



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA VOLUNTÁRIA – PIBICVOL

Aplicações da Análise à Geometria Diferencial

Iniciação às Variedades Diferenciáveis

Relatório Final
Período da bolsa: de (01/08/2019) a (31/07/2020)

Este projeto é desenvolvido com bolsa de iniciação científica

PIBICVOL

Sumário

1	Introdução	3
2	Objetivos	3
3	Metodologia	4
4	Resultados e discussões	4
4.1	Abertos, Fechados, Compactos	4
4.2	Limite e Continuidade	12
4.3	Funções Diferenciáveis	25
4.4	Superfícies em $\mathbb{R}^3$	38
5	Conclusões	71
6	Perspectivas de futuros trabalhos	72
7	Referências	73
8	Outras atividades	74
9	Justificativa de Alteração no Plano de Trabalho	75

1 Introdução

O presente texto é um relato das atividades realizadas no período de vigência do projeto. Os objetivos do projeto e a metodologia empregada são descritos nas seções 2 e 3, respectivamente.

A solução de muitos problemas que se originam na Matemática, Física e outras ciências tem suas soluções baseadas em técnicas desenvolvidas na Análise, Topologia, Geometria e Equações Diferenciais. Aí reside a grande motivação para o estudo destas teorias. Nesse projeto oferecemos uma formação básica ao estudante para que o mesmo possa entender as soluções de problemas que são modelados por aquelas subáreas da matemática. Este propósito quando bem embasado consegue transformar o expectador de objetos matemáticos para um promissor modelador de soluções.

A nossa visão, portanto, foi qualificar o aluno de modo que a continuidade de sua formação futura em cursos de pós-graduação seja algo que se dê naturalmente.

Neste projeto, foram estudados resultados importantes da Geometria Diferencial das Superfícies como A Primeira Forma Fundamental de uma Curva, Curvatura Média e Gaussiana, Teorema Egregium de Gauss, Teorema de Bonnet, Geodésicas e O Teorema de Gauss-Bonnet.

Os resultados aqui apresentados foram baseados principalmente nos textos de [8], [6], [11], [10] e [15].

2 Objetivos

Objetivos Gerais:

- Introduzir o aluno em uma linguagem matemática simples e que tem consequências em conceitos sofisticados da matemática;
- Apresentar aos alunos as relações de conteúdos básicos com áreas de maior grau de dificuldade da matemática;
- Despertar no aluno o quanto antes sua vocação científica;
- Qualificar os alunos para continuarem seus estudos futuros em cursos de pós-graduação, visando dar continuidade as suas pesquisas iniciais e sua formação acadêmica de alto nível.

Objetivos Específicos:

- Estudar minuciosamente os resultados de Cálculo Avançado;

- Aplicar os resultados de Cálculo Avançado em Geometria Diferencial;
- Realizar um avanço de estudo para alunos no início de graduação do modo que esta possa acompanhar qualquer curso de nivelamento em programas de pós-graduação.

3 Metodologia

Para cumprir cada etapa do estudo, foram realizadas exposições semanais pelos alunos na presença do orientador e elaborados estudos dirigidos. Também houveram discussões e resoluções de exercícios propostos afim de fixar os conceitos e resultados introduzidos, ampliar os conhecimentos do aluno e dar suporte ao andamento do projeto. Buscamos direcionar os alunos à participação de encontros científicos envolvendo os temas de nosso estudo, bem como motivar suas participações em Escolas de Verão de Programas de Pós-Graduação em Matemática para que consigam maiores embasamento teóricos ao iniciarem futuramente um curso de mestrado.

4 Resultados e discussões

4.1 Abertos, Fechados, Compactos

Definição 4.1. Seja A um subconjunto de V e $x_0 \in V$.

- Dizemos que x_0 é ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.
- Dizemos que x_0 é ponto de acumulação de A se para todo $r > 0$,

$$(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado interior de A , denotado por A° :

$$A^\circ = \{x \in V; x \text{ é ponto interior de } A\}.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de A é denominado derivado de A , denotado por A' :

$$A' = \{x \in V; x \text{ é ponto de acumulação de } A\}.$$

Nota: Observe que é simples verificar que $A^\circ \subset A'$ e que $A \setminus A'$ é o conjunto de pontos isolados de A .

Definição 4.2. Dizemos que um subconjunto A de V é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, ou seja $A = A'$.

Proposição 4.1. A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $\{A_\alpha\}_\alpha$ uma família de conjuntos abertos e $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$. Então existe índice α_0 tal que $x \in A_{\alpha_0}$. Como A_{α_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A_{\alpha_0}$. Portanto

$$B_r(x) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha A_\alpha.$$

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, então $x \in A_i$ para todo i . Como cada A_i é aberto, existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(x) \subset A_i$. Seja $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$. Então $B_r(x) \subset A_i$, para todo $i = 1, \dots, k$ e

$$B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^k A_i.$$

■

Definição 4.3. Dizemos que um subconjunto A de V é limitado se existe $r > 0$ tal que $A \subset B_r(0)$.

Definição 4.4. Dizemos que $A \subset V$ é um conjunto fechado se A^c é aberto.

Proposição 4.2. A interseção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado. A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Demonstração. Seja $\{F_\lambda\}_\lambda$ uma família qualquer de conjuntos fechados. Então $\{F_\lambda^c\}_\lambda$ é uma família de conjuntos abertos. Como a união de conjuntos abertos é aberto, logo

$$\left(\bigcap_k F_k \right)^c = \bigcup_\lambda F_\lambda^c$$

é um conjunto aberto. Portanto $\bigcap_\lambda F_\lambda$ é um conjunto fechado. Analogamente, como a interseção finita de conjuntos aberto é um conjunto aberto, segue se que

$$\left(\bigcup_{i=1}^k F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^k F_i^c$$

é um conjunto aberto. Portanto $\bigcup_{i=1}^k F_i$ é um conjunto fechado. ■

Definição 4.5. $\bar{A} = A' \cup A$ é denominado fecho de A .

Proposição 4.3. A é fechado se e somente se $\bar{A} = A$.

Conjuntos Compactos

Definição 4.6. Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de V é denominada cobertura de um dado conjunto B se

$$B \subset \bigcup_{\lambda} A_\lambda.$$

Se A_λ é um conjunto aberto para todo $\lambda \in \Lambda$, dizemos que a cobertura é aberta. se Λ é um conjunto finito, dizemos que a cobertura é finita.

Definição 4.7. Um conjunto $K \subset V$ é compacto se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita, ou seja, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta de K , então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_k}.$$

Proposição 4.4. Todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Demonstração. Seja K compacto. Começaremos provando que K é limitado. A família $\{B_1(x)\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K . Logo, existem $x_1, \dots, x_m \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(x_i).$$

Seja $\bar{r} := \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_m\|\} + 1$. Afirimo que $B_{\bar{r}}(0) \supset K$. Com efeito, se $x \in K$, então $x \in B_1(x_i)$ para algum $i = 1, \dots, m$. Assim

$$\|x\| = \|x + x_i - x_i\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \leq \bar{r}.$$

Agora provemos que K é fechado, isto é, que K^c é aberto. Seja $x_0 \in K^c$. Para cada $x \in K$ considere $r_x = \frac{1}{2}\|x - x_0\|$. Então $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in K}$ uma cobertura aberta de K . sendo K compacto, podemos encontrar $x_1, \dots, x_m$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{r_{x_i}}(x_i). \quad (1)$$

Seja $\bar{r} := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_m}\} > 0$. Afirimo que $B_{\bar{r}}(x_0) \subset K^c$. De fato, pela definição de $\bar{r}$ temos

$$B_{\bar{r}}(x_0) = \bigcap_{i=1}^m B_{r_{x_i}}(x_0)$$

Passando ao complementar em (1) temos

$$K^c \supset \bigcap_{i=1}^m B_{r_{x_i}}(x_i)^c \supset \bigcap_{i=1}^m B_{r_{x_i}}(x_0) = B_{\bar{r}}(x_0).$$

■

Proposição 4.5. Seja $F \subset K \subset V$, com F fechado e K compacto.

Então F é compacto.

Demonstração. Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de F . Então é fácil ver que $\{G_\alpha \cup F^c\}_{\alpha \in \Lambda}$ é cobertura aberta de K . Como K é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Lambda$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m (G_{\alpha_i} \cup F^c) = \left(\bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i} \right) \cup F^c.$$

Como $F \subset K$, segue que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}.$$

■

Compactos de $\mathbb{R}^n$

Para caracterizar os conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, consideremos os seguintes resultados.

Lema 4.1. Seja $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma família de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$ tais que $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Então

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Demonstração. Se $I_k = [a_k, b_k]$, segue-se da hipótese que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Logo $\{a_k\}$ é sequência crescente e limitada e $\{b_k\}$ é sequência decrescente e limitada. Portanto $a_k \rightarrow \alpha$ e $b_k \rightarrow \beta$ quando $k \rightarrow \infty$ e

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

■

Definição 4.8. Chama-se paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ todo conjunto P da forma

$$P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Lema 4.2. Seja $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma família de paralelepípedos de $\mathbb{R}^n$ tais que $P_1 \supset$

$P_2 \supset \dots$. Então

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \neq \emptyset. \quad (2)$$

Demonstração. $P_k = \prod_{i=1}^n [a_{i,k}, b_{i,k}]$. Como $P_1 \supset P_2 \supset \dots$, segue que $I_{i,k} = [a_{i,k}, b_{i,k}]$ satisfaz $I_{i,1} \supset I_{i,2} \supset \dots$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, decorre do Lema 4.1 que $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i,k} \neq \emptyset$ e consequentemente $\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \neq \emptyset$. ■

Teorema 4.1. (Bolzano-Weierstrass) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado contendo uma infinidade de pontos. Então $A' \neq \emptyset$

Demonstração. A sendo limitado, existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \supset A$, onde B_r denota a bola aberta relativa á norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Seja $P_0 = B_r(0)$. Então $P_0 \supset A$ e

$$P_0 = \prod_{i=1}^n I_{i,0}, \text{ onde } I_{i,0} = [-r, r].$$

Dividindo cada intervalo $I_{i,0}$ no ponto médio, obtemos 2^n bolas fechadas de raio $\frac{r}{2}$. Como A possui infinitos pontos, alguma dessas bolas fechadas contém infinitos pontos de A. Seja $P_1 = \prod_{i=1}^n [a_{i,1}, b_{i,1}]$ tal bola.

Novamente dividindo cada intervalo $[a_{i,1}, b_{i,1}]$ pelo ponto médio, obtemos 2^n bolas fechadas de raio $\frac{r}{4}$. Seja P_2 uma dessas bolas que contenha infinitos pontos de A.

Repetindo o procedimento acima *ad infinitum*, obtemos uma família de bolas fechadas $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz

$$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$$

Pelo Lema 4.2, existe $\bar{x} \in \bigcap_k P_k$. Provemos que $\bar{x} \in A'$.

Dado $\delta > 0$, seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r}{2^{k_0}} < \frac{\delta}{2}$. como $\bar{x} \in P_k$ para todo k, temos $p_{k_0} \subset B_{\delta}(\bar{x})$. Como P_{k_0} contém infinitos pontos de A, segue que

$$B_{\delta}(\bar{x}) \cap (A \setminus \{\bar{x}\}) \neq \emptyset$$

■

Teorema 4.2. Todo paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ é compacto.

Demonstração. Seja $P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ um paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ e

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

seu diâmetro.

Suponhamos que $\{G_{\delta}\}_{\alpha \in \Lambda}$ seja uma cobertura aberta de P que não admite subcobertura finita.

Os pontos médios $c_i = (a_i + b_i)/2$ dos intervalos que compõem P dividem P em 2^n paralelepípedos de diâmetros $\delta/2$. Alguém desses 2^n paralelepípedos não pode ser coberto por um número finito de abertos de $\{G_\alpha\}$. Seja P_1 tal paralelepípedo. Repetindo-se o argumento acima *Ad Infinitum*, construímos uma família $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de paralelepípedos, cada P_k com diâmetro $\frac{\delta}{2^k}$, tais que $P_1 \supset P_2 \supset \dots$

Pelo Lema 1.2, $\exists \bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \subset P$. Portanto, $\exists \alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\bar{x} \in G_{\alpha_0}$. Como G_{α_0} é aberto, $\exists r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}) \subset G_{\alpha_0}$.

Escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{2^k} < \frac{r}{2}$ tem-se $P_k \subset B_r(\bar{x}) \subset G_{\alpha_0}$, o que é uma contradição, pois P_k não pode ser coberto por uma quantidade finita de abertos.

■

Teorema 4.3. Se K é fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$, então K é compacto.

Demonstração. Se K é limitado, então existe paralelepípedo P tal que $K \subset P$. Pelo teorema anterior, P é compacto. Como K é fechado e $K \subset P$, segue que K é compacto.

O teorema e o corolário a seguir fornece uma generalização dos Lemas 4.1 e 4.2

Teorema 4.4. Seja $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de compactos $\mathbb{R}^n$ com a propriedade da interseção finita, isto é, "toda subfamília finita tem interseção não vazia". Então

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponhamos que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha = \emptyset$ e fixe $\alpha_0 \in \Lambda$. Afirimo que $\{K_\alpha^c\}_{\alpha \in \Lambda}$ é cobertura aberta de K_{α_0} . Com efeito, se $x \in K_{\alpha_0}$, segue de $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha = \emptyset$ que

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha^c$$

Como K_{α_0} é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tais que

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^m K_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^m K_{\alpha_i} \right)^c.$$

Portanto $K_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_m} = \emptyset$, o que é contradição.

■

Corolário 4.1. Seja $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ família enumerável de compactos de $\mathbb{R}^n$ tal que $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ Então

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k \neq \emptyset.$$

Sequências em espaços vetoriais

Definição 4.9. Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ de V converge para $x_0 \in V$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que se } k \geq k_0 \text{ então } \|x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

Se a sequência $\{x_k\}$ converge para x_0 , denotamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = x_0 \text{ ou } x_k \longrightarrow x_0.$$

Proposição 4.6. Seja $\{x_k\}$ uma sequência de V e $A \subset V$.

- a) se $\{x_k\}$ converge $\Rightarrow$ o limite é único.
- b) se $\{x_k\}$ converge $\Rightarrow \{x_k\}$ é limitada
- c) $x_0 \in A' \iff$ existe sequência $\{x_k\}$ de A com $x_k \neq x_0$ para todo k que converge para x_0 .

Corolário 4.2. Seja $A \subset V$ um conjunto fechado e $\{x_k\}$ uma sequência de elementos de A . se $x_k \rightarrow x_0$, então $x_0 \in A$.

Demonstração. Pela proposição 4.6, se $x_k \rightarrow x_0$, então $x_0 \in A'$. como A é fechado, $A' \subset A$ ■

O teorema abaixo estabelece uma caracterização para os compactos de um espaço vetorial normado

Teorema 4.5. Seja V um espaço vetorial normado e $K \subset V$. Então K é compacto se e somente se toda sequência $\{x_n\}_n$ de K possui subsequência $\{x_{n_i}\}_n$ tal que $x_{n_i} \rightarrow \bar{x} \in K$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\{x_n\}_n$ possui subsequência convergente então o limite pertence a K , pois K é fechado. Suponha que existe uma sequência $\{x_n\}_n$ que possui subsequência convergente e considere $B = \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$. Então $B' = \emptyset$ o que implica que B é fechado. Além disso para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap B = \{x_n\}$. Logo $\{B_{\varepsilon_n}(x_n)\}_n$ é cobertura de B que não admite subcobertura finita. Como B é compacto, temos uma contradição.

($\Leftarrow$): Suponhamos que existe $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de K que não admita subcobertura finita. Para cada $x \in K$, seja

$$\delta(x) = \sup\{\delta > 0; B_\delta(x) \subset A_\alpha, \text{ Para algum } \alpha \in \Lambda\}$$

É claro que $\delta(x) > 0, \forall x \in K$. Seja

$$\delta_0 = \inf\{\delta(x); x \in K\}.$$

Se provarmos que $\delta_0 > 0$, podemos construir uma sequência $\{y_n\}_n$ em K que não possui subsequência convergente. Se admitirmos que $\delta_0 > 0$ e considere a cobertura $\{B_{\delta_0}(x)\}_{x \in K}$. Obviamente essa cobertura aberta não admite subcobertura finita, pois caso contrário A_α também admitiria. Consideremos então a sequência: considere $y_1 \in K$ qualquer e, para cada $n \geq 2$, escolha y_n tal que

$$y_n \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_{\delta_0}(y_i) \right).$$

Então $\|y_n - y_m\| \geq \delta_0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n \neq m$ provemos então que $\delta_0 > 0$. Segue da definição que existe uma sequência $\{x_n\}$ em K tal que $\delta(x_n) \rightarrow \delta_0$. Por hipótese, existe uma subsequência $\{x_{n_i}\}$ que converge para algum $x_0 \in K$. Seja $\varepsilon_0 = \delta(x_0/2) > 0$. Então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_i} \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$ para todo $i \geq i_0$. Logo, para algum $\alpha \in \Lambda$,

$$B_{\varepsilon_0}(x_{n_i}) \subset B_{\delta(x_0)}(x_0) \subset A_\alpha.$$

Portanto, $\delta(x_{n_i}) \geq \varepsilon_0 > 0, \forall i \geq i_0$ e o mesmo vale para δ_0 . ■

Sequências de Cauchy

Definição 4.10. Uma sequência $\{x_k\}$ de V é dita sequências de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } k, l \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\|_V < \varepsilon.$$

Lema 4.3. Se $\{x_k\}_k$ é uma sequência de Cauchy em V , então $\{x_k\}_k$ é limitada em V .

