**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**
**PPGECIMA**

**KALYNE TERESA MACHADO**

# UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE OS NÍVEIS DOS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA POR MEIO DA TEORIA DE VAN HIELE

São Cristóvão - SE
2021

**KALYNE TERESA MACHADO**

# UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE OS NÍVEIS DOS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA POR MEIO DA TEORIA DE VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

**ORIENTADORA: Profa. Dra. Divanizia do Nascimento Souza**

São Cristóvão- SE
2021

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL**
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Machado, Kalyne Teresa
M149i Uma investigação sobre os níveis dos conhecimentos geométricos de licenciandos em Matemática por meio da Teoria de Van Hiele / Kalyne Teresa Machado; orientadora Divanizia do Nascimento Souza. – São Cristóvão, SE, 2021.
141 f.; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores - Formação. 3. Geometria. I. Souza, Divanizia do Nascimento, orient. II. Título.

CDU 5:37

Kalyne Teresa Machado

**Uma investigação sobre os níveis dos conhecimentos geométricos de licenciandos em matemática por meio da Teoria de van Hiele**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe.

Aprovada pela banca examinadora em 27 de janeiro de 2021.

**BANCA EXAMINADORA**

Divanizia N. Souza

Profa. Dra. Divanizia do Nascimento Souza
Universidade Federal de Sergipe - UFS
(Presidente e Orientadora)

Denize Souza.

Profa. Dra. Denize da Silva Souza
Universidade Federal de Sergipe - UFS
(Membro Interno)

TCEtcheverria

Profa. Dra. Teresa Cristina Etcheverria
Universidade Federal de Sergipe - UFS
(Membro Externo)

*Quem tem um amigo tem tudo*

*Se o poço devorar, ele busca no fundo*

*É tão dez que junto todo stress é miúdo*

*É um ponto pra escorar quando foi absurdo*

*O amigo é um mago do meigo abraço*

*É mega afago, abrigo em laço*

*Oásis nas piores fases quando some o chão e as bases*

*Quando tudo vai pro espaço, é isso*

*(Emicida)*

**RESUMO**

A pouca ênfase dada ao ensino da geometria na Educação Básica até o fim do século XX e as perspectivas de sua retomada a partir do início do século XXI são objeto de estudos de diversos autores, que consideram que tal abandono tenha sido causado, principalmente, pelo despreparo dos professores frente aos conteúdos de geometria. Considerando tal problemática, esta pesquisa teve como objetivo investigar, com base na Teoria de van Hiele, os níveis do pensamento geométrico evidenciado nas soluções apresentadas pelos licenciandos em Matemática ao longo de atividades de ensino vivenciadas em uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras. Os participantes foram 22 alunos da Universidade Federal do Sergipe, que estavam matriculados na disciplina de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I no segundo semestre de 2019. Desenvolvemos este estudo envolvendo a formação inicial de professores de Matemática tendo como questões norteadoras: Qual o nível de pensamento geométrico alcançado pelos estudantes na segunda metade de um curso de Licenciatura em Matemática? Esses licenciandos conhecem outras abordagens geométricas do teorema de Pitágoras além da usualmente apresentada nos livros didáticos? Quais as possíveis implicações da vivência da sequência didática para a formação docentes desses licenciados? O modelo proposto na teoria de van Hiele classifica em cinco os níveis de pensamento geométrico dos estudantes, atribuindo propriedades a esses níveis e, a fim de orientar o trabalho pedagógico do professor, organiza fases de aprendizagem dentro de cada nível. Por isso, consideramos que tal modelo, estando presente na formação docente em Matemática, poderia contribuir na retomada do ensino de geometria na Educação Básica. Nossa investigação, que empregou abordagem qualitativa, caracteriza-se como uma pesquisa-ação, devido o contato direto da pesquisadora com os participantes, estando eles cientes das etapas da pesquisa. Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: questionário, diário de campo, entrevistas e o desenvolvimento de uma sequência didática. A partir da análise da vivência, os conhecimentos geométricos dos licenciandos foram classificados, em sua maioria, no terceiro nível da teoria de van Hiele. Apesar dos estudantes participantes estarem matriculados na segunda metade da Licenciatura, tendo cursado muitas das disciplinas que solicitam o domínio de várias propriedades, axiomas e postulados da geometria, o que demanda conhecimentos correspondentes ao quarto nível, eles demonstraram conhecer poucas representações geométricas do Teorema de Pitágoras, assim como revelaram conflitos entre aspectos geométricos e algébricos ao descreverem o enunciado desse teorema. Observamos também o desconhecimento dos licenciandos quanto ao modelo teórico de van Hiele. A intervenção contribuiu para o processo de construção dos saberes docentes desses licenciandos em três principais aspectos, os saberes disciplinares, curriculares e profissionais. Isso evidencia as contribuições de abordagens didáticas que articulem teoria e prática na formação inicial de professores que ensinam matemática.

**Palavras chaves:** Formação inicial de professores; Teoria de van Hiele; Nível de pensamento geométrico; Ensino de geometria.

**ABSTRACT**

The little emphasis on teaching of geometry in Basic Education until the end of the 20th century and the prospects for its resumption from the beginning of the 21st century are the subject of studies by several authors, who consider that such abandonment was caused mainly by the teachers' unpreparedness in the face of geometry content. Considering this problem, this research aimed to investigate, based on van Hiele's Theory, the undergraduates' geometric thinking levels in Mathematics during teaching activities and the experience of a didactic sequence on the Pythagorean Theorem. The participants were 22 students from the Federal University of Sergipe, who were enrolled in the subject of Supervised Internship in Mathematics Teaching I in the second semester of 2019. We developed this study involving the initial training of mathematics teachers with the following guiding questions: What is the level of geometric thinking achieved by students in the second half of a Mathematics Degree course? Do these graduates know other geometric approaches to the Pythagorean theorem besides the one usually presented in textbooks? What are the possible implications of experiencing the didactic sequence for the training of teachers of these graduates? The model proposed in van Hiele's theory classifies the students' geometric thinking levels in five, assigning properties to these levels and, in order to guide the pedagogical work of the teacher, organizes learning phases within each level. Therefore, we consider that such a model, being present in the teaching of mathematics, could contribute to the resumption of geometry teaching in Basic Education. Our investigation, which used a qualitative approach, is characterized as an action research, due to the direct contact of the researcher with the participants, being aware of the research stages. The instruments used in data collection were questionnaire, field diary, interviews, and the development of a didactic sequence. From the analysis of the experience, the geometric knowledge of the undergraduates was classified, in its majority, in the third level of the van Hiele's Theory. Although the students are enrolled in the second half of the Degree, having taken many of the course that require mastery of various properties, axioms, and postulates of geometry, which requires knowledge corresponding to the fourth level, they demonstrated to know few geometric representations of the Pythagorean Theorem, as well as the students revealed conflicts between geometric and algebraic aspects when describing the statement of this theorem. We also observed the lack of knowledge of the undergraduate students regarding the van Hiele theoretical model. The intervention contributed to the process of building the teaching knowledge of these graduates in three main aspects, disciplinary, curricular, and professional knowledge. This highlights the contributions of didactic approaches that articulate theory and practice in the initial training of teachers who teach mathematics.

**Keywords**: Initial teacher training; Van Hiele's theory; Geometric thinking level; Geometry teaching.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS

| | |
|---|---|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| BNCF | Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores |
| CNE | Conselho Nacional de Educação |
| CONEPE | Conselho do ensino, da pesquisa e extensão |
| DMA | Departamento de Matemática |
| EJA | Educação de Jovens e Adultos |
| ENEM | Exame Nacional para o Ensino Médio |
| ESI | Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I |
| FFCL | Faculdade de Filosofia Ciências e Letras |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases |
| LMD | Lista Mínima de Definições |
| MEC | Ministério da Educação |
| MMM | Movimento da Matemática Moderna |
| NCPPEM | Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisa em Educação Matemática |
| OECE | Organização Europeia de Cooperação Econômica |
| PAR | Plano de Ações Articuladas |
| PARFOR | Plano de Nacional de Formação de Professores da Educação Básica |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PDE | Plano de Desenvolvimento da Educação |
| PIBID | Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência |
| PNE | Plano Nacional de Educação |
| PNFP | Política Nacional de Formação de Professores |
| SAEB | Sistema de Avaliação da Educação Básica |
| UAB | Universidade Aberta do Brasil |
| UFS | Universidade Federal de Sergipe |
| UFS/SC | Universidade Federal de Sergipe/ São Cristóvão |
| USP | Universidade de São Paulo |

**SUMÁRIO**

# 1. INTRODUÇÃO

Em mim, o ser professora se despertou logo com a conclusão do Ensino Médio, quando escolhi prestar vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente, essa escolha não se deu por sonho ou vocação, mas sim pelo fato das licenciaturas serem os cursos de menor custo e que me proporcionariam trabalho imediatamente, visto a falta de professores na minha região. Dentre as licenciaturas ofertadas na universidade da cidade onde eu morava, aquela que atendia a uma área mais carente de docentes na minha região era a Licenciatura em Matemática. Como eu sempre obtive resultado positivo nesta disciplina na educação básica, optei por cursar tal licenciatura.

Poucos meses após iniciar o curso, consegui uma vaga como professora na rede estadual de ensino, assumindo oito turmas do Ensino Fundamental de duas escolas estaduais. Foi nesse momento que percebi que a docência me escolheu. Eu me encantei com o ato de ensinar, adaptei-me facilmente à dinâmica de organização que é exigida do professor, e aos poucos fui percebendo a minha importância para aqueles que eram “meus alunos”.

Nesse início da carreira docente me senti, muitas vezes, despreparada. Mas, eu acreditava que ao fim da graduação, com a qualificação profissional que eu não tinha, essa sensação de despreparo iria desaparecer. Embora tenha aprendido muitas coisas, essa sensação permanece em mim até os dias atuais. Contudo, por vezes, ela se intensifica quando anos depois, durante a realização do estágio supervisionado, já concluindo uma segunda graduação, Licenciatura em Física, percebi a inexperiência dos estudantes das turmas do Ensino Médio com os objetos geométricos e os instrumentos de medida, e ainda, a defasagem apresentada por eles no entendimento dos conceitos geométricos.

Observar tal inexperiência me levou a repensar a minha prática como professora de Matemática, fazendo-me refletir sobre os métodos e abordagens que eu utilizava em minhas aulas. Isso me fez buscar recursos para inserir os conhecimentos geométricos em minha prática docente. Porém, percebi que os currículos, os livros, e mesmo meus conhecimentos sobre esses conceitos limitavam essa inserção. Nos currículos organizados nas escolas em que eu lecionei, os conteúdos geométricos apareciam no final do ano letivo em cada série, e, por isso, quase sempre não dava tempo de trabalhá-los, ficando sempre para o ano seguinte.

A respeito do domínio dos conceitos geométricos e como incluí-los em meio a outros conteúdos, fui partilhando experiências com outros colegas docentes e busquei empregar materiais que apresentavam os conteúdos misturados. Uma forma de melhor aperfeiçoar meus métodos de ensino. Contudo, sendo uma professora com contrato temporário, a cada início de ano letivo, estava em uma escola diferente, isso impedia a continuidade do trabalho iniciado no ano anterior.

Antes mesmo da conclusão do curso de licenciatura em Física, fui aprovada em um concurso público municipal da rede de ensino de Criciúma, Santa Catarina (SC), para atuar como professora de Matemática na educação básica. Essa conquista foi um passo importante na minha trajetória docente, permitindo a continuidade do meu trabalho, o acompanhamento do aprendizado dos estudantes ano após ano e a participação de formação continuada com o grupo de professores dessa rede de ensino.

Os encontros de formação continuada enriqueceram a minha prática docente e ampliaram a discussão sobre os objetivos de ensinar e aprender matemática na escola básica. Esses momentos foram bastante relevantes na construção da Proposta Curricular Municipal de Criciúma. Nós, professores e professoras, éramos ouvidos a cada passo ao longo do desenvolvimento desse documento. Assim, foi possível discutir a inclusão da geometria dentre os demais conteúdos matemáticos, incentivando sua abordagem ao longo ano letivo, e não somente ao final.

Essa mudança possibilitou que os professores da rede percebessem a defasagem de conhecimentos que tinham em relação aos conteúdos de geometria, por isso esse tema passou a ser abordado com mais frequência nos encontros de formação continuada que participávamos. Foi um desses momentos que despertou em mim a vontade de pesquisar sobre a formação inicial dos professores de Matemática, já que a maioria se sentia dos participantes despreparada para ministrar aulas sobre esses temas. Esse fato ficou ainda mais evidente quando em um dos encontros duas colegas apresentaram uma proposta sobre o ensino de trigonometria elaborada para o Ensino Fundamental.

A proposta era um roteiro de atividades sequenciadas, com ênfase na geometria. Esse roteiro, elaborado e apresentado na Feira Catarinense de Matemática[1] pelas professoras da rede foi desenvolvido por nós em um de nossos encontros. Durante o desenvolvimento das atividades de vivência da proposta, percebemos as diversas

---

[1] Anais da Feira Catarinense de Matemática, ISSN 2447-7427, Scussel e Mrotskoski, 2017, p. 556. Disponível em: http://www.sbem.com.br/feiradematematica/anais_XXXIII_fcmat_2017.pdf

dificuldades do grupo de professores, tanto nos desenhos geométricos e manuseio dos instrumentos (compasso, transferidor e tesoura) quanto na compreensão da sequencialidade das atividades.

Nesse encontro, muitos questionamentos surgiram acerca do nível do pensamento geométrico dos professores e professoras de matemática, em geral. De alguns participantes surgiram indagações do tipo: “eu não consigo desenhar um quadrado perfeito!”, “Como pode eu não saber isso sendo professora de matemática?”. Esses questionamentos novamente me fizeram refletir sobre as deficiências no ensino de geometria na educação básica e na formação inicial de professores.

A deficiência no ensino de geometria na formação de professores e, por consequência nas salas de aula, é discutida há algum tempo por vários autores, a exemplo de Pavanello (1993), Lorenzato (1995), Almouloud et al., (2004), assim como em trabalhos mais recentes, como os de Caldatto e Pavanello (2014, 2015) e Leivas (2012, 2017).

Quanto às dificuldades apresentadas no ensino de geometria no ensino básico, os trabalhos apontam algumas possíveis causas; uma delas é que muitos professores apresentam um conhecimento limitado sobre a geometria para poder trabalhá-la em suas salas de aulas, devido certa defasagem conceitual da formação inicial docente.

Em um artigo, as autoras Caldatto e Pavanello (2014) alertam na mesma direção quando afirmam que a maioria dos professores de Matemática sinalizam dificuldades em lecionar conceitos geométricos. As autoras concluem que isso resulta no fato de que, muitas vezes, esses conhecimentos acabam não sendo lecionados na educação básica, mesmo a Geometria Euclidiana estando presente nos currículos, tanto da educação básica quanto nos cursos de licenciatura em Matemática.

A situação descrita anteriormente corrobora como o apontamento feito pelos autores com relação ao ensino e à aprendizagem de geometria. Essa defasagem na formação dos professores vem mantendo o ensino da geometria ausente na educação básica, conforme ratificado por Caldatto e Pavanello (2015). Esse abandono prejudica a formação dos estudantes da educação básica, que terão seus conhecimentos geométricos limitados a definições, propriedades e fórmulas. De acordo com Mello (2002, p. 8-9),

> [...] ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir.

Assim, algumas estratégias têm sido desenvolvidas a fim de suprir essa defasagem na formação inicial e continuada dos docentes. O exemplo da formação proporcionada pela cidade de Criciúma é uma delas. Com o Plano de Desenvolvimentos da Educação, do ano de 2007, o Ministério da Educação vem fomentando diversos programas para a formação inicial e continuada. Na última década contamos com programas de incentivo ao acesso e permanência nos cursos de licenciatura, uma maior oferta de vagas em cursos de pós-graduação *stricto sensu*, além de programas que aproximam as instituições formadoras das unidades da educação básica.

Participar desse processo formativo, enquanto professora da educação básica, motivou-me a entrar no campo da pesquisa da Educação Matemática a fim de conhecer formas e métodos de aperfeiçoar a minha prática em sala de aula. Ao ingressar no mestrado e aprofundar as leituras sobre a temática, identifiquei que uma das principais problemáticas do ensino da geometria está relacionada à formação inicial dos professores que ensinam Matemática.

Diante disso, ao discutir o tema da pesquisa com minha orientadora, surgiu o interesse em analisar os níveis de pensamento geométrico de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe - Campus São Cristóvão (UFS/SC) ao longo de uma sequência didática que parte do estudo do Teorema de Pitágoras evoluindo ao ciclo trigonométrico. Assim, selecionamos as turmas da disciplina Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I (ESI) do curso de Licenciatura em Matemática da UFS/SC como participantes da nossa pesquisa.

A disciplina de ESI se destaca no curso de licenciatura, porque a partir dela os licenciandos são apresentados ao ambiente escolar, onde futuramente desenvolverão suas atividades profissionais. Em vista disso, a disciplina se propõe a discutir o planejamento docente, projeto político pedagógico presente nas unidades escolares, as diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio e para a formação de professores, assim como tópicos para a formação docente.

As questões que orientam o nosso trabalho são: Qual o nível de pensamento geométrico alcançado pelos estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores? Os licenciandos conhecem outras abordagens geométricas do teorema de Pitágoras, além da usualmente apresentada nos livros didáticos? Quais as possíveis implicações da intervenção realizada para a formação docente desses licenciados?

Assim, temos como objetivo geral investigar, com base na Teoria de van Hiele, os níveis do pensamento geométrico evidenciado nas soluções apresentadas pelos licenciandos em Matemática ao longo de atividades de ensino vivenciadas em uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras.

Como objetivos específicos delimitamos: propor uma sequência didática como medida de intervenção na formação inicial dos licenciandos de Matemática; identificar os níveis de pensamento geométrico dos licenciandos em Matemática por meio da Teoria de van Hiele e; identificar possíveis implicações da intervenção realizada para a formação docentes destes licenciados.

Dessa forma, buscamos adaptar o roteiro de atividades proposto no encontro de formação continuada, em Criciúma, mencionado como elemento motivador desta pesquisa. Para isso, elaboramos uma sequência didática que foi desenvolvida com os licenciandos no decorrer da disciplina de ESI. Estando a pesquisadora envolvida diretamente no ambiente de pesquisa, essa foi caracterizada como uma pesquisa-ação, de abordagem qualitativa.

O modelo de aprendizagem de geometria de van Hiele, que fundamenta nossa pesquisa, foi desenvolvido pelo casal de pesquisadores holandês Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geoldof. O casal motivado pela observação de muitas dificuldades apresentadas por seus alunos no curso secundário (equivalente à nossa etapa final do Ensino Fundamental) desenvolveram suas pesquisas de doutorado buscando identificar a origem dessas dificuldades. Com isso, os pesquisadores propuseram em suas teses, a Teoria de van Hiele, um modelo que vai além de investigar o processo de aprendizagem dos estudantes, orientando também sobre o ensino de geometria. O modelo proposto apresenta um conteúdo que orienta o professor no planejamento e desenvolvimento de suas aulas, conscientizando o profissional da relevância das atividades propostas nas etapas de construção do pensamento geométrico de seus alunos.

O modelo sugere uma sequência de cinco níveis hierárquicos de compreensão dos conceitos geométricos. O avanço entre esses níveis ocorre por meio de atividades adequadas, planejadas e ministradas pelo professor. Para o planejamento do professor o modelo orienta sobre as fases de aprendizagem, separadas em cinco etapas.

Os pesquisadores afirmam que o avanço entre os níveis depende mais das vivências e experiências do aprendiz do que de sua idade ou maturação cognitiva, contrariando a teoria do desenvolvimento cognitivo apresentada por Piaget. Dessa forma, a depender das experiências proporcionadas pelo mediador, que é o professor no caso do ambiente escolar, o estudante avança nos níveis de pensamento geométrico, um a um, atingindo determinado nível após ter passado pelos níveis anteriores.

Concordamos com o pesquisador Pierre van Hiele quando discorre que o professor possui capacidade de adaptar-se ao modelo do pensamento geométrico de van Hiele e no seu papel decisivo em promover o avanço dos conhecimentos matemáticos dos estudantes por meio dos níveis de pensamento geométrico. Assim, optamos em desenvolver nossa pesquisa no ambiente da formação inicial docente empregando princípios da Teoria de van Hiele.

Dentre os principais pesquisadores sobre a Teoria de van Hiele na formação inicial de professores de Matemática, destaca-se Leivas (2009, 2012, 2017), que busca evidenciar a abordagem de conceitos geométricos nesta etapa de formação. Em sua pesquisa de doutorado, Leivas (2009) analisou as componentes curriculares de oito cursos de licenciatura do estado do Rio Grande do Sul. Um dos indicadores para análise das propostas curriculares foi verificar se há "oferta de alguma disciplina que aborda teorias atuais para o ensino de Geometria, como a Teoria de van Hiele" (p. 33).

Como um dos resultados da pesquisa, Leivas (2009) constatou que metade dos cursos analisados aborda, em algum momento da formação inicial de professores de Matemática, aspectos da Teoria de van Hiele. O autor aponta a possibilidade de abordar esses conceitos atrelados aos estudos de uma teoria de desenvolvimento de pensamento geométrico, como a de van Hiele, nos cursos de licenciatura. Esse autor permanece desenvolvendo novas pesquisas sobre a temática, fomentando os estudos deste campo (LEIVAS, 2009, 2012, 2017).

Esperamos que, por meio da elaboração e desenvolvimento de uma sequência de didática, nossa pesquisa possa contribuir para a formação inicial dos participantes. Ainda, que a relação estabelecida entre o modelo de van Hiele e as atividades desenvolvidas na sequência didática possibilite a análise dos níveis de pensamento geométrico em que se encontram os licenciandos.

Para tanto, este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Na primeira seção, como visto, apresentamos a introdução, na qual descrevemos a trajetória da pesquisadora em formação, as motivações para desenvolvimento do trabalho, questões norteadoras, relevância do tema, objetivos pretendidos e alguns estudos que contribuíram para a realização desta pesquisa.

Na seção 2, apresentamos um panorama do ensino de geometria na educação básica brasileira e formação de professores, situando o leitor a respeito dos aspectos históricos desses temas. Trazemos alguns estudos que apontam a formação inicial como um dos motivos para a ausência do ensino da geometria na educação básica, assim como as políticas nacionais que se propõem a enfrentar esse problema. Finalizamos a seção apresentando o curso de formação de professores de Matemática da UFS-SC, ambiente de nossa pesquisa.

A seção 3 apresenta um estudo histórico e teórico sobre a Teoria de van Hiele, assim como os níveis de pensamento geométrico, suas propriedades e as fases de aprendizagem propostas no modelo descrito na teoria. Para concluir, trazemos trajetória da teoria e apresentamos alguns estudos recentes.

A seção 4 é composta pelos aspectos metodológicos da pesquisa, os instrumentos utilizados, validação da sequência didática elaborada e a descrição de como aconteceu o processo de coleta de dados.

O contexto investigado é apresentado na seção 5, em que discorremos sobre o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe/SC, abordando questões da sua estrutura curricular, bem como o componente curricular de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I, ambiente de nossa pesquisa. Ainda nesta seção, caracterizamos os participantes, apontando suas especificidades.

Na seção 6, discorremos sobre as atividades realizadas durante os encontros no desenvolvimento da sequência didática, discutindo os resultados atingidos.

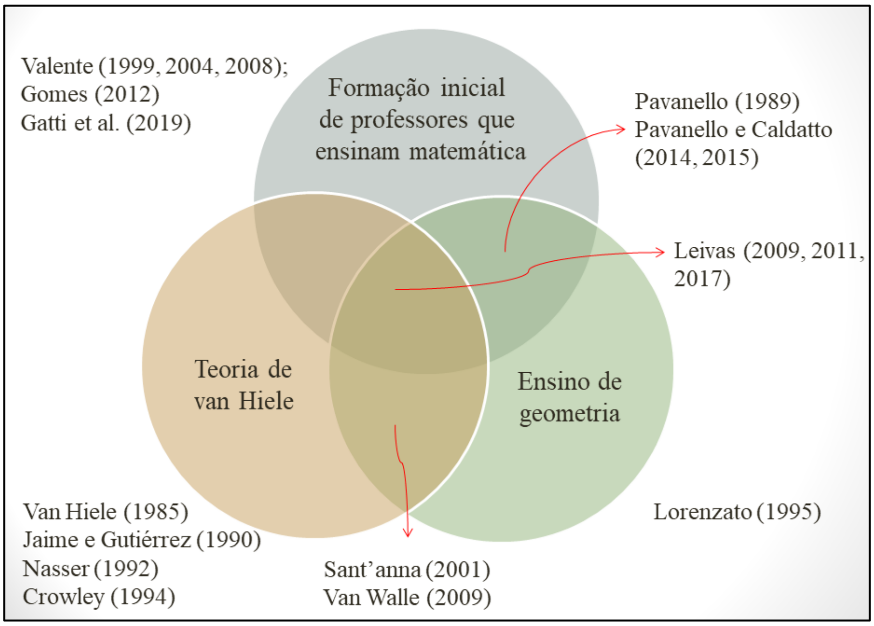
Por fim, finalizamos com a seção 7, apresentando nossas considerações finais, destacando os principais resultados que respondem aos objetivos deste trabalho.

# 2. UM PANORAMA DO ENSINO DE GEOMETRIA E DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Na presente seção discorremos sobre os diferentes momentos históricos que impulsionaram as reformulações curriculares nacionais. A Matemática está evidenciada em cada uma das reformulações, e dentro dessa área de conhecimento, destacamos as propostas variadas de abordagem da geometria. Em vista disso, dada a relevância desta fundamentação para o desenvolvimento da nossa pesquisa, buscamos identificar outros estudos que pudessem sustentar a temática abordada nela. Para tanto, nos valemos de pesquisadores da história da Educação Matemática, como Valente (1999, 2004, 2008) e Gomes (2012), e de pesquisas desenvolvidas no campo do ensino da geometria, como as de Pavanello (1989); Lorenzato (1995), Pavanello e Caldatto (2014, 2015), para embasar aspectos históricos e metodológicos deste campo de ensino.

Mas, não há como refletir a respeito da educação escolar sem mencionar a formação de professores que nela atuam; por isso, também abordaremos acerca da formação docente em Matemática no Brasil. Nesse viés, abordamos aspectos históricos da formação de professores e destacamos algumas pesquisas sobre Educação Matemática, desenvolvidas neste campo, tais como: Fiorentini (1994, 1995); Ferreira (2009); Gatti et al. (2011, 2014, 2019); Souza e Silva (2012) e; documentos de orientações curriculares. A Figura 1 ilustra a articulação teórica que sustenta nossa pesquisa.

**Figura 1:** Articulação teórica da pesquisa.




Fonte: Elaborado pela autora.

## 2.1 O ensino de geometria nos cenários da educação básica e na formação de professores

As primeiras ações destinadas à formação de professores no Brasil tiveram início com a Lei Escola das Primeiras Letras, no ano de 1927. Além de listar os conteúdos a serem ensinados, essa lei evidenciou a necessidade da preparação dos professores para este fim, responsabilizando as províncias pela criação de instituições formadoras. Segundo Valente (2004), até a criação dessas instituições, esses profissionais formavam-se nas escolas de engenharia.

Foi também com a criação Lei Escola das Primeiras Letras que ocorreu a inserção dos conteúdos geométricos na educação primária, com caráter mais prático, voltado para as necessidades sociais da época. Nesse momento, os conteúdos matemáticos abandonam o caráter técnico-instrumental, utilizado até então nas escolas militares. No ensino secundário, a geometria passa a ser requisitada nos exames para ingresso aos cursos superiores, contribuindo para a ascensão dos conteúdos matemáticos à categoria de saber de cultura geral.

Além dos conteúdos de geometria, faziam parte do currículo das escolas secundárias o ensino de aritmética, álgebra e trigonometria. Porém, o ensino desses conteúdos era realizado por distintos professores, cabendo a esses guiar seus alunos nos pontos cobrados nos exames (VALENTE, 2008). Assim, esses pontos organizavam toda matemática escolar e seu ensino. Dessa forma, tal ensino, juntamente com a prática docente, permaneceu fragmentado por cem anos.

Somente na década de 1920 foram iniciadas as reformas no sistema de ensino brasileiro. Nessa época, o ensino primário e a formação de professores para esse nível foram amplamente influenciados pelo movimento pedagógico conhecido por Escola Nova. Esse movimento apresentava diversas correntes filosóficas. Contudo, Miorim (1998, p. 90) destaca duas ideias fundamentais às diversas correntes: o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola situações da vida real". Esses princípios trouxeram mudanças aos primeiros anos de escolarização, sobretudo na abordagem dos conteúdos matemáticos.

Para que as mudanças evocadas pelo movimento da Escola Nova se efetivassem nas instituições de ensino era necessário que os profissionais educadores seguissem às novas diretrizes pedagógicas. Para isso, no ano de 1929, foi criada a Escola de Aperfeiçoamento, oferecendo as docentes em exercício no ensino primário um curso alinhado com os princípios do movimento.

As mudanças propostas para o ensino secundário, discutidas internacionalmente no 1º Movimento de Reforma do Ensino de Matemática, foram impulsionadas no Brasil por Euclides Roxo[2] e algumas foram aprovadas com a Reforma Francisco Campos, no ano de 1931.

Esse Movimento orienta a alteração de diversos aspectos do ensino em território nacional, dentre eles: a estruturação do ensino (sistema seriado); sua delimitação em sete anos (cinco anos de curso fundamental e dois anos de curso complementar); a unificação dos conteúdos matemáticos (Aritmética, Álgebra e Geometria) em uma única disciplina denominada Matemática; a presença da Matemática em todos os anos do curso fundamental e em no mínimo um dos anos no curso complementar, a depender do ensino superior desejado pelo estudante e; a obrigatoriedade da frequência do ensino secundário pelo estudante que desejasse ingressar no curso superior (PAVANELLO, 1989).

Com a instituição da disciplina Matemática, a reforma Francisco Campos lança uma proposta curricular bastante detalhada, definindo, além dos conteúdos a serem ensinados no ensino secundário, as metodologias, os objetivos e as finalidades para essa disciplina (GOMES, 2012). A unificação dos conteúdos em uma única disciplina amplia o objetivo a ser alcançado.

> O objetivo do ensino da Matemática deixava de ser apenas o "desenvolvimento do raciocínio", conseguido através do trabalho com logica dedutiva, mas incluía, o desenvolvimento de outras "faculdades intelectuais", diretamente ligada à utilidade e aplicações da Matemática (MIORIM, 1998, p. 94).

A proposta enfatizava o conceito de função como sendo o centro do ensino; esse conceito deveria ser apresentado intuitivamente, e desenvolvido de forma progressiva ao longo dos anos. A ideia de que a aprendizagem deveria partir da intuição também era recomendação ao ensino dos conceitos geométricos, que deveriam ser introduzidos com atividades de familiarização, experimentação e construção. Sobre as orientações ao ensino da geometria presentes na proposta, a autora Miorim (1998, p. 97) destaca:

---

[2] Nascido no ano 1890, na cidade de Aracaju/SE, formou-se em Engenharia Civil na Escola Politécnica no Rio de Janeiro em 1913. Iniciou sua vida profissional em 1915, como professor substituto de aritmética do Colégio Pedro II, pelo prazo de três anos. Com o falecimento de Eugênio de Barros Raja Gabaglia, então professor efetivo dessa disciplina, Euclides Roxo assumiu a cátedra em 1° de outubro de 1919, em conformidade com artigo 42 do Decreto 11530 e de acordo com documento constante no Arquivo Pessoal Euclides Roxo (APER) (DUARTE, 2019).

> [...] percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, quer em sua posição fixa, quer através de seus movimentos. Com respeito a este último aspecto, enfatiza-se a importância de serem examinadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação. Apesar de não ser eliminado o estudo da geometria dedutiva, que entretanto, ficará restrito a geometria plana, sugeria-se que ele fosse introduzido de forma gradual e tivesse sempre por base as observações intuitivas e a compreensão da necessidade de uma demonstração (MIORIM, 1998, p. 97).

As propostas inovadoras presentes na reforma Francisco Campos para o ensino de Matemática sofreram diversas críticas e dificuldades de adaptação. O rompimento com método tradicional de ensino empregado por longos anos, a difícil relação dos professores com a nova estrutura curricular e a ausência de material didático adaptado com as novas diretrizes eram os principais argumentos dos críticos contrários à implementação das novas propostas.

> Havia os defensores do ensino das humanas clássicas, e especificamente do latim, como o padre Arlindo Vieira, que criticavam fortemente o que consideravam um excesso de conteúdos no programa da reforma, bem como a fusão das disciplinas matemáticas em uma única disciplina (GOMES, 2012, p. 20).

O grupo docente também enfrentou dificuldade para se adaptar as propostas das novas orientações para o ensino dos conteúdos matemáticos:

> Os professores, acostumados ao modelo tradicional do ensino da matemática, não a conseguiam trabalhar a partir dessa nova abordagem. E com a ausência de cursos de formação que oferecessem subsídios para essa alteração curricular, o livro didático passou a ser encarado como a principal fonte de disseminação da reforma. [...] Os professores, na ânsia de aplicar as diretrizes da reforma, acabaram unindo fragmentos de bibliográficas distintas (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 116).

Neste momento é importante questionar: quem eram esses professores? Até 1934, quando surgiram as faculdades para formação de professores, eles eram autodidatas ou profissionais liberais saídos dos cursos militares e das escolas de engenharia (VALENTE, 2008). Foi nas Universidades de São Paulo (USP) e Rio de Janeiro, criadas em 1934 e 1935, respectivamente, que tiveram início os cursos específicos de formação para o magistério secundário, “e este foi o contexto da implantação da Reforma Campos, professores com formação precária e ausência de material didático” (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Com relação aos objetivos da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), instituída na USP, Ferreira (2009, p. 32) afirma que "a pesquisa era seu principal objetivo e, consequentemente, a formação de professores como objetivo secundário, pretendendo suprir uma carência de professores para o ensino secundário". Nos anos seguintes, amplia-se a criação de outras Faculdades de Filosofia, em decorrência de ações que, de acordo com Pavanello (1989, p. 155), continuaram insuficientes.

> O número de formados, não é, no entanto, suficiente para suprir as necessidades do ensino secundário. Principalmente porque este, pelo menos no estado de São Paulo, experimenta uma grande expansão, principalmente na rede estadual, a partir da década de 30 (PAVANELLO, 1989, p. 155).

Os cursos para formação de professores oferecidos tinham um currículo de três anos de duração, e, ao serem finalizados, concediam ao estudante o grau de bacharel. Para ingressar na carreira do magistério no ensino secundário era necessário que o bacharel realizasse o Curso de Didática, com duração de um ano, para obter o grau de licenciando. Dessa forma, em um curso de quatro anos, era concedido ao candidato bacharelado (três anos) e licenciatura (um ano); esse formato ficou conhecido como esquema "3+1".

Juntamente à reestruturação, novas orientações relacionadas ao ensino de Matemática, influenciadas também por Euclides Roxo, foram propostas na reforma Capanema, publicada em 1942. As principais diferenças entre os programas instituídos pelas reformas Francisco Campos (1931) e Capanema (1942) para o ensino de Matemática, especificamente geometria, são apontados por Pavanello (1989, p. 156):

> Em primeiro lugar, não mais se insiste em que os três assuntos – aritmética, álgebra e geometria – sejam abordados em cada uma das séries do curso ginasial. A geometria é ainda abordada nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A aritmética (prática) é, no entanto, ministrada só nas séries iniciais, enquanto álgebra é programada para as duas últimas. Progressões, logaritmos e exponenciais e funções circulares, que constavam do programa da 4º série (programa de 1931) passam a figurar nos cursos clássico e científico. No 3º ano são estudados limites e derivadas. A geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º (PAVANELLO, 1989, p. 156).

Com as novas orientações na distribuição dos conteúdos matemáticos promovida pela mais recente reforma, autores e editoras de coleções de livros didáticos, antes destinados a atender às recomendações da reforma Campos, reorganizam as coleções de cinco para quatro volumes e as colocam no mercado para atender à nova estruturação do ensino secundário (VALENTE, 2004).

Apesar de reunir aritmética, álgebra e geometria na disciplina Matemática, a partir de 1931, com a reforma Campos, percebe-se ainda uma fragmentação ao se encontrar esses temas em diferentes capítulos dos livros didáticos da época. Pavanello (1989, p. 155) esclarece "os três temas são programados em cada série, não parece haver, no entanto, uma preocupação de trabalhá-los integralmente", mesmo após a reforma Capanema. Segundo Valente (2008, p. 19), com essa fragmentação curricular da disciplina Matemática cada professor "foi ficando especialista numa determinada série escolar", enfraquecendo assim o ensino integral da matemática.

Sobre a formação pedagógica para esse período, Ferreira (2009) informa que, em 1946, as cinco disciplinas que formavam o Curso de Didática foram reduzidas a três. Permaneceram as disciplinas Psicologia da Educação, Didática Geral e Didática Especial, sendo excluídas da grade Biologia e Sociologia Educacional. O depoimento do professor Ubiratan D'Ambrósio, licenciado em Matemática pela FFCL da USP, elucida a realidade da formação de professores nos anos posteriores à redução das disciplinas (1951-1955).

> No meu tempo, o curso de Matemática eram quatro anos de bacharelado, e fazíamos três disciplinas pedagógicas: Didática Geral, Didática Especial e Psicologia da Criança e do Adolescente. Essas eram as três disciplinas obrigatórias que você fazia além do bacharelado. [...] Então, você poderia fazer o curso de educação junto a esse 4º ano (D'AMBRÓSIO apud FERREIRA, 2009, p. 36).

Além de poucas disciplinas de cunho pedagógico nos cursos de formação de professores, essas sofriam um desprestígio frente às disciplinas chamadas de científicas. Com análise dos depoimentos de diferentes sujeitos, Ferreira (2009, p. 41) atrela o descrédito dos estudos superiores de educação "ao fato de que seus primeiros docentes vinham da antiga Escola Normal (instituição de nível médio), e foram elevados, com as respectivas cadeiras ao ensino superior", enquanto as disciplinas "científicas" eram lecionadas por catedráticos e estrangeiros. De acordo com Ferreira (2009, p. 46), acreditava-se que:

> Para lecionar matemática não era necessário estudar questões pedagógicas, e sim conhecer muito bem a matéria que iria lecionar. Nesse período a Didática da Matemática ainda era muito incipiente, e isso fez com que os matemáticos também não a valorizassem. [...]. Vemos que a área pedagógica foi estigmatizada como um "terreno movediço" (FERREIRA, 2009, p. 46).

