Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Arlúcio da Cruz Viana

Dicotomia Exponencial e Limitação para Equações Funcionais Discretas com Retardamento Não-Limitado

Recife
2009

Arlúcio da Cruz Viana

Dicotomia Exponencial e Limitação para Equações Funcionais Discretas com Retardamento Não-Limitado

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Cuevas

Recife

2009

Aos meus pais (incomparáveis guerreiros), minhas irmãs e sobrinhas (as quais não tenho estado presente para vê-las crescer lindamente) e Rebeca (a qual com paciência me apoia)

Melhor é o fim das coisas do que o
princípio delas, melhor é o paciente
de espírito do que o altivo de espírito.

Eclesiastes 7:8

AGRADECIMENTOS

Por mera justiça, é imprescindível expressar os agradecimentos a todos aqueles que estiveram e estão ligados direta ou indiretamente com o trabalho e esforço despendidos durante todo este tempo, tanto durante o curso; a DEUS primeiramente, o nosso capacitador e auxiliador em todos os momentos. Não como tradição ou formalidade, mas em sinceridade devo agradecer primeiramente a DEUS, especialmente pela condução de toda a minha vida, particularmente por este momento de vitória na área da matemática.

A meus pais, principalmente por confiarem nas minhas decisões em relação aos meus objetivos, que com todo amor me apoiaram, amor maior que qualquer outro amor terreno.

Aos meus colegas que estiveram a todo o tempo comigo em permutação de auxílios em diferentes aspectos do convívio acadêmico, que sobretudo foram amigos, destacando os membros da minha turma: Bruno, Halley, Marcelo Pedro e Renato. Aos professores que me deram atenção quando procurados por mim, Claudio Cuevas, Francesco Russo, Fernando Cardoso, Francisco Brito, Lucas Ferreira, Ramón Mendonza e Everaldo Souto. Ao Prof. Dr. Claudio Cuevas pela orientação. A Tania e Claudia por serem sempre simpáticas conosco. Pela CAPES pelo auxílio durante este um ano e meio. Enfim, que a graça de DEUS seja com todos nós.

Resumo

Nosso objetivo é caracterizar dicotomia exponencial de equações diferenças para equações funcionais discretas com retardamento não-limitado, aplicando alguns resultados para estudar a robustez de tal dicotomia. Este tipo de dicotomia nos proporciona informações relevantes sobre soluções limitadas de certo tipo de sistema perturbado. Ao final, estudamos aplicações às equações em diferenças de tipo Volterra.

Sumário

1 Introdução

Nesta dissertação nós consideraremos a seguinte equação em diferença linear com retardamento:

$$x(n+1) = L(n, x_n), \ n \geq 0, \tag{1.1}$$

onde $L : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$, e $\mathcal{B}_\gamma$ é o espaço de fase apropriado que será definido no capítulo seguinte.

Tal equação desempenha um papel importante em aplicações, uma vez que temos equações de tipo Volterra que podem ser vistas como caso particular, tal discussão será realizada no capítulo 7. Os principais resultados apresentados neste trabalho foram obtidos em um recente artigo [1] publicado por Cardoso-Cuevas. Tal artigo foi inspirado nos trabalhos de Huy e colaboradores (ver [12] e [13]) e Henríquez (ver [8]), nos dois primeiros artigos é apresentada uma caracterização de dicotomia exponencial para equações em diferença ordinárias e no terceiro artigo é tratada a questão de existência de soluções limitadas para equações diferenciais funcionais com retardamento infinito. É relevante observar que a importância do artigo [1] está no fato que os autores conseguem obter uma dicotomia exponencial para equações em diferença funcionais abstratas. Neste contexto até agora não se sabe muita informação de como lidar com tais dicotomias, já que tecnicamente é muito mais intrincado trabalhar com este conceito do que no caso de equações em diferença ordinárias. Em parte isto é devido a que é necessário calcular certas estimativas *a priori* envolvendo a composição do operador solução com projeções convenientes definidas num espaço de fase. Até agora não existe um método para construir tais projeções convenientes que permitam obter o tipo de dicotomia desejada. O que sabemos pelo método de Cuevas-Vidal (ver em [5]) que se temos uma família de projeções associadas a uma dicotomia exponencial, é possível construir outra família de projeções. Certamente estudos nesta direção não são triviais de ser abordados e podem nos levar a estudar interessantes problemas. Junto ao interesse teórico, o estudo das equações em diferenças com retardo infinito tem grande importância em aplicações, já que estas equações descrevem processos cujo estado é determinado pela história de todo seu passado. Este tipo de processos podem ser encontrados em modelos matemáticos provenientes de dinâmica de populações, modelos de propagação de perturbações em materiais com memória, etc.

O fato do espaço de estado (ou espaço de fase) ser infinito dimensional requer desenvolvimento de técnicas e métodos vindos da Análise Funcional, como por exemplo uso da Teoria de Semigrupos. A idéia de considerar espaços de fase para estudar propriedades qualitativas para equações em diferença funcionais é devida a dois trabalhos pioneiros de Murakami em 1997 (ver [16] e [17]) os quais tem despertado o interesse de diversos outros, como por exemplo, Elaydi e colaboradores [15], Cuevas-Pinto [3] [4], Cuevas-Del Campo [6], Hamaya [21], Matsunaga-Murakami ([9], [10]), Nagabuchi [22], Murakami-Nagabuchi [18]. Um interesse central sobre equações em diferença funcionais gira em torno de comportamento assintótico, estabilidade, instabilidade, teoria de variedades invariantes, regularidade maximal e teoria de dicotomias. No decorrer deste trabalho mostraremos o seguinte resultado de estabilidade:

Teorema 1.1 *Suponha que* $\{L(n,\cdot)\}_n$ *seja uma sequência uniformemente limitada em* $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathbb{C}^r)$ *e suponha que* 0 *não pertence ao espectro pontual aproximado de* Υ_0 *(ver Seção 2.1 para a definição de* Υ*). Então toda órbita* l^p*-estável do operador solução de (1.1) é exponencialmente estável, com* $1 \leq p \leq +\infty$*. Mais precisamente, para cada* $\tau \in \mathbb{Z}^+$ *e* $\varphi \in \mathcal{B}^0(\tau)$*, existem constantes positivas* N*,* ν *independentes de* φ *e* τ *tais que a seguinte estimativa vale:*

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq N e^{-\nu(n-m)} \|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \ n \geq m \geq \tau. \tag{1.2}$$

A discussão sobre dicotomia para equações em diferenças é estudada já há algum tempo, podemos citar como exemplo o artigo de Coffman e Schäffer [7]. No caso da dicotomia exponencial, temos uma caracterização para um caso mais simples em [13] e [12], já com a idéia de relacionar a sobrejetividade de algum operador com a propriedade de ter dicotomia exponencial. Aqui enunciamos a nossa caracterização de dicotomia exponencial:

Teorema 1.2 *Suponha que* $\{L(n,\cdot)\}_n$ *seja uma sequência uniformemente limitada em* $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, C^r)$. *Então para* $1 \leq p \leq \infty$ *as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) A equação (1.1) tem dicotomia exponencial.

(ii) $\Upsilon : l^p \longrightarrow l^p$ *é sobrejetivo e* $\mathcal{B}^0(0)$ *é complementado em* $\mathcal{B}_\gamma$.

O seguinte resultado nos assegura que a dicotomia exponencial é robusta quando consideramos perturbações pequenas. Este resultado será de grande valia quando aplicado em equações de diferença de Volterra com retardo infinito. Temos o seguinte resultado de robustez:

Teorema 1.3 *Suponha que* $\{L(n,\cdot)\}_n$ *seja uma sequência uniformemente limitada em* $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathbb{C}^r)$ *e que a equação (1.1) tenha uma dicotomia exponencial. Além disso, seja* $\{\mathcal{L}(n,\cdot)\}$ *uma sequência de operadores lineares de* $\mathcal{B}_\gamma$ *em* $\mathbb{C}^r$. *Definindo* $\mathcal{H}$ *por* $\mathcal{H} := \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \|\mathcal{L}(n,\cdot)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r}$, *se* $\mathcal{H}$ *é suficientemente pequeno, então a equação*

$$x(n+1) = L(n, x_n) + \mathcal{L}(n, x_n), \ \ n \geq 0, \tag{1.3}$$

também tem uma dicotomia exponencial.

Consideramos agora perturbações do tipo

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f(n, x_n), \ \ n \geq 0, \tag{1.4}$$

$$x_0 = \varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma. \tag{1.5}$$

Onde $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$.

A dicotomia exponencial resulta ser uma arma eficaz para garantirmos a existência (e possivelmente unicidade) de soluções limitadas para nossas equações. Com esta finalidade assumiremos que a perturbação $f(n, \varphi)$ satisfaz a seguinte condição:
Condição B: As seguintes condições valem:

(B_1) A função $f(n, \cdot)$ é contínua para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

(B_2) Para cada $R > 0$, há uma função positiva γ_R tal que $e^{\alpha \cdot}\gamma_R(\cdot) \in l^1$ e $\sup\{|f(n, \psi)| : \|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq R\} \leq \gamma_R(n),\ n \in \mathbb{Z}^+$.

(B_3) $\liminf_{R \to +\infty} \dfrac{Ke^\alpha}{R} \sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1$, onde K, α são as constantes da Definição 2.1

Cardoso e Cuevas em [1] obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 1.4 *Assuma que a equação (1.1) tem dicotomia exponencial e que a Condição (B) vale. Então existe uma solução limitada de (6.16)-(6.17). Além disso, se a seguinte condição for satisfeita*

(B_4) $\limsup_{R \to +\infty} \dfrac{Ke^\alpha}{R} \sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1,$

então o conjunto $\mathcal{S}$, das soluções limitadas de (6.16)-(6.17), é compacto em l^∞.

O último capítulo aplica os resultados obtidos ao longo do trabalho nas equações em diferenças de tipo Volterra. Isto justifica o trabalho no sentido de aplicabilidade uma vez que as equações diferenças de Volterra aparecem em outros campos da ciência como comunicação, mecânica dos fluidos, biofísica, óptica, arquitetura naval , modelagem de dispositivos (chip), problema de controle, combinatória, ecologia (população dinâmica) como sistemas ecológicos tipo predador-caça [14].

Este trabalho é organizado como segue. O segundo capítulo fornece as definições e os resultados básicos que serão usados nos teoremas enunciados e em suas respectivas demonstrações. No terceiro capítulo demonstraremos o Teorema 1.1, enquanto o Teorema 1.2 será provado no quarto capítulo. No quinto capítulo estudaremos a robustez da dicotomia exponencial demonstrando o Teorema 1.3. No sexto capítulo, desejamos discutir a existência de soluções limitadas para a equação (1.1) sob vários tipos de perturbações, onde será também demonstrado o Teorema 1.4. Enfim, no sétimo capítulo, aplicaremos nossos resultados às equações em diferenças de tipo Volterra.

2 Preliminares

2.1 Notações

Denotaremos por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$ o conjunto dos inteiros, inteiros não-negativos e inteiros não-positivos, respectivamente, além disso denotaremos por $\mathbb{N}(a)$ o conjunto dos números naturais iniciando do número natural a. O espaço r-dimensional dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}^r$ com a norma $|\cdot|$. O espaço das funções limitadas de $\mathbb{Z}^-$ em $\mathbb{C}^r$ será representado por $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$. O domínio de um operador T será denotado por $D(T)$. Para cada função $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ associamos, com $n \in \mathbb{Z}$, uma função $x_n : \mathbb{Z}^- \longrightarrow \mathbb{C}^r$ definida por $x_n(s) = x(n+s),\ s \in \mathbb{Z}^-$.

Definimos o espaço de fase $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ como o espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Existem uma constante positiva a e funções não-negativas $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ em $\mathbb{Z}^+$ de modo que se $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ é uma função tal que $x_0 \in \mathcal{B}$, então para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ a seguinte condição é satisfeita:

  (i) $x_n \in \mathcal{B}$,

  (ii) $a|x(n)| \leq \|x_n\|_{\mathcal{B}} \leq F(n) \sup\limits_{0 \leq s \leq n} |x(s)| + G(n)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$,

(b) O espaço $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ é completo,

(c) A aplicação inclusão $i : (\mathcal{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ é contínua, isto é, existe uma constante $K \geq 0$ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq K\|\varphi\|_{\infty}$ para toda $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}^{-}, \mathbb{C}^{r})$.

Neste trabalho usaremos o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{B}_{\gamma} := \left\{\phi : \mathbb{Z}^{-} \longrightarrow \mathbb{C}^{r} : \sup_{\theta \in \mathbb{Z}^{-}} |\phi(\theta)|e^{\gamma\theta} < \infty\right\},\ \gamma > 0,$$

munido da norma $\|\phi\|_{\mathcal{B}_{\gamma}} = \sup_{\theta \in \mathbb{Z}^{-}} |\phi(\theta)|e^{\gamma\theta}$, para $\phi \in \mathcal{B}_{\gamma}$. Para ver que tal conjunto é um espaço de fase, tome $a = 1$, $F(n) = 1$, $G(n) = 1$ e $K = 1$.

Considere o operador $L : \mathbb{Z}^{+} \times \mathcal{B}_{\gamma} :\longrightarrow \mathbb{C}^{r}$. Será assumida a seguinte condição para o operador L:

(A) $\{L(n, \cdot)\}$ é uma sequência de operadores lineares limitados de $\mathcal{B}_{\gamma}$ em $\mathbb{C}^{r}$ a qual é uniformemente limitada, isto é, existe uma constante $M > 1$ tal que:

$$|L(n, \varphi)| \leq M\|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\gamma}},\ \forall\ n \in \mathbb{Z}^{+},\ \varphi \in \mathcal{B}_{\gamma}. \tag{2.1}$$

Para todo $(\tau, \phi) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{B}$, existe uma única função $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^{r}$ tal que $x_{\tau} = \phi$ e satisfaz a equação (1.1) para $\tau \leq n$. A função x é chamada a solução de (1.1) passando por (τ, ϕ) e é denotada por $x(\cdot, \tau, \phi, 0)$ ou $x(\cdot, \tau, \phi)$ por simplicidade. (0 aparece por conta do sistema (1.1) não ter pertubação, caso contrário, denotamos $x(\cdot, \tau, \phi, p)$).

Para todo $n \geq \tau$, definimos um operador $T(n, \tau) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ por

$$T(n, \tau)\phi = x_{n}(\tau, \phi, 0), \quad \phi \in \mathcal{B}.$$

Pelo fato de $T(n, \tau)$ ser um operador em $\mathcal{B}$, temos que ele é limitado e linear. O operador $T(n, \tau)$ é chamado operador solução do sistema linear homogêneo (1.1) e satisfaz as seguintes propriedades:

$$T(n, s)T(s, \tau) = T(n, \tau),\ n \geq s \geq \tau,$$

e

$$T(n, n) = I,\ \forall\ n.$$

Seja $x(\cdot, 0, \varphi)$ uma solução do sistema linear homogêneo (1.1) passando por $(0, \varphi)$, logo como foi dito no primeiro parágrafo, podemos definir a função $x.(0, \varphi)$ com valores em $\mathcal{B}_\gamma$ por $n \to x_n(0, \varphi)$. Pode-se deduzir que $x.(0, \varphi)$ é solução da equação

$$Z(n+1) = T(n+1, n)Z(n), \ n \geq 0. \tag{2.2}$$

Para ver a afirmação acima faça $Z(n+1) = x_{n+1}(0, \varphi) = T(n+1, 0)\varphi$ e $Z(n) = x_n(0, \varphi) = T(n, 0)\varphi$, substituindo teremos

$$T(n+1, 0)\varphi = T(n+1, n)T(n, 0)\varphi$$

cuja a igualdade é verdadeira pelas propriedades do operador $T(n, \tau)$ e mostra que $x.(0, \varphi)$ é de fato solução de (2.2).

