Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Graduação em Matemática

Representação de Riesz e Separabilidade dos Espaços de Lebesgue Generalizados

Rodrigo Araújo Santos

São Cristóvão - SE
Julho, 2021

Rodrigo Araújo Santos

Representação de Riesz e Separabilidade dos Espaços de Lebesgue Generalizados

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Wilberclay Gonçalves Melo

Universidade Federal de Sergipe

Julho, 2021

Representação de Riesz e Separabilidade dos Espaços de Lebesgue Generalizados

por

Rodrigo Araújo Santos

Área de Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra

Subárea de Conhecimento: Matemática

Especialidade de Conhecimento: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo
(Orientador: DMA-UFS)

Prof. MSc. Ginaldo de Santana Sá
(Primeiro examinador: DMA- UFS)

Prof. Dr. Paulo de Sousa Rabelo
(Segundo examinador: DMA- UFS)

Aos meus pais, minha avó e família.

Agradecimentos

É chegada a hora de agradecer:

A começar, gostaria de agradecer primeiramente a DEUS, por segurar em minha mão ao longo de todo esse percurso, por guiar meus caminhos, minhas escolhas e me encorajar nesse desafio. Obrigado senhor, por me fazer realizar esse sonho.

Aos meus pais: A minha mãe Luciana e ao meu pai Robeilton, sem vocês nada disso seria possível, sei que também não foi fácil para ambos, mas souberam sempre acalmar meu coração e fizeram com que eu acreditasse cada dia mais que daria tudo certo. Obrigado por tanto, se hoje estou alcançando mais essa graça em minha vida, devo tudo a vocês meus amores... como eu amo vocês.

À minha vozinha: Lindalva é sinônimo de humildade, perseverança e muita fé. Obrigado por todos os ensinamentos, incentivos e por rezar por mim. Tenho certeza que isso era o que mais me confortava, mesmo estando tão longe de casa. Te amo vó.

Aos meus irmãos e afilhado: Rafael, Levi e Davi são os tesouros que levo comigo por onde eu estiver. Obrigado por tanto incentivo, por entenderem a distância, mas saibam que sempre estiveram presentes em meu coração.

À minha família: As minhas tias Adriana e Luciene que sempre acreditaram em meu potencial e estiveram comigo. Agradeço ao meu tio Reginaldo pelos conselhos e conversas e ao meu tio Zé Roberto pelo carinho. O meu muito obrigado a todos vocês e aos outros, que nessa caminhada me acompanhou e foram determinantes nesse ciclo.

Aos meus professores no tempo escola: Todos foram muito importantes ao longo da minha vida de estudante, em especial, as professoras Cristiane, Alerrandra, Ceiça e Regina e o professor Wescley. Carrego comigo um pouco de cada um, vocês são demais. Tenho muito orgulho de seguir os passos da profissão e as contribuições de vocês foram essenciais.

Aos meus professores da UFS: Nesta etapa todos vocês foram primordiais em meu crescimento acadêmico. Pude aprender e vivenciar coisas que jamais achei que ia viver dentro de uma universidade. Em especial, meu muito obrigado aos professores, Paulo Rabelo, Wilberclay, Anderson, Evilson, Leandro Favacho, Naldisson, Ivanete, Denize e Georgiane. Levo comigo particularidades de cada um, que certamente será de grande contribuição para minha vida pessoal e profissional.

Ao meu orientador e amigo: Wilberclay, agradeço pela oportunidade de me envolver em projetos de estudo, por todo apoio e paciência na elaboração deste trabalho, você é excepcional.

À banca examinadora do trabalho: A presença de Paulo Rabelo é um privilégio, um ser humano incrível e que sempre me aconselhou da melhor forma possível, é um sentimento enorme que sinto por ti. Bem assim como, meu amigo Ginaldo que eu admiro bastante e é de grande valia ter sua participação neste momento.

Aos meus amigos: Marlon, Diego, Kevin, Charles, Lucas, Mateus, Álvaro (em memória), Daniel, Jefersson e Rafael (Uibai) me deram muitas forças ao longo desses anos e isso só fortaleceu ainda mais nossa amizade. Contem comigo sempre.

À família 2017.1: Agradeço, especialmente, a Rafael, o homem mais coração da turma. Obrigado por sempre se preocupar e dividir comigo momentos marcantes. Obrigado a Ort por todos os momentos juntos, é um pouco durão mas sempre era um dos primeiros a me abraçar quando me sentia triste e isso mudava as situações. Agradeço a Virgínia por todas as ajudas nas matérias e por todos os conselhos, a Dilton por todas as conversas e se dispor sempre a me ajudar, a Cirilo por dividirmos realidades parecidas, se faz de bravo; mas, é uma das melhores pessoas que conheci, a Welton por toda cumplicidade e parceria, a Clesio por todos os ensinamentos e resenhas, a Fernanda por todos os compartilhamentos, a Otávio, Léo, Pietro, Ivan, Jeversson, Ellen, Andrézão, Vitão e Marcos. Vocês foram primordiais nesses anos, foram momentos especiais, muitas risadas e também apuros que a ufs nos proporcionou kkk, tornamo-nos irmãos e a cada dia com vocês eu me senti muito acolhido, vocês são "tops". Amo vocês!

Sou grato a meu amigo Elisson, com toda a certeza é uma das melhores pessoas que já vi, é um verdadeiro irmão de outra mãe, obrigado por me direcionar quando eu me sentia confuso, pelos momentos marcantes, por acreditar em mim, por todas as histórias juntos, nossa parceria é para vida, sócio. A Emmily, minha "cunhas" e amiga, você é demais obrigado por tanto, e a toda a família de vocês. Guardo todos em meu coração com muito amor.

À minha companheira de vida ÉRIKA: ter você ao meu lado foi predominante para conseguir êxito nessa etapa, nossas vidas se conectaram ao longo desse trajeto e confesso que você foi a melhor coisa que me aconteceu. Obrigado por todas as vezes que puxou minha orelha quando precisava, por me aconselhar e estar comigo independentemente de qualquer situação, por não me deixar desistir nos momentos difíceis, por me manter de pé mesmo com tantas adversidades encontradas pelo caminho. Enfim, agradeço por sempre acreditar que

eu seria capaz, mesmo quando eu mesmo duvidei, você é uma mulher incrível e eu tenho a sorte de te ter em meus dias. TE AMO!

Resumo

Os Espaços de Lebesgue usuais L^p são considerados como espaços de Banach de extrema importância na Teoria da Medida, no qual inferimos aplicações para os conceitos e suas propriedades em diversos estudos das Equações Diferenciais e da Análise Matemática, como um todo. Neste trabalho, temos como principal objetivo enunciar e demonstrar o Teorema da Representação de Riez para os Espaços Lebesgue generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ e, além disso, verificar que estes mesmos podem ser classificados como Espaços Métricos Separáveis. Para lograrmos êxito nesta pesquisa, foi necessário adquirir o conhecimento de importantes definições e resultados que foram determinantes ao longo do estudo, sendo valoroso mencionar, a densidade dos conjuntos $C_c(\Omega)$ (constituído das funções reais contínuas, com suporte compacto, em Ω) e $C_c^\infty(\Omega)$ (caracterizado pelas funções reais infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto, em Ω) em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Palavras-chave: Espaços de Lebesgue generalizados; Teorema da Representação de Riesz; Separabilidade dos espaços de Lebesgue generalizados.

Sumário

Introdução

A integral é uma ferramenta imprescindível e poderosa na Análise Matemática. Mais especificamente, a Integral de Riemann é amplamente a mais usada nos cursos de graduação em Ciências Exatas ao redor do mundo e foi desenvolvida em meados do século XIX. Físicos, engenheiros e inúmeros matemáticos utilizam esta integral de maneira confortável e eficaz, já que a Integral de Riemann é uma noção de integração muito acessível e com ampla aplicabilidade. Por outro lado, do ponto de vista da Matemática, tal integral tem limitações bem conhecidas.

Baseado na Teoria da Medida, a Integral de Lebesgue surge com a intenção de generalizar alguns conceitos relacionados à integrabilidade considerada por Riemann e resolver questionamentos antes não solucionados por esta mesma integração. Sendo assim, podemos observar, no estudo da Integral de Lebesgue, alguns resultados importantes tais como: os Teoremas da Convergência Monótona e Dominada. Estas proposições nos auxiliam, por exemplo, em problemas nos quais precisamos ultrapassar o limite sob o sinal da integral. Com isso, fomos motivados a trabalhar com os Espaços de Lebesgue usuais e generalizados, pois estes nos oferecem propriedades de grande valia na Matemática e nas outras Ciências Exatas.