Em outro depoimento[3] apresentado por Ferreira (2009), percebemos novamente a valorização das disciplinas “científicas”, contudo o entrevistado ressalta a falta que fez as disciplinas pedagógicas e as práticas pedagógicas:

> Então, eu tive a felicidade de ter a nata da USP dando aula para mim! Eu sou produto deles! Então, isso aí foi prejudicial aos meus primeiros anos de magistério porque eu passei para os meus alunos aquela linha de conduta e meus alunos sofreram comigo. Eu procedia com os meus alunos da mesma forma à dos meus professores. Errado! Aquilo é para curso superior, e não para curso médio! Nós tivemos uma professora de Didática Especial que ficou naquilo, não dava pra usar no colégio! Não dava! Não tivemos treinamento! Não tínhamos estágio! Isso fez falta pra nós! (SOUZA, 1998 apud FERREIRA, 2009, p. 47)

Podemos perceber como foi a formação de professores nesse período, uma supervalorização das disciplinas “científicas” e uma precarização das disciplinas pedagógicas ou ausência de práticas pedagógicas, seja pela contração de professores para ministrá-las, seja na relevância curricular que assumiram. No entanto, o início dos anos 1960 evocou novidades tanto para o ensino da Matemática quanto para a formação inicial de professores.

No âmbito do ensino, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) chegou ao Brasil por influência dos matemáticos franceses que lecionavam nas Universidades, na USP principalmente. Ao mesmo tempo, educadores e matemáticos, na Europa especialmente na França, promoviam eventos e propagavam ideias renovadoras para o ensino da Matemática. No ano de 1959, um evento da Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE) juntou especialistas de 20 países em um debate sobre as mudanças para o ensino de Matemática no nível secundário.

> O MMM tinha, como um de seus principais objetivos, integrar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações e funções (GOMES, 2012, p. 24).

Em contradição ao método de ensino, predominantemente empregado até o momento, centrado na apresentação de regras e mecanização dos procedimentos, o movimento enfatizava os aspectos lógicos e estruturas matemáticas. No entanto, para o campo da geometria, os representantes do MMM preconizavam a substituição da abordagem clássica, baseada nos Elementos de Euclides adotada há séculos, pela

---

[3] Depoimento de Sylvio Andraus, aluno do curso de Matemática FFCL da USP nos anos 1950-1953, retirado de uma entrevista concedida à Gilda Lúcia Delgado de Souza (1998) apud Ferreira (2009).

abordagem das transformações geométricas, salientando o estudo dos conceitos de vetor, espaço vetorial e transformação linear.

Logo no começo do MMM, início dos anos 1960, os livros didáticos publicados já apresentavam a preocupação com as estruturas e com a utilização da linguagem da teoria dos conjuntos (PAVANELLO, 1989). Dessa forma, a disseminação das ideias do movimento entre a grande massa de professores foi por meio dos livros didáticos, principalmente os elaborados pelo autor, reconhecido nacionalmente, Osvaldo Sangiorgi[4]. Sobre a reformulação dos livros didáticos para o ensino da Matemática com base nas orientações do Movimento da Matemática Moderna, a autora Pavanello (1989, p. 163) salienta:

> Se essa orientação, porém, pode ser facilmente posta em prática no tocante à álgebra e à aritmética, o mesmo não acontece com relação à geometria. Esta não pode mais ser trabalhada à maneira tradicional. Desta forma, num primeiro momento, opta-se por acentuar, nesses livros, as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, por adotar, para a geometria, a mesma simbologia usada para os conjuntos em geral, e por trabalhá-la segundo uma abordagem "intuitiva". Esta abordagem se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização de teoremas como postulados, mediante os quais podemos resolver alguns problemas. Não existe, agora, uma preocupação em construir uma sistematização a partir das noções primitivas empiricamente elaboradas (PAVANELLO, 1989, p. 163).

O estudo da geometria, antes, centrado em reconhecer as figuras geométricas, descrever suas propriedades para então deduzir as implicações que nelas estão presentes, pela influência do MMM passa a ser um estudo focado nas propriedades formais de sua estrutura, pelas transformações que ela possibilita ou não. Essa nova abordagem apresentou diversos desafios, desde sua contestação no ambiente acadêmico até a resistência dos professores (CALDATTO; PAVANELLO, 2015), que se sentiam desabilitados para lecionar a Matemática, principalmente a Geometria, como propunha o movimento.

> Um dos efeitos da disseminação das ideias do MMM, de acordo com vários autores, foi uma diminuição da presença dos conteúdos geométricos nas práticas pedagógicas realizadas nas escolas, tanto pelo papel de relevo adquirido pela álgebra quanto pela falta de subsídios dos professores para efetivar as propostas modernistas para a geometria (GOMES, 2012, p. 25).

---

[4] Liderança do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) fundado em São Paulo em 1961, este grupo teve papel importante na disseminação das ideias do MMM (GOMES, 2012, p. 23).

A análise realizada por Pavanello (1989, p. 165) sobre a situação dos professores na época corrobora com Gomes (2012), que aponta que os professores, em maioria, já apresentavam dificuldades em lecionar Geometria na abordagem tradicional, sendo agravadas quando foi solicitado lecionar a geometria sob a perspectiva das transformações, uma perspectiva que não havia sido tratada em suas formações iniciais. Deste modo, Caldatto e Pavanello (2015, p. 120) concluem que "um dos maiores legados do Movimento da Matemática Moderna para o processo educacional no Brasil foi o abandono da geometria na escola básica que perdura até meados da década de 2010".

Na década de 1960, houve também mudanças importantes na formação inicial de professores. No ano de 1962, por meio do Parecer Nº 292/62[5], a Prática de Ensino se configurou como disciplina em todos os cursos de Licenciatura do país, instituindo o estágio supervisionado obrigatório na formação de professores da educação básica. Apesar da noção de prática de ensino estar presente há muito tempo na formação de professores, desde a Escola Normal e do Instituto de Educação da USP, sua regulamentação propiciou a efetivação da Prática de Ensino como disciplina nos cursos de formação de professores.

Atrelado à implementação da Prática de Ensino como disciplina formal estabeleceu-se também um currículo mínimo para os cursos de Licenciaturas brasileiras, formado pelas disciplinas: Psicologia da Educação (adolescência e aprendizagem), Elementos de Administração Escolar, Didática, Prática de Ensino (sob a forma de estágio supervisionado). Além da Prática de Ensino, o currículo mínimo apresentado no Parecer Nº 292/62 tinha por objetivo familiarizar o licenciando com o aluno e o método da escola básica, buscando "[...] trazer o necessário realismo àquelas abordagens mais ou menos teóricas da atividade docente" (BRASIL, Parecer Nº 292/62, Documenta nº 10, p. 97).

Segundo Ferreira (2009), os normativos presentes no Parecer Nº 292/62, além de reorganizarem as disciplinas pedagógicas presentes no currículo dos cursos de licenciatura, extinguia o "esquema 3+1" e igualava a licenciatura ao bacharelado, atribuindo-lhe um grau equivalente ao bacharelado.

Enquanto no âmbito da pós-graduação, Fiorentini (1994, p. 106), aponta que a implementação das disciplinas Prática de Ensino bem como o Estágio Supervisionado, "abriram um campo profissional para o surgimento nas universidades de especialistas em didática e metodologias do ensino da matemática". Assim, os próprios professores dessas

[5] Com a aprovação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei Nº 4 024/61), foi criado o Conselho Federal de Educação. Este órgão passou a emitir pareceres, trazendo regulamentação aos cursos de Licenciatura.

disciplinas puderam desenvolver e orientar pesquisas sobre a temática, representando uma autonomia para a Prática de Ensino, que pôde construir seus conteúdos específicos, amparados no desenvolvimento das áreas de conhecimento (FERREIRA, 2009).

Apesar das novas orientações para os aspectos pedagógicos das Licenciaturas, nenhuma recomendação nova foi apresentada para a abordagem dos conteúdos específicos trabalhados nesses cursos, que mesmo após a efetivação das Práticas de Ensino, continuavam a compor três quartos da grade curricular desses cursos (FERREIRA, 2009). Dessa forma, as dificuldades dos professores em lecionar os conteúdos geométricos, seguindo o ideário modernista do MMM, permaneciam sem perspectiva de serem superadas.

Apesar da influência do MMM no currículo escolar brasileiro, este pode não ter sido o único responsável pelo abandono da geometria no país ao longo da educação básica. Em 1971 foi publicada uma nova Lei de diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus (LDB Nº 5.692). A nova legislação “dava às escolas liberdade na escolha de seus programas de ensino, o que possibilitava aos professores de Matemática o abandono do ensino de geometria ou seu adiamento para o final do ano letivo, se houvesse tempo para isso” (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 120). Dessa forma, tendo em vista que o cenário construído era de valorização da álgebra e aritmética, o ensino da matemática concentrou-se quase que unicamente nesses campos.

> A orientação de trabalhar geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra - mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. A Lei 5.692/71, por sua vez, facilita esse procedimento ao permitir que cada professor adote seu próprio programa “de acordo com as necessidades da clientela” (PAVANELLO, 1989, p. 165).

A Lei supracitada, publicada em meio ao período de Regime Militar (1964-1985), reorganizou o sistema educacional brasileiro que se configurou como Ensino de 1º grau, unindo Ensino Primário e o Ensino Ginasial, e de 2º Grau, correspondente ao Ensino Secundário, e extinguiu o exame de admissão previsto para acesso a este nível, democratizando o acesso ao ensino secundário para a maioria da população jovem. A proposta do 2º Grau, como curso profissionalizante buscava diminuir a demanda do ensino superior, que não dispunha de vagas suficientes para todos os concluintes desta fase;

contudo, sua implementação não foi possível nas escolas públicas que careciam de corpo docente e materiais para sua implementação (GOMES, 2012).

No que tange o ensino superior, o Regime Militar aprovou a Reforma Universitária por meio da Lei Nº 5540/68, prevendo uma reformulação neste nível. As modificações pretendiam conciliar a expansão exigida com aplicação mínima de recursos. As principais mudanças empregadas segundo Pavanello (1993) foram: “a departamentalização, a matrícula por disciplina (agora semestrais), a criação do curso básico e a institucionalização da pós-graduação, além da unificação do vestibular (agora somente classificatório) e da criação das licenciaturas curtas”, essas mudanças entraram em vigência com o Decreto-Lei Nº 477/69.

Com a política de aplicação mínima de recursos e o aumento da demanda pelo ensino superior, o Estado libera a criação de inúmeros cursos superiores particulares, ficando a cargo da iniciativa privada ampliação das vagas para diversos cursos. Os cursos de licenciatura, principais alvos das instituições particulares criadas nesse período, apresentam algumas limitações. Segundo Pavanello (1993), o ingresso facilitado, a dissociação entre as disciplinas pedagógicas e específicas (uma questão antiga) e o modelo de licenciatura curta, são algumas críticas que tornam a qualidade desses cursos duvidosa, sendo necessária uma formação complementar aos professores da rede pública formados, em maioria, por essas instituições.

Pavanello (1989, p. 148) salienta que apesar da oferta maior de vagas nos diferentes níveis de ensino, o “dualismo da escola brasileira” se mantém ainda no fim dos anos 1980. O objetivo de universalizar a escola não é atingido nem na primeira etapa no 1º Grau (antigo primário), as escolas particulares interpretam a Lei a sua maneira e continuam preparando seus frequentadores para o acesso ao ensino superior, estendendo dessa forma o aspecto dual para o ensino superior, as universidades públicas continuam a atender a elite brasileira enquanto as classes populares têm acesso quase que somente aos cursos mantidos pela iniciativa privada.

O período militar absorveu a ideologia empresarial para o ambiente escolar, representado pelo tecnicismo educacional. O principal objetivo da pedagogia tecnicista era de racionalizar os objetivos e mecanizar os processos, enfatizando o fazer em detrimento de outros aspectos como o compreender, o refletir, o analisar e o justificar/provar (FIORENTINI, 1995). Para Fiorentini e colaboradores (1998, p. 313), os anos 1970 ficaram marcados como

> [...] período áureo do tecnicismo no Brasil, tanto a pesquisa quanto os programas de formação/seleção de professores passam a valorizar os aspectos didático-metodológicos, sobre as tecnologias de ensino, nomeadamente os métodos e técnicas especiais de ensino.

Dessa forma, o sistema educacional teve seu foco voltado para a instrumentalização do ensino enquanto a formação inicial de professores salientava o domínio de comportamentos e habilidades capazes de serem observadas. As práticas educacionais tecnicistas foram fortalecidas durante todo o período do Regime Militar e muitos elementos dessa prática e dificuldades enfrentadas nessa época permanecem presentes até os dias atuais (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

A ampliação da rede educacional brasileira, prevista na LDB de 1971, exigia recursos financeiros, tanto para provisão de espaços físicos quanto para compor um corpo docente qualificado, que mais tarde foram buscados em instituições internacionais. Essa captação de recursos financeiros foi impulsionada pela queda do Regime Militar em 1985 e aprovação da Constituição da república Federativa do Brasil em 1988, que no Artigo 205 menciona:

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988, p. 137).

A concessão de empréstimos por instituições internacionais para fomentar o sistema educacional brasileiro estabeleceu diversas condições, como a implantação de um sistema de avaliação do desempenho dos estudantes. O resultado nessas avaliações garantiria/evidenciaria que os recursos requeridos estariam sendo aplicados nessa frente. O processo de avaliação do sistema educacional no país como afirma Caldatto e Pavanello (2015, p. 121) “determina a implementação de parâmetros nacionais tanto em termos curriculares quanto em termos de avaliação do sistema”.

Enquanto o país passa por esse processo de democratização e efetivação do acesso ao ensino básico (1º e 2º Grau), o ensino de geometria continua abandonado, conforme Lorenzato (1995), que constata que esse ensino permanece ausente ou quase ausente das salas de aula. Segundo o autor, são diversas as causas para esse abandono, atentando para duas que estão conectadas diretamente às salas de aula: os professores e os livros didáticos. Sobre o corpo docente, Lorenzato (1995, p. 03) orienta:

> [...] a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. [...]

> Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la (LORENZATO, 1995, p. 03).

Ao argumentar sobre o papel do livro didático na persistência do abandono do ensino da geometria na educação básica, Lorenzato (1995) questiona o valor atribuído pelos professores a esse material, seja por causa de uma formação inicial insatisfatória, seja causado por longas jornadas de trabalho as quais são submetidos. Sendo esse recurso importante para os professores, os conteúdos geométricos dele acabam negligenciados também porque:

> Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria Matemática, a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula (LORENZATO, 1995, p. 04).

Atrelado à prática docente e aos materiais didáticos, aparecem os programas e guias curriculares da época que afetam indiretamente o ensino geométrico. Segundo Lorenzato (1995, p. 4), “com raríssimas exceções, eles colocam a Geometria como complemento ou apêndice e de modo fortemente fragmentado, por assunto ou por série; geralmente a Geometria é apresentada rigidamente separada da Aritmética e da Álgebra”, e esses servem de orientação para autores e editoras na produção dos livros didáticos.

Contudo, no ensino superior, a década de 1980 é caracterizada como um período de transição, podendo ser observado pelos programas disciplinares da época. Como resultado de uma revisão crítica do MMM, os programas disciplinares passaram a incorporar atividades de investigação em projetos de ensino, ignorando os conteúdos da matemática moderna assim como seu ensino focado nas suas estruturas algébricas, passando a enfatizar os conhecimentos da psicologia da educação nos processos de ensino e aprendizagem (FERREIRA, 2009).

A discussão sobre o fracasso das ideias do MMM avança no Brasil na década de 1980, com isso, educadores matemáticos realizam um esforço para recuperar o ensino da geometria, não apenas no ensino superior como foi citado, mas também na educação básica. Segundo Pavanello (1989), as dificuldades enfrentadas por professores de diversos cursos no ensino de alunos com baixo conhecimento em geometria que apresentam dificuldades no nível básico como representação geométrica, fomentaram o movimento dos educadores em desenvolvê-lo.

Este movimento de recuperação dos conteúdos geométricos pode ser observado no estudo realizado por Dário Fiorentini, no ano de 1994, que investigou 204 relatos de pesquisas em Educação Matemática realizadas entre os anos 1971 e 1994. Do total de trabalhos, o pesquisador identificou 65 deles focados em Ensino/Aprendizagem de tópicos específicos da Matemática. Dentre esses, 18 trabalhos eram voltados ao ensino da Geometria, representando mais de 27% dos trabalhos desenvolvidos sobre tópicos específicos.

Acompanhando o crescimento desse campo de pesquisa, no ano de 1984 foi instituído o primeiro programa de pós-graduação na área de Educação Matemática do país, na Universidade Estadual Paulista de Rio Claro. Este programa foi responsável por 22 dos 204 trabalhos investigados por Fiorentini (1994), conforme pesquisa citada anteriormente. Ao longo dos anos 1980 e 1990 outros programas foram criados, distribuídos em diversas regiões do Brasil, complementando os programas de pós-graduação em Educação que passaram a oferecer linhas de pesquisa com foco em Educação Matemática.

Outra representação do avanço da Educação Matemática foi a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, em 1988, motivada pelo crescente movimento associativo entre professores e pesquisadores comprometidos com o ensino de Matemática. No ano anterior aconteceu o I Encontro de Nacional de Educação Matemática. Estes foram marcos históricos para a Educação Matemática representaram a concretização de um espaço de comunicação, debate e divulgação de experiências nos campos do ensino e da pesquisa, atribuindo uma identidade a essa área de pesquisa (FERREIRA, 2009).

Os movimentos de democratização do país foram marcados também por renovação nas legislações, de forma a atender as demandas atuais. Em 1996 é sancionada a nova Lei de Diretrizes e Bases Nº 9.394/96, que entre outras coisas apresenta uma inovação na organização da educação básica brasileira apresentada na antiga LDB Nº 1971. Além de obrigatória e gratuita para todos entre 4 e 17 anos de idade, a educação básica passou a ser organizada em três níveis: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Para cada um dos níveis de ensino estabelecidos na LDB Nº 9.394, no ano de 1998, foram editados Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os PCN são um conjunto de documentos que passaram a orientar o trabalho docente, apresentando o currículo, principais conteúdos e objetivos de cada uma das disciplinas que compõem os níveis de ensino.

Quanto ao ensino de geometria, objeto de estudo deste trabalho, a abordagem indicada nos PCN de Matemática aponta para a retomada da geometria euclidiana iniciada pela exploração visual e tátil por meio de atividades experimentais, superando as excessivas formalizações e a linguagem da teoria dos conjuntos que comprometeram o aprendizado da Geometria no passado (BRASIL, 1998).

Ao lançar os PCN, o governo federal implementou diversas avaliações para o ensino básico abrangendo todo território nacional, sendo a primeira delas o Exame Nacional para o Ensino Médio (ENEM), em 1998. Este é um exame anual que analisa o desempenho do estudante ao final da educação básica, e no ano de 2009 passou a ser utilizado no processo de seleção ao ensino superior, principalmente das instituições federais. Com intenção de aprimorar e ampliar o processo de avaliação do ensino ministrado nas escolas públicas, no ano de 2005, é instituído o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Atuante até os dias atuais, o SAEB organiza as avaliações nos diferentes níveis da educação básica.

Em relação aos conteúdos geométricos, Caldatto e Pavanello (2015) apontam que os resultados apresentados pelas avaliações da educação básica indicam que apesar do esforço governamental para retomar o ensino de geometria nas escolas brasileiras, incluindo esses conteúdos nos currículos nacionais e estaduais, esse objetivo está distante de ser alcançado.

O ensino de geometria, ou a ausência dele, é evidenciado no decorrer do tempo em todas as reformas e planejamentos educacionais. As pesquisas referenciadas em nosso trabalho apontam que o principal motivo para o abandono do ensino da geometria na educação básica tem sido as lacunas na formação inicial dos professores. Dessa forma, conhecer os aspectos históricos que contribuíram para a atual situação frente ao ensino da geometria nos permite identificar as medidas que buscam enfrentar esse problema e retomar a abordagem dos conhecimentos geométricos no ensino básico.

Com um dos principais acontecimentos que culminaram no abandono da geometria nos currículos escolares está o Movimento da Matemática Moderna, iniciado na década de 1960, pois se exigiu uma abordagem geométrica que os professores não dominavam. Assim, estes professores acabaram privilegiando aprofundar o ensino nos conhecimentos algébricos elencados pelo movimento como fundamental para o desenvolvimento lógico matemático.

Com a promulgação da LDB nº 9394/1996, muitas decisões foram tomadas a fim de transformar a educação brasileira. A partir disso, políticas importantes vêm sendo implementadas na formação docente até os dias atuais. Os programas instituídos vêm contribuindo na formação inicial de professores, facilitando o acesso e permanência desses estudantes, assim como, fomentando a formação continuada após a conclusão da etapa inicial.

No tópico a seguir, apresentamos informações de alguns relatos de pesquisas que evidenciam a relação entre essa dificuldade da retomada do ensino da geometria e a formação inicial do professor. Da mesma forma, apontamos um panorama de algumas políticas públicas que surgiram como possíveis estratégias para superar essas dificuldades.

## 2.2 A formação inicial de professores que ensinam matemática

Um importante estudo realizado no final dos anos 1990, foi a Tese de Gazire (2000), que investigou os motivos que impedem o resgate do ensino da geometria na educação básica. Um dos pontos apontados por Gazire (2000), como motivo limitante ao resgate da geometria é o que ele chama de ciclo vicioso: o professor que não aprendeu geometria não vai ensinar geometria.

Nesse sentido, o estudo desenvolvido por Caldatto e Pavanello (2014) revela que muitos professores de Matemática ainda possuem dificuldades em lecionar os conteúdos geométricos, especialmente a Geometria Euclidiana, resultando na ausência desse conhecimento nas escolas, ainda que esse seja um assunto presente nos currículos tanto da educação básica quanto dos cursos de Licenciatura em Matemática.

As pesquisadoras Nacarato e Passos (2003, p. 135) são enfáticas ao atribuírem a ausência do ensino de geometria nas escolas às formações deficitárias dos professores com relação a esse ramo da Matemática, destacando "[...] o problema maior do abandono do ensino da geometria reside na formação do professor", destacando assim a falta do tratamento adequado da geometria nos cursos de formação.

A pesquisa realizada por Souza e Silva (2012) buscou identificar como se processam as aprendizagens com foco nos conteúdos geométricos de um grupo de licenciandos do curso de Matemática. Essa pesquisa surge da percepção das autoras a respeito das dificuldades apresentadas por professores de Matemática em lecionar os conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental.

> Nas respostas obtidas nessa pesquisa, percebe-se o quanto os futuros professores confirmam suas limitações ao conteúdo, embora já tenham atingido mais de 50% das disciplinas cursadas na formação em Matemática. [...] Essa situação enfatiza dois problemas já mencionados: os alunos não terem aprendido os conceitos geométricos na Educação Básica e, no Ensino Superior, estudarem esses conceitos de forma muito complexa, que não conseguem abstraí-los em um nível que possa ser explicitado sob outra linguagem, diferente da linguagem matemática (SOUZA e SILVA, 2012, p. 6-7).

Nessa investigação, uma das bases teóricas utilizadas foi o modelo de van Hiele, que para o aprendizado, as autoras, o consideram como "fator primordial, no sentido de que não se tornem novos profissionais que estarão no mercado de trabalho realizando a prática docente igualmente aos seus antigos professores" (ibedem, p. 14). Assim, além de constatar aspectos colocados pelos trabalhos apresentados anteriormente, as autoras consideram uma Teoria capaz de auxiliar esse processo de retomada do ensino da Geometria no nível superior.

Em um cenário mais atual, no âmbito da formação de professores, os estudos realizados nas últimas décadas por Bernadete A. Gatti, juntamente com diferentes colaboradores, nos apresentam que "postas às estruturas para essa formação, ao final do século XIX e início do século XX, em termos de sua institucionalização nos organismos formadores, pouco mudou até agora" (Gatti et al., 2011, p. 95). Nesse estudo publicado em 2011, a autora apresenta aspectos que permanecem intactos mesmo após a promulgação da LDB, de 1996, que buscou de modo integrado introduzir nova estrutura formativa para professores, seguida da implementação das Diretrizes Curriculares para Formação de Professores (Resolução CNE/CP Nº1/2002), que propôs uma base comum a esta formação.

> Reformulações e reorientações, complementações ou acréscimos não tocaram em seu aparato básico: a formação de cada especialidade profissional docente continua sendo feita em cursos separados, estanques, com base na "divisão da ciência"; cursos sem articulação entre si, sem uma base compartilhada e com clara separação interna entre formação em área disciplinar e formação pedagógica: dois universos que não se comunicam (GATTI et al., 2011, p. 95).

Dessa forma, são muitos os aspectos a serem incorporados pelas licenciaturas para atender as demandas atuais da educação básica, que em seu processo de construção apresentou diversas mudanças; mudanças essas que os cursos de formação de professores, de acordo com o apresentado acima, não acompanharam. Para alcançarmos uma escola justa, com a inclusão de todos e níveis de ensino satisfatórios precisamos de professores preparados para assumir esse desafio, e de acordo com Gatti (2017, p. 733), a formação inicial pode contribuir, e muito, nesse preparo.

> [...] as instituições formadoras de professores e seus gestores e docentes precisam estar conscientes da função social das escolas e, nelas, do papel dos professores, e também assumir esse compromisso por meio de seus processos formadores. Nessa direção as dinâmicas curriculares na formação de professores, nas graduações do ensino superior, precisam reinventar-se. Para isso é necessário ter consciência de que a formação oferecida não é suficiente ou adequada, fazer um exame profundo e objetivo de suas dinâmicas curriculares e ousar reinventar, inovar essas formações, tendo como foco a educação básica, destino de trabalho de profissionais docentes. Desenvolver iniciação à docência, para a educação básica, com a melhor qualidade, é compromisso ético e político com o desenvolvimento das novas gerações como cidadãos que possam exercer sua cidadania com autonomia e reflexões bem balizadas. (GATTI, 2017, p. 733).

Assim, mais que dispostos a assumirem os desafios atuais da educação básica os professores precisam estar preparados para isso. Nesse sentido, impulsionado pelo Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) de 2007, o Ministério da Educação (MEC) apresenta um conjunto de programas para a formação inicial e continuada de professores, que vem tomando corpo ao longo dos anos. Em reflexão aos acontecimentos passados no cenário da educação brasileira, no PDE se questiona sobre “Como se pode pensar em reforçar a educação básica se a educação superior, debilitada, não lhe oferecer suporte mediante formação de bons professores em número suficiente?”, respaldando medidas que viriam a ser tomadas frente à formação de professores. Sobre esse aspecto, Gatti et al. (2019, p. 12) apontam:

> Nesses dez últimos anos, várias instituições buscaram aprimorar seus cursos de formação de professores e, além disso, foram propostas mudanças relativas a políticas educacionais voltadas aos docentes, tanto em âmbito federal como regional e local (GATTI et al.,2019, p. 12).

O PDE instituído pelo Decreto Lei Nº 6 094/2007, juntamente com o Plano de Metas e Compromissos Todos pela Educação, previa diversas ações para identificar e solucionar as dificuldades apresentadas pela educação brasileira e o desenvolvimento conjunto e articulado de ações entre os governos federal, estadual e municipal. O destaque do plano foi a educação básica, mas de forma ampla, priorizando a formação e valorização de professores juntamente com financiamento e garantia de acesso aos cursos de licenciaturas.

Em 2009, por meio do Decreto Nº 6755, é instituída a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, propondo outras diversas ações para a classe docente, como: Fóruns Estaduais Permanentes de Apoio a Formação Docente; o estímulo a oferta de licenciaturas pela Universidade Aberta do Brasil (UAB); o Programa Pró-licenciatura: formação inicial/complementar entre outros.

O meio de colocar em prática essas ações foi Plano de Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (Parfor), ampliando propostas já em andamento que integravam o Plano de Ações Articuladas (PAR), presente no PDE. Essas são apenas algumas das ações implementadas nesse período, algumas permanecem ativas até os dias atuais, outras tiveram vigência por curtos períodos, devido a diferentes dificuldades.

> Essa política que se pretendia articuladora acabou por se fragmentar em várias atividades paralelas postas em movimento por setores separados do MEC, gerando algumas superposições e também grande número de propostas com focos bem delimitados e muitas de pequeno porte. [...] Também observou-se a dificuldade dos professores em dedicarem-se aos estudos por conta das condições de trabalho (GATTI et al., 2019, p. 60).

Considerando a formação inicial de professores, dentro dessa política, foi criado no ano de 2007 e iniciado em 2009 o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). A regulamentação do PIBID se deu três anos após sua elaboração pelo Decreto Nº 7 219/2010. Sua prática, até os dias de hoje, vem possibilitando articular o ensino superior com as unidades escolares de educação básica, além de dar visibilidade aos cursos de licenciatura dentro das instituições de ensino superior, chamando atenção de seus gestores e envolvendo discentes e docentes de diferentes cursos. Dentre os objetivos do PIBID, Gatti et al. (2019, p. 62) destaca:

> [...] melhor qualificar estudantes de licenciatura para o trabalho nas escolas favorecendo por meio de projetos bem dirigidos e selecionados seu aperfeiçoamento em práticas escolares, criando maior interação universidade-escolas (GATTI et al.,2019, p. 62).

Os estudos desenvolvidos por Tardif (2002) discorrem sobre os saberes docentes, orientando que os saberes profissionais dos professores são desenvolvidos e passam a fazer sentido quando inseridos no contexto de trabalho que serão praticados. O PIBID busca romper com o modelo de formação centrado no professor formador e licenciando, onde predominavam os estudos teóricos e disciplinas de formação global, levando uma instrução para prática docente distante da realidade "resultando na dissociação entre o conhecer e o fazer na formação docente" (TARDIF, 2002), um problema que vem se arrastando por muito tempo.

Em um estudo detalhado sobre o PIBID, Gatti et al. (2014, p. 9) discorre sobre o objetivo e especificidades do programa:

> A criação do PIBID teve a intenção de fomentar a iniciação à docência com a finalidade de melhor qualificá-la, mediante projeto específico de trabalho e concessão de bolsas, abrangendo as diferentes áreas do conhecimento que fazem parte do currículo da educação básica. [...] Um diferencial nesse programa é a concessão de bolsas não só a estudantes das licenciaturas, mas também aos professores das universidades que os orientam, e também a professores de escolas públicas (chamados supervisores) que acompanham as atividades dos bolsistas no espaço escolar, atuando assim como coformadores no processo de iniciação à docência, em articulação com o formador da universidade (GATTI et al., 2014, p. 9).

Neste mesmo estudo, foi realizado um levantamento de pesquisas que tem por temática o PIBID, buscando compreender a forma como vem acontecendo suas ações e como o programa tem sido vislumbrado pelos sujeitos participantes, internos e externos do meio acadêmico. Resumidamente, suas conclusões apontam que o programa tem assumido um papel relevante: na valorização e revitalização das licenciaturas; nos questionamentos ao currículo levando uma maior integração entre os saberes da ciência com a ciência educacional; na aproximação do bolsista com o ambiente escolar no início do curso proporcionando aproximação entre teoria e prática; na articulação dos docentes das unidades de ensino superior com os docentes da educação básica e com vista ao desenvolvimento de estratégias de ensino diversificadas e motivadoras; na renovação das práticas e reflexões promovidas nos cursos de licenciatura (GATTI, 2014).

Neste período, no cenário da educação básica, a proposta de um novo documento de orientações curriculares tem início no ano de 2014. Com a regulamentação do Plano Nacional de Educação (PNE) que estabeleceu 20 metas para a melhoria da educação básica sendo que 4 delas tratam sobre uma base comum curricular, acontece a 2º Conferência Nacional pela Educação. A conferência culminou em um documento de propostas e reflexões para a Educação brasileira. O documento representa um marco inicial no processo de construção de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o país, pautada no Art. 210 da Constituição Federal de 1988 "Serão fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais" (BRASIL, 1988).

No ano seguinte, é instituída uma comissão de especialistas para a elaboração de propostas da BNCC. Durante seu processo de elaboração foi criado um canal online, chamado Portal da Base, no qual a sociedade, representada por instituições e profissionais de diferentes áreas, teve a oportunidade de opinar e debater sobre a construção da BNCC. Além desse canal de comunicação foram feitas consultas públicas em todo o país, debates e seminários estaduais em unidades de ensino, sindicatos e outros lugares.

No final do ano de 2017, por meio da Portaria Nº 1570/2017, é homologada a BNCC pelo Ministério da Educação (MEC). O documento está organizado separado pelas etapas do Ensino Básico (Ensino Infantil, Fundamental e Médio), e dividido em cinco áreas de conhecimento: Linguagens, Ciências da Natureza, Ciências Humanas, Ensino Religioso e Matemática, sobre a qual nos debruçamos. O documento apresenta orientação do que seria indispensável no período da educação básica de toda criança e jovem de nosso país, norteando as propostas curriculares de instituição públicas e privadas.

Apesar das iniciativas de comunicação com a sociedade e comunidade escolar alguns grupos entendem que o documento final da BNCC foi instituído sem considerar as diversidades de cada escola e desconsiderando estudos que vinham sendo realizados há décadas em nosso país. Os documentos elaborados foram submetidos a apreciação pública onde indivíduos e/ou grupos concordam ou discordavam do texto, o MEC, por meio do Grupo Gestor, definiu quais contribuições seriam aceitas ou não, para Aguiar (2018, p. 15) “Fica clara a metodologia de construção linear, vertical e centralizadora”.

Com base no documento curricular vigente até a sua homologação, a versão final da BNCC do Ensino Fundamental organiza a área do conhecimento Matemática, em cinco unidades temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. As unidades temáticas são propostas de forma que se correlacionam durante o aprendizado, podendo, cada uma delas, receber destaque diferente a depender do período de escolarização, orientando o desenvolvimento de habilidades ao longo de todo Ensino Fundamental.

A etapa do Ensino Fundamental é classificada como anos iniciais (1º ao 5º ano) e anos finais (6º ao 9º ano), a respeito das capacidades a serem desenvolvidas pelos estudantes por meio do estudo da Matemática, Na BNCC afirma se

> [...] necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-lo em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido (BRASIL, 2018, p. 299).

Ao reconhecer os conhecimentos geométricos como fundamentais na resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento, a BNCC estabeleceu uma unidade temática com foco no estudo de seus conceitos e procedimentos. Sobre a unidade temática Geometria, o documento orienta:

> Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 271).

A respeito da última etapa do ensino básico, o Ensino Médio, a BNCC (publicada no ano de 2018) aponta para uma formação ampla, consolidando e aprofundando os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, formando os jovens brasileiros para o exercício da cidadania e inserção ao mundo do trabalho. O documento fala em uma escola que acolha a juventude e esteja comprometida com a educação integral e a construção do projeto de vida dos estudantes.

O novo plano para o Ensino Médio inclui os chamados itinerários formativos “entre eles o de formação técnica e profissional, a partir de arranjos curriculares a depender da possibilidade dos sistemas de ensino e da escolha dos estudantes” (MENDONÇA, 2018, p. 34). Assim, o estudante terá parte do currículo obrigatória e parte de livre escolha (itinerário formativo), essa liberdade de escolha pode levar a um caminho mais curto de formação, contribuindo para prejuízos futuros, impossíveis de reparar sendo que grande parte dos estudantes tem a necessidade de trabalhar nessa etapa da vida.

Em se tratando dos conceitos geométricos estes aparecem em todas as competências especificas para a área do conhecimento de Matemáticas e suas tecnologias, contudo, a BNCC sintetiza a abordagem desse tema da seguinte forma:

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 527).

A implementação de uma base curricular para todo território brasileiro para a educação básica promoverá alterações nos currículos dos cursos de licenciatura. Nesses cursos, são formados os professores que atuam ou atuaram nas escolas e, dessa forma, precisam estar preparados para “pôr em prática” as novas orientações. A revisão e atualização do Parecer e da Resolução CNE/CP nº 02/2015, que regulamentava os cursos de licenciaturas em todo país, foi homologada no final do ano de 2019, em que se afirma

> [...] a BNCC-Educação Básica deve contribuir para a articulação e a coordenação das políticas e ações educacionais em relação à formação de professores; As aprendizagens essenciais, previstas na BNCC-Educação Básica, a serem garantidas aos estudantes, para o alcance do seu pleno desenvolvimento, nos termos do art. 205 da Constituição Federal, reiterado pelo art. 2º da LDB, requerem o estabelecimento das pertinentes competências profissionais dos professores (BRASIL, 2019, p. 1).

A portaria aponta ainda seis pontos que incidiram na revisão e atualização das diretrizes, estes versam sobre a necessidade desse documento estar em conformidade com diferentes legislações que orientam para adequação curricular da formação docente estar em consonância com a BNCC. Estes pontos discorrem sobre atender as metas 13 e 15 estabelecidas no PNE (2014), cumprir o Art. 62 da LDB nº 9.394/1996 que dispõe “os currículos dos cursos da formação de docentes terão por referência a Base Nacional Comum Curricular” (BRASIL, 1996, p.39) entre outros pontos de legislações vigentes.

Ainda sobre a formação docente, uma das ações recentes da Política Nacional de Formação de Professores foi a instituição do Programa Residência Pedagógica (PRP). Esse Programa foi lançamento poucos meses após a homologação da BNCC, no ano de 2017, e foi implementado no ano seguinte. O programa busca aprimorar a formação docente por meio da inserção do licenciando na escola de educação básica a partir da segunda metade do curso de licenciatura, somando com o PIBID que atende os licenciandos no início da formação docente, oferecendo assim um acompanhamento ao longo da formação dos futuros professores.

> No *Programa Residência Pedagógica* a manutenção de um diálogo estreito e constante com o sistema de ensino público é tomada como uma prática essencial para a manutenção e aprimoramento do PRP [...] O objetivo da PRP é possibilitar aprendizagem prática – em situação, ou seja, a partir da realidade, tomando os eventos e aspectos dificultadores da prática pedagógica do professor e da escola como fontes de aprendizagem, uma vez que esses aspectos e eventos são tomados como objeto de estudo e reflexão pelos residentes, orientados por seus preceptores. Todos os residentes realizam uma intervenção pedagógica

> pontual na turma em que realizam a residência (GATTI et al, 2019, p. 233).

Nesses últimos anos, a educação brasileira passou por diversos movimentos que impulsionaram reformulações nas orientações curriculares nacionais, aprimoramento dos cursos de formação de professores juntamente com políticas educacionais voltadas aos docentes no processo de formação continuada. Essas reformulações buscam aprimorar o ensino e qualificar a aprendizagem nas escolas brasileiras. Mas, apesar de todos os avanços acompanhados até o momento, ainda temos um longo caminho adiante.

Os dados das últimas avaliações nacionais sobre o nível de conhecimento dos estudantes brasileiros em Matemática nos revelam que de 100 estudantes matriculados no Ensino Fundamental 1 (1º ao 5º ano), 90 concluem até os 12 anos de idade, porém apenas 48,9% têm aprendizagem adequada em Matemática; no Ensino Fundamental 2 (6º ao 9º ano) dos 100 matriculados apenas 76 concluem esta etapa até os 16 anos de idade, sendo que destes somente 21,5% apresentam aprendizagem adequada em Matemática; enquanto na etapa final da educação básica os dados são ainda mais preocupantes:

> [...] para cada 100 jovens que concluem o Ensino Médio, apenas 10 têm o conhecimento esperado em Matemática para o fim da etapa. Isso sem contar os que ficam pelo caminho: para se ter ideia, 36% dos brasileiros de 19 anos não concluíram os estudos (BRASIL, 2019, p. 19)[6]!