Demonstração. Seja $\varepsilon = 1$. Então existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, $\|x_k - x_{k_0}\|_V < 1$. Em particular, $\|x_k\|_V < 1 + \|x_{k_0}\|_V < K_0$. Assim se $M = 1 + \max\{\|x_1\|_V, \dots, \|x_{k_0-1}\|_V, \|x_{k_0}\|_V\}$, então $\|x_k\|_V \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ ■

Sequências em $\mathbb{R}^n$

Proposição 4.7. Toda sequência de $\mathbb{R}^n$ possui subsequência convergente.

Demonstração. Se φ é sequência de $\mathbb{R}^n$, seja $A = \varphi = (\mathbb{N})$.

Se A é finito, então existe uma infinidade de números naturais $k_1 < k_2 < \dots$ para os quais $\varphi(k_1) = \varphi(k_2) \dots$ e concluímos, porque sequências constantes são convergentes.

Se A é infinito, segue o Teorema de Bolzano-Weirstrass 1.1 que $A' \neq \emptyset$ e concluímos o resultado pelo item c) da proposição 1.6 ■

Teorema 4.6. $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{x_k\}_k$ uma sequência de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. Então $\{x_k\}_k$ é limitada e, portanto, possui uma subsequência $\{x_{k_i}\}$ que converge para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_0$ então $\|x_{k_i} - \bar{x}\| < \varepsilon/2$. Como a sequência é de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$ então $\|x_k - x_l\| < \varepsilon/2$. Portanto se $k_1 = \max\{k_0, k_{i_0}\}$ e $k \geq k_1$, temos

$$\|x_k - \bar{x}\| \geq \|x_k - x_{k_{i_0}}\| + \|x_{k_{i_0}} - \bar{x}\| < \varepsilon$$

■

Teorema 4.7. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes

- a) K é compacto;
- b) K é fechado e limitado;
- c) Toda sequência de K possui subsequência que converge para um ponto de K

Demonstração. A equivalência entre (a) e (b) está provada pela Proposição 4.4 e pelo Teorema 1.3. A equivalência entre (a) e (c) é consequência do Teorema 1.5

■

4.2 Limite e Continuidade

Definição 4.11. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que b é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 em A se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ tal que } x \in A \text{ e } 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Nesse caso denotamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

A definição acima pode ser expressa por notação de bolas, ou seja:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ tal que } x \in A \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Teorema 4.8. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ onde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, m$, $x_0 \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \dots, b_m)$. Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i, \forall i = 1, \dots, m.$$

Demonstração. Suponhamos $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$ tais que $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \varepsilon$

$|b_i| < \varepsilon/m$. Se $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, então considerando-se $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ temos, para $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$:

$$\|f(x) - b\| \leq |f_1(x) - b_1| + \dots + |f_m(x) - b_m| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$ então $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Como $|f_i(x) - b_i| \leq \|f(x) - b\| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, m$ segue o resultado. ■

Teorema 4.9. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A'$. Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \begin{cases} \forall \{x_k\}_k \subset A \text{ tal que } x_k \neq x_0, \forall k \\ \text{e } x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow b. \end{cases}$$

Teorema 4.10. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$$

então

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = b \pm c \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = bc \end{cases}$$

Além disso, se $c \neq 0$ então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{b}{c}.$$

Corolário 4.3. Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A'$. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \langle f(x) : g(x) \rangle = \langle b : c \rangle.$$

Lema 4.4. Seja $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{**}$ respectivamente normas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ equivalentes às normas euclidianas. Então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ relativamente às normas $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{**}$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ relativamente às normas euclidianas.

Funções Contínuas

Definição 4.12. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A \cap A'$. Dizemos que f é contínua em x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Mais precisamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

A recíproca em notação de bolas define que f é contínua se e somente se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in A \cap B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)),$$

ou de maneira mais reduzida

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(A \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Observação 4.1. Decorre das propriedades sobre limites os seguintes fatos:

- a) Se $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, então f é função contínua em x_0 se e somente se $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 .
- b) Se $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em x_0 e $\lambda \in \mathbb{R}$, então as funções $f + g$, fg e λf são contínuas em x_0 . Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, então a função f/g é contínua em x_0 .

Teorema 4.11. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tais que $f(A) \subset B$. Se $x_0 \in A', y_0 \in B \cap B'$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ e } g \text{ é contínua em } y_0,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é contínua em y_0 , existe $\mu > 0$ tal que $y \in B \cap B_\mu(y_0) \Rightarrow g(y) \in B_\varepsilon(g(y_0))$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\mu(y_0)$. Portanto,

$$x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow y = f(x) \in B_\mu(y_0)$$

e conseqüentemente

$$g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(y_0))$$

■

Teorema 4.12. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

- a) f é contínua;
- b) se A é aberto em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$;
- c) se F é fechado em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(F)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$

Demonstração. Provemos que "(a) $\iff$ (b)":

Seja $x_0 \in f^{-1}(A)$. Então $y_0 = f(x_0) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$B_\varepsilon(y_0) \subset A$. Como f é contínua em x_0 existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0) \subset A$. Logo $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$ seja $A = B_\varepsilon(y_0)$ com $y_0 = f(x_0)$. Como A é aberto, temos por hipótese que $f^{-1}(A)$ é aberto. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f(B_\delta(x_0)) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Provemos que "(b) $\iff$ (c)":

Se F é fechado então $A = F^c$ é aberto. Pelo item (b) $f^{-1}(A) = f^{-1}(F)^c$ é aberto. Logo $f^{-1}(F)$ é fechado. Reciprocamente, se A é aberto, então $F = A^c$ é fechado. Pelo item (c) $f^{-1}(F) = f^{-1}(A)^c$ é fechado. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto. ■

Funções contínuas e conjuntos compactos

Teorema 4.13. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto. Então $f(K)$ é conjunto compacto em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura qualquer de $f(K)$. Queremos verificar se ela admite uma subcobertura finita. Como $f(K) \subset \bigcup A_\lambda$, temos

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

Como f é contínua, segue que $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ é cobertura aberta de K . Como K é compacto, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_k})$. Portanto,

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(A_{\lambda_i})\right) = \bigcup_{i=1}^k f(f^{-1}(A_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{i=1}^k A_{\lambda_i}.$$

■

Corolário 4.4. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto existe $\underline{x}, \bar{x}$ tais que

$$f(\underline{x}) = \min\{f(x); x \in K\} \text{ e } f(\bar{x}) = \max\{f(x); x \in K\}.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior $f(K)$ é compacto de $\mathbb{R}$. Logo é fechado e limitado. Sendo limitado temos $\bar{s} = \sup f(K) < +\infty$ e $\underline{s} = \inf f(K) > -\infty$. Sendo fechado temos $\bar{s} \in f(K)$ e $\underline{s} \in f(K)$. Portanto, existem $\underline{x}, \bar{x} \in K$ tais que $\underline{s} = f(\underline{x})$ e $\bar{s} = f(\bar{x})$. ■

Teorema 4.14. Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes

Demonstração. Seja $\|\cdot\|_l$ uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|_1$ a norma 1 definida

por $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq M \|x\|_1,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $M = \max\{\|e_i\|; i = 1, \dots, n\}$.

Seja $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 = 1\}$ e $f(x) = \|x\|$.

Então $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função contínua. Como K é fechado e limitado, e portanto compacto, segue do corolário anterior que existe $\underline{x} \in K$ tal que $m := f(\underline{x}) = \min f(K)$.

Observe que $m > 0$, pois se $0 = m = \|\underline{x}\| \Rightarrow \underline{x} = 0$.

Seja x um ponto qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então $y = x/\|x\|_1 \in K$ e

$$m \leq f(y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \Rightarrow m \|x\|_1 \leq \|x\|.$$

■

Conjuntos convexos e funções convexas

Definição 4.13. Um conjunto A de um espaço vetorial V é dito convexo se, para todo $x, y \in A$ temos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Definição 4.14. Uma função $f : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se A é convexo e para todo $x, y \in A$ vale a desigualdade

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in (0, 1).$$

Lema 4.5. Seja $f : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x_1, \dots, x_k \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in]0, 1[$ são tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, então

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

Demonstração. Para $k = 1$ é óbvio e para $k = 2$ segue-se da definição de conjunto convexo que a combinação convexa de k elementos de A ainda pertence a A . Supondo este fato verdadeiro para um certo k , escrevamos uma combinação convexa dos elementos $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$ sob a forma

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $\lambda_{k+1} \neq 1$. Então, pondo $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$, temos $\lambda_{k+1} = 1 - \lambda$ e $\lambda \neq 0$. Pela hipótese de indução, levando em conta que $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, vemos que $x = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ pertence a A . Logo

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \lambda x + (1 - \lambda)x_{k+1} \in A, \quad \text{pois } A \text{ é convexo.}$$

A segunda parte também se prova por indução. pois

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + (1 - \lambda)x_{k+1}\right) \\ &\leq \lambda f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i\right) + (1 - \lambda)f(x_{k+1}) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i) + (1 - \lambda)f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

■

Teorema 4.15. Toda função convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua

Demonstração. A prova sera apresentada em quatro etapas

Etapa 1: Se $f(0) \leq \sup\{f(x); \|x\|_1 \leq 1\} < +\infty$.

É claro que $0 = f(0) \leq \sup\{f(x); \|x\|_1 \leq 1\}$. Vamos mostrar inicialmente que $\leq \sup\{f(x); \|x\|_1 = 1\} < +\infty$. Seja

$$b = \max\{f(e_1, \dots, f(e_n), f(-e_1), \dots, f(-e_n)\},$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário, isto é, $\|x\|_1 = 1$, definimos, para $i = 1, \dots, n$,

$$a_i = \begin{cases} x_i/|x_i|, & \text{se } x_i \neq 0, \\ 1, & \text{se } x_i = 0. \end{cases}$$

Então, os vetores u_i definidos por $u_i = a_i e_i$ são vetores unitários. Como

$$x = \sum_{i=1}^n |x_i| u_i$$

$$|x_i| + \cdots + |x_n| = 1,$$

concluimos que

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| f(u_i) \leq \max\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} \leq b. \quad (3)$$

Suponhamos que $\sup\{f(x); \|x\|_1 \leq 1\} = +\infty$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe x_k na bola unitária $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_1 \leq 1\}$ tal que $f(x_k) \geq k$. Como $x_k \neq 0$, podemos considerar o vetor unitário $\vec{x}_k = x_k / \|x_k\|_1$. Como $x_k = \|x_k\|_1 \vec{x}_k + (1 - \|x_k\|_1)f(0)$, segue que da convexidade de f que

$$k \leq f(x_k) \leq \|x_k\|_1 f(\vec{x}_k) + (1 - \|x_k\|_1)f(0) \leq f(\vec{x}_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo $\sup\{f(x); \|x\|_1 = 1\} = +\infty$, e temos uma contradição com (3)

Etapa 2: Suponhamos que $f(0) = 0$. Então f é contínua em $x = 0$. De fato, se $f \equiv 0$ em B , não há muito a se fazer. Suponhamos então que $f \not\equiv 0$ em B . Segue da Etapa 1 que $0 < a := \sup\{f(x); x \in B\} < +\infty$. Dado $0 < \varepsilon < a$, seja $\delta < \varepsilon/a$.

Se $\|x\|_1 < \delta$, então $\|x/\delta\|_1 < 1$ e $f(x/\delta) \leq a$. Escrevendo $x = \delta(x/\delta) + (1 - \delta)f(0)$, temos da convexidade

$$f(x) \leq \delta f(x/\delta) + (1 - \delta)f(0) \leq \delta a < \varepsilon. \quad (4)$$

Seja $\lambda = \delta/(1 + \delta)$. Então $0 < \lambda < 1$ e temos a combinação convexa

$$\lambda \left(\frac{-x}{\delta} \right) + (1 - \lambda)x = 0.$$

Pela convexidade,

$$0 = f(0) \leq \lambda f\left(\frac{-x}{\delta}\right) + (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda a + (1 - \lambda)f(x)$$

e concluimos que

$$f(x) \geq -\delta a > -\varepsilon. \quad (5)$$

De (3) e (4) se conclui que

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|x\|_1 < \delta.$$

Etapa 3: Se $f(0) \neq 0$.

Neste caso, $g(x) = f(x) - f(0)$ é convexa que se anula em $x = 0$. Pelas outras etapas se conclui que, g é contínua em $x = 0$, o mesmo valendo para f .

Etapa 4: O caso geral.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então $g(x) = f(x + x_0)$ é função convexa. Portanto, pelas etapas anteriores, g é contínua em $x = 0$. Segue que f é contínua em $x = x_0$. ■

Continuidade uniforme

Definição 4.15. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua em A se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in A$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Observação 4.2. É fácil ver que toda função uniformemente contínua é contínua em seu domínio. No entanto a sua recíproca é falsa. Considere por exemplo $f(x) = x^2$.

Definição 4.16. Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita Lipschitz-contínua em A se existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in A.$$

Observação 4.3. Um detalhe importante a se notar é que toda função Lipschitz-contínua é uniformemente contínua.

Proposição 4.8. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função linear. Então f é Lipschitz-contínua.

Demonstração. Seja $M = \max\{\|f(e_1)\|, \dots, \|f(e_n)\|\}$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Então, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|f(e_i)\| \leq M\|x - y\|_1$$

e a conclusão segue a equivalência das normas de $\mathbb{R}^n$. ■

As funções Lipschitz-contínuas são casos particulares das Hölder-contínuas, que veremos a seguir.

Definição 4.17. Seja $0 < \alpha \leq 1$. Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita Hölder-contínua de ordem α em A se existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\alpha, \forall x, y \in A.$$

fácil ver que toda Hölder-contínua é uniformemente contínua

Observação 4.4. Os conceitos de continuidade uniforme são invariante para normas equivalentes tanto para a função Hölder-contínua quanto para Lipschitz-contínua.

Teorema 4.16. Toda função contínua definida num conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $x \in K$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que se $y \in B_{\delta_x}(x)$ então $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon/2$. Como $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\delta_x/2}(x)$, segue da compacidade que existem $x_1, x_2, \dots, x_k$ em K tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_{x_i}/2}(x_i) \quad (6)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_{x_1}/2, \dots, \delta_{x_k}/2\}$. Então, se $x, y \in K$ são tais que $\|x - y\| < \delta$, segue de (6) que $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$, para algum i . Portanto

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_i\| < \delta + \delta_{x_i}/2 \leq \delta_{x_i} \Rightarrow y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Logo, $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ e temos o resultado. ■

Espaços vetoriais de dimensão finita

Teorema 4.17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então todas as normas de V são equivalentes.

Demonstração. Suponhamos n a dimensão de V e seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V . Consideremos o isomorfismo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ definido por $T(e_i) = u_i$, $i = 1, \dots, n$ onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Se $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{**}$ são duas normas de V , sejam respectivamente $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ as normas de $\mathbb{R}^n$ induzidas por T . O teorema 4.5 garante que estas normas são equivalentes em $\mathbb{R}^n$. A equivalência das normas de V é consequência da definição de espaço vetorial normado. ■

O teorema de ponto fixo de Banach

Definição 4.18. Seja V um espaço vetorial normado, $A \subset V$ e $f : A \rightarrow V$ uma função, dizemos que f é uma contração em A se existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\|_V \leq \alpha \|x - y\|_V, \quad \forall x, y \in A.$$

Definição 4.19. Dizemos que $\bar{x} \in V$ é um ponto fixo para função $f : V \rightarrow V$ se $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Teorema 4.18. Seja V um espaço de Banach relativamente à norma $\|\cdot\|_V$. Se $f : V \rightarrow V$ é uma contração em V , então f possui único ponto fixo.

Demonstração. Seja $x_0 \in V$ e considere a sequência definida implicitamente por $x_{k+1} = f(x_k)$, $\forall k \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\|_V &= \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|_V \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\|_V \\ &\leq \alpha^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_V \leq \cdots \\ &\leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|_V.\end{aligned}$$

Portanto, se $k, l \in \mathbb{N}$ e supondo que $k \geq l$, temos

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\|_V &\leq \|x_k - x_{k-1}\|_V + \cdots + \|x_{l+1} - x_l\|_V \\ &\leq (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha^l) \|x_1 - x_0\|_V \\ &\leq \frac{\alpha^{l_0}}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|_V.\end{aligned}$$

Como $\alpha < 1$, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^{l_0}}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|_V < \varepsilon,$$

de modo que se $k, l \geq l_0$ então $\|x_k - x_l\|_V < \varepsilon$. Logo $\{x_k\}$ é sequência de Cauchy em V e, portanto, converge para algum $\bar{x} \in V$.