Para ser mais preciso, este é um trabalho de conclusão de curso cujo um dos objetivos principais é enunciar e demonstrar o Teorema da Representação de Riez para os espaços Lebesgue generalizados. Este é um importante resultado da Análise Matemática desenvolvido pelo matemático Marcel Riesz, onde, a partir de 1930, despertou interesse na teoria do pontencial, da qual surgiu o estudo de funções que poderiam servir como aplicações potenciais. Nesta pesquisa este pesquisador fez uso do que chamamos "potenciais generalizados"; mais especificamente, extensões da Integral de Riemann. Em particular, Riesz descobriu o denominado Potencial de Riesz, uma generalização da Integral de Riemann para dimensão maior que um, através de Funcionais Lineares Contínuos.

Vale ressaltar também que, outra meta pricipal neste estudo é mostrar que os espaços Lebesgue generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ podem ser classificados como Espaços Métricos Separáveis. Mais precisamente, provaremos que os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ contêm um subconjunto denso e enumerável por aplicar o famoso Teorema de Stone-Weierstrass que garante a densidade do espaço dos Polinômios como um sbconjunto do espaço das Funções Contínuas definidas em Compactos. A ideia, neste momento, é verificar que a separabilidade dos espaços de Lebesgue usuais $L^p(\Omega)$ pode ser estendida a esse espaço mais geral.

Este estudo consiste de três capítulos; mais especificamente, no primeiro deles reunimos algumas definições e alguns resultados ligados à Análise Matemática e à Álgebra Linear, os quais são essenciais para todo o desenvolvimento deste nosso estudo.

O segundo capítulo apresenta como propósito único exibir alguns conceitos e algumas propriedades dos Espaços de Lebesgue (usuais e generalizados). Podemos destacar, dentre eles, as definições dos Espaços de Lebesgue L^p e $L^{p(x)}(\Omega)$, os Teoremas da Convergência Dominada e Monótona e as Desigualdades de Young e Hölder. Este intuito é fundamental para alcançarmos as metas centrais do nosso trabalho.

No último capítulo, abordamos os principais resultados deste trabalho. Este é dividido em duas seções, onde, na primeira seção, enunciamos e provamos o Teorema da Representação de Riesz para os Espaços de Lebesgue generalizados. Mais precisamente, estabelecemos que cada funcional linear contínuo, definido sobre $L^{p(x)}(\Omega)$, pode ser representado por uma Integral de Lebesgue. Este fato foi comprovado através de um isomorfismo entre os espaços $[L^{p(x)}(\Omega)]'$ e $L^{q(x)}(\Omega)$, fornecido que $[p(x)]^{-1} + [q(x)]^{-1} = 1$, para todo $x \in \Omega$. Já na segunda seção, mostramos a densidade dos conjuntos $C_c(\Omega)$ (constituído das funções reais contínuas, com suporte compacto, em Ω) e $C_c^{\infty}(\Omega)$ (determinado pelas funções reais infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto, em Ω) em $L^{p(x)}(\Omega)$. Por fim, determinamos a densidade e a enumerabilidade de um certo conjunto contido em $L^{p(x)}(\Omega)$. Este fato qualifica tal Espaço de Lebesgue generalizado como um Espaço Métrico Separável.

É importante frisar que a dissertação [6] foi a base para o nosso trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, reuniremos algumas definições e alguns resultados com respeito aos cursos de Espaços Métricos e Álgebra Linear, os quais serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Definições e Notações Básicas

Nesta seção, apresentaremos os conceitos e as notações em referência ao que citamos anteriormente, consultar [1–3, 8, 9, 12, 13] para mais detalhes. A seguir, começamos definindo a enumerabilidade de um conjunto.

Definição 1.1 (Conjunto Enumerável)**.** Um conjunto X diz-se enumerável quando é vazio, ou da forma $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$), ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f é dita uma enumeração dos elementos de X.

Seguidamente, vamos estabelecer o conceito de espaço métrico.

Definição 1.2 (Espaço Métrico)**.** Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ chamado distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y, $z \in M$:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par (M, d), ou simplesmente M, é dito espaço métrico.

O significado de uma sequência em um espaço métrico encontra-se abaixo, juntamente com a sua notação.

Definição 1.3 (Sequências)**.** Uma sequência em um espaço métrico (M, d) é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, e chamar-se-á n-ésimo termo da sequência. Utilizamos a seguinte notação para esta sequência x: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Feito isso, a convergência de sequências em um espaço métrico se encontra abaixo.

Definição 1.4 (Sequência Convergente)**.** Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em M, e converge para $a \in M$, se $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Caso contrário, dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente em M. É importante lembrar que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ significa dizer que dado $\epsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ tem-se que $d(x_n, a) < \epsilon$.

Vejamos agora o conceito de subsequência.

Definição 1.5 (Subsequência)**.** Uma subsequência de $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma restrição da aplicação x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pela notação: $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Caracterizamos um conjunto compacto a seguir.

Definição 1.6 (Conjunto Compacto)**.** Seja M um espaço métrico. Um conjunto $K \subseteq M$ é dito compacto se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$, convergente em K.

A definição para uma sequência de Cauchy em espaços métricos está estabelecida logo abaixo.

Definição 1.7 (Sequência de Cauchy)**.** Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico M é dita de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$, tem-se $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

A seguir, definiremos sequências de funções e, em seguida, veremos o significado de convergência destas mesmas em um espaço métrico.

Definição 1.8 (Sequência de Funções)**.** Uma sequência de funções é uma aplicação que a cada número natural n associa uma função $f_n : X \to M$, onde (M, d) é um espaço métrico e X é um conjunto qualquer. Podemos representar esta sequência de funções por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde f_n é o n-ésimo termo da sequência. Esta sequência de funções converge pontualmente para uma função $f : X \to M$ quando dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n \geq n_0$, tem-se que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Agora, permita-nos caracterizar funções contínuas no contexto de espaços métricos.

Definição 1.9 (Funções Contínuas)**.** Sejam M e N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ em M implique $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ em N.

Neste momento, iremos classificar os pontos aderentes.

Definição 1.10 (Ponto Aderente)**.** Seja M um espaço métrico. Diz-se que um ponto $a \in M$ é aderente ao conjunto $X \subseteq M$ quando este é limite de alguma sequência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.

O fecho de um subconjunto em um espaço métrico é definido abaixo.

Definição 1.11 (Fecho)**.** Seja M um espaço métrico. Chama-se fecho de um conjunto $X \subseteq M$, o conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.

Por consequência, caracteriza-se um conjunto fechado em um espaço métrico.

Definição 1.12 (Conjunto Fechado)**.** Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subseteq M$ diz-se fechado quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X.

Seguidamente, o significado de fronteira é dado abaixo.

Definição 1.13 (Conjunto Fronteira)**.** Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Dizemos que x_0 é um ponto de fronteira de X se, para todo $\epsilon > 0$, a bola aberta $B(x_0, \epsilon) := \{x \in M : d(x, x_0) < M\}$ contém pontos de X e do seu complementar $X^c = M \backslash X$. Denotaremos por ∂X, o conjunto fronteira de X (constituído de todos os pontos de fronteira de X).

Abaixo, caracteriza-se um conjunto compacto em $\mathbb{R}^N$ (este é um exemplo de espaço métrico).

Definição 1.14 (Conjunto Compacto em $\mathbb{R}^N$)**.** Definimos um compacto $K \subseteq \mathbb{R}^N$ como sendo um conjunto fechado e limitado (isto é, $K \subseteq B(0, r)$, para algum $r > 0$).

A seguir, apresentaremos a definição de ponto interior a um conjunto em espaços métricos.

Definição 1.15 (Ponto Interior)**.** Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ diz-se um ponto interior a X quando é o centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se o interior de X em M ao conjunto $\text{int}X$ formado pelos pontos interiores a X.

Através do conceito de ponto interior, podemos estabelecer o significado de conjunto aberto em um espaço métrico.

Definição 1.16 (Conjunto Aberto)**.** Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\text{int}A = A$.

Consideraremos que um conjunto é denso quando satisfaz as seguintes condições.

Definição 1.17 (Densidade)**.** Sejam M um espaço métrico e $Y \subseteq M$. Diz-se que Y é denso em M quando $\overline{Y} = M$.

O significado de conjunto separável está em seguida.

Definição 1.18 (Conjunto Separável)**.** Seja M um espaço métrico. M é dito separável se possui um subconjunto Y enumerável e denso em M.

No que segue, abordaremos os espaços das funções contínuas com o suporte compacto.

Definição 1.19 (Conjunto $C_c(\Omega)$)**.** O espaço das funções contínuas, com suporte compacto, é definido por:

$$C_c(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua e supp} f \text{ é compacto}\},$$

onde, $\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ (suporte de f). Além disso, é sabido que $f(x) = 0$, para todo $x \notin \text{supp} f$.

Também trabalharemos com o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, com o suporte compacto.

