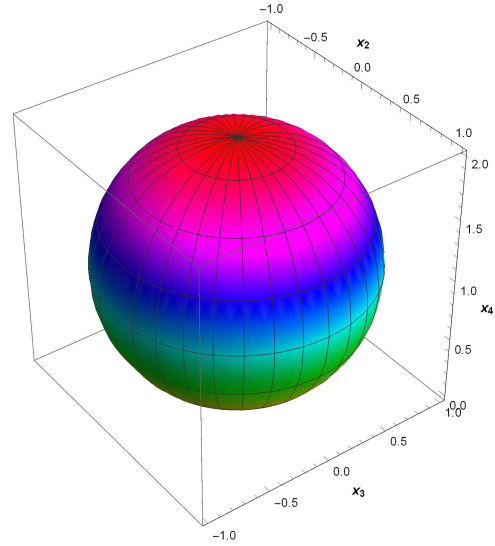


(a) $l_3 = 3, l_2 = 3$ e $l_1 = 3$

Figura 5.7: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_2, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 3$;



(a) $l_3 = 0, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$



(b) $l_3 = 1, l_2 = 0$ e $l_1 = 0$

Figura 5.8: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 0$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1$, $l_2 = 0$ e $l_1 = 0$.

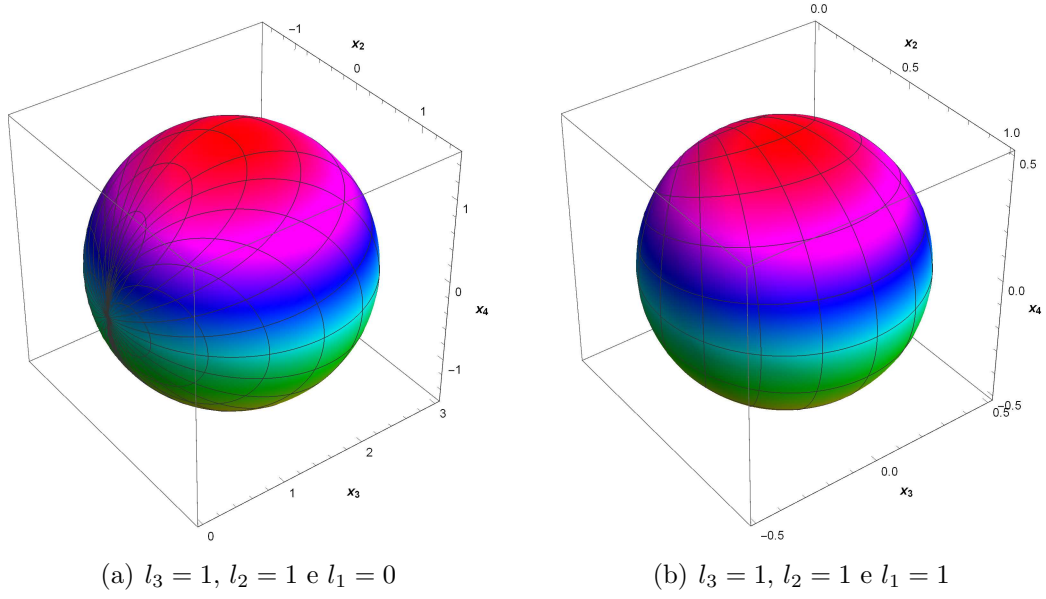


Figura 5.9: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 1$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 1$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$