Os números apresentados são alarmantes, e não somente na área de conhecimento matemático, o desempenho dos estudantes em Língua Portuguesa também é insuficiente. Dessa forma, concordamos com Gatti et al. (2019, p. 37), a formação, em qualquer nível, precisa atender as demandas educacionais atuais, assim como, comprometer-se “com o desenvolvimento de uma consciência crítico-construtiva, com a capacidade de compreender e construir soluções diante de situações de dificuldades do aprender, de relacionar-se, de inércia, de desinteresses, de conflitos, de contraposições”.

Diante disso, por meio da Resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, o Ministério da Educação definiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores (BNCF), tendo como referência a implantação da BNCC da Educação Básica.

---

[6] Ressaltamos que o relatório apresentado considera idades avançadas para a conclusão das etapas, pois os estudantes devem ser matriculados aos 6 anos no 1º ano do Ensino Fundamental 1 concluindo esta etapa aos 10 anos, dessa forma Ensino Fundamental 2 será concluído aos 14 anos e o Ensino Médio será finalizado aos 17 anos, caso não ocorra distorção idade/série.

> A formação docente pressupõe o desenvolvimento, pelo licenciando, das competências gerais previstas na BNCC-Educação Básica, bem como das aprendizagens essenciais a serem garantidas aos estudantes, quanto aos aspectos intelectual, físico, cultural, social e emocional de sua formação, tendo como perspectiva o desenvolvimento pleno das pessoas, visando à Educação Integral (BRASIL, 2019, p. 02).

Nesta perspectiva, o documento BNCF estabelece três competências específicas essenciais, a serem desenvolvidas pelos licenciandos ao longo do percurso formativo. Essas competências estão divididas em três dimensões: Conhecimento, Prática e Engajamento Profissional. A dimensão Conhecimento profissional refere-se aos conhecimentos específicos da área de atuação do docente, que estão também vinculados à Prática profissional, a qual é entendida como o saber pedagógico do professor, a forma como ele abordará os conteúdos em sala de aula. Para isso, o Engajamento profissional se define como a base estruturante para as demais competências, pressupondo o compromisso consigo (desenvolvimento pessoal e profissional), o compromisso com o outro (aprendizagem e desenvolvimento do estudante) e o compromisso com os outros (interação com colegas, atores educacionais, comunidade e sociedade) (BRASIL, 2019).

Considerar os aspectos históricos da formação de professores viabiliza compreender de forma mais abrangente a trajetória das perspectivas formativas da docência para educação básica e suas relações com as atuais propostas e sistemas formativos, seja na formação inicial nos cursos de licenciatura, seja nas formações continuadas.

Ao realizar nossa pesquisa com licenciandos em Matemática, buscamos refletir sobre o papel que esses exercerão na educação básica, oferecendo a eles recursos metodológicos a respeito de conceitos presentes nos currículos da Educação Básica e, ao mesmo tempo, investigando os níveis de pensamento geométrico desenvolvidos por esses licenciandos até o momento da sua participação na nossa investigação.

Dessa forma, entendemos que fazer uma leitura real e crítica das propostas curriculares dos cursos de formação de professores, confrontando com a realidade social e necessidades atuais da educação, possibilita contribuir para o aprimoramento desse nível de ensino.

No tópico a seguir, apresentamos a Teoria de van Hiele, modelo do pensamento geométrico que fundamenta nossa pesquisa.

# 3. O MODELO DE VAN HIELE COMO UMA POSSIBILIDADE DE ANÁLISE DOS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

A presente seção detalha a Teoria de van Hiele, principal referencial desta dissertação. Nela, descreveremos as características de cada nível de pensamento geométrico, apresentaremos um exemplo de atividade viável para cada nível, as propriedades e fases de aprendizagem propostas pelo modelo e abordamos sobre outros estudos realizados pelo mundo relacionados a essa teoria.

A teoria dos níveis de pensamento geométrico foi proposta pelo casal de pesquisadores holandeses Pierre M. van Hiele e Dina van Hiele-Geldof. O modelo de van Hiele é uma teoria de ensino e aprendizagem de Geometria, que teve origem nas pesquisas do casal nos anos 50 do século XX.

Esses pesquisadores se surpreenderam com as dificuldades apresentadas por seus alunos em atividades que exigiam o desenvolvimento e utilização de habilidades geométricas no curso secundário, equivalente aos anos finais Ensino Fundamental aqui no Brasil. Isso os motivou a investigar sobre como o raciocínio geométrico dos estudantes evoluía e qual o papel do professor nesse processo de evolução. Esse interesse motivou todos os estudos do casal, inclusive as suas pesquisas de doutorado na Universidade de Utrecht, onde publicaram suas teses no ano de 1957, sob a orientação de Hans Freudenthal (FUYS; GEDES; ANDTISCHLER, 1988).

Os trabalhos do casal se complementam. Preocupada em promover a aprendizagem dos estudantes, Dina descreve à ordem de conteúdos geométricos e atividades, enquanto a pesquisa de Pierre buscou explicar o porquê de os estudantes apresentarem dificuldades em aprender geometria. Após a publicação das teses, o resultado das pesquisas do casal foi intitulado Teoria de van Hiele. De acordo com Villiers (2010), os pesquisadores atribuíram o fato de que o conteúdo geométrico apresentado ao aluno do Ensino Fundamental seria mais avançado que seu nível de compreensão, justificando assim, a falha do currículo de geometria tradicional.

Segundo Cargnin, Guerra e Leivas (2016, p. 107), “o modelo idealizava um novo enfoque para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria, sugerindo níveis hierárquicos de compreensão e aprendizagem”, além de uma metodologia de ensino que possibilita o avanço entre esses níveis, auxiliando educadores nas situações relacionadas ao ensino. De acordo com Nasser e Sant’Anna (2010),

> O modelo sugere que os alunos progridam segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria. O progresso de um nível para o seguinte se dá através da vivência de atividades adequadas, cuidadosamente ordenadas pelo professor. (NASSER; SANT'ANA, 2010, p. 6)

Embora o objetivo da Teoria de van Hiele tenha como foco o estudo do pensamento geométrico, o modelo pode ser adaptado para outros tópicos de ensino, como será apresentado mais adiante.

Sobre os níveis organizados pelo casal van Hiele, estudos apontam algumas características importantes para a compreensão do modelo (NASSER, 1992; CROWLEY, 1994; SANT'ANNA, 2001; WALLE, 2009):

- Uma hierarquia entre os níveis, um aluno não alcançará um nível sem que tenha passado por todos os níveis anteriores;
- O produto de um nível se torna objeto de estudo no nível seguinte;
- Cada nível apresenta símbolos linguísticos próprios e um conjunto de relações características interligando-os;
- Pessoas que raciocinam em níveis diferentes terão dificuldade de se entenderem; essa característica, quando identificada na relação entre professor e aluno, pode impossibilitar a compreensão e fixação de conceitos pelo aluno;
- O progresso entre os níveis depende mais das experiências vivenciadas do que da idade dos aprendizes.

Sintetizando as características apresentadas, Walle afirma:

> Os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os *objetos de pensamento* – sobre os quais somos capazes de *pensar* [operar] geometricamente (WALLE, 2009, p. 440, *itálico do autor*).

Esses níveis foram organizados em 5 etapas que determinam as especificidades do processo, podendo ser numerados do nível zero ao nível quatro ou do um ao cinco, a depender do autor, sendo o primeiro nível uma base absoluta.

Para a nossa pesquisa, utilizaremos a escala do um ao cinco, conforme Pierre Marie van Hiele escreveu em sua obra "*Structure and Insight*" (1986), em que concorda com outros autores americanos que preferiram numerar desta forma, pois haviam encontrado alunos que não tinham alcançado o primeiro nível. Nesta mesma obra, Pierre descreve níveis de desenvolvimento para o tópico de numeração, mostrando que o modelo não especifica conteúdos ou currículos, podendo ser adaptado a outros tópicos que não exclusivamente conteúdos de geometria.

## 3.1 Níveis de compreensão geométrica

Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico são:

- Nível 1 (básico): Reconhecimento ou Visualização
- Nível 2: Análise
- Nível 3: Dedução Informal
- Nível 4: Dedução Formal
- Nível 5: Rigor

Esses níveis são hierárquicos e elucidam como acontece o desenvolvimento do raciocínio geométrico do aprendiz. Sabendo que pessoas distintas pensam sobre as ideias geométricas de maneiras diferentes, de acordo com Nasser (1992), a divisão por tópicos sugerida pelo casal van Hiele tem como objetivo auxiliar o aprendiz a ter um *insight*[7] quando colocado frente a novas situações

> A teoria sugere que os alunos progridem através de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria, e que a linguagem, o insight e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papéis essenciais nesse desenvolvimento (NASSER, 1992, p. 65).

A seguir, apresentaremos os níveis da Teoria de van Hiele, segundo os estudos realizados por Jaime e Gutiérrez (1990), Crowley (1994), Sant'Ana (2001) e Walle (2009). Para cada nível, será apresentado também um exemplo de atividade que o professor poderá propor aos alunos.

- Nível 1 (básico): Reconhecimento ou Visualização

Os estudantes com pensamento geométrico classificado nesse primeiro nível reconhecem as figuras geométricas em sua totalidade, com base nas características globais e visuais delas. Além de identificar as figuras como objetos individuais, esses estudantes não são capazes de generalizar as características de uma forma para outras de mesma classe. Descrever as figuras com base na semelhança em outros objetos que conhecem,

[7] "Segundo van Hiele (1957, p. 1) insight é reconhecido como tal quando o sujeito atua correta e intencionalmente frente a uma situação nova." Apud (Passos, 2015, p. 48).

pode fazer parte dos argumentos deles, quando usam expressões do tipo "se parece com...", "tem forma de...".

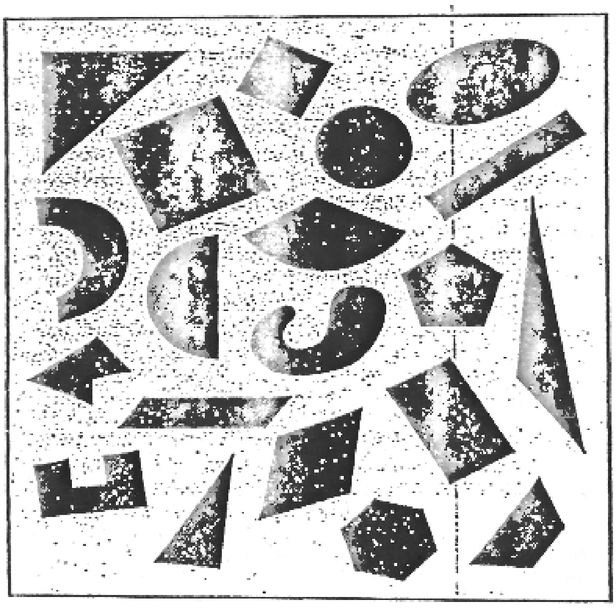
Durante a classificação das figuras, os estudantes não conseguem reconhecer explicitamente seus componentes e suas propriedades matemáticas. Por exemplo, ao ser questionado sobre as diferenças entre um círculo, um triângulo e um quadrado, um estudante com pensamento geométrico classificado nesse nível pode responder que um é redondo e os outros um mais e um menos pontudo, sem se ater ao número de vértices ou abertura dos ângulos.

Segundo Walle (2009, p.440), "os produtos de pensamento no Nível 1 são classes ou agrupamento de formas que são parecidas", com isso, o objetivo para este nível será explorar as semelhanças e diferenças entre as formas, no intuito de criar classes de formas (física ou mentalmente).

Exemplo de atividade para o nível 1:

Organize a turma em grupos de quatro componentes, cada grupo receberá uma coleção de formas bidimensionais, como na Figura 2. Com esta coleção, algumas atividades de reconhecimento podem ser realizadas. Por exemplo, cada integrante dos grupos seleciona duas formas que lhe chame a atenção. Após a seleção, a tarefa é descobrir uma semelhança e uma diferença entre as duas formas escolhidas.

**Figura 2**: Coleção de formas bidimensionais



Fonte: Walle (2009, p. 440).

- Nível 2: Análise

Ainda que de maneira informal, os estudantes que se encontram no nível de análise percebem que as formas apresentam propriedades matemáticas, sendo capazes de descrever suas partes e enunciar suas propriedades. Os estudantes são capazes de agrupar uma coleção de formas de mesma classe, argumentando, por exemplo, o que torna um retângulo um retângulo (lados paralelos, lados iguais de dois em dois, todos os ângulos retos etc.), ficando em segundo plano aspectos irrelevantes do ponto de vista geométrico, como cor, tamanho e orientação.

Neste nível, os estudantes classificam as formas com uma lista de propriedades, mas ainda sem estabelecer relações entre essas propriedades e com dificuldades na compreensão de definições. O produto de pensamento para este nível, Walle (2009, p.441) afirma que “são as propriedades das formas”. Assim, o objetivo nessa etapa será ampliar a compreensão sobre esse elemento matemático.

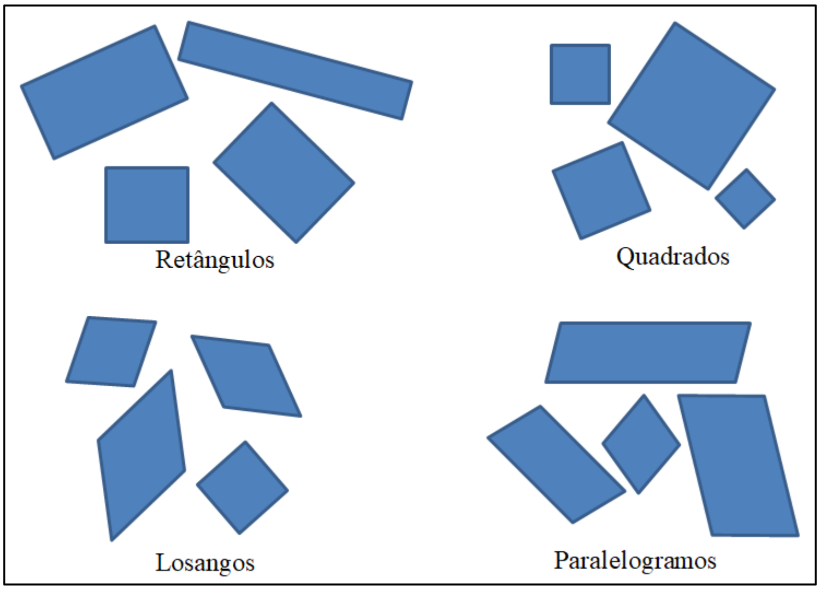
Exemplo de atividade para o nível 2:

Com a turma separada em trios, os grupos de estudantes receberão uma ficha com um tipo de quadrilátero: losango, paralelogramo, retângulo e quadrado, como mostra a Figura 3. Dependendo do tamanho da turma, pode acontecer que se repita o tipo de quadrilátero para dois ou mais grupos; para evitar isso, uma alternativa é incluir uma ficha de trapézios. Se possível, junto com a ficha é adequado entregar aos grupos espelhos e papel translúcido, pois esses instrumentos podem ser utilizados para comparar linhas de simetria, simetria rotacional e congruência entre ângulos.

A tarefa para cada grupo é escrever um conjunto das propriedades aplicáveis a todas as formas presentes em sua ficha, tantas quantas conseguirem. As propriedades devem ser listadas com base nos elementos: lados, ângulos, diagonais e simetria.

Os estudantes podem ser estimulados a usarem os termos “pelo menos” ao se referirem à quantidade de alguma coisa. Para finalizar a atividade, cada grupo expõe seu conjunto de propriedades para a turma, possibilitando a discussão e a construção de um único conjunto para as formas em questão.

**Figura 3:** Ficha modelo com tipos de quadriláteros




Fonte: A autora, com base em Walle (2009).

- Nível 3: Dedução Informal

Na etapa de dedução informal, os estudantes começam a desenvolver a capacidade de perceber que algumas propriedades das formas se deduzem de outras, ou ainda, eles deduzem outras propriedades, estabelecendo as relações entre as propriedades listadas no nível 2 de análise. Os estudantes apresentam no seu raciocínio habilidade do tipo "se – então", com argumentos como "se todos os ângulos são retos, então a forma deve ser um retângulo". Essa habilidade permite que um estudante classifique as formas com uma quantidade mínima de características. Nesse sentido, os estudantes iniciam um processo de aprender sobre a natureza das definições, de valorizar os contraexemplos e de acompanhar as demonstrações desenvolvidas pelo professor. Porém, os estudantes nesse nível não compreendem o encadeamento lógico das etapas e tão pouco entendem a estrutura dessas demonstrações ou o papel de axiomas.

Sendo assim, as "provas" apresentadas pelos estudantes que justificam as considerações sobre as figuras, podem ser mais intuitivas do que dedutivas, visto que é provável que eles aleguem: "Porque necessitamos demonstrar se sabemos que é verdade?". Dessa forma, o produto de pensamento para nível 3 – dedução informal, de acordo com Walle (2009, p.442), "são as relações entre as propriedades de objetos geométricos". Por isso, encorajar os estudantes a fazer conjecturas e questionar "Por quê?" ou "E se?" contribuirá na construção do raciocínio lógico informal dos estudantes.

Exemplo de atividade para o nível 3:

As propriedades dos quadriláteros, listadas pelos grupos na atividade sugerida no exemplo de atividade para o nível 2, são apresentadas para a turma. Em seguida, os grupos se reúnem novamente e cada grupo analisa uma forma geométrica.

A tarefa para os grupos é encontrar "listas mínimas de propriedades" para cada quadrilátero, ou melhor, "listas mínimas de definições" (LMD). Nesta etapa, devemos incluir a palavra definição no vocabulário dos estudantes. Uma LMD é um subconjunto das propriedades de uma forma, é a definição dessa forma com menor quantidade de propriedades possível.

O termo "definições" em LMD significa que qualquer forma que apresente todas as propriedades presentes na lista é daquela mesma forma, e o termo "mínima" orienta no sentido de que se retiramos qualquer propriedade da lista ela deixa de ser uma definição, podendo outras formas serem enquadradas nessa lista. Sugere-se também aos estudantes que elaborem mais de uma LMD e que, em debate com a turma, as listas possam ser contestadas como não mínimas, caso uma das propriedades elencadas possa ser removida, por não ser definidora, caso outra forma diferente daquela descrita possa ser incluída.

- Nível 4: Dedução Formal

Partindo das relações entre as propriedades estabelecidas no nível de dedução informal, os estudantes iniciam um processo de análise dos argumentos informais desenvolvendo a estrutura de um sistema complexo, envolvendo axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados geométricos. Por meio de uma sequência de afirmações, os estudantes são capazes de deduzir uma afirmação a partir de outra ou de outras.

Segundo Walle (2009, p. 443), "o produto de pensamento do nível 4 são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria". Sendo assim, as habilidades desenvolvidas pelo estudante neste nível são: trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas, estabelecendo conclusões mais lógicas do que intuitivas; construir suas próprias demonstrações; desenvolver provas de várias maneiras e; diferenciar afirmação e recíproca.

Exemplo de atividade 4:

Individualmente, os estudantes construirão listas de axiomas e definições com o objetivo de elaborar teoremas. Outra possibilidade de atividade são as provas de teoremas por meio de raciocínio lógico obviamente estruturado, que possibilitam avançar o raciocínio lógico informal apresentado do nível 3. As atividades, neste nível, devem favorecer que os estudantes descubram as relações matemáticas que provarão no nível seguinte.

- Nível 5: Rigor

Neste nível, a geometria é analisada no plano abstrato. As deduções dentro de um sistema abrem espaço para apreciação das relações entre sistemas axiomáticos diferentes. Os estudantes compreendem a estrutura de diversos sistemas dedutivos com alto grau de rigor, aprofundando-se na análise das propriedades desses sistemas.

Como produtos de pensamento no nível de rigor, citado por Walle (2009, p. 443), teremos "comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da geometria". Ainda segundo o autor, este é frequentemente o nível de um especialista em matemática dedicado a estudar geometria como um dos ramos da Matemática no ensino superior.

Exemplo de atividade para o nível 5:

Estudo das propriedades da geometria esférica. Entende-se que, ao contrário de um plano ou espaço ordinário, essa geometria, em contra ponto à geometria euclidiana, é baseada em linhas desenhadas sobre uma esfera.

O Quadro 1 resume o objeto e o produto de pensamento de cada um dos níveis da Teoria de van Hiele.

**Quadro 1:** Objeto e produto de pensamento dos níveis da Teoria de van Hiele.

| Nível | Objeto de pensamento | Produto de pensamento |
|---|---|---|
| 1. Reconhecimento ou visualização | Aspectos globais e visuais das formas | Classes ou agrupamentos das formas |
| 2. Análise | Classes ou agrupamentos das formas | Propriedades das formas |
| 3. Dedução informal | Propriedades das formas | Relações entre as propriedades das formas |
| 4. Dedução | Relações entre as propriedades das formas | Sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria |
| 5. Rigor | Sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria | Comparações e confrontos entre diferentes sistemas axiomáticos da geometria |

Fonte: A autora, com base em Walle (2009).

A Teoria de van Hiele orienta para a hierarquia presente entre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, considerando que o estudante avança para o próximo nível após ter atingido as competências do anterior.

De acordo com Walle (2009), os objetos de pensamento devem ser elaborados em um nível de modo que as relações entre esses objetos se tornem o foco do próximo nível. Sendo assim, o estudante avança entre os níveis de forma sequencial, partindo do nível básico até o nível mais complexo, que é o do rigor, não havendo possibilidade de "pular" um dos níveis.

Almejando que os estudantes avancem entre os níveis, o professor deve estar consciente que as experiências proporcionadas por ele têm papel decisivo nesse trajeto. Caso as atividades propostas estejam em um nível mais elevado do que o dominado pela turma, os estudantes não terão condições de acompanhar o que está sendo ensinado, gerando frustações e baixo rendimento escolar.

É fundamental estar atento ao nível das atividades apresentadas à turma, para que estas estejam de acordo com os conhecimentos geométricos da turma, para que os estudantes compreendam e executem as tarefas, possibilitando o progresso dos seus conhecimentos para o próximo nível.

Em trabalhos com turmas é comum a presença de estudantes em diferentes níveis de pensamento geométrico. Ao perceber sobre isso, o professor pode adotar duas estratégias, conforme orientações das professoras Nasser e Sant'Anna (2010, p. 8), "desenvolver atividades que propiciem a elevação e a unificação dos níveis dos alunos da turma, e adotar para a instrução um nível mais baixo, o mais próximo possível do nível atingido pela turma".

As atividades planejadas pelo professor representam um dos fatores determinantes para o progresso entre os níveis. Segundo Nasser e Sant'Anna (2010), esse progresso não ocorre rapidamente, podendo levar alguns meses. As autoras comentam também que questões como linguagem, objetos de estudo e estratégias na abordagem do que está sendo estudado são fatores decisivos para determinação do tempo necessário para esse progresso.

O professor por ter um papel fundamental na elaboração das atividades e desenvolvimento delas junto aos estudantes, o casal van Hiele incluiu nos estudos de sua teoria as propriedades do modelo, assim como, as fases de aprendizagem. Essa parte do material busca auxiliar o educador no planejamento de suas ações frente ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

## 3.2 Propriedades do modelo

A seguir, são apresentadas algumas das características fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico considerando os níveis elaborados no modelo de van Hiele. Essas características são classificadas por Crowley (1994) como propriedades.

- Sequencial

O estudante parte do nível básico de visualização e precisa percorrer cada nível adequadamente. Para alcançar a passagem ao próximo nível deverá ter compreendido todos os objetos de pensamento no nível anterior, sendo excluída a possibilidade ele não vivenciar algum dos níveis.

- Avanço

O progresso entre os níveis não necessariamente depende da maturidade ou idade do estudante, estando relacionado aos tipos de experiências geométricas proporcionadas a ele. O processo de avanço ou não de um nível para o outro acontece de forma contínua. Sobre os métodos de ensino, Crowley (1994) afirma que enquanto alguns métodos acentuam o progresso outros retardam ou até mesmo o impedem. Ele enfatiza não haver método que possibilite ao aluno avançar de nível sem seguir a sequência hierárquica dos níveis.

- Intrínseco e extrínseco

Os objetos de pensamento que eram intrínsecos em um nível tornam-se extrínsecos no nível seguinte. Por exemplo, os agrupamentos e classificações das formas realizadas no nível 1 serão recursos para a compreensão de suas propriedades no nível 2, sem que sejam novamente solicitados.

- Linguística

Cada nível apresenta seus próprios símbolos linguísticos e sistema de relações entre eles. Sendo assim, uma relação válida em um nível pode não ter validade no próximo nível. Um caso que pode ser citado como exemplo desta propriedade é o entendimento de quadrados e retângulos; até o nível 2, estas formas podem ser compreendidas como distintas. Mas, ao alcançar o nível 3 o estudante deve ser capaz de afirmar que todo quadrado é um retângulo.

- Combinação inadequada

Como cada nível possui objetos e produtos de pensamento próprios, é imprescindível que os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário do professor estejam de acordo com o nível do estudante. Esse cuidado na adequação das aulas e atividades propostas, permite ao estudante acompanhar os processos de pensamento que lhe estão sendo ensinados.

Além das propriedades discutidas, o modelo de van Hiele destaca as fases de aprendizagem com o propósito de orientar a tomada de decisões dos professores frente ao planejamento e organização de suas aulas (JAIME; GUTIÉRREZ; 1990; SANT'ANNA, 2001).

## 3.3 Fases de aprendizagens

As fases de aprendizagem são etapas de graduação e organização das atividades desenvolvidas pelos estudantes para que eles adquiram experiências que os possibilitem elevar os seus níveis de pensamento geométrico.

Conforme já citado na propriedade de avanço, o processo de elevação de níveis depende mais da instrução recebida pelo aprendiz do que de sua idade. Desta forma, cabe salientar a importância do método, dos conteúdos e materiais e da organização do curso oferecido aos estudantes.

Os pesquisadores van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizagem que evidenciam a exploração, a discussão e a integração dos conhecimentos adquiridos em um nível. Cada uma dessas fases contribui, de maneira proposital e planejada, para a progressão do estudante ao próximo nível, sendo elas:

- Informação;
- Orientação dirigida;
- Explicação;
- Orientação livre;
- Integração.

Para auxiliar os estudantes no processo de elevação de nível, o professor deve trabalhar as cinco fases. Segundo Sant'Anna (2001, p. 67), "com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens ou até simultaneamente".

- Fase de informação

O professor e os estudantes dialogam e desenvolvem atividades sobre os objetivos de estudo para este nível. Esse momento permite ao professor se informar a respeito dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre os tópicos abordados. Durante as observações e questionamentos, é introduzido o vocabulário específico para cada nível.

- Fase de orientação dirigida

Os estudantes exploram o tópico abordado utilizando o material organizado pelo professor. As atividades presentes nesse material devem possibilitar de maneira progressiva e efetiva que os novos conceitos e estruturas matemáticas estabelecidas possam ser compreendidos, pois, este produto de pensamento será o objeto de pensamento do próximo nível, como listado no Quadro 2 (p. 54). Nesta fase, a maioria dessas atividades devem possibilitar respostas específicas e diretas.

- Fase de explicação

Com base em experiências anteriores, dentro ou fora da sala de aula, é importante que o professor incentive os estudantes a expressarem oralmente suas observações, para promover diálogos de defesa e contestações de ideias, de forma a impulsionar o desenvolvimento do raciocínio deles. Nessa fase, o papel do professor se limita a incentivá-los a isso e a orientar o uso da linguagem adequada.

- Fase de orientação livre

São propostas, aos estudantes, atividades mais complexas exigindo entrelaçamento de todo conhecimento adquirido. O professor deve planejar atividades diferentes das tradicionais, com mais de uma forma de resolução ou final aberto, que exijam do estudante o domínio da rede de relações do assunto estudado e o possibilitem explorar a própria capacidade de raciocínio, de investigação e decisão nas estratégias de solução.

- Fase de integração

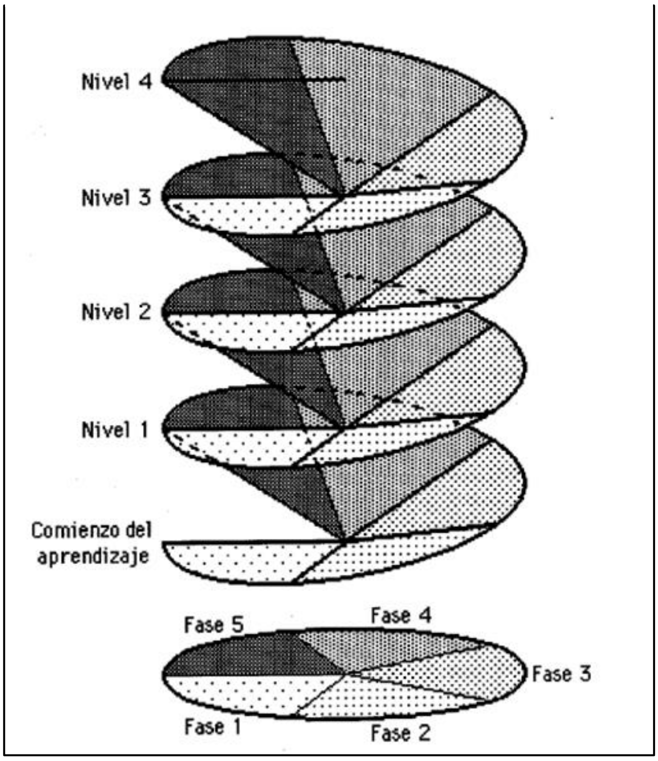
Os estudantes elaboram uma síntese com os objetos e relações dos tópicos abordados. O professor deve auxiliar na construção da síntese, estimulando uma visão geral de tudo que foi estudado, lembrando que esse produto de pensamento será o objeto de pensamento para o próximo nível. Nada de novo deve aparecer na síntese, apenas os tópicos que foram estudados.

Segundo a Teoria de van Hiele, para que o estudante alcance um nível superior de raciocínio e assim progrida no nível do pensamento geométrico, o planejamento estruturado pelo professor deve perpassar por todas as fases de aprendizagem. De acordo com Crowley (1994, p. 8), ao final da fase de integração o novo conhecimento construído durante o processo substitui o antigo, possibilitando que o estudante alcance um novo nível de pensamento, o que pode torná-lo apto para recomeçar as fases de aprendizagem no nível seguinte.

Nos materiais publicados pelo casal van Hiele, os pesquisadores não mencionam como identificar o nível do pensamento geométrico alcançado pelos estudantes. Algumas pesquisas posteriores orientam que o procedimento ideal seria conduzir entrevistas individuais, permitam ao professor observar as estratégias de raciocínio empregadas pelo entrevistado nas situações propostas. Esse seria o procedimento ideal, entretanto, esse é difícil de ser adaptado para a realidade de salas de aula que tenham grande número de alunos por turma, o que pode torná-lo inviável. Dependerá da disponibilidade e criatividade do professor.

Apesar do modelo de van Hiele não discutir intersecção entre os níveis, o comportamento dos estudantes observados em pesquisas realizadas sobre a temática orienta para a existência de uma transição de um nível para outro, alguns oscilando entre os níveis na mesma atividade. Os pesquisadores Jaime e Gutiérrez (1990) evidenciam essa transição/oscilação na ilustração apresentada na Figura 3, elaborada por eles sobre a continuidade dos níveis.

**Figura 4:** A continuidade dos níveis de van Hiele




Fonte: Jaime e Gutiérrez (1990, p. 339)

Esse comportamento foi explicado como sobreposição das fases pela pesquisadora Nasser (1992), que orienta:

> [...] esse processo de aprendizagem deve ser entendido como um esquema: pode acontecer que, para uma certa operação, um estudante progrediu a uma fase posterior, mas precise completar o conhecimento dele com algum material de uma fase anterior. Isso às vezes significa que as fases não são discretas, elas podem se sobrepor (NASSER, 1992, p.37).

Desta forma, durante o processo de aprendizagem o estudante pode transitar pelas fases do modelo, ora buscando informações nas fases finais do nível anterior *(n-1)* ora construindo o conhecimento nas fases iniciais do nível para o qual está progredindo *(n)*.

## 3.4 Um pouco sobre a trajetória do modelo teórico

A divulgação do modelo desenvolvido pelo casal van Hiele aconteceu de forma vagarosa. Um dos motivos foi que as pesquisas realizadas por eles foram publicadas em sua língua materna, holandesa. Até o início dos anos 60 do século XX, com exceção da Holanda, país de origem da teoria, e da extinta União Soviética, que alteraram o currículo para se adequar ao modelo, esse não teve visibilidade internacional (CROWLEY, 1994).

De acordo com Nasser (1993), a teoria se expandiu para a América do Norte com a publicação do livro, em inglês, de Hans Freudenthal (1973), "*Mathematics as an Educational Task*", no qual o autor cita os níveis de van Hiele, e com a publicação dos anais do Encontro Anual do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), em 1976.

Essas publicações, em língua inglesa, impulsionaram o desenvolvimento de vários projetos, principalmente nos Estados Unidos da América, com o objetivo de investigar a Teoria de van Hiele. Apresentamos, aqui, alguns dos projetos mencionados pela autora Nasser (1993):

- Investigação sobre a validade da Teoria de van Hiele como um modelo para avaliar a compreensão em geometria (USISKIN, 1982: BURGER; SHAUGHNESSY, 1986);
- Criação de testes para identificar os níveis alcançados (USISKIN, 1982; SMITH; VILLIERS, 1989);
- Relação entre os níveis de van Hiele atingidos por um aluno em diversos tópicos de Geometria (MAYBERRY, 1983; GUITIERREZ; JAIME, 1987; NASSER, 1992);
- Organização dos níveis de van Hiele para outras áreas de matemática: Lógica, Números Reais (HOFFER, 1983), Congruência (NASSER, 1990).

A estes, podemos acrescentar a organização dos níveis para a linguagem de Funções por Isoda (1996), Sant´Anna (2001) e Cardoso (2016).

Nasser (1993) apresenta ainda os resultados fundamentais dessas pesquisas:

- Os níveis formam efetivamente uma hierarquia;
- O mesmo aluno pode estar raciocinando em diferentes níveis, consecutivos ou não, de van Hiele em tópicos distintos;
- Os alunos, em sua maioria, iniciam o estudo de geometria no curso secundário raciocinando no nível 1 (Estados Unidos) ou mesmo antes do primeiro nível (Brasil);
- O quinto nível não existe ou não pode ser testado (USISKIN, 1982; GUITIERREZ; JAIME, 1987);
- Foram detectados casos em que o aluno raciocinava o mesmo tópico em dois níveis consecutivos, ao mesmo tempo, sugerindo que os níveis não são discretos, contrariando a Teoria de van Hiele.

As pesquisas e seus resultados sobre o modelo de van Hiele contribuíram e contribuem para o aperfeiçoamento do modelo desenvolvido pelo casal. No cenário brasileiro, os estudos baseados na teoria têm se distribuído entre ensino básico, ensino superior e pesquisas bibliográficas. Apontaremos a seguir alguns estudos, mais recentes, relevantes para o nosso trabalho.

No ensino básico, essas pesquisas se subdividem nos níveis do Ensino Fundamental e Médio. O estudo realizado por Oliveira e Leivas (2017) buscou, com suporte da Teoria de Van Hiele, desenvolver percepção visual e raciocínio geométrico em estudantes de um 5º ano do Ensino Fundamental na cidade de Santa Maria, RS. Com esses estudantes, foram desenvolvidas atividades até o segundo nível da teoria, nível 2 – análise. A partir disso, os autores concluíram que as atividades contribuíram com a professora da turma no apontamento dos níveis que se encontravam os alunos, favorecendo o desenvolvimento do conteúdo programático.

No nível do Ensino Médio, Oliveira et al. (2015) desenvolveram sua pesquisa com professores e estudantes do programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Na prática docente, o objetivo do estudo foi identificar, interpretar e descrever a metodologia utilizada para ensinar quadriláteros por um grupo de cinco professores, enquanto, entre os dez estudantes participantes o objetivo foi de verificar as principais ideias compreendidas a respeito do conteúdo. Uma entrevista gravada foi o instrumento de coleta de dados entre os docentes e, aos estudantes foi solicitada a resolução de atividades práticas sobre quadriláteros paralelogramos, planejadas sob o foco do modelo de van Hiele. A respeito da metodologia empregada pelos professores, foi observado que eles desenvolviam suas aulas de forma expositiva e demonstrativa, enfatizando a transmissão de conhecimento, visualização de figuras geométricas e exercícios elaborados com base nas informações passadas verbalmente e em livros didáticos. Como consequência das práticas pedagógicas realizadas, os autores observaram que os estudantes da EJA participantes do estudo demonstraram dificuldades em dominar as propriedades fundamentais dos quadriláteros, apresentando limitações na identificação das formas.

A maior parte dos estudos que abordam a Teoria de van Hiele é realizada na Educação Básica. Contudo alguns autores enfatizam a relevância de apresentar o modelo dos níveis de pensamento geométrico na formação inicial de professores, ou seja, no ensino superior.

No campo da Educação Matemática, Leivas (2017), que desenvolve e orienta diversas pesquisas baseadas na Teoria de van Hiele, propôs-se a investigar, a partir dos conhecimentos prévios de um grupo formado por cinco pós-graduandos de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, como eles compreendiam os registros natural e figural do Teorema de Pitágoras. Aos participantes foram propostas cinco questões acerca do Teorema, enquadradas no último nível, rigor, da Teoria de van Hiele, que é o nível de pensamento geométrico esperado para os sujeitos desta etapa de formação. Da análise das produções dos investigados foi possível concluir que o grupo não se encontrava no quinto nível, por não apresentar a conceituação do teorema em diversas abordagens geométricas, assim como confundirem aspectos de figuras geométricas, como forma e medida.

Ainda nos cursos de licenciatura, Vieira (2017) investigou como se apresenta o desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de licenciandos do curso de Pedagogia da Universidade Federal do Ceará. Por meio de entrevistas, questionários, conversas informais e observação das aulas, a autora investigou como o ensino de Geometria se faz presente na formação inicial desses licenciandos. O estudo, como conclusão, apontou, além de outros aspectos, lacunas nos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos geométricos no período de formação desses licenciandos, futuros professores.

No estado de Sergipe, a Teoria de van Hiele é objeto de estudo e pesquisa do Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisa em Educação Matemática (NCPPEM/CNPQ/UFS). As pesquisas desenvolvidas pelo grupo resultam em publicações que discutem os níveis de pensamento geométrico, sendo elas trabalhos de conclusão de curso e artigos. Por se tratar de um grupo colaborativo, o NCPPEM também oferece formação continuada a professores que ensinam Matemática nas redes municipais de ensino de Sergipe, por meio de oficinas de Matemática que, dentre outras abordagens, enfatiza a Teoria de van Hiele como um fator contributivo na formação desses docentes.

Conhecer o cenário das pesquisas desenvolvidas, que discutem a Teoria de van Hiele nos forneceu subsídios para fomentar os aspectos metodológicos de nossa pesquisa e fundamentar a análise dos resultados obtidos.