Definição 1.20 (Conjunto $C_c^\infty(\Omega)$)**.** O espaço das funções infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto, é definido por:

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é infinitamente derivável e supp} f \text{ é compacto}\}.$$

Representaremos abaixo o padrão de um "Mollifier" (ou regularizador).

Definição 1.21 (Mollifier)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) um conjunto aberto. Dado $\epsilon > 0$, definimos

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\},$$

onde $d(x, \partial\Omega) := \inf\{d(x, y) : y \in \partial\Omega\}$ (d é a métrica Euclidiana, ver a definição desta aplicação em [9]). Com isso, considere as seguintes definições:

i) Defina $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por:

$$J(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & se \ \|x\| < 1; \\ 0, & se \ \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1$.

ii) Para cada $\epsilon > 0$, a aplicação

$$J_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} J\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

é chamada mollifier. Não é difícil ver que $J_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $J_\epsilon \geq 0$, $J_\epsilon = 0$ fora de $B(0, \epsilon)$ e que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x)dx = 1 \ \text{ e } \ \text{supp} J_\epsilon \subseteq B(0, \epsilon).$$

Agora, representaremos uma forma de suavizar uma função localmente integrável.

Definição 1.22 (Suavização)**.** Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável, ou seja, integrável em conjuntos compactos de Ω. Defina a seguinte aplicação:

$$\varphi_\epsilon := J_\epsilon * f \text{ em } \Omega_\epsilon,$$

onde J_ϵ está dada na Definição 1.21. Isto é,

$$\varphi_\epsilon(x) = \int_\Omega J_\epsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} J_\epsilon(y)f(x-y)dy, \quad \forall x \in \Omega_\epsilon.$$

Não é difícil ver que $\text{supp}\varphi_\epsilon \subseteq \text{supp}f + B[0,\epsilon]$, onde $B[0,\epsilon] = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq \epsilon\}$ é a bola fechada de centro 0 e raio ϵ.

Abaixo, encontra-se apresentado o conceito de um espaço vetorial normado.

Definição 1.23 (Espaço Vetorial Normado)**.** Dizemos que $(V, +, \cdot)$, ou simplesmente V, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde V é um conjunto, $+ : V \times V \to \mathbb{R}$ (adição) e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (multiplicação por escalar) são aplicações dadas por $+(u,v) := u+v$ e $\cdot(\alpha, u) = \alpha u$ ou $\alpha \cdot u$, respectivamente, quando as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$;

iii) Existe em V um elemento neutro para essa adição, o qual será denotado por 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u$;

iv) Para cada elemento $u \in V$, existe um vetor denotado por $(-u)$ tal que $u + (-u) = 0$;

v) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall u \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall u \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

vi) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

vii) $1 \cdot u = u$, $\forall u \in V$.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$;

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$;

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$,

é chamada norma em V. O par $(V, \|\cdot\|)$, ou simplesmente V, é denominado espaço vetorial normado V sobre $\mathbb{R}$. Observe que, a aplicação $d(x, y) := \|x - y\|$ é uma métrica em V e, assim, (V, d) é um espaço métrico.

Abaixo, apresentaremos a definição de subespaço vetorial.

Definição 1.24 (Subespaço Vetorial)**.** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um subespaço vetorial de V sobre $\mathbb{R}$ é um subconjunto $W \subseteq V$ tal que

i) $0 \in W$;

ii) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

iii) $\alpha \in \mathbb{R}, u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$.

Caso $(V, \|\cdot\|)$ seja um espaço vetorial normado, dizemos que $(W, \|\cdot\|_W)$, ou simplesmente W, é um subespaço vetorial normado de $(V, \|\cdot\|)$, onde $\|w\|_W = \|w\|$ para todo $w \in W$.

A seguir, determinaremos o significado de uma transformação linear.

Definição 1.25 (Transformação Linear)**.** Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : U \to V$ é uma transformação linear se as seguintes afirmações são válidas:

a) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in U$.

b) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$.

Quando $U = V$, T é dita operador linear.

No que segue, estabeleceremos a definição de um isomorfismo.

Definição 1.26 (Isomorfismo)**.** Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma transformação linear e bijetora $T : U \to V$ é dita um isomorfismo. Neste caso, dizemos que os espaços U e V são isomorfos.

Feito isso, definiremos o núcleo e imagem de uma transformação linear.

Definição 1.27 (Núcleo e Imagem)**.** Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Indica-se por $\operatorname{Ker}(T)$ e denomina-se núcleo de T o seguinte subespaço vetorial de U:

$$\operatorname{Ker}(T) = \{u \in U;\, T(u) = 0\}.$$

O espaço vetorial

$$T(U) = \operatorname{Im}(T) = \{Tu \in V :\, u \in U\}$$

é denominado imagem de T.

A seguir, definiremos um funcional linear.

Definição 1.28 (Funcional Linear)**.** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um funcional linear sobre V é uma aplicação $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Com isso, podemos definir o que significa um funcional linear e limitado.

Definição 1.29 (Funcional Linear Limitado)**.** Seja V um espaço vetorial normado. Um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ é dito limitado se existe $C > 0$ tal que

$$|f(v)| \leq C\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Neste caso, a norma de f é dada por:

$$\|f\| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \left\{ \frac{|f(v)|}{\|v\|} \right\}.$$

Estamos preparados para a definição de uma transformação linear limitada.

Definição 1.30 (Transformação Linear Limitada)**.** Sejam U e V espaços normados e $T :$ $U \to V$ uma transformação linear. Dizemos que T é limitada se existe um número real C

tal que

$$\|T(u)\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in U.$$

Neste caso, a norma de T é dada por:

$$\|T\| = \sup_{\substack{u\in U \\ u\neq 0}} \left\{ \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \right\}.$$

Agora, vamos apresentar o conceito dos espaços dual e bidual.

Definição 1.31 (Dual e Bidual)**.** Seja E um espaço vetorial. Então, o espaço E^* constituído de todas os funcionais lineares $f : E \to \mathbb{R}$ é dito espaço dual (algébrico) de E. Se E um espaço vetorial normado, definimos E', chamado dual topológico de E, como sendo:

$$E' = \{f \in E^* : \text{f é contínua}\}.$$

O bidual (topológico) de E é o espaço $E'' = [E']'$.

Permita-nos apresentar o que é um espaço de Banach.

Definição 1.32 (Espaço de Banach)**.** Um espaço vetorial normado X é chamado Espaço de Banach, se toda sequência de Cauchy em X (como espaço métrico) é convergente.

Por fim, daremos significado a um espaço ser chamado reflexivo.

Definição 1.33 (Espaço Reflexivo)**.** Seja E um espaço de Banach e $j : E \longrightarrow E^{''}$ uma aplicação injetiva de E em $E^{''}$. O espaço E é considerado reflexivo se j for sobrejetiva, isto é, $j(E) = E^{''}$. Esta aplicação j é dita injeção canônica.

1.2 Resultados Básicos

Nesta seção, agregaremos alguns resultados básicos, com relação ao que citamos outrora, consultar [1–3, 8, 9, 12, 13] para mais detalhes. A seguir, exibiremos resultados importantes no que se refere a enumerabilidade.

Proposição 1.1. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. □

Abaixo, apresentaremos como criar um conjunto enumerável, a partir de uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis.

Proposição 1.2. *A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. □

Em seguida, abordaremos um exemplo fundamental.

Proposição 1.3. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. □

Aqui está exposto o resultado que nos garante a unicidade de limites.

Proposição 1.4. *Uma sequência em um espaço métrico qualquer não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Para detalhes da prova, ver [9]. □

Agora, enunciaremos o famoso Teorema do Sanduíche, o qual usaremos à frente.

Teorema 1.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande, então $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. □

Abaixo, identificaremos que o fecho de um conjunto é um conjunto fechado.

Proposição 1.5. *Seja M um espaço métrico. É verdade que $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$, para todo $X \subseteq M$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [9]. □

Seguindo, diremos que o conjunto fronteira é sempre um conjunto fechado.

Proposição 1.6. *Seja M um espaço métrico. Para todo conjunto $X \subseteq M$, então ∂X é fechado.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. $\square$

Traremos abaixo um importante resultado que afirma que uma função contínua, definida em um compacto, é sempre limitada.

Teorema 1.2 (Teorema de Weierstrass). *Se $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, então toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [12]. $\square$

Prontamente, relacionaremos abaixo, a distância entre dois conjuntos, sendo um compacto e o outro fechado.

Proposição 1.7. *Se A e B são conjuntos disjuntos e não vazios em um espaço métrico M, com A compacto e B fechado, então $d(A, B) > 0$, onde $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [9]. $\square$

A proposição a seguir nos informa que a soma de dois conjuntos compactos (em um epaço métrico qualquer) é um conjunto do mesmo tipo.