Para concluir que $\bar{x}$ é ponto fixo de f , basta observar que sendo f contínua, segue que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_k) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_k\right) = f(\bar{x}).$$

Sendo a unicidade consequência direta da definição de contração, se encerra a prova. ■

Observação 4.5. É importante observar que, se uma função f é uma contração em V relativamente a uma norma $\|\cdot\|_*$, pode não ser necessariamente contração em relação a uma norma equivalente.

Semicontinuidade

O colorário 4.1 estabelece a existência de máximos e mínimos para funções reais contínuas definidas em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Esse resultado pode ser generalizado para funções descontínuas que satisfaça certas propriedades definidas a seguir.

Definição 4.20. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Definimos o limite inferior e o

limite superior de $f(x)$ em x_0 respectivamente por:

$$\begin{aligned}\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{r \downarrow 0} (\inf \{f(x); x \in A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\})\}) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} (\inf f(A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\}))) \\ \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{r \downarrow 0} (\sup \{f(x); x \in A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\})\}) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} (\sup f(A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\})))\end{aligned}$$

Observação 4.6. Note que

$$-\infty \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq +\infty$$

e que, se f é função limitada, então o limite inferior e o limite superior sempre existem.

Lema 4.6. f possui limite em x_0 se e somente se o limite inferior e o limite superior de f são iguais. Mas precisamente,

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Demonstração. Suponhamos que $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e sejam

$$l(r) = \inf f(A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\})) \quad (7)$$

$$L(r) = \sup f(A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\})) \quad (8)$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < r < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < l(r) \leq L(r) < l + \varepsilon.$$

Além disso segue de (7) e (8) que

$$l - \varepsilon < l(r) \leq f(x) \leq L(r) < l + \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\}).$$

Portanto, se $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$ e concluímos que $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2.$$

Definindo - se $l(r)$ como em (7), temos

$$0 < r < \delta \Rightarrow l - \varepsilon/2 \leq l(r) < l + \varepsilon/2$$

e concluímos que

$$l = \lim_{r \downarrow 0} l(r) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

O mesmo argumento mostra que l é o limite superior de f em x_0 . ■

Definição 4.21. Seja f uma função real definida em $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A \cap A'$. Dizemos que f é semicontínua inferiormente (sci) em x_0 se

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Analogamente, dizemos que f é semicontínua superiormente (scs) em x_0 se

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Como consequência imediata do lema 4.1 temos:

Corolário 4.5. Uma função real f definida em $A \subset \mathbb{R}^n$ é contínua em $x_0 \in A \cap A'$ se e somente se é semicontínua inferiormente e superiormente em x_0 .

Proposição 4.9. Seja f uma função real f definida em $A \subset \mathbb{R}^n$ é contínua em $x_0 \in A \cap A'$. Então f é semicontínua inferiormente em x_0 se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Demonstração. Se f é sci em x_0 , então

$$f(x_0) \leq l = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \downarrow 0} l(r), \quad (9)$$

onde $l(r)$ é definido por (7).

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < r < \delta$, então $l - \varepsilon < l(r) < l + \varepsilon$. Em particular, se $x \in A$ e $\|x - x_0\| < r$, então $l(r) \leq f(x)$. Portanto, se $x \in A$ e $\|x - x_0\| < \delta$, podemos escolher $r > 0$ tal que $\|x - x_0\| < r < \delta$ e

$$f(x_0) - \varepsilon \leq l - \varepsilon \leq l(r) \leq f(x).$$

Reciprocamente, se $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon, \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$, então $l(r) = \inf\{f(x); x \in A \cap B_r(x_0)\} \geq f(x_0) - \varepsilon, \forall r < \delta$.

Como $l(r)$ é função decrescente, segue que

$$f(x_0) - \varepsilon \leq l(r) \leq \lim_{r \downarrow 0} l(r) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (10)$$

A conclusão segue fazendo-se $\varepsilon \downarrow 0$ em (10). ■

Definição 4.22. Uma função real $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferior (sci) se for semicontínua inferiormente em cada ponto de A . Analogamente, dizemos que f é semicontínua superior (scs) se for semicontínua superiormente em cada ponto de A .

Teorema 4.19. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função sci se e somente se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponha f sci. Se $x_0 \in f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$, então $f(x_0) > \alpha$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) - \varepsilon > \alpha$. Como f é sci, segue da proposição 4.2 que existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Logo

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon > \alpha \Rightarrow f(x) \in] \alpha, +\infty[.$$

o que implica que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$.

Recíprocamente, se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, considere $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$ e $I =] \alpha, +\infty[$. Por hipótese $f^{-1}(I)$ é conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(I)$. Portanto,

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \in I \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

■

Corolário 4.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função scs se e somente se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Observação 4.7. O resultado a seguir generaliza o Corolário 4.1.

Teorema 4.20. seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função sci e $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto. então existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = \min f(K)$.

Demonstração. A demonstração será feita em duas etapas:

Etapa 1: Provemos que $\inf f(K) > -\infty$.

Como f é sci, para todo $x \in K$ existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\|y - x\| < \delta_x \Rightarrow f(y) > f(x) - 1.$$

É claro que $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in K}$ é cobertura aberta de K . Portanto existem $x_1, \dots, x_k \in$

K tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k B_{\delta_{x_j}}(x_j).$$

Seja $m = \min\{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$. Se $y \in K$, então $\|y - x_j\| < \delta_{x_j}$, para algum j e $f(y) > f(x_j) - 1 \geq m - 1$.

Etapa 2: Provemos que existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in K$. Seja $l = \inf f(K)$, (onde $l \in \mathbb{R}$) e suponha que $l \notin f(K)$. Então $l < f(x)$, $\forall x \in K$.

Para cada $x \in K$, considere $l_x \in \mathbb{R}$ tal que $l < l_x < f(x)$ e defina $I_x =]l_x, +\infty[$. Então $\{f^{-1}(I_x)\}_{x \in K}$ é cobertura aberta de K . Como K é compacto, existem $x_1, \dots, x_k$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(I_{x_j})$$

Seja $\bar{l} = \min\{l_{x_1}, \dots, l_{x_k}\}$. Então $\bar{l} > l$ e se $x \in K$, então $f(x) \in I_{x_j}$ para algum $1 \leq j \leq k$, o que implica $f(x) > l_{x_j} \geq \bar{l} > l$. Portanto

$$f(x) \geq \bar{l} > l, \quad \forall x \in K \Rightarrow \inf f(K) \geq \bar{l} > l$$

e temos uma contradição. ■

Corolário 4.7. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função scs e $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto. Então existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = \max f(K)$.

4.3 Funções Diferenciáveis

Derivadas Direcionais

Definição 4.23. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e u um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f possui derivada direcional em x_0 na direção u se existe o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda},$$

denominado derivada direcional de f (em x_0 na direção u) e denotada por:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0).$$

No caso em que $u = e_i$ é o i -ésimo vetor da base canônica, denotamos a derivada direcional na direção de e_i por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

que denominamos derivada parcial de f em x_0 em relação a x_i .

Definição 4.24. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Gateaux derivável em x_0 se possui derivadas direcionais em x_0 em todas as direções u .

Funções diferenciáveis: o caso escalar

Nas propriedades a seguir consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\|\cdot\|$ a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Definição 4.25. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existem funções $L, \varepsilon_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon_{x_0}(h), \quad (11)$$

Com L linear e ε_{x_0} satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0. \quad (12)$$

Se $\varepsilon_{x_0}(h)$ satisfaz (12), dizemos que ε_{x_0} é função $o(\|h\|)$. Para simplificar a notação, escreveremos simplesmente $\varepsilon(h)$, deixando de explicitar a dependência de ε em x_0 .

Se f é função diferenciável em x_0 , então a transformação linear L é denominada diferencial de f em x_0 e denotamos $f'(x_0)$.

Exemplo 4.1. Consideremos $f(x, y) = x/y$, $y \neq 0$. Então podemos escrever

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{y_0^2}(y_0 h_1 - x_0 h_2) + \frac{h_2(x_0 h_2 - y_0 h_1)}{y_0^2(y_0 + h_2)}.$$

Como $L(h) = (1/y_0^2)(y_0 h_1 - x_0 h_2)$ é linear em h e a função $\varepsilon(h) = h_2(x_0 h_2 - y_0 h_1)/y_0^2(y_0 + h_2)$ satisfaz

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{y_0^2(y_0 + h_2)} \|h\| \rightarrow 0 \quad \text{se } h \rightarrow 0,$$

temos que f é diferenciável em (x_0, y_0) e

$$f'(x_0, y_0)h = \frac{1}{y_0}(y_0 h_1 - x_0 h_2).$$

Lema 4.7. Se f é função diferenciável em $x_0 \in \Omega$ e L_1 e L_2 são diferenciais de f , então $L_1 = L_2$.

Demonstração. Suponhamos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_1(h) + \varepsilon_1(h) \quad (13)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_2(h) + \varepsilon_2(h) \quad (14)$$

L_1 e L_2 lineares e ε_1 e ε_2 funções $o(\|h\|)$.

Então, subtraindo a primeira identidade (13) da segunda (14), temos

$$L_1(h) - L_2(h) = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h).$$

Considerando $h = \lambda e_i$, onde $\lambda > 0$, temos

$$|L_1(e_i) - L_2(e_i)| \leq \frac{|\varepsilon_1(\lambda e_i)|}{\lambda} + \frac{|\varepsilon_2(\lambda e_i)|}{\lambda}.$$

Fazendo λ tender a zero, concluímos que $L_1(e_i) = L_2(e_i)$ para $i = 1, \dots, n$.

Portanto $L_1 \equiv L_2$. ■

Proposição 4.10. Se f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$, então f é contínua em x_0

Demonstração. Segue da definição que $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon(h)$, onde $\varepsilon(h)$ é $o(\|h\|)$. Portanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\|h\| < \delta_1$, então

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} < 1.$$

Como L é linear, segue da proposição 2.1 que existe $\alpha \geq 0$ tal que $|L(h)| \leq \alpha\|h\|$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon/(1 + \alpha)\}$. Então se $x \in \Omega$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (1 + \alpha)\|x - x_0\| < \varepsilon.$$

■

O vetor gradiente

Embora a existência das derivadas parciais de uma dada função não implique na sua diferenciabilidade, a diferencial quando existe é dada pelas derivadas parciais, como se pode ver a seguir.

Definição 4.26. Se $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é função linear, então existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $L(h) = \langle b, h \rangle$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e

$b_i = L(e_i)$. Então,

$$L(h) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i b_i = \langle b : h \rangle.$$

Dizemos que b é a representação matricial de L relativamente à base canônica.

Definição 4.27. Seja $L = f'(x_0)$ a diferencial de uma função f . Então $L(h) = \langle b : h \rangle$ para algum $b \in \mathbb{R}^n$ e para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Considerando $h = \lambda e_i$, temos da definição 3.3

$$\frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda} = L(e_i) + \frac{\varepsilon(\lambda e_i)}{\lambda}.$$

Fazendo λ tender a zero, concluímos que

$$L(e_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Notação 4.1. O vetor de $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

é denominado vetor gradiente de f em x_0 e é tal que se f é função diferenciável em x_0 , então

$$f'(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0) : h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 4.8. A existência do vetor gradiente não implica a diferenciabilidade de uma função, mas caso a função seja diferenciável então o vetor gradiente é a representação matricial de $f'(x_0)$ relativo à base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Funções diferenciáveis: o caso vetorial

Antes de definirmos a diferencial de uma função, relembremos alguns fatos básicos de álgebra linear.

Observação 4.9. Se $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, fixadas as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, existe uma matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ tal que

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que A é a matriz associada à transformação L

Observação 4.10. Se $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $L_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ são duas transformações lineares, então podemos definir $L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e

$$[L_2 \circ L_1] = [L_2][L_1].$$

Definição 4.28. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existem funções $L, \varepsilon_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon_{x_0}(h), \quad (15)$$

Com L linear e ε_{x_0} função $o(\|h\|)$, isto é, satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_{x_0}(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (16)$$

Notação 4.2. Para simplificar a dependência de ε em x_0 usaremos $\varepsilon(h)$.

Lema 4.8. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, f = (f_1, \dots, f_m)$ é diferenciável em x_0 se e somente se cada uma de suas componentes $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0 .

Demonstração. Se cada f_i é diferenciável em x_0 , então existem funções L_i e ε_i satisfazendo (11) tais que L_i é linear e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_i(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sejam $L = (L_1, \dots, L_m)$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. Então é claro que $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon(h)$ e segue do Teorema 4.5 que

$$\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \leq C \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = C \sum_{i=1}^m \frac{|\varepsilon_i(h)|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{se } h \rightarrow 0.$$

Reciprocamente, se f é diferenciável em x_0 , então existem funções $L = (L_1, \dots, L_m)$ linear e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ satisfazendo (15) e (16). Como cada L_i é linear e

$$\frac{|\varepsilon_i(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|\varepsilon_i\|_1}{\|h\|},$$

e temos o resultado. ■

A matriz jacobiana

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$, então sua diferencial $f'(x_0)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A matriz associada a $f'(x_0)$ relativamente às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é dada por

$$[f'(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

As linhas de $[f'(x_0)]$ são formadas pelos gradientes de cada f_i em x_0 . No caso em que $m = n$ a matriz $[f'(x_0)]$ é denominada matriz jacobiana de f em x_0 . O seu determinante é denominado Jacobiano de f em x_0 e o seu traço é denominado Divergente de f em x_0 , que denotamos respectivamente por

$$J_f(x_0) = \det[f'(x_0)] \quad \text{e} \quad \operatorname{div} f(x_0) = \operatorname{tr}[f'(x_0)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0).$$

Observação 4.11. Se $J_f(x_0) \neq 0$, então a matriz $[f'(x_0)]$ é invertível.

A regra da cadeia

Teorema 4.21. (Regra da Cadeia) Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e A subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Suponha $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ duas funções tais que $f(\Omega) \subset A$. Se f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0).$$

Em particular

$$[(g \circ f)'(x_0)] = [g'(y_0)][f'(x_0)].$$

Demonstração. Sejam $L = f'(x_0)$ e $G = g'(y_0)$. Então

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + L(h) + \varepsilon_f(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\ g(y_0 + k) &= g(y_0) + G(k) + \varepsilon_g(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

onde ε_f e ε_g satisfazem (16). Portanto, podemos escrever

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + G(L(h)) + \varepsilon(h),$$

onde $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é definida por $\varepsilon = G \circ \varepsilon_f + \varepsilon_g \circ (L + \varepsilon_f)$. Além disso

$$\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{G(\varepsilon_f(h))}{\|h\|} + \frac{\|\varepsilon_g(L(h) + \varepsilon_f(h))\|}{\|h\|}.$$

Pela proposição 4.8, podemos escrever

$$\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \leq \alpha \frac{\|\varepsilon_f(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\varepsilon_g(k)\|}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|},$$

onde $k = L(h) + \varepsilon_f(h)$.

Como $\|k\| \leq \alpha\|h\| + \|\varepsilon_f(h)\|$, temos

$$\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \leq \alpha \frac{\|\varepsilon_f(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\varepsilon_g(k)\|}{\|k\|} \left(\alpha + \frac{\|\varepsilon_f(h)\|}{\|h\|} \right)$$

e concluímos o resultado visto que $\|k\| \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. ■

O teorema do valor médio

Teorema 4.22. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e x_1 e x_2 dois pontos de $\mathbb{R}^n$. Então existe $\bar{x}$ sobre o segmento de reta que liga x_1 a x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle \nabla f(\bar{x}) : x_2 - x_1 \rangle.$$

Demonstração. Consideremos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a parametrização $\gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ da reta que passa por x_1 e x_2 . É fácil ver que γ é função diferenciável e $\gamma'(t_0) = x_2 - x_1$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real definida pela composição $g(t) = f(\gamma(t))$. Pelo teorema 4.21 (Regra da cadeia), g é função diferenciável e $g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) : x_2 - x_1 \rangle$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais de variável real, $g(1) - g(0) = g'(t_0)$ para algum $t_0 \in]0, 1[$. Assim denotado por $\bar{x} = \gamma(t_0)$, segue o resultado. ■

Observação 4.12. O Teorema do Valor Médio não vale para funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se $m > 1$. Em particular, não vale para curvas em $\mathbb{R}^m$.