# 4. O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Parte das atividades desta pesquisa foi desenvolvida em duas turmas da disciplina Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I (ESI) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, sendo uma do curso vespertino (A) e uma do curso noturno (B). As atividades com os licenciandos foram realizadas nos meses de novembro e dezembro de 2019, quando a disciplina contava com 51 estudantes matriculados, sendo que todos os presentes em cada aula da disciplina ESI participaram das atividades propostas.

A realização do estudo, dentro da disciplina ESI, que possui uma ementa pré-estabelecida, implicou na adequação das atividades previstas nas escolhas metodológicas de nossa pesquisa. Desta forma, a abordagem metodológica que melhor permitiu atender aos objetivos da pesquisa foi a abordagem qualitativa, devido o contato da pesquisadora com a situação estudada. Segundo Moresi (2003, p. 09):

> A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (MORESI, 2003, p.09).

Em vista disso, uma sequência didática foi vivenciada pelos licenciandos durante os encontros, com o objetivo de responder nossa questão de pesquisa: Quais os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, Campus São Cristóvão (UFS/SC), podem ser identificados por meio de uma sequência didática?

O contato direto da pesquisadora com os licenciandos, participantes da pesquisa, caracteriza nossa investigação como uma pesquisa-ação. Nesse tipo de pesquisa, a pesquisadora se insere no ambiente de pesquisa para "observá-lo, compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ações e de aprendizagem dos participantes" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 112).

Com a aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética[8], iniciamos os primeiros encaminhamentos metodológicos da pesquisa, começando pela observação de

---

[8] Projeto de número CAAE 25978919.6.0000.5546 aprovado na Plataforma Brasil.

algumas aulas nas turmas escolhidas. Essas observações colaboraram para adaptação da sequência didática, atendendo ao primeiro objetivo de pesquisa: propor uma sequência didática como medida de intervenção na formação inicial dos licenciandos em Matemática.

A sequência didática foi adaptada a partir de uma sequência de ensino apresentada num encontro de formação continuada para professoras de Matemática do município de Criciúma, estado de Santa Catarina[9]. Convém destacar que as pesquisas no campo da Educação Matemática evidenciam uma diferença entre os termos: sequência didática e sequência de ensino. Ainda que ambas tratem de um roteiro de atividades organizadas por etapas, a sequência de ensino é utilizada como estratégia didática que visa exclusivamente à aprendizagem de determinado conteúdo. Enquanto a sequência didática amplia seus objetivos para validação das atividades propostas como instrumento metodológico de pesquisa, conforme destacado por Rosa (2020, p. 40).

> Na Didática da Matemática, a sequência didática, mesmo com estrutura de sequência de ensino, é aplicada como metodologia de pesquisa, cujos procedimentos recorrem ao método de pesquisa da Engenharia Didática sistematizada por M. Artigue nos anos de 1980 (ROSA, 2020, p. 40).

No entanto, convém enfatizar que o nosso estudo não se apoia na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, como grande parte das pesquisas realizadas na área de Educação Matemática que desenvolvem sequências didáticas. Esta metodologia de pesquisa tem como principal característica o modo de validação dos procedimentos que acontecem por meio de uma comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori* (ALMOULOUD, 2007).

Em nossa pesquisa, a sequência didática foi utilizada como instrumento de coleta de dados, sem a necessidade de seguir as etapas da Engenharia Didática (análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação). A análise dos resultados não foi comparativa; ela aconteceu durante o desenvolvimento das atividades propostas na sequência, apoiada nos pressupostos da teoria de van Hiele. Esta análise nos permitiu atender aos demais objetivos, que foram: identificar os níveis de pensamento geométrico dos licenciandos em Matemática por meio da Teoria de van Hiele; verificar possíveis implicações da intervenção realizada para a formação docente destes licenciandos.

Além do desenvolvimento da sequência didática, outras estratégias foram utilizadas para melhor acompanhar o processo de coleta de dados. Assim, no tópico a seguir,

---

[9] Encontro descrito na introdução deste trabalho.

elencaremos outros instrumentos que complementam a aplicação da sequência, fomentando os dados coletados.

## 4.1 Instrumentos de coleta de dados

No decorrer de nosso estudo utilizamos quatro instrumentos de coleta de dados que melhor se adequaram ao contexto da pesquisa: questionário, diário de bordo, entrevista semiestruturada e sequência didática.

### 4.1.1 Questionário

O instrumento questionário é tradicionalmente usado na coleta de informações, por ser facilmente aplicado a muitos sujeitos sem a participação direta do pesquisador. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012) um questionário é composto por perguntas que podem ser

> *Fechadas*, quando apresentam alternativas para respostas. Neste caso, o pesquisador pressupõe quais são as respostas possíveis que o sujeito irá dar, não havendo, portanto, possibilidade de obter alguma resposta fora desse conjunto.
> *Abertas*, quando não apresentam alternativas para resposta, podendo o pesquisador captar alguma informação não prevista por ele ou pela literatura.
> *Mistas*, combinando parte com perguntas fechadas e parte com perguntas abertas (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 116, *grifo dos autores*).

O tipo de questionário que atende às necessidades de nossa pesquisa é o *misto*. Um questionário desse tipo foi construído pela pesquisadora, respondido e enviado pelos participantes em versão on-line na fase inicial da pesquisa. As informações coletadas por esse instrumento auxiliaram na caracterização desses participantes, possibilitando saber de cada um: idade, ano de início do curso, período letivo que estava cursando. As respostas dos licenciandos também contribuíram na obtenção dos dados acerca dos processos de aprendizagem e ensino do conteúdo de geometria ao longo do curso de graduação, dos conhecimentos prévios relativos aos níveis de pensamento geométrico de van Hiele, das disciplinas ofertadas no curso e sobre a participação, ou não, em programas ofertados no âmbito da Política Nacional de Formação de Professores (PNFP).

### 4.1.2 Diário de campo

Tendo em vista que as atividades ocorreram durante muitos encontros, com a participação de um número considerável de licenciandos, incluindo a observação prévia do ambiente a ser pesquisado, percebemos a relevância de um diário de campo como instrumento de pesquisa.

Durante o desenvolvimento das atividades ocorreram várias situações que contribuíram para a pesquisa, que não são passíveis de serem registradas por meio dos outros instrumentos de coleta de dados, buscando apurar melhor essas situações optamos pelo diário de campo.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 118), o diário de campo é um material riquíssimo de coleta de informação, porque é nele "que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for o registro, maior será a acuidade da informação" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 118). Por isso, buscamos realizar o registro em nosso diário de campo durante o desenvolvimento das atividades, acrescentando nele informações ao final de cada encontro.

### 4.1.3 Entrevista semiestruturada

Essa modalidade de entrevista permite que o pesquisador organize um roteiro de pontos a serem explanados pelo entrevistado, podendo formular questões não previstas no roteiro inicial. Essa técnica permite aprofundar o estudo, complementando os dados coletados por outros instrumentos (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

A entrevista semiestruturada foi realizada, aproximadamente, noventa dias após o desenvolvimento das demais atividades propostas, buscando fazer emergir aspectos que não foram contemplados no questionário, como as possíveis implicações da intervenção realizada para a formação docente dos licenciandos.

### 4.1.4 Sequência didática

No mesmo período de observação das aulas trabalhamos na adaptação da sequência didática a ser vivenciada com os licenciandos, que serviu como principal instrumento utilizado para a coleta de dados.

O Quadro 2 (a seguir) apresenta um resumo do roteiro de atividades que compõem a sequência didática e o número de horas/aula previstas para o seu desenvolvimento.

Considerou-se que cada hora aula tem duração de 50 minutos. Este resumo foi elaborado após a validação desse instrumento de coleta de dados. O processo de validação das atividades aconteceu com o apoio de um grupo similar aos participantes da pesquisa, formado por outros licenciandos em Matemática, integrantes do Programa Residência Pedagógica.

Para realização da validação foram disponibilizadas quatro horas aula, nas quais foram vivenciadas as quatro primeiras atividades da sequência, incluindo o preenchimento do questionário. Assim como as atividades vivenciadas, as demais atividades da sequência foram avaliadas pelo grupo.

A validação teve como finalidade a adequação do questionário, para a melhor distribuição das atividades da sequência didática, de acordo com o tempo disponível, e para a classificação das atividades dentro dos níveis de pensamento geométrico descritos pela teoria de van Hiele.

**Quadro 2:** Resumo da sequência didática[10].

| ENCONTRO | DURAÇÃO em hora/aula | ATIVIDADE PROPOSTA | NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMETRICO NECESSÁRIO PARA ATIVIDADE E SUAS CARACTERÍSTICAS |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | Apresentação do projeto de pesquisa aos licenciandos, o que incluiu os objetivos, a metodologia e instrumentos.<br>**Atividade 1**: resolução de problemas envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras;<br>-Socialização e discussão das formas de soluções dos problemas propostos. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos das figuras geométricas;<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Calcular a área das figuras geométricas;<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades. |
| 2 | 1 | **Atividade 2**: Questões envolvendo o enunciado e a representação geométrica do Teorema de Pitágoras;<br>**Atividade 3**: Questões reflexivas sobre o enunciado e a representação geométrica relativos às questões anteriores. | **NÍVEL 3**<br>- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos;<br><br>**NÍVEL 4**<br>- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas.<br><br>**NÍVEL 5**<br>- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas;<br>- Distinguir forma e medida. |
| 3 | 2 | **Atividade 4**: Experimentar em malha triangular e com o uso das peças do Tangram a representação geométrica do Teorema de Pitágoras; Explorar | **NÍVEL 3**<br>- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos; |

[10] Considerou-se que cada hora aula tem duração de 50 minutos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | com figuras diferentes do quadrado representações geométricas desse teorema; Incentivar a definição de um novo enunciado para este teorema. | **NÍVEL 4**<br>- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas.<br><br>**NÍVEL 5**<br>- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas;<br>- Distinguir forma e medida. |
| 4 | 3 | **Atividade 5**: Investigar aritmeticamente.<br>Por meio da verificação das medidas de triângulos retângulos investigar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30, 45 e 60 graus. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos;<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades;<br>- Construir argumentos lógicos sobre as propriedades. |
| 5 | 1 | **Atividade 6**: Generalizar algebricamente as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30, 45 e 60 graus. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos;<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades;<br>- Construir argumentos lógicos sobre as propriedades |
| 6 | 2 | **Atividade 7**: Redescobrir o número Pi recorrendo a uma atividade de experimentação. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Apresentar um argumento lógico no sistema dedutivo formal na generalização do comprimento da circunferência. |
| 7 | 2 | **Atividade 8**: Investigar e generalizar o cálculo da área do círculo por meio de uma experimentação. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Apresentar um argumento lógico no sistema dedutivo formal na generalização da área da circunferência.<br><br>**NÍVEL 4**<br>- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas. |
| 8 | 1 | **Atividade 9**: Responder à pergunta: Porque dizemos que o número Pi ora vale 3,1415...e ora 180 graus?<br>Promover a discussão sobre o comprimento da circunferência de raio 1 e construir o significado da medida de arco. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br>- Conhecer as propriedades da circunferência.<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Apresentar provas intuitivas. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 1 | Atividade 10: Com a sobreposição de triângulos retângulos, construir o ciclo trigonométrico com dados como coordenada (x, y), ângulo e arco correspondente. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome á forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos e da circunferência;<br>- Conhecer as propriedades da circunferência.<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Estabelecer relações entre ângulo, arco e coordenadas cartesianas;<br>- Apresentar provas intuitivas. |

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Consideramos que adaptação desta sequência de atividades em uma sequência didática, mencionada anteriormente, teve um papel fundamental para identificar os níveis de pensamento geométrico desse grupo de licenciandos em Matemática com base nos níveis propostos pela Teoria de van Hiele. De acordo com Nasser e Sant'Anna (2010, p. 8), "a melhor maneira de reconhecer em que nível um determinado aluno está racionando é por meio da observação direta de seu modo de raciocinar, e das estratégias que ele usa para resolver problemas".

## 4.2 O processo de coleta de dados

Como já destacado anteriormente, a sequência didática prevista, apresentada no Quadro 2 (p. 67), sofreu alterações após a validação. Dentre as alterações destacamos a colaboração do grupo validador na adaptação de algumas questões bem como ao cronograma, em função do tempo disponível.

Para melhor compreensão, apresentamos no Quadro 3 a descrição das atividades que aconteceram durante o desenvolvimento da pesquisa nas turmas, no período em que a pesquisadora observou a turma.

**Quadro 3:** Atividades realizadas no período de coleta de dados anterior ao desenvolvimento da sequência.

| DATA E NÚMERO DE AULAS | ROTEIRO DA AULA | INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS |
|---|---|---|
| 15 de outubro de 2019<br>2 horas/aula | -Apresentação: a professora, que já conhece os estudantes, inicia a aula me apresentando e pedindo que eles se apresentem a mim;<br>-Apresentação da disciplina: discussão sobre a ementa, objetivos da disciplina, conteúdos programáticos, procedimentos metodológicos adotados e procedimentos de avaliação;<br>-Atividade de reflexão: cada estudante recebe uma folha, e a professora solicita que completem as seguintes sentenças:<br>-“Pra mim estágio é...”, “Espero que em Estágio I ...” e Em estágio I farei...”; | -Diário de campo;<br>-Material resultado da reflexão. |
| 17 a 31 de outubro de 2019<br>19 horas/aula | Nesse período a professora solicitou aos estudantes que realizassem:<br>-leitura e explanação de textos sobre estágio supervisionado;<br>-fichamento de alguns desses textos. | Diário de campo. |
| 05 a 19 de novembro de 2019<br>13 horas/aula | Período em que os estudantes realizaram atividades da disciplina, não relacionadas com esta pesquisa. | Não houve coleta de dados. |
| 06 de novembro de 2019<br>5 horas aula | Reunião com grupo de acadêmicos participante do projeto Residência Pedagógico. | Validação da sequência didática planejada/adaptada como instrumento de coleta de dados. |

Fonte: Elaborado pela autora.

A coleta de dados foi realizada durante as aulas da disciplina ESI, com isso, seguimos sempre o cronograma elaborado pela professora da turma. Contamos com a presença da professora durante todo o período de coleta de dados da pesquisa, que exerceu um papel importante de suporte para a pesquisa.

A forma como foram efetivamente desenvolvidas as atividades previstas na sequência didática validada anteriormente, estão descritas no Quadro 4. Foram necessárias 17 horas/aula para concluir a atividades, sendo que nas 15 primeiras os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram o diário de campo e as anotações dos estudantes nas atividades desenvolvidas por meio da sequência didática. Alguns meses após o término das atividades da sequência, nas últimas duas aulas, foram realizadas as entrevistas com os participantes.

**Quadro 4:** Descrição do desenvolvimento das atividades da sequência didática e os níveis de pensamento geométricos esperados em cada uma delas.

| DATA E HORAS/AULA | ATIVIDADE DESENVOLVIDA | NÍVEL DE PENSAMENTO GEOMETRICO ESPERADO PARA ATIVIDADE |
|---|---|---|
| Encontro 1<br>2 horas/aula | Apresentação do projeto de pesquisa aos licenciandos;<br>-Os estudantes responderam ao questionário.<br>**Atividade 1**: problemas envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras;<br>-Socialização da resolução dos problemas propostos, discutindo as variadas formas de solução. | **NÍVEL 3**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos das figuras geométricas;<br>- Calcular a área das figuras geométricas;<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades. |
| Encontro 2<br>2 horas/aula | **Atividade 2**: Questões envolvendo o enunciado e a representação geométrica do Teorema de Pitágoras.<br>**Atividade 3**: Questões reflexivas sobre o enunciado e a representação geométrica desenvolvidos nas questões anteriores. | **NÍVEL 5**<br>- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos;<br>- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas;<br>- Distinguir forma e medida. |
| Encontro 3<br>3 horas/aula | **Atividade 4**: Experimentar na malha triangular e com o uso das peças do Tangram a representação geométrica do Teorema de Pitágoras; Explorar com figuras diferentes do quadrado representações geométricas desse teorema; Incentivar a definição de um novo enunciado para este teorema. | **NÍVEL 5**<br>- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos;<br>- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas;<br>- Distinguir forma e medida. |
| Encontro 4<br>2 horas/aula | **Atividade 5**: Investigar aritmeticamente, por meio das medidas de desenhos geométricos de triângulos retângulos, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30, 45 e 60 graus. | **NÍVEL 3**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos;<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades;<br>- Construir argumentos lógicos sobre as propriedades. |
| Encontro 5<br>2 horas/aula | **Atividade 6**: Generalizar | **NÍVEL 3**<br>- Associar o nome à forma |

| | | |
|---|---|---|
| | algebricamente as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30, 45 e 60 graus. | geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos;<br>- Classificar os triângulos por meio das propriedades;<br>- Aplicar o teorema;<br>- Construir argumentos lógicos sobre as propriedades. |
| | **Atividade 7**: Redescobrir o número Pi recorrendo a uma atividade de experimentação. | **NÍVEL 3**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br>- Apresentar um argumento lógico no sistema dedutivo formal na generalização do comprimento da circunferência. |
| Encontro 6<br>2 horas/aula | **Atividade 8**: Investigar e generalizar o cálculo da área do círculo por meio de uma experimentação. | **NÍVEL 3**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br>- Apresentar um argumento lógico no sistema dedutivo formal na generalização da área da circunferência.<br><br>**NÍVEL 4**<br>- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas |
| Encontro 7<br>2 horas/aula | **Atividade 9**: Porque dizemos que o número Pi ora vale 3,1415...e ora 180 graus? Promover a discussão sobre o comprimento da circunferência de raio 1 e construir o significado da medida de arco; | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos da circunferência;<br>- Conhecer as propriedades da circunferência.<br><br>**NÍVEL 3**<br>- Apresentar provas intuitivas. |
| | **Atividade 10**: Com a sobreposição de triângulos retângulos, construir o ciclo trigonométrico com dados como coordenada (x, y), ângulo e arco correspondente,<br>-Debate com o grupo sobre as atividades desenvolvidas. | **NÍVEL 2**<br>- Associar o nome à forma geométrica;<br>- Conhecer os principais elementos dos triângulos e da circunferência;<br>- Conhecer as propriedades da circunferência.<br>**NÍVEL 3**<br>- Estabelecer relações entre ângulo, arco e coordenadas |

| | | |
|---|---|---|
| | | cartesianas;<br>- Apresentar provas intuitivas. |
| Encontro 8<br>2 horas/aula | Finalização da coleta de dados com a realização das entrevistas. | A atividade desenvolvida neste encontro não é enquadra nos níveis de pensamento geométrico. |

Fonte: Elaborado pela autora.

Iniciamos as atividades gravando o áudio das aulas, porém a dinâmica da sala de aula, onde os estudantes se agrupam em mesas grandes, com sete ou oito pessoas em cada mesa, resultou em áudios com muito ruído de fundo, o que impossibilitou a transcrição das falas dos presentes às atividades. Com isso, foi necessário dobrar a atenção para os comentários dos alunos, de forma a registrar as observações no diário de campo.

Todas as atividades que envolveram anotações dos estudantes foram recolhidas ao final de cada aula e organizadas com identificação por estudante. Dessa forma, ao final da sequência foi possível identificar os estudantes que realizaram todas as dez atividades, destacando que esse será o grupo cuja suas atividades serão analisadas. Contudo, ressaltamos a participação no desenvolvimento das atividades de todos os estudantes que se faziam presentes em cada aula.

Finalizada a descrição do processo de coleta de dados, partimos para o processo de análise, para então responder ao nosso objetivo de analisar os níveis de pensamento geométrico de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa.

# 5. CONTEXTO INVESTIGADO

Ao buscarmos atender ao objetivo geral de nosso estudo, com base na Teoria de van Hiele para investigar os níveis de pensamento geométrico que os licenciandos em Matemática, participantes da pesquisa, evidenciam nas soluções apresentadas ao longo das atividades de ensino vivenciadas em uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras, torna-se necessário conhecer o contexto investigado, iniciando pelo *lócus* de nossa pesquisa, a Disciplina de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, Campus São Cristóvão.

Para isso, além dos documentos curriculares deste curso de licenciatura, também realizamos uma entrevista com a professora da disciplina a qual, é apresentada como DOCENTE DE ESI. Essa escolha se deu pela necessidade de alguns esclarecimentos quanto a diferentes aspectos na composição da matriz curricular do curso, e pelas importantes contribuições que esses dados podem trazer ao nosso estudo. Isso nos possibilitou melhor compreender este contexto, durante a análise das entrevistas com os licenciandos.

Da mesma forma, também apresentamos a caracterização dos participantes, resultado da análise do questionário respondido por eles. Esse reconhecimento dos participantes auxiliará na compreensão de seus comportamentos durante a coleta de dados, possibilitando aprofundar a análise que permeia o processo de ensino e de aprendizagem.

Nesta análise, os participantes são identificados com nomes fictícios, alguns escolhidos por eles, outros renomeados por nós, e utilizamos letras para apontar os instrumentos de coleta de dados: (E) para entrevistas, (Q) para questionários, (R) para relatos durante as aulas, e (DC) para diário de campo.

## 5.1 O curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe e a disciplina de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática

Atualmente, o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS) do campus de São Cristóvão (UFS/SE), é regido pela Resolução n°150/2009/CONEPE/UFS, sendo todos seus aspectos legais apontados nesse documento. Para o curso, são ofertadas 50 vagas para o turno diurno (vespertino) e outras 50 para o noturno. O ingresso de alunos acontece no primeiro de semestre de cada ano letivo.

A carga horária para a integralização do curso é de 3 045 horas, equivalentes a 203 créditos. O total de créditos é dividido da seguinte forma: 187 são cursados em disciplinas obrigatórias e 16 correspondem às disciplinas optativas; as atividades acadêmico-científico-culturais[11] correspondem a 14 créditos, que são contabilizadas nos créditos das disciplinas obrigatórias.

A estrutura curricular disciplinar, vigente no curso está disposta na Resolução Nº 150/2009/CONEPE/UFS (SERGIPE, 2009), organiza as disciplinas em três segmentos: I) Prática como componente curricular; II) Estágio curricular supervisionado; III) Aulas para conteúdos curriculares de natureza científico-cultural. O documento orienta que essas disciplinas desenvolvam seus conteúdos de forma inter-relacionada, possibilitando ao licenciando uma visão integrada deles, conectando a formação básica em Matemática aos conhecimentos da área pedagógica.

Ao analisar as ementas das disciplinas obrigatórias que compõem a estrutura curricular do curso, identificamos 1185 horas destinadas a disciplinas voltadas para o exercício da docência, que estão apresentadas no Quadro 5. Nomeamos dessa forma por entender que estas formam um bloco de disciplinas que orientam mais especificadamente o estudante do curso de Licenciatura em Matemática.

**Quadro 5:** Distribuição das disciplinas obrigatórias voltadas para o exercício da docência do Curso de Licenciatura em Matemática da UFS/SC.

| DISCIPLINA | CARGA HORÁRIA (horas) |
|---|---|
| Matemática para o Ensino Fundamental | 60 |
| Matemática para o Ensino Médio I | 60 |
| Introdução à Psicologia do Desenvolvimento | 60 |
| Matemática para o Ensino Médio II | 60 |
| Introdução à Psicologia da Aprendizagem | 60 |
| Metodologia do Ensino de Matemática | 90 |
| História da Matemática | 60 |
| Matemática para o Ensino Médio III | 60 |

[11] As atividades acadêmico-científico-culturais do curso de Licenciatura em Matemática compreendem aquelas não previstas na grade curricular do curso, cujo objetivo é proporcionar aos alunos uma participação em experiências diversificadas que contribuam para sua formação humana e profissional. São consideradas as seguintes atividades: atividades de ensino, pesquisa e extensão, atividades culturais e de representação discente, produção bibliográfica e participação em eventos.

| | |
|---|---|
| Laboratório de Ensino de Matemática | 90 |
| Novas Tecnologias e o Ensino da Matemática | 60 |
| Estrutura e Funcionamento da Educação Básica | 60 |
| Língua Brasileira de Sinais - LIBRAS | 60 |
| Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I | 105 |
| Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática II | 150 |
| Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática III | 150 |
| Total | 1185 |

Fonte: Resolução n°150 (Sergipe, 2009).

Essa quantidade corresponde a, aproximadamente, 39% do total de horas obrigatórias para a integralização do curso. Esse dado sinaliza que o estudante não selecionar disciplinas pedagógicas, dentre suas disciplinas optativas, terá menos de quarenta por cento de seu histórico destinado a disciplinas voltadas para o exercício da docência. Ainda que, o licenciando complemente sua formação selecionando para disciplinas optativas apenas as de caráter pedagógico, essas ainda representarão em carga horária um pouco menos da metade total do curso (1185 horas obrigatórias + 240 horas optativas), correspondendo a, aproximadamente, 47%.

Esse aspecto também é discutido por Libâneo (2015, p. 631), apontando que nos cursos de licenciatura "em que se forma o professor especialista em conteúdos de certa área científica, há visível ênfase nesses conteúdos e pouca atenção à formação pedagógica, quase sempre separada da formação disciplinar".

A respeito das especificidades das disciplinas que compõem a estrutura curricular do curso, a docente da disciplina de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I (ESI), ambiente de nossa pesquisa, alerta "libras, estrutura e funcionamento, as psicologias do desenvolvimento e da aprendizagem, são disciplinas mais gerais, elas não têm a especificidade da Matemática" (DOCENTE DE ESI, ENTREVISTA, 2020). Ainda que as tenhamos classificado como disciplinas voltadas à docência, essas não são específicas para o ensinar matemático.

Salientamos, ainda, que entre as disciplinas que podem ser cursadas como optativas pelos licenciandos em Matemática, são oferecidas para essa modalidade 2.180 horas, das quais 360 horas correspondem a disciplinas de cunho pedagógico, voltadas para o exercício da docência, o que representa menos de 17% do total ofertado. Os dados apresentados corroboram com o estudo realizado por Gatti e Nunes (2009, p. 99), no que tange à composição das estruturas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática priorizar a formação disciplinar. A mesma autora, em outro momento, afirma: “Há muito descompasso entre os projetos pedagógicos desses cursos e a estrutura curricular realmente oferecida” (GATTI, 2014, p. 39), falando das licenciaturas em geral.

Os objetivos gerais ao curso de Licenciatura em Matemática/UFS/SC são apresentados no Art. 2° da Resolução n° 150/2009, como a seguir:

> a) formar professores de Matemática para a segunda fase do ensino fundamental e para o ensino médio;
>
> b) possibilitar reflexões sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, sobre metodologias de ensino de Matemática e sobre pedagogia em geral, e,
>
> c) preparar o futuro professor para desenvolver iniciativas para atualização e aprofundamento constante de seus conhecimentos para que possa acompanhar as rápidas mudanças na área (SERGIPE, 2009, p. 1).

Observamos que os objetivos gerais enfatizam a formação do professor de Matemática e desenvolvimento de habilidades para exercer a docência. O desafio do curso de licenciatura é mudar o olhar dos acadêmicos, de estudantes para professor, estudar os objetos do conhecimento sob o ponto de vista do ensino.

> Nada substitui o conhecimento, mas o conhecimento de que um professor de Matemática necessita é diferente daquele que se exige a um especialista de Matemática. Não é um conhecimento menor ou simplificado. É um conhecimento diferente, ancorado na compreensão da disciplina, da sua história, dos seus dilemas e, acima de tudo, das suas potencialidades para a formação de um ser humano (NÓVOA, 2017, p. 1116).

Dessa forma, aprofundamos nosso estudo na disciplina ESI, que nesse curso oferece os primeiros contatos dos estudantes com o ambiente escolar, ambiente de nossa pesquisa. Segundo a docente da disciplina, esta é a porta de entrada do licenciando com a docência:

> *[...] para a maioria, a disciplina de estágio I é o primeiro contato com ensino que eles terão. Essas disciplinas que estão incorporadas à docência são genéricas, atendem todas as licenciaturas, aparece um ou outro exemplo de matemática conforme a disposição do professor. Dessa forma, fica a cargo do estágio essa parte específica, uma disciplina que tem maior carga horaria e precisa ter um caráter tanto teórico como prático. E ela também que vai preparar o licenciando para o exercício*

> *da regência nos próximos estágios* (DOCENTE DE ESI, ENTREVISTA, 2020).

O objetivo da disciplina ESI é oferecer aos licenciandos subsídios teóricos e práticos necessários para planejar e lecionar aulas de matemática para alunos do Ensino Fundamental e Médio. A estrutura curricular do curso elenca como pré-requisito a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática, que tem o propósito de construir e aplicar recursos didáticos para o ensino da Matemática do ensino básico.

A ementa de ESI aponta para a conexão entre aspectos práticos, abordados na disciplina pré-requisito a ela, e aspectos teóricos enfatizados durante o desenvolvimento da disciplina:

> Ementa: Planejamento. Projeto Político Pedagógico. Diretrizes curriculares nacionais para os Ensinos Fundamental e Médio e para a Formação de Professores da Educação Básica em Nível Superior, em Curso de Licenciatura. Tópicos sobre formação de professores (SERGIPE, 2009, p. 16).

Para atingir seus objetivos e atender a demanda da ementa, a disciplina ESI dispõe de 105 horas (sete créditos), o que representa sete aulas semanais. Nas turmas que participaram deste estudo, as aulas foram distribuídas semanalmente da seguinte forma: duas aulas na terça-feira, duas na quinta-feira e três na sexta-feira, com cada aula tendo cinquenta minutos.

A professora da disciplina ESI organizou os conteúdos programáticos, presentes na ementa, em três partes:

> Parte 1. Estágio Supervisionado na formação de professores de matemática: concepções, aspectos históricos, saberes docentes, identidade profissional e práticas educativas;
>
> Parte 2. Políticas públicas da educação brasileira para a formação de professores: legislação do estágio supervisionado nas licenciaturas, diretrizes curriculares nacionais da educação básica (ensino fundamental e médio, educação de jovens e adultos e educação inclusiva);
>
> Parte 3. Práticas de ensino: planejamento, projeto político pedagógico, metodologias da educação matemática, metodologias ativas e projeto didático (SERGIPE, DMA, 2019).

Os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento das aulas foram diversos: leitura, fichamento e discussão de textos, atividades e vivências em grupo, apresentação de seminários, observação do ambiente escolar, relatórios, planejamento e simulação de aulas. A diversidade dos métodos utilizados em aula objetiva envolver os estudantes no desenvolvimento das aulas, contribuindo para uma formação docente crítica e autônoma.

Para tanto, os licenciandos têm liberdade no momento de selecionar os objetos do conhecimento para suas simulações de aulas, contudo, a geometria parece um campo recorrente em suas escolhas. De acordo com a docente,

> *Em estágio I, a geometria entra por acaso, o fato dos acadêmicos saberem da minha pesquisa nesse campo contribui para eles trazerem os objetos de conhecimentos do campo da geometria para os planos. Às vezes eles fazem isso para agradar e não se dão conta que não sabem esse conteúdo esbarrando na fragilidade. Ou ainda, percebem que os colegas apresentam dificuldades no uso dos instrumentos, nos conceitos abordados nas simulações de aulas* (DOCENTE DE ESI, ENTREVISTA, 2020).

Os relatos da docente de ESI que apontam sobre as fragilidades no campo da geometria, por parte dos licenciandos, corroboram com os estudos apresentados em nosso trabalho (NACARATO E PASSOS, 2003; SOUZA E SILVA, 2012; CALDATTO E PAVANELO, 2014). Dessa forma, a componente curricular ESI tem um papel relevante na ampla formação desses futuros professores, tanto nos aspectos matemáticos quanto nos didático-pedagógicos.

Assim, conhecer as características deste Curso de Licenciatura em Matemática, e mais especificamente da componente curricular ESI, nos permite uma melhor compreensão do contexto da formação inicial destes licenciandos. Pois, colaboramos com o entendimento de Nóvoa (2017, p.1111), ao afirmar que "parte-se de um diagnóstico crítico do campo da formação de professores não para o desmantelar, mas para nele buscar as forças de transformação".

## 5.2 Os licenciandos participantes da pesquisa

A participação da pesquisadora nas aulas que antecederam o desenvolvimento das interações com os estudantes das turmas de ESI facilitou a colaboração deles, possibilitando uma relação positiva entre pesquisadora e esses estudantes participantes.

Com a observação das primeiras aulas, podemos pontuar alguns aspectos, como a predominância de estudantes do sexo masculino, representando 63,4% do grupo, conforme exposto no Quadro 6:

**Quadro 6:** Quantidade e diferenciação por sexo das turmas participantes.

| Identificação da turma | Total de estudantes matriculados | Sexo |
|---|---|---|
| Vespertina<br>A | 30 | Feminino: 12 |
| | | Masculino:18 |
| Noturna<br>B | 11 | Feminino: 3 |
| | | Masculino:8 |

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Quanto ao sexo dos estudantes, a professora pontuou durante uma das aulas que apesar da maior parte dos matriculados serem do sexo masculino, o número de mulheres matriculadas no curso vem crescendo a cada ano. Em ambas as turmas, percebemos que o sexo dos alunos não interferiu na participação nas discussões e debates durante as aulas.

Como a coleta de dados durante a sequência didática se estendeu por quase três semanas de aulas, , o que os impediu de desenvolver todas as aulas, ocorrendo o desenvolvimento das atividades de forma parcial. Esse fato nos levou a, dentre os 51 estudantes matriculados na disciplina Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I no período letivo de 2019-1 do curso de Licenciatura em Matemática da UFS/SC, selecionar um subgrupo para ser analisado. Este subgrupo tornou-se o nosso objeto de estudo, composto, apenas, pelos 22 estudantes que desenvolveram todas as dez atividades previstas, visto que as atividades eram sequenciais, sendo 16 deles estudantes do turno vespertino e os demais da matriculados na turma noturna.

Para melhor caracterizar e conhecer esses licenciandos, um questionário on-line (APÊNDICE I) foi elaborado no *Google Docs*[12] e enviado aos participantes por meio de um grupo de *WhatsApp*[13], que foi um canal de comunicação criado pela professora da turma no qual estavam cadastrados todos os estudantes, inclusive eu, pesquisadora. Os questionários respondidos foram reenviados e recebidos também de forma on-line. Desses, apenas os respondidos pelo subgrupo de vinte e dois estudantes participantes foram analisados.

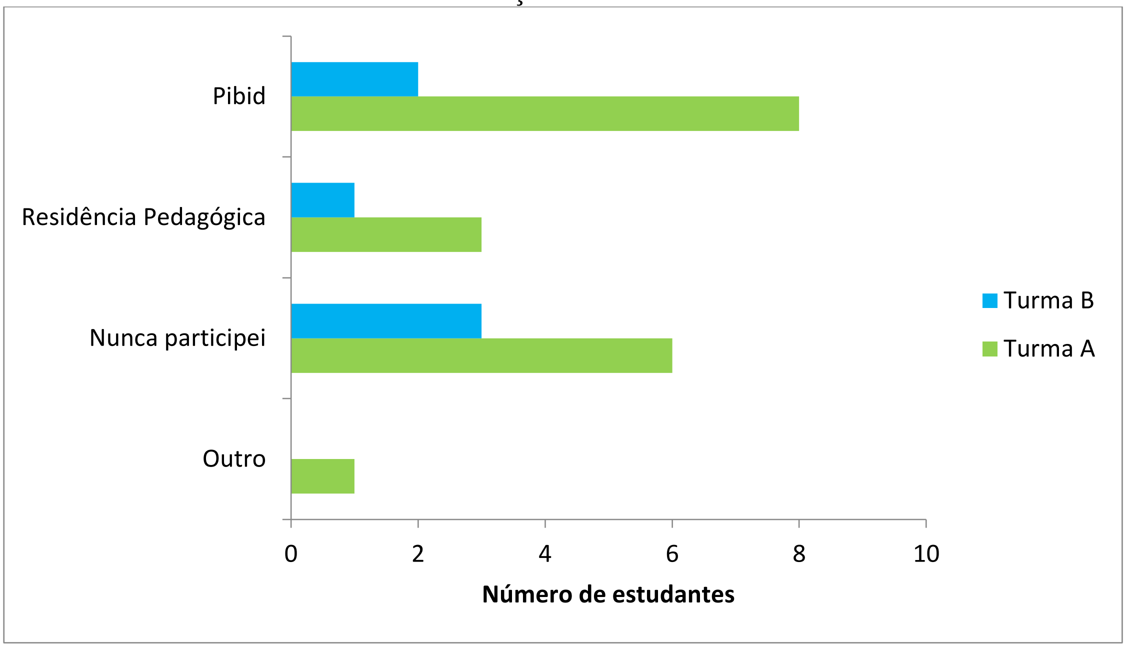
[12] O Google Docs refere-se a um pacote de aplicativos com funcionamento baseado na plataforma da internet, sua composição conta com editor de formulário, planilha, apresentação e texto.

[13] WhatsApp é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para smartphones. Além de mensagens de texto, os usuários podem enviar imagens, vídeos e documentos, além de fazer ligações grátis por meio de uma conexão com a internet. Fonte: https://olhardigital.com.br/2018/12/20/noticias/whatsapp-historia-dicas-e-tudo-que-voce-precisa-saber-sobre-o-app/.

Outro aspecto que pudemos perceber, logo nas primeiras aulas, esteve relacionado com a diferença no envolvimento dos estudantes nas atividades propostas. Enquanto os estudantes da turma A (curso diurno) se apresentaram com comportamento mais participativo, sempre fornecendo argumentos para fomentar as discussões, os da turma B (curso noturno) expuseram poucos questionamentos.

Sem conhecer as turmas, consideraríamos a quantidade de estudantes para justificar esse fato, mas ao observar seus comportamentos percebemos que essa diferença está na desenvoltura dos próprios estudantes. Isso pode estar relacionado ao fato da maioria dos licenciandos da turma A participarem de Programas Nacionais de Formação de Professores, como PIBID, Residência Pedagógica e outros. Como podemos observar nas respostas à décima questão do questionário, conforme apresentado na Figura 5.

**Figura 5:** Você participa ou já participou de algum desses programas da Política Nacional de Formação de Professores?



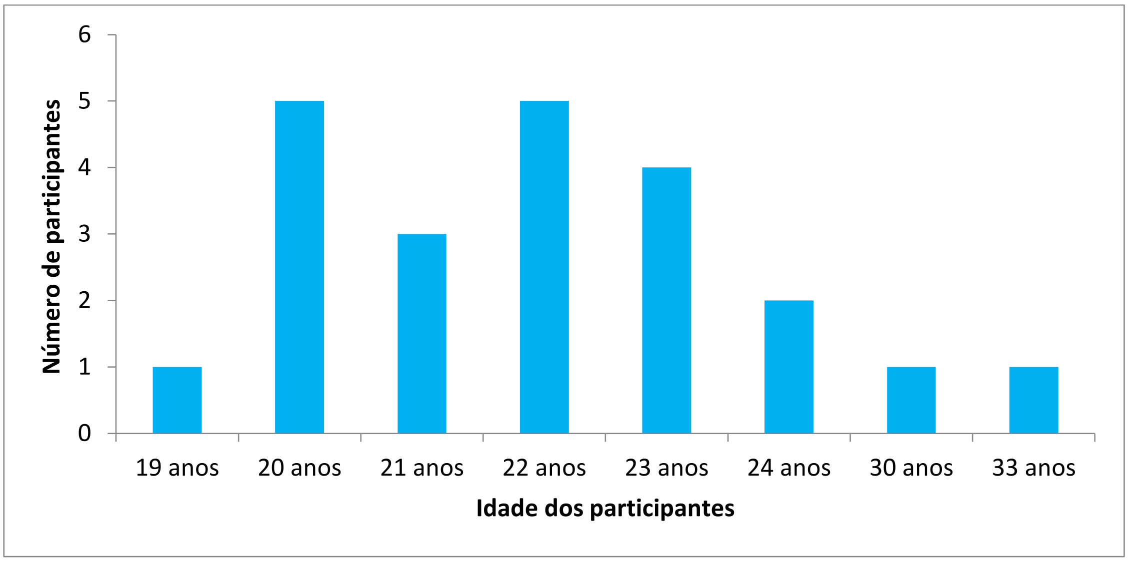

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do grupo de participantes da pesquisa ser composto de vinte e dois estudantes, o gráfico mostra um total de vinte e quatro respostas. Isso se deve ao fato de dois estudantes, um de cada turma, participar de dois programas ao mesmo tempo, um do PIBID e Residência Pedagógica e o outro do PIBID e Revimat[14]. Observou-se também que, enquanto 40% dos estudantes da turma B participaram de programas das PNFP, na turma A esse número é de 64,7%.