Proposição 1.8. *Sejam X e Y conjuntos compactos em um espaço métrico M. Então, $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ é compacto.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [9, 12]. $\square$

Nesse momento, apresentaremos resultados que nos garantem a injetividade de uma transformação linear.

Proposição 1.9. *Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetiva se e, somente se,* $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [2]. $\square$

Veremos uma proposição que relaciona continuidade com limitação.

Proposição 1.10. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *T é contínua $\Leftrightarrow$ T é limitada;*

ii) *T é contínua em $x_0 \in X \Leftrightarrow T$ é contínua.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [8]. $\square$

Segue as proposições direcionadas aos espaços reflexivos.

Proposição 1.11. *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, seu espaço dual $E^{'}$ for também reflexivo.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [1, 8]. $\square$

Aqui, usaremos a relação existente entre isomorfismo e reflexividade.

Proposição 1.12. *Considere que o espaço vetorial normado U é isomorfo ao espaço reflexivo V, então U também é um espaço reflexivo.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [1, 8]. $\square$

Neste momento, abordaremos um resultado, bastante relevante no que corresponde à densidade entre conjuntos.

Teorema 1.3. *Seja E um espaço vetorial normado. Seja $F \subseteq E$ um subespaço vetorial. Se para todo $f \in E'$, tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$, tivermos $f = 0$, então $\overline{F} = E$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [1, 8]. $\square$

Capítulo 2

Os Espaços de Lebesgue

No presente capítulo, trabalharemos com definições e proposições dos espaços de Lebesgue, fundamentais para os objetivos do nosso trabalho. Quanto a isso, estudaremos os espaços usuais e generalizados do mesmo, a fim de associar as propriedades adquiridas aos resultados finais.

2.1 Definições e Notações dos Espaços de Lebesgue

Nesta seção, reuniremos algumas definições e notações inerentes a um curso introdutório de Medida e Integração, as quais serão de grande destaque para o nosso estudo, para mais detalhes, consultar [5, 14, 16]. Deste modo, iniciaremos com a definição de uma σ-álgebra.

Definição 2.1 (σ-álgebra)**.** Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\eth$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições:

i) $\emptyset, X \in \eth$;

ii) Se $A \in \eth$, então $A^c := X \backslash A \in \eth$;

iii) Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\eth$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \eth$.

O significado de espaço mensurável está abaixo.

Definição 2.2 (Espaço Mensurável)**.** O par $(X, \eth)$ é denominado espaço mensurável, onde X é um conjunto não vazio qualquer e $\eth$ é uma σ-algebra de X.

Ademais, podemos estabelecer as caracterizações envolvendo algumas funções especiais para o nosso trabalho.

Definição 2.3 (Função Real Mensurável)**.** Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço mensurável, é dita $\eth$-mensurável (ou simplesmente mensurável) se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \eth$.

Agora, definiremos como decompor uma função em suas partes positiva e negativa.

Definição 2.4 (Partes Positiva e Negativa)**.** Sejam X um conjunto qualquer não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos as partes positiva e negativa de f, respectivamente, por funções não negativas $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \quad \textbf{\textit{e}} \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}, \quad \forall x \in X.$$

Neste instante, podemos classificar uma aplicação como uma função mensurável na reta estendida $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Definição 2.5 (Função Mensurável)**.** Seja $(X, \eth)$ um espaço mensurável. Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\eth$-mensurável (ou mensurável) se

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \eth,$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto de todas as funções $\eth$-mensuráveis é denotado por $M = M(X, \eth)$.

Por conseguinte, apresentaremos as propriedades que uma medida deve satisfazer.

Definição 2.6 (Medida)**.** Seja $(X, \eth)$ um espaço mensurável. Uma função $\mu : \eth \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita uma medida se satisfaz as seguintes condições:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu(E) \geq 0, \quad \forall E \in \eth$;

iii) Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos disjuntos de $\eth$, então $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Agora, estamos prontos para entender o que chamamos espaço de medida.

Definição 2.7 (Espaço de Medida)**.** Um espaço de medida é uma tripla $(X, \eth, \mu)$ consistindo de um conjunto X, uma σ-álgebra $\eth$ de X e uma medida μ definida em $\eth$.

Veremos agora como definir uma medida exterior.

Definição 2.8 (Medida Exterior)**.** Seja X um conjunto não vazio. Uma aplicação $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$, onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X, que satisfaz

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B), \quad \text{se } A \subseteq B \subseteq X$;

iii) $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n), \text{ se } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P(X)$,

é chamada medida exterior sobre X.

O significado de célula em $\mathbb{R}^N$, onde $N \in \mathbb{N}$, será fornecido na sequência.

Definição 2.9 (Célula)**.** Dizemos que $I \subseteq \mathbb{R}^N$, com $N \in \mathbb{N}$, é uma célula se $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_N$, onde $I_j \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo limitado em $\mathbb{R}$ para todo $j = 1, 2, ..., N$.

Abaixo, definimos o volume de uma célula.

Definição 2.10 (Volume de Células)**.** Seja $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_N \subseteq \mathbb{R}^N$ com $N \in \mathbb{N}$ uma célula. Definimos o volume N-dimensional de I por

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot ... \cdot (b_N - a_N),$$

onde $a_j \leq b_j$ são os extremos do intervalo I_j $(j = 1, 2, 3, ..., N)$.

Determinaremos agora a definição do espaço de medida de Lebesgue $\mathbb{R}^N$, com $N \in \mathbb{N}$.

Definição 2.11 (Espaço de Lebesgue)**.** A σ-álgebra $\eth$ constituída de elementos $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tais que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \quad \forall A \in \mathbb{R}^N,$$

é denominada σ-álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$, onde μ^* é a medida exterior

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n); E \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n, (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N \text{ é uma sequência de células} \right\},$$

para todo $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Aqui $E \in \eth$ é dito Lebesgue-mensurável em $\mathbb{R}^N$ e a aplicação $|\cdot| = \mu^*|_{\eth}$: $\eth \to \bar{\mathbb{R}}$ é chamada medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$. Aqui $(\mathbb{R}^N, \eth, |\cdot|)$ é o espaço de Lebesgue $\mathbb{R}^N$.

A seguir, exibiremos a identificação entre duas funções em quase toda parte.

Definição 2.12 (Igualdade q.t.p.). Sejam X um conjunto qualquer não vazio e $\eth$ uma σ-álgebra em X. Dizemos que duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são iguais em quase toda parte de X, e denotamos por $f = g$ q.t.p. em X, se existe um conjunto $N \in \eth$, com $\mu(N) = 0$ (N é dito ter medida nula) tal que

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in N^c.$$

Posto isso, o conceito da convergência de funções em quase toda parte está abaixo.

Definição 2.13 (Convergência q.t.p.). Sejam X um conjunto qualquer não vazio e $\eth$ uma σ-álgebra em X. Dizemos que uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções, definidas sobre X, converge em quase toda parte de X, e denotamos $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ q.t.p. em X se existe um conjunto $N \in \eth$, com $\mu(N) = 0$, tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in N^c.$$

A seguir definiremos o significado de carga.

Definição 2.14 (Carga). Sejam X um conjunto qualquer e $\eth$ uma σ-álgebra em X. Uma função $\lambda : \eth \to \mathbb{R}$ é dita uma carga caso satisfaça as seguintes condições:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$;

ii) Se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\eth$, então $\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

Posto isto, retratamos abaixo as funções simples.

Definição 2.15 (Funções Simples). Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é simples se esta assume apenas um número finito de valores em sua imagem. Se $(X, \eth)$ é um espaço mensurável, então uma função φ mensurável e simples pode ser representada na sua forma padrão como abaixo:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ são distintos dois a dois e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \eth$; sendo que, $X = \cup_{j=1}^{n} E_j$ e $E_1, ..., E_n$ são disjuntos dois a dois.

A integração de Lebesgue de uma função simples está exposta abaixo.

Definição 2.16 (Integral de Lebesgue de Funções Simples)**.** Seja φ uma função mensurável simples em $M^+ = M^+(X, \eth)$ dada através de sua representação padrão. Definimos a integral de φ com relação a μ por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Agora, determinaremos as definições referentes a integral de Lebesgue para funções mensuráveis não negativas.

Definição 2.17 (Integral de Lebesgue)**.** Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida e $f \in M^+$. Definimos a integral de f com relação a μ por

$$\int f d\mu = \sup \int f \varphi d\mu,$$

onde o supremo é considerado sobre todas as funções simples mensuráveis $\varphi \in M^+$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. Além disso, se $E \subseteq X$ é mensurável, então $f\chi_E \in M^+$ e definimos a integral de f sobre E com relação a μ por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu.$$

Abaixo, podemos dividir as funções integráveis em partes positiva e negativa, da seguinte forma.