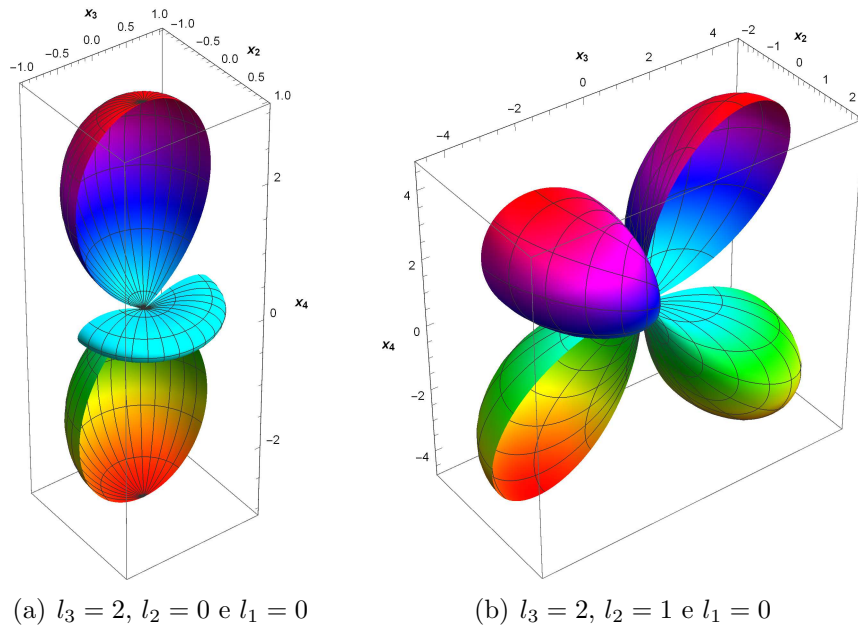


Figura 5.10: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 2$; $l_2 = 1$ e $l_1 = 0$.

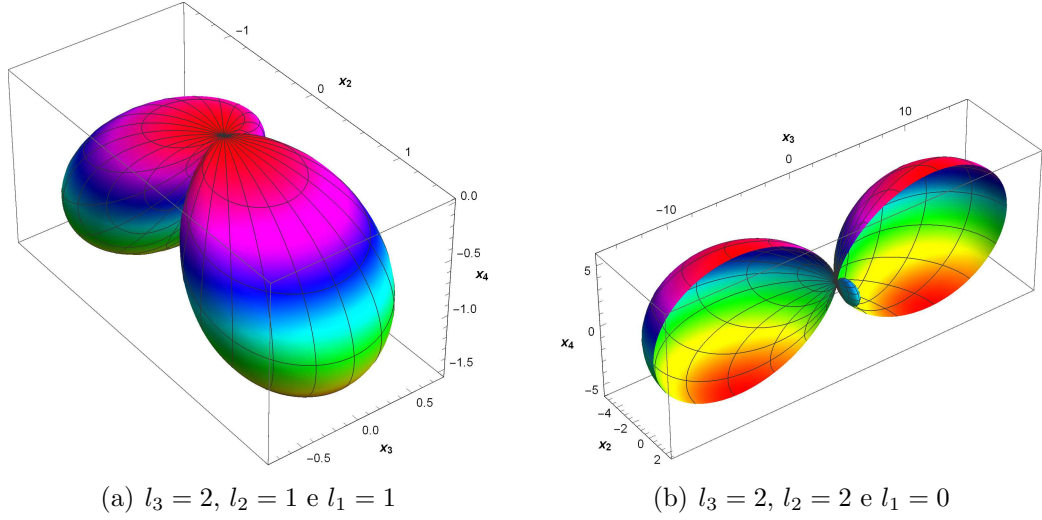


Figura 5.11: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$.