Lembramos que o espectro pontual aproximado de um operador B sobre um espaço de Banach Y é denotado por $A\sigma(B)$ e é dado pelo conjunto de todos os números complexos λ tais que, para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in D(B)$ unitário ($\|y\|_Y = 1$, onde $\| \cdot \|_Y$ denota a norma do espaço de Banach Y) e $\|(\lambda - B)y\|_Y \leq \epsilon$ (por simplicidade escrevemos $\lambda - B$ ao invés de $\lambda I - B$ onde I é a identidade de Y).

Ao longo deste trabalho adotamos a notação l^p com $1 \leq p < \infty$ para o conjunto

$$l^p := l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma) = \left\{ \xi : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma \mid \|\xi\|_p^p := \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p < +\infty \right\},$$

e no caso $p = +\infty$

$$l^\infty := l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma) = \left\{ \xi : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma \mid \|\xi\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} < +\infty \right\}.$$

Com essa notação podemos definir os conjuntos l_0^p e $l_{\mathcal{B}}^p$ com $\mathcal{B}$ um subespaço linear fechado de $\mathcal{B}_\gamma$ da seguinte forma

$$l_0^p := \{\xi \in l^p : \xi(0) = 0\},$$

e

$$l^p_{\mathcal{B}} := \{\xi \in l^p : \xi(0) \in \mathcal{B}\},$$

com $1 \leq p \leq \infty$.

Como $\mathcal{B}$ é subespaço fechado de $\mathcal{B}_\gamma$, então $l^p_{\mathcal{B}}$ é subespaço fechado de l^p. De fato, dado $\xi \in \overline{l^p_{\mathcal{B}}}$ existe uma sequência $\{\xi_n\} \in l^p_{\mathcal{B}}$, tal que $\xi_n \to \xi$ e portanto, a sequência $\{\xi_n(0)\} \in \mathcal{B}$ é tal que $\xi_n(0) \to \xi(0)$, pelo fato de $\mathcal{B}$ ser fechado temos que $\xi(0) \in \mathcal{B}$ e portanto $\xi \in l^p_{\mathcal{B}}$, o que mostra a afirmação.

Agora nós definimos, para $1 \leq p < +\infty$, o conjunto l^p-estável $\mathcal{B}^0(\tau),\ \tau \in \mathbb{Z}^+$ por

$$\mathcal{B}^0(\tau) := \left\{ \varphi \in \mathcal{B}_\gamma : \sum_{n=\tau}^{\infty} \|T(n,\tau)\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} < +\infty \right\}.$$

No caso em que $p = +\infty$, definimos

$$\mathcal{B}^0(\tau) := \left\{ \varphi \in \mathcal{B}_\gamma : \sup_{n \geq \tau} \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} < +\infty \right\}.$$

Dizemos que uma órbita $T(n,\tau)\varphi$, com $n \geq \tau \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{B}^0(\tau)$, é chamada uma órbita l^p-estável.

Nós definimos o operador linear Υ em l^p como

$$(\Upsilon\xi)(n) = \xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n) \tag{2.3}$$

para todo $\xi \in l^p$ e $n \geq 0$. A restrição do operador Υ ao espaço l^p_0 será denotada por Υ_0, isto é, $D(\Upsilon_0) = l^p_0$ e no caso em que $\xi \in l^p_0$, temos que $\Upsilon_0\xi = \Upsilon\xi$. Similarmente nós denotaremos por $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ a restrição do operador Υ ao espaço $l^p_{\mathcal{B}}$, onde $\mathcal{B}$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{B}_\gamma$ e vemos que $D(\Upsilon_{\mathcal{B}}) = l^p_{\mathcal{B}}$ e quando $\xi \in l^p_{\mathcal{B}}$ teremos $\Upsilon_{\mathcal{B}}\xi = \Upsilon\xi$. Pela definição do operador Υ temos a seguinte observação:

Observação 2.1 **(i)** $ker\Upsilon = \{\xi \in l^p : \xi(n) = T(n,0)\xi(0), n \geq 0\}$

(ii) *O operador* Υ_0 *é injetivo*

De fato, o primeiro ítem pode ser visto da seguinte forma. $(\Upsilon\xi)(n) = 0$ implica que $\xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n) = 0 \Rightarrow \xi(n+1) = T(n+1,n)\xi(n)$, podemos aplicar essa definição para qualquer $n \geq 0$ e usando as propriedades do operador solução, assim temos

$$\begin{aligned}
\xi(n) &= T(n,n-1)\xi(n-1)\\
\\
&= T(n,n-1)T(n-1,n-2)\xi(n-2) = T(n,n-2)\xi(n-2)\\
\\
&= T(n,n-2)T(n-2,n-3)\xi(n-3) = T(n,n-3)\xi(n-3)\\
&\vdots\\
&= T(n,0)\xi(0).
\end{aligned}$$

E logo temos a igualdade $\xi(n) = T(n,0)\xi(0)$. O segundo ítem segue diretamente do fato que Υ_0 é um operador linear e que em l_0^p, $\xi(0) = 0$ e portanto $ker\Upsilon_0 = \{0\}$.

2.2 Sobre Dicotomia Exponencial

Agora definimos quando a equação (1.1) ou o seu operador solução tem Dicotomia Exponencial.

Definição 2.1 *Dizemos que a equação (1.1) tem dicotomia exponencial (ou seu operador $T(n,\tau)$) em $\mathbb{Z}^+$ com dado $(\alpha, K, P(n))$ onde α, K são números positivos e $P(n)$ são projeções em $\mathcal{B}_\gamma$, tais que $Q(n) = I - P(n)$, então valem as seguintes condições:*

(i) $T(n,\tau)P(\tau) = P(n)T(n,\tau),\ n \geq \tau.$

(ii) A restrição $T(n,\tau)_{|Im(Q(\tau))}$, $n \geq \tau$, é um isomorfismo do conjunto $Im(Q(\tau))$ sobre $Im(Q(n))$, e então nós definimos $T(\tau,n)$ como a aplicação inversa.

(iii) $\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq \tau;\ \varphi \in P(\tau)\mathcal{B}_\gamma.$

(iv) $\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{\alpha(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n < \tau;\ \varphi \in Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma.$

Observação 2.2 *Seja $(\alpha, K, P(n))$ o dado de uma dicotomia exponencial. Pode-se construir outras projeções $\hat{P}(n)$ a partir de $P(n)$ de modo que (1.1) tenha dicotomia exponencial. Com efeito, tome uma projeção $\hat{P}(n_0)$ tal que satisfaça $Im(\hat{P}(n_0)) = Im(P(n_0))$. Isto nos permite definir as seguintes projeções: $\hat{P}(n) = P(n) + T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, n)Q(n)$. Então (1.1) tem dicotomia exponencial em $\mathbb{N}(n_0)$ com dado $(\alpha, \hat{K}, \hat{P}(n))$, onde $\hat{K} = (K + K^2\|\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})$.*

Demonstração: Primeiramente vamos ver que para $n \geq \tau$ vale a primeira propriedade da Definição 2.1, a saber $\hat{P}(n)T(n, \tau) = T(n, \tau)\hat{P}(\tau)$. A seguir, usaremos a primeira propriedade da Definição 2.1 e que $T(n, \tau)$ é o operador solução, valendo as propriedades que já foram enunciadas.

$$\begin{aligned}
\hat{P}(n)T(n, \tau) &= (P(n) + T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, n)Q(n))T(n, \tau) \\
&= P(n)T(n, \tau) + T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, n)Q(n)T(n, \tau) \\
&= T(n, \tau)P(\tau) + T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, n)T(n, \tau)Q(\tau) \\
&= T(n, \tau)P(\tau) + T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, \tau)Q(\tau) \\
&= T(n, \tau)P(\tau) + T(n, \tau)T(\tau, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, \tau)Q(\tau) \\
&= T(n, \tau)(P(\tau) + T(\tau, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, \tau)Q(\tau)) \\
&= T(n, \tau)\hat{P}(\tau).
\end{aligned}$$

Observe a expressão obtida para $\hat{Q}(n)$ dada pela relação $\hat{Q}(n) = I - \hat{P}(n)$:

$$\hat{Q}(n) = [I - T(n, n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0, n)]Q(n).$$

Agora queremos que o operador $T(n,\tau)$, $n \geq \tau$ seja um isomorfismo de $\hat{Q}(\tau)\mathcal{B}_\gamma$ sobre $\hat{Q}(n)\mathcal{B}_\gamma$. De fato, nós definimos $T(\tau,n)$ como a aplicação inversa de $T(n,\tau)$, a qual é dada por

$$T(\tau,n)\hat{Q}(n)\varphi = T(\tau,n)Q(n)\varphi - T(\tau,n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0,n)Q(n)\varphi.$$

Por outro lado, se $n \geq \tau$ e $\varphi \in \hat{P}(\tau)\mathcal{B}_\gamma$, então $T(n,\tau)\varphi$ é dado por

$$T(n,\tau)\varphi = T(n,\tau)P(\tau)\varphi - T(n,n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0,\tau)Q(\tau)\varphi.$$

E portanto, usando a dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$ e levando em conta $\hat{P}(n_0) = P(n_0)\hat{P}(n_0)$, obtemos a seguinte estimativa para $\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$:

$$\begin{aligned}
\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq \|T(n,\tau)P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \|T(n,n_0)P(n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0,\tau)Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + Ke^{-\alpha(n-n_0)}\|P(n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0,\tau)Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+Ke^{-\alpha(n-n_0)}\|P(n_0)\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}Ke^{\alpha(n_0-\tau)}\|Q(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+K^2e^{-\alpha(n-\tau)}e^{-2\alpha(\tau-n_0)}\|\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|Q(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{-\alpha(n-\tau)}\sup_{m\geq 0}\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+K^2e^{-\alpha(n-\tau)}\|\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \hat{K}e^{-\alpha(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.
\end{aligned}$$

Se $n < \tau$ e $\varphi \in \hat{Q}(\tau)\mathcal{B}_\gamma$, então $T(n,\tau)\varphi$ é dado por:

$$T(n,\tau)\varphi = T(n,\tau)Q(\tau)\varphi - T(n,n_0)\hat{P}(n_0)T(n_0,\tau)Q(\tau)\varphi,$$

e portanto estimamos $\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$ como

$$\begin{aligned}
\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq Ke^{\alpha(n-\tau)}\|Q(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+Ke^{-\alpha(n-n_0)}\|\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}Ke^{\alpha(n_0-\tau)}\|Q(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{\alpha(n-\tau)}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+K^2e^{\alpha(n-\tau)}e^{-2\alpha(n-n_0)}\|\hat{P}(n_0)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\sup_{m\geq 0}(1+|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \hat{K}e^{\alpha(n-n_0)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova.

□

A seguinte propriedade do operador solução tem um papel fundamental nos resultados desta dissertação.

Proposição 2.1 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita, então existem constantes positivas $K^\#$ e $\alpha^\#$ tais que a seguinte estimativa é válida:*

$$\|T(n,m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq K^\# e^{\alpha^\#(n-m)}, \ n \geq m \geq 0. \tag{2.4}$$

Demonstração: Seja $x(\cdot,m,\varphi)$ a solução do sistema homogêneo (1.1) passando pelo ponto (m,φ) como definida na seção anterior. Para provar (2.4) nós observamos que, em vista da condição (2.1), nós obtemos

$$\begin{aligned}
\max_{n-m\leq\theta\leq 0}|x(n+\theta,m,\varphi)| &\leq \max_{n-m\leq\theta\leq 0}\left(\sum_{j=1}^{n+\theta-m}M^j\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n-m}M^j\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{n-m-1}\left(\frac{1}{M}\right)^j\right)M^{n-m}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\\
&\leq \frac{M}{M-1}M^{n-m}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.
\end{aligned}$$

Fazendo $K^{\#}=\dfrac{2M}{M-1}$ e $\alpha^{\#}=\log M$, nós temos a desigualdade (2.4) desejada.

$\square$

Proposição 2.2 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita e que o sistema (1.1) tem dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$, então*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\|P(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}<+\infty.$

(ii) $Im(P(m))=\{\varphi\in\mathcal{B}_\gamma : e^{-\eta(n-m)}T(n,m)\varphi$ *é limitado para* $n\geq m\}$ *para* $0<\eta<\alpha$.

Demonstração: Para provar *(i)*, seja $\tau>0$ fixo, tome $\gamma_\tau := \inf\{\|\varphi+\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \mid \varphi\in P(\tau)\mathcal{B}_\gamma,\ \psi\in Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma,\ \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1\}$. Se $\varphi\in\mathcal{B}_\gamma$ tal que $P(\tau)\varphi\neq 0$ e $Q(\tau)\varphi\neq 0$, então

$$
\begin{aligned}
\gamma_\tau &\leq \left\| \frac{P(\tau)\varphi}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} + \frac{Q(\tau)\varphi}{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \frac{1}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \left\| P(\tau)\varphi + \frac{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} Q(\tau)\varphi}{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \frac{1}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \left\| \frac{(\varphi - Q(\tau)\varphi)\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} Q(\tau)\varphi}{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \frac{1}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \left\| \varphi + \frac{Q(\tau)\varphi(\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} - \|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma})}{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \frac{1}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \left(\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \frac{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \| \|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} - \|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \|_{\mathcal{B}_\gamma}}{\|Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \right) \\
&\leq \frac{1}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} (\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \|P(\tau)\varphi + Q(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}) \\
&= \frac{2\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}{\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\|P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{2\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}{\gamma_\tau}$, logo $\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{2}{\gamma_\tau}$.

Resta mostrar que existe uma constante $c > 0$ (independente de τ) de modo que $\gamma_\tau \geq c$. Para isto nós consideramos $\varphi \in P(\tau)\mathcal{B}_\gamma$ e $\psi \in Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma$, com $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = 1$. Usando a limitação exponencial do operador solução, e que

$$
\|T(n,\tau)(\varphi + \psi)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \|T(n,\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \|\varphi + \psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq K^{\#} e^{\alpha^{\#}(n-\tau)} \|\varphi + \psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}
$$

e

$$
\|T(n,\tau)\varphi + T(n,\tau)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,\tau)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} - \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq K^{-1} e^{\alpha(n-\tau)} - K e^{-\alpha(n-\tau)}
$$

obtemos $\|\varphi+\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq (K^{\#}e^{\alpha^{\#}(n-\tau)})^{-1}(K^{-1}e^{\alpha(n-\tau)} - Ke^{-\alpha(n-\tau)}) := c_{n-\tau}$. E portanto $\gamma_\tau \geq c_{n-\tau}$. Observe que, para m suficientemente grande, temos $c_m > 0$, e portanto $0 < c_m < \gamma_\tau$.