Definição 2.18. Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. A coleção de funções integráveis $L = L(X, \eth, \mu)$ consiste de todas as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$, tais que as partes positiva f^+ e negativa f^- de f tem integrais finitas, com respeito a μ. Neste caso, definimos a integral de f, com relação a μ, por:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Se $E \in \eth$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Definiremos os espaços de Lebesgue usuais L^p.

Definição 2.19 (Espaço de Lebesgue L^p)**.** Sejam $0 < p < \infty$ um número real e $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$L^p = L^p(X, \eth, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

é chamado espaço de Lebesgue.

Prontamente, estará exposto abaixo o que significa convergir no espaço de Lebesgue L^p.

Definição 2.20 (Convergência em L^p)**.** Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p$ e $f \in L^p$, com $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, e converge para f, se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso, denotamos esta convergência por $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, onde

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p,$$

é uma norma sobre L^p.

Definiremos o espaço de Lebesgue usual L^∞ logo abaixo.

Definição 2.21 (Espaço de Lebesgue L^∞)**.** Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. O espaço

$$L^\infty = L^\infty(X, \eth, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \, \text{mensurável} : f \text{ é limitado q.t.p. em } X \}$$

é chamado espaço de Lesbesgue L^∞. Para cada $f \in L^\infty$, definimos a norma $\| \cdot \|_\infty$ sobre L^∞ pondo:

$$\|f\|_\infty = \inf\{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ q.t.p. em } X \}.$$

Por fim, f é dita uma função essencialmente limitada.

Estabeleceremos o conceito de função localmente integrável.

Definição 2.22 (Funções Localmente Integráveis)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto contido em Ω.

Estamos prontos para definir os espaços de Lebesgue generalizados.

Definição 2.23 (Espaços de Lebesgue Generalizados)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. O espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ é definido por:

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geq 1$ em Ω. Neste momento, estamos considerando o espaço de medida de Lebesgue $\mathbb{R}^N$.

Abaixo definiremos uma aplicação, denominada modular, que nos ajuda a entender melhor a integral definida acima.

Definição 2.24 (Aplicação Modular)**.** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ mensurável. Definimos o conjunto

$$L^\infty_+(\Omega) = \{ u \in L^\infty(\Omega) : \inf \operatorname{ess} u \geq 1 \},$$

onde $\inf \operatorname{ess} u := \sup\{a \geq 0 : |u(x)| \geq a \text{ em q.t.p. de } \Omega\}$. Além do mais, para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx, \;\; p^- = \inf \operatorname{ess} p \;\text{ e }\; p^+ = \sup \operatorname{ess} p,$$

onde $\sup \operatorname{ess} p := \inf\{a \geq 0 : |p(x)| \leq a \text{ em q.t.p. de } \Omega\}$.

Para finalizar, veremos a definição de uma norma para os espaços de Lebesgue generalizados.

Definição 2.25 (Norma em $L^{p(x)}$)**.** A aplicação $\| \cdot \|_{p(x)} : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, para $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definida por

$$\|u\|_{p(x)} := \inf\{\lambda \geq 0; \rho(\lambda^{-1}u) \leq 1\}, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega),$$

é uma norma em $L^{p(x)}(\Omega)$ (para mais detalhes, ver [15]).

2.2 Resultados Importantes sobre Espaços de Lebesgue

Nesta seção, reuniremos alguns resultados vistos em um curso introdutório de Medida e Integração, que serão de grande relevância para nossos objetivos principais, consultar [5, 6, 14, 16] para mais detalhes.

Assim sendo, começaremos com as propriedades das integrais de Lebesgue.

Proposição 2.1. *Seja $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) *Se φ é uma função simples em $M^+(X, \eth)$ e $c \geq 0$, então*

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu; \tag{2.1}$$

b) *Se φ e ψ são duas funções simples em $M^+(X, \eth)$, então*

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu; \tag{2.2}$$

c) *A aplicação λ definida por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu, \quad \forall E \in \eth,$$

é uma medida em $\eth$.

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. $\square$

Abaixo listaremos algumas propriedades elementares para integrais de Lebesgue de funções mensuráveis não negativas.

Proposição 2.2. *Sejam $(X, \eth, \mu)$ um espaço de medida, $f, g \in M^+(X, \eth)$ e $c \geq 0$. Então, são verdadeiros os seguintes itens:*

a) *Se $f \leq g$, temos que*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

b) *Se* $E, F \in \eth$, *com* $E \subseteq F$, *temos que*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu;$$

c) *Vale a igualdade abaixo:*

$$\int c f d\mu = c \int f d\mu;$$

d) *A igualdade abaixo vale:*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

e) *Se* $\lambda : \eth \to \overline{\mathbb{R}}$ *é dada por:*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \eth,$$

então λ *é uma medida.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

A seguir, iremos garantir as propriedades mais básicas para a integral de Lebesgue de funções integráveis.

Teorema 2.1. *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* f, g *funções integráveis, então* $\alpha f, f+g$ *são integráveis. Além disso,*

a) $\displaystyle\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu;$

b) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$

c) $\displaystyle\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

Um dos resultados mais importantes envolvendo convergência e integral de Lebesgue será enunciado a seguir.

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\eth)$ que converge para f, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

O lema a seguir é um importante resultado para a teoria da medida.

Teorema 2.3 (Lema de Fatou)**.** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M^+(X,\eth)$, então*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14].

□

Dizemos que para uma função ser nula em quase toda parte é necessário e suficiente que a sua integral seja nula também.

Proposição 2.3. *Suponha que $f \in M^+$. Então, $f(x) = 0$ em quase toda a parte de X se, e somente se, $\int f d\mu = 0$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

Abaixo, enunciaremos um dos principais teoremas a respeito de integral de Lebesgue.

Teorema 2.4 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \le g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

Abaixo, determinaremos algumas propriedades dos mollifiers.

Teorema 2.5. *Sejam φ_ϵ dada na Definição 1.22, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função e estenda esta aplicação através da definição $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então $\varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;*

ii) *Se $f \in C(\Omega)$ e $G \Subset \Omega$ (ou seja, $\overline{G} \subseteq \Omega$ e $\overline{G}$ é compacto), então $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \varphi_\epsilon = f$ uniformemente em G;*

iii) *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\operatorname{supp} f \Subset \Omega$, então $\varphi_\epsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, caso $0 < \epsilon < d(\operatorname{supp} f, \partial\Omega)$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [4]. □

No resultado a seguir, veremos uma maneira de provar quando uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$ é nula.

Teorema 2.6 (Lema de Du Bois-Reymond)**.** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int u(x)f(x)dx = 0, \quad \forall f \in C^\infty_c(\Omega),$$

então, $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [1]. □

O teorema a seguir é um importante resultado que afirma que toda função real contínua, cujo domínio é um compacto, pode ser aproximada uniformemente por polinômios.

Teorema 2.7 (Teorema da Aproximação de Stones-Weierstrass)**.** *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}^N$ um compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : K \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_{L^\infty(K)} < \epsilon$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [9]. □

Abaixo, estará exposto alguns dos principais resultados relacionados aos espaços de Lebesgue Generalizados.

Proposição 2.4. *Seja* $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$. *Então,*

$$\|u\|_{p(x)} = a \; se, e\, somente\, se, \; \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Demonstração. A prova está dada em [6]. □

As proposições abaixo nos garantem algumas propriedades para as funções definidas em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposição 2.5. Para todo $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tem-se que

(a) $\rho(u) = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$;

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$;

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$, *ou seja,* ρ *é uma função convexa;*

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}[\rho(u) + \rho(v)]$;

(e) *Se* $\lambda > 1$, *então*

$$\lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

e se $0 < \lambda < 1$, *temos*

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u).$$

(f) *Para cada* $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, *a aplicação* $\lambda \mapsto \rho(\lambda u)$ *é uma função crescente, contínua e convexa em* $[0, \infty)$.

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [15].

□

A proposição a seguir relaciona a norma $\|\cdot\|_{p(x)}$ com a aplicação modular ρ.

Proposição 2.6. *Seja* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. *Então, são válidas as seguintes afirmações:*

i) $\|u\|_{p(x)} \leq 1$ ($= 1$ *ou* > 1, *respectivamente*) *se, e somente se,* $\rho(u) < 1$ ($= 1$ *ou* > 1, *respectivamente*)*;*

ii) *Se* $\|u\|_{p(x)} > 1$*, então* $\|u\|_{p(x)}^{p-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p+}$*;*

iii) *Se* $\|u\|_{p(x)} < 1$*, então* $\|u\|_{p(x)}^{p+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p-}$*.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [15]. □

A convergência nos espaços de Lebesgue generalizados pode ser analisada através da norma $\|\cdot\|_{p(x)}$ ou da aplicação modular ρ.