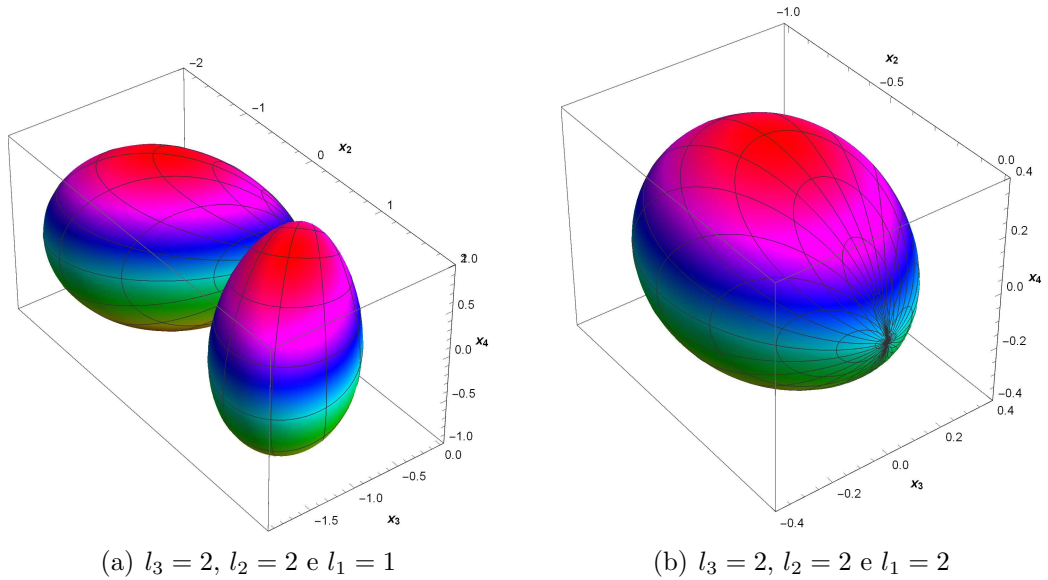


Figura 5.12: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 2$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$.

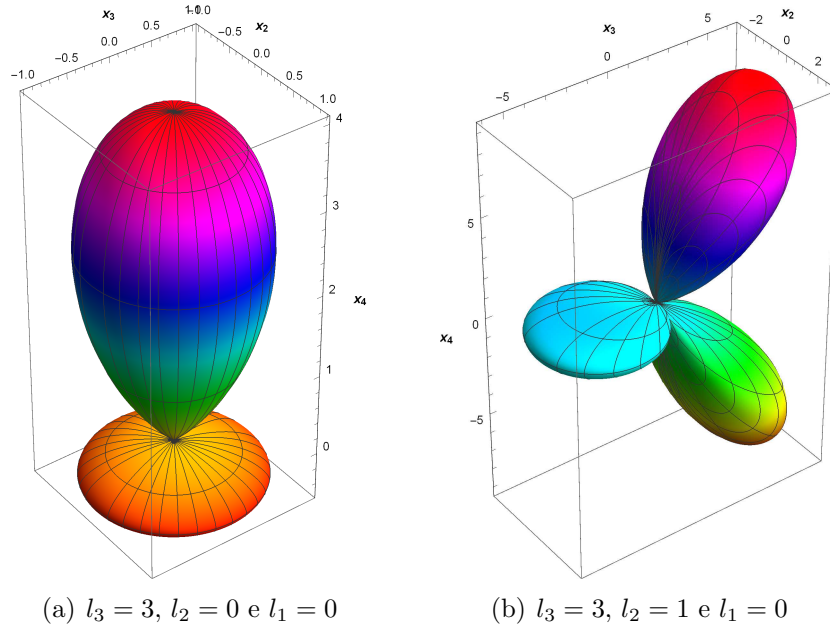


Figura 5.13: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 0$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3; l_2 = 1$ e $l_1 = 0$.