Derivadas parciais (o caso vetorial)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em x_0 . Então a diferencial $f'(x_0)$ fica determinada pela matriz $[f'(x_0)]$. Se $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ e $x = (y, z) = (y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l)$, então podemos escrever

$$[f'(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_l}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_l}(x_0) \end{bmatrix}$$

Se considerarmos os blocos B e C definidos respectivamente por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_l}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_l}(x_0) \end{bmatrix}$$

então para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, temos

$$f'(x_0)h = Bh_1 + Ch_2.$$

As transformações lineares associadas às submatrizes B e C são denominadas derivadas parciais de f em x_0 com relação respectivamente a y e z e denotamos

$$B = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \right], \quad C = \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right].$$

Com esta notação podemos escrever

$$f'(x_0)h = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)h_2.$$

Com a notação das derivadas parciais, a Regra da Cadeia toma a seguinte forma

Teorema 4.23. Seja $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em (x_0, y_0) . Sejam $\varphi : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\psi : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^l$ funções diferenciáveis tais que $\varphi(u_0) = x_0$ e $\psi(v_0) = y_0$. Então $g : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $g(u, v) = f(\varphi(u), \psi(v))$ é diferenciável em (u_0, v_0) e

$$[g'(u_0, v_0)] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial v}(v_0) \right].$$

Condições suficientes para a diferenciabilidade

Teorema 4.24. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cuja as derivadas parciais existem em Ω e são contínuas em um ponto $x_0 \in \Omega$. Então f é diferenciável em x_0 .

Demonstração. Por questão de simplicidade, a demonstração será feita para o caso $n = 2$, o caso geral segue por argumento análogo.

Seja $h = (h_1, h_2) = h_1e_1 + h_2e_2$, tal que $x_0 + h \in \Omega$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0 + h_1e_1) + f(x_0 + h_1e_1 + h_2e_2) - f(x_0).$$

Como possui derivadas parciais em Ω , a função $g(t) = f(x_0 + h_1e_1 + th_2e_2)$ é derivável em $]0, 1[$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\zeta_2 \in]0, 1[$ tal que $g_2(1) - g_2(0) = g'_2(\zeta_2)$, isto é

$$f(x_0 + h_1e_1 + h_2e_2) - f(x_0 + h_1e_1) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + h_1e_1 + \zeta_2 h_2e_2)h_2. \quad (17)$$

Analogamente, a função $g_1(t) = f(x_0 + th_1e_1)$ é derivável em $]0, 1[$. Logo, existe

$\zeta_1 \in]0, 1[$ tal que

$$f(x_0 + h_1 e_1) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + \zeta_1 h_1 e_1) h_1.$$

Portanto,

$$f(x_0 + h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + \zeta_1 h_1 e_1) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + h_1 e_1 + \zeta_2 h_2 e_2) h_2.$$

Denotado por

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + \zeta_1 h_1 e_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right) h_1 \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + h_1 e_1 + \zeta_2 h_2 e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \right) h_2, \end{aligned} \quad (18)$$

temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0) : h \rangle + \varepsilon(h).$$

Para concluir que f é diferenciável, basta mostrar que $\varepsilon(h)$ é de ordem $o(\|h\|)$.

Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B_\delta(x_0)$, então

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Portanto, se $\|h\| < \delta$, segue de (18)

$$|\varepsilon(h)| < \varepsilon|h_1| + \varepsilon|h_2| = \varepsilon\|h\|_1$$

e conseqüentemente,

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|_1} < \varepsilon$$

e o resultado segue da equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$. ■

Observação 4.13. Vale observar que o Teorema 4.24 dá somente condição suficiente para a diferenciabilidade. De fato, uma função pode ser diferenciável no ponto x_0 , mesmo tendo suas derivadas parciais descontínuas em x_0 .

Funções diferenciáveis: o caso geral

Sejam V e W espaços vetoriais sobre os quais estejam definidas as respectivas normas $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_W$

Definição 4.29. Uma função $f : V \rightarrow W$ é dita diferenciável em $x_0 \in V$ se

existem funções $L, \varepsilon_{x_0} : V \rightarrow W$ tais que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon_{x_0}(h), \quad (19)$$

com L linear contínua e ε_{x_0} função $o(\|h\|_V)$, isto é satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_{x_0}(h)_W\|}{\|h\|_V} = 0. \quad (20)$$

Notação 4.3. Como antes, é usual denotar $L = f'(x_0)$ e escrever $\varepsilon(h)$ deixando de explicitar sua dependência em x_0

Proposição 4.11. Se $f : V \rightarrow W$ é uma função linear e contínua então f é diferenciável em todo ponto $x_0 \in V$ e $f'(x_0) = f$.

Observação 4.14. A título de exemplo, seja $W = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{M}_{n \times m}$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n munido na norma $\|\cdot\|_2$ e consideremos as funções traço e determinantes definidas em V , isto é

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{R}, & f(A) &= \text{tr}(A), \\ g : V &\rightarrow \mathbb{R}, & g(A) &= \det(A). \end{aligned}$$

Como f é linear e contínua (pois a dimensão de V é finita), segue da proposição 3.2 que f é diferenciável em toda $A \in V$ e $f'(A)H = f(H)$, para todo $H \in V$. Para a função determinante temos:

Proposição 4.12. se $\det(A) \neq 0$, então g é diferenciável em A e

$$g'(A)H = \text{tr}(A^{-1}H) \det(A). \quad (21)$$

Demonstração. Por simplicidade, faremos a demonstração para o caso $n = 3$. O caso geral, que depende de propriedades do determinante de ordem n , foge no conteúdo apresentado.

A prova será feita em duas etapas.

Etapas 1: Se $A = I$ e $H \in V$, um calculo direto nos dá

$$g(I + H) = 1 + \text{tr}(H) + P_2(H)$$

onde $P_3(H) = \det(H)$ e

$$P_2(H) = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,3} \\ h_{3,1} & h_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix},$$

onde h_{ij} denotam os coeficientes de H . Pela desigualdade de Young, temos,

$$|P_2(H)| \leq \|H\|_2^2 \quad \text{e} \quad |P_3(H)| \leq \frac{2}{3} \|H\|_3^3,$$

onde $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_3$ são normas definidas para $p = 2$ e $p = 3$ respectivamente. Como as normas em V são equivalentes, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|H\|_3 \leq \alpha \|H\|_2 \Rightarrow |P_3(H)| \leq \alpha^3 \|H\|_2^3.$$

Denotando-se $\varepsilon_I(H) = P_2(H) + P_3(H)$, segue que

$$\frac{|\varepsilon_I(H)|}{\|H\|_2} \leq \|H\|_2 + \alpha^3 \|H\|_2^2,$$

de onde se conclui que $\varepsilon_I(H)$ é $o(\|H\|_2)$ e consequentemente, g é diferenciável em I , com a diferencial dada pela função linear traço, isto é, $g'(I) = f$.

Etapla 2: Sejam $A, H \in V$, com $\det(A) \neq 0$, segue da Etapa 1,

$$\begin{aligned} g(A + H) &= g(A(I + A^{-1}H)) = g(A)g(I + A^{-1}H) \\ &= g(A)(1 + \text{tr}(A^{-1}H) + P_2(A^{-1}H) + P_3(A^{-1}H)) \\ &= g(A) + \det(A) \text{tr}(A^{-1}H) + \det(A)P_2(A^{-1}H) + \det(H) \end{aligned}$$

Denotando

$$\varepsilon_A(H) = \det(A)P_2(A^{-1}H) + \det(H),$$

segue da etapa anterior que

$$|P_2(A^{-1}H)| \leq \|A^{-1}H\|_2^2 \leq \|A^{-1}\|_2^2 \|H\|_2^2,$$

de modo que

$$|\varepsilon_A(H)| \leq |\det(A)| \|A^{-1}\|_2^2 \|H\|_2^2 + \alpha^3 \|H\|_2^3.$$

Logo $\varepsilon_A(H)$ é $o(\|H\|_2)$ e como $H \mapsto \det(A) \text{tr}(A^{-1}H)$ é linear, concluímos a prova.

■

A diferencial: funções de classe C^1

Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em cada ponto x do seu domínio, então podemos considerar a função linear $f'(x)$, diferencial de f em x .

Temos a aplicação

$$\begin{aligned} f' : \Omega &\rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \\ x &\mapsto f'(x), \end{aligned}$$

onde $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota o espaço de todas as aplicação lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. f' é denominada a função diferencial de f .

Definição 4.30. Dizemos que uma função diferenciável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 (ou continuamente diferenciável) em $x_0 \in \Omega$ se f' é função contínua em x_0 . Dizemos que f é de classe C^1 em Ω se f' é função contínua em todos os pontos de Ω .

Observação 4.15. Como foi dito na Observação 4.13, uma função f pode possuir derivadas parciais e não ser diferenciável. De fato, pode nem mesmo ser contínua. Entretanto, se f é uma função convexa e possui derivadas parciais, então necessariamente ela é de classe C^1 .

Teorema 4.25. Seja Ω um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa que possui derivadas parciais em todos os pontos de Ω . Então f é de classe C^1 .

Demonstração. Como f é convexa, então

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x) \quad (22)$$

para todo $x, y \in \Omega$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja K um subconjunto compacto de Ω . Então existe $\delta > 0$ tal que $x + se_i \in \Omega$ para todo $x \in K$, $|s| < \delta$, e $i = 1, \dots, n$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, para $y = x + se_i$ obtemos de (22)

$$\frac{f(x + \lambda se_i) - f(x)}{\lambda} \leq f(x + se_i) - f(x).$$

Passando ao limite nesta desigualdade quando $\lambda \rightarrow 0^+$ temos que

$$s \nabla f(x) \cdot e_i \leq f(x + se_i) - f(x).$$

Como esta desigualdade também é válida substituindo s por $-s$, segue que se $s \in]0, \delta[$, então

$$\frac{f(x) - f(x - se_i)}{s} \leq \nabla f(x) \cdot e_i \leq \frac{f(x + se_i) - f(x)}{s} \quad (23)$$

para todo $x \in K$ e $i = 1, \dots, n$.

Se f não é C^1 , então existe $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \Omega$ e uma sequência $\{x_k\}_{k \geq 1}$ em Ω tal que

$$x_k \rightarrow x_0 \text{ e}$$

$$|\nabla f(x_k) - \nabla f(x_0)| > \varepsilon, \quad \forall k \quad (24)$$

Seja $K = \{x_0, x_1, \dots\}$. Se $|s| < \delta/2$ e k é suficientemente grande, então $x_k \pm se_i \in \Omega$ e como f é contínua em Ω , segue de (23) que a sequência $\{\nabla f(x_k) \cdot e_i\}$ é limitada, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_k) \rightarrow u$. Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$ em (23), temos, para $s \in]0, \delta/2[$ e $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - se_i)}{s} \leq u \cdot e_i \leq \frac{f(x_0 + se_i) - f(x_0)}{s}. \quad (25)$$

Fazendo $s \rightarrow 0^+$ em (25) obtemos $\nabla f(x_0) = u$, o que está em contradição com (24). Portanto, $x \mapsto \nabla f(x)$ é contínua em Ω . ■

A projeção ortogonal

Teorema 4.26. Seja C um conjunto convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$ e considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \langle x - \frac{1}{2}P_C(x) : P_C(x) \rangle, \quad (26)$$

onde $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção ortogonal sobre C . Então f é função de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $f' = P_C$.

Demonstração. Sejam x_0 e h em $\mathbb{R}^n$. Então podemos escrever

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle P_C(x_0) : h \rangle + \varepsilon(h),$$

onde

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{2}\|P_C(x_0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|P_C(x_0 + h)\|_2^2 + \langle x_0 + h : P_C(x_0 + h) - P_C(x_0) \rangle.$$

Como $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ é diferenciável com $g'(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos o Teorema do Valor Médio,

$$\frac{1}{2}\|P_C(x_0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|P_C(x_0 + h)\|_2^2 = \langle (1-\theta)P_C(x_0) + \theta P_C(x_0 + h) : P_C(x_0) - P_C(x_0 + h) \rangle,$$

para algum $\theta \in]0, 1[$. Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = & \langle x_0 - P_C(x_0) : P_C(x_0 + h) - P_C(x_0) \rangle \\ & - \theta \|P_C(x_0 + h) - P_C(x_0)\|_2^2 \\ & + \langle h : P_C(x_0 + h) - P_C(x_0) \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Como as duas primeiras parcelas do lado direito de (27) são negativas, temos

$$\varepsilon(h) \leq \|h\|_2 \|P_C(x_0 + h) - P_C(x_0)\|_2 \leq \|h\|_2^2.$$

Por outro lado, considerando $\nu = 1 - \theta$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) &= \langle \nu P_C(x_0) + (1 - \nu) P_C(x_0 + h) : P_C(x_0) - P_C(x_0 + h) \rangle \\ &\quad + \langle x_0 + h : P_C(x_0 + h) - P_C(x_0) \rangle \\ &= \langle x_0 + h - P_C(x_0 + h) : P_C(x_0 + h) - P_C(x_0) \rangle \\ &\quad + \nu \|P_C(x_0) - P_C(x_0 + h)\|_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $0 \leq \varepsilon(h) \leq \|h\|_2^2$ e temos a conclusão. ■

Observação 4.16. Embora estejamos nos referindo às projeções sobre convexos fechados de $\mathbb{R}^n$, é imediato verificar que a demonstração acima é válida para qualquer espaço de Hilbert V , isto é, qualquer espaço de Banach cuja norma seja proveniente de um produto interno.

4.4 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Definição 4.31. Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície se, para cada $p \in S$, existirem um aberto U de $\mathbb{R}^2$, um aberto V de $\mathbb{R}^3$ contendo p e um homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow W = S \cap V$. A superfície é dita regular se:

- a) S é Diferenciável de Classe C^∞ (suave)
- b) A matriz jacobiana $J_\sigma(q)$ tem posto 2.

Como

$$J_\sigma(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a matriz ter posto 2 implica que, para cada $q \in U$, os vetores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) &:= \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) &:= \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \right) \end{aligned}$$

são linearmente independentes, ou de maneira equivalente, para cada $q \in U$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \neq (0, 0, 0).$$

Proposição 4.13. Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então o gráfico $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$, de f é uma superfície.

Demonstração. Basta considerarmos

$$\begin{aligned}\sigma : U &\longrightarrow G_f \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y))\end{aligned}$$

Trata-se de uma parametrização global de G_f , note que:

i) é bijetiva e suave

ii) $\sigma^{-1} : G_f \longrightarrow U$ é contínua pois é a restrição de G_f da projeção de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$$\text{iii) } J_\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ tem posto 2.}$$

■

Observação 4.17. Analogamente, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(y, z)\}$ são superfícies.

Exemplo 4.2. O parabolóide elíptico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \right\}$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ é uma superfície pois $S = G_f$ para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Teorema 4.27. Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.

Demonstração. seja $p \in S = f^{-1}(a) \subseteq U$. Por hipótese,

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$$

Suponhamos então que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (a prova é análoga para os outros 2 casos). Seja $\sigma : \bar{U} \longrightarrow W \subseteq S$ de uma região aberta W de S contendo o ponto p . Considere a função

$$\begin{aligned}F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, f(x, y, z))\end{aligned}$$

A matriz jacobiana de F em p ,

$$J_F(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix},$$

é invertível, uma vez que $|J_F(p)| = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos V e $\bar{V}$ de $\mathbb{R}^3$, contendo p e $F(p)$ tais que $F : V \rightarrow \bar{V}$ é bijetiva e $F^{-1} : \bar{V} \rightarrow V$ é suave. Suponhamos que $F^{-1} = (f_1, f_2, f_3)$. É claro que $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ e $f_3 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Compondo f_3 com a função $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\lambda(x, y) = (x, y, a)$, obtemos a função suave

$$\begin{aligned} h = f_3 \circ \lambda : \lambda^{-1}(\bar{V}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f_3(x, y, a) \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.1, G_h é uma superfície, que tem como parametrização global

$$\begin{aligned} \sigma : \lambda^{-1}(\bar{V}) &\longrightarrow G_h \\ (x, y) &\mapsto (x, y, h(x, y)) = (x, y, f_3(x, y, a)). \end{aligned}$$

Disso temos

- $\bar{U} = \lambda^{-1}(\bar{V})$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$
- $W = G_h$ é um aberto de S contendo p , pois $G_h = S \cap V$:

($\Rightarrow$) Seja $(x, y, z) \in G_h$. Então $z = f_3(x, y, a)$, logo $(x, y, z) = (x, y, f_3(x, y, a)) = F^{-1}(x, y, a) \in V$. Por outro lado,

$$(x, y, a) = FF^{-1}(x, y, a) = F(x, y, f_3(x, y, a)) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

pois $a = f(x, y, z)$, logo $(x, y, z) \in f^{-1}(a) = S$.