[14] Programa de revisão de conteúdos matemáticos, um programa de Extensão do Departamento de Matemática da UFS/SC.

Observamos que a faixa etária dos participantes esteve entre vinte e trinta e três anos, distribuídos igualmente nas duas turmas, sendo a maior parte formada por jovens que concluíram o Ensino Médio e logo ingressaram no curso superior, conforme pode ser visualizado na Figura 6. Dois estudantes iniciaram o curso no ano de 2015, sete no ano de 2016 e os demais ingressaram no ano de 2017.

**Figura 6:** Idade dos participantes.




Fonte: Dados da pesquisa.

A Resolução n°150/2009/CONEPE-UFS, que rege o curso de Licenciatura em Matemática da UFS/SC, limita o término do curso para estudantes do horário vespertino e noturno em até doze e quatorze períodos, respectivamente.

A análise desses dados nos possibilitou conhecer algumas características do grupo de participantes de nossa pesquisa, enriquecendo as constatações realizadas durante a observação das turmas. As demais questões presentes nos questionários complementaram as análises dos itens a seguir.

Iniciamos o desenvolvimento das atividades da sequência didática no dia 20 de novembro do ano de 2019. Como dito anteriormente, no período entre o primeiro dia de aula até o momento de realização das atividades observamos as turmas nas aulas regidas pela professora, o que nos proporcionou uma aproximação com os estudantes.

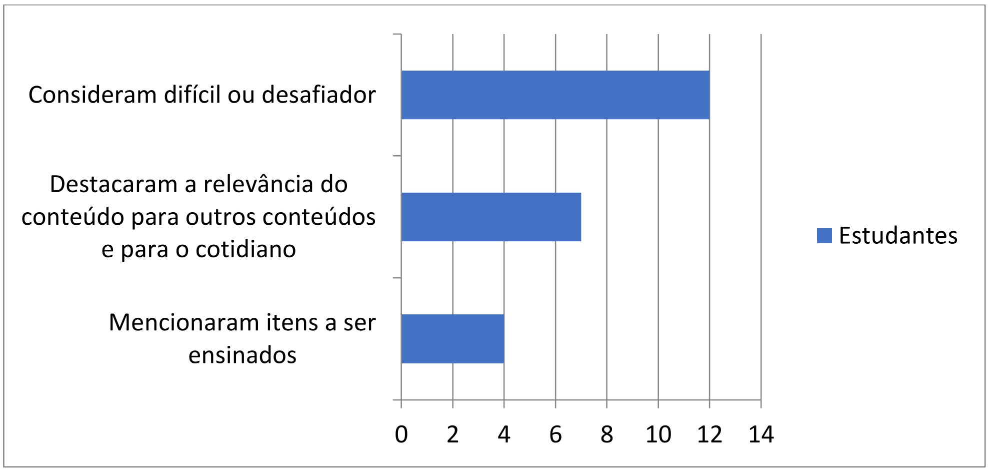
A aula foi iniciada com a apresentação do projeto de pesquisa aos licenciandos, assim como sua metodologia e objetivos. Em seguida, foi solicitado que eles respondessem o questionário por meio do link disponibilizado no grupo de *WhatsApp* das turmas.

Ao responderem ao questionário os estudantes demonstram empolgação ao percebem que o conteúdo objeto da sequência seria de trigonometria, afirmando terem conhecido poucos métodos de ensino desse conteúdo.

> *A gente sabe trigonometria, acho que sabemos, mas ensinar esse conteúdo é outro assunto. (Naruto, DC)*
> *Uma coisa é decorar as fórmulas, outra é conseguir compreender o que significam. (Eduarda, DC)*

Os comentários empolgados durante o preenchimento do questionário podem ser melhor compreendidos quando observamos as respostas às questões seis, sete e oito. Essas questões falavam a respeito do ensinar trigonometria no Ensino Fundamental (questão 6), das disciplinas que trabalharam conceitos trigonométricos na graduação (questão 7), e se alguma disciplina abordou ou discutiu como ensinar esses conteúdos no ensino básico (questão 8). Na Figura 7, estão apresentados os quantitativos das respostas referentes à questão 5.

**Figura 7:** Para mim, ensinar trigonometria no Ensino Fundamental é:




Fonte: Dados da pesquisa.

Ao considerarem que lecionar o conteúdo de trigonometria no Ensino Fundamental é difícil ou desafiador, alguns dos argumentos os estudantes foram: *"Um desafio. Em vista que a maioria dos alunos não tem base para o conteúdo" (Jorge, Q); "Tarefa árdua" (Catarina, Q); "Um desafio e ao mesmo tempo muito interessante" (Luiza, Q),* mostrando que estes já preveem as dificuldades que os alunos do ensino básico enfrentarão.

A questão número sete foi: "Foram abordados conteúdos trigonométricos nas disciplinas de seu curso de graduação? Se sim, em quais disciplinas?". Todos os estudantes responderam que sim, sendo citadas onze disciplinas em que foram abordados conteúdos trigonométricos. As disciplinas e quantas vezes foram citadas por eles estão descritas na Tabela 1.

**Tabela 1**: Foram abordados conteúdos trigonométricos nas disciplinas de seu curso de graduação? Se sim, em quais disciplinas?

| DISCIPLINA | FREQUÊNCIA |
|---|---|
| Matemática para o Ensino Médio I | 16 |
| Cálculo I | 12 |
| Geometria Euclidiana Plana | 10 |
| Vetores e Geometria Analítica | 9 |
| Matemática para o Ensino Médio III | 5 |
| Álgebra Linear I, II, III | 3 |
| Matemática para o Ensino Médio II | 3 |
| Novas Tecnologias e o Ensino da Matemática | 1 |
| Física I | 1 |
| Variáveis Complexas | 1 |
| Análise da Reta | 1 |

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas dos licenciados à oitava pergunta “Foi abordado como ensinar os conceitos geométricos e trigonométricos em alguma disciplina de seu curso? Se sim, em qual/quais disciplina?.” estão apresentadas na Tabela 2.

**Tabela 2:** Foi abordado como ensinar os conceitos geométricos e trigonométricos em alguma disciplina de seu curso? Se sim, em qual/quais disciplina.

<table>
<tr><th>OPÇÃO</th><th colspan="3">FREQUÊNCIA E DISCIPLINA</th></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sim</td><td rowspan="3">15</td><td>Matemática para o Ensino médio I</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Geometria Euclidiana Plana</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Laboratório de Ensino de Matemática</td><td>2</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar da indicação de várias disciplinas que abordaram o conteúdo de trigonometria (Tabela 1), apenas três delas foram citadas quando se tratava sobre abordar métodos de ensino desse conteúdo, sendo elas: Matemática para o Ensino Médio I (doze indicações), e Geometria Euclidiana Plana (cinco indicações) e Laboratório de Ensino de

Matemática (duas indicações). Destacamos ainda que sete estudantes não perceberam essa abordagem, ou ainda não cursaram alguma das disciplinas citadas.

Os dados apontam que é necessário refletir sobre o motivo da maioria desses futuros professores considerarem “difícil ou desafiador” lecionarem os conteúdos trigonométricos mesmo após terem cursado tantas disciplinas que os abordaram.

Outro momento de questionamento ocorreu quando os estudantes respondiam à nona questão, que versa sobre o conhecimento do modelo de van Hiele. Sugerimos que cada um respondesse de acordo com a própria experiência para em seguida conversarmos sobre o assunto.

Os dados apresentados na Tabela 3, mostram que a maior parte dos estudantes participantes da pesquisa, aproximadamente 60% deles, nunca ouviu falar sobre a teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele. Ressaltamos a importância dos programas de PNFP, que foram citados por quatro estudantes como espaço onde ouviu falar sobre essa teoria. As disciplinas pedagógicas, obrigatórias do curso, também foram citadas por quatro estudantes. Foi citada ainda, uma disciplina optativa de outro curso, não identificado, e apresentação de Trabalho de Conclusão de Curso como oportunidade para conhecer a teoria.

**Tabela 3**: Dados referentes a nona questão do questionário.

<table>
<tr><th colspan="4">Questão 9: Em algum momento na graduação você ouviu falar da teoria dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele? Em que momento?</th></tr>
<tr><th>OPÇÃO</th><th colspan="3">FREQUÊNCIA E DISCIPLINA</th></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">15</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Sim</td><td rowspan="7">7</td><td>Residência Pedagógica</td><td>4</td></tr>
<tr><td>PIBID</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Metodologia do Ensino da Matemática</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Laboratório de Ensino de Matemática</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Psicologia da Aprendizagem</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Alfabetização Matemática (disciplina optativa de outro curso)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Apresentação de Trabalho de Conclusão de curso</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

A teoria de van Hiele, por se tratar de um modelo que prioriza o processo de aprendizagem juntamente com o de ensino, pode auxiliar o professor a lidar com as dificuldades no ensino de geometria da educação básica. O modelo é apresentado por Leivas (2009, p. 141), em sua tese de doutorado como “uma possibilidade de inserção no currículo da formação do professor de Matemática que ainda desconhece essa teoria”.

Com a questão sobre a participação dos licenciandos em programas de PNFP, discutida na caracterização dos participantes, encerramos a coleta das respostas ao questionário e iniciamos as atividades da sequência didática.

# 6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao ter em vista o objetivo geral de nosso trabalho de investigar, com base na Teoria de van Hiele, os níveis de pensamento geométrico evidenciados nas soluções apresentadas pelos licenciandos em Matemática, participantes da pesquisa, descrevemos a seguir as atividades desenvolvidas buscando alcançar esse objetivo.

Nesta seção, por meio da investigação nos dados coletados buscamos responder as questões que nortearam nossa pesquisa: Qual o nível de pensamento geométrico evidenciado nas estratégias de resolução de estudantes na segunda metade de um curso de Licenciatura em Matemática? Esses licenciandos conhecem outras abordagens geométricas do teorema de Pitágoras, além da usualmente apresentada nos livros didáticos? Quais as possíveis implicações da vivência da sequência didática para a formação docentes desses licenciados?

Para tanto, inicialmente, descrevemos as observações resultantes das atividades 1, 2, 3 e 4, por entendermos que a descrição e análise dessas são suficientes para identificar os níveis de pensamento geométrico, baseados na Teoria de van Hiele, em que se encontram o grupo de licenciandos participantes da pesquisa. O referencial teórico que fornece argumentos para nossa análise foi composto por: Leivas (2009, 2012, 2017); Cargnin, Guerra e Leivas (2016; Walle (2009); Leivas e Oliveira (2017); Oliveira et al., (2015); Crowley, (1994); Sant’Anna (2001).

Em seguida, buscamos considerar as possíveis implicações da intervenção realizada para a formação docentes destes licenciados. Como aporte teórico nesta seção optamos por: Nacarato e Paiva (2008); Leivas (2009); Schirlo e Silva (2013) Tardif (2002, 2011) Souza e Silva (2012) e Souza (2015).

## 6.1 Identificando os níveis de van Hiele: desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática

Neste tópico, apresentamos a descrição e análise das atividades que melhor nos possibilitaram investigar, com base na Teoria de van Hiele, os níveis de pensamento geométricos dos licenciandos em Matemática ao longo de atividades presentes em uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras. Com a finalidade de facilitar a compreensão, este tópico está dividido por atividades, como apresentamos a seguir.

### 6.1.1 Atividade 1: Problemas envolvendo aplicações do Teorema de Pitágoras

A primeira atividade proposta é constituída de duas situações problemas que envolvem a aplicação do Teorema de Pitágoras para as respectivas soluções. Solicitamos que cada estudante resolvesse individualmente as questões e não apagasse seus registros, para que posteriormente dialogássemos sobre elas. No Quadro 7, podemos observar as duas questões propostas.

**Quadro 7:** Problemas envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras.

| | |
|---|---|
| **13. (SEEDUC-RJ, 2012)** Um monumento sólido em forma de uma pirâmide regular de base hexagonal terá suas laterais revestidas com espelhos. A aresta lateral desse monumento mede 5 metros e a aresta de sua base mede 6 metros. O preço do metro quadrado do espelho é de R$ 50,00 e o valor da mão de obra para instalação dos espelhos é de R$ 20,00 por metro quadrado.<br>Quanto custará para revestir todas as laterais de monumento com espelhos?<br><br>a) R$ 840,00<br>b) R$ 1050,00<br>c) R$ 3600,00<br>d) R$ 5040,00<br>e) R$ 6300,00 | **Q178(ENEM, 2014**) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência que produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que a casa consome.<br>Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?<br><br>Retirar 16 células.<br>Retirar 40 células.<br>Acrescentar 5 células.<br>Acrescentar 20 células.<br>Acrescentar 40 células. |

Fonte: Material de coleta de dados da pesquisa.

As questões abordam situações que os estudantes precisam aplicar os conceitos aprendidos em outros contextos para obter a solução, o que exige, além do conhecimento matemático, o domínio das redes de relações entre os conhecimentos, por meio de observação, análise e generalizações. Por requisitarem aspectos referentes às propriedades dos triângulos, ambas podem ser classificadas como de nível 3 na teoria de van Hiele, que é o de dedução informal. Além de classificar o triângulo como triângulo retângulo, os estudantes precisam estabelecer que "se" é um triangulo retângulo "então", podemos calcular a medida desconhecida do lado usando o Teorema de Pitágoras.

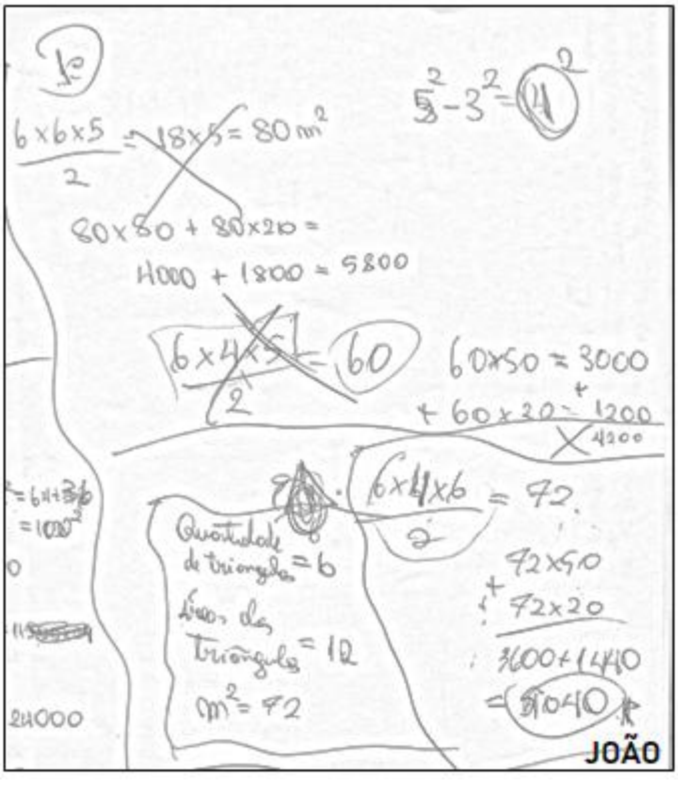
Após os estudantes sinalizarem a conclusão das questões, iniciamos o momento de discussão sobre os métodos empregados para solucioná-las. Voluntariamente, dois licenciandos se dispuseram a compartilhar suas resoluções. Cada um deles demonstrou no quadro o raciocínio e técnicas utilizados para resolver cada uma das situações. Os demais estudantes contribuíram dialogando sobre outras formas de raciocínio e técnicas utilizadas na resolução.

As formas de resolução foram parecidas, variaram apenas na estrutura do detalhamento de cada procedimento. Em ambas as turmas, a professora aproveitou o registro no quadro para fazer observações sobre a organização das anotações feitas, orientando-os pedagogicamente. Na sequência, exploraremos melhor as resoluções dos estudantes relativas a cada uma das situações problema.

**1° Questão**

Apenas o estudante João não representou geometricamente a forma geométrica envolvida; entretanto, apresentou a solução para a questão, conforme a Figura 8. A figura também mostra que a escolha de João, por não representar geometricamente o problema, o levou a alguns equívocos no cálculo da área do triângulo envolvido na situação problema.

**Figura 8**: Resolução do estudante.

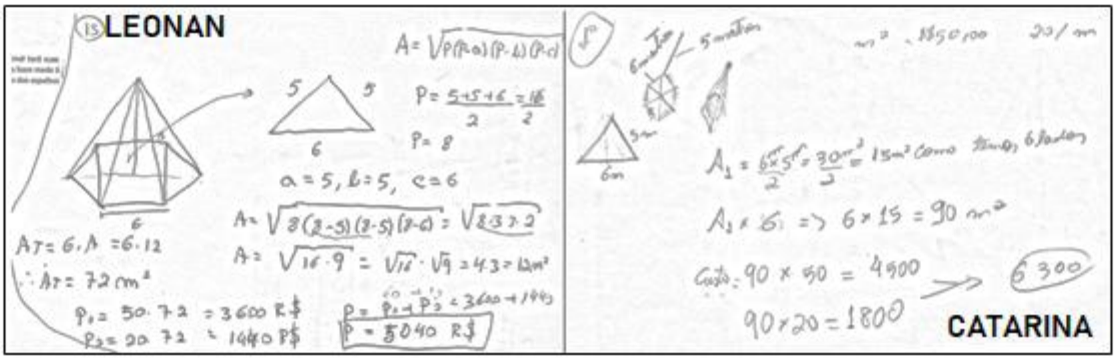



Fonte: Dados da pesquisa.

Na primeira tentativa, o licenciando multiplica os valores relativos às medidas das arestas laterais e da base e divide o resultado da multiplicação por dois; na segunda tentativa, por meio do Teorema de Pitágoras, ele percebe que a altura do triângulo equivale a quatro metros, e novamente multiplica todas as medidas e divide o resultado por dois. Após a segunda tentativa, o estudante utiliza um desenho simples, em seguida realiza algumas anotações de forma correta a respeito da situação problema. A observação do registro do licenciando ilustra a relação entre os níveis da Teoria de van Hiele, para alcançar o nível 2, análise, o estudante requisitou os conhecimentos do primeiro nível, visualização e reconhecimento (WALLE, 2009; CROWLEY, 1994).

Outros dois licenciandos não realizaram o cálculo da altura da pirâmide utilizando o Teorema de Pitágoras. Leonan utilizou o Teorema de Herão, que permite calcular a área do triângulo em função das medidas de seus três lados. A estudante Catarina calculou equivocadamente a área de triângulo isósceles pela fórmula matemática $\frac{b\,.\,h}{2}$ , considerando o vértice da pirâmide como a altura do triângulo, conforme a Figura 9.

**Figura 9**: Respostas dos licenciandos.

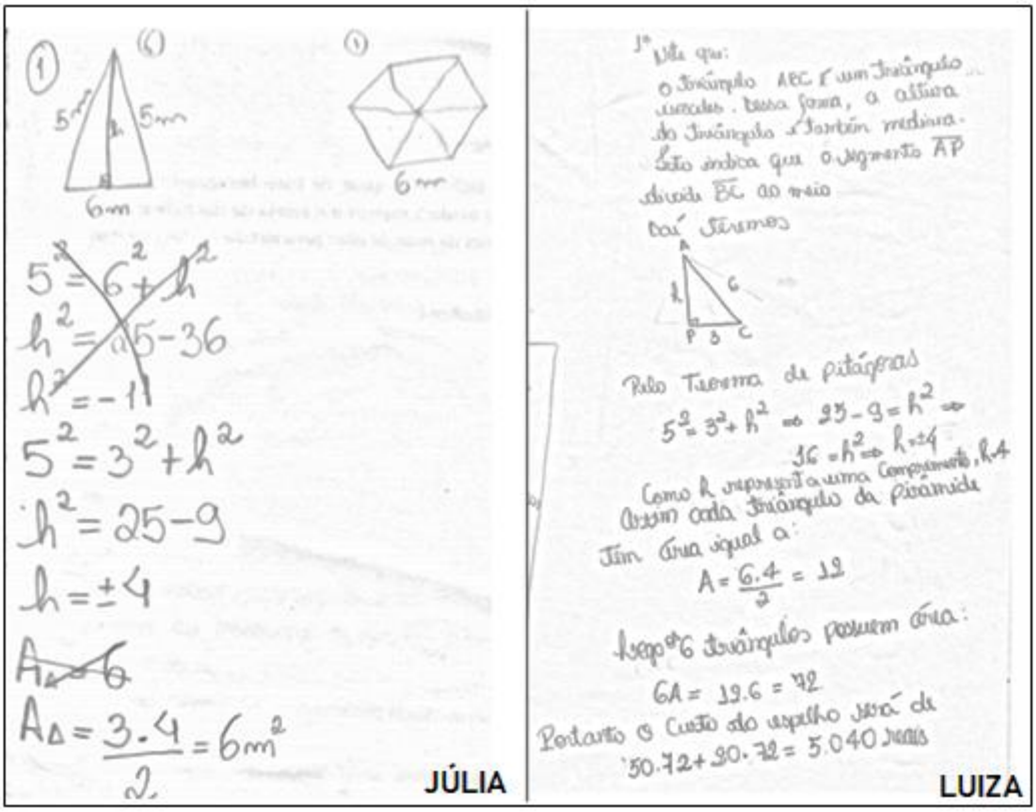



Fonte: Dados da pesquisa.

Os registros expostos nas Figuras 8 e 9 para a solução das situações problemas nos mostram fragilidades no ensino de conceitos geométricos básicos; pois, apesar do estudante Leonan apresentar uma forma diferenciada de resolução para área do triângulo isósceles, outros dois licenciandos se equivocam nessa resolução. Segundo Cargnin, Guerra e Leivas (2016), a valorização e o enriquecimento do ensino de geometria nos diferentes níveis escolares podem ser alcançados por meio de atividades e metodologias diferenciadas que possibilitem observação, análise, discussão de hipóteses e a generalização dos conhecimentos por parte dos estudantes.

Por outro lado, 19 estudantes aplicaram o Teorema de Pitágoras no cálculo da altura do triângulo, sendo que apenas dois, ao resolverem a raiz quadrada, no desenvolvimento do cálculo do teorema, expressaram que esses valores admitiam valores positivos e negativos, como apresentado na Figura 10.

**Figura 10**: Respostas das licenciandas.

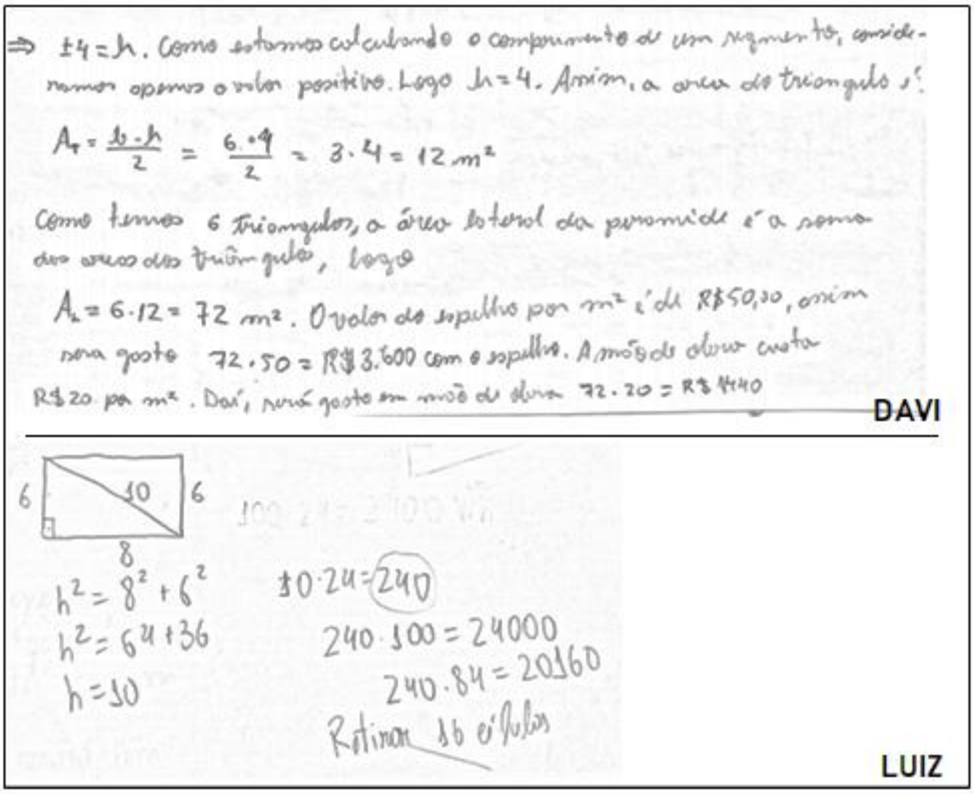



Fonte: Dados da pesquisa.

**2° Questão**

Da mesma forma como na 1° questão, apenas um participante (Davi) não incluiu uma representação geométrica na solução da situação. A utilização do esboço não é obrigatória para resolução do problema, contudo, conforme percebemos na questão anterior, esta opção auxilia o estudante na tomada de decisão quanto à escolha dos caminhos na solução. A solução apresentada por esse estudante pode ser observada na Figura 11 a seguir; como incluímos também a resposta de outro estudante que representou geometricamente a situação.

**Figura 11:** Resposta do licenciando.


⇒ ±4 = h. Como estamos calculando o comprimento de um segmento, consideramos apenas o valor positivo. Logo h = 4. Assim, a área do triângulo é:

$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 4 = 12\,m^2$

Como temos 6 triângulos, a área lateral da pirâmide é a soma das áreas dos triângulos, logo

$A_L = 6 \cdot 12 = 72\,m^2$. O valor do espelho por m² é de R$50,00, assim será gasto 72 · 50 = R$ 3.600 com o espelho. A mão de obra custa R$20 por m². Daí, será gasto em mão de obra 72 · 20 = R$ 1440

DAVI

6 10 6
8

$h^2 = 8^2 + 6^2$
$h^2 = 64 + 36$
$h = 10$

10 · 24 = 240
240 · 100 = 24000
240 · 84 = 20160
Retiram 16 círculos

LUIZ

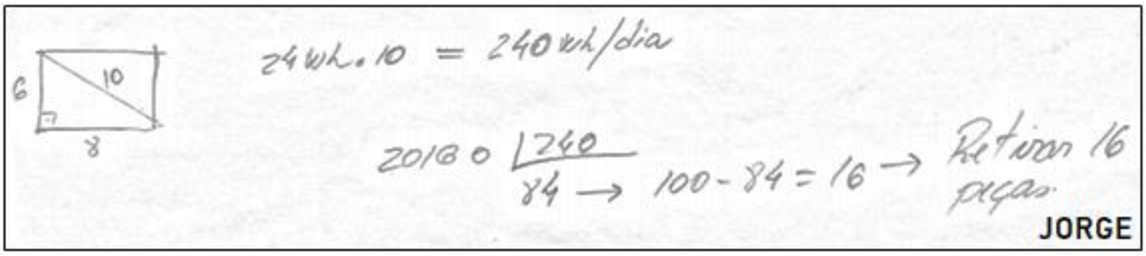
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observarmos a solução apresentada por Davi, com base nas orientações de Walle (2009), concluímos que esse estudante evoluiu do nível de visualização e reconhecimento (nível 1 da Teoria de van Hiele). Segundo o autor nesse nível o aprendiz opera sobre as formas que veem, tanto visualmente como mentalmente.

Apenas três estudantes não solucionaram a situação, porém, esboçaram alguns raciocínios iniciais na direção da solução, como a representação geométrica da forma mencionada e suas medidas.

Dos dezenove licenciandos que solucionaram a situação, dezoito utilizaram o teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do retângulo. Apenas um estudante mencionou o terno pitagórico (6, 8, 10), registrando apenas a medida da diagonal do retângulo, conforme apresentado na Figura 12.

**Figura 12**: Resposta do licenciando.

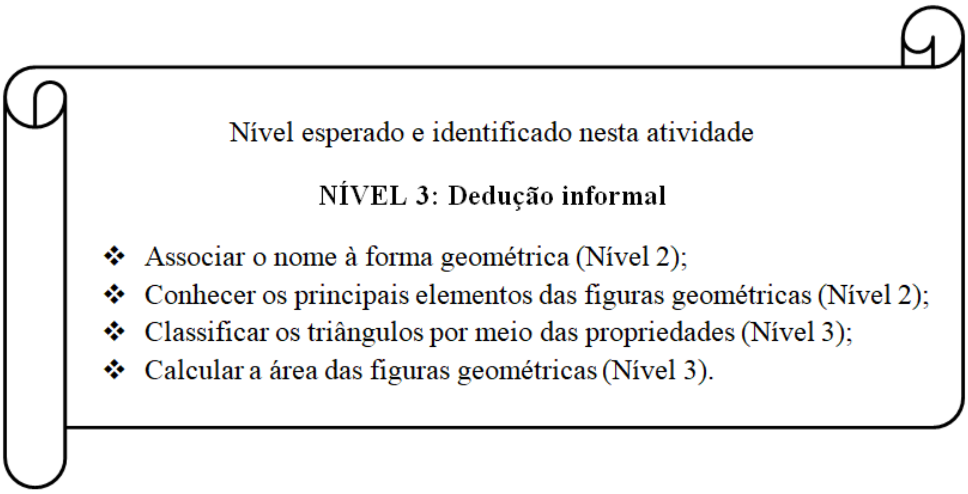



Fonte: Dados da pesquisa.

Em uma análise geral dos registros dos participantes, percebemos que todos associaram nome e forma geométrica corretamente, assim como, evidenciaram conhecer os elementos das figuras geométricas envolvidas nas situações problemas. Identificamos que alguns se equivocaram ao calcular a área, evidenciando certa dificuldade na classificação dos triângulos por meio de suas propriedades; alguns perceberam o equívoco e corrigiram; e apenas um estudante manteve seus registros equivocados. Somente uma estudante apresentou registros, nos quais não compreendemos o raciocínio empregado.

Desta forma, podemos concluir que o grupo de licenciandos alcançou o terceiro nível da teoria de van Hiele, conforme era esperado para esta atividade, Figura 13.

**Figura 13:** Nível de pensamento geométrico identificado na atividade 1.




Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

### 6.1.2 Atividade 2: Enunciado e a representação geométrica do Teorema de Pitágoras

No segundo dia, assim que todos os participantes se acomodaram, iniciamos a Atividade 2 da nossa sequência didática. Aos participantes foi solicitado o desenvolvimento de duas questões: *1) Qual enunciado pode definir o Teorema de*

*Pitágoras? e 2) Registre uma representação geométrica do Teorema de Pitágoras.* Os estudantes foram orientados a desenvolver primeiramente a questão 1, e assim que todos indicaram a conclusão, sugerimos o desenvolvimento da questão número 2.

De acordo com as fases da Teoria de van Hiele, esta atividade está de acordo com a fase de informação, fase em que o estudante expõe seus conhecimentos prévios de determinado objeto do conhecimento. Esse movimento oportuniza a professora orientar as próximas tarefas a serem desenvolvidas, tendo como objetivo oportunizar experiências para o avanço entre os níveis da teoria (SANT'ANNA, 2001).

Para a execução dessa atividade, houve um período de muita concentração, em que os estudantes não dialogaram, concentrando-se em expressar no material o próprio conhecimento acerca das questões propostas. Percebemos que os licenciandos se sentiram confiantes ao discutir as duas questões sobre o teorema de Pitágoras, fazendo apenas questionamentos como:

> *É só isso mesmo? Escrever o teorema? (Jéssica, DC)*
>
> *Se a gente não souber o teorema de Pitágoras vai saber o quê? (Catarina, DC)*
>
> *Representação geométrica, é tipo, o desenho do teorema? (Éder, DC)*

Para a resposta à questão acerca da representação geométrica, não foram oferecidos instrumentos de medidas, apesar de disponíveis no material de apoio da pesquisadora caso solicitassem (régua, transferidor, compasso), de forma a proporcionar liberdade aos estudantes na execução da atividade.

Para analisar as respostas dos estudantes com relação à primeira questão Atividade 2, organizamos as resoluções em dois grupos: um com as resoluções dos estudantes que diferenciaram forma e medida e outro com as respostas daqueles que não as diferenciaram na resolução desta questão. Dentro desses grupos, ressaltamos algumas especificidades apresentadas a seguir.

**1º Questão:** Qual enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

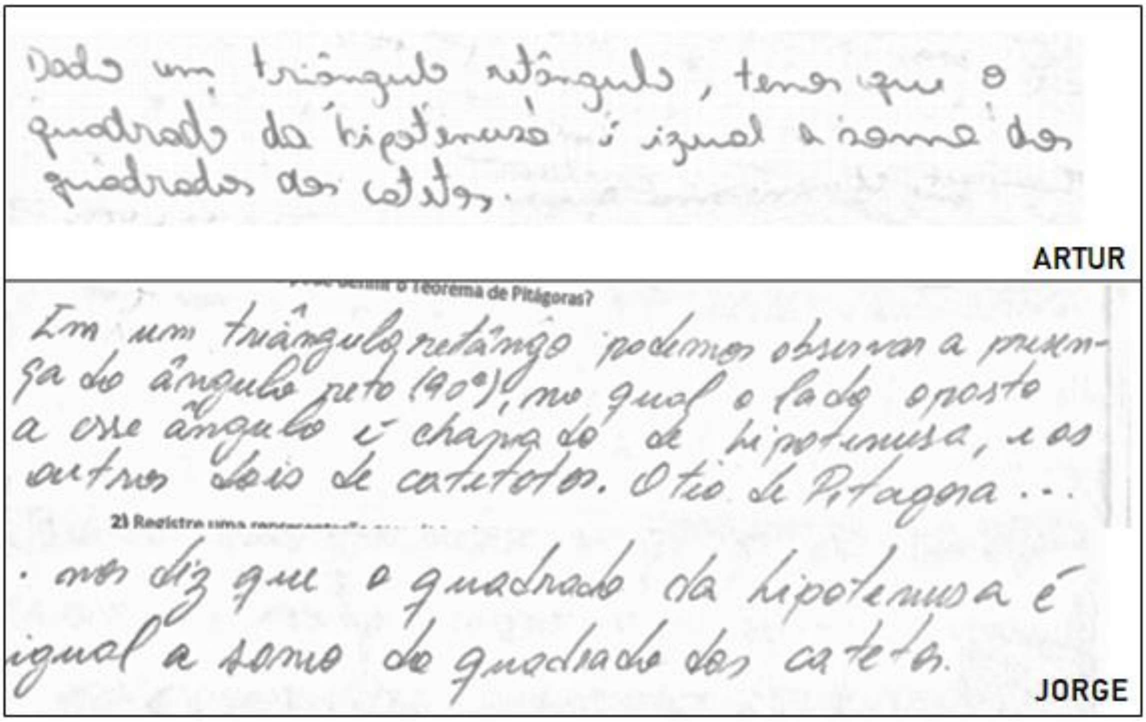
Dos 22 de participantes, 17 licenciandos não se referiram às medidas da hipotenusa e dos catetos, esses utilizaram expressões como "o quadrado da hipotenusa" ou "a soma dos quadrados dos catetos" para representar "a medida da hipotenusa ao quadrado" ou "a soma das medidas dos catetos ao quadrado". Dessa forma, entendemos que os estudantes utilizaram conceitos geométricos e algébricos sem fazer distinção entre esses conceitos. Para esses estudantes, a hipotenusa e os catetos são entendidos como expressões algébricas, sem necessariamente associá-los a um objetivo geométrico. Da mesma forma, observamos a utilização do termo quadrado, apenas como operação aritmética; os estudantes não fizeram referência a esse termo no sentido da área da figura quadrada formada pelos elementos do triângulo retângulo referido quando expressam "a hipotenusa/cateto ao quadrado".

A forma como os estudantes expressaram o enunciado mostra que o entendimento deles sobre o Teorema era única, a de quadrados desenhados sobre os lados de triângulos retângulos.

A respeito da condição de existência do Teorema de Pitágoras, esse grupo de 17 licenciados se dividiu em dois: um subgrupo maior, que especificou a validade do Teorema, porém não demostrou diferenciar forma e medida, o mesmo aconteceu no subgrupo menor, porém, os acadêmicos não especificaram a validade do Teorema.

O primeiro subgrupo era composto por 12 participantes, que relacionaram a validade do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, afirmando "Em um triângulo retângulo...". Dois exemplos de respostas de licenciandos desse grupo podem ser observados na Figura 14.