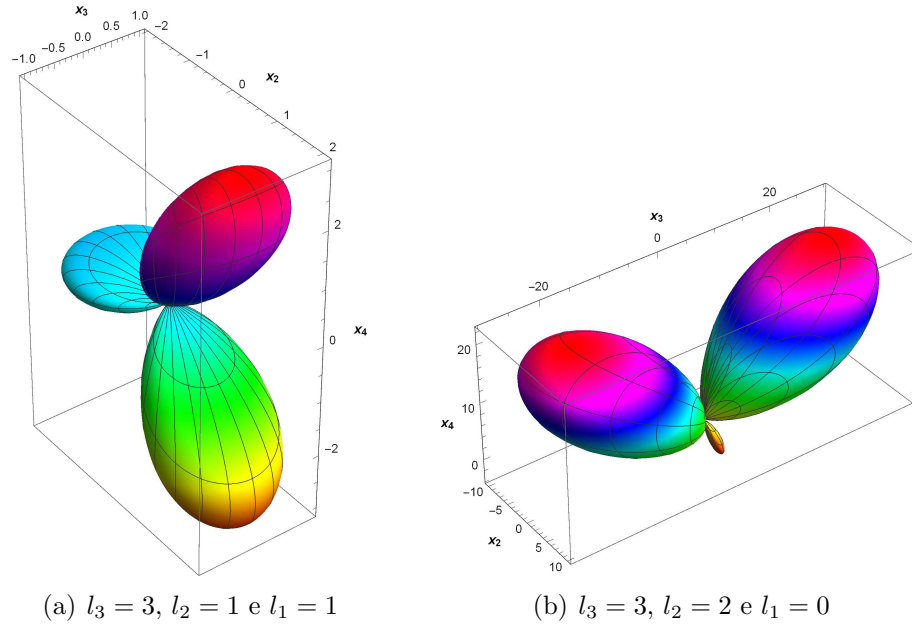


Figura 5.14: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3, l_2 = 1$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3, l_2 = 2$, e $l_1 = 0$.

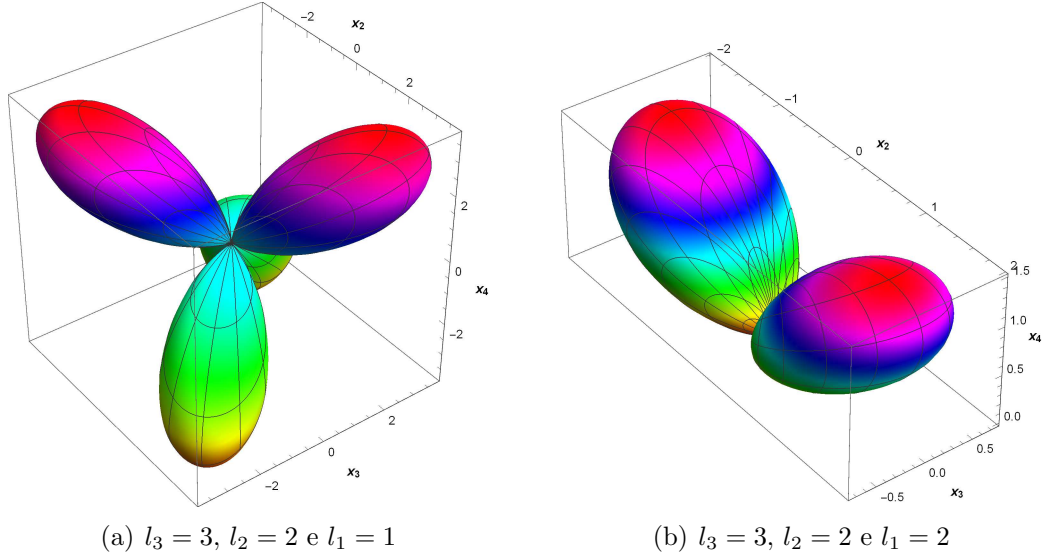


Figura 5.15: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 1$; $l_3 = 3$, $l_2 = 2$, e $l_1 = 2$.

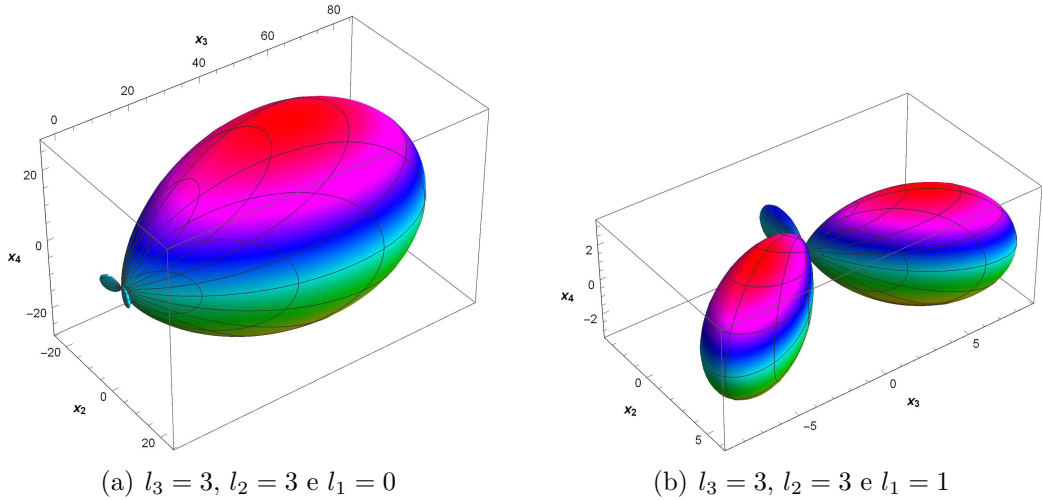


Figura 5.16: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 0$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$ e $l_1 = 1$.