($\Leftarrow$) Seja $(x, y, z) \in S \cap V$. Então

$$(x, y, z) = F^{-1}F(x, y, z) = F^{-1}(x, y, f(x, y, z)) = F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f_3(x, y, a)),$$

Como $z = (f_3(x, y, a) = h(x, y))$. Logo $(x, y, z) \in G_h$. ■

Proposição 4.14. A mudança de coordenadas $\Phi = \bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma : V \rightarrow \bar{V}$ é um homeomorfismo suave entre abertos de $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Uma vez que W e $\bar{W}$ são abertos em S , $W \cap \bar{W}$ é um aberto em S e também em W . Logo V é um aberto em U o que, como U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Analogamente $\bar{V}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$. Então Φ é homeomorfismo por ser

a composição das aplicações $\sigma : V \rightarrow W \cap \bar{W}$ e $\bar{\sigma}^{-1} : W \cap \bar{W} \rightarrow \bar{V}$ que são homeomorfismos.

Agora provemos que se σ e $\bar{\sigma}$ suave, para cada $q \in V$ existe um aberto U_q tal que a restrição de $\bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma$ a U_q é suave.

Seja então $q \in V$, com $\sigma(q) = p$ e $\bar{\sigma}(r) = p$. Uma vez que $\bar{\sigma}$ é uma parametrização, há uma submatriz 2×2 de $J_{\bar{\sigma}}(r)$ com determinante não nulo. Sem perda de generalidade podemos supor que se trata da submatriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial x}(r) & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial y}(r) \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial y}(r) & \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial x}(r) \end{bmatrix}$$

onde $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$. Considerando $\Pi \circ \bar{\sigma}$, onde $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Pi(x, y, z) = (x, y)$, e usando o Teorema da Função Inversão, podemos concluir que existe um aberto V_r de $\mathbb{R}^2$ tal que a restrição de $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ a V_r é injetiva. Seja $\bar{\sigma}(V_r) = V_1$.

Defina $F : V_r \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (\bar{\sigma}_1(x, y), \bar{\sigma}_2(x, y), \bar{\sigma}_3(x, y) + z)$. Então $J_F(r, 0)$ tem determinante não nulo e F é localmente invertível em $(r, 0)$, isto é existem abertos em $\mathbb{R}^3$, $W_{(r,0)}$ e W_p , tais que $F : W_{(r,0)} \rightarrow W_p$ é invertível e F^{-1} é suave. Como $\sigma : U \rightarrow U'$ é contínua, existe um aberto U_q de $\mathbb{R}^2$ contido em $\sigma^{-1}(U' \cap V_1)$ tal que $\sigma(U_q) \subseteq W_q$. Observe que

$$(F^{-1} \circ \sigma)|_{U_q} = ((\bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}, 0),$$

mostra que, sendo $F^{-1} \circ \sigma$ uma aplicação suave, a aplicação $(\bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma)|_{U_q}$ é suave: Seja $(x, y) \in U_q$ e suponhamos que $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x_1, y_1, z_1)$. Como $\sigma(x, y) \in U' \cap V_1$, existe $(x', y') \in V_r$ tal que $\bar{\sigma}(x', y') = \sigma(x, y)$. De $F(x_1, y_1, z_1) = \sigma(x, y) = \bar{\sigma}(x', y')$ decorre que $(x_1, y_1, z_1) = (x, y, 0)$, pela injetividade de $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)|_{V_r}$. Portanto $(F^{-1} \circ \sigma)(x, y) = (x', y', 0) = ((\bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma)(x, y), 0)$. ■

De maneira análoga tem que $\Phi^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma$ é suave.

Proposição 4.15. Sejam U e $\bar{U}$ abertos de $\mathbb{R}^2$ e $\sigma : U \rightarrow V \subseteq S$ uma parametrização (regular e suave) de S e seja $\Phi : \bar{U} \rightarrow U$ um homeomorfismo suave com inversa Φ^{-1} suave. Então $\bar{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \bar{U} \rightarrow V \subseteq S$ é uma parametrização de S .

Demonstração. A função $\bar{\sigma}$ pois é a composta de funções suaves.

Para provar a regularidade de $\bar{\sigma}$, seja $(u, v) = \Phi(\bar{u}, \bar{v})$. Como $\bar{\sigma} = \sigma \circ \Phi$, então

$$J_{\bar{\sigma}}(\bar{u}, \bar{v}) = J_{\sigma}(u, v) \cdot J_{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Isso significa que

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v) \\ &= \det(J_\Phi(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v). \end{aligned}$$

Como Φ é um homeomorfismo, $J_{\Phi^{-1}} = (J_\Phi)^{-1}$, em particular, a matriz J_Φ é invertível ou seja, o seu determinante é diferente de zero, logo

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \neq (0, 0, 0)$$

■

Mais adiante necessitaremos de uma noção de função suave entre superfícies que nos permitirá o desenvolvimento do calculo diferencial sobre uma superfície regular.

Definição 4.32. Sejam S_1 e S_2 superfícies e W um aberto de S_1 . Uma função

$$f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$$

é dita suave se, para quaisquer parametrizações $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$ tais que $W_1 \cap f^{-1}(W_2) \neq \emptyset$, $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Observação 4.18. Essa definição na prática é inútil, a preposição a seguir é mais útil no geral.

Proposição 4.16. Uma aplicação $f : W \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ é suave se, para cada $p \in W$, existem parametrizações $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1$ e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2$, de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p \in W_1$, $f(p) \in W_2$ e $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Demonstração. Sejam $\bar{\sigma}_1 : \bar{U}_1 \rightarrow \bar{W}_1$ e $\bar{\sigma}_2 : \bar{U}_2 \rightarrow \bar{W}_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $\bar{W}_1 \cap f^{-1}(\bar{W}_2) \neq \emptyset$, pretendemos provar que

$$\bar{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1 : \bar{\sigma}_1^{-1}(\bar{W}_1 \cap f^{-1}(\bar{W}_2)) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é suave. Seja $q \in \bar{\sigma}_1^{-1}(\bar{W}_1 \cap f^{-1}(\bar{W}_2))$, com $\bar{\sigma}_1(q) = p$. Então por hipótese, existem parametrizações σ_1 e σ_2 em p e $f(p)$, respectivamente, tais que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ é suave.

Note que

$$\bar{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_1 = (\bar{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_1)$$

é suave pois é uma composição de aplicações suaves, e também é a restrição de $\bar{\sigma}_2^{-1} \circ \bar{\sigma}_1$ a um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo q . Como q é um ponto qualquer, segue-se que $\bar{\sigma}_2^{-1} \circ f \bar{\sigma}_1$ é suave. ■

Observação 4.19. Uma aplicação entre superfícies, $f : S_1 \rightarrow S_2$, suave, bijetiva, cuja a inversa também é suave, chama-se difeomorfismo. Note que se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo e σ_1 uma parametrização de S_1 então $f \circ \sigma_1$ é uma parametrização de S_2 .

Tangentes, Normais e Orientabilidade

Definição 4.33. Se a imagem de $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ está contida na imagem de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície S , existe uma aplicação

$$\begin{aligned} (a, b) &\rightarrow U \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)). \quad (28)$$

onde u e v são necessariamente suaves.

A equação (28) define uma curva com imagem em S

Definição 4.34. Um vetor tangente a S num ponto $p \in S$ é um vetor que é tangente a alguma curva em S que passa por p . Assim, v é tangente a S se em p existir uma curva γ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, para algum t_0 no domínio de γ .

Proposição 4.17. O conjunto dos vetores tangentes a S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

Demonstração. Seja v um vetor tangente a S em p e seja $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ uma parametrização de S contendo o ponto p . Então existe uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição

$$(a, b) \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W.$$

Denotando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\bar{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} J_{\gamma}(t_0) &= J_{\sigma}(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \\ \gamma'_3(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(t_0) \\ \bar{\gamma}_2(t_0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ v &= \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja

$$v = c_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

e definamos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto q + t(c_1, c_2). \end{aligned}$$

Trata-se de uma função suave. Como é contínua em $t = 0$ e $\bar{\gamma}(0) = q \in U$, sendo U um aberto de $\mathbb{R}^2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{\gamma}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U$. Portanto, se considera a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, podemos considerar a composição com a parametrização σ de S e obter uma curva $\gamma = \sigma \circ \bar{\gamma}$ em S que passa por p (pois $\gamma(0) = p$):

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\bar{\gamma}} U \xrightarrow{\sigma} W \subseteq S.$$

Como $\gamma(0) = \sigma(\bar{\gamma}(0)) = \sigma(q) = p$, $\bar{\gamma}_1(0) = c_1$ e $\bar{\gamma}_2(0) = c_2$, temos

$$\begin{aligned} J_{\gamma}(0) &= J_{\sigma}(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(0) \Leftrightarrow \\ \gamma'(0) &= c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \Leftrightarrow \\ \gamma'(0) &= v \end{aligned}$$

e, portanto, v é tangente a S em p . ■

A este espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, formado pelos vetores tangentes a S em p , chama-se Espaço Tangente de S em p . Como $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$ são linearmente independentes, o espaço tangente a S em p denotado por $T_p S$, tem dimensão 2. Temos assim um plano chamado Plano Tangente a S em P :

$$\Pi_p S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : x = p + \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \lambda_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\}$$

$\Pi_p S$ é completamente determinado por um vetor unitário perpendicular a ele, chamado de vetor normal a S em p . Da proposição 4.17 temos que é fácil ver, existem dois vetores nessas condições. Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização, o vetor

$$N_\sigma(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}$$

é chamado de vetor normal normal unitário. Mas ao contrário do plano tangente, este vetor não é totalmente independente da escolha da parametrização σ de S contendo p . Com efeito, seja $\bar{\sigma} : \bar{U} \rightarrow S$ outra parametrização de S tal que $\bar{\sigma}(\bar{q}) = p$. Da proposição 4.15 temos que

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q}) = \det(J_\Phi(\bar{q})) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right),$$

onde Φ denota a mudança de coordenadas $\sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ de $\bar{\sigma}$ para σ . Portanto

$$N_{\bar{\sigma}}(p) = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q})}{\left\| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q}) \right\|} = \pm \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|} = \pm N_\sigma(p),$$

onde o sinal é do determinante de $J_\Phi(\bar{q})$.

Notação 4.4. uma coleção de homeomorfismos $\sigma : U \rightarrow W$, onde $W = S \cap V$ e V um aberto de $\mathbb{R}^3$, é chamado de Atlas de S .

Definição 4.35. Uma superfície S é dita orientável se possuir atlas com a seguinte propriedade: se $\Phi = \sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ é a mudança de coordenada entre quaisquer duas parametrizações do atlas, então $\det J_\Phi(\bar{q}) > 0$ em qualquer ponto $\bar{q}$ do domínio Φ . Tal atlas é dito orientação de S . Se tal atlas não existir a superfície é dita não-orientável.

Portanto uma superfície orientável existe um atlas que permite a uma escolha canônica da normal unitária $N(p)$, em cada ponto p , obtida tomando a normal unitária de cada Parametrização desse atlas (a orientação de S), escolha essa que depende suavemente de p , portanto, existe $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, suave, tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \in (T_p S)^\perp$ para cada $p \in S$. A função N é chamada de campo de vetores normais unitários em S .

Proposição 4.18. Uma superfície S é orientável se e só se possui um campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.3. Seja $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma orientação de uma superfície S . Então $-N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ também é uma orientação de S . Assim, numa superfície orientável

existem pelo menos duas orientações distintas. Por exemplo, seja S o plano horizontal

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

Existem duas possíveis escolhas para N :

$$N(x, y, z) = (0, 0, 1) \quad \forall (x, y, z) \in \Pi,$$

e

$$N(x, y, z) = (0, 0, -1) \quad \forall (x, y, z) \in \Pi.$$

Exemplo 4.4. Um exemplo de superfície não-orientável é a Fita de Möbius que se obtém rodando um segmento de reta L em torno de seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência C , de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência C , L dá meia volta em torno de P .

Primeira forma fundamental

Definição 4.36. Seja $\gamma(t) = \sigma(x(t), y(t))$ uma curva numa superfície S , descrita por uma parametrização σ , o comprimento de γ desde $\gamma(t_0)$ até $\gamma(t_1)$ é dado por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Mas, pelo teorema da função composta,

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

denotando $(x(t), y(t))$ por q temos,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \left\langle x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle \\ &= x'(t)^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right\rangle + 2x'(t)y'(t) \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle + y'(t)^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle \end{aligned}$$

Denotando

$$\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle$$

por, respectivamente, $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$, (ou, abreviadamente, E , F e G), podemos escrever

$$s = \int_{t_0}^{t_1} (Ex'(t)^2 + 2Fx'(t)y'(t) + Gy'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

A matriz

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

é a matriz da chamada primeira forma fundamental do σ de S em $p = \sigma(q)$, ou seja, da forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

De fato, se

$$v = v_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + v_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \quad \text{e} \quad w = w_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + w_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

então

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= v_1 w_1 E(q) + v_1 w_2 F(q) + v_2 w_1 F(q) + v_2 w_2 G(q) \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

essa é a chamada primeira forma fundamental.

Definição 4.37. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se, para cada curva γ em S_1 , a curva $f \circ \gamma$ em S_2 tem comprimento igual ao de γ . Se existir uma isometria $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz que S_1 e S_2 são isométricas.

Teorema 4.28. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada σ_1 de um atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e de $f \circ \sigma_1$ são iguais.

Demonstração. Como o comprimento de uma curva em S pode ser calculado como a soma dos comprimentos dos arcos de curva em cada um é descrito por uma única parametrização do atlas de S . Suponha que S_1 e S_2 sejam descritos por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ uma parametrização global de S_1 e $\sigma_2 : U \rightarrow S_2$ o correspondente da parametrização de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente

" $\Leftarrow$ ": Se $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ e $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ define uma curva arbitrária em S_1 , o comprimento de γ de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, isto é, a integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

é evidentemente igual ao comprimento da curva $\sigma_2(u(t), v(t)) = f \circ \sigma_2(u(t), v(t)) = f \circ \gamma(t)$, de $f(\gamma(t_0))$ a $f(\gamma(t_1))$.

" $\Rightarrow$ ": Reciprocamente, se f é uma isometria então, qualquer que seja a curva $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ em S_1 de domínio $I = (\alpha, \beta)$, a curva $f \circ \gamma_1 = \sigma_2(u(t), v(t))$ tem o mesmo comprimento. Portanto, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Isto implica que

$$E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2 = E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2 \quad (29)$$

para qualquer $t \in I$. Fixemos $t_0 \in I$ e sejam $u_0 = u_0(t_0)$ e $v_0 = v_0(t_0)$. Então:

- é evidente que existe um sub-intervalo J de I contendo t_0 tal que, para cada $t \in J$, $(u_0 + t - t_0, v_0) \in U$. Logo $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_0 + t - t_0, v_0)$ define uma curva $\gamma_1 : J \rightarrow S_1$.
- Analogamente, podemos considerar a curva γ_2 definida por $\gamma_2(t) = \sigma_1(u_0, v_0 + t - t_0)$. Neste caso $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$ pelo que, por (29), $G_1 = G_2$.
- Finalmente, considerando a curva γ_3 dada por $\gamma_3(t) = (u_0 + t - t_0, v_0 + t - t_0)$, podemos concluir que $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, donde $F_1 = F_2$

■

Definição 4.38. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é dita conformal se é só se, para quaisquer curvas γ_1 e γ_2 em S_1 que se intersectam, o ângulo de interseção das curvas $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ em S_2 é igual ao ângulo de interseção de γ_1 e γ_2 .

Teorema 4.29. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é conformal se e só se, para cada parametrização σ_1 de um atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são proporcionais, ou seja, $E_2 = \lambda E_1$, $F_2 = \lambda F_1$ e $G_2 = \lambda G_1$ para alguma função suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Em termos gerais, a demonstração é análoga ao teorema anterior porém mais extensa e exigente no cálculo, por tais razões estará omitida aqui.

■

Definição 4.39. Seja $R \subseteq S$ uma região limitada contida numa parametrização $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$, a área $A(R)$ é dada por

$$A(R) = \int \int_{\sigma^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy$$

Como

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\|^2 = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\rangle^2 = EG - F^2$$

então

$$A(R) = \int \int_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Note que, por σ ser regular,

$$EG - F^2 > 0 \quad (30)$$

Definição 4.40. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é dito equiareal se aplica cada região de S_1 numa região de S_2 com área igual.

Teorema 4.30. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é dito equiareal se, e só se, para cada parametrização σ_1 dum atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e de $f \circ \sigma_1$ satisfazem

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Demonstração. Como a área de uma região em S pode ser calculada como a soma das áreas de sub-regiões em que cada sub-região é descrita por uma única parametrização do atlas de S , disso, suponha que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ uma parametrização global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ a parametrização correspondente de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada região R de S_1 ,

$$A(R) = \int \int_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} dx dy = A(R) = \int \int_{(f \circ \sigma_1)^{-1}(f(R))} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} dx dy,$$

ou seja,

$$A(R) = \int \int_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} dx dy = \int \int_{\sigma_1^{-1}(R)} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} dx dy$$

isto equivale dizer que

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2}$$

isto é,

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

pois, $E_1 G_1 - F_1^2, E_2 G_2 - F_2^2 > 0$ ■

Aplicação de Gauss e segunda forma fundamental

Definição 4.41. Para formalizarmos a ideia de aplicação de Gauss, dado uma parametrização $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ de uma superfície S , notemos que $N(p)$, em cada ponto p de W , é um ponto da esfera unitária

$$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}.$$

Então podemos considerar a aplicação $W \rightarrow S^2$ que a cada ponto $p = \sigma(u, v)$ faz corresponder o ponto $N(p)$ de S^2 .