Para provar *(ii)* observamos que $Im(P(m)) \subseteq J$, onde J denota o conjunto em *(ii)*, pois como vale o ítem *(iii)* da Definição 2.1, daí $e^{-\eta(n-m)}\|T(n,m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-(\alpha+\eta)(n-m)}$. Para ver a inclusão inversa nós notamos que, tomando $\varphi \in J$ é verdade que $\|e^{-\eta(n-m)}T(n,m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \tilde{C}$ logo $\|T(n,m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \tilde{C}e^{\eta(n-m)}$, usando isso e a dicotomia exponencial do operador solução

$$\begin{aligned}
\|Q(m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} &= \|T(m,n)Q(n)T(n,m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{\alpha(m-n)}\|Q(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|T(n,m)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{\alpha(m-n)}\hat{C}\tilde{C}e^{\eta(n-m)} \\
&= Ce^{(\alpha-\eta)(m-n)} \to 0, \text{ quando } n \to +\infty
\end{aligned}$$

Como $\varphi = P(m)\varphi + Q(m)\varphi = P(m)\varphi$ vemos que $\varphi \in Im(P(m))$.

□

3 Estabilidade

Começamos por enunciar o teorema que será provado nesta seção.

Teorema 3.1 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita e suponha que* $0 \notin A\sigma(\Upsilon_0)$. *Então toda órbita* l^p*-estável do operador solução de (1.1) é exponencialmente estável, com* $1 \leq p \leq +\infty$. *Mais precisamente, para cada* $\tau \in \mathbb{Z}^+$ *e* $\varphi \in \mathcal{B}^0(\tau)$, *existem constantes positivas* N, ν *independentes de* φ *e* τ *tais que a seguinte estimativa vale:*

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ne^{-\nu(n-m)}\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq m \geq \tau. \tag{3.1}$$

Inicialmente demonstraremos o Teorema 3.1 no caso $p = +\infty$. Afirmamos que para provar o teorema é suficiente mostrar que

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ne^{-\nu(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq \tau. \tag{3.2}$$

Com efeito, nós consideramos $m \geq \tau$ e fixe $\psi = T(m,\tau)\varphi$, logo $\psi \in \mathcal{B}^0(m)$. Admitindo que a desigualdade (3.2) é valida, para $n > m$, $\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \|T(n,m)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ne^{-\nu(n-m)}\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = Ne^{-\nu(n-m)}\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$.

Agora devemos provar que, com as hipóteses enunciadas no teorema , vale a desigualdade (3.2), para isto, podemos supor $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = 1$. Como $0 \notin A\sigma(\Upsilon_0)$, então existe uma constante positiva, podendo ser tomada maior que 1, tal que

$$C\|\Upsilon_0\xi\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty,\ \forall\ \xi \in l_0^\infty. \tag{3.3}$$

De fato, pela definição tem-se que existe $\epsilon > 0$, $\forall\ y \in l_0^\infty$, $\|y\| = 1 \Rightarrow \|\Upsilon y\|_\infty \geq \epsilon$. Logo, pondo $y = \frac{\xi}{\|\xi\|_\infty}$ tem-se $\frac{1}{\epsilon}\|\Upsilon_0\xi\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty$, caso $\frac{1}{\epsilon} < 1 \Rightarrow C = 1$, caso contrário tome $C = \frac{1}{\epsilon} > 1$.

Tome $\tau_1 := \sup\{n \geq \tau : T(n,\tau)\varphi \neq 0\}$ e seja τ_2 algum número natural tal que $\tau_2 < +\infty$ e $\tau \leq \tau_2 \leq \tau_1$. Quando $\tau \geq 1$ nós definimos as funções $\xi \in l_0^\infty$ e $\eta \in l^\infty$ por

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=\tau}^{n} \frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau)\varphi, & \tau \leq n \leq \tau_2, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau)\varphi, & n > \tau_2, \end{cases}$$

$$\eta(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau - 1, \\ \dfrac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(n+1,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & \tau - 1 \leq n < \tau_2, \\ 0, & n \geq \tau_2. \end{cases}$$

Quando $\tau = 0$ nós definimos

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau)\varphi, & 0 < n \leq \tau_2, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau)\varphi, & n > \tau_2, \end{cases}$$

$$\eta(n) = \begin{cases} \dfrac{T(n+1,0)\varphi}{\|T(n+1,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & 0 \leq n < \tau_2, \\ 0, & n \geq \tau_2. \end{cases}$$

É fácil ver que $\Upsilon_0\xi = \eta$. De fato, começaremos por provar para $\tau \geq 1$. Se $0 < n \leq \tau - 1$, nos obtemos $\xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n) = 0 = \eta(n)$.

Se $\tau \leq n < \tau_2$, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
\xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n) &= \left(\sum_{k=\tau}^{n+1} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) - \left(\sum_{k=\tau}^{n} \frac{T(n+1,n)}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau)\varphi \\
&= \left(\sum_{k=\tau}^{n+1} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) - \left(\sum_{k=\tau}^{n} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) \\
&= \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(n+1,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \\
&= \eta(n).
\end{aligned}$$

O caso em que $n = \tau - 1$ não foi incluído em nenhum dos dois casos anteriores porque $\xi(n+1)$ está definida na segunda equação enquanto $\xi(n)$, na primeira e portanto $\xi(\tau-1) = 0$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n) &= \xi(\tau) - T(\tau,\tau-1)\xi(\tau-1) \\
&= \frac{T(\tau,\tau)\varphi}{\|T(\tau,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \\
&= \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \\
&= \eta(\tau-1) = \eta(n).
\end{aligned}$$

Quando $n > \tau_2$,

$$\begin{aligned}
(\Upsilon\xi)(n) &= \sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} - \sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{T(n+1,n)T(n,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \\
&= \sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} - \sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}
\end{aligned}$$

$$= 0 = \eta(n).$$

Para $n = \tau_2$ veja que $\xi(\tau_2+1) = \displaystyle\sum_{k=\tau}^{\tau_2} \frac{T(\tau_2+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}$ e

$$T(n+1,n)\xi(n) = T(n+1,n)\sum_{k=\tau}^{n} \frac{T(n,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} = \sum_{k=\tau}^{n} \frac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}},$$

como estamos no caso em que $n = \tau_2$, temos que $(\Upsilon\xi)(\tau_2) = 0 = \eta(\tau_2)$.

Ainda resta verificarmos o caso $\tau = 0$. Se $n = 0$, devemos calcular $(\Upsilon_0\xi)(0) = \xi(1) - T(1,0)\xi(0) = \frac{1}{\|T(1,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} T(1,0)\varphi = \eta(0)$. Se $0 < n < \tau_2$,

$$\begin{aligned}(\Upsilon_0\xi)(n) &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n+1,0)\varphi - T(n+1,n)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,0)\varphi \\ &= \frac{T(n+1,0)}{\|T(n+1,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} = \eta(n).\end{aligned}$$

Se $n = \tau_2$,

$$\begin{aligned}(\Upsilon_0\xi)(\tau_2) &= \xi(\tau_2+1) - T(n+1,n)\xi(\tau_2) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(\tau_2+1) - T(\tau_2+1,\tau_2)\left(\sum_{k=1}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(\tau_1,0) \\ &= 0 = \eta(\tau_2).\end{aligned}$$

Se $n > \tau_2$,

$$\begin{aligned}(\Upsilon_0\xi)(n) &= \left(\sum_{k=1}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n+1,0)\varphi - T(n+1,n)\left(\sum_{k=1}^{\tau_2} \frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,0)\varphi \\ &= 0 = \eta(n).\end{aligned}$$

Assim em todo caso temos a igualdade $\Upsilon_0\xi = \eta$.

Usando a desigualdade (3.3), no caso que $\tau \geq 1$, a observação que nos deu $\Upsilon\xi = \eta$, obtemos $C\|\Upsilon\xi\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty \Rightarrow C\|\eta\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty \Rightarrow \|\xi\|_\infty \leq C$, isso porque $\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\|\eta(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} = 1$, assim

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\sum_{k=\tau}^{n}\frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \leq C.$$

Analogamente para $\tau = 0$ nós temos

$$\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\|T(k,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \leq C.$$

Para finalizar esta parte da prova devemos enunciar e provar o seguinte lema

Lema 3.1 *Seja $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ uma sequência de números reais positivos, e sejam, $C > 1$ e $K, \alpha > 0$ constantes tais que $x_n \leq Ke^{\alpha(n-n_0)}$ e $\sum_{k=n_0}^{n} x_n x_k^{-1} \leq C$ com $n_0 \leq n < n_1$. Então existem constantes positivas N, ν dependentes unicamente de K, C, α tais que*

$$x_n \leq Ne^{-\nu(n-n_0)},\ n \leq n < n_1.$$

Demonstração: Ponha $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k^{-1}$. Da hipótese $x_nS_n \leq C$, nós temos

$$\frac{-1}{x_nS_n} \leq -C^{-1}$$

Portanto

$$S_{n-1} = S_n - x_n^{-1} = S_n\left(1 - \frac{1}{x_nS_n}\right) \leq S_n(1 - C^{-1})$$

Logo, $\frac{1}{S_n} \leq \frac{1-C^{-1}}{S_{n-1}}$. Assim,

$$x_n \leq \frac{C}{S_n} \leq C\frac{1-C^{-1}}{S_{n-1}} \leq \cdots \leq C\frac{(1-C^{-1})^{n-n_0}}{S_{n_0}} = C(1-C^{-1})^{n-n_0}x_{n_0} \leq KC\left(\frac{C-1}{C}\right)^{n-n_0}.$$

Pela substituição $N = KC$ e $\nu = \ln\left(\frac{C}{C-1}\right)$ completamos a prova.

$\square$

Agora usamos o lema com $\{x_n\} = \{\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\}$, $n_0 = \tau$ e $n_1 = \tau_2$. Como foi dito anteriormente podemos tomar o C da desigualdade (3.3) maior que 1. Assim as hipóteses do lema ficam satisfeitas e podemos aplicá-lo obtendo a requerida desigualdade para o caso de $p = +\infty$

$\square$

Para mostrar a desigualdade no caso $1 \le p < +\infty$ necessitamos da seguinte proposição:

Proposição 3.1 *Sob as condições do teorema abordado no presente capítulo, com $1 \le p < +\infty$, para todo $\tau \in \mathbb{Z}^+$ e $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma^0(\tau)$, nós temos*

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \le l\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \ge m \ge \tau, \tag{3.4}$$

com $l > 0$ uma constante independente de τ e φ, e

$$\|T(n+m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \le \frac{1}{2}\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \ge k,\ m \ge \tau, \tag{3.5}$$

com $k \in \mathbb{Z}^+$ independente de τ e φ.

Demonstração: Pelo fato de $0 \notin A\sigma(\Upsilon_0)$, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$C\|\Upsilon_0\xi\|_p \ge \|\xi\|_p,\ \forall\ \xi \in l_0^p. \tag{3.6}$$

Chegaremos a (3.4) tirando proveito de (3.6). Com efeito, consideramos $\tau \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi \in \mathcal{B}^0(\tau)$, $m \ge \tau$. Defina as funções $\xi \in l_0^p$ por

$$\xi(n) = \begin{cases} T(n,\tau)\varphi, & n > m, \\ 0, & 0 \le m \le n. \end{cases}$$

Agora calculamos $(\Upsilon_0\xi)(n)$. Lembrando que $(\Upsilon\xi)(n) = \xi(n+1) - T(n+1,n)\xi(n)$ fica claro que, para $0 \leq n \leq m-1$, temos $(\Upsilon\xi)(n) = 0$. No caso em que $n > m$ temos

$$\begin{aligned}(\Upsilon\xi)(n) \ &= T(n+1,\tau)\varphi - T(n+1,n)T(n,\tau)\varphi \\ \\ &= T(n+1,\tau)\varphi - T(n+1,\tau)\varphi = 0.\end{aligned}$$

Resta observar o caso $m = n$, neste temos $\xi(m+1) = T(m+1,\tau)\varphi$ e $\xi(m) = 0$, e portanto $(\Upsilon\xi)(m) = T(m+1,\tau)\varphi$ e escrevemos

$$(\Upsilon\xi)(n) = \begin{cases} T(m+1,\tau)\varphi, & m = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando (3.6) temos

$$C\|T(m+1,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \ n > m \geq \tau.$$

Levando em conta a limitação exponencial do operador solução do sistema (1.1) junto com a desigualdade acima escrevemos $T(m+1,\tau) = T(m+1,m)T(m,\tau)$ e obtemos

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq CK^{\#}e^{\alpha^{\#}}\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \ n > m \geq \tau.$$

Pondo $l = \max\{1, CK^{\#}e^{\alpha^{\#}}\}$ conseguimos a desigualdade (3.4). Provaremos agora a desigualdade (3.5). Sejam $a < b$ dois números naturais com $a \geq \tau$ tais que

$$\|T(b,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} > \frac{1}{2}\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

De (3.4), nós temos que

$$l\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \frac{1}{2l}\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \ a \leq n \leq b. \tag{3.7}$$

Com efeito, usando (3.4) para $n \geq a$, $l\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \frac{1}{l}\|T(b,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, agora usando a desigualdade anterior nos dá $\frac{1}{l}\|T(b,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} > \frac{1}{2l}\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, daí segue a desigualdade acima.

Defina a função $\xi \in l_0^p$ por

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq a, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=a+1}^{n} \frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau), & a+1 \leq n \leq b, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=a+1}^{b+1} \frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,\tau), & n \geq b+1. \end{cases}$$

Fazendo um cálculo semelhante ao que foi feito para mostrar a desigualdade (3.1) no caso $p = +\infty$ pode-se ver

$$(\Upsilon_0 \xi)(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < a, \\ \dfrac{T(n+1,\tau)\varphi}{\|T(n+1,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & a \leq n \leq b, \\ 0, & n > b. \end{cases}$$

A partir da desigualdade (3.6) nós podemos deduzir que $\sum_{k=a}^{b} \|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}$ é limitado superiormente por $C(b-a+1)$, isto desde que $\|(\Upsilon\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} = 1$. Assim a estimativa (3.7) implica

$$\begin{aligned} C(b-a+1) &\geq \sum_{n=a+1}^{b} \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \left(\sum_{k=a+1}^{n} \frac{1}{\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) \\ &\geq \sum_{n=a+1}^{b} \frac{1}{2l} \|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \left(\sum_{k=a+1}^{n} \frac{1}{l\|T(a,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) \\ &= \frac{1}{2l^2} \sum_{n=a+1}^{b} (n-a) \\ &= \frac{(b-a+1)(b-a)}{4l^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $b - a \leq 4l^2 C$. Pondo $k := [|4l^2 C|] + 1$ (onde $[|s|]$ denota o maior inteiro $\leq s$), a desigualdade (3.5) segue, completando assim a demostração da proposição.

$\square$

Demonstração do Teorema 3.1 no caso $1 \leq p < +\infty$: Usando a proposição anterior com $n \geq m \geq \tau$ e escrevendo $n - m = n_1 k + r,\ 0 \leq r < k,\ n_1 \in \mathbb{Z}^+$. Pelas desigualdades (3.4) e (3.5), nós temos

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{1}{2^{n_1}}\|T(r+m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{l}{2^{n_1}}\|T(m,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Tomando $N := 2l$ e $\nu := \ln \frac{2}{k}$ obtemos (3.1).