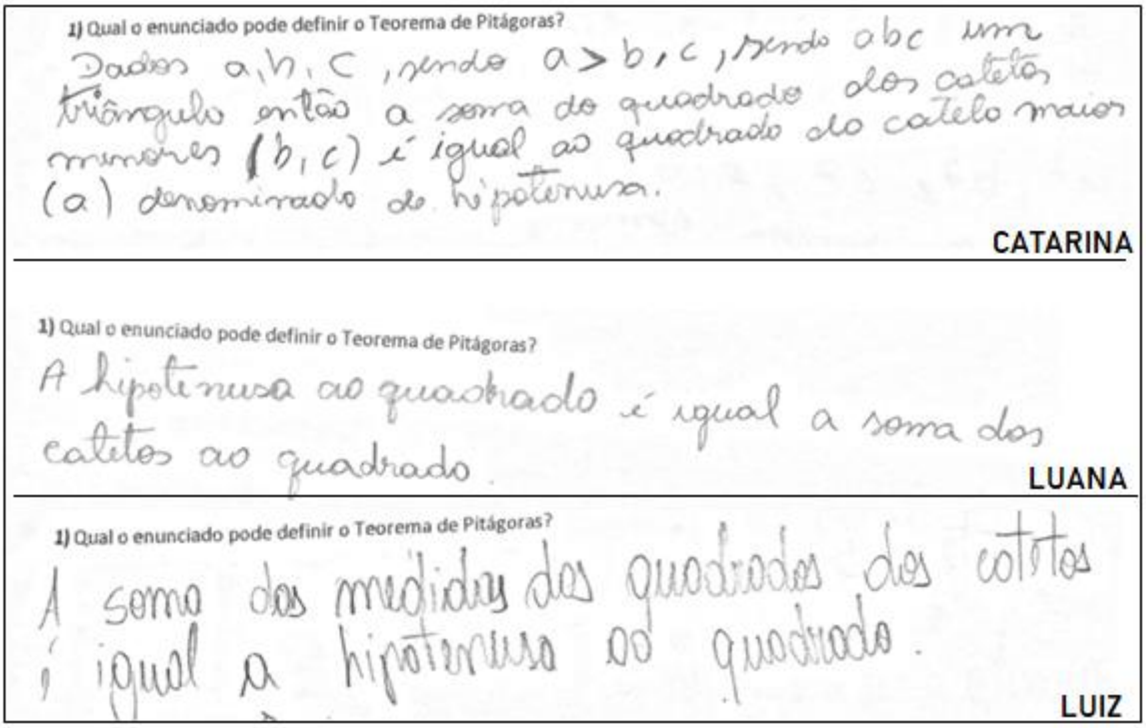
**Figura 14**: Respostas dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

Os outros 5 licenciandos compõem o segundo subgrupo. Esses alunos não expressaram a validade do Teorema ao triângulo retângulo, enunciaram o Teorema sem citar a sua condição de existência “a soma dos quadrados dos catetos é igual o quadrado da hipotenusa”. Dentre esses estudantes, um fez o seguinte registro: “a soma das medidas dos quadrados”, não diferenciando os aspectos geométricos e numéricos, pois apresentaram “quadrados” como objetos geométricos juntamente à “soma da medida” objeto aritmético (LEIVAS, 2012, p. 651). Esses registros são exemplificados na Figura 15, na qual são apresentadas três respostas dos licenciandos.

**Figura 15**: Respostas dos licenciandos.


1) Qual o enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

Dados a,b,c, sendo a > b,c, sendo abc um triângulo então a soma do quadrado dos catetos menores (b,c) é igual ao quadrado do catelo maior (a) denominado de hipotenusa.

CATARINA

1) Qual o enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

A hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos catetos ao quadrado.

LUANA

1) Qual o enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

A soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual a hipotenusa ao quadrado.

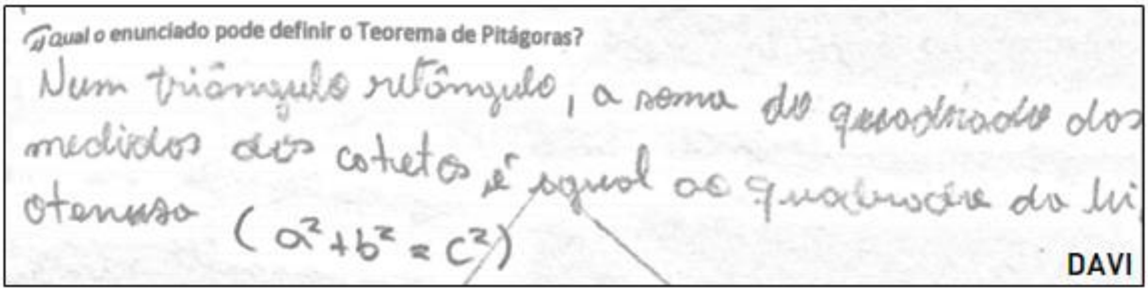
LUIZ

Fonte: Dados da pesquisa.

Os demais participantes, cinco do total de 22, utilizaram corretamente a linguagem "medida da hipotenusa" e "medidas dos catetos". Ao utilizarem essa linguagem, os estudantes demonstraram ter uma visão do Teorema relacionado às medidas e não à forma. Apesar de todos os estudantes terem citado a medida dos lados do triângulo, achamos relevante especificar que:

- Um participante não mencionou que o Teorema de Pitágoras só é válido para triângulos retângulos;
- Dois licenciandos utilizam a expressão "medida" para apenas um dos elementos do triangulo retângulo, ou para a hipotenusa ou para os catetos;
- Um participante escreveu "a soma do quadrado das medidas dos catetos"; segundo Leivas (2017, p. 524), essa expressão considera apenas o quadrado como operação aritmética, caso o aluno percebesse que são duas operações poderia ter escrito "a soma dos quadrados dos catetos", como mostra a Figura 16.

**Figura 16**: Resposta do licenciando.


1) Qual o enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

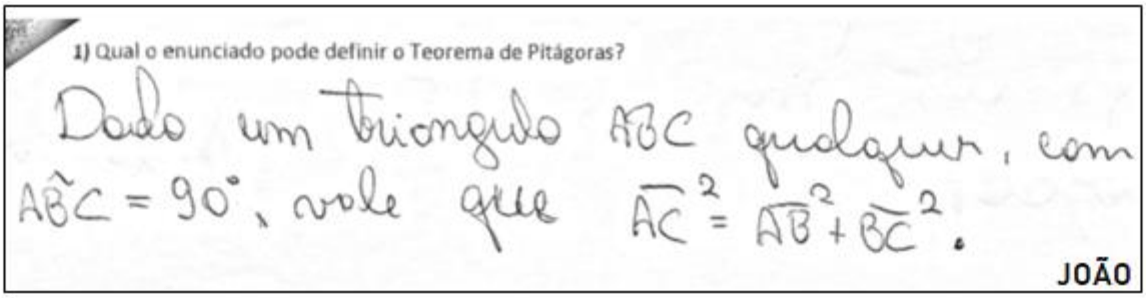
Num triângulo retângulo, a soma do quadrado das medidas dos catetos é igual ao quadrado da hi otenusa ($a^2+b^2=c^2$)

DAVI

Fonte: Dados da pesquisa.

- Um estudante enunciou o Teorema corretamente por meio da linguagem geométrica, como mostra a Figura 17, vinculando sua validade à presença de um ângulo reto em um triângulo. Contudo, consideramos que a compreensão do enunciado depende da representação geométrica registrada na segunda questão. Ao utilizar a linguagem geométrica, o estudante se referiu à medida dos segmentos de retas e o expoente 2 como operação aritmética.

**Figura 17:** Resposta do licenciando.


1) Qual o enunciado pode definir o Teorema de Pitágoras?

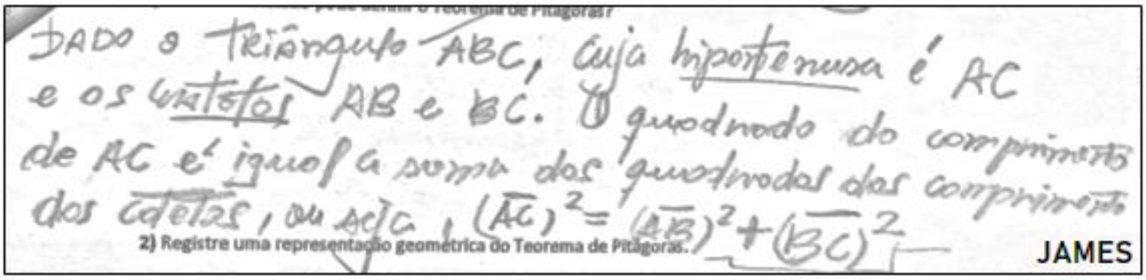
Dado um triângulo ABC qualquer, com $A\hat{B}C = 90^\circ$, vale que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

JOÃO

Fonte: Dados da pesquisa.

- Um licenciando iniciou a resolução especificando a validade do teorema para os triângulos retângulos, James enunciou o registro simbólico nomeando os lados desse triângulo como segmentos de reta, referindo-se às medidas desses segmentos como comprimento, conforme a Figura 18. Ao enunciar corretamente “a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”, o estudante demonstrou perceber a diferença entre aspectos geométricos e numéricos, conforme também observado por Leivas (2012).

**Figura 18:** Resposta licenciando.




Fonte: Dados da pesquisa.

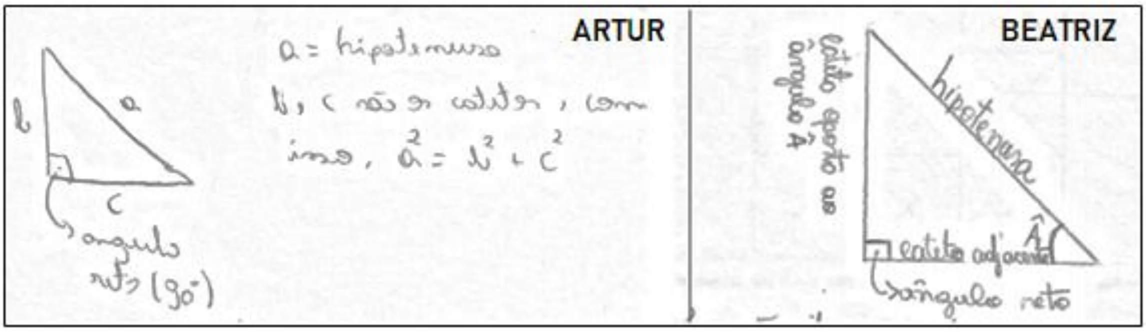
Ao finalizar a análise dos enunciados registrados pelos licenciandos em linguagem natural do Teorema de Pitágoras, percebemos que o grupo não apresentou compreensão clara desse que é um dos Teoremas mais importantes, conhecido e abordado no Ensino Fundamental (LEIVAS, 2017). A maior parte dos licenciandos não distinguiu objeto geométrico do aritmético, confundindo forma e medida ao responder essa questão.

Para a análise da representação geométrica requerida na segunda questão, organizamos o material pela forma utilizada na representação. Assim, agrupamos as representações semelhantes originando os dois grupos listados, a seguir. A interpretação das representações geométricas registradas foi baseada nos níveis de pensamento geométrico da teoria de van Hiele.

**2º Questão:** Registre uma representação geométrica do Teorema de Pitágoras

Ao todo, oito estudantes representaram apenas o triângulo retângulo utilizando símbolos para indicar os lados dessa figura, diferenciando catetos e hipotenusa. Desse primeiro grupo, seis licenciandos registraram a representação algébrica do tipo $a^2 = b^2 + c^2$, complementando suas representações. Esses registros representam, de acordo com Leivas (2017, p. 524), um “conflito cognitivo” desses licenciandos, por não distinguirem a representação geométrica da algébrica, como exemplificado pela Figura 19.

**Figura 19**: Respostas dos licenciandos.

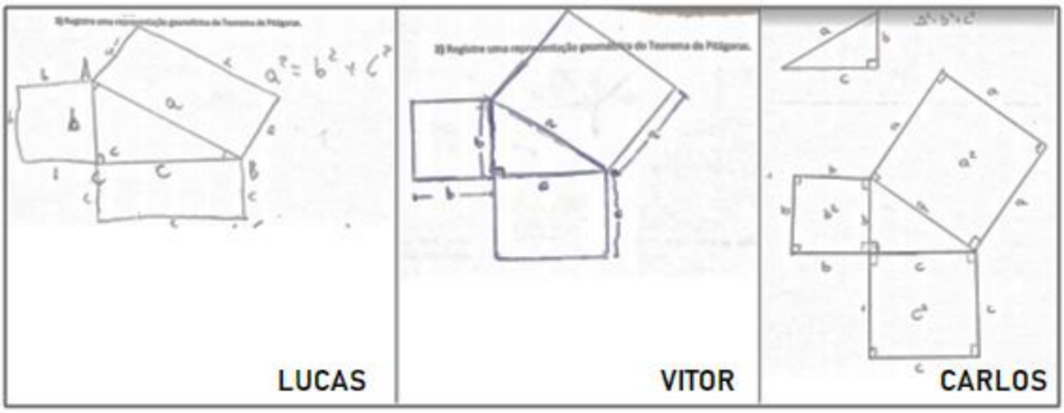



Fonte: Dados da pesquisa.

Um segundo grupo, composto por 12 participantes, utilizou a representação com quadrados desenhados sobre os lados de um triângulo retângulo, empregando ou não símbolos para identificar esses lados, conforme registros apresentados na Figura 20. Essa é a forma do Teorema de Pitágoras mais comumente apresentada nos livros didáticos da Educação Básica e, ao que podemos perceber, dessa mesma forma o Teorema é trabalhado no curso de Licenciatura em Matemática. Embora sete estudantes tenham registrado a representação algébrica do tipo $a^2 = b^2 + c^2$, juntamente com a representação geométrica, nenhum deles registrou a etapa anterior ($a \,.\, a = b \,.\, b + c \,.\, c$) para ressaltar que esta representação se refere a área dos quadrados.

Dessa forma, consideramos as representações expostas como uma reprodução da forma vista em outros momentos educacionais, expondo uma falta de alinhamento entre os conteúdos geométricos e a necessidade de formação inicial docente no desenvolvimento de habilidades mentais e visuais necessárias nesta etapa do ensino (LEIVAS, 2017; WALLE, 2009).

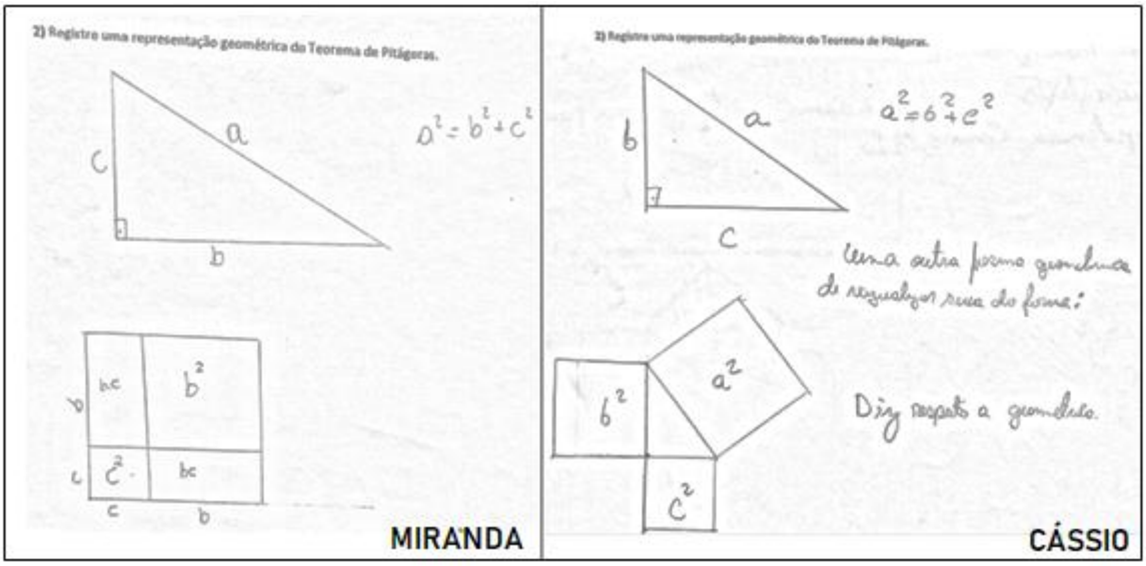
**Figura 20**: Respostas dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

Apenas dois licenciandos arriscaram outras representações que diferentes dos demais. Contudo, um estudante utilizou o triângulo retângulo como representação geométrica do teorema, e outro demonstrou ter lembrança da representação pitagórica do teorema, porém, cometendo equívoco e confundindo com a representação de uma equação do 2°grau, conforme pode ser observado na Figura 21.

**Figura 21**: Registros dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

Na apreciação do material produzido na segunda questão da atividade 2, observamos uma desatenção nas representações registradas pela grande maioria dos participantes. Apesar de disponível, poucos estudantes solicitaram ou utilizaram réguas ou outros instrumentos na construção de seus esboços, sendo perceptível que as figuras geométricas desenhadas sobre os lados do triângulo retângulo não são exatamente quadradas, tão pouco perpendiculares a ele.

Essa desatenção ao representar geometricamente, e a combinação indiscriminada de registros algébricos, geométricos e aritméticos, pode ser justificada pela prática pedagógica empregada no processo de ensino desses estudantes embasada na “algebrização” dos conteúdos geométricos. Segundo Leivas e Oliveira (2017, p. 110), “visualização e representação são dois elementos indissociáveis, importantes para a formação do pensamento geométrico”. Em uma pesquisa realizada com professores, Oliveira *et al*. (2009, p. 59) concluíram que para propiciar aos estudantes desenvolver habilidades visuais e mentais, os quais ampliam a compreensão de conceitos e objetos geométricos, é imprescindível que os professores ao lecionarem conteúdos geométricos:

> [...] evitem o desenvolvimento de práticas pedagógicas que se fundamentem em ações educativas limitadas que exigem dos educandos apenas o treino e a reprodução de conceitos e definições. É necessário proporcionar ao estudante a realização de atividades pedagógicas estruturadas a partir de situações desafiadoras em que se possa manipular objetos, pensar, analisar, comparar, criar e recriar hipóteses (OLIVEIRA et al., 2015, p. 59).

A reelaboração de um objeto de estudo acontece na fase de orientação livre, sendo a quarta das fases de aprendizagem da teoria de van Hiele. Segundo Crowley (1994), nessa fase o estudante deve ser colocado frente a situações mais elaboradas, que o possibilitem explorar seu modo particular de raciocínio para chegar a uma solução.

O nível esperado no desenvolvimento desta atividade é o nível cinco, quando se espera que o estudante já estabelecesse relações entre as propriedades dos objetos geométricos atingidas no nível 3, avança ao nível 4 tratando essas propriedades de forma abstrata para então conceituar o Teorema em diversas abordagens geométricas, nível 5. Porém, ao analisar as respostas às questões da atividade 2, podemos perceber que os participantes demonstraram ter atingido somente o terceiro nível, não tendo avançado para os níveis superiores. A Figura 22 apresenta um resumo dos níveis esperados e atingidos nesta atividade.

**Figura 22**: Níveis esperados e atingidos na atividade 2.

Nível esperado nesta atividade

**NÍVEL 5: RIGOR**

- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos (Nível 3);
- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas (Nível 4);
- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas (Nível 5);
- Distinguir forma e medida (Nível 5).

Nível atingido nesta atividade

**Nível 3: Dedução informal**

- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos (Nível 3);

Fonte: Elaborado pela autora.

### 6.1.3 Atividade 3: Reflexões do licenciandos sobre o enunciado e a representação geométrica do Teorema de Pitágoras

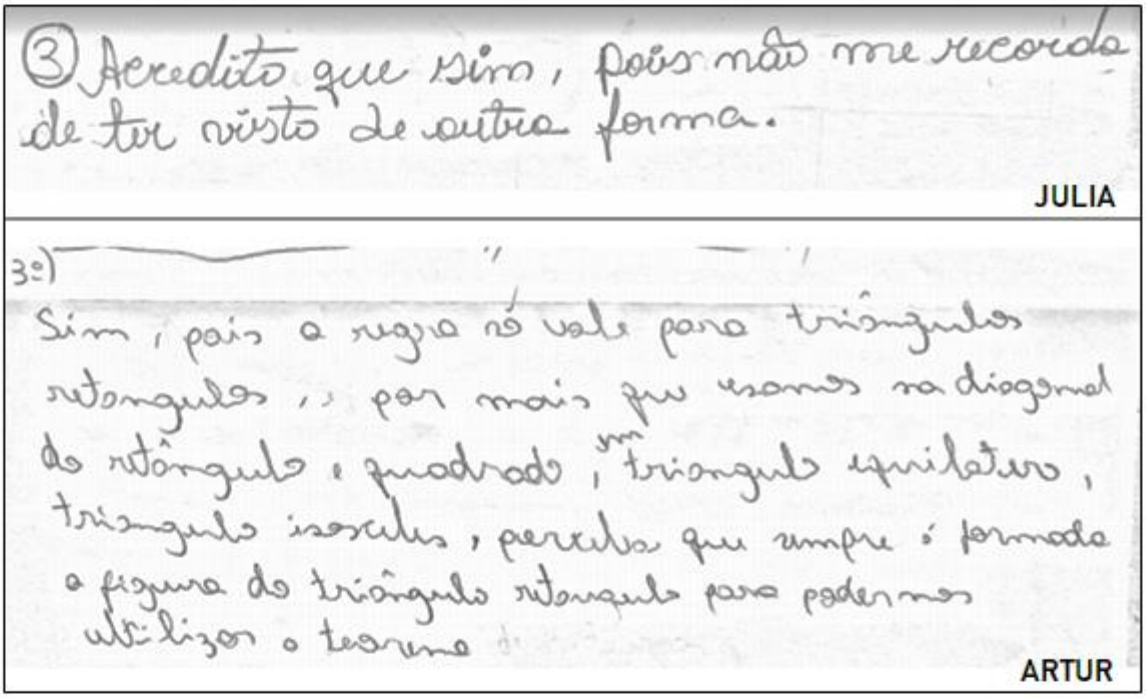
Ainda no segundo encontro, desenvolvemos a atividade 3, que tem por objetivo principal aprofundar a investigação sobre os conhecimentos dos participantes a respeito das representações geométricas e algébricas do Teorema de Pitágoras. Para isso, assim que os estudantes concluíram a atividade anterior, propusemos a primeira questão escrevendo o questionamento no quadro branco para que eles registrassem suas respostas em uma mesma folha, dessa forma numeramos as questões obedecendo a sequência.

**3º Questão:** A representação apresentada por você na atividade anterior é a única representação geométrica desse Teorema? Argumente.

Os conhecimentos necessários para responder a essa questão se enquadram na primeira fase de aprendizagem proposta pela teoria de van Hiele, fase em que se busca identificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca do tema estudado (JAIME; GUTIERREZ, 1990, p. 333). Para a análise dessa questão separamos os participantes em dois grupos, um composto pelos cinco estudantes que afirmaram que sim, a representação apresentada por eles é única, e o outro composto pelos dezessete licenciandos que afirmam que existem outras representações. Na argumentação do segundo grupo, emergiram algumas particularidades que foram associadas e expostas em subgrupos, como detalhado a seguir.

Uma parcela de cinco participantes afirmou que sim, a representação apresentada por eles é a única representação geométrica desse teorema, conforme os exemplos apresentados na Figura 23. Em seus argumentos, os licenciandos afirmaram de maneiras distintas não terem aprendido outra forma de representar tal teorema. Um dos estudantes argumentou no sentido da condição de existência do Teorema de Pitágoras, mostrando um conflito cognitivo sobre a representação desse teorema.

**Figura 23**: Repostas dos licenciandos.


③ Acredito que sim, pois não me recordo de ter visto de outra forma.

JULIA

3º)

Sim, pois a regra só vale para triângulos retângulos, por mais que usamos na diagonal do retângulo e quadrado, em triângulo equilátero, triângulo isosceles, percebo que sempre é formado a figura do triângulo retângulo para podermos utilizar o teorema

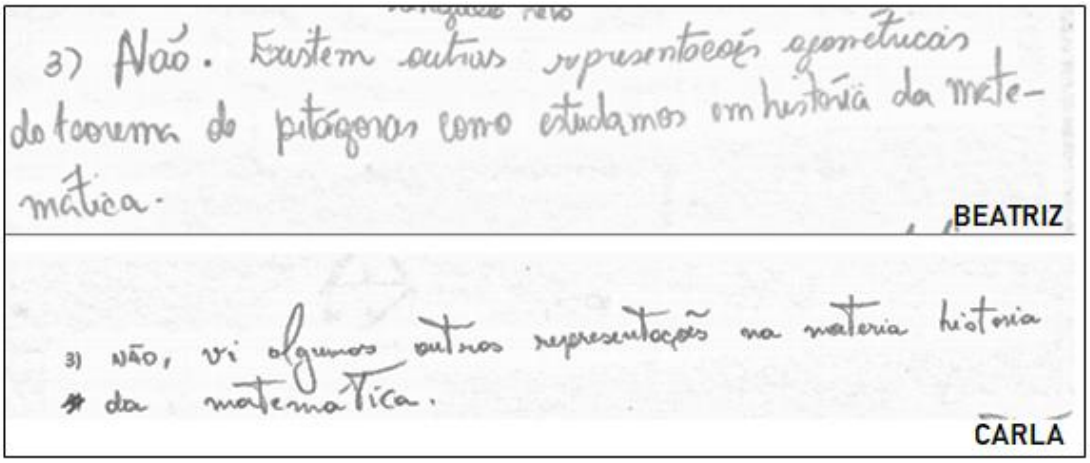
ARTUR

Fonte: Dados da pesquisa.

Estudantes do grupo maior, constando de 17 licenciandos, afirmam que a representação apresentada por eles não seria a única representação geométrica desse teorema. Sobre as especificidades dos argumentos, as separamos considerando as semelhanças entre elas:

- Duas estudantes relataram terem estudado outras representações do teorema na disciplina de História da Matemática, durante a graduação, mas não citaram exemplos. Seus comentários podem ser visualizados na Figura 24 a seguir.

**Figura 24**: Respostas das licenciandas.



3) Não. Existem outras representações geométricas do teorema de pitágoras como estudamos em história da matemática.

BEATRIZ

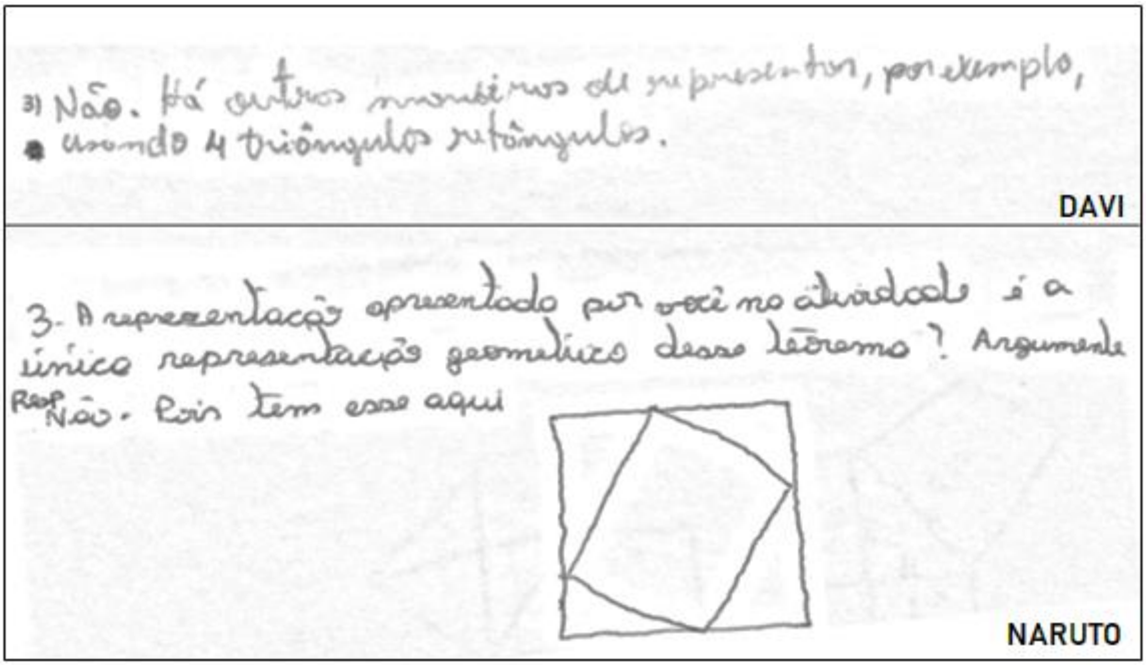
3) NÃO, vi alguns outros representações na materia historia da matemaTica.

CARLA

Fonte: Dados da pesquisa.

- Outros 2 licenciandos demonstraram ter uma lembrança da representação usando as áreas formadas por dois quadrados diferentes, com um desses decomposto em quatro triângulos retângulos, que juntos formam um quadrado maior. Contudo, esses estudantes não apresentaram clareza nas informações e tão pouco registram a representação de forma assertiva, como pode ser observado na Figura 25.

**Figura 25:** Respostas dos licenciandos.



3) Não. Há outros maneiras de representar, por exemplo, usando 4 triângulos retângulos.

DAVI

3. A representação apresentado por você na atividade é a única representação geométrica desse teorema? Argumente

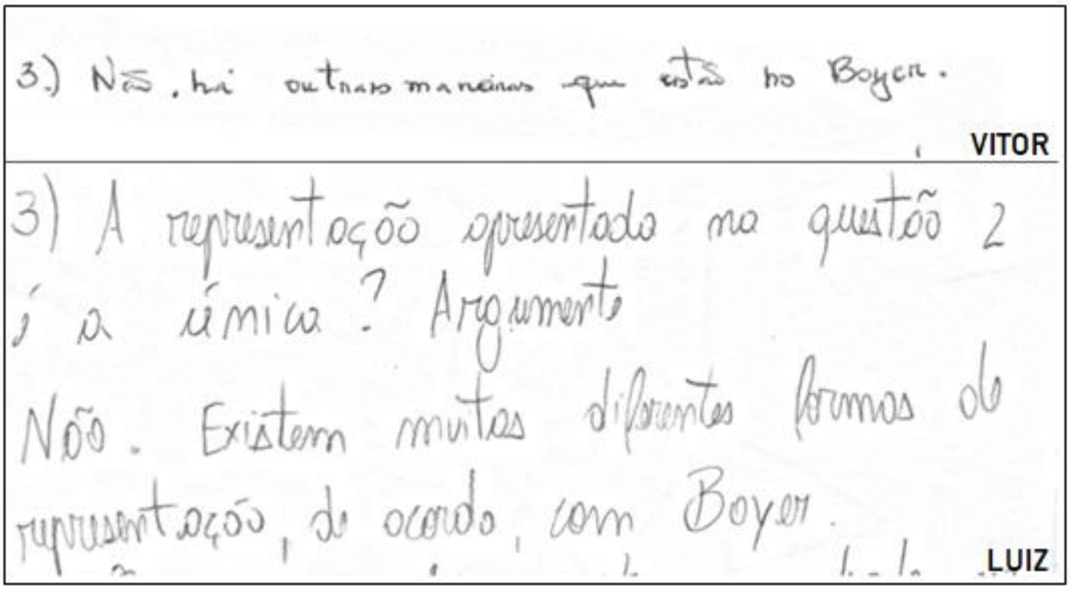
Resp Não. Pois tem esse aqui

NARUTO

Fonte: Dados da pesquisa.

- Três estudantes, ao afirmarem a existência de outras formas de representar geometricamente o Teorema de Pitágoras, indicaram Boyer como referência, como registrado na Figura 26, porém não registraram outra representação.

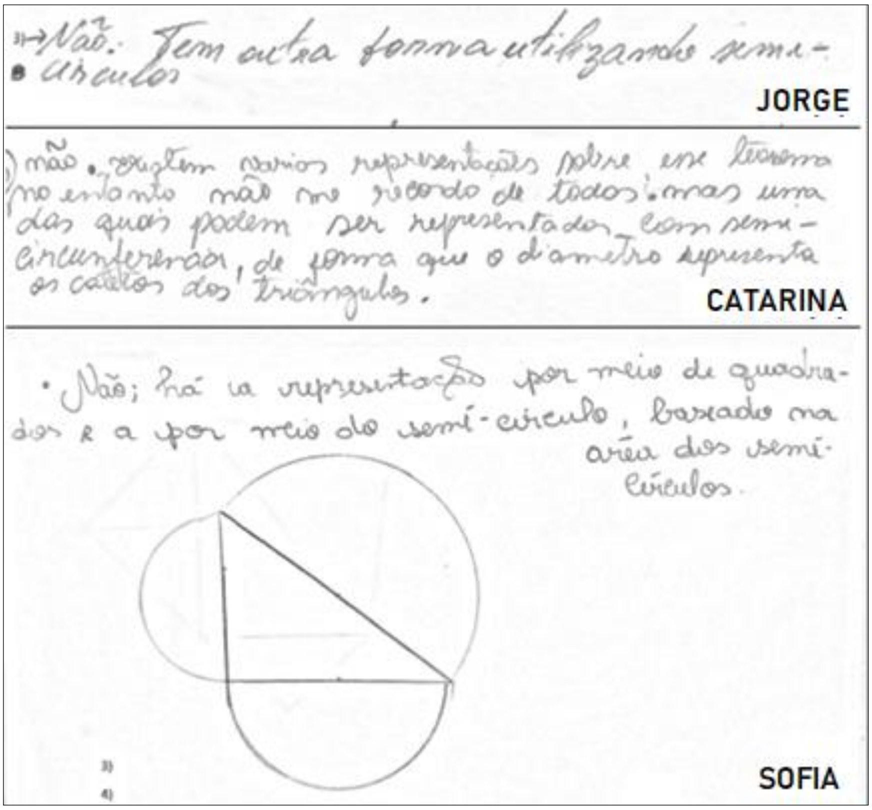
**Figura 26**: Respostas dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

- Três participantes desenharam semicírculos para exemplificarem outra representação geométrica do teorema. Analisando os argumentos registrados, apresentados na Figura 27, salientamos que um dos participantes colocou a representação de semicírculos como uma das várias representações, os outros dois não demonstraram clareza no conhecimento de outras formas de representar o teorema.

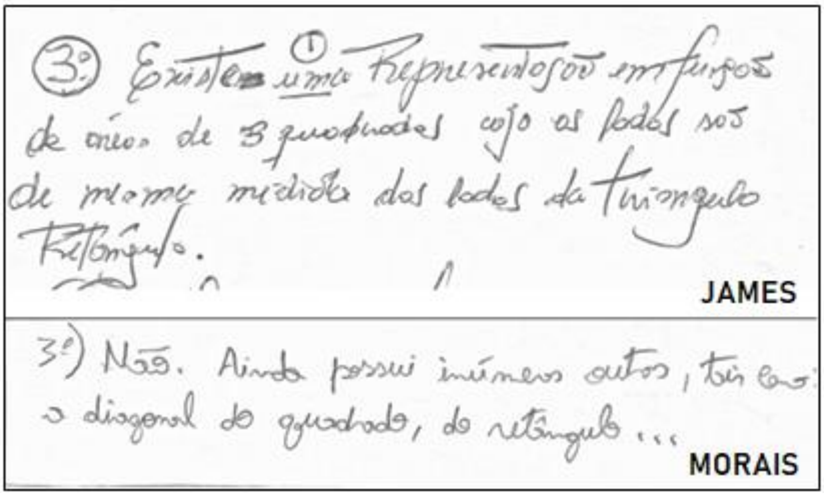
**Figura 27**: Registros dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

- Dois estudantes, por admitirem a representação do triângulo retângulo como uma representação geométrica do teorema, indicaram existir outras representações, mencionando a representação com quadrados sobrepostos nos lados do triângulo. Na Figura 28 estão os argumentos apresentados por esses licenciandos.

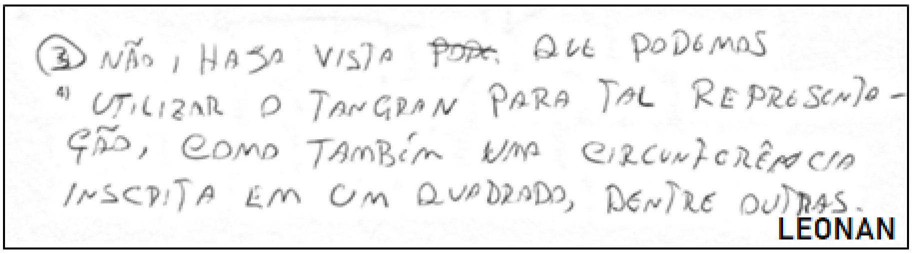
**Figura 28:** Respostas dos licenciandos.




Fonte: Dados da pesquisa.

- Um licenciando afirmou que a representação apresentada não é a única argumentando *"tem outras formas, mas não me recordo" (Carlos).*
- Um participante cita o Tangram, que é um material concreto, como outra representação geométrica para o teorema, sem esclarecer a forma como este seria montado. Um outro exemplo citado pelo mesmo acadêmico é desconhecido por nós, o que nos motiva a concluir que ele pode ter confundido algum termo geométrico empregado, conforme Figura 29.

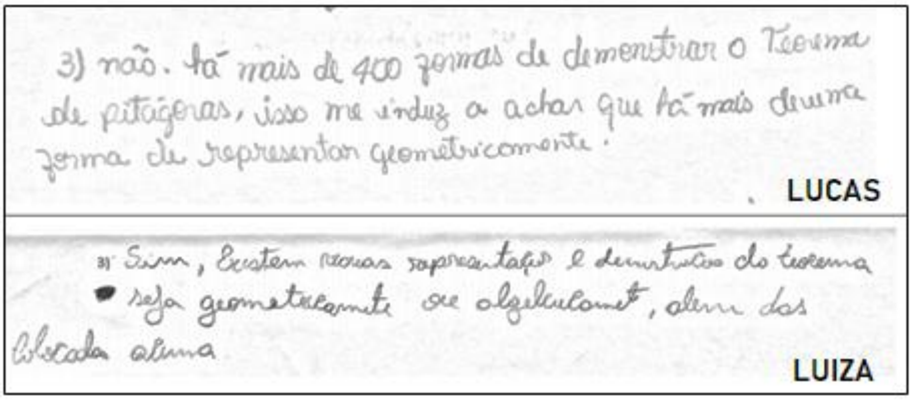
**Figura 29**: Resposta do licenciando.


3) NÃO, HAJA VISTA ~~PODE~~ QUE PODEMOS
4) UTILIZAR O TANGRAN PARA TAL REPRESENTA-
ÇÃO, COMO TAMBÉM UMA CIRCUNFERÊNCIA
INSCRITA EM UM QUADRADO, DENTRE OUTRAS.
LEONAN

Fonte: Dados da pesquisa.

- Uma estudante foi precisa ao afirmar que *"O teorema tem exatamente 364 demonstrações de formas distintas" (Lyta)*, contudo não demonstrou exemplos.
- Dois licenciandos empregaram indistintamente conceitos geométricos e algébricos ao argumentarem em favor de suas afirmações, seus registros podem ser observados na Figura 30.

**Figura 30:** Respostas do licenciandos.


3) não. há mais de 400 formas de demonstrar o Teorema
de pitágoras, isso me induz a achar que há mais de uma
forma de representar geometricamente.
LUCAS

3) Sim, Existem novas representações e demonstrações do teorema
seja geometricamente ou algebricamente, além das
colocada acima
LUIZA

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao concluir a análise dessa questão, percebemos que alguns participantes demonstram incertezas com relação à representação geométrica, e mesmo os que apontaram ter clareza no conceito, não apresentaram segurança para citar outras representações geométricas do Teorema de Pitágoras. O estudo realizado por Santos (2011, p.30) aponta que

> [...] para grande parte dos alunos, o Teorema de Pitágoras, em princípio, deixa a impressão, quase a certeza, de que a sua obtenção se dá segundo a sua demonstração tradicional. Esse fato também é verdade para grande parte dos professores que ensinam este assunto (SANTOS, 2011, p. 30).

Dessa forma, Santos (2011) orienta que diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras devem ser trabalhadas em sala de aula durante a formação de professores, possibilitando um estudo aprofundado do tema. Contudo, percebemos que mesmo os estudantes que conheciam outras formas de representar o Teorema de Pitágoras não a empregaram na segunda questão da atividade 2, tendo a maioria dos licenciandos utilizado a forma tradicional de representação desse teorema.