Proposição 2.7. *Sejam* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$*. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$*;*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$*;*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [15]. □

A seguir, exibiremos algumas desigualdades que contribuem para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.8 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $A, B \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (p *e* q *são ditos expoentes conjugados*)*. Então, é válida a seguinte desigualdade:*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

A igualdade é válida se, e somente se, $A^p = B^q$*.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [14]. □

Prontamente, o resultado a seguir nos garante a desigualdade triangular em espaços de Lebesgue Generalizados.

Teorema 2.9. *É verdade que*

$$\|u\|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(\lambda^{-1}u) \leq 1\}$$

é uma norma em $L^{p(x)}(\Omega)$*. Mais precisamente, sejam* $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. As seguintes afirmações são válidas:*

(i) $\|u\|_{p(x)} \geq 0$;

(ii) $\|u\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

(iii) $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha|\|u\|_{p(x)}$;

(iv) [*Desigualdade de Minkowski*]*:* $\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$.

Demonstração. A prova está dada em [15]. □

Neste momento, podemos enunciar a Desigualdade de Hölder em espaços de Lesbesgue generalizados.

Teorema 2.10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $p^- > 1$ *e* $q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tais que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$*, então*

$$\Big| \int_\Omega u(x)v(x)dx \Big| \leq \left[\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right] \|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}.$$

Demonstração. A prova está dada em [15]. □

No que segue, apresentaremos mais alguns resultados relevantes sobre os espaços de Lebesgue generalizados.

Proposição 2.8. $L^{p(x)}(\Omega)$ *é um espaço vetorial normado, por considerar a norma* $\|\cdot\|_{p(x)}$*.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [6].

□

Abaixo, identificaremos o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ como sendo um espaço de Banach.

Teorema 2.11. *É verdade que $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, por considerar a norma $\|\cdot\|_{p(x)}$.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [7]. $\square$

Por fim, o resultado que garante que o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo estará enunciado logo abaixo.

Teorema 2.12. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

Demonstração. A prova deste resultado se encontra em [7]. $\square$

Capítulo 3

Representação de Riesz e Separabilidade de $L^{p(x)}(\Omega)$

Neste capitulo, abordaremos os principais resultados deste trabalho e, deste modo, alcançaremos os objetivos primordiais para o nosso estudo. A começar, enunciaremos e provaremos o Teorema da Representação de Riez para o espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$, seguidamente demonstraremos a densidade dos espaços das funções continuas com o suporte compacto $C_c(\Omega)$ e das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto $C_c^{\infty}(\Omega)$, respectivamente, em $L^{p(x)}(\Omega)$. Para finalizar, mostraremos que o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável.

3.1 O Teorema da Representação de Riez para o Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, atingiremos um dos objetivos principais do presente trabalho: provar o Teorema da Representação de Riesz para os espaços de Lebesgue generalizados. Mais precisamente, será possível identificar que cada funcional linear contínuo definido em $L^{p(x)}(\Omega)$ pode ser representado "concretamente" como uma integral de Lebesgue. Este fato será comprovado através de um isomorfismo entre o espaço dual $[L^{p(x)}(\Omega)]'$ e o espaço $L^{q(x)}(\Omega)$, fornecido que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, para todo $x \in \Omega$.

Teorema 3.1 (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tais que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Então, dado $f \in [L^{p(x)}(\Omega)]'$ existe um único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Primeiramente definimos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ L^{q(x)}(\Omega) & \longrightarrow & [L^{p(x)}(\Omega)]' \\ v & \longmapsto & T_v : L^{p(x)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad u \quad \longmapsto \quad \langle T_v, u\rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx, \end{array} \tag{3.2}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o par de dualidade (ou seja, $\langle T_v, u\rangle = T_v(u)$ para todo $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$).

Nosso interesse, agora, é provar que T é um operador linear, limitado, injetivo e que $E = T(L^{q(x)}(\Omega))$ é um subespaço vetorial fechado de $[L^{p(x)}(\Omega)]'$. Primeiramente, veja que a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 2.10) implica que

$$|\langle T_v, u\rangle| = \left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \left[\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right] \|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)},$$

para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Logo, T está bem definida (pois, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$). Agora escolha $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$ de tal forma que

$$|\langle T_v, u\rangle| \leq C\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}, \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega). \tag{3.3}$$

Por outro lado, a linearidade de T segue diretamente das propriedades da integral de Lebesgue. Como a norma de T_v é definida por

$$\|T_v\| = \sup_{u \neq 0} \left\{ \frac{|\langle T_v, u\rangle|}{\|u\|_{p(x)}} \right\}, \quad \forall v \in L^{q(x)}(\Omega), \tag{3.4}$$

temos, por (3.3), que

$$\|T(v)\| := \|T_v\| \leq C\|v\|_{q(x)}, \quad \forall v \in L^{q(x)}(\Omega). \tag{3.5}$$

Por conseguinte, $\|T\| \leq C$, onde $\|T\| = \sup\limits_{v\neq 0}\left\{\dfrac{\|T(v)\|}{\|v\|_{q(x)}}\right\}$. Com isso, mostramos que T é limitado. Sendo assim, pela Proposição 1.10, podemos concluir que T é uma aplicação contínua.

Provaremos agora que T é injetivo. Para isso, considere $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ de modo que $\|v\|_{q(x)} = a > 0$ e a função

$$u_0(x) = \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)-1} \operatorname{sgn} v(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.6}$$

sendo sgn a função sinal, isto é,

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0; \\ 0, & \text{se} \quad t = 0; \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

É verdade que $u_0 \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\|u_0\|_{p(x)} = 1$. Com efeito, é fácil ver que

$$\int_\Omega |u_0(x)|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{[q(x)-1]p(x)} dx. \tag{3.7}$$

Ademais, por (3.1), podemos escrever

$$q(x) = [q(x)-1]\, p(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Aplicando (3.8) em (3.7), temos que

$$\int_\Omega |u_0(x)|^{p(x)} dx = \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)} dx.$$

Como um resultado, chegamos a

$$\int_\Omega |u_0(x)|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)} dx =: \rho_q\left(\frac{v}{a}\right), \tag{3.9}$$

onde

$$\rho_q(v) := \int_\Omega |v(x)|^{q(x)} dx.$$

Além disso, lembre que $\|v\|_{q(x)} = a$. Com isso, usando a Proposição 2.4, podemos escrever

$$\int_\Omega |u_0(x)|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)} dx = \rho_q\left(\frac{v}{a}\right) = 1 < \infty. \tag{3.10}$$

Isso significa que $u_0 \in L^{p(x)}(\Omega)$. Além do mais, é fato que

$$\rho_p(u_0) := \int_\Omega |u_0(x)|^{p(x)}\, dx = 1.$$

Ou seja, encontramos a igualdade $\rho_p(u_0) = 1$. Aplicando a Proposição 2.6 i), deduzimos que $\|u_0\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = 1$. Além disso, observe que, por (3.6) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} T_v(u_0) &= \int_\Omega u_0(x)v(x)dx = \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)-1} |v(x)|dx \\ &= a\int_\Omega \left|\frac{v(x)}{a}\right|^{q(x)} dx = a, \end{aligned}$$

Como consequência, resulta que $T_v(u_0) = a$, com $u_0 \in L^{p(x)}(\Omega)$. De início, consideramos que $\|v\|_{q(x)} = a$. Por isso, concluímos que $T_v(u_0) = a = \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$. Portanto, inferimos que

$$\|T_v\| \geq |T_v(u_0)| = \|v\|_{q(x)}.$$

Sendo assim, temos que

$$\|v\|_{q(x)} \leq \|T(v)\|, \quad \forall v \in L^{q(x)}(\Omega). \tag{3.11}$$

Como T é linear, segue que $v = 0$ também satisfaz a desigualdade acima (pois, $T(0) = 0$). Deste modo, por (3.5) e (3.11), tem-se que

$$\|v\|_{q(x)} \leq \|T(v)\| \leq C\|v\|_{q(x)}, \quad \forall v \in L^{q(x)}(\Omega). \tag{3.12}$$

Agora, considere que $v \in \operatorname{Ker} T$. Isso significa que $T(v) = 0$. Vamos aplicar a Proposição 1.9; sendo assim, usando esta igualdade em (3.12), podemos escrever $\|v\|_{q(x)} \leq \|0\| = 0$. Consequentemente, obtém-se $\|v\|_{q(x)} = 0$. Isso implica que, $v = 0$. Portanto, deduzimos que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Com isso, T é injetivo.