$\square$

Do teorema anterior, segue o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Sob as condições do teorema abordado nesta seção, o espaço $\mathcal{B}^0(\tau)$ pode ser expresso como $\mathcal{B}^0(\tau) = \{\varphi \in \mathcal{B}_\gamma : \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ne^{-\nu(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq \tau \geq 0\}$, para certas constantes positivas $N,\ \nu$. Portanto, $\mathcal{B}^0(\tau)$ é um subespaço linear fechado de $\mathcal{B}_\gamma$.*

Demonstração: Basta observar a definição do espaço $\mathcal{B}^0(\tau)$ e substituir o resultado obtido do teorema nesta definição.

$\square$

4 Dicotomia Exponencial

Neste capítulo trataremos do resultado central desta dissertação o qual enunciamos abaixo.

Teorema 4.1 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita. Então para* $1 \leq p \leq +\infty$ *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial.

(ii) $\Upsilon : l^p \longrightarrow l^p$ *é um operador sobrejetivo e* $\mathcal{B}^0(0)$ *é complementado em* $\mathcal{B}_\gamma$.

Demonstração do Teorema: $\boldsymbol{(i) \Rightarrow (ii)}$. Primeiro nos preocuparemos com o **caso** $\boldsymbol{1 \leq p < +\infty}$. Suponha que (1.1) tem dicotomia exponencial. Nós observamos que $P(0)\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0)$. A relação $P(0)\mathcal{B}_\gamma \subseteq \mathcal{B}^0(0)$ vem do fato que para $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma$ usando a dicotomia exponencial, temos $\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha n}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Rightarrow \|T(n,0)\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} \leq K^p e^{-\alpha np}\|\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma}$ o qual implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T(n,0)\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \sum_{n=0}^{\infty} K^p e^{-\alpha np}\|\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{K^p\|\varphi\|^p_{\mathcal{B}_\gamma}}{1 - e^{-\alpha p}},$$

o que por sua vez implica que $\varphi \in \mathcal{B}^0(0)$. Enquanto a inclusão inversa pode ser vista através da desigualdade

$$\|T(n,0)Q(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \frac{1}{K}e^{\alpha n}\|Q(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \tag{4.1}$$

a qual nos diz que $Q(0)\varphi = 0$. Logo $\varphi = P(0)\varphi + Q(0)\varphi = P(0)\varphi$ e daí $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma$. Portanto $\mathcal{B}^0(0)$ é complementado em $\mathcal{B}_\gamma$ pelo espaço $Q(0)\mathcal{B}_\gamma$.

Se $\eta \in l^p$ nós definimos a função $\xi : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ por $\xi(0) = -\sum_{\tau=1}^{\infty} T(0,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)$ e

$$\xi(n) = \sum_{\tau=1}^{n} T(n,\tau)P(\tau)\eta(\tau-1) - \sum_{\tau=n+1}^{\infty} T(n,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1), \ n \geq 1.$$

Pela Proposição 2.2 da seção "Sobre Dicotomia Exponencial", existe uma constante $\hat{C} > 0$ independente de n tal que

$$\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \hat{C} \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-\alpha|n-\tau|} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

A qual é obtida usando a dicotomia exponencial para o operador $T(n,\tau)$ e a existência do $\sup_{m\geq 0} \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}$ e do $\sup_{m\geq 0} \|Q(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}$. Para um número q conjugado de p (isto é, $1 = p^{-1} + q^{-1}$), e considerando que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha|n-\tau|} &\leq \sum_{n=1}^{\tau-1} e^{-\alpha(\tau-n)} + \sum_{n=\tau}^{\infty} e^{-\alpha(n-\tau)} \\ &\leq 2\sum_{n=\tau}^{\infty} e^{-\alpha(n-\tau)} \\ &= \frac{2}{1-e^{-\alpha}}, \end{aligned}$$

tem-se

$$\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p \leq \hat{C}^p \left(\frac{2}{1-e^{\alpha}}\right)^{\frac{p}{q}} \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-\alpha|n-\tau|} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p,$$

e agora somando com respeito a n e considerando que $1 + \frac{p}{q} = p$, temos

$$\sum_{n} \|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p \leq \hat{C}^p \left(\frac{2}{1-e^{\alpha}}\right)^{\frac{p}{q}} \sum_{n}\sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-\alpha|n-\tau|} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p$$

$$= \hat{C}^p \left(\frac{2}{1-e^{\alpha}}\right)^{\frac{p}{q}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{n} e^{-\alpha|n-\tau|} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p$$

$$= \hat{C}^p \left(\frac{2}{1-e^{\alpha}}\right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{2}{1-e^{-\alpha}}\right) \sum_{\tau=1}^{\infty} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p$$

$$= \hat{C}^p \left(\frac{2}{1-e^{-\alpha}}\right)^{p} \sum_{\tau=1}^{\infty} \|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p .$$

Daí,

$$\|\xi\|_p \leq \frac{2\hat{C}}{1-e^{-\alpha}} \|\eta\|_p .$$

Como $\eta \in l^p$ temos que $\xi \in l^p$. Mais ainda, podemos deduzir da definição de Υ, que $\Upsilon\xi = \eta$ e portanto Υ é sobrejetivo. De fato, se $n = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
(\Upsilon\xi)(0) \quad &= T(1,1)P(1)\eta(0) - \sum_{\tau=2}^{\infty} T(1,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1) + \sum_{\tau=1}^{\infty} T(1,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1) \\
&= P(1)\eta(0) + Q(1)\eta(0) = \eta(0),
\end{aligned}$$

caso $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
(\Upsilon\xi)(n) \quad &= \sum_{\tau=1}^{n+1} T(n+1,\tau)P(\tau)\eta(\tau-1) - \sum_{\tau=n+1}^{\infty} T(n+1,\tau)Q(\tau)\eta(n-1) \\
&-T(n+1,n) \sum_{\tau=1}^{n} T(n,\tau)P(\tau)\eta(n-1) + T(n+1,n) \sum_{\tau=n+1}^{\infty} T(n,\tau)Q(n)\eta(n-1) \\
&= T(n+1,n+1)P(n+1)\eta(n) + T(n+1,n+1)Q(n+1)\eta(n) \\
&= (P(n+1) + Q(n+1))\eta(n) = \eta(n).
\end{aligned}$$

Nós provaremos $(ii) \Rightarrow (i)$ do Teorema 4.1 a partir da seguinte estimativa.

Proposição 4.1 *Assuma que a condição (2.1) é válida. Para $1 \leq p \leq +\infty$, suponha que a aplicação Υ é sobrejetiva e $\mathcal{B}^0(0)$ é complementado em $\mathcal{B}_\gamma$. Então existem constantes positivas N, ν tais que*

$$\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq Ne^{\nu(n-\tau)}\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \tag{4.2}$$

para $\varphi \in \mathcal{B}^1(0),\ n \geq \tau \geq 0$ onde $\mathcal{B}^1(0)$ denota o complemento de $\mathcal{B}^0(0)$ em $\mathcal{B}_\gamma$.

Antes da demonstração da proposição enunciamos e provamos o seguinte Lema:

Lema 4.1 *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos. Assuma que existem constantes $c > 1$ e $K, \alpha \geq 0$ tais que $x_n \leq Ke^{\alpha(n-m)}x_m$ e*

$$\sum_{k=m}^{n} x_m x_k^{-1} \leq c,\ \forall\ n \geq m \geq 0.$$

Então existem constantes N, ν dependendo unicamente de K, c, α tais que $x_n \geq Ne^{\nu(n-m)}x_m$ para $n \geq m \geq 0$.

Demonstração: Seja $S_m = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{x_k}$. De $x_m S_m \leq c$, nós temos

$$\frac{-1}{x_n S_n} \leq -c^{-1}.$$

Portanto,

$$S_n = S_{n-1} - x_{n-1}^{-1} = S_{n-1}\left(1 - \frac{1}{x_{n-1}S_{n-1}}\right) \leq S_{n-1}(1 - c^{-1}).$$

Então, $\frac{1}{S_{n-1}} \leq \frac{(1-c^{-1})}{S_n}$. Assim,

$$x_m \leq \frac{c}{S_m} \leq c\frac{1-c^{-1}}{S_{m+1}} \leq \cdots \leq c\frac{(1-c^{-1})^{n-m}}{S_n} = c(1-c^{-1})^{n-m}x_n.$$

Para finalizar a prova, escolhemos $N = \frac{1}{c},\ \nu = \ln\frac{c}{c-1}$.

□

Demonstração da Proposição 4.1: Primeiramente nós tratamos do **caso $p = +\infty$**. Denotamos por $\mathcal{D}^\infty$ o conjunto de todas as funções $\xi \in l^\infty$ para as quais $\xi(0) \in \mathcal{B}^1(0)$ equipado com a norma de l^∞. Do Teorema do Isomorfismo de Banach, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C\|\Upsilon\xi\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty, \ \forall\ \xi \in \mathcal{D}^\infty. \tag{4.3}$$

Escolhemos $\varphi \neq 0$, $\varphi \in \mathcal{B}^1(0)$ de modo que $T(n,0)\varphi \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Caso contrário, existe $\tau \geq 0$ tal que $T(\tau,0)\varphi = 0$, e se nós definirmos $\hat{\xi}(n) = T(n,0)\varphi$, então $\hat{\xi}(n) = 0$, $\forall\ n \geq \tau$, pois tem-se $\hat{\xi}(n) = T(n,\tau)T(\tau,0)\varphi = T(n,\tau)0 = 0$. Assim $\hat{\xi} \in l^\infty$, o que implica que $\varphi \in \mathcal{B}^0(0) \cap \mathcal{B}^1(0)$, e portando $\varphi = 0$ o que é impossível. Para um número natural τ suficientemente grande, definimos as funções $\xi, \eta : Z^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ por

$$\xi(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=n+1}^{\tau} \frac{T(n,0)\varphi}{\|T(m,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & 0 \leq n < \tau, \\ 0, & n \geq \tau, \end{cases}$$

e

$$\eta(n) = \begin{cases} \dfrac{-T(n+1,0)\varphi}{\|T(n+1,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & 0 \leq n < \tau, \\ 0, & n \geq \tau. \end{cases}$$

Então $\xi \in \mathcal{D}^\infty$ e $\eta \in l^\infty$, e temos que $\Upsilon\xi = \eta$. Segue de (4.3) que existe uma constante $\hat{C} > 0$ tal que

$$\sum_{m=n}^{\tau} \frac{\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}{\|T(m,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}} \leq \hat{C}, \ 0 \leq n \leq \tau.$$

Desta última desigualdade, da limitação exponencial do operador solução e do Lema 4.1., nós obtemos $\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq Ne^{\nu(n-\tau)}\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, $n \geq \tau \geq 0$. Isto completa a demonstração para o caso $p = +\infty$

□

Para provar a proposição acima para o caso $1 \leq p < +\infty$ nós precisamos do seguinte lema:

Lema 4.2 *Sob as hipóteses da Proposição anterior, temos as seguintes estimativas:*

(i)

$$\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq l\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ \varphi \in \mathcal{B}^1(0),\ n \geq \tau \geq 0, \tag{4.4}$$

onde l é um número positivo apropriado independente de τ e n.

(ii)

$$\|T(\tau+n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq 2\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq k,\ \tau \geq 0,\ \varphi \in \mathcal{B}^1(0), \tag{4.5}$$

onde k é um número natural dependente de l e C (aqui C é a constante dada na desigualdade (4.3))

A demonstração do lema acima é feita no fim do capítulo.

Nós agora provamos a Proposição 4.1 para o **caso $\boldsymbol{1 \leq p < +\infty}$**.

Demonstração da Proposição 4.1: Dado $1 \leq p < +\infty$. Tendo em vista o lema acima, se n e τ são números naturais tais que $n \geq \tau$, escrevendo $n - \tau = mk + r$ (onde k é a constante obtida na parte *(ii)* do lema), para $0 \leq r < k$ e $m \in \mathbb{Z}^+$, obtemos

$$\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq 2^m\|T(r+\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq 2^m l\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Tomando $N = \frac{l}{2}$ e $\nu = \ln\frac{2}{k}$ a desigualdade (4.2) segue.

$\square$

Agora estamos prontos para mostrar $(ii) \Rightarrow (i)$, lembrado que ainda estamos no **caso $\boldsymbol{1 \leq p < +\infty}$**.

Demonstração do Teorema 4.1: $\boldsymbol{(ii) \Rightarrow (i)}$ Seja $\mathcal{B}^1(n) = T(n,0)\mathcal{B}^1(0),$ para $n \geq 0$. Então,

$$T(n,\tau)\mathcal{B}^0(\tau) \subseteq \mathcal{B}^0(n),\ T(n,\tau)\mathcal{B}^1(\tau) = \mathcal{B}^1(n),\ n \geq \tau \geq 0. \tag{4.6}$$

De fato, tomando $\varphi \in \mathcal{B}^0(\tau)$, queremos verificar que $T(n,\tau)\varphi \in \mathcal{B}^0(n)$, temos por definição que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|T(k,n)T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p = \sum_{k=n}^{\infty} \|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p \leq \sum_{k=\tau}^{\infty} \|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p < +\infty,$$

o que implica que $T(n,\tau)\varphi \in \mathcal{B}^0(n)$. Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{B}^1(\tau)$ podemos escrever $\varphi = T(\tau,0)\psi,\ \psi \in \mathcal{B}^0(0)$ e daí

$$T(n,\tau)\varphi = T(n,\tau)T(\tau,0)\psi = T(n,0)\psi \in \mathcal{B}^1(n).$$

Considere $\mathcal{D}^p := \{\xi \in l^p : \xi(0) \in \mathcal{B}^1(0)\}$ equipado com a norma de l^p. Nós observamos que $\mathcal{D}^p$ é um subespaço fechado do espaço de Banach l^p e portanto é completo. Pela Observação 2.1, nós temos que $\ker \Upsilon = \{\xi \in l^p : \xi(n) = T(n,0)\varphi,\ n \in \mathbb{Z}^+,$ para algum $\varphi \in \mathcal{B}^0(0)\}$. Levando em conta que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0) \oplus \mathcal{B}^1(0)$ e que $\varphi = \xi(0) \in \mathcal{B}^1(0)$ por definição de $\mathcal{D}^p$ e $\|\xi\|_p < \infty$, nós obtemos que $\ker \Upsilon_{\mathcal{D}^p}$ (a restrição de Υ à $\mathcal{D}^p$) é $\{0\}$. E podemos afirmar qe $\Upsilon_{\mathcal{D}^p}$ é sobrejetivo. De fato, para cada $\eta \in l^p$ existe uma função $\xi \in l^p$ tal que $\Upsilon\xi = \eta$, pois Υ é sobrejetivo de l^p sobre l^p. Agora nós escrevemos $\xi(0) = \xi^0(0) + \xi^1(0)$, onde $\xi^0(0) \in \mathcal{B}^0(0)$ e $\xi^1(0) \in \mathcal{B}^1(0)$. Nós definimos $\delta(n) := T(n,0)\xi^0(0),\ n \geq 0$, como $\xi^0(0) \in \mathcal{B}^0(0),\ \delta \in \ker \Upsilon$. Ponha $\hat{\eta} = \xi - \delta$, logo $\hat{\eta} \in l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Denotamos $\hat{\eta}(0) = \xi^1(0) \in \mathcal{B}^1(0)$, portando $\hat{\eta} \in \mathcal{D}^p$. Por outro lado $(\Upsilon\hat{\eta})(n) = (\Upsilon\xi)(n) - (\Upsilon\delta)(n) = (\Upsilon\xi)(n) = \eta(n)$, assim a afirmação fica provada. Finalmente, $\Upsilon_{\mathcal{D}^p} : \mathcal{D}^p \longrightarrow l^p$ é inversível. Agora, pode-se conluir, do Teorema do Isomorfismo de Banach, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C\|\Upsilon\xi\|_p \geq \|\xi\|_p,\ \forall\ \xi \in \mathcal{D}^p. \tag{4.7}$$