No geral, esta aplicação pode ser definida para qualquer superfície orientável S , pois essas superfícies possuem uma normal unitária $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ bem definida em todo o ponto, dada localmente em cada mapa σ de orientação de S por

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

Chamamos Aplicação de Gauss à aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S &\rightarrow S^2 \\ p &\rightarrow N(p). \end{aligned}$$

Observação 4.20. Note que, N não é única, a Aplicação de Gauss está definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida, ou seja, do campo de vetores de N escolhido.

Proposição 4.19. Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma função suave. Para cada $p \in S_1$, a correspondência $\gamma'(t_0) \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$ define uma aplicação linear

$$f_{*p} : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

chamada de derivada (ou diferencial) de f no ponto p .

Demonstração. Sejam $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1 \subseteq S_1$ um mapa de uma região de W_1 de

S_1 contendo p , $\sigma_1(q) = p$, $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2 \subseteq S_2$ um mapa de S_2 contendo $f(p)$, $\sigma_2(r) = f(p)$, tais que $f(W_1) \subseteq W_2$. Consideremos ainda uma curva $\gamma : I \rightarrow W_1$ em S_1 tal que $\gamma(t_0) = p$ e a composição

$$I \xrightarrow{\gamma} W_1 \xrightarrow{\sigma_1^{-1}} U_1 \xrightarrow{\sigma_1} W_1 \xrightarrow{f} W_2 \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} U_2.$$

denotando o vetor $\gamma'(t_0)$ por v e vetor $(f \circ \gamma')(t_0)$ por w , sabemos que

$$v = \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e analogamente,

$$w = G'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + G'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r)$$

onde $\bar{\gamma}$ denota a composição $\sigma_1^{-1} \circ \gamma$ e G denota a composição $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \gamma = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \bar{\gamma}$. Para abreviar, chamaremos F à composição $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$. Portanto $G = F \circ \bar{\gamma}$.

Se δ for outra curva em S_1 tal que $\delta(t_1) = p$ e $\delta'(t_1) = v$ e definirmos, analogamente, $\bar{w} = (f \circ \delta)'(t_1)$ e $\bar{G} = F \circ \bar{\delta}$, teremos

$$v = \bar{\delta}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\delta}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e

$$\bar{w} = \bar{G}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + \bar{G}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r).$$

Em particular, $\bar{\gamma}'_1(t_0) = \bar{\delta}'_1(t_1)$ e $\bar{\gamma}'_2(t_0) = \bar{\delta}'_2(t_1)$. Daqui decorre que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G'_1(t_0) \\ G'_2(t_0) \end{bmatrix} &= J_G(t_0) = J_F(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) = J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\delta}'_1(t_1) \\ \bar{\delta}'_2(t_1) \end{bmatrix} = J_F(q) \cdot J_{\bar{\delta}}(t_1) = J_{\bar{G}}(t_1) = \begin{bmatrix} \bar{G}'_1(t_1) \\ \bar{G}'_2(t_1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $\bar{w} = w$, o que implica que o vetor w não depende da escolha da curva γ e que f_{*p} está bem definida.

Isto também mostra que, para qualquer vetor $v \in T_p S_1$ de coordenadas v_1 e v_2 na base $\{\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)\}$, a sua imagem por f_{*p} é dada por

$$f_{*p}(v) = J_F(q) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto f_{*p} não é nada além da aplicação linear de $T_p S_1$ em $T_{f(p)} S_2$ cuja matriz, relativamente às bases $\{\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)\}$ e $\{\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r)\}$, é $J_F(q)$.

■

Agora considere $\mathcal{G}$ uma aplicação suave de S em S^2 , podemos aplicar a proposição anterior e concluir que a derivada de $\mathcal{G}$ no ponto p é uma aplicação linear definida em $T_p S$ com valores em $T_{N(p)} S^2$. Mas $T_{N(p)} S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, N(p) \rangle = 0\} = T_p S$, portanto

$$\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Observação 4.21. Uma vez que $\mathcal{G}$ está definida a menos de sinal, a sua derivada $\mathcal{G}_{*p}$ também fica definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida.

Definição 4.42. Seja E um espaço euclidiano. Uma aplicação linear $f : E \rightarrow E$ é dita simétrica se $\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle$ para quaisquer $v_1, v_2 \in E$.

Proposição 4.20. Para cada $p \in S$, $\mathcal{G}_{*p}$ é uma aplicação simétrica

Demonstração. Como $\mathcal{G}_{*p}$ é linear, basta verificar a igualdade

$$\langle \mathcal{G}_{*p}(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, \mathcal{G}_{*p}(v_2) \rangle$$

para os vetores da base $\{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\}$ de $T_p S$, sendo $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ um mapa de S contendo $p = \sigma(q)$.

Note que, para $v = \gamma'(t_0) \in T_p S$, $\mathcal{G}_{*p}(v) = (\mathcal{G} \circ \gamma)'(t_0)$ e $J_{(\mathcal{G} \circ \gamma)'(t_0)}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0)$. Em particular, para $v = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$,

$$J_{\bar{\gamma}}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $J_{\mathcal{G} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e consequentemente

$$\mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) = \frac{\partial (\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q).$$

Analogamente

$$\mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) = \frac{\partial (\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q).$$

Provemos então que

$$\left\langle \frac{\partial (\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial (\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right\rangle.$$

Para qualquer $(x, y) \in U$ temos

$$\left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y), \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right\rangle = 0 \quad (31)$$

e

$$\left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\rangle = 0. \quad (32)$$

Derivando (31) relativamente à segunda coordenada y , obtemos

$$\left\langle \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right\rangle + \left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) \right\rangle = 0 \quad (33)$$

e derivando (32) relativamente à primeira coordenada x , obtemos

$$\left\langle \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\rangle + \left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) \right\rangle = 0.$$

Em particular, para $(x, y) = q$ obtemos a igualdade pretendida:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right\rangle &= - \left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(q) \right\rangle \\ &= - \left\langle (\mathcal{G} \circ \sigma)(q), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(q) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\rangle \end{aligned}$$

■

Definição 4.43. Chamamos à forma bilinear

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \langle \mathcal{G}_{*p}(v_1), v_2 \rangle \end{aligned}$$

a Segunda Forma Fundamental de S no ponto p .

Seja $\sigma : U \rightarrow S$, a matriz

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix}$$

é chamada matriz da segunda forma fundamental de σ de S em $p = \sigma(q)$, onde

$$\begin{aligned} e(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \right\rangle \\ f(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right\rangle \end{aligned}$$

e

$$g(q) = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right\rangle.$$

Notação 4.5. Para fins de praticidade serão utilizado as fórmulas abaixo por não utilizarem as derivadas de $\mathcal{G} \circ \sigma$:

$$\begin{aligned} e(q) &= - \left\langle \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(q), N(p) \right\rangle \\ f(q) &= - \left\langle \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(q), N(p) \right\rangle \\ g(q) &= - \left\langle \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(q), N(p) \right\rangle \end{aligned}$$

Definição 4.44. Dos conceitos anteriormente apresentados, podemos concluir que existe uma base ortonormada $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $\mathcal{G}_{*p}(e_1) = k_1 e_1$ e $\mathcal{G}_{*p}(e_2) = k_2 e_2$ sendo $k_2 \leq k_1$. Os números k_1 e k_2 são os valores próprios de $\mathcal{G}_{*p}$ são chamados de curvaturas principais de S em p . Portanto a matriz de $\mathcal{G}_{*p}$ na base $\{e_1, e_2\}$ é igual a

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Os vetores e_1 e e_2 são chamados de vetores principais de S em p .

Definição 4.45. É chamada curvatura gaussiana de S no ponto p ao determinante de $\mathcal{G}_{*p}$:

$$K(p) = k_1 k_2.$$

Chama-se curvatura média de S no ponto p metade do traço de $\mathcal{G}_{*p}$:

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Definição 4.46. O ponto p é dito:

- Elíptico, se $K(p) > 0$.
- Hiperbólico, se $K(p) < 0$.
- Parabólico, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$.

- Planar, se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$.

Definição 4.47. Dada uma superfície S , o ponto $p \in S$ é dito umbílico se as curvaturas principais de S em p coincidem ou seja $k_1 = k_2$.

Observação 4.22. Em particular todo ponto planar é umbílico pois $k_1 = k_2 = 0$.

Teorema 4.31. Para cada $p \in S$, temos

$$K(p) = \frac{e(q)g(q) - f(q)^2}{E(q)G(q) - F(q)^2}, \quad H(p) = \frac{e(q)G(q) - 2f(q)F(q) + g(q)E(q)}{2(E(q)G(q) - F(q)^2)},$$

$$k_1(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}, \quad k_2(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Demonstração. Com intuito de simplificar as notações, será omitida por vezes p e q .

Seja

$$W = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a matriz de $\mathcal{G}_{*p}$ relativa à base $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\}$. Então

$$\begin{aligned} e(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right\rangle = a_{11}E(q) + a_{21}F(q) \\ f(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right\rangle = a_{12}E(q) + a_{22}F(q) \\ f(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right\rangle = a_{11}F(q) + a_{21}G(q) \\ g(q) &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \mathcal{G}_{*p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right\rangle = a_{12}F(q) + a_{22}G(q). \end{aligned}$$

Em termos matriciais isto implica que $\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_I W$, donde

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(W) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

e

$$K = \det(\mathbf{W}) = \left(\frac{1}{EG - F^2} \right)^2 \begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} k_1 k_2 = K \\ \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = H. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e sabendo que $k_1 \geq k_2$ obtemos $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ e $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ ■

Observação 4.23. A matriz da aplicação $\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S$ relativamente à base $\{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\}$, é chamada de matriz de Weingarten de σ de S .

Definição 4.48. Seja S uma superfície regular parametrizada por $\sigma : U \rightarrow S$. Uma curva regular $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ é uma geodésica da superfície S se, para todo $t \in U$, $\gamma''(t)$ é um vetor normal a S em $u(t), v(t)$.

Definição 4.49. Se $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ define uma curva parametrizada pelo comprimento de arco numa parametrização de uma superfície S então $\gamma'(t)$ é um vetor unitário em $T_{\gamma(t)} S$. Assim $\gamma'(t)$ é perpendicular a $N(\gamma(t))$ e então $\gamma'(t)$, $N(\gamma(t))$ e $N(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$ formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Por γ ser parametrizada por comprimento de arco, $\gamma''(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$ e portanto uma combinação linear de $N(\gamma(t))$ e $N(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$:

$$\gamma''(t) = \alpha(t)N(\gamma(t)) + \beta(t)N(\gamma(t)) \times \gamma'(t).$$

Os escalares $K_n = -\alpha$ e $K_g = \beta(t)$ são chamados respectivamente de curvatura normal e curvatura geodésica de γ em t .

Proposição 4.21. (Existência e unicidade de geodésicas) Dados um ponto p de uma superfície regular S e $w \in T_p S$, existe um intervalo aberto $I \ni 0$ e uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow S$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.

Demonstração. Consideremos uma parametrização local de S em p , $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$, e ponhamos

$$(u_0, v_0) = X^{-1}(p) \quad \text{e} \quad (a, b) = (dX(u_0, v_0))^{-1}w.$$

Note que as equações diferenciais das geodésicas é do tipo

$$\begin{cases} u'' = f_1(u, v, u', v') \\ v'' = f_2(u, v, u', v') \end{cases} \quad (34)$$

em que f_1 e f_2 são funções diferenciáveis. Assim, dadas as condições iniciais

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \quad e \quad (u'(0), v'(0)) = (a, b), \quad (35)$$

pelo teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, existem um intervalo $I \ni 0$ e uma única solução $(u(t), v(t))$, $t \in I$, de (34), a qual cumpre as condições iniciais de (35). Dessa forma a curva

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

é a única geodésica de S , a qual cumpre as condições

$$\gamma(0) = X(u_0, v_0) = p \quad e \quad \gamma'(0) = dX_{(u_0, v_0)}(a, b) = w.$$

■

Observação 4.24. Se $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ é uma geodésica da superfície S , então $|\gamma'(t)|$ é constante.

Lema 4.9. (Lema de Meusnier)

(a) Seja $\gamma : I \rightarrow W \subseteq S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(t_0) = p$. Então $K_n(\gamma, t_0) = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$.

(b) Se γ_1 e γ_2 são curvas parametrizadas por comprimento de arco tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$ e $\gamma'_1(t_1) = \gamma'_2(t_2)$ então $K_n(\gamma_1, t_1) = K_n(\gamma_2, t_2)$.

Demonstração. (a) Para cada $t \in I$, $\langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \rangle = 0$ pois $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ e $N(\gamma(t))$ é ortogonal a $T_{\gamma(t)}S$. Derivando temos

$$\langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \rangle + \langle \gamma'(t), (N \circ \gamma)'(t) \rangle = 0.$$

Em particular $\langle \gamma'(t_0), (N \circ \gamma)'(t_0) \rangle = -\langle \gamma''(t_0), N(\gamma(t_0)) \rangle$, onde

$$K_n(\gamma, t_0) = \langle \gamma''(t_0), N(\gamma(t_0)) \rangle = \langle \gamma'(t_0), \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0)) \rangle = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)).$$

(b) Consequência imediata de (a). ■

Proposição 4.22. (Lema de Euler) Seja p um ponto de S . Então

$$\{K_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p\} = [k_2(p), k_1(p)].$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base normada de $T_p S$ formada pelos vetores próprios de $\mathcal{G}_{*p}$. Denotando α_1 e α_2 as coordenadas de $\gamma'(t_0)$ nesta base, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \|\gamma'(t_0)\|^2 = 1$. Então

$$\begin{aligned} K_n(\gamma, t_0) &= \langle \gamma'(t_0), \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0)) \rangle \\ &= \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \mathcal{G}_{*p}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle \\ &= \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \alpha_1 k_1 e_1 + \alpha_2 k_2 e_2 \rangle \\ &= k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2, \end{aligned}$$

onde

$$k_2 = k_2 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 \leq K_n(\gamma, t_0) \leq k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 = k_1.$$

Isso mostra que $\{K_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p\} \subseteq [k_2(p), k_1(p)]$.

Reciprocamente, dado $a \in [k_2(p), k_1(p)]$, consideremos o vetor $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ de coordenadas

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a - k_2}{k_1 - k_2}} \quad e \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{a - k_1}{k_2 - k_1}}.$$

Como $v \in T_p S$, existe uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Logo

$$K_n(\gamma, t_0) = k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 = k_1 \frac{a - k_2}{k_1 - k_2} + k_2 \frac{a - k_1}{k_2 - k_1} = a.$$

■

Observação 4.25. As curvaturas principais num ponto $p \in S$ são máximo e o mínimo valores das curvaturas normais de todas as curvas em S que passam por p . As direções principais são os vetores tangentes das curvas dando esses valores máximo e mínimo.

Da proposição 4.9 podemos definir as seguintes noções geométricas a cerca da natureza de um ponto $p \in S$.

Caso 1: p é elíptico.

Isto significa que $k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$ têm o mesmo sinal. Então para qualquer par de curvas γ_1 e γ_2 em S tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$, temos

$$k_2 \leq k_n(\gamma_i, t_i) = -\|\gamma''(t_i)\| \langle N_{\gamma_i}, N(p) \rangle \leq k_1 \quad (i = 1, 2).$$

consequentemente $\langle N_{\gamma_1}, N(p) \rangle$ e $\langle N_{\gamma_2}, N(p) \rangle$ tem o mesmo sinal. Em outras palavras, numa vizinhança de p , as curvas em S que passam por p

"apontam" todas para o mesmo lado de $T_p S$.

Caso 2: p é hiperbólico.

Nesse caso, como k_1 e k_2 tem sinais contrários, existem curvas γ_1 e γ_2 em S com $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$. Em outras palavras, numa vizinhança de p , as curvas em S que passam por p "apontam" todas para lados opostos de $T_p S$.

Teorema Egregium de Gauss

Notação 4.6. Com o fim de reduzir o peso da escrita das equações, dada uma aplicação $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave, usaremos as notações:

$$\sigma_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \sigma_y = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

Definição 4.50. Dizemos que a primeira forma fundamental de uma superfície S descreve a geometria intrínseca de S e que a segunda forma fundamental descreve a geometria extrínseca de S .

A aplicação $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, tomando para $d_S(p_1, p_2)$ o ínfimo dos comprimentos das curvas $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tais que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$, chama-se distância intrínseca da superfície S .

Observação 4.26. Note que a isometria conserva a distância intrínseca da superfície S .