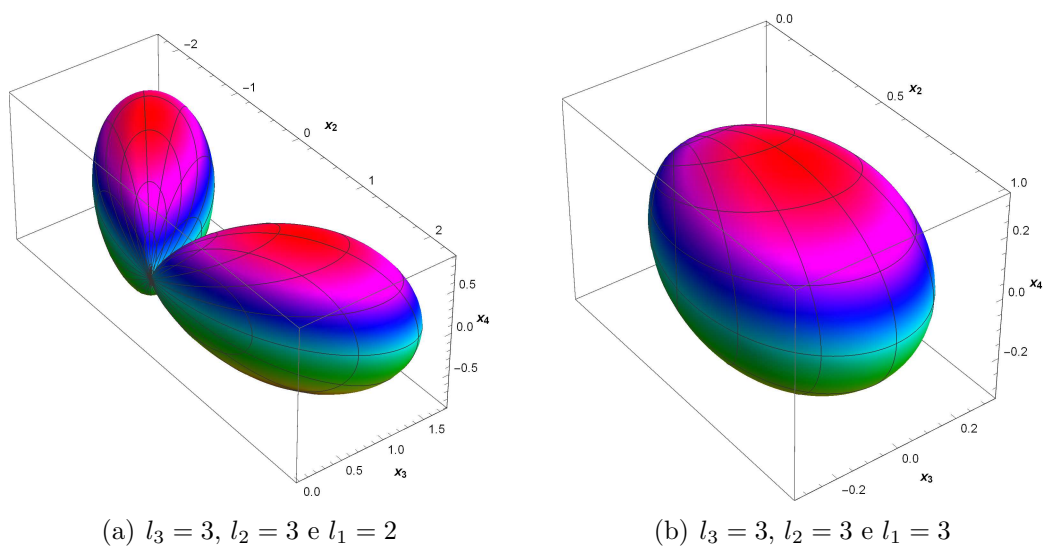


Figura 5.17: Projeção dos harmônicos hiperesféricos no hiperplano (x_1, x_3, x_4) com: $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 2$; $l_3 = 3$, $l_2 = 3$, e $l_1 = 3$.

Capítulo 6

Conclusão

Neste projeto construímos os harmônicos hipersféricos em N dimensões. Foram apresentados três métodos de obtenção da equação de Laplace em 4 dimensões nas coordenadas hipersféricas: a transformação de coordenadas, os operadores diferenciais vetoriais em coordenadas curvilineares e o operador de Laplace-Beltrami na forma covariante. No caso para dimensão arbitrária (N dimensões), utilizamos o operador de Laplace-Beltrami covariante com a métrica da geometria esférica. Para resolver a equação de Laplace foi usado o métodos de separação de variáveis. As equações ordinárias para cada variável foram reduzidas a uma forma da equação de Schrödinger com o potencial simétrico de Pöschl-Teller. As soluções das equações ordinárias foram obtidas na forma de produto das soluções da equação de Schrödinger com um fator funcional determinado no processo de solução, tais soluções foram expressas em termos dos polinômios de Gegenbauer. O produto das soluções das equações ordinárias apresenta os harmônicos hipersféricos em N dimensões. Aproveitando as propriedades dos polinômios de Gegenbauer, foi demonstrada a ortogonalidade dos harmônicos hipersféricos construídos e determinado o fator de normalização. Os harmônicos hipersféricos construídos no projeto coincidem com aqueles obtidos em outros trabalhos a menos de um fator de normalização, confirmando o método desenvolvido neste trabalho. Para uma ilustração dos resultados do projeto apresentamos as imagens dos harmônicos hipersféricos em 4 dimensões, para os primeiros valores dos números característicos. Para visualizar os objetos quadridimensionais no espaço tridimensional efetuamos as projeções deles nos hiperplanos tridimensionais.