Afirmamos que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^1(n) \oplus \mathcal{B}^0(n),\ n \in \mathbb{Z}^+$. De (4.7) nós obtemos que

$$0 \notin A\sigma(\Upsilon_0).$$

A relação acima e o Corolário 3.1 implicam que $\mathcal{B}^0(n)$ é fechado. Do fato que $\mathcal{B}^1(0)$ é fechado, deduzimos que $\mathcal{B}^1(n)$ é fechado e $\mathcal{B}^1(n) \cap \mathcal{B}^1(n) = \{0\}$. Com efeito, tome $\varphi \in \mathcal{B}^0(n) \cap \mathcal{B}^1(n)$, em particular $\varphi \in \mathcal{B}^1(n)$ e portanto por (4.6) existe $\psi,\ T(n,0)\psi = \varphi$, mas como $\sum_{k=n}^{\infty} \|T(k,n)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \sum_{k=n}^{\infty} \|T(k,0)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} < +\infty$ implica que $\psi \in \mathcal{B}^0(0) \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Fixe um número natural $\tau > 0$ e $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$. Para um número natural $m > \tau + 1$ nós definimos as seguintes funções $\xi, \eta : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$. por

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau, \\ (n - \tau + 1)T(n,\tau)\varphi, & \tau \leq n \leq m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

e

$$\eta(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau, \\ T(n+1,\tau)\varphi, & \tau \leq n < m, \\ -(m - \tau + 1)T(m+1,\tau)\varphi, & m = n, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Então $\xi, \eta \in l^p$ e satisfazem a equação $(\Upsilon\xi)(n) = \eta(n)$ para todo $n \geq \tau > 0$. De fato, Se $\tau \leq n < m$, obtemos

$$\begin{aligned} (\Upsilon\xi)(n) &= (n - \tau + 2)T(n+1,\tau)\varphi - (n - \tau + 1)T(n+1,n)T(n,\tau)\varphi \\ &= T(n+1,\tau)\varphi = \eta(n). \end{aligned}$$

Se $n = m$ nós obtemos

$$(\Upsilon\xi)(m) = -T(m+1,m)\xi(m) = -(m - \tau + 1)T(m+1,\tau)\varphi = \eta(m).$$

Se $n > m$ nós obtemos $(\Upsilon\xi)(n) = 0 = \eta(n)$. Como Υ é sobrejetiva por hipótese, existe $\delta \in l^p$ tal que $\Upsilon\delta = \eta$, e que nos dá $\xi - \delta \in \ker \Upsilon$. Assim, da definição do $\ker \Upsilon$, $\xi(n) - \delta(n) = T(n,\tau)(\varphi - \delta(\tau))$, $n \geq \tau$, o qual implica que $\varphi - \delta(\tau) \in \mathcal{B}^0(\tau)$. Por outro lado, nós observamos que $\eta(n) = 0$, $0 \leq n < \tau$, portanto pela definição de Υ, $\delta(n+1) = T(n+1,n)\delta(n)$, $0 \leq n < \tau$. Se $\delta(0) = \delta^0 + \delta^1$, $\delta^i \in \mathcal{B}^i(0)$, $i = 0, 1$, então

$$\delta(\tau) = T(\tau,\tau-1)T(\tau-1,\tau-2)\cdots T(1,0)\delta(0) = T(\tau,0)\delta(0) = T(\tau,0)\delta^0 + T(\tau,0)\delta^1,$$

e por (4.6), nós temos que $T(\tau,0)\delta^i \in \mathcal{B}^i(\tau)$. Portanto $\varphi = \varphi - \delta(\tau) + T(\tau,0)\delta^0 + T(\tau,0)\delta^1 \in \mathcal{B}^0(\tau) + \mathcal{B}^1(\tau)$. Assim nossa afirmação fica provada.

Sejam $P(n)$ as projeções de $\mathcal{B}_\gamma$ sobre $\mathcal{B}^0(n)$ com núcleo $\mathcal{B}^1(n)$, $n \geq 0$. Então a relação (4.6) implica $P(n)T(n,\tau) = T(n,\tau)P(\tau)$, $n \geq \tau$. Para isto escrevemos $\varphi = \varphi^0 + \varphi^1$, $\varphi^0 \in \mathcal{B}^0(\tau)$, $\varphi^1 \in \mathcal{B}^1(\tau)$, lembramos que $P(n)\phi = 0$, $\phi \in \mathcal{B}^1(n)$ e $P(n)\phi = \phi$, $\phi \in \mathcal{B}^0(n)$. Por (4.6) $T(n,\tau)\varphi^1 \in \mathcal{B}^1(n)$, daí $P(n)T(n,\tau)\varphi^1 = 0$ e temos que $P(n)T(n,\tau)\varphi = T(n,\tau)\varphi^0 = T(n,\tau)P(\tau)\varphi$.

De (4.2) e (4.6) nós obtemos que a restrição $T(n,\tau)|Im(Q(\tau))$, $n \geq \tau$, é um isomorfismo da $Im(Q(\tau))$ na $Im(Q(n))$. Com efeito, observe primeiramente que $Im(Q(m)) = \mathcal{B}^1(m)$. Assim usamos (4.6) para ver que $T(n,\tau)$ é sobrejetivo vendo que $T(n,\tau)\mathcal{B}^1(\tau) = \mathcal{B}^1(n)$ e a injetividade se dá da seguinte forma. Tome $\varphi \in \mathcal{B}^1(\tau)$, existe $\psi \in \mathcal{B}^1(0)$, $\varphi = T(\tau,0)\psi$ e a desigualdade (4.2) se aplica a ψ e temos

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \|T(n,\tau)T(\tau,0)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \|T(n,0)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq Ne^{\nu(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Finalmente, por (4.2) e Teorema 3.1 existem constantes $K, \alpha > 0$ tais que obtemos os ítens (iii) e (iv) da Definição 2.1. Usando a desigualdade (3.1) com $m = \tau$, obtemos que

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ne^{-\nu(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Agora, tomamos $\varphi \in Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma$ com $\tau > n$, então existe $\delta \in \mathcal{B}^1(0)$ tal que $\varphi = T(\tau,0)\delta = T(\tau,n)T(n,0)\delta$, como $T(\tau,n)$ é isomorfismo de $Im(Q(\tau))$ em $Im(Q(n))$ como já foi mostrado, e $\varphi \in Im(Q(\tau))$ então podemos escrever $T(n,\tau)\varphi = T(n,0)\delta$. Como $\delta \in \mathcal{B}^1(0)$, a desigualdade (4.2) se aplica a δ da seguinte forma

$$\|T(\tau,0)\delta\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq N_0 e^{\nu_0(\tau-n)}\|T(n,0)\delta\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Rightarrow N_0^{-1}e^{\nu_0(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Agora tomando $K = \max\{N, N_0^{-1}\}$ e $\alpha = \min\{\nu, \nu_0\}$ temos as desigualdades:

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ n \geq \tau \geq 0,\ \varphi \in P(\tau)\mathcal{B}_\gamma,$$

e

$$\|T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{\alpha(n-\tau)}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ \tau > n,\ \varphi \in Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma.$$

Assim a equação (1.1) tem dicotomia exponencial.

□

Nós agora provaremos o Teorema 4.1 para o **caso $\boldsymbol{p = +\infty}$**.

Demonstração do Teorema 4.1: *(i)* ⇒ *(ii)* Observe que $P(0)\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0)$. A relação $P(0)\mathcal{B}_\gamma \subseteq \mathcal{B}^0(0)$ segue da seguinte estimativa

$$\sup_{n\geq 0}\|T(n,0)P(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \sup_{n\geq 0} Ke^{-\alpha n}\|P(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \|P(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma},\ \varphi \in \mathcal{B}_\gamma;$$

a inclusão inversa segue da estimativa (4.1). Com efeito, seja $\varphi \in \mathcal{B}^0(0)$, logo $\{T(n,0)Q(0)\varphi\}_n$ é uma sequência limitada em $\mathcal{B}_\gamma$. Então (4.1) implica que $Q(0)\varphi = 0$, portanto $\varphi = P(0)\varphi$.
Se $\eta \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ nós definimos a função ξ com valores em $\mathcal{B}_\gamma$ por

$$\xi(n) = \sum_{\tau=1}^{n} T(n,\tau)P(\tau)\eta(\tau-1) - \sum_{\tau=n+1}^{\infty} T(n,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1),\ n \geq 1,$$

com $\xi(0) = -\sum_{\tau=1}^{\infty} T(0,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)$. Nós temos a seguinte estimativa

$$\sup_{n\geq 1}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \frac{2K}{1-e^{-\alpha}}(1 + \sup_{\tau}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|\eta\|_\infty,$$

onde K, α são as constantes da Definição 2.1. Isso do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq \sum_{\tau=1}^{n} Ke^{-\alpha(n-\tau)}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+ \sum_{n+1}^{\infty} Ke^{\alpha(n-\tau)}\|Q(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\|\eta(\tau-1)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \left(K\left(1 + \sup_{\tau}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\right)\|\eta\|_\infty\right)\left(\sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-\alpha|n-\tau|}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2K}{1-e^{-\alpha}}\left(1+\sup_{\tau}\|P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\right)\|\eta\|_\infty,$$

passando o supremo em n em ambos membros é obtida a desigualdade.

Por definição de Υ, nós temos $\Upsilon\xi=\eta$. Com efeito, verificamos primeiramente no caso em que $n=0$.

$$\begin{aligned}
(\Upsilon\xi)(0) &= \xi(1)-T(1,0)\xi(0)\\
&= P(1)\eta(0)-\sum_{\tau=2}^{\infty}T(1,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)+\sum_{\tau=1}^{\infty}T(1,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)\\
&= P(1)\eta(0)+Q(1)\eta(0)=\eta(0).
\end{aligned}$$

Agora, se $n>0$, temos

$$\begin{aligned}
(\Upsilon\xi)(n) &= \sum_{\tau=1}^{n+1}T(n+1,\tau)P(\tau)\eta(\tau-1)-\sum_{\tau=n+2}^{\infty}T(n+1,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)\\
&\quad -T(n+1,n)\sum_{\tau=1}^{n}T(n,\tau)P(\tau)\eta(\tau-1)+T(n+1,n)\sum_{\tau=n+1}^{\infty}T(n,\tau)Q(\tau)\eta(\tau-1)\\
&= T(n+1,n+1)P(n+1)\eta(n)+T(n+1,n+1)Q(\tau)\eta(n)=\eta(n).
\end{aligned}$$

Então $\Upsilon : l^p \longrightarrow l^p$ é sobrejetivo. A prova ***(ii)*** $\Rightarrow$ ***(i)*** é semelhante ao que foi feito para o caso $1\leq p<+\infty$ uma vez que as proposições e lemas utilizados foram provados também para o caso $p=+\infty$, usando a norma $\|\cdot\|_\infty$. De fato, seja $\mathcal{B}^1(n)=T(n,0)\mathcal{B}^1(0),\ n\geq 0$. Então,

$$T(n,\tau)\mathcal{B}^0(\tau)\subseteq\mathcal{B}^0(n),\ T(n,\tau)\mathcal{B}^1(\tau)=\mathcal{B}^1(n),\ n\geq\tau\geq 0. \tag{4.8}$$

De fato, tomando $\varphi\in\mathcal{B}^0(\tau)$, queremos verificar que $T(n,\tau)\varphi\in\mathcal{B}^0(n)$, temos por definição que

$$\sup_{k\geq n}\|T(k,n)T(n,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=\sup_{k\geq n}\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\leq\sup_{k\geq\tau}\|T(k,\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}<+\infty,$$

o que implica que $T(n,\tau)\varphi \in \mathcal{B}^0(n)$. Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{B}^1(\tau)$ podemos escrever $\varphi = T(\tau,0)\psi,\ \psi \in \mathcal{B}^0(0)$ e daí

$$T(n,\tau)\varphi = T(n,\tau)T(\tau,0)\psi = T(n,0)\psi \in \mathcal{B}^1(n).$$

Considere $\mathcal{D}^\infty := \{\xi \in l^\infty : \xi(0) \in \mathcal{B}^1(0)\}$ equipado com a norma de l^∞. Nós observamos que $\mathcal{D}^\infty$ é um subespaço fechado do espaço de Banach l^∞ e portanto é completo. Pela Observação 2.1, nós temos que $\ker\Upsilon = \{\xi \in l^\infty : \xi(n) = T(n,0)\varphi,\ n \in \mathbb{Z}^+,$ para algum $\varphi \in \mathcal{B}^0(0)\}$. Levando em conta que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0) \oplus \mathcal{B}^1(0)$ e que $\varphi = \xi(0) \in \mathcal{B}^1(0)$ por definição de $\mathcal{D}^\infty$ e $\|\xi\|_\infty < \infty$, nós obtemos que $\ker\Upsilon_{\mathcal{D}^\infty}$ (a restrição de Υ à $\mathcal{D}^\infty$) é $\{0\}$. E podemos afirmar que $\Upsilon_{\mathcal{D}^\infty}$ é sobrejetivo. De fato, para cada $\eta \in l^\infty$ existe uma função $\xi \in l^\infty$ tal que $\Upsilon\xi = \eta$, pois Υ é sobrejetivo de l^∞ sobre l^∞. Agora nós escrevemos $\xi(0) = \xi^0(0) + \xi^1(0)$, onde $\xi^0(0) \in \mathcal{B}^0(0)$ e $\xi^1(0) \in \mathcal{B}^1(0)$. Nós definimos $\delta(n) := T(n,0)\xi^0(0),\ n \geq 0$, com $\xi^0(0) \in \mathcal{B}^0(0),\ \delta \in \ker\Upsilon$. Ponha $\hat{\eta} = \xi - \delta$, logo $\hat{\eta} \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Denotamos $\hat{\eta}(0) = \xi^1(0) \in \mathcal{B}^1(0)$, portando $\hat{\eta} \in \mathcal{D}^\infty$. Por outro lado $(\Upsilon\hat{\eta})(n) = (\Upsilon\xi)(n) - (\Upsilon\delta)(n) = (\Upsilon\xi)(n) = \eta(n)$, assim a afirmação fica provada. Finalmente, $\Upsilon_{\mathcal{D}^\infty} : \mathcal{D}^\infty \longrightarrow l^\infty$ é inversível. Agora, pode-se concluir, do Teorema do Isomorfismo de Banach, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C\|\Upsilon\xi\|_\infty \geq \|\xi\|_\infty,\ \forall\ \xi \in \mathcal{D}^\infty. \tag{4.9}$$

Afirmamos que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^1(n) \oplus \mathcal{B}^0(n),\ n \in \mathbb{Z}^+$. De (4.9) nós obtemos que

$$0 \notin A\sigma(\Upsilon_0).$$

A relação acima e o Corolário 3.1 implicam que $\mathcal{B}^0(n)$ é fechado. Do fato que $\mathcal{B}^1(0)$ é fechado, deduzimos que $\mathcal{B}^1(n)$ é fechado e $\mathcal{B}^1(n) \cap \mathcal{B}^1(n) = \{0\}$. Com efeito, tome $\varphi \in \mathcal{B}^0(n) \cap \mathcal{B}^1(n)$, em particular $\varphi \in \mathcal{B}^1(n)$ e portanto por (4.8) existe $\psi \in \mathcal{B}^1(0),\ T(n,0)\psi = \varphi$, mas como $\sup_{k\geq n}\|T(k,n)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \sup_{k\geq n}\|T(k,0)\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} < +\infty$ implica que $\psi \in \mathcal{B}^0(0) \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Fixe um número natural $\tau > 0$ e $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$. Para um número natural $m > \tau + 1$ nós definimos as seguintes funções $\xi, \eta : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$. por

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau, \\ (n - \tau + 1)T(n,\tau)\varphi, & \tau \leq n \leq m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

e

$$\eta(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < \tau, \\ T(n+1,\tau)\varphi, & \tau \leq n < m, \\ -(m - \tau + 1)T(m+1,\tau)\varphi, & m = n, \\ 0, & n \geq m. \end{cases}$$

Então $\xi, \eta \in l^\infty$ e satisfazem a equação $(\Upsilon\xi)(n) = \eta(n)$ para todo $n \geq \tau > 0$. De fato, o cálculo é indêntico ao que foi feito para o caso $1 \leq p < +\infty$.