Definição 4.51. Seja $\sigma : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S . Consideremos ainda o referencial

$$\{\sigma_x(q), \sigma_y(q), N(\sigma(q))\}$$

definido em cada ponto $\sigma(q) = p$ da superfície S . Denotamos a função $N \circ \sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\bar{N}$. Existem funções $\Gamma_{jk}^i, i, j, k = 1, 2, L_1, L_2, \bar{L}_3, L_3, a_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$ tais que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + L_1 \bar{N} \\ \sigma_{xy} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + L_2 \bar{N} \\ \sigma_{yx} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + L_2 \bar{N} \\ \sigma_{yy} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_x + \Gamma_{22}^2 \sigma_y + L_3 \bar{N} \\ \bar{N}_x &= a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y \\ \bar{N}_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y. \end{aligned}$$

As funções Γ_{jk}^i são chamados de Símbolos de Christoffel de S relativamente à

parametrização σ . Note que

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle \sigma_{xx}, \bar{N} \rangle = e, \\ L_2 &= \langle \sigma_{xy}, \bar{N} \rangle = f, \\ \bar{L}_2 &= L_2 = f, \\ L_3 &= \langle \sigma_{yy}, \bar{N} \rangle = g. \end{aligned} \tag{36}$$

Como $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ e σ_x, σ_y e $\bar{N}$ são linearmente independentes,

$$\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i, \quad i = 1, 2.$$

Lema 4.10. Os símbolos de Christoffel de uma superfície S relativamente a uma parametrização σ estão relacionados a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_x, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_x - \frac{1}{2} E_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_y, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_y - \frac{1}{2} G_x, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_x, \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_y. \end{cases}$$

Demonstração. As primeiras seis são imediatas de (34):

- $\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \Gamma_{11}^1 \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \sigma_y, \sigma_x \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y, \sigma_x \rangle = \langle \sigma_{xx}, \sigma_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_x.$
- $\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \Gamma_{11}^1 \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \sigma_y, \sigma_y \rangle = \langle \sigma_{xx}, \sigma_y \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x, \sigma_{xy} \rangle = F_x - \frac{1}{2} E_y.$
- $\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \Gamma_{12}^1 \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \sigma_y, \sigma_x \rangle = \langle \sigma_{xy}, \sigma_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_y.$

- $\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \Gamma_{12}^1 \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \sigma_y, \sigma_y \rangle = \langle \sigma_{xy}, \sigma_y \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \Gamma_{22}^1 \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \sigma_y, \sigma_x \rangle = \langle \sigma_{yy}, \sigma_x \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \langle \sigma_y, \sigma_x \rangle - \langle \sigma_y, \sigma_{yx} \rangle = F_y - \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \Gamma_{22}^1 \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \sigma_y, \sigma_y \rangle = \langle \sigma_{yy}, \sigma_y \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_y.$

As duas últimas são consequência das anteriores; provemos a primeira delas (a outra pode ser provada de maneira análoga):

$$\begin{aligned}
(EG - F^2)_x &= EG_x + E_x G - 2FF_x \\
&= 2E(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) + 2G(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) - 2F(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) \\
&= 2EG\Gamma_{12}^2 + 2EG\Gamma_{11}^1 - 2F^2(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
&= 2(EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2).
\end{aligned}$$

Então

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(EG - F^2)_x}{2(EG - F^2)} = (\log \sqrt{EG - F^2})_x.$$

■

Resolvendo cada um dos três primeiros sistemas do Lema 4.10, relativamente aos símbolos de Christoffel, temos:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_x - EE_y - FE_x}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_x - FE_y}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_y - GG_x - FG_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_y - 2FF_y + FG_x}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2. \end{cases} \quad (37)$$

Isso mostra que os símbolos de Christoffel só dependem de E, F, G e das suas derivadas pelo que são invariantes por isometria, pelo Teorema 4.28.

Teorema 4.32. [Teorema Egregium de Gauss] A curvatura gaussiana é invariante por isometria.

Demonstração. Decorre da igualdade $\bar{N}_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y$ em (34) e da definição da matriz de Weingarten que

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxy} &= (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + e\bar{N})_y \\
&= (\Gamma_{11}^1)_y \sigma_x + (\Gamma_{11}^2)_y \sigma_y + e_y \bar{N} + \Gamma_{11}^1 \sigma_{xy} + \Gamma_{11}^2 \sigma_{yy} + e\bar{N}_y \\
&= (\Gamma_{11}^1)_y \sigma_x + (\Gamma_{11}^2)_y \sigma_y + e_y \bar{N} + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + f\bar{N}) + \\
&\quad \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \sigma_x + \Gamma_{22}^2 \sigma_y + g\bar{N}) + e(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y) \\
&= ((\Gamma_{11}^1)_y + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12})\sigma_x + ((\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22})\sigma_y + \\
&\quad (e_y + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g)\bar{N},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xyx} &= (\Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + f \bar{N})_x \\
&= (\Gamma_{12}^1)_x \sigma_x + (\Gamma_{12}^2)_x \sigma_y + f_x \bar{N} + \Gamma_{12}^1 \sigma_{xx} + \Gamma_{12}^2 \sigma_{yx} + f \bar{N}_x \\
&= (\Gamma_{12}^1)_x \sigma_x + (\Gamma_{12}^2)_x \sigma_y + f_x \bar{N} + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + e \bar{N}) + \\
&\quad \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + f \bar{N}) + f(a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y) \\
&= ((\Gamma_{12}^1)_x + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) \sigma_x + ((\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}) \sigma_y + \\
&\quad (f_x + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f) \bar{N}.
\end{aligned}$$

Como $\sigma_{xyx} = \sigma_{xyx}$ e σ_x , σ_y e $\bar{N}$ são linearmente independentes, podemos concluir que

$$(\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21},$$

ou seja,

$$(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = a_{22} e - f a_{21}.$$

Consequentemente, da definição da matriz de Weingarten, temos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= -\frac{fF - gE}{EG - F^2} e + f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\
&= E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= EK.
\end{aligned}$$

De modo análogo, das igualdades $\sigma_{yyx} = \sigma_{yyx}$ e $\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx}$ é possível formular FK e GK em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas, logo, por (35), em função de E, F, G e das suas derivadas. Como as funções E, F, G não podem se anular simultaneamente, podemos concluir que a curvatura gaussiana K de uma superfície regular só depende dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, logo, invariante por isometria. ■

Afim de estabelecer as propriedades minimizantes das geodésicas vamos introduzir a aplicação exponencial $\exp_p$, a qual se fixa um ponto p de uma superfície regular de S e associa vetores $w \in T_p S$, pontos de S que estão nas geodésicas que partem de p na direção de w .

Definição 4.52. Dados um ponto p de uma superfície regular orientável S e $w \in T_p S$, consideremo a proposição 4.20 e indiquemos por

$$\gamma_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

a geodésica de S , a qual cumpre $\gamma_w(0) = p$ e $\gamma'_w(0) = w$, em que $\varepsilon = \varepsilon(w)$ é tal

que $(-\varepsilon, \varepsilon)$ é o intervalo simétrico máximo no qual γ_w está definida.

Dado $\lambda > 0$, pondo-se $I_\lambda = (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$, tem-se que $\gamma_{\lambda w}$ está definida em I_λ e que vale a igualdade

$$\gamma_{\lambda w}(t) = \gamma_w(\lambda t) \quad \forall t \in I_\lambda. \quad (38)$$

Observação 4.27. A propriedade das geodésicas vinda da igualdade (38) é chamada Homogeneidade. Dela se pode dizer que o intervalo simétrico de máximo de definição de γ_w , $(-\varepsilon, \varepsilon)$, será maior quanto menor for a norma de w . Em particular, tomando-se a norma de w suficientemente pequena, podemos supor que $\varepsilon > 1$, isto é, que $\gamma_w(1)$ está bem definido.

Definição 4.53. Por consequência do teorema de diferenciabilidade do fluxo definido por uma equação diferencial ordinária, existem $\varepsilon, \delta > 0$, tais que a aplicação

$$\varphi(t, w) = \gamma_w(t), \quad |t| < \varepsilon, \quad \|w\| < \delta,$$

está bem definida e é diferenciável em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta$, em que B_δ denota-se a bola de $T_p S$ com centro na origem e raio δ . Isso significa que para todo $w \in B_\delta$, a geodésica γ_w está definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo para quaisquer $w_0 \in B_\delta$ e $w = \lambda w_0$, em que $0 < \lambda < \min\{1, \varepsilon/2\}$, tem-se

$$\|w\| = \lambda \|w_0\| < \min\{\delta, \delta\varepsilon/2\}.$$

Definição 4.54. A aplicação exponencial de S em p é definida como

$$\begin{aligned} \exp_p : B_r &\rightarrow S \\ w &\mapsto \gamma_w(1). \end{aligned}$$

Quando, para todo $p \in S$, a aplicação exponencial de S em p está definida em todo o plano tangente $T_p S$, diz-se que essa superfície é geodesicamente completa.

onde é diferenciável em B_r , pois φ é diferenciável e, para todo $w \in B_r$, tem-se

$$\exp_p(w) = \gamma_w(1) = \varphi(w, 1)$$

Definição 4.55. Seja $\exp_p : B_r \rightarrow \exp_p(B_r) \subset S$ um difeomorfismo, a imagem da bola B_r por $\exp_p$, ou seja $\exp_p(B_r)$ é dita bola geodésica de S com centro p e raio r , denotaremos por $B_r(p)$. Analogamente, dado $\delta \in (0, r)$, chama-se círculo geodésico com centro p e raio δ , a imagem do círculo de $T_p S$ cujo o centro é a origem e cujo raio é δ .

Dado $q \in B_r(p)$, a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_r(p)$,

$$\gamma(t) = \exp_p(tw) = \gamma_w(t), \quad w = (\exp_p)^{-1}(q),$$

é dita geodésica radial de p a q .

Esse teorema intitula esta dois resultados clássicos da geometria elementar:

- A soma dos ângulo plano é igual a π ;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo de S^2 , cujos lados são arcos de grande círculo, é maior que π , sendo a área do triângulo igual à diferença entre a soma de seus ângulos e π .

Do ponto de vista da Geometria Diferencial, esses fatos levantam a questão da existência de uma "fórmula" para soma $\sum \theta_i$ dos ângulos de um "triângulo geodésico" Δ de uma superfície regular S . Disso se estabelece a igualdade

$$\int_{\Delta} K = \sum \theta_i - \pi. \quad (39)$$

Definição 4.56. Um triângulo geodésico numa superfície regular S é um subconjunto Δ de S , o qual é homeomorfo a uma bola fechada de $\mathbb{R}^2$ e cujo bordo, $\partial\Delta$, é o traço de uma curva contínua $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, a qual tem as seguintes propriedades:

- $I = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3]$, $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 \in \mathbb{R}$;
- $\gamma(a_0) = \gamma(a_3)$ e $\gamma|_{[a_0, a_3]}$ é injetiva;
- Para cada $i = 1, 2, 3$, $\gamma_i = \gamma|_{(a_{i-1}, a_i)}$ é uma geodésica de S , a qual admite uma extensão a um intervalo $(a_{i-1} - \varepsilon_i, a_i + \varepsilon_i)$, $\varepsilon_i > 0$ (de modo que $\gamma'_i(a_i - 1)$ e $\gamma'_i(a_i)$ estão bem definidos).

Cada um dos pontos $p_i = \gamma(a_{i-1})$ é dito vértice de Δ . Os traços das geodésicas γ_1 , γ_2 e γ_3 são chamados de lados de Δ , e são denotas, respectivamente, por p_1p_2 , p_2p_3 e p_3p_1 . Os ângulos de Δ nos vértices p_1 , p_2 e p_3 , os quais denotam-se, respectivamente, por $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$ e $\widehat{p}_3$, definem se por

$$\widehat{p}_1 = \angle(\gamma'_1(a_0), -\gamma'_3(a_3));$$

$$\widehat{p}_2 = \angle(\gamma'_2(a_1), -\gamma'_1(a_1));$$

$$\widehat{p}_3 = \angle(\gamma'_3(a_2), -\gamma'_2(a_2)).$$

Diz-se que Δ é positivamente orientado relativamente a uma orientação N , de S , quando, para todo $i = 1, 2, 3$ e todo $s \in (a_{i-1}, a_i)$, o vetor $w_i(s) = N(\gamma_i(s)) \times \gamma'_i(s)$ (de $T_{\gamma_i(s)}S$ "aponta para Δ ", ou seja, para $t > 0$ suficientemente pequeno.

Proposição 4.23. Sejam S uma superfície regular orientada, $\gamma : I \rightarrow V \subset S$ uma geodésica (parametrizada por comprimento de arco) de S e $\zeta, \eta : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ campos diferenciáveis tangentes a S , tais que, para cada $p \in V$, $\{\zeta(p), \eta(p), N(p)\}$ é uma base ortonormal e positivamente orientada de $T_p S$. Nessas condições, existe uma função diferenciável, $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\gamma'(s) = \cos \theta(s) \zeta(s) + \text{sen} \theta(s) \eta(s) \quad \forall s \in I, \quad (40)$$

onde $\zeta(s) = \zeta(\gamma(s))$ e $\eta(s) = \eta(\gamma(s))$, onde toda função diferenciável θ que satisfaz a igualdade acima, cumpre

$$\theta' = \langle \zeta, \eta' \rangle \quad (41)$$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, a existência da função diferenciável θ que satisfaz (40). Nesse caso, tem-se,

$$\gamma'' = \theta'(\cos \theta \eta - \text{sen} \theta \zeta) + \cos \theta \zeta' + \text{sen} \theta \eta'. \quad (42)$$

Do fato de γ ser uma geodésica, temos também que

$$\langle \gamma' \times N, \gamma'' \rangle = 0 \quad (43)$$

Combinando-se, então (40), (42) e (43), e levando-se em conta que

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \zeta', \eta \rangle = -\langle \eta', \zeta \rangle,$$

obtém-se facilmente a igualdade (41).

Provemos agora a existência de θ . Para tanto, motivados pelas considerações do parágrafo anterior, tomemos $s_0 \in I$ e escrevamos

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \langle \zeta(u), \eta'(u) \rangle du + \theta_0, \quad s \in I,$$

em que $\theta_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\gamma'(s_0) = (\cos \theta_0) \zeta(s_0) + (\text{sen} \theta_0) \eta(s_0)$. Temos que θ é diferenciável. Portanto, a curva

$$\sigma(s) = \int_{s_0}^s (\cos \theta(u) \zeta(u) + \text{sen} \theta(u) \eta(u)) du + \gamma(s_0), \quad s \in I,$$

é diferenciável e cumpre $\sigma(s_0) = \gamma(s_0)$. Além disso, tem-se

$$\sigma' = \cos \theta \zeta + \text{sen} \theta \eta;$$

$$\sigma'' = \theta'(\cos \theta \eta - \text{sen} \theta \zeta) + \cos \theta \zeta' + \text{sen} \theta \eta'.$$

Um cálculo direto, então, nos dá

$$\langle \sigma' \times N, \sigma'' \rangle = \langle \zeta, \eta' \rangle - \theta' = 0,$$

onde se infere que σ é uma geodésica. Porém, $\sigma(s_0) = \gamma(s_0)$ e $\sigma'(s_0) = \gamma'(s_0)$. Logo, $\sigma = \gamma$. Portanto, para todo $s \in I$, tem-se

$$\gamma'(s) = \cos \theta(s) \zeta(s) + \text{sen} \theta(s) \eta(s).$$

■

Definição 4.57. Diz que um triângulo geodésico de uma superfície regular S é ideal, quando está contido na interseção de bolas geodésicas com centros em seus vértices.

Lema 4.11. Seja Δ um triângulo geodésico ideal de uma superfície regular S , cujos vértices são p_1, p_2 e p_3 . Suponha que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência sobre o lado $p_1 p_3$, tal que $q_n \rightarrow p_1$. Então, denotando-se por $\Delta_n \subset \Delta$ o triângulo geodésico de vértices p_1, p_2 e q_n , tem-se

$$i) \quad p_1 \widehat{p_2 q_n} \rightarrow 0;$$

$$ii) \quad p_2 \widehat{q_n p_3} \rightarrow \widehat{p_1};$$

$$iii) \quad \mu(\Delta_n) \rightarrow 0$$

Demonstração. Denotando-se por γ_w a geodésica de S que parte de p_2 com velocidade $w \in T_{p_2} S$, tem-se que existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que a aplicação

$$\varphi(t, w) = \gamma_w(t), \quad |t| < \varepsilon, \quad \|w\| < \delta,$$

está bem definida e é diferenciável em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta$, em que B_δ denota a bola de $T_{p_2} S$ com centro na origem e raio δ . Por hipótese, Δ está contido numa bola geodésica de S com centro em p_2 . Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $t_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $w_n \in B_\delta$, tais que

$$q_n = \gamma_{w_n}(t_n) = \varphi(t_n, w_n).$$

Uma vez que (t_n) e (w_n) são sequências limitadas, podemos supor que $t_n \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$ e $w_n \rightarrow w_0 \in T_{p_2} S$. Daí e da continuidade φ , segue-se que

$$q_n = \gamma_{w_n}(t_n) = \varphi(t_n, w_n).$$

Uma vez que (t_n) e (w_n) são sequências limitadas, podemos supor que $t_n \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$ e $w_0 \in T_{p_2}S$. Daí e da continuidade de φ , segue-se que

$$\gamma_{w_0}(t_0) = \varphi(t_0, w_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p_1.$$

Em particular, $p_1 \hat{p}_2 q_n = \angle(w_0, w_n)$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 \hat{p}_2 q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle(w_0, w_n) = \angle(w_0, w_0) = 0,$$

o que prova (i).