De acordo com Lima e Silva (2015, p. 161), esse dado reforça a importância de que "durante a Licenciatura, um conjunto mínimo de conhecimentos docentes seja construído e que essa construção seja realizada por meio de uma abordagem que, ao longo do curso de graduação, forme professores autônomos", preparados para refletir sobre seus conhecimentos sozinhos, possibilitando assim uma prática docente mais criativa e menos baseada na imitação.

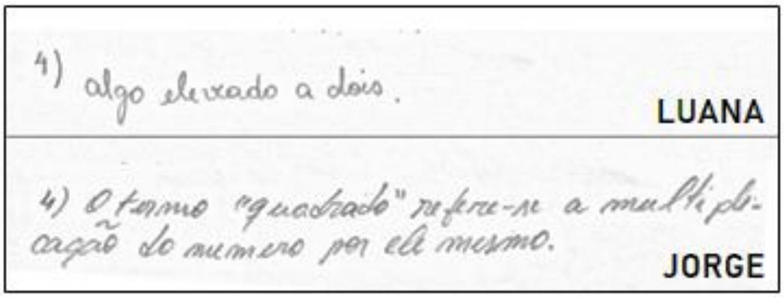
**4º Questão**: Se você usou o termo "quadrado" na definição enunciada, qual o significado deste termo para você? Qual a relação desse termo com a representação geométrica?

Como nesta questão seguimos abordando os conhecimentos acerca do Teorema de Pitágoras, podemos enquadrar essa etapa na fase de orientação dirigida, que permite ao estudante explorar as relações implícitas dos elementos trabalhados assimilando novos conceitos e estruturas (OLIVEIRA, 2012, p. 54).

As respostas dos participantes foram analisadas observando se estes estabeleceram a relação, ou não, do termo quadrado com a área formada pela figura quadrada desenhada sobre os lados de um triângulo retângulo (condição de existência para o Teorema de Pitágoras), que é a representação geométrica mais conhecida para este teorema. Dessa forma, as respostas foram divididas em dois grupos, descritos a seguir.

Do total dos 22 estudantes, oito não relacionaram o termo quadrado com a área do quadrado, figura geométrica tradicionalmente desenhada sobre os lados do triângulo retângulo. Ao se identificar isso, Leivas (2017, p. 527) entende "não ter ocorrido a conversão entre os registros em língua natural e o registro figural” na construção do conhecimento acerca desse teorema. O fato aponta que os estudantes desse grupo admitem apenas o sentido numérico, operacional para o termo empregado. A Figura 31 exemplifica os registros dos licenciandos desse grupo.

**Figura 31:** Respostas do licenciandos.

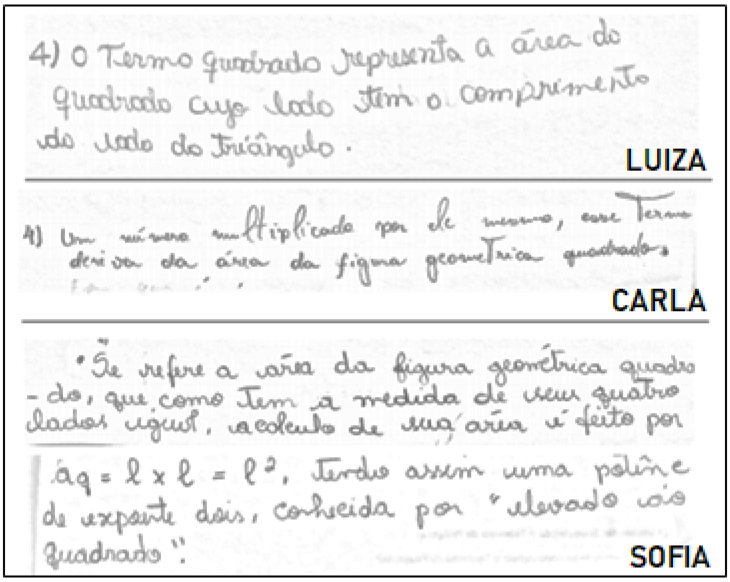

4) algo elevado a dois.
LUANA

4) O termo "quadrado" refere-se a multiplicação do numero por ele mesmo.
JORGE

Fonte: Dados da pesquisa.

A maior parte, 14 participantes, estabeleceu uma dependência entre o termo quadrado com a área do quadrado desenhado sobre os lados de um triângulo retângulo, conforme apresento na Figura 32. Contudo, salientamos que nenhum dos participantes, desse ou do grupo anterior, sugeriu que esse termo poderia não existir caso a representação figural para o teorema utilizasse outra figura geométrica, ainda que nesse grupo encontrassem-se estudantes que sugeriram a representação por meio de semicírculos.

**Figura 32**: Respostas das licenciandas.


4) O Termo quadrado representa a área do quadrado cujo lado tem o comprimento do lado do triângulo.
LUIZA

4) Um número multiplicado por ele mesmo, esse Termo deriva da área da figura geométrica quadrado.
CARLA

• Se refere a área da figura geométrica quadrado, que como tem a medida de seus quatro lados iguais, o calculo de sua área é feito por $aq = \ell \times \ell = \ell^2$, tendo assim uma potência de expoente dois, conhecida por "elevado ao quadrado".
SOFIA

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observar os registros dos participantes para as questões da atividade 3, seria esperado observar argumentos mais sólidos deles para o tema abordado, porque estes estão na etapa final da formação docente, mas isso não foi verificado. Corroborando com nossa constatação, em um estudo similar, Leivas (2012, p. 655) aponta que os sujeitos da sua pesquisa “não atingiram tal grau de maturidade matemática no conteúdo focado, pois sequer esboçaram algum tipo de ensaio que nos levasse a concluir que tinham algum conhecimento da validade do Teorema de Pitágoras em casos mais gerais”, estando aquém do quinto nível identificado nesta atividade, conforme Figura 33. Tal imaturidade matemática poderá ser observada nos registros analisados da próxima questão.

**Figura 33:** Níveis de pensamento geométrico esperados e atingidos para atividade 3.

Nível esperado nesta atividade

**NÍVEL 5: RIGOR**

- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos (Nível 3);
- Trabalhar com sentenças abstratas as propriedades geométricas (Nível 4);
- Conceituar o teorema em diversas abordagens geométricas (Nível 5);
- Distinguir forma e medida (Nível 5).

Nível atingido nesta atividade

**Nível 3: Dedução informal**

- Estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos (Nível 3);

Fonte: Elaborado pela autora.

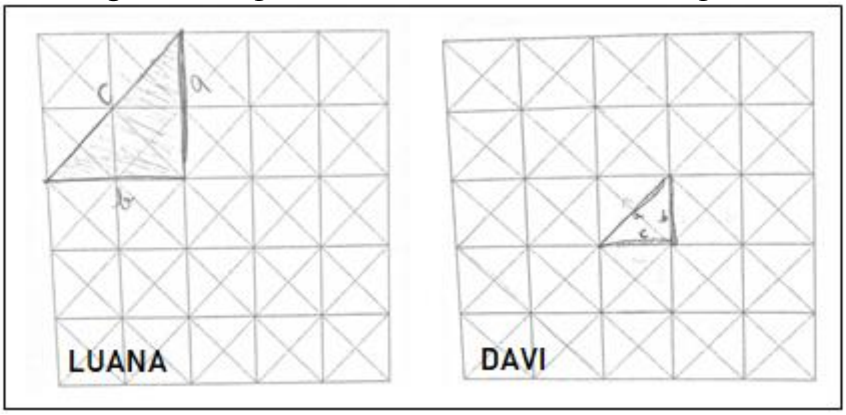
### 6.1.4 Atividade 4: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras com o uso de peças do Tangram

No terceiro encontro retomamos as discussões acerca da conceituação e representação geométrica do Teorema de Pitágoras. O objetivo da quarta atividade era explorar a possibilidade de outras representações geométricas para o teorema e assim reelaborar a definição do Teorema de Pitágoras. Para tanto, foi entregue o material apresentando uma malha triangular e um quebra cabeças Tangram para cada licenciando presente.

As tarefas sugeridas nessa atividade perpassam duas fases de aprendizagem da teoria de van Hiele: a fase de orientação dirigida, em que as relações entre os itens estudados estão implícitas, e a fase de orientação livre cujas tarefas se diferenciam dos padrões e modelos tradicionais, exigindo do estudante a capacidade de raciocinar, investigar e decidir sobre a eficiência e eficácia de diferentes estratégias de solução (OLIVEIRA, 2012). Dessa forma, disponibilizamos instrumentos buscando averiguar se os participantes conceituam o Teorema de Pitágoras em outra abordagem geométrica. A conceituação do teorema é uma habilidade alcançada no quinto nível da teoria de van Hiele, o rigor.

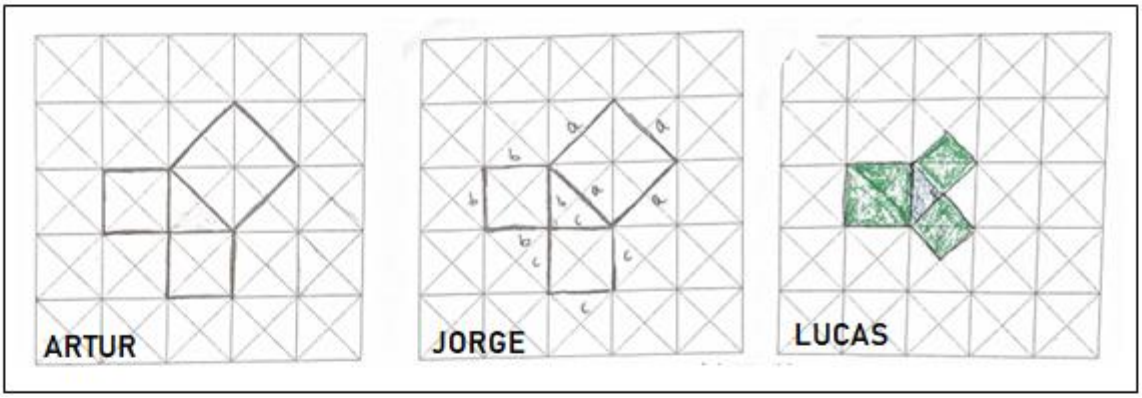
A análise do primeiro item da atividade, a representação na malha triangular, confirmou o que já vinha sendo constatado. Com exceção de dois licenciandos que representaram apenas o triângulo retângulo e seus elementos, conforme Figura 34, todos os demais apresentaram o mesmo tipo de registro, representado por figuras quadradas projetadas sobre os lados do triângulo retângulo, similares às apresentadas na Figura 35.

**Figura 34:** Registro dos licenciandos na malha triangular.




Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 35**: Registros dos licenciandos na malha triangular.

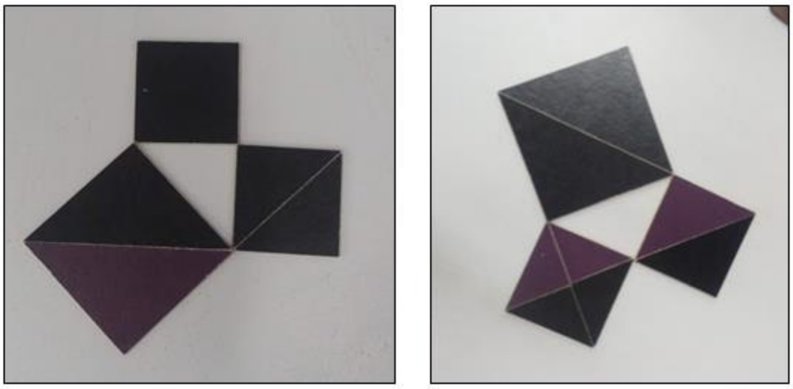



Fonte: Dados da pesquisa.

Da mesma forma como na atividade anterior, os licenciandos manusearam o quebra-cabeça Tangram, tentando montar quadrados sobre os lados do triângulo retângulo. Os estudantes ficaram, aproximadamente, 35 minutos tentando, cada um com o seu quebra-cabeça montar a representação tradicionalmente conhecida do Teorema de Pitágoras. Posterior a esse primeiro momento de tentativa, incentivamos a interação entre eles utilizando assim mais de um Tangram na montagem.

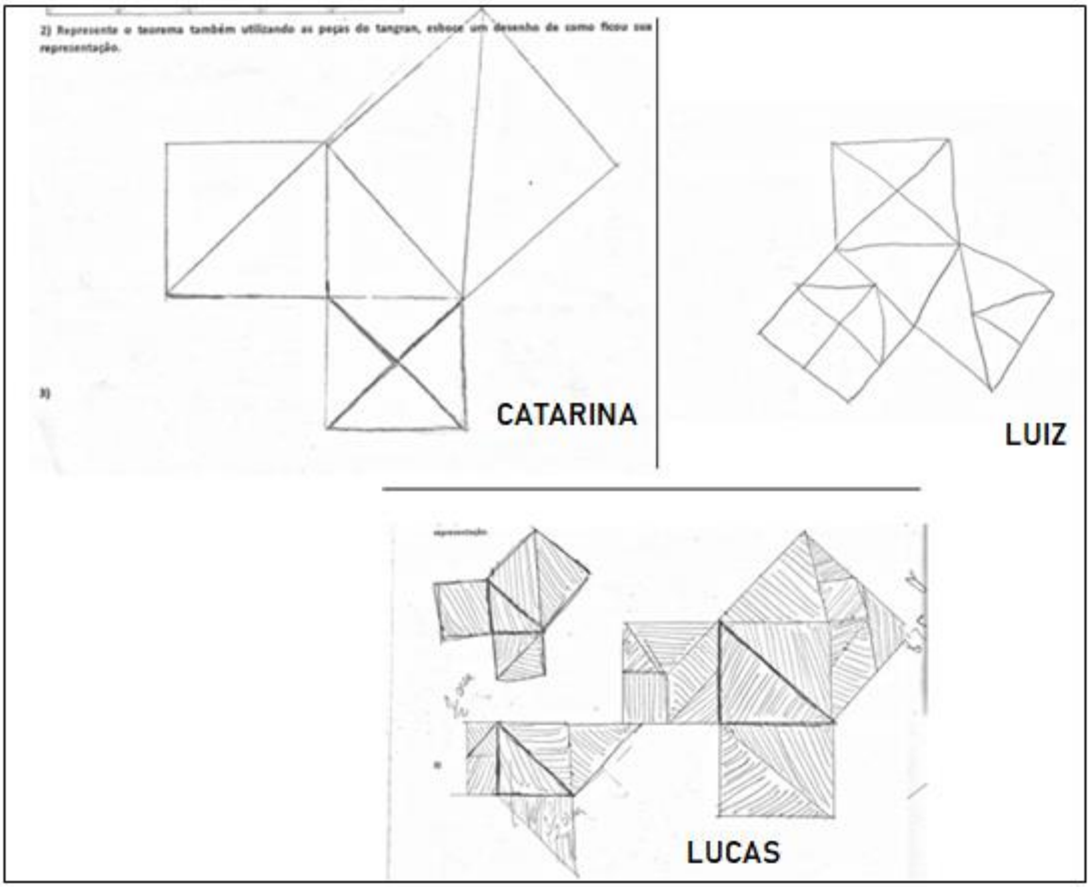
Com as interações, surgiram diversas formas de montar a representação usual do teorema como mostra a Figura 36. Um grupo de oito participantes desenharam, como solicitado, as peças do Tangram compondo a representação tradicional do Teorema de Pitágoras. Destacamos que até este momento nenhuma representação diferente da usual, com quadrados projetados sobre os lados do triângulo retângulo, havia sido apresentada. A Figura 37 mostra os desenhos das primeiras representações obtidas.

**Figura 36:** Primeiras representações do Teorema de Pitágoras com o Tangram.



Fonte: Dados da pesquisa.

**Figura 37**: Registro dos licenciandos.




Fonte 1: Dados da pesquisa.

O fato de alguns grupos conseguirem montar a representação geométrica do Teorema de Pitágoras com o Tangram, mesmo que na representação tradicional, provocou uma agitação na turma, fazendo com que os estudantes se movimentem e para observar as montagens de seus colegas.

Aproveitando o movimento de troca de experiências, incentivamos os estudantes a tentarem a representação geométrica por meio de outras formas geométricas com indagações do tipo: “Será que precisa necessariamente ser quadrados projetados sobre os lados desse triângulo retângulo?”. Alguns participantes mencionam a representação usando semicírculos, mas rapidamente afirmaram não ser possível desenvolver essa representação usando o Tangram por ser composto por triângulos e quadriláteros.

> *Eu já vi uma representação com semicírculo, mas não sei se dá pra fazer, dá? (Sofia, DC)*
>
> *Eu também já vi, só que o Tangram só tem peça triangular e quadrada, acho que não vai dar. (Catarina, DC)*

Ao levantar essa possibilidade, os participantes que conheciam essa outra representação expuseram para os colegas seus conhecimentos, a maior parte deles se mostrou surpreso com a informação. Aproveitamos esse momento para questionar a veracidade da representação com semicírculos, incentivando os estudantes a testarem essa outra representação. Nesse momento, os licenciandos ficaram sem saber o que fazer e questionaram:

> *A gente precisa desenhar? (Jorge, DC)*
>
> *O tamanho do lado vai ser o raio ou o diâmetro? (João, DC)*
>
> *E se fizer as contas das áreas, daí a gente soma. (Naruto, DC)*

Os questionamentos levantados por eles foram muitos e abordaram diferentes campos matemáticos, alguns aritméticos do tipo operacionais, outros geométricos. Nesse momento nosso trabalho foi o de incentivar o grupo a buscar uma resposta. Dessa forma, os estudantes se organizaram de forma autônoma para buscar a solução para o desafio proposto. Em uma pesquisa, Almouloud *et al.* (2004, p. 103) ao se depararem com uma professora que se satisfazia com a aparência das figuras, sem demostrar interesse nas propriedades dessas figuras, orientam:

> As atitudes de questionar, desconfiar, construir e provar são as que se espera de um professor e de qualquer aprendiz de matemática. O professor só pode facilitar e promover a aprendizagem de conteúdos que domina e para os quais construiu um significado (ALMOULOUD et al., 2004, p. 103).

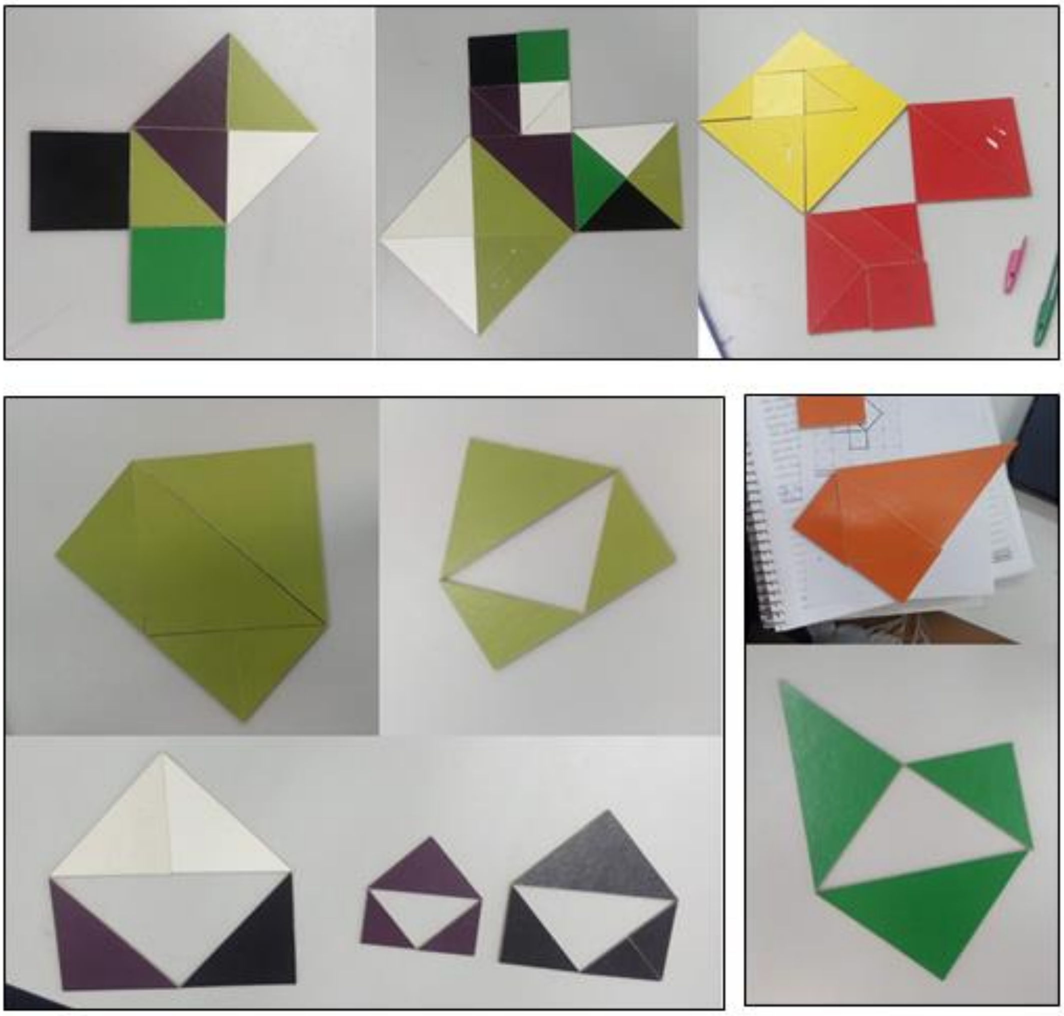
Os participantes, futuros professores e atualmente aprendizes de matemática, demostraram essas atitudes. Contudo, destacamos que nenhum dos estudantes buscou por conta própria uma representação geométrica diferente da tradicional sem que fossem estimulados a fazer. Salientamos também que, durante a movimentação do grupo para provar se a representação do Teorema de Pitágoras por meio dos semicírculos, seria verdadeira, não houve menção nem tentativas de uma prova ou demonstração algébrica para essa representação geométrica.

Ao concluírem com argumentos aritméticos que sim, o Teorema de Pitágoras pode ser representado por semicírculos, de raio medindo metade da medida dos lados de um triângulo retângulo, desenhados sobre esses lados, solicitamos que os estudantes voltassem para a questão de representar o teorema utilizando apenas um Tangram. Neste momento buscamos desenvolver a atividade pedagógica a fim de incentivar a manipulação das peças, o pensar, analisar, compara e criar hipóteses, como orienta a pesquisa de Oliveira et al. (2015) para avanço entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele.

Para concluírem essa parte da atividade, questionamos: Vimos que o Teorema de Pitágoras pode ser representado por quadrados e semicírculos projetados sobre os lados do triângulo retângulo, será que é somente por meio dessas figuras geométricas que podemos representar o teorema?

Após algumas reflexões e colocações dos licenciandos, eles chegam à representação do teorema por meio dos triângulos isósceles presentes no quebra-cabeça. Os estudantes ficaram entusiasmados com a descoberta e buscaram outras formas de representar o teorema. As diferentes formas de representar geometricamente o Teorema de Pitágoras utilizando o Tangram, encontradas pelos participantes podem ser observadas nas imagens da Figura 38, inclusive duas representações equivocadas (imagem do Tangram alaranjado e verde da direita) foram discutidas com o grupo, que logo perceberam o equívoco.

**Figura 38:** Representações do licenciandos do Teorema de Pitágoras utilizando o Tangram.



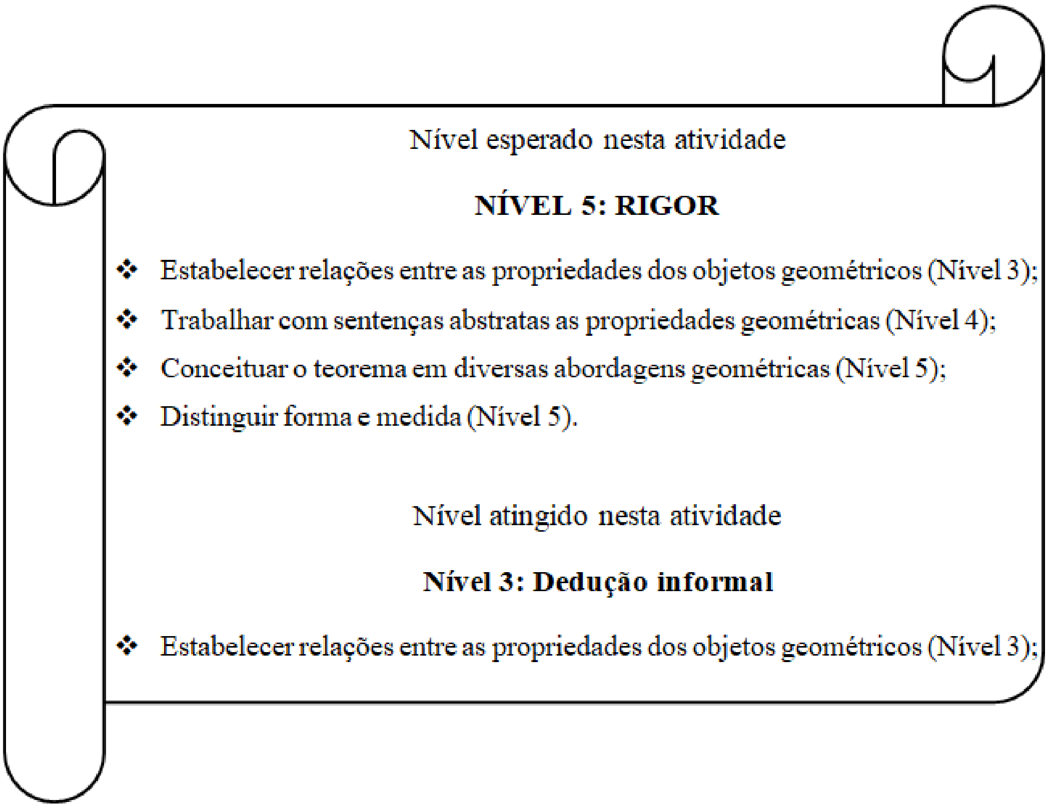
Fonte: Dados da pesquisa.

Com isso, os participantes foram incentivados a testarem por meio de desenho outras figuras, como triângulos equiláteros, círculos e retângulos. Ao explorarem representação com retângulos surgiu a ideia de figuras proporcionais, pois perceberam que a altura do retângulo de cada um dos lados precisar ter relação de proporcionalidade com os desenhados sobre os demais lados do triângulo retângulo.

Compreendemos que houve uma evolução dos licenciandos acerca do Teorema de Pitágoras, por meio da sequência didática vivenciada, ampliando seus conhecimentos. Porém os estudantes se satisfizeram com as demonstrações geométricas e aritméticas, não apresentando a iniciativa de demonstrar algebricamente nenhuma das figuras geométricas, “O apropriar-se de um conceito é fazer a passagem de uma representação para outra, trabalhando com desenvoltura nas diferentes representações”. (FAINGUELERNT, 1999 apud LORENZATO, 2012, p. 98).

Dessa forma, não podemos afirmar que estes se apropriaram do conceito alcançando o quinto nível de pensamento geométrico da teoria de van Hiele, pois o grupo seguiu confundindo aspectos como forma e medida, além de não conseguirem desenvolver com propriedade as outras representações geométricas do Teorema. A Figura 39 apresenta com detalhes os níveis esperados e atingidos na atividade 4 pelo grupo de licenciandos participantes da pesquisa.

**Figura 39:** Níveis de pensamento geométrico esperados e atingidos para atividade 4.




Fonte: Elaborado pela autora.

## 6.2 A sequência didática e os licenciandos: implicações em um processo de formação

Ao buscarmos verificar as possíveis implicações da intervenção na formação docente desses licenciandos, identificamos que o desenvolvimento da sequência propiciou um espaço também de construção de saberes. Esse aspecto se justifica pela natureza de nossa abordagem, caracterizada como uma pesquisa-ação. Portanto, por se desenvolver em um contexto de formação inicial de professores, existe um objetivo implícito de aprendizagem, por meio do qual, esses licenciandos ampliaram e fomentaram seus saberes docentes. Isto pode ser observado, a partir da triangulação dos dados coletados por meio das entrevistas, questionários, diário de campo e áudios obtidos durante as aulas, o que nos permitiu compreender como se constituiu esse processo.

Nesta perspectiva, tornou-se necessário buscar um aprofundamento conceitual em relação aos saberes docentes, como subsídio para fundamentar o processo de análise desses aspectos. Sendo assim, nos pautamos em Tardif (2011), que define esses saberes e os divide em quatro categorias.

Para o autor, esses saberes estão articulados entre si, como resultado de um conjunto de conhecimentos e habilidades necessários para atuação do professor, caracterizados da seguinte forma: Saberes profissionais resultados dos saberes transmitidos pelas instituições formadoras; Saberes disciplinares referem-se aos que emergem das tradições culturais e grupos sociais produtores de saberes, apresentados em forma de disciplinas; Saberes curriculares relacionados aos métodos, objetivos e discursos que estruturam os programas escolares; Saberes experienciais, frutos do exercício da função na prática como professor, construídos em seu trabalho cotidiano, como habilidades do saber-fazer e saber-ser (TARDIF, 2011).

Sendo assim, a partir da análise dos dados, inferimos que há indícios de que a proposta desenvolvida implicou no processo de formação destes docentes, sobretudo, no processo de construção de seus saberes. A partir de tal consideração, apresentamos no tópico a seguir os principais aspectos evidenciados, utilizando os relatos obtidos durante a coleta de dados como ilustrações dos processos identificados. Para melhor compreensão, além dos pseudônimos atribuídos aos estudantes, utilizaremos os códigos, (E) para entrevistas, (Q) para questionários e (R) para relatos durante as aulas.

### 6.2.1 Saberes docentes em um processo formativo

Enquanto pesquisadoras, entendemos que as implicações da vivência da sequência de didática no processo formativo dos licenciandos podem ser analisadas a partir de três aspectos. O primeiro deles diz respeito à apropriação do objeto matemático em questão, no caso, o conteúdo de trigonometria, evidenciando seus saberes disciplinares. O segundo aspecto está relacionado com os elementos apontados pelos licenciandos como contributivos às suas práticas pedagógicas, referentes à contribuição dessa intervenção na forma como eles demonstraram pretender ensinar tal conteúdo, revelando seus saberes curriculares e profissionais. O terceiro evidencia a relação dos licenciandos, participantes da pesquisa com os conhecimentos geométricos.

Embora os licenciandos já tivessem estudado os objetos do conhecimento abordados, tanto na educação básica quanto na própria graduação, a abordagem desses tópicos em uma sequência didática proporcionou um novo olhar deles a respeito do tema, oportunizando aos licenciandos aprofundar e revisitar conhecimentos acerca dos conteúdos abordados, conforme pode ser evidenciado nos seus comentários, apresentados a seguir.

> *De maneira mais específica, eu gostei de ter aprendido o desenvolvimento da área do círculo, depois da aplicação da atividade, nunca mais esqueci. (Carla, E)*
>
> *Eu nunca tinha visto esse conteúdo desse jeito, agora aprendi de outra forma. (Alison, R)*
>
> *As outras possibilidades de demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando outras figuras geométricas além dos quadrados, foi espetacular. Eu já tinha visto a demonstração com os quadrados e pretendia usar nas aulas (...), mas com essas outras formas, abriu um leque de possibilidades. (Sara, E)*
>
> *O prazer da redescoberta e essa experiência de aprendizagem se torna mais duradoura. (James, E)*
>
> *Para mim, o processo de aprendizagem serviu para mensurar como é possível desmembrar o conteúdo. (Jorge, E)*

Esses relatos nos revelam as contribuições da sequência didática desenvolvida para a construção do saber matemático dos licenciandos, que, como destacado pelo licenciando James, representou uma "redescoberta".

Isso corrobora com estudos como os de Nacarato e Paiva (2008), que evidenciam a importância de se oportunizar os licenciandos revisitem os conteúdos matemáticos, pois "pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer" (p. 14). Isso está bem alinhado com as Diretrizes Curriculares Nacionais, quando destacam como competência específica a ser desenvolvida pelo licenciando: "Dominar os objetos de conhecimento e saber como ensiná-los" (BRASIL, 2019, p. 13).

Os tópicos que foram desenvolvidos no decorrer da sequência didática não eram novidade para esses acadêmicos, por serem objetos de conhecimento contemplados tanto na educação básica quanto no ensino superior; contudo, os relatos nos mostram a contribuição para a formação desses licenciandos, ao possibilitarmos que eles refletissem sobre esses conteúdos no papel de professores em formação. A abordagem imersa na prática docente propiciou aos estudantes discutir, questionar, verificar, refletir e relacionar a teoria e a prática de forma participativa, promovendo uma ressignificação de alguns conteúdos, como o Teorema de Pitágoras, a área do círculo e a tabela trigonométrica, objetos do conhecimento presentes no currículo da educação básica.

Concordando com Leivas (2009, p. 247), "os conteúdos que devem ser tratados na escola básica devem ser de profundo conhecimento do futuro professor". Ao proporcionar momentos de reflexões didáticas sobre os saberes disciplinares, acreditamos contribuir para a reelaboração desses saberes e para integrar os conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos dos licenciandos, como pode ser observado em alguns relatos deles, a seguir.

> *As atividades que a gente fez tinham um teor geométrico muito bom, não eram questões algorítmicas, nem simples aplicação de fórmulas, você precisava pensar um pouco, planejar uma estratégia, ter um pouco de conhecimento de alguns conteúdos, acabou testando se a gente lembrava de alguns conteúdos que já tínhamos visto e aplicá-los agora de uma outra forma. (Luiza, E)*
>
> *Eu gostei muito da parte onde foi para determinar a área do círculo, foi bem interessante a forma que foi construída a atividade. Como existiam pessoas com construções diferentes, e ao ocorrer um debate, nós podíamos ver que quanto mais fossemos dividindo os "pedaços" mais próximo de um retângulo chegávamos. (Naruto, E)*
>
> *Quando a gente se envolve no processo de descobrir as coisas a gente não esquece mais, tipo quando a gente viu a demonstração por semicírculos na aula de tecnologias muitos nem lembravam. Agora, depois que a gente fez, desenhou, calculou, discutiu diversas possibilidades pro Teorema de Pitágoras, duvido a gente esquecer. (Marina, R)*

Esses relatos revelam indícios de um processo de ressignificação da aprendizagem dos licenciandos em relação aos conteúdos abordados. Quanto a isso, convém destacar que foi possível observar, em diferentes situações ao longo da coleta de dados, que a professora titular da turma demonstrou considerar ser importante propiciar essas situações durante a formação inicial dos licenciandos, atendendo ao que se estabelece nas Diretrizes Curriculares Nacionais para formação inicial de professores. Então, foi válido que, ao planejar nossa intervenção por meio da sequência didática, tenhamos buscado promover um diálogo entre saber disciplinar (o conteúdo) e conhecimento didático (forma de ensinar), objetivando contribuir para o desenvolvimento do saber didático-pedagógico do licenciando.

As implicações da intervenção realizada, neste trabalho, puderam ser verificadas no decorrer da disciplina de ESI, por meio do projeto didático elaborado pelos estudantes, que foi solicitado pela professora titular, servindo de instrumento de avaliação da disciplina, conforme se observa nos relatos a seguir.

> *Foi nosso primeiro contato com planejamento de fato, planejar aula, material didático, ter aquele maior contato com o que é a sala de aula. (Marina, E)*
>
> *Pra mi,m foi uma coisa nova e eu acabei aproveitando pra minha sequência de atividades, em que eu fiz uma sequência com o objetivo calcular área da superfície de sólidos geométricos, em R3 no caso, que eu apresentei na disciplina de Estágio I. (Luiza, E)*
>
> *Como eu nunca tinha participado/feito uma sequência didática, quando desenvolvemos a nossa na última unidade da disciplina, eu peguei algumas inspirações da qual você aplicou. Justamente pra ter essa dinâmica e etc., tanto que utilizei origami para a construção do teorema de Pitágoras. (Naruto, E)*
>
> *Tanto que mudamos totalmente o nosso projeto didático. Nosso projeto era sobre geometria, mas percebemos que os objetivos estavam além das condições dos alunos, observando pelos níveis de van Hiele. (Marina, E)*

No relato de Marina, percebemos que o alcance da nossa intervenção não se limitou a implicações imediatas; a intervenção proporcionou reflexões sobre outros conteúdos matemáticos, além dos explorados na sequência. A forma como os conteúdos foram abordados propiciou aos licenciandos vivenciar experiências no desenvolvimento das habilidades de articulação entre teoria e prática, estas, necessárias para realizar a transposição do saber matemático no saber a ser ensinado em sala de aula, com destaca Schirlo e Silva (2013, p.02),

> É necessário pontuar que, mesmo que o professor apresente um bom conhecimento dos conceitos geométricos a ser ensinado, muitas vezes ele não consegue realizar a transposição didática desse conteúdo, pois uma coisa é conhecer a teoria e outra, muito diferente, é colocá-la em prática.

Dessa forma, buscamos oportunizar aos licenciandos situações de reflexão dos processos educativos, articulando os conteúdos e o tratamento didático, por entendermos que as experiências proporcionadas refletem na construção de saberes docentes; isso porque os licenciandos têm conjecturas sobre suas futuras práticas docentes. Acreditamos estar, com isso, auxiliando esses futuros professores na construção dos seus saberes disciplinares para o ensino básico, ou para o que Tardif (2011) classifica como saberes curriculares. Os depoimentos a seguir embasam nossa percepção:

> *Eu vi que quando eu for professor, eu posso explicar daquela forma, que não fica uma coisa sem lógica, suprindo uma dificuldade, porque eles vão saber de onde vêm as coisas. Eu gostei muito das atividades. Eu pensei, quando eu for professor eu posso explicar de uma forma que os alunos entendam. Eu percebi que posso refletir sobre os conteúdos para fazer de uma forma com mais sentido para os meninos quando eles estiverem vendo geometria. (Artur, E)*
>
> *Novos métodos de mostrar a eficiência de alguns teoremas ou forma simples de transmitir o conhecimento da geometria. (Miranda, E)*
>
> *Foi bastante significante para a minha formação. (Luiz, E)*
>
> *Tudo isso a gente acaba levando em consideração quando a gente for professor. (James, E)*
>
> *Para mim, o processo de aprendizagem serviu para mensurar como é possível desmembrar o conteúdo, que a princípio, é mal visto pelos alunos por sua "complexidade". De tal forma, a tornar o ensino mais dinâmico a partir da construção dos conceitos, como foi o caso do número de Pi. Assim, os alunos poderão entender que aquele valor não vem do além e não é por aceitação. Ele tem um por que, e o estudo mostra isso. (Jorge, E)*

Esses comentários também nos revelam o terceiro aspecto, que são os indícios da relação dos licenciandos com a geometria. Isso pode ser evidenciado quando eles enfatizam suas experiências ao longo da educação básica e durante o curso de licenciatura, apontando as implicações da intervenção às suas concepções a respeito desse conteúdo matemático.

Sobre essa relação do estudante com a geometria, pode-se destacar duas características principais. A primeira se refere ao que já foi evidenciado neste trabalho, ao apontarmos as pesquisas sobre a problemática quanto ao ensino de geometria na formação inicial. Tais dificuldades são observadas em diferentes estudos no campo da Educação Matemática desde os anos de 1990, como o de Pavanello (1989) e Lorenzato (1995) e, mais recentemente por Schirlo e Silva (2013), Souza (2015), Rosa (2020).