Como Υ é sobrejetiva por hipótese, existe $\delta \in l^\infty$ tal que $\Upsilon\delta = \eta$, e que nos dá $\xi - \delta \in \ker \Upsilon$. Assim, da definição do $\ker \Upsilon$, $\xi(n) - \delta(n) = T(n,\tau)(\varphi - \delta(\tau))$, $n \geq \tau$, o qual implica que $\varphi - \delta(\tau) \in \mathcal{B}^0(\tau)$. Por outro lado, nós observamos que $\eta(n) = 0$, $0 \leq n < \tau$, portanto pela definição de Υ, $\delta(n+1) = T(n+1,n)\delta(n)$, $0 \leq n < \tau$. Se $\delta(0) = \delta^0 + \delta^1$, $\delta^i \in \mathcal{B}^i(0)$, $i = 0, 1$, então

$$\delta(\tau) = T(\tau,\tau-1)T(\tau-1,\tau-2)\cdots T(1,0)\delta(0) = T(\tau,0)\delta(0) = T(\tau,0)\delta^0 + T(\tau,0)\delta^1,$$

e por (4.6), nós temos que $T(\tau,0)\delta^i \in \mathcal{B}^i(\tau)$. Portanto $\varphi = \varphi - \delta(\tau) + T(\tau,0)\delta^0 + T(\tau,0)\delta^1 \in \mathcal{B}^0(\tau) + \mathcal{B}^1(\tau)$. Assim nossa afirmação fica provada.

O restante da prova não difere do caso anterior.

$\square$

Demonstração do Lema 4.2: Fixe $\varphi \in \mathcal{B}^1(0)$, $\varphi \neq 0$ e $n \geq \tau \geq 0$. Nós assumimos que $n \geq 1$. Agora tomando a função $\xi : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ definida por:

$$\xi(m) = \begin{cases} T(m,0)\varphi, & 0 \leq m \leq n-1, \\ 0, & m > n-1. \end{cases}$$

Nós temos $\xi \in \mathcal{D}^p$. Então, por definição de Υ nós obtemos

$$(\Upsilon\xi)(m) = \begin{cases} -T(n,0)\varphi, & m = n-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A desigualdade (4.3) nos dá $C\|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, para todo $0 \leq \tau \leq n-1$. Pondo $l := \min\{C^{-1}, 1\} \in \mathbb{Z}^+$, daí segue a desigualdade (4.4). Mostraremos que existe um número $k = k(C,l)$ tal que vale a desigualdade (4.5). Escolhemos $\varphi \in \mathcal{B}^1(0)$, $\varphi \neq 0$, tal que $T(n,0)\varphi \neq 0$, para todo $n \geq 0$. Para provar (4.5), fixe $a < b$ dois números naturais tais que $\|T(b,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} < 2\|T(a,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$. De (4.4) temos

$$\frac{2}{l}\|T(a,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \|T(n,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq l\|T(a,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \tag{4.10}$$

para todo $a \leq n \leq b$. Agora definimos a função $\xi : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ como

$$\xi(n) = \begin{cases} -\left(\displaystyle\sum_{\tau=a+1}^{b} \frac{1}{\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,0)\varphi, & 0 \leq n \leq a, \\ -\left(\displaystyle\sum_{\tau=n+1}^{b} \frac{1}{\|T(\tau,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) T(n,0)\varphi, & a \leq n < b, \\ 0, & n \geq b. \end{cases}$$

Então $\xi \in \mathcal{D}^p$. Usando a definição de Υ obtemos que

$$(\Upsilon\xi)(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < a, \\ \dfrac{T(n+1,0)\varphi}{\|T(n+1,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}, & a \leq n < b, \\ 0, & n \geq b. \end{cases}$$

Pela desigualdade (4.7), nós obtemos

$$C(b-a)^{\frac{1}{p}} \geq \|\xi\|_p.$$

Isso porque vemos que $\|\Upsilon\xi\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\|(\Upsilon\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=a}^{b-1}\|(\Upsilon\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=a}^{b-1}\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}$.

Usando a desigualdade de Hölder, nós temos $\sum_{n=a}^{b-1}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}}\|\xi\|_p$. Substituindo isto na desigualdade anterior, usando a estimativa (4.10) e vendo que $C(b-a) = C(b-a)^{1-\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}$, nós temos

$$C(b-a) \geq \sum_{n=a}^{b-1}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq \sum_{n=a}^{b-1} l\|T(a,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\left(\sum_{\tau=n+1}^{b}\frac{l}{2\|T(a,0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\right) > \frac{l^2}{4}(b-a)^2.$$

Isto nos dá $b-a < 4C/l^2$. Pondo $k := [|4C/l^2|]+1$, a desigualdade (4.5) segue. Isto completa a prova do lema.

$\square$

5 Robustez da Dicotomia Exponencial

Neste capítulo estudaremos a robustez da dicotomia exponencial da equação (1.1) sob pequenas pertubações, tal teoria produz um progresso significante na teoria das Equações Diferenças de Volterra com retardamento infinito. O teorema abaixo é o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.1 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita e que a equação (1.1) tenha dicotomia exponencial. Além disso, seja* $\{\mathcal{L}(n,\cdot)\}$ *uma sequência de operadores lineares limitados de* $\mathcal{B}_\gamma$ *em* $\mathbb{C}^r$*. Se* $\mathcal{H} := \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \|\mathcal{L}(n,\cdot)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r}$ *é suficientemente pequeno, então a equação*

$$x(n+1) = L(n,x_n) + \mathcal{L}(n,x_n),\ \ n \geq 0, \tag{5.1}$$

também tem uma dicotomia exponencial.

Um resultado similar foi obtido por Ha e Huy em [12], para equações diferenças ordinárias.

Para provar o Teorema 5.1 vamos usar a seguinte caracterização de dicotomia exponencial:

Teorema 5.2 *Assuma que a condição (2.1) é satisfeita e seja* $\mathcal{B}$ *um subespaço linear fechado de* $\mathcal{B}_\gamma$*. Então para todo* $1 \leq p \leq +\infty$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A equação (1.1) tem dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$ *satisfazendo*

$\ker P(0) = \mathcal{B}$.

(ii) $\Upsilon_{\mathcal{B}} : l^p_{\mathcal{B}} \longrightarrow l^p$ *é inversível.*

Demonstração: ***(i)*** $\Rightarrow$ ***(ii)*** Como na demonstração do Teorema 4.1, temos que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0) \oplus \mathcal{B}$. Para um $\eta \in l^p$ fixo, segue do Teorema 4.1 que existe $\xi \in l^p$ tal que $\Upsilon\xi = \eta$. Por outro lado, pela definição de $\mathcal{B}^0(0)$ a função $\delta(n) := T(n,0)P(0)\xi(0),\ n \geq 0$ pertence à l^p (veja que $(\Upsilon\delta)(n) = 0$). Mais ainda, $\xi - \delta \in l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ e que $\xi - \delta \in l^p_{\mathcal{B}}$ pois

$$(\xi - \delta)(0) = \xi(0) - \delta(0) = \xi(0) - P(0)\xi(0) = Q(0)\xi(0) \in \mathcal{B},$$

o qual implica que $\Upsilon_{\mathcal{B}}(\xi - \delta) = \Upsilon\xi - \Upsilon\delta = \eta$. Portanto $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ é sobrejetivo. Levando em conta que $\mathcal{B}^0(0) \cap \mathcal{B} = \{0\}$, segue que $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ é injetivo.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Como $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ é a restrição do operador Υ ao subespaço $l^p_{\mathcal{B}}$, segue que Υ é sobrejetivo. Como Υ_0 é parte de $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ em $l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ e $\Upsilon_{\mathcal{B}}^{-1}$ é um operador limitado, há uma constante $C > 0$ tal que $C\|\Upsilon_0\xi\|_p \geq \|\xi\|_p,\ \forall\ \xi \in l^p_0(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Portanto $0 \notin A\sigma(\Upsilon_0)$, logo o Corolário 3.1 vale e nos dá que $\mathcal{B}^0(0)$ é fechado. Agora provaremos que $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0) \oplus \mathcal{B}$. Dado $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$, com $T(\tau, 0)\varphi = 0$ para algum $\tau > 0$, então $\varphi \in \mathcal{B}^0(0)$. Caso contrário, $T(n,0)\varphi \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Nós definimos as funções $\xi, \eta \in l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ por

$$\xi(n) = \begin{cases} \varphi, & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \qquad e \quad \eta(n) = \begin{cases} -T(1,0)\varphi, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Claramente, $\Upsilon\xi = \eta$. Como $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ é inversível, existe $\delta \in l^p_{\mathcal{B}}(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ tal que $\xi - \delta \in \ker \Upsilon$ e portanto $\xi(n) - \delta(n) = T(n,0)(\varphi - \delta(0)),\ n \in \mathbb{Z}^+$. Como $\xi - \delta \in l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$, isto implica que $\varphi = \varphi - \delta(0) + \delta(0) \in \mathcal{B}^0(0) + \mathcal{B}$. Agora se $\psi \in \mathcal{B}^0(0) \cap \mathcal{B}$, então a função $\xi \in l^p(\mathbb{Z}^+ \mathcal{B}_\gamma)$, definida por $\xi(n) = T(n,0)\psi$, pertence a $l^p_{\mathcal{B}} \cap \ker \Upsilon$. Portanto $\Upsilon_{\mathcal{B}}\xi = 0$ e portanto nós temos $\xi = 0$. Assim, $\psi = 0$ o que nos dá a soma direta $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}^0(0) \oplus \mathcal{B}$ então a afirmativa segue do Teorema 4.1.

$\square$

Demonstração do Teorema 5.1: Consideramos $1 \leq p \leq +\infty$. $\ker P(0) = \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}_\gamma$. Pelo Teorema 5.2 o operador $\Upsilon_\mathcal{B}$ é inversível. Agora seja $\Upsilon_{\mathcal{L},\mathcal{B}} : l^p_\mathcal{B} \longrightarrow l^p$ definido por (2.3) com $T(n+1,n)$ substitído por $\hat{T}(n+1,n)$ onde $\hat{T}(\cdot,\cdot)$ denota o operador solução da equação funcional linear (5.1). Nós agora definimos o operador $\mathcal{H}^* : l^p \longrightarrow l^p$ por $(\mathcal{H}^*\xi)(n) = E^0(\mathcal{L}(n,\xi(n)))$, onde

$$E^0(v)(t) = \begin{cases} v, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

É fácil ver que $\|\mathcal{H}^*\|_{l^p \longrightarrow l^p} \leq \mathcal{H}$. Com efeito, primeiro observamos que $\|(\mathcal{H}^*\xi)(n)\| \leq \mathcal{H}\|\xi(n)\|$ para todo n. Isto é feito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{H}^*\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &= \|E^0(\mathcal{L}(n,\xi(n)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \sup_{\theta \in \mathbb{Z}^-} |[E^0(\mathcal{L}(n,\xi(n)))](\theta)|e^{\gamma\theta} \\
&= |\mathcal{L}(n,\xi(n))| \leq \mathcal{H}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}.
\end{aligned}$$

Primeiramente verificamos a desigualdade para o caso $1 \leq p < +\infty$.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}^*\|^p_{l^p \longrightarrow l^p} &= \sup_{\|\xi\|_p = 1} \|\mathcal{H}^*\xi\|^p_p \\
&= \sup_{\|\xi\|_p = 1} \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mathcal{H}^*\xi)(n)\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_p = 1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^p \|\xi(n)\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \sup_{\|\xi\|_p = 1} \mathcal{H}^p \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi(n)\|^p_{\mathcal{B}_\gamma} = \mathcal{H}^p \sup_{\|\xi\|_p = 1} \|\xi\|^p_p = \mathcal{H}^p.
\end{aligned}$$

Analogamente para $p = +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}^*\|_{l^\infty \longrightarrow l^\infty} &= \sup_{\|\xi\|_\infty = 1} \|\mathcal{H}^*\xi\|_\infty \\
&= \sup_{\|\xi\|_\infty = 1} \sup_{n \geq 0} \|(\mathcal{H}^*\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_\infty = 1} \sup_{n \geq 0} \mathcal{H}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \sup_{\|\xi\|_\infty = 1} \mathcal{H} \sup_{n \geq 0} \|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \mathcal{H} \sup_{\|\xi\|_\infty = 1} \|\xi\|_\infty = \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Deduzimos da definição de $\mathcal{H}^*$ que $\Upsilon_{\mathcal{L},\mathcal{B}} = \Upsilon_{\mathcal{B}} - \mathcal{H}^*$. Como $\Upsilon_{\mathcal{B}}$ é inversível, pelo Teorema de Pertubação de Kato, nós obtemos que, se $\|\mathcal{H}^*\|_{l^p \longrightarrow l^p}$ é suficientemente pequeno então $\Upsilon_{\mathcal{L},\mathcal{B}}$ é também inversível. Pelo Teorema 5.2, nós temos que a equação (5.1) tem dicotomia exponencial. $\square$

6 Sobre Soluções Limitadas

Neste capítulo nós discutiremos a respeito de soluções limitadas da equação (1.1) sob diversos tipos de perturbações. Os resultados aqui obtidos são interessantes porque podem ser facilmente utilizados para obter informações sobre limitação de soluções de uma enorme classe de sistemas incluindo as Equações em Diferenças do tipo Volterra. Nós começamos estudando a existência de soluções limitadas para o seguinte problema de evolução:

$$x(n+1) = L(n, x_n) + h(n), \ n \geq 0, \tag{6.1}$$

$$P(0)x_0 = \varphi. \tag{6.2}$$

O primeiro resutado que temos é o seguinte teorema:

Teorema 6.1 *Suponha que a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial com dado* $(\alpha, K, P(n))$. *Então para cada* $h \in l^{\infty}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{C}^r)$ *e cada* $\varphi \in Im(P(0))$, *o problema de valor inicial (6.1)-(6.2) tem uma única solução* x *tal que* $x_\bullet$ *é limitada (em particular* x *é limitada).*

Antes da demonstração do teorema anterior, enunciamos a fórmula de representação de soluções, devido a Murakami (ver [17]) e enunciamos e provamos o Lema 2.8 da referência [2][1], o qual será útil para nosso propósito.