Agora note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\gamma_{w_n}(t) = \exp_{p_2}(tw_n)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo, $\gamma'_{w_n}(t_n) = d(\exp_{p_2})(t_n, w_n)w_n$, onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_2 \hat{q}_n p_3 = \angle(-\gamma'_{w_0}(t_0), \gamma'(0)) = \hat{p}_1,$$

o que prova (ii)

Afim de provarmos (iii), consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o compacto

$$\Omega_n = \exp_{p_2}^{-1}(\Delta_n) \subset T_{p_2}S,$$

o qual é limitado pela curva $\mathcal{C}_n = \exp_{p_2}^{-1}(p_1, q_n)$ e os raios que contêm w_0 e w_n . Designando-se, então, por θ_n o ângulo $p_1 \hat{p}_2 q_n$ e tomando-se o ponto $a_n \in \mathcal{C}_n$, tal que $\|a_n\| = \max_{w \in \mathcal{C}_n} \|w\|$, tem-se que Ω_n está contido no setor circular Θ_n de $T_{p_2}S$, cujo o ângulo é θ_n e cujo o raio é $\|a_n\|$. Em particular,

$$\mu(\Omega_n) \leq \mu(\Theta_n) = \frac{\theta_n \|a_n\|}{2},$$

o que nos dá $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$, já que a sequência (a_n) , claramente é limitada. Tomando-se uma parametrização local $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, tal que $\Delta \subset X(U)$, e escrevendo-se $c = \sup_{\Omega} \|X_u \times X_v\|$, tem-se

$$\mu(\Delta_n) = \int_{\Omega_n} \|X_u \times X_v\| du dv \leq \left(\sup_{\Omega_n} \|X_u \times X_v\| \right) \mu(\Omega_n) \leq c \mu(\Omega_n),$$

onde o $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Delta_n) = 0$. ■

Teorema 4.33. (Teorema Elegantissimun de Gauss). Para todo triângulo geodésico ideal Δ de uma superfície regular orientável S , vale a igualdade

$$\int_{\Delta} K = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 - \pi$$

Demonstração. Tomemos um ponto q no interior do lado $p_1 p_3$ de Δ e denotemos

por $\Delta' \subset \Delta$ o triângulo geodésico cujos vértices são q , p_2 e p_3 . Consideremos, então, uma parametrização $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ de $\partial\Delta'$, tal que:

- $I = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3]$;
- $\gamma(a_0) = \gamma(a_3) = q$, $\gamma(a_1) = p_2$, $\gamma(a_2) = p_3$;
- Cada geodésica $\gamma_i = \gamma|_{(a_{i-1}, a_i)}$ é parametrizada pelo comprimento de arco.

Tomando-se um sistema de coordenadas polares conveniente em $T_{p_1}S$, podemos supor que Δ' está contido num aberto $V \subset S$, no qual está definido um campo tangente unitário e diferenciável, ζ , formado pelos vetores velocidade dos raios geodésicos que partem de p_1 . Considerando, então, um campo normal N , em S , tem-se que

$$\eta = N \times \zeta$$

é um campo tangente unitário e diferenciável em V , tal que, para todo $p \in V$, $\{\zeta(p), \eta(p), N(p)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$, a qual é ortonormal e positivamente orientada. Suporemos, também, que o campo N foi escolhido de modo que, relativamente ao mesmo, Δ' é positivamente orientado.

Note que, nesse caso, uma vez que ζ "aponta para dentro" de Δ' ao longo de γ_1 , "aponta pra fora" de Δ' ao longo de γ_2 e é tangente a γ_3 ao longo de γ_3 , tem-se

$$i) \langle \zeta, N \times \gamma'_1 \rangle > 0 \text{ em } (a_0, a_1);$$

$$ii) \langle \zeta, N \times \gamma'_2 \rangle < 0 \text{ em } (a_1, a_2);$$

$$iii) \langle \zeta, N \times \gamma'_3 \rangle = 0 \text{ em } (a_2, a_3).$$

Pela proposição 4.23, para cada $i = 1, 2, 3$ existe uma função-ângulo diferenciável, $\theta_i = \theta_i(s) \in [0, 2\pi)$, tal que

$$\gamma'_i(s) = \cos \theta_i(s) \zeta(s) + \text{sen} \theta_i(s) \eta(s) \quad \forall s \in (a_{i-1}, a_i).$$

Escrevendo-se $\theta_1(a_0) = \lim_{s \rightarrow a_0} \theta_1(s)$ e denotando-se por $\hat{q}$ o ângulo de Δ' no vértice q , tem-se $\cos \hat{q} = \langle \zeta(a_0), \gamma'_1 \rangle = \cos \theta_1(a_0)$. Além disso, pela propriedade (i) temos

$$\begin{aligned} \text{sen} \theta_1(a_0) &= \langle \gamma'_1(a_0), \eta(a_0) \rangle = \langle \gamma'(a_0), N(a_0) \times \zeta(a_0) \rangle \\ &= -\langle \zeta(a_0), N(a_0) \times \gamma'_1(a_0) \rangle < 0, \end{aligned}$$

donde $\text{sen} \theta_1(a_0) = -\text{sen} \hat{q}$, pois $\text{sen} \hat{q} > 0$. Logo, $\cos \theta_1(a_0) = \cos \hat{q} = \cos(2\pi - \hat{q})$ e $\text{sen} \theta_1(a_0) = -\text{sen} \hat{q} = \text{sen}(2\pi - \hat{q})$, ou seja

$$\theta_1(a_0) = 2\pi - \hat{q}.$$

De maneira análoga, obtém-se as igualdades

$$\begin{cases} \theta_1(a_1) = 2\pi - p_1\widehat{p}_2q \\ \theta_2(a_1) = \pi - \widehat{p}_2 \\ \theta_2(a_2) = \widehat{p}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_3(a_2) = \pi \\ \theta_3(a_3) = \pi. \end{cases}$$

Assim, escrevendo-se $\sum_{\Delta'} = \sum_i(\theta_i(a_i) - \theta_i(a_{i-1}))$, tem-se

$$\sum_{\Delta'} = \widehat{q} + \widehat{p}_2 + \widehat{p}_3 - \pi - p_1\widehat{p}_2q. \quad (44)$$

Porém, pelo Lema 4.11,

- $\lim_{q \rightarrow p_1} p_1\widehat{p}_2q = 0$;
- $\lim_{q \rightarrow p_1} \widehat{q} = p_1$.

Daí, tomando o limite com $q \rightarrow p_1$ em (42), obtém-se

$$\lim_{q \rightarrow p_1} \sum_{\Delta'} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 + \widehat{p}_3 - \pi. \quad (45)$$

Agora nos falta mostrar que, o limite na igualdade (45) é igual a $\int_{\Delta} K$. Para isso, tomemos uma parametrização local de S , $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, tal que $\Delta \subset X(U)$ e $N \circ X$ coincida com $X_u \times X_v \setminus \|_u \times X_v\|$ em U . Fazendo-se, então, $\Omega = X^{-1}(\Delta')$ e considerando-se a igualdade

$$\langle \zeta_u, \eta_v \rangle - \langle \zeta_v, \eta_u \rangle = (K \circ X) \|X_u \times X_v\|$$

tem-se que

$$\int_{\Delta'} K = \int_{\Omega} K \|X_u \times X_v\| dudv = \int_{\Omega} (\langle \zeta_u, \eta_v \rangle - \langle \zeta_v, \eta_u \rangle) dudv.$$

Uma vez que $\eta_{uv} = \eta_{vu}$, segue-se que $\langle \zeta, \eta_v \rangle_u - \langle \zeta, \eta_u \rangle_v = \langle \zeta_u, \eta_v \rangle - \langle \zeta_v, \eta_u \rangle$, onde

$$\int_{\Delta'} K = \int_{\Omega} (\langle \zeta, \eta_v \rangle_u - \langle \zeta, \eta_u \rangle_v) dudv. \quad (46)$$

Agora, observe que a aplicação

$$s \mapsto X^{-1}(\gamma(s)) = (u(s), v(s)), \quad s \in I,$$

é uma parametrização de $\partial\Omega$, e escrevendo-se

$$\zeta(s) = \zeta(u(s), v(s)) \quad e \quad \eta(s) = \eta(u(s), v(s)),$$

tem-se $\langle \zeta, \eta' \rangle = \langle \zeta, u' \eta_u + v' \eta_v \rangle$, isto é

$$\langle \zeta, \eta' \rangle = u' \langle \zeta, \eta_u \rangle + v' \langle \zeta, \eta_v \rangle. \quad (47)$$

Dessa forma, pondo-se $P = \langle \zeta, \eta_u \rangle$ e $Q = \langle \zeta, \eta_v \rangle$, segue-se de (47) e do Teorema de Green que

$$\int_{\Omega} \langle \zeta, \eta_v \rangle_u - \langle \zeta, \eta_u \rangle_v du dv = \int_I (u' \langle \zeta, \eta_u \rangle + v' \langle \zeta, \eta_v \rangle) ds = \int_I \langle \zeta, \eta' \rangle ds.$$

Daí, de (47) e da proposição 4.11, obtém-se

$$\int_{\Delta'} K = \int_I \langle \zeta, \eta' \rangle ds = \sum_{i=1}^3 \int_{a_{i-1}}^{a_i} \theta'_i ds = \sum_{i=1}^3 (\theta(a_i) - \theta(a_{i-1})),$$

ou seja,

$$\int_{\Delta'} K = \sum_{\Delta'} . \quad (48)$$

Agora, designando-se por $\Delta'' \subset \Delta$ o triângulo de vértices p_1 , p_2 e q tem-se $\int_{\Delta} K = \int_{\Delta'} K + \int_{\Delta''} K$. Entretanto, pelo Lema 4.11, a área de Δ'' converge para zero quando $q \rightarrow p_1$. Logo,

$$\lim_{q \rightarrow p_1} \int_{\Delta'} K = \int_{\Delta} K.$$

Dessa forma, tomando o limite de $q \rightarrow p_1$ em (48) e considerando (45), obtém-se

$$\int_{\Delta} K = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 + \widehat{p}_3 - \pi.$$

■

Teorema de Gauss-Bonnet

Definição 4.58. Uma triangulação de uma superfície compacta S é definida como uma família finita $\tau = \{\Delta_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de triângulos de S , tal que

- $\bigcup \Delta_i = S$;
- Se $i \neq j$ e $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, então $\Delta_i \cap \Delta_j$ é um vértice ou um lado comum a Δ_i e Δ_j .

Definição 4.59. Seja S uma superfície compacta e τ sua triangulação onde V , L e F são o número total de vértices, lados e faces respectivamente, é denominada

característica de Euler de S a relação

$$\chi(S) = V - L + F.$$

Observação 4.28. A característica de Euler é invariante por homeomorfismo e constitui de certa forma um conceito topológico. Além disso, as superfícies compactas regulares são topologicamente classificadas através desse invariante, ou seja, duas superfícies regulares compactas são homeomorfas se, e somente se, tem a mesma característica de Euler. Esse resultado é o teorema de classificação das superfícies compactas.

Teorema 4.34. (Teorema de Gauss-Bonnet) Seja S uma superfície regular compacta. Então,

$$\int_S K = 2\pi\chi(S).$$

Demonstração. Consideremos uma triangulação de S por triângulos geodésicos ideais, $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_F\}$, e denotemos por $\sum_i \theta_{ij}$ a soma dos ângulos de Δ_j . Para cada vértice p de τ , a soma dos ângulos que têm vértices p é igual a 2π . Logo, $\sum_{i,j} \theta_{ij} = 2\pi V$, em que V é o número de vértices de τ . Observando-se que $S = \bigcup \Delta_j$ é uma J -decomposição de S , tem-se pelo Teorema Elegantissimum de Gauss, que

$$\int_S K = \sum_{j=1}^F \int_{\Delta_j} K = \sum_{j=1}^F \left(\sum_{i=1}^3 \theta_{ij} - \pi \right) = \sum_{i,j=1}^{3,F} \theta_{ij} - F\pi = 2\pi V - \pi F.$$

Porém, uma vez que cada triângulo tem três lados e cada lado é comum a dois e somente dois triângulos, tem-se que $3F = 2L$. Logo

$$\int_S K = 2\pi V - \pi F = 2\pi(V - L + F) + \pi(2L - 3F) = 2\pi\chi(S).$$

■

5 Conclusões

O trabalho realizado nos permite ver com outra perspectiva a Geometria através do Cálculo Avançado e perceber o quão abrangente é certos resultados tais como Teorema Egregium de Gauss e o Teorema Gauss-Bonnet a ponto de se estender a outras áreas da matemática, além de aprender e reforçar o uso de técnicas do Cálculo Avançado para estudos mais aprofundados que terão grande impacto na formação e na entrada em futuros cursos de pós-graduação.

6 Perspectivas de futuros trabalhos

Pretendemos dar continuidade em um novo projeto de pesquisa e plano de trabalho na linha de equações diferenciais já submetido e aceito com PIBICVOL. Ao término da graduação esperamos cursar uma pós-graduação em algum dos renomados centros de ensino do Brasil.

7 Referências

- [1] T. M. Apostol. *Calculus (Tradução para o Português)*, volume 1 e 2. Reverté, 1979.
- [2] P. V. Araújo. *Geometria diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- [3] R. G. Bartle. *The elements of real analysis*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, second edition, 1976.
- [4] J. C. Bouchara, V. L. Carrara, A. C. P. Hellmeister, and R. Salvati. *Cálculo integral avançado*. Edusp, 1996.
- [5] R. Cipolatti. *Cálculo avançado I*. IM/UFRJ, 2012.
- [6] R. F. De Lima. *Introdução à Geometria Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [7] G. S. de Souza Avila. *Introdução à análise matemática*. Edgard Blucher, 1999.
- [8] M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [9] D. G. Figueiredo. *Análise Real*, volume 1. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1996.
- [10] E. L. Lima. *Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$* . SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2002.
- [11] E. L. Lima. *Curso de análise*, volume 1 e 2. Projeto Euclides, IMPA, décima primeira edição, 2004.
- [12] E. L. Lima. *Análise Real*, volume 1 e 2. Coleção Matemática Universitária, SBM, 2007.
- [13] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [14] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [15] M. Spivak. *O Cálculo em Variedades*. Coleção Clássicos da Matemática, Ciência Moderna, 2003.
- [16] K. Tenenblat. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008.

8 Outras atividades

O bolsista participou da IX Escola de Verão Em Matemática promovido pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe. O evento foi realizado de 13 de Janeiro a 06 de Março de 2020 e contou com uma série de palestras, cursos (ouvinte) e minicursos proferidas por especialistas na área:

(Palestras)

- Um passeio pela teoria de singularidades - Maria Aparecida Soares Ruas - (USP - São Carlos)
- A vida misterioso dos matemáticos - Celso Costa - (UFF)

(Minicursos)

- Self-shrinkers do fluxo da curvatura média sob a ótica da teoria das subvariedades - Márcio Henrique Batista - (UFAL) - 15 e 16 de janeiro de 2020
- Geometria Diferencial Afim: Pontos Umbílicos e Quadráticos - Marcos Craizer - (PUC-Rio) - 29 a 31 de janeiro de 2020
- Teorema de Transversalidade de Thom e Aplicações - Simone Maria de Moraes - (UFBA) - 10, 11 e 13 de fevereiro de 2020

(Cursos)

- Análise na reta (90h) - Filipe Dantas dos Santos - (UFS) - 13 de janeiro a 30 janeiro

O bolsista participou da Atividade de Extensão VI SEMAC - 29 EIC/COPES - Redação Científica T3 com carga horária de 4 hora(s), coordenada pela Professora Raquel Simões Mendes Netto, promovida pela Coordenação de Pesquisa, na função de participante, com frequência 100%. A atividade foi realizada no dia 5 de Novembro de 2019.

O bolsista também participa do Projeto de extensão da Universidade Estadual Vale do Acaraú

Título: Curso de Álgebra Linear

Coordenador: Fransisco Leandro de Oliveira Rodrigues

Carga Horária: 30 horas

Início: 03/06/2020

Término: 31/07/2020

9 Justificativa de Alteração no Plano de Trabalho

Não houve alterações no plano de trabalho