Alguns relatos apresentam motivos que podem estar associados às experiências que o licenciando teve ao longo de sua formação com esse conteúdo, a geometria. Um deles é a ênfase dada à álgebra pelos professores de Matemática.

> *Não sei se é no ensino ou na aprendizagem, mas a dificuldade em geometria existe. (Éder, R)*

> *Aprendemos a geometria de forma algébrica muitas vezes sem compreender a álgebra. Por exemplo, quando ensina área, o professor vai direto para fórmula, sem que o aluno compreenda espaço ocupado, unidades de medida, diferentes unidades de medida de área, sempre usam quadradinhos. (Eduarda, R)*

Os relatos dos estudantes remetem tanto à questão da origem da problemática quanto ao ensino de geometria. Estudos como o de Leivas (2009) e Pavanelo (1989,1993) apontam o Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorrido no início da década de 60 do século XX, como um dos principais contributivos para essa problemática. Esse movimento defendia uma reformulação dos conteúdos ensinados na matemática escolar, propondo modificações também no ensino de geometria, para que na sua abordagem fosse dada maior ênfase às transformações e cálculos, dando um espaço maior às representações e demonstrações algébricas.

Esses dados também corroboram com os estudos de Souza e Silva (2012), realizados no mesmo curso de Licenciatura em Matemática em que se desenvolveu nossa pesquisa, apontando as limitações dos conhecimentos dos licenciandos sobre os conteúdos geométricos, mesmo quando esses estudantes já haviam cursado mais de 50% das disciplinas do curso.

Outro ponto observado nas falas dos licenciandos tem relação com as dificuldades nos processos de ensino de geometria na educação básica. Os seus comentários sinalizam para a predominância de uma certa algebrização da geometria nas abordagens presentes nos livros didáticos, aliada a dificuldades dos professores em desenvolverem as representações geométricas.

> *O material didático, o livro, dá pouca ênfase à visualização e foca na algebrização da geometria o tempo todo. (Leonan, R)*
>
> *Muitas vezes o professor sabe o conteúdo, mas não sabe a melhor formar de ensinar esse conteúdo. Daí ele repete a forma como aprendeu ou faz o que está no livro, e o livro é muito limitado; e ainda têm coisas que o aluno não entende. A gente viu os alunos pedirem exercícios que não fossem os dos livros por serem muito difíceis, segundo os alunos. (Jéssica, R)*
>
> *Quer ver comum é o professor fazer desenhos mal feitos, desproporcionais. Daí, como o aluno vai compreender as propriedades de losango se ele olha e vê um paralelogramo? Fica complicado. (Artur, E)*

Esses relatos evidenciam a existência de obstáculos didáticos, que são definidos no campo da Educação Matemática, por Guy Brousseau como resultado da transposição didática. Para atender ao sistema educativo (currículo, livro didático, conhecimento do professor), a transposição pode limitar o entendimento do estudante a respeito do conteúdo, como destaca Almouloud (2007, p.142) “os obstáculos desse tipo são, em sua maior parte, inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática, embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito, para explicar a dificuldade vivida pelo aluno”.

Para os licenciandos, na Educação Básica, o professor de Matemática desempenha um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos geométricos. Para esses estudantes, é importante conhecer durante sua formação inicial, além do conteúdo, também as teorias que podem fundamentar suas práticas. Isso ficou evidente no relato da licencianda Marina, sobre a teoria de van Hiele.

> *Eu pude perceber que praticamente ninguém tinha ouvido falar sobre a teoria de van Hiele, nem mesmo na universidade, e olha que a gente já estava no sexto período cursando o primeiro estágio e nunca tínhamos ouvido falar disso. Muitos já tinham cursado a matéria de geometria e até então ninguém tinha comentado sobre isso, nem no ensino básico, ensino fundamental e médio, nem na universidade. Quando você chegou, muita gente ficou “Teoria de van Hiele? Como assim?” Ficamos meio surpresos, eu também fiquei. Eu não me identifico tanto com a geometria, mas quando você apresentou essa teoria eu achei um tanto interessante, principalmente as etapas dela.[...] eu acho que no período escolar tem muitos professores que deixam a desejar nesse quesito de passar as etapas de van Hiele com mais calma para os alunos de uma forma mais detalhada e não superficial. Eu acho que a partir disso os alunos desenvolvem essa deficiência no conhecimento geométrico. (Marina, E)*

Esse relato também nos revela uma segunda característica observada a partir da relação dos licenciandos com a geometria, relacionada às contribuições da intervenção realizada no seu processo formativo, como uma oportunidade de reconstruir seus saberes docentes, sobretudo em relação aos conteúdos geométricos, como podemos observar nos relatos a seguir.

> *A participação no projeto de pesquisa me abriu os olhos, em relação à geometria. (Artur, E)*

> *Porque achei que geometria a gente dava de qualquer jeito, que não tinha essa evolução no aprendizado como a teoria nos mostrou. [...] Então mostrar a teoria de van Hiele para nós, nesse momento, foi*

> *necessário porque muitos desconheciam, e por não conhecer não usariam essa teoria em sala de aula futuramente como professores. Dessa forma, a experiência com seu projeto foi gratificante e enriquecedora. (Marina, E)*
>
> *Me levou a refletir durante toda a disciplina juntamente com as leituras, debates e aplicações dos projetos didáticos dos colegas que também exploraram muito a geometria, [...], é a respeito da construção de objetos e conceitos matemáticos, pois no método tradicional, o formal sempre vem primeiro, não dando espaço para o aluno refletir, argumentar, redescobrir, [...]. Na sua sequência, observei que as intervenções do professor são uma espécie de bússola que orienta o alcance efetivo do objetivo de aprendizagem proposto, pois a formalização dos conceitos (construção) é dada somente depois de todo um processo de exploração e de intervenções por meio de perguntas pertinentes, mostrando também o extremo potencial dos recursos manipuláveis nesse processo, como, por exemplo, o Tangram, malhas triangulares, compasso etc. (James, E)*

Nesta perspectiva, podemos inferir que a intervenção proposta, por meio da sequência didática, implicou na construção dos saberes docentes desses futuros professores de Matemática, sobretudo, em relação ao ensino dos conteúdos geométricos. Afinal, a intervenção oportunizou a esses licenciandos refletir sobre como esses conteúdos estão sendo ensinados, tanto na Educação Básica como no próprio curso de licenciatura.

Por fim, durante a análise dessas implicações, apontamos que os três aspectos já comentados, são a apropriação do objeto matemático (trigonometria), a contribuição da intervenção na forma como eles pretendem ensinar tal conteúdo e a relação deles com os conhecimentos geométricos, são complementares. Então, não podemos conceber um saber didático-pedagógico sem um domínio do saber matemático, da mesma forma, em relação ao conteúdo geométrico, pois este integra e complementa ambos os saberes, que sempre estarão em contínuo movimento de construção, perpassando todo o processo de formação, e permanecendo ao longo de toda carreira docente.

# 7. CONCLUSÕES

Nesta seção, apresentamos algumas considerações a respeito da trajetória teórica e metodológica deste estudo e procuramos evidenciar os resultados que permitem responder aos objetivos de nossa pesquisa.

Com a escolha do ambiente de formação inicial de professores de Matemática para realização da pesquisa, emergiu a necessidade de conhecer os aspectos históricos que contribuíram para a construção dos ambientes educacionais que atualmente vivenciamos. Ao adentrarmos pelo referencial teórico, percebemos os variados momentos dos estudos matemáticos em nosso país, nos diferentes níveis de ensino, básico e superior, que possibilitaram a constituição da Educação Matemática enquanto área de pesquisa, impulsionando os estudos sobre ensino e aprendizagem.

Visto isso, nossa pesquisa teve como objetivo geral investigar, com base na Teoria de van Hiele, os níveis do pensamento geométrico evidenciados nas soluções apresentadas pelos licenciandos em Matemática da UFS/SC, ao longo de atividades de ensino vivenciadas em uma sequência didática sobre o Teorema de Pitágoras, desenvolvida na disciplina ESI.

A oportunidade de nos debruçarmos sobre os aspectos teóricos do curso de Licenciatura em Matemática e acompanhar o desenvolvimento das aulas de ESI, nos possibilitou um olhar crítico sobre os reflexos desse curso para o cenário educacional brasileiro e da formação de professores. Essa oportunidade enriqueceu a pesquisa e o processo de formação continuada da autora desta dissertação, que também é professora.

Aliar o estudo de conceitos geométricos a uma teoria, como a Teoria de van Hiele, referencial principal deste trabalho, possibilita uma reflexão sobre o ensinar e o aprender geometria ainda na formação inicial de professores. O modelo proposto na Teoria de van Hiele, permitiu classificar os níveis de pensamento geométricos dos licenciandos, bem como ampliar seus conhecimentos sobre a abordagem de conceitos geométricos para educação básica.

A metodologia utilizada da sequência didática permitiu investigar os níveis de pensamento geométricos dos licenciandos, sendo a metodologia adaptada ao ambiente em cada encontro. Sobre os instrumentos, o questionário nos auxiliou a identificar as especificidades do grupo, juntamente com o diário de campo que permitiu captar aspectos que passaram despercebidos nos demais instrumentos.

A respeito da sequência didática, ela atendeu ao nosso objetivo específico de intervir na formação inicial dos licenciandos em Matemática e identificar os níveis de pensamento geométrico presentes nas soluções apresentadas por eles, definidos na Teoria de van Hiele, de forma articulada e sequencial.

Da mesma forma, as entrevistas realizadas posteriormente ao término do desenvolvimento da sequência didática nos proporcionaram verificar as implicações da intervenção realizada no processo formativo destes licenciados, aferindo contribuições na construção de seus saberes docentes.

Com a análise dos resultados, concluímos que proporcionar momentos formativos nos quais os licenciandos possam desenvolver a habilidade de estabelecer relações entre os saberes disciplinares e curriculares, conforme definidos por Tardif (2011), possibilitando uma adaptação didática dos conhecimentos adquiridos na graduação em conhecimento escolares, deve ser uma preocupação da formação inicial. Assim, concluímos que é necessário que o Teorema de Pitágoras seja abordado em diferentes momentos formativos, de forma a propiciar ao licenciando evoluir gradativamente seus níveis de compreensão e consolidação dos conceitos relativos a esse teorema.

No desenvolvimento de nosso trabalho, percebemos que, ao multiplicar os momentos formativos, podemos proporcionar aprimoramento nas práticas de ensino dos futuros professores, ampliando seus horizontes sobre os conhecimentos escolares. Também, os debates nos momentos de socialização enriqueceram as experiências proporcionadas pelas atividades, possibilitando uma formação mais crítica e ampla sobre as práticas pedagógicas.

Percebemos que o curso Licenciatura em Matemática da UFS/SC apresenta na maior parte de sua estrutura curricular disciplinas específicas, ditas popularmente como “disciplinas duras”, em que são trabalhados temas mais complexos, ficando a cargo do licenciando buscar compreender os temas mais elementares.

O processo de desenvolvimento e a análise do material das atividades propostas permitiram observar como esses licenciandos raciocinam e as estratégias que eles usam para resolver as atividades. Com isso, observamos que, mesmo após o estudo de temas complexos como demonstrações e sistemas axiomáticos, esses estudantes podem apresentar fragilidades na formação do pensamento abstrato em geometria. Isso porque, os licenciandos, participantes desta pesquisa apresentaram conflitos cognitivos entre álgebra e geometria em seus argumentos. Também demonstram dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da geometria euclidiana plana, semelhante ao que foi observado no estudo desenvolvido por Souza e Silva (2012).

Os resultados apontam que, embora, todos os participantes já tivessem cursado a disciplina Laboratório do Ensino da Matemática e, em sua maioria, cursado as disciplinas de Geometria Euclidiana Plana, assim como Matemática para o Ensino Médio II, que aborda conceitos cujo aprendizado corresponde ao quarto nível do pensamento geométrico no modelo de van Hiele, a maioria desses licenciandos demonstrou conhecimentos classificados somente no terceiro nível, que implicam em dedução informal. Outros licenciandos ainda se encontravam na fase de transição entre o nível 2 e 3, em relação à apropriação dos conceitos geométricos envolvidos no Teorema de Pitágoras.

Ressaltamos a relevância dos licenciandos terem clareza sobre o teorema discutido nesta pesquisa. Esse é um objeto do conhecimento explorado no Ensino Fundamental, correspondente a diversas habilidades elencadas pela BNCC, assim como nas competências específicas do Ensino Médio, não somente para Matemática, mas para outros componentes curriculares, como exemplo, a Física.

Com a constatação que os licenciandos demonstraram saber apenas uma única representação geométrica do Teorema de Pitágoras, percebemos ser essa uma reprodução do que lhes foi apresentado no ensino básico e superior; por isso, alertamos para a carência de desenvolvimento de habilidades mentais de visualização na formação inicial desses licenciandos. De acordo com Leivas (2009), se essas habilidades fossem desenvolvidas na formação inicial, poderiam articular a construção e comunicação de conceitos, colaborando na solução de diferentes situações problemas.

Uma das propriedades do modelo de van Hiele considera que o desenvolvimento mental dos estudantes é centrado nas experiências vivenciadas e na forma como elas são conduzidas, e não necessariamente estão vinculadas à idade dos indivíduos. Desse modo, o método de ensino empregado precisa estar de acordo com o nível de pensamento geométrico em que se encontra o estudante. Caso o nível de ensino esteja acima do nível atingido pelo aprendiz, este apenas reproduzirá o método, podendo até ter resultado positivo; contudo, não significa que o pensamento do aprendiz condiz com o nível abordado.

Ao ter como objetivo formar professores de Matemática para a educação básica é necessário aos cursos de licenciatura dessa área associar os conhecimentos matemáticos geométricos aos estudos de teorias que fundamentam a construção das propostas de ensino desses futuros docentes. Consideramos que a abordagem da Teoria de van Hiele nos cursos de formação de professores pode provocar reflexões a respeito do ensinar e do aprender geometria, o que é essencial para futuros professores na elaboração de planos de aula, objetivos de aprendizagem, metodologias de trabalho, assim como na avaliação dos conhecimentos geométricos.

Ao concluir este trabalho, enfatizamos o importante papel do professor no processo de aprimoramento da Educação Básica, principalmente na Educação Matemática, que vem tendo resultados pouco satisfatórios com relação à aprendizagem dos estudantes, sobretudo em relação aos objetos geométricos. Acreditamos que a formação inicial dos professores de matemática é fundamental nesse processo. Assim, salientamos sobre a importância de pesquisas a respeito desse nível de ensino como uma estratégia para direcionar políticas públicas destinadas a atender esta demanda.

# REFERÊNCIAS


AGUIAR, M. A. S. Relato da resistência à instituição da BNCC pelo Conselho Nacional de Educação mediante pedido de vista e declarações de votos. In: AGUIAR, M. A. S.; DOURADO, L. F. **A BNCC na contramão do PNE 2014-2024: avaliação e perspectivas.** [Livro Eletrônico]. Recife: ANPAE, 2018.

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F.; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, nº 27, set-dez, p. 94-108, 2004.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BRASIL, **Ministério da Educação, Conselho Federal de Educação: Parecer 292/62**, de 14 de novembro de 1962 – Fixa a parte pedagógica dos currículos mínimos relativos aos cursos de licenciatura. Relator: Valnir Chagas. Brasília: Documenta n. 10, 10 dez. 1962. p. 95-100.

BRASIL, Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. **Fixa diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 12 ago. 1971.

BRASIL. **Constituição: República Federativa do Brasil.** Senado Federal. Brasília: Centro Gráfico. 1988.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** Diário Oficial da União, Brasília, DF, 21 dez. 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ministério da Educação. Brasília: Mec. 1998.

BRASIL. Resolução CNE/CP Nº 1, de 18 de fevereiro de 2002. **Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Brasília, DF, 18 de fev. 2002.

BRASIL. Decreto nº 6096, de 24 de abril de 2007. **Institui o Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais** – REUNI. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 25 abr. 2007.

BRASIL. Decreto nº 6.317, de 20 de dezembro de 2007. **Plano Nacional de Educação**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 20 dez. 2007.

BRASIL. Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009. **Institui a Política Nacional de Formação de Professores do Magistério da Educação Básica e dá outras providências. Diário Oficial da União,** Brasília, DF, 29 jan. 2009.

BRASIL. Decreto nº 7.219, de 24 de junho de 2010. **Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID e dá outras providências.** Brasília, DF, 24 de jun. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica em nível superior**. Resolução CNE/CP Nº 02 de 01 de julho de 2015. Brasília: CNE, 2015.

BRASIL, Mistério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica** (BNC-Formação). Brasília, DF, 20 de dez. 2019.

BURGER, W. F., SHAUGHNESSY, J. M. Spadework Prior to Deduction in Geometry. **Mathematics Teach**, 78, 1986, p.411-418.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. O processo de Inserção das geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: A visão dos Professores Participantes. **Bolema,** v. 28, nº 48, p. 42-63, 2014.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante,** v. 14, nº 1, p. 103-128, 2015.

CARDOSO, E**. Uma proposta de níveis de aprendizagem para o Tópico de funções no Ensino Médio**. 194f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S. H. R.; LEIVAS J. C. P. Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. **Revista Práxis**, Ano 8, n. 15, 2016.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** Em: Mary M. Lindquist & Albert P. Shulte: Aprendendo e ensinando geometria. Atual, São Paulo: 1994.

FERREIRA, V. L. **O processo de disciplinarização da metodologia do ensino de matemática.** 253f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, D. **Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação.** 425f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1994.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, ano 3, nº 4, p. 1-38, 1995.

FIORENTINI, D.; SOUZA JUNIOR, A.; MELO, G. F. A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. (ORG.). **Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a).** Mercado das Letras: Campinas-SP, 1998.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2012.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FUYS, D.; GEDES, D.; ANDTISCHLER, R. **The van Hiele model of Thinking in Geometry among adolescents**. JRME Monograph n. 3. Reston , VA: NCTM 101,1988.

GATTI, B. A.; NUNES, M. M. R. (Orgs.). **Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2009. (Textos FCC, 29).

GATTI, B.; BARRETTO, E. S. S.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Políticas docentes no Brasil: um estado da arte.** Brasília: UNESCO, 2011.

GATTI, B. A.; ANDRÉ, M. E. D. A.; GIMENES, N. A. S.; FERRAGUT, L. **Um estudo avaliativo do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (**PIBID**).** São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2014. (Textos FCC, 41).

GATTI, B. A. Formação de professores, complexidade e trabalho docente. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 17, n. 53, p. 721-737, 2017.

GATTI, B.; BARRETTO, E. S. S.; ANDRÉ, M. E. D. A.; ALMEIDA, P. C. A. **Professores do Brasil: novos cenários de formação.** Brasília: UNESCO, 2019.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias.** 238 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática: uma introdução**. CAED-UFMG, Minas Gerais, 2012.

GUTIERREZ, A, JAIME, A. **Estudio de lascaracteristicas de los niveles de van Hiele. Proceedingsofthe 11th PME conference** , vol 3, p. 131 – 7. Montreal, 1987.

HIELE, P. (1984): **A child‘s thought and geometry, in English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele** (D. Geddes, D. Fuys & R. Tischler, eds.). Research in Science Education Program of the National Science Foundation (USA).

HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. Orlando, USA: Academic Press, 1986.

HOFFER, A. **Geometry is More Than Proof. Mathematics Teacher**, 74 (January), p.11-18.1981.

ISODA, M., **The Development of Language about Function: An Application of Van Hiele's Levels.** PME 20, Valencia, Espanha, vol.3, p.105-112, 1996.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. **Uma propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele**, en S. Llinares, M. V. Sánches (eds), Teoría e práctica em educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), p. 295-384, 1990.

LEIVAS, J. C. P**. Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 294 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEIVAS, J. C. P. Pitágoras e van Hiele: Uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da Teoria de van Hiele com alunos de pós-graduação- A generalização do Teorema de Pitágoras, **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 515-531, jul/dez., Santa Maria, 2017.

LIBÂNEO, J. C. Formação de Professores e Didática para Desenvolvimento Humano. **Educ. Real.**, Porto Alegre , v. 40, n. 2, p. 629-650, 2015 .

LIMA, G. L., SILVA, M. J. F. da. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de Licenciatura em Matemática. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 159-177, jul/dez., 2015 – Santa Maria, 2015.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A educação matemática em revista**. Geometria. Blumenau, n. 04, p. 03-13, Edição especial,1995.

MAYBERRY, J. **The van HieleLevelsofgeometricthought in the undergraduate &preserviceteachers** . The Journal for research in matemathicseducation. v. 14, n. 1, p. 58-69, 1983.

MENDONÇA, E. F. PNE e Base Nacional Comum Curricular (BNCC): impactos na gestão da educação e da escola. In: AGUIAR, M. A. S.; DOURADO, L. F. **A BNCC na contramão do PNE 2014-2024: avaliação e perspectivas.** [Livro Eletrônico]. Recife: ANPAE, 2018.

MELLO, G. N**.** Formação inicial de professores para educação básica: uma (re)visão radical. **Perspec. [online],** v. 14, nº 1, p. 98-110, 2002.

MIORIM, M. **A. Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORESI, E. (Org.) **Metodologia da Pesquisa.** Brasília: UNB, 2003.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.). **A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NACARATO, A. M.; PASSOS C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFScar. 2003.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria**. Boletim GEPEM (USU) Rio de Janeiro, v. 27, p. 93-99, 1990.

NASSER, L. **Usingthe van Hiele Theoryto Improve Secondary School Geometry in Brazil**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Londres, 1992.

NASSER, L. **A Teoria de Van Hiele para o Ensino de Geometria – Pesquisa e Aplicação**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele**. 2. ed. Editora do IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47 n. 166 p. 1106-1133, 2017.

OLIVEIRA, M. C. e. **Ressignificando conceitos de geométrica plana a partir do estudo dos sólidos geométricos**. 266f. Dissertação de mestrado (Mestrado em ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica, Minas Gerais (BH), 2012.

OLIVEIRA, G. S.; MALUSÁ, S.; CORDEIRO, E. M.; SILVA, T. C. S**.** Prática pedagógica de geometria na educação de jovens e adultos: o ensinado e o aprendido. **Revista Ibero-Americana De Educação**, v. 68, n. 1, p. 45-62, 2015.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J.C.P. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Revista Ciência e Natura**, v. 39, n.1, p. 108-117, 2017.

PAVANELO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica.** 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, ano I, n. 1, p. 7-17, 1993.

ROSA, M. C. **Sentidos e significados de professores de matemática: estudo sobre um processo de formação continuada em um município sergipano.** 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal de Sergipe, 2020.

SANT´ANNA, N. F. P, **Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no colégio Pedro II**. 160f. Dissertação. (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

SANTOS. M. C. **Teorema de Pitágoras: suas diversas demonstrações**. 42f. Monografia (Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio). Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.

SÃO CRISTÓVÃO. Universidade Federal de Sergipe. **Programa de Estágio Supervisionado em Ensino de Matemática I**. Departamento de Matemática. São Cristóvão: UFS/DMA, 2019.

SCHIRLO, A. C., SILVA S. C. R. Teoria de van Hiele: Contribuições para a formação de professors de Matemática. **Revista Ibero-Americana de Educação**, v. 63, n. 1, p. 1-10, 2013.

SERGIPE. Universidade Federal de Sergipe. **Resolução nº 150**. Conselho de Ensino, de Pesquisa e de Extensão. São Cristóvão: UFS/CONEPE, 2009.

SMITH, E.; VILLIERS, M. **A comparative study of two Van Hiele testing instruments.** Poster presented at the 13th International Conference of PME, Paris. 1989.

SOUZA, D. S.; SILVA, V. A. **As Figuras do Aprender e o pensamento geométrico de licenciandos em Matemática da UFS**. In: VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade" (EDUCON), 2012.

SOUZA, D. S. **O universo explicativo do professor de matemática ao ensinar o Teorema de Tales: um estudo de caso na rede estadual de Sergipe**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo: UNIAN, 2015.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 12 ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Anuário Brasileiro da Educação Básica, 2019**. São Paulo:Todos Pela Educação, Moderna, 2019.

USISKIN, Z. **Van Hiele Leves and achievement in secondary school geometry.** Columbus, OH: ERIC, 1982.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930)**. 2 ed. São Paulo: Editora Annablume, 1999.

VALENTE, W. R. (Org). **O nascimento da matemática no ginásio.** São Paulo: Annablume, Fapesp, 2004.

VALENTE, W. R. Quem somos nós, professores de matemática? **Caderno Cedes,** v. 28, n. 74, p. 11-23. Campinas, jan./abr. 2008.

WALLE, J. A. **A matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Artmed, 6. Ed. Porto Alegre, 2009.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria.** 100 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Ceará-Centro de Ciências, Fortaleza, 2017.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de van Hiele. **Educ. Matem. Pesq.,** São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

# APENDICE I

**Questionário sobre a Formação Inicial dos Licenciandos Participantes**

**Pesquisa:** Uma investigação sobre os níveis dos conhecimentos geométricos de licenciados em matemática por meio da teoria de van Hiele.

**Pesquisadora:** Kalyne Teresa Machado

**Orientadora:** Divanízia do Nascimento Souza

Este questionário é um instrumento de coleta de dados referente a sua formação em relação a geometria e ao conteúdo de trigonometria. **Obrigatório*

**1.** Identificação (a mesma usada nas atividades) *

**2.** Minha idade é *

**3.** Período do curso que estou cursando *

**4.** Ano que ingressei no curso de Licenciatura em Matemática *

**5.** Escolhi o curso de Licenciatura em Matemática porque *

**6.** Para mim, ensinar trigonometria no ensino fundamental é *

**7.** Foram abordados conteúdos trigonométricos nas disciplinas de seu curso de graduação? Se sim, em quais disciplinas? *(Apenas as disciplinas em que o referido conteúdo era proposta na ementa)

**8.** Foi abordado como ensinar os conceitos geométricos e trigonométricos em alguma disciplina de seu curso? Se sim, em qual/quais disciplina.*

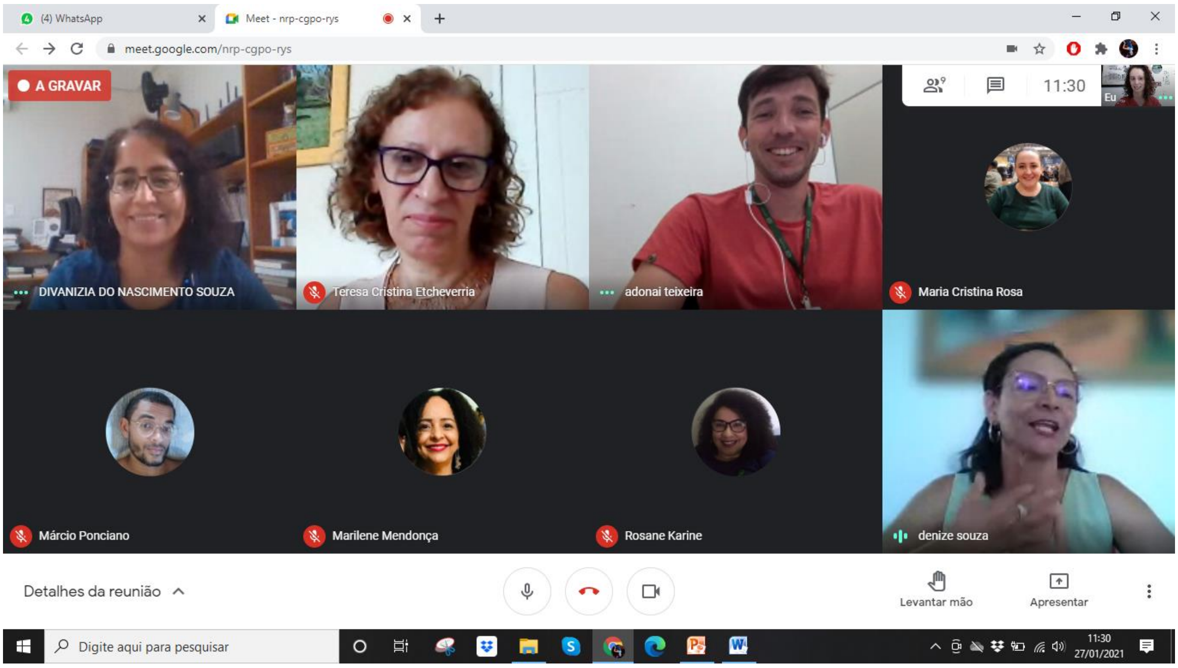
**9.** Em algum momento na graduação você ouviu falar da Teoria dos níveis de van Hiele? Em que momento? *

**10.** Você participa ou já participou de algum desses programas da Política Nacional de Formação de Professores? *(Marcar tudo o que for aplicável)

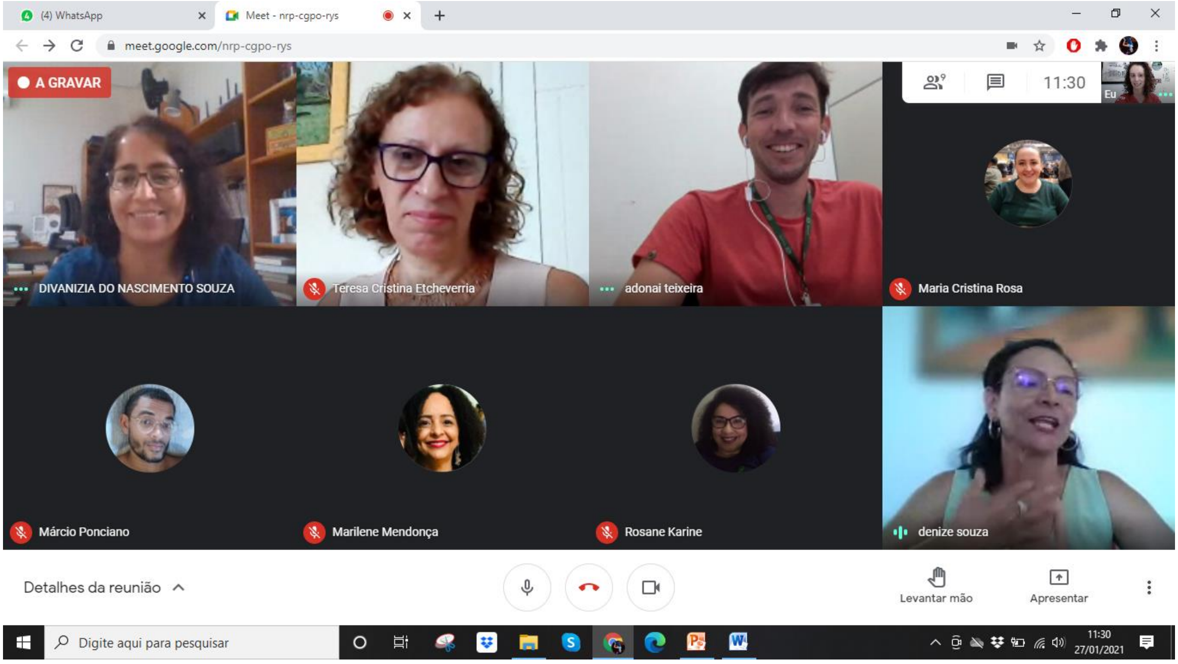
- PIBID
- Residência Pedagógica
- Nunca participei
- Outra

Entrevista professora Denize

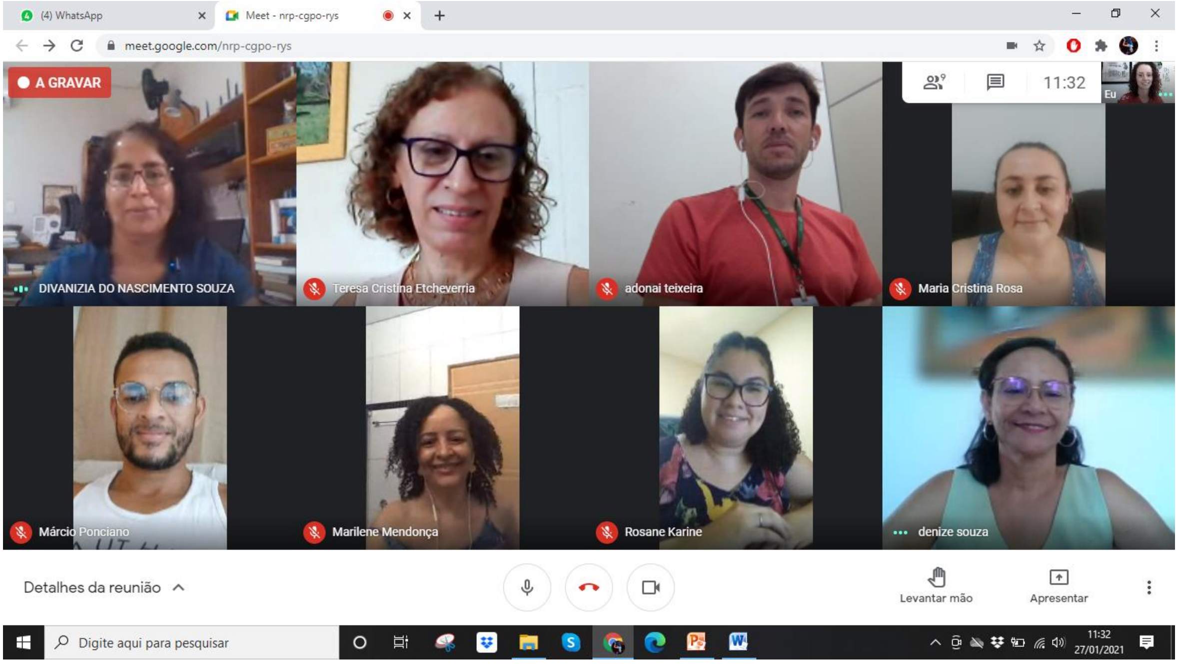
1. Quantos anos você é professora no ensino Superior?
2. Quantos destes leciona a disciplina de Estágio?
3. Qual a contribuição do Estágio Supervisionado de Ensino de Matemática I (ESI) para a formação dos futuros licenciandos?
4. Enquanto pesquisadora sobre o ensino de Geometria e a Teoria de van Hiele, você adota alguma estratégia específica para completar esses campos no desenvolvimento disciplina de ESI?
5. Como a disciplina ESI pode contribuir para minimizar a questão da problemática do ensino da Geometria?
6. Durante a pesquisa identifiquei que a professora lidera um grupo que debate a problemática do ensino de Geometria. Dentro desse "movimento" que busca resgatar o ensino de Geometria, existe uma pesquisa desse grupo que já aponta algum avanço em relação a essa abordagem na formação inicial?
7. A professora pode sugerir alguma questão a ser discutida neste momento que contribuirá para a pesquisa.



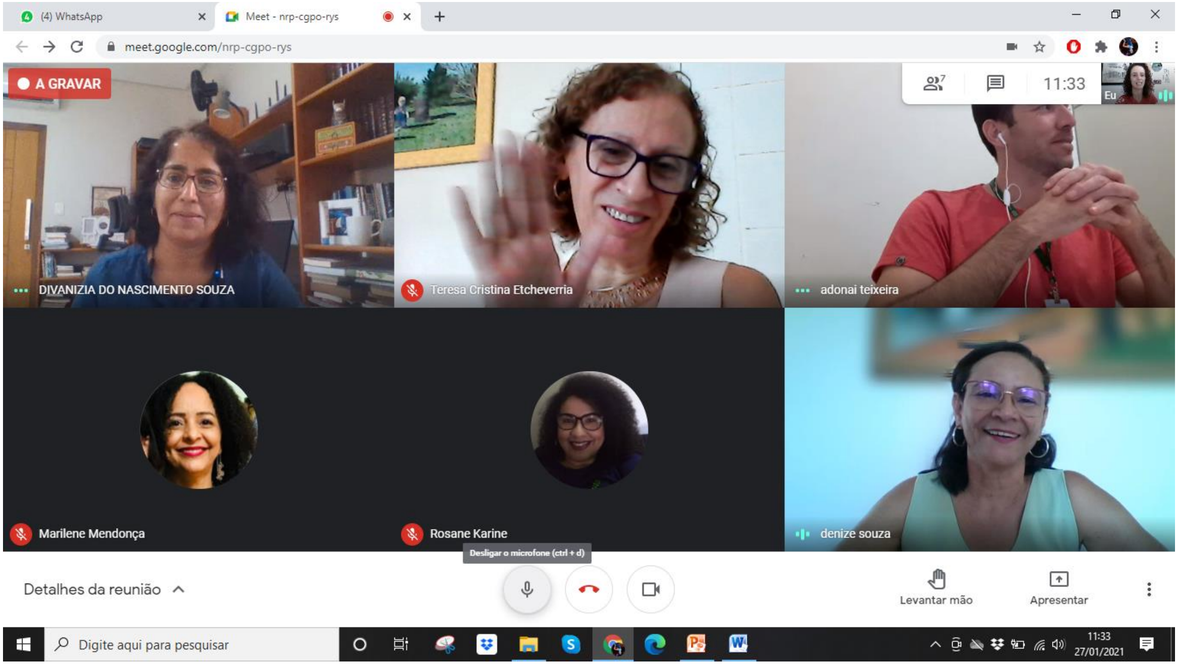

8.


(4) WhatsApp
Meet - nrp-cgpo-rys
meet.google.com/nrp-cgpo-rys
A GRAVAR
11:30
Eu
DIVANIZIA DO NASCIMENTO SOUZA
Teresa Cristina Etcheverria
adonai teixeira
Maria Cristina Rosa
Márcio Ponciano
Marilene Mendonça
Rosane Karine
denize souza
Detalhes da reunião
Levantar mão
Apresentar
Digite aqui para pesquisar
11:30
27/01/2021


(4) WhatsApp
Meet - nrp-cgpo-rys
meet.google.com/nrp-cgpo-rys
A GRAVAR
11:32
Eu
DIVANIZIA DO NASCIMENTO SOUZA
Teresa Cristina Etcheverria
adonai teixeira
Maria Cristina Rosa
Márcio Ponciano
Marilene Mendonça
Rosane Karine
denize souza
Detalhes da reunião
Levantar mão
Apresentar
Digite aqui para pesquisar
11:32
27/01/2021



(4) WhatsApp
Meet - nrp-cgpo-rys
meet.google.com/nrp-cgpo-rys
A GRAVAR
11:32
Eu
DIVANIZIA DO NASCIMENTO SOUZA
Teresa Cristina Etcheverria
adonai teixeira
Maria Cristina Rosa
Márcio Ponciano
Marilene Mendonça
Rosane Karine
denize souza
Detalhes da reunião
Levantar mão
Apresentar
Digite aqui para pesquisar
11:32
27/01/2021

(4) WhatsApp
Meet - nrp-cgpo-rys
meet.google.com/nrp-cgpo-rys
A GRAVAR
11:33
Eu
DIVANIZIA DO NASCIMENTO SOUZA
Teresa Cristina Etcheverria
adonai teixeira
Marilene Mendonça
Rosane Karine
denize souza
Desligar o microfone (ctrl + d)
Detalhes da reunião
Levantar mão
Apresentar
Digite aqui para pesquisar
11:33
27/01/2021