Proposição 6.1 *Para cada* $(\tau, \phi) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{B}$, *a solução* $x(\cdot, \tau, \phi, h)$ *da equação (6.1) para*

[1]Lembramos que aqui, o espaço $\mathcal{B}$ é o espaço de fase definido no capítulo de Preliminares.

$n \geq \tau$ passando por (τ, ϕ) satisfaz a seguinte relação:

$$x_n(\tau, \phi, h) = T(n, \tau)\phi + \sum_{s=\tau}^{n-1} T(n, s+1)E^0(h(s)), \;\; n \geq \tau. \tag{6.3}$$

Lema 6.1 *Assuma que a função $Z : [\tau, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}$ satisfaz a relação*

$$Z(n) = T(n, \tau)Z(\tau) + \sum_{s=\tau}^{n-1} T(n, s+1)E^0(h(s)), \tag{6.4}$$

e definamos uma função $y : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ por

$$y(n) = \begin{cases} [Z(n)]\,(0), & n \geq \tau, \\ [Z(\tau)]\,(n-\tau), & n < \tau. \end{cases} \tag{6.5}$$

Então $y(n)$ é solução da equação (6.1) com $n \geq \tau$ e $y_n = Z(n), \;\; n \geq \tau$

Demonstração do Lema 6.1: Com as mesmas notações da proposição acima, usando a equação (6.3) temos que

$$Z(n) = x_n(\tau, Z(\tau), h).$$

Então,

$$[Z(n)](s) = x(n+s, \tau, Z(\tau), h), \;\; s \leq 0,$$

e

$$[Z(n)](0) = x(n, \tau, Z(\tau), h).$$

Usando as igualdades acima, nós obtemos

$$y_n = x_n(\tau, Z(\tau), h).$$

Logo $y_n = Z(n)$ para $n \geq \tau$. Como $[Z(n)](0) = y_n(0) = y(n)$, nós obtemos

$$y(n) = x(n, \tau, Z(\tau), h) = Z(n, \tau, y_\tau, h), \;\; n \geq \tau.$$

Chegamos que $y_n = Z(n)$ e $y(n)$ é solução da equação (6.1) com $n \geq \tau$.

$\square$

Demonstração do Teorema 6.1: Defina a função ξ com valores em $\mathcal{B}_\gamma$ por

$$\xi(n) = T(n,0)P(0)\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma(n,s)E^0(h(s)), \ n \geq 0, \tag{6.6}$$

onde $\Gamma(n,s)$ denota a função de Green associada a equação (1.1), isto é,

$$\Gamma(n,s) = \begin{cases} T(n,s+1)P(s+1), & \text{se } n-1 \geq s, \\ -T(n,s+1)Q(s+1), & \text{se } s > n-1, \end{cases}$$

e $E^0(\cdot)$ é a função definida em (5.2). Observe que

$$\xi(n) = T(n,0)\xi(0) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)E^0(h(s)), \ n \geq 0. \tag{6.7}$$

Para certificar-nos da afirmação acima nós calculamos $\xi(0)$ na equação (6.6) usando a função de Green, temos

$$\xi(0) = P(0)\varphi - \sum_{s=0}^{\infty} T(0,s+1)Q(s+1)E^0(h(s)),$$

isolando $P(0)\varphi$,

$$P(0)\varphi = \xi(0) + \sum_{s=0}^{\infty} T(0,s+1)Q(s+1)E^0(h(s)),$$

agora substituindo esse resultado na equação (6.6) e usando uma propriedade do operador solução, obtemos

$$\begin{aligned} \xi(n) &= T(n,0)\xi(0) + \sum_{s=0}^{\infty} T(n,s+1)Q(s+1)E^0(h(s)) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)P(s+1)E^0(h(s)) \\ &- \sum_{s=n}^{\infty} T(n,s+1)Q(s+1)E^0(h(s)) \end{aligned}$$

$$= T(n,0)\xi(0) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)P(n,s+1)E^0(h(s)) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)Q(s+1)E^0(h(s))$$

$$= T(n,0)\xi(0) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)E^0(h(s)).$$

Agora nós definimos a função $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ por

$$x(n) = \begin{cases} [\xi(n)](0), & \text{se } n \geq 0, \\ [\xi(0)](n), & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

De (6.7) e do Lema 6.1 nós obtemos que $x(n)$ é solução do problema de valor inicial (6.1)-(6.2) junto com a relação $x_n = \xi(n),\ n \geq 0$. Mais ainda, nós podemos deduzir que x é limitada. De fato, nós temos a seguinte estimativa através do mesmo processo aplicado no fim do capítulo de Dicotomia Exponencial:

$$\|x_\bullet\|_\infty \leq K[\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + 2\sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|h\|_\infty (1 - e^{-\alpha})^{-1}],$$

onde K é a constante dada na Definição 2.1. De fato, a relação $x_n = \xi(n)$ nos diz que $\|x_\bullet\|_\infty = \sup_{n\geq 0}\|x_n\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \sup_{n\geq 0}\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, logo é suficiente calcular, (considerando o supremo), $\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|\xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq \|T(n,0)P(0)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sum_{s=0}^{n-1} \|T(n,s+1)P(s+1)E^0(h(s))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+ \sum_{s=n}^{\infty} \|T(n,s+1)Q(s+1)E^0(h(s))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq Ke^{-\alpha n}\|P(0)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sum_{s=0}^{n-1} Ke^{-\alpha(n-s-1)}\|P(s+1)E^0(h(s))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+ \sum_{s=n}^{\infty} Ke^{\alpha(n-s-1)}\|Q(s+1)E^0(h(s))\|_{\mathcal{B}_\gamma}
\end{aligned}$$

$$\leq Ke^{-\alpha n}\|P(0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}+\sum_{s=0}^{n-1}Ke^{-\alpha(n-s-1)}\|P(s+1)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}|h(s)|$$

$$+\sum_{s=n}^{\infty}Ke^{\alpha(n-s-1)}\|Q(s+1)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}|h(s)|$$

$$\leq Ke^{-\alpha n}\|P(0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}+\sum_{s=0}^{n-1}Ke^{-\alpha(n-s-1)}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\|h\|_\infty$$

$$+\sum_{s=n}^{\infty}Ke^{\alpha(n-s-1)}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\|h\|_\infty$$

$$\leq K[e^{-\alpha n}\|P(0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}+2(\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}))\sum_{s=0}^{\infty}e^{-\alpha|n-s-1|}\|h\|_\infty]$$

$$= K[e^{-\alpha n}\|P(0)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}+2(\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}))(1-e^{-\alpha})^{-1}\|h\|_\infty].$$

Para provar a unicidade, sejam $x^1_\bullet$ e $x^2_\bullet$ duas soluções do problema de valor inicial (6.1)-(6.2). Ponha $z_n = x^1_n - x^2_n$ e logo $z(n)$ é uma solução de $z(n+1) = L(n, z_n)$, $n \geq 0$, $P(0)z_0 = 0$, pois $P(0)x^1_0 = P(0)x^2_0 = \varphi$. Usando a fórmula de representação de Murakami (Proposição 6.1, nós obtemos que $z_n = T(n,0)z_0$, $n \geq 0$, uma vez que a perturbação é nula. Agora, lembrando que $z_0 = Q(0)z_0$ e pelas propriedades (i) e (ii) da Definição 2.1, nós obtemos que $z_0 = T(0,n)Q(n)z_n$. Pela propriedade (iv) da Definição 2.1 e levando em conta a Proposição 2.2, nós obtemos

$$\begin{aligned}\|z_0\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq Ke^{-\alpha n}\|Q(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}\|z_n\|_{\mathcal{B}_\gamma}\\ &\leq Ke^{-\alpha n}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\|z_n\|_{\mathcal{B}_\gamma}\\ &\leq Ke^{-\alpha n}\sup\nolimits_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\|z_\bullet\|_\infty.\end{aligned}$$

Nós conluímos que $z_0 = 0$ e portanto $z_n = 0$ o que implica a unicidade.

$\square$

A seguir, nós estabeleceremos uma versão do resultado anterior que nos permite considerar perturbações da equação (1.1) localmente Lipschitzianas.

Para enunciar o próximo resultado nós precisamos da seguinte condição:

Condição (C): Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

(C_1) A função $f(n,\xi)$ é localmente Lipschitz em $\xi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$, i.e., para cada R positivo, $|f(n,\xi) - f(n,\eta)| \leq \beta\|\xi - \eta\|_\infty$, para todo $\xi, \eta \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ tais que $\|\xi\|_\infty, \|\eta\|_\infty \leq R,\ n \in \mathbb{Z}^+$, onde β é uma constante positiva.

(C_2) $f(\bullet, 0) \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ é tal que

$$2K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})(\beta + \|f(\bullet, 0)\|_\infty)(1 - e^{-\alpha})^{-1} < 1,$$

onde K, α são as constantes da Definição 2.1.

Denote por $l^\infty[\mathcal{N}]$ a bola $\|\eta\|_\infty \leq \mathcal{N}$ em $l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Também denote por $P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{N}]$ a bola $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \mathcal{N}$ em $P(0)\mathcal{B}_\gamma$. Nós obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.2 *Suponha que a equação linear em diferença (1.1) tem uma dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$ e a condição (C) vale. Então existem constantes positivas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ tais que para cada $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{N}]$ existe uma única solução limitada $y = y(\varphi) = y(n, 0, \psi)$ da equação*

$$y(n+1) = L(n, y_n) + f(n, y_\bullet), n \geq 0, \tag{6.8}$$

com $P(0)\psi = \varphi$ e tal que $\|y_\bullet\|_\infty \leq \mathcal{M}$.

Demonstração: Escolhemos $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\delta(\mathcal{M}) := 2K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})(\mathcal{M}+1)(\beta + \|f(\bullet,0)\|_\infty)(1-e^{-\alpha})^{-1} < \mathcal{M},$$

Dado φ pertencente a $P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{N}]$, com $\mathcal{N} = K^{-1}(\mathcal{M} - \delta(\mathcal{M}))$. Nós consideramos o operador Ω em $l^\infty[\mathcal{M}]$ definido por

$$(\Omega\xi)(n) = T(n,0)P(0)\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi)),\ n \geq 0, \tag{6.9}$$

onde $\Gamma(n,s)$ é a função de Green associada a equação (1.1). O próximo passo é mostrar que Ω está bem definida. Para isto façamos as seguintes considerações:

1. $|f(s,\xi)| \leq |f(s,\xi) - f(s,0)| + |f(s,0)| \leq \beta\|\xi\|_\infty + \|f(\bullet,0)\|_\infty$.
2. $(\beta\|\xi\|_\infty + \|f(\bullet,0)\|_\infty) \leq (\mathcal{M}+1)(\beta + \|f(\bullet,0)\|_\infty)$.

Tendo em mente o que diz a Condição (C), usando as considerações acima e substituindo $\Gamma(n,s)$, nós argumentamos como segue:

$$\begin{aligned}
\|(\Omega\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq Ke^{-\alpha n}\mathcal{N} + K\sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\Big\{\sum_{s=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-(s+1))}|f(s,\xi)| \\
&\quad + \sum_{s=n}^{\infty} e^{\alpha(n-(s+1))}|f(s,\xi)|\Big\} \\
&\leq K\mathcal{N} + \frac{2K}{1-e^{-\alpha}}\sup_{n\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})(\beta\|\xi\|_\infty + \|f(\bullet,0)\|_\infty) \\
&\leq \mathcal{M} - \delta(\mathcal{M}) + \delta(\mathcal{M}) = \mathcal{M},
\end{aligned}$$

donde $\|(\Omega\xi)\|_\infty \leq \mathcal{M}$. Resta apenas verificar que Ω é uma contração. Mostraremos que operador Ω é uma contração com constante $\lambda := 2K\beta\sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})(1 - e^{-\alpha})^{-1}$. A condição (C_2) implica $\lambda < 1$. Tome ξ e η em $l^\infty[\mathcal{M}]$, use a condição (C) obtendo

$$
\begin{aligned}
\|\Omega\xi - \Omega\eta\|_\infty &= \sup_{n\geq 0} \|(\Omega\xi)(n) - (\Omega\eta)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&= \sup_{n\geq 0} \left\| \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi) - f(s,\eta)) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq K\left(1 + \sup_{m\geq 0} \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\right) \sup_{n\geq 0} \left(\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\alpha|n-s-1|} |f(s,\xi) - f(s,\eta)| \right) \\
&\leq \frac{2K}{1-e^{-\alpha}} \left(1 + \sup_{m\geq 0} \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}\right) (\beta\|\xi - \eta\|_\infty) = \lambda\|\xi - \eta\|_\infty.
\end{aligned}
$$

A seguir, nós estabeleceremos a unicidade da solução. Seja $y = y(n,0,\psi)$ solução de (6.8) com as propriedades enunciadas. Considerando $z(n) = (\Omega y_\bullet)(n)$, segue de um cálculo direto que $z(n) = T(n,0)z(0) + \sum_{s=0}^{n-1} T(n,s+1)E^0(f(s,y_\bullet)),\ n \geq 0$. Agora definimos a função $a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ como

$$
a(n) = \begin{cases} [z(n)](0), & \text{se } n \geq 0, \\ [z(0)]\,(n), & \text{se } n < 0. \end{cases}
$$

Aplicando o Lema 6.1, nós podemos deduzir que $a(n)$ satisfaz, $a_n = z(n),\ n \geq 0$, e é uma solução de (6.1) com $h(n) = f(n, y_\bullet)$ e $P(0)a_0 = \varphi$. Então a diferença $x_n = a_n - y_n$ é solução do problema linear (1.1). Dessa maneira, nós temos $y_n = (\Omega y_\bullet)(n) + T(n,0)(\psi - (\Omega y_\bullet)(0))$. Agora ponha $\Phi(n) := \|T(n,0)Q(0)(\psi - (\Omega y_\bullet)(0))\|_{\mathcal{B}_\gamma}^{-1}$ e $\Psi(n) := \sum_{s=n}^{\infty} \Phi(s+1)$, nós temos

$$
\begin{aligned}
\Psi(n)/\Phi(n) &= \sum_{s=n}^{\infty} \|T(n,0)Q(0)(\psi - (\Omega y_\bullet)(0))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Phi(s+1) \\
&\leq K \sum_{s=n}^{\infty} e^{\alpha(n-(s+1))} \|Q(s+1)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \Phi(s+1)^{-1} \Phi(s+1)
\end{aligned}
$$

$$\leq K \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})(1-e^{-\alpha})^{-1},$$

portanto $\Psi(n) \leq K \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})(1-e^{-\alpha})^{-1}\Phi(n)$, $\forall\ n\geq 0$, o qual significa que $\|T(n,0)Q(0)(\psi-(\Omega y_\bullet)(0))\|_{\mathcal{B}_\gamma}$ é não limitada em $\mathbb{Z}^+$. Como $T(n,0)(\psi-(\Omega y_\bullet))(0) = T(n,0)Q(0)(\psi-(\Omega y_\bullet)(0))$, $y_\bullet$ e $\Omega y_\bullet$ são limitadas em $\mathbb{Z}^+$, nós concluímos que $y_n = (\Omega y_\bullet)(n)$. Portanto a unicidade de y segue do ponto fixo da aplicação Ω. Isto completa a prova do Teorema.