A abordagem usada neste projeto não envolve a teoria dos polinômios harmônicos, teoria de representação de grupo ou a teoria de momento angular generalizado que são

geralmente utilizados na obtenção dos harmônicos hiperesféricos em N dimensões.

Capítulo 7

Sugestões para trabalhos futuros

No trabalho [14] os harmônicos esféricos em 3 dimensões são obtidos sem derivadas. O método utilizado baseia-se nos operadores de componentes do momento angular (L_x , L_y e L_z) e os operadores de levantamento de abaixamento para o momento angular ($L_{\pm}$), denotando os harmônicos na notação de Dirac da mecânica quântica, em seguida é introduzido o operador exponencial de desemaranhamento mostrando sua relação com a álgebra de Lie; por fim verifica-se que o método reproduz o mesmo resultado dos métodos convencionais. Ao facilitar a obtenção das matrizes de rotação e estender o entendimento dos operadores da mecânica quântica o método traz uma abordagem mais didática comparados aos métodos convencionais. Na opinião dos autores do trabalho, apesar de que esta abordagem já era conhecida desde 1970, a conexão com os harmônicos esféricos não foi indicada por outros autores. Esperamos que o método descrito no trabalho [14] possa ser estendida para o caso de dimensões mais altas que é o interesse principal do nosso trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Efthimiou, Christopher Frye, Spherical Harmonics in p Dimensions, World Scientific, (2012); ArXiv: 1205.3548 .
- [2] N. J. Vilenke, Translations of Mathematical Monographs-*Spherical Functions and the Theory of Group Representations*, v. 22, (American mathematical society providence, rhode island, 1968).
- [3] M. A. Rubin, C. R. Ordonez, Eigenvalues and degeneracies for n -dimensional tensor spherical harmonics, J. Math. Phys. 25, 2888 (1984).
- [4] A. Chodos, E. Myers, Gravitational contribution to the Casimir energy in Kaluza-Klein theories, Ann. Phys. 156, 412 (1984).
- [5] B. Ratra, Restoration of spontaneously broken continuous symmetries in de Sitter spacetime, Phys. Rev. D. 31, 1931 (1985).
- [6] H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, v. II (McGraw-Hill Book Co., 1953).
- [7] J. S. Avery, Harmonic polynomials, hyperspherical harmonics, and atomic spectra, J. Comp. Appl. Math. 233, 1366 (2010).
- [8] V.A. Fock, Z. Physik., 98 145, 1935
- [9] O. Goscinski, Adv. Quantum Chem., 41 51-85, 2003.
- [10] S. Flügge, Practical Quantum Mechanics, Springer (1994).
- [11] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series - 55, Chapter 22 (1972)

- [12] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer, 3 ed. (2004).
- [13] R. Eisberg, R. Resnick, Física Quântica Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas, CAMPUS, 2ª Edição, (1985).
- [14] M. Weitzman, J. K. Freericks, Calculating spherical harmonics without derivatives, Condensed Matter Physics; ArXiv: 1805.12125v2, (27 de setembro de 2018).
- [15] J. D. Louck, *Theory of angular momentum in N-dimensional space*, Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, University of California (1960).
- [16] A. Higuchi, Symmetric tensor spherical harmonics on the N-sphere and their application to the de Sitter group $SO(N,1)$, J. Math. Phys. 28, 1553 (1987).
- [17] I. S. Gradshteyn, I. W. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1994).
- [18] S. Flugge, *Practical quantum mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [19] A. Higuchi, Symmetric tensor spherical harmonics on the N-sphere and their application to the de Sitter group $SO(N,1)$, J. Math. Phys. 28, 1553 (1987).
- [20] V. Iório, EDP - Um Curso de Graduação, SBM (2012).
- [21] Osmar S. Silva Jr., Métodos de Física Teórica II (2010).
- [22] R. F. Afonso, Um Estudo do Comportamento dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer, Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia - MG (2016)
- [23] P.K. Suetin, Ultraspherical polynomials, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, I (2001).