Estamos interessados, agora, em mostrar que $E = T(L^{q(x)}(\Omega))$ é um subespaço fechado de $[L^{p(x)}(\Omega)]'$. Com efeito, assuma que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0. \tag{3.13}$$

Observe que $u_n = Tv_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{q(x)}(\Omega)$. Ademais, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $[L^{p(x)}(\Omega)]'$; logo, esta sequência é de Cauchy em $[L^{p(x)}(\Omega)]'$. Com isso, por definição, temos que

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Além do mais,

$$\lim_{m,n\to\infty} \|Tv_n - Tv_m\| = \lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0. \tag{3.14}$$

Em contrapartida, por (3.12), e sabendo que T é linear, inferimos que

$$\|v_n - v_m\|_{q(x)} \leq \|T(v_n - v_m)\| = \|T(v_n) - T(v_m)\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Aplicando o limite, quando $n, m \to \infty$, e (3.14) na desigualdade (3.15), chegamos a

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_n - v_m\|_{q(x)} = 0.$$

Isso significa que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{q(x)}(\Omega)$. Sabemos que $L^{q(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach (ver Teorema 2.11); logo, existe $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{q(x)} = 0.$$

Como sabemos que T é uma aplicação contínua, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|Tv_n - Tv\| = 0.$$

Porém, por (3.13), deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|Tv_n - u\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Sendo assim, pela unicidade de limites (ver Proposição 1.4), inferimos que $Tv = u$. Logo, $u \in T(L^{q(x)}(\Omega)) = E$. Consequentemente, $E = T(L^{q(x)}(\Omega))$ é um subespaço vetorial fechado de $[L^{p(x)}(\Omega)]'$.

Vamos mostrar que T é sobrejetivo. Para este fim, basta mostrar que E é denso em $[L^{p(x)}(\Omega)]'$ (desde que, E é fechado). Isto pode ser verificado através do Teorema 1.3. Sabendo que $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo (ver Teorema 2.12) pois $p^- > 1$, a identificação $[L^{p(x)}(\Omega)]'' \equiv L^{p(x)}(\Omega)$ é válida (através da injeção canônica que define espaços reflexivos, isto é, $j_f(g) = g(f)$, para todo $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $g \in [L^{p(x)}(\Omega)]'$). Sendo assim, fixe $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e assuma que

$$\langle T_v, u\rangle = 0, \quad \forall v \in L^{q(x)}(\Omega). \tag{3.16}$$

Afirmamos que $u = 0$. De fato, considere a função v_0 definida por

$$v_0(x) = |u(x)|^{p(x)-2}u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Observe que $v_0 \in L^{q(x)}(\Omega)$. Com efeito,

$$|v_0(x)| = |u(x)|^{p(x)-2}|u(x)| = |u(x)|^{p(x)-1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Elevando o módulo de $v_0(x)$ a $q(x)$, temos que

$$|v_0(x)|^{q(x)} = |u(x)|^{[p(x)-1]q(x)} = |u(x)|^{p(x)}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.17}$$

desde que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, para todo $x \in \Omega$. Integrando sobre Ω, inferimos que

$$\int_\Omega |v_0(x)|^{q(x)} = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} < \infty,$$

pois $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Isto nos diz que $v_0 \in L^{q(x)}(\Omega)$. Com isso, aplicando (3.16), podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 = \langle T_{v_0}, u\rangle &= \int_\Omega u(x)v_0(x)dx \\
&= \int_\Omega u(x)|u(x)|^{p(x)-2}u(x)dx = \int_\Omega u^2(x)|u(x)|^{p(x)-2}dx \\
&= \int_\Omega |u(x)|^2|u(x)|^{p(x)-2}dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = 0$. Pela Proposição 2.5 a), concluímos que $u = 0$. Desta forma, usando o Teorema 1.3, deduzimos que E é denso em $[L^{p(x)}(\Omega)]'$. Logo, T é sobrejetivo e, portanto, é um isomorfismo. Deste modo, temos a seguinte identificação: $[L^{p(x)}(\Omega)]' \equiv L^{q(x)}(\Omega)$ (através de T) e, consequentemente, todo funcional linear contínuo em $[L^{p(x)}(\Omega)]'$ pode ser representado na forma $f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$, para algum $v \in L^{q(x)}(\Omega)$.

□

3.2 Densidade e Separabilidade no Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, mostraremos a densidade do conjunto $C_c(\Omega)$ (constituído das funções reais contínuas, com suporte compacto, definidas em Ω) em $L^{p(x)}(\Omega)$ e, por consequência, o espaço $C_c^{\infty}(\Omega)$ (determinado pelas funções reais infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto, definidas em Ω) também será denso em $L^{p(x)}(\Omega)$. Mais especificamente, mostraremos que todos os pontos do espaço generalizado de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ são aderentes aos espaços $C_c(\Omega)$ e $C_c^{\infty}(\Omega)$. Além disso, iremos alcançar o último objetivo do trabalho. Mais especificamente, usaremos os resultados acima com respeito à densidade; pois, a ideia é encontrar um espaço enumerável e denso em $L^{p(x)}(\Omega)$ para classificá-lo como separável.

Teorema 3.2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p^- > 1$. Então, o espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $C_c(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$. De fato, considere que $\varphi \in C_c(\Omega)$. Sendo assim,

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in K' := \text{supp}\varphi.$$

(desde que φ é contínua e K' é compacto). O fato que $p^- \leq p(x) \leq p^+$ em q.t.p. de Ω nos diz que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p(x)}dx &= \int_{K'} |\varphi(x)|^{p(x)}dx + \int_{[K']^c} |\varphi(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_{K'} M^{p(x)}dx \leq \int_{K'} Cdx \leq C|K'| < \infty,\end{aligned}$$

onde $C = \max\{M^{p^-}, M^{p^+}\}$ (pois, $\varphi = 0$ em $[K']^c$). Com isso, $\varphi \in L^{p(x)}(\Omega)$.

No que segue, aplicaremos o Teorema 1.3. Sendo assim, para $f \in [L^{p(x)}(\Omega)]'$, existe $v_f \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que $f = T_{v_f}$, onde T está definida em (3.2) (ver prova do Teorema 3.1 para a sobrejetividade de T). Dessa forma, é suficiente mostrar que se

$$\langle T_{v_f}, u\rangle = \int_{\Omega} u(x)v_f(x)dx = 0, \quad \forall u \in C_c(\Omega), \tag{3.18}$$

então, $f = T_{v_f} = 0$ (ver Teorema 1.3). O que equivale a dizer que $v_f = 0$ (desde que a aplicação T é um isomorfismo, ver prova do Teorema 3.1). Observe que, para todo compacto

$K \subseteq \Omega$, podemos aplicar a Desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned}\int_K |v_f(x)|dx &\leq \int_K \frac{1}{p(x)}dx + \int_K \frac{|v_f(x)|^{q(x)}}{q(x)} \leq \frac{1}{p^-}|K| + \frac{1}{q-}\int_K |v_f(x)|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{p^-}|K| + \frac{1}{q-}\int_\Omega |v_f(x)|^{q(x)}dx < \infty,\end{aligned}$$

pois $p(x) \geq p^-$ e $q(x) \geq q^-$ em q.t.p. de Ω, e $v_f \in L^{q(x)}(\Omega)$. Logo, podemos escrever $v_f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pelo Lema de Du Bois-Reymond 2.6 e (3.18), temos que $v_f = 0$. Com isso,

$$f = T_{v_f} = T(0) = 0.$$

(Lembre que T é linear). Aplique o Teorema 1.3 para concluir o resultado em questão. $\square$

Agora, estamos interessados em provar a densidade do conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3.3. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p^- > 1$. Então, o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Primeiramente, é fácil ver que $C_c^\infty(\Omega) \subseteq C_c(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$. Por conseguinte, $C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$.

Por outro lado, dados $\eta > 0$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, queremos provar que existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|u - \varphi\|_{p(x)} < \eta$. Sabemos do Teorema 3.2, que existe $v \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}. \tag{3.19}$$

Dado $\epsilon > 0$, defina

$$\varphi_\epsilon(x) = (J_\epsilon * v)(x) = \int_\Omega J_\epsilon(x-y)v(y)dy, \quad \forall x \in \Omega_\epsilon,$$

onde $d(\text{supp}v, \partial\Omega) > \epsilon$, $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ e J_ϵ é um mollifier (para mais detalhes ver [4]). Observe que $\varphi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, para todo $0 < \epsilon < d(\text{supp}v, \partial\Omega)$ (ver Teorema 2.5 iii)) e, além disso,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \varphi_\epsilon(x) = v(x), \quad \text{uniformemente em } G, \tag{3.20}$$

para todo $G \Subset \Omega$ (para mais informações ver Teorema 2.5 iii)). Por outro lado, observe que (3.20) implica que

$$|\varphi_\epsilon(x) - v(x)| \leq 1, \quad \forall x \in G, \tag{3.21}$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Desta forma, podemos fazer uso do limite (3.20) e do Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 2.4) para deduzir que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_G |\varphi_\epsilon(x) - v(x)|dx = \int_G \lim_{\epsilon\to 0}|\varphi_\epsilon(x) - v(x)|dx = 0, \tag{3.22}$$

para todo $G \Subset \Omega$ compacto. Por outro lado, como $p(x) \geq p^- > 1$ em q.t.p. de Ω, obtém-se, por (3.21), que

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(\varphi_\epsilon - v) &= \int_\Omega |\varphi_\epsilon(x) - v(x)|^{p(x)}dx \\ &= \int_{\text{supp}v+B[0,\tau]} |\varphi_\epsilon(x) - v(x)|^{p(x)}dx \leq \int_{\text{supp}v+B[0,\tau]} |\varphi_\epsilon(x) - v(x)|dx, \end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo $0 < \epsilon < \tau$, com $\tau = 2^{-1}d(\text{supp}v, \partial\Omega)$ (considerando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno), pois

$$\text{supp}\varphi_\epsilon \subseteq \text{supp}v + B[0,\epsilon] \subseteq \text{supp}v + B[0,\tau]$$

e também

$$\text{supp}v \subseteq \text{supp}v + B[0,\tau].$$

Escolhendo $G = \text{supp}v + B[0,\tau]$ (note que $G \Subset \Omega$ é compacto, por ser uma soma de compactos) e aplicando o Teorema do Sanduíche (ver Teorema 1.1) em (3.23) e o limite (3.22), inferimos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |\varphi_\epsilon(x) - v(x)|^{p(x)}dx = 0.$$

Logo, pela Proposição 2.7, resulta que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\varphi_\epsilon - v\|_{p(x)} = 0.$$

Por conseguinte, temos que

$$\|\varphi_\epsilon - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}, \quad \forall\epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \tag{3.24}$$

Portanto, de (3.19) e (3.24), obtemos

$$\|u - \varphi_\epsilon\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|\varphi_\epsilon - v\|_{p((x)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} < \eta, \quad \forall\epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Por fim, concluímos que $L^{p(x)}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ (lembre que $\varphi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ para qualquer $\epsilon > 0$).

$\square$

Estamos prontos para fazer a prova de que os espaços de Lebesgue generalizados são separáveis.

Teorema 3.4. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p^- > 1$. Então, o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é separavél.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o seguinte conjunto:

$$\Omega_n = \Big\{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n\Big\}.$$

Observe que cada $\overline{\Omega}_n$ é um subconjunto compacto de Ω (desde que, este é fechado e está contido na bola aberta de centro 0 e raio n). Seja P o conjunto de todos os polinômios de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ com coeficientes racionais e defina o conjunto abaixo:

$$P_n = \Big\{\chi_{\overline{\Omega}_n} f : f \in P\Big\},$$

onde $\chi_{\overline{\Omega}_n}$ é a função característica de $\overline{\Omega}_n$. Além disso, observe que $P_0 := \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ é enumerável (pois, $\mathbb{Q}$ é enumerável e a união enumerável de conjuntos enumeráveis é do mesmo tipo).

Vamos agora mostrar que P_0 é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$. De fato, primeiramente, assuma que $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.2 (já que, $p^- > 1$), dado $\epsilon > 0$ (sem perda de generalidade, suficientemente pequeno), existe $v \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.25}$$

Como $\text{supp}v \subseteq \Omega$ é compacto, $\partial\Omega$ é fechado e $\text{supp}v \cap \partial\Omega = \emptyset$ (Ω é aberto), então $d(\text{supp}v, \partial\Omega) > 0$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que $d(\text{supp}v, \partial\Omega) > \dfrac{1}{n}$ e $\text{supp}v \subseteq B_n(0)$ ($\text{supp}v$ é compacto), então $\text{supp}v \subseteq \overline{\Omega}_n$ e, assim, pelo Teorema de Stone-Weierstrass (ver Teorema 2.7), existe $f \in P_n$ tal que

$$\|v - f\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{p^+}{p^-}} |\overline{\Omega}_n|^{-\frac{1}{c}}, \tag{3.26}$$

onde $|\overline{\Omega}_n| > 0$ ($\overline{\Omega}_n$ é compacto) e

$$c = \begin{cases} p^+, & \text{se } |\overline{\Omega}_n| < 1; \\ p^-, & \text{se } |\overline{\Omega}_n| \geq 1. \end{cases}$$

Agora, use os fatos que supp$v \subseteq \overline{\Omega}_n$ e $f \in P_n$ e aplique a desigualdade (3.26) para obter

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx &= \int_{\overline{\Omega}_n} |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_n} |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx \\ &= \int_{\overline{\Omega}_n} |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx \leq \int_{\overline{\Omega}_n} \|v - f\|^{p(x)}_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} dx \\ &\leq \int_{\overline{\Omega}_n} \|v - f\|^{p-}_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} dx = |\overline{\Omega}_n| \|v - f\|^{p^-}_{L^\infty(\overline{\Omega}_n)} \\ &< \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+} |\overline{\Omega}_n|^{1 - \frac{p^-}{c}}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

pois $1 < p^- \leq p(x)$ em q.t.p. de Ω (ver também definição de P_n).

Permita-nos continuar as estimativas em (3.27) por dividir nossos argumentos em dois casos:

- Se $|\overline{\Omega}_n| < 1$, então $c = p^+$ e, consequentemente, por (3.27), podemos escrever

$$\int_\Omega |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+} |\overline{\Omega}_n|^{1 - \frac{p^-}{p^+}} \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+}, \tag{3.28}$$

já que $p^+ \geq p^- > 1$.

- Se $|\overline{\Omega}_n| \geq 1$, então $c = p^-$. Logo, por (3.27), deduzimos que

$$\int_\Omega |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+} |\overline{\Omega}_n|^{1 - \frac{p^-}{p^-}} = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+}, \tag{3.29}$$

fornecido que $p^- > 1$.

Portanto, usando (3.28) e (3.29), inferimos

$$\rho(v - f) = \int_\Omega |v(x) - f(x)|^{p(x)} dx < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+} < 1,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (pois, $p^+ > 1$). Logo, pela Proposição 2.6 i), obtemos

$$\|v - f\|_{p(x)} < 1. \tag{3.30}$$

Novamente pela Proposição 2.6 iii), inferimos

$$\|v - f\|_{p(x)}^{p^+} < \rho(v - f) < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^+}.$$

Ou seja, podemos escrever

$$\|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.31}$$

Deste modo, por (3.25) e (3.31), concluímos que

$$\|u - f\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

isto é, $\overline{P_n} = L^{p(x)}(\Omega)$ e como $L^{p(x)}(\Omega) = \overline{P_n} \subseteq \overline{P_0} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$; então, $\overline{P_0} = L^{p(x)}(\Omega)$. Logo, P_0 é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$ e, como P_0 é enumerável, é verdade que $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BREZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. USA: Editora Springer, 2011.

[2] CALLIOLI, C., DOMINGUES, H., COSTA, R, **Álgebra Linear e Aplicações**. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1987.

[3] COELHO, F. U., LOURENÇO, M. L., **Um Curso de Álgebra Linear**. Editora Edusp, 2ª ed., 2018.

[4] EVANS, L. C., **Partial Differential Equations**. Editora American Mathematical Society , 1ª ed., 1998.

[5] FOLLAND, G. B., **Real Analysis Modern Techniques and their Applications**. John Wiley & Sons, Inc., 2ª ed., 1999.

[6] GUIMARÃES, C. J., **Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)-$ Laplaciano**. Dissertação(Mestrado)- Curso de Matemática.Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2006.

[7] JESUS, V. S., **Completude e Reflexividade dos Espaços de Lebesgue Generalizados**. TCC (Graduação)- Curso de Licenciatura em Matemática.Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2021.

[8] KREYSZIG, E. O., **Introductory Functional Analysis with Applications.** New York: John Wiley and Sons, 1983;

[9] LIMA, E. L., **Espaços Métricos**. Coleção Projeto Euclides, 5ª ed., 2015.

[10] LIMA, E. L., **Curso de Análise**. Vol. 2, Projeto Euclides, 11ª ed., 2015.

[11] LIMA, E. L., **Análise Real**. Vol. 2, Coleção Matemática Universitária, 6ª ed., 2016.

[12] LIMA, E. L., **Análise Real**. Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, 12ª ed., 2016.

[13] LIMA, E. L., **Curso de Análise**. Vol. 1, Projeto Euclides, 15ª ed., 2019.

[14] MELO, W. G., **Notas de Aula de Medida e Integração de Lebesgue.** Março, 2019.

[15] NETO, J. C. S. **Uma Breve Introdução ao Espaços de Lebesgue Generalizados**.2021. TCC (Graduação)- Curso de Licenciatura em Matemática.Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2021.

[16] SANTOS, I. J. N., **Completude e Dual de Espaços de Sobolev Não Homogêneos.** Monografia aprovada pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, 2019.