□

O seguinte corolário corresponde a um teorema de tipo Palmer para equações em diferença ordinárias lineares (ver Proposição 2.8 em [11], p. 274).

Corolário 6.1 *Suponha que a equação linear em diferença (1.1) tem uma dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$. Seja $g(n,\varphi)$ uma função localmente Lipschitz em φ com valores em $\mathbb{C}^r$, i.e., para cada número positivo R, $|g(n,\varphi)-g(n,\psi)| \leq N_g\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$, $\forall\ \varphi,\psi\in\mathcal{B}_\gamma$ tais que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\leq R$, $\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}\leq R$. Dado $h\in l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{C}^r)$ satisfazendo*

$$2K\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})(N_g+\|h\|_\infty+\|g(\bullet,0)\|_\infty)(1-e^{-\alpha})^{-1}<1,$$

onde K,α são as constantes dadas na Definição 2.1. Então existem constantes $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ tais que para cada $\varphi\in P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{N}]$ existe uma única solução limitada $x(n)$ da equação de evolução não-linear

$$x(n+1) = L(n,x_n)+h(n)+g(n,x_n), \tag{6.10}$$

com $P(0)x_0=\varphi$ para $n\geq 0$ tal que $\|x_\bullet\|_\infty\leq\mathcal{M}$.

Demonstração: Tome $f(n,\xi)=h(n)+g(n,\xi(n))$, $\xi\in l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathcal{B}_\gamma)$, é suficiente mostrar que $f(n,\xi)$ satisfaz a condição (C). Com efeito, observamos que, dados $\xi,\ \eta\in l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathcal{B}_\gamma)$, $\xi(n),\eta(n)\in\mathcal{B}_\gamma$, para todo $n\geq 0$, usando as hipóteses sobre g verificamos a condição (C_2)

$$|f(n,\xi)-f(n,\eta)| \quad = |g(n,\xi(n))-g(n,\eta(n))|$$

$$\leq N_g \|\xi(n) - \eta(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}$$

$$\leq N_g \sup_{n\geq 0} \|\xi(n) - \eta(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma}$$

$$= N_g \|\xi - \eta\|_\infty.$$

Então ponha $\beta := N_g$ e (C_1) está satisfeita. Note que a hipótese implica (C_2), simplesmente observando que $\|f(\bullet,0)\|_\infty \leq \|h\|_\infty + \|g(\bullet,0)\|_\infty$. Portanto a Condição (C) é satisfeita.

□

Antes de discutir o próximo resultado, precisamos introduzir as seguintes exigências técnicas:

Condição $(C)^*$: Nós assumimos as seguintes condições

$(C_1)^*$ Para todo número positivo R, $|f(n,\xi) - f(n,\eta)| \leq F(n,R,\|\xi-\eta\|_\infty)$ para todo $\xi,\eta \in l^\infty[R]$ e todo $n \in \mathbb{Z}^+$, onde $F : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é não-decrescente com respeito a segunda e a terceira variável.

$(C_2)^*$ $f(n,0) = 0, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

$(C_3)^*$ Existem constantes positivas μ e $\tilde{\mu}$ tais que $\beta_{\tilde{\mu}} := \sup_{\mathcal{M}\in(0,\tilde{\mu}]} \delta(\mathcal{M})/\mathcal{M} < 1$, onde $\delta(\mathcal{M}) := 2K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|F(\bullet,\mu,\mathcal{M})\|_2(1-e^{-2\alpha})^{1/2}$, K e α são as constantes da Definição 2.1.

A seguir, consideraremos um exemplo concreto de uma função f que satisfaz a condição $(C)^*$ mas não satisfaz o último corolário com $F \in l^2$.

Exemplo 6.1 *Defina* $f(n,\varphi) = \frac{\nu}{n}\hat{g}(|\varphi(0)|)(\sum_{-\infty}^{-1} a(s)\varphi(s) + \varphi(0))$, $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_\gamma(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$, *onde* ν *é uma constante suficientemente pequena,* $a(s)$ *é uma sequência de números complexos tais que* $m := \displaystyle\sum_{s=-\infty}^{-1} a(s)e^{-\gamma s} < +\infty$, *e* $\hat{g} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *é definida por*

$\hat{g}(x) = \sqrt{x}$. *Notamos que* $|\hat{g}(x) - \hat{g}(y)| \leq \sqrt{2|x-y|}$ *para todo* $x, y \in [0, \infty)$. *Com efeito, vemos que* $|x-y| \leq 2(x+y)$ $(x, y \geq 0)$ *e que* $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, *portanto*

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{2},$$

além disso veja que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$

e daí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \sqrt{2|x-y|}.$$

Como $\hat{g}(0) = 0$, *a segunda hipótese fica verificada. Finalmente a função* F *da Condição* $(C)^*$ *é dada por* $F(n, R, a) = \sqrt{2}(m+1)|\nu|\frac{1}{n}(Ra^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}a)$. *Para isto é suficiente estimar* $|f(n,\varphi) - f(n,\psi)|$ *para* $\varphi = \xi(n)$ *e* $\psi = \eta(n)$ *com* $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq R$ *e* $\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq a$. *Observamos que*

1. $|\varphi(0)| \leq \sup\limits_{\theta \in \mathbb{Z}^-} |\varphi(\theta)| e^{\gamma\theta} = \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$.

2. $|\varphi(s)| e^{\gamma s} \leq \sup_{s \in \mathbb{Z}^-} |\varphi(s)| e^{\gamma s} = \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Rightarrow |\varphi(s)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$.

3. *Usando os ítens acima, temos*

$$\begin{aligned}
|\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(0)| &= |\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(0) \\
&\quad + \hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(0)| \\
&\leq |\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(0)| \\
&\quad + |\hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(0)| \\
&\leq \sqrt{2|\varphi(0) - \psi(0)|}|\varphi(0)| + \sqrt{2|\psi(0)}|\varphi(0) - \psi(0)|
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{2\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sqrt{2\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$$

$$\leq \sqrt{2}(a^{\frac{1}{2}}R + R^{\frac{1}{2}}a).$$

4. Analogamente para $s<0$ temos

$$\begin{aligned}
|\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(s)| &= |\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(s) \\
&+\hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(s)| \\
&\leq |\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(s)| \\
&+|\hat{g}(|\psi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(s)| \\
&\leq \sqrt{2|\varphi(0)-\psi(0)|}|\varphi(s)| + \sqrt{2|\psi(0)}|\varphi(s)-\psi(s)| \\
&\leq \sqrt{2\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}e^{-\gamma s} + \sqrt{2\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}}\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}e^{-\gamma s} \\
&\leq (a^{\frac{1}{2}}R + R^{\frac{1}{2}}a)e^{-\gamma s}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Das observações e reorganizando adequadamente a soma temos,

$$\begin{aligned}
|f(n,\varphi) - f(n,\psi)| &\leq \frac{|\nu|}{n}\left|\sum_{s=-\infty}^{-1} a(s)\left(\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(s) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(s)\right)\right| \\
&+\frac{|\nu|}{n}\left|\hat{g}(|\varphi(0)|)\varphi(0) - \hat{g}(|\psi(0)|)\psi(0)\right| \\
&\leq \frac{|\nu|}{n}\left|\sum_{s=-\infty}^{-1} a(s)(a^{\frac{1}{2}}R + R^{\frac{1}{2}}a)e^{-\gamma s}\sqrt{2}\right| \\
&+\frac{|\nu|}{n}\left|\sqrt{2}(a^{\frac{1}{2}}R + R^{\frac{1}{2}}a)\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{2}(m+1)|\nu|\frac{1}{n}(Ra^{\frac{1}{2}} + R^{\frac{1}{2}}a).$$

Concluindo assim nosso exemplo.

Teorema 6.3 *Assuma que a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$ e que a Condiçao $(C)^*$ vale. Então as conclusões do Teorema 6.2 são verdadeiras.*

Demonstração: Deve-se fazer algumas modificações na demonstração do Teorema 6.2. Como por exemplo, mostrar que $\|(\Omega\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \mathcal{M}$. Com efeito, começamos da mesma forma que no Teorema anterior com as considerações oriundas da condição $(C)^*$:

1. Usando a condição $(C_1)^*$ e $(C_2)^*$, temos $|f(s,\xi)| \leq |f(s,\xi) - f(s,0)| + |f(s,0)| \leq F(n, R, \|\xi\|_\infty)$.
2. Considerando $F \in l^2$ usamos a desigualdade de Hölder para as funções $e^{-\alpha\bullet}$ e $F(\bullet, R, \|\xi\|_\infty)$, a qual nos dá
$$\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\alpha|n-s-1|}F(n, R, \|\xi\|_\infty) \leq \left(\sum_{s=0}^{\infty} e^{-2\alpha|n-s-1|}\right)^{\frac{1}{2}} \|F(\bullet, \mu, \mathcal{M})\|_2.$$
3. Também lembramos que $\|\xi\|_\infty \leq \mathcal{M}$, uma vez que $\xi \in l^\infty[\mathcal{M}]$ e usamos o $\delta(\mathcal{M})$ da hipótese $(C_3)^*$.

Assim temos

$$\begin{aligned}
\|(\Omega\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq K\mathcal{N} + K(1 + \sup_{m\geq 0}\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\left(\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\alpha|n-s-1|}F(n, R, \|\xi\|_\infty)\right) \\
&\leq K\mathcal{N} + K(1 + \sup_{m\geq 0}\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\left(\sum_{s=0}^{\infty} e^{-2\alpha|n-s-1|}\right)^{\frac{1}{2}} \|F(\bullet, \mu, \mathcal{M})\|_2
\end{aligned}$$

$$\leq K\mathcal{N} + K(1 + \sup_{m\geq 0} \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \left(\frac{2}{1-e^{-2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \|F(\bullet, \mu, \mathcal{M})\|_2$$

$$\leq \mathcal{M} - \delta(\mathcal{M}) + \delta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Analogamente para mostrar que Ω é contração, podemos chegar a

$$\begin{aligned} \|\Omega\xi - \Omega\eta\|_\infty &\leq K(1 + \sup_{m\geq 0} \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \left(\frac{2}{1-e^{-2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \|F(\bullet, \mu, \mathcal{M})\|_2 \\ &\leq \sup_{\mathcal{M}\in(0,\tilde{\mu}]} \frac{\delta(\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \|\xi - \eta\|_\infty = \beta_{\tilde{\mu}} \|\xi - \eta\|_\infty, \end{aligned}$$

como $\beta_{\tilde{\mu}} < 1$, temos a contração.

□

Agora nós consideramos a seguinte equação perturbada de (1.1):

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f(n, x_n), \ n \geq 0, \tag{6.11}$$

onde f é uma função com valores em $\mathbb{C}^r$ e definida sobre o espaço produto $\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma$.

Para estabelecer nosso próximo resultado, nós precisamos da seguinte condição:

Condição $(C)^{**}$: As seguintes condições valem.

$(C_1)^{**}$ A função $f(n, \cdot) : \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$ é contínua para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

$(C_2)^{**}$ Existem funções $m_f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ com $e^{\alpha\bullet} m_f \in l^1$ e $W_f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, esta última não-decrescente tal que $|f(n,\varphi)| \leq m_f(n) W_f(\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma})$, $\forall\ (n,\varphi) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma$.

$(C_3)^{**}$ $Ke^\alpha \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \lim_{r\to 0} \dfrac{W_f(r)}{r} \|e^{\alpha\bullet} m_f\|_1 < 1$, onde K, α são as constantes dadas na Definição 2.1.

Para obter nossos próximos resultados, precisamos de um conhecimento detalhado dos conjuntos relativamente compactos do espaço de Banach de todas as funções limitadas de

$\mathbb{Z}^+$ em $\mathcal{B}_\gamma$.

Lema 6.2 *Seja S um subconjunto de $l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(D_1) *O conjunto $H(n) = \{\xi(n) : \xi \in S\}$ é relativamente compacto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

(D_2) *S é equiconvergente no ponto ∞, i.e., para todo $\epsilon > 0$, existe um N tal que $\|\xi(n) - Z_\infty(\xi)\|_{\mathcal{B}_\gamma} < \epsilon$ para todo $n \geq N$, para todo $\xi \in S$, onde $Z_\infty(\xi) := \lim_{n\to\infty} \xi(n)$.*

Então S é um subconjunto relativamente compacto de $l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$.

Antes da prova pode-se observar que a condição (D_2) é equivalente a condição $(D_2)'$: Para cada $\epsilon > 0$ há um número natural N_0 tal que $\|\xi(m) - \xi(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} < \epsilon$, $\forall\, m \geq n \geq N_0$, $\forall\, \xi \in S$.
Demonstração do Lema: Para $N \in \mathbb{N}(N_0)$ denotamos por ξ_N a função a qual é igual à $\xi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+ . \mathcal{B}_\gamma)$ para $N_0 \leq n \leq N$ e que é igual à $\xi(N)$ para $n > N$. Então $S_N = \{\xi_N : \xi \in S\}$ é homeomorfo ao subconjunto do produto dos conjuntos $H(n)$, $N_0 \leq n \leq N$ o qual é relativamente compacto em $\mathcal{B}_\gamma^{N-N_0+1}$, e portanto S_N é relativamente compacto em $l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$. Para fazer isto, nós denotamos por $\hat{H}(n) = \{\xi(n) : \xi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)\}$ e por $\hat{S}_N = \{\xi_N : \xi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)\}$. Há um isomorfismo natural $\Phi : \hat{S}_N \simeq \prod_{n=N_0}^{N} \hat{H}(n)$, assim $\Phi|S_N : S_N \simeq \Phi(S_N)$, onde $\Phi|S_N$ denota a restrição Φ ao conjunto S_N. Finalmente, pela condição $(D_2)'$, pode-se ver que S é o limite uniforme dos conjuntos S_N relativamente compactos, e é portanto relativamente compacto. Isto conclui a prova do lema.

$\square$

Observação 6.1 *Observamos que a recíproca do lema acima não é verdadeira. Com efeito, para um $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$ fixo, o conjunto $S = \{\xi\}$ com $\xi(n) := (1 + (-1)^n)\varphi$, $n \geq 0$, é compacto em l^∞, mas (D_2) não é satisfeita pois existe $C := \min\{\|Z_\infty(\xi)\|_{\mathcal{B}_\gamma}, \|\xi(n) - Z_\infty(\xi)\|_{\mathcal{B}_\gamma}\}$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$ tem-se $\|\xi(n) - Z_\infty(\xi)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \geq C$, $n \geq N$. Por outro* *lado nós observamos que S é relativamente compacto em $l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$, então a condição (D_1) vale. Com efeito, nós consideramos aplicação contínua $\Phi_n : l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma) \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ definida por $\Phi_n(\xi) = \xi(n)$, então $\overline{H(n)} = \Phi_n(\overline{S})$.*

Temos o seguinte resultado:

Teorema 6.4 *Assuma que a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$ e que a Condição $(C)^{**}$ vale. Então há uma constante positiva $\mathcal{M}$ tal que para cada $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{M}]$ existe uma solução limitada $y = y(\varphi) = y(n, 0, \psi)$ com $P(0)\psi = \varphi$ da equação (6.11), para $n \geq 0$.*

Demonstração: Seja r um número positivo e $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\Theta := \lambda K + Ke^{\alpha} \sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|e^{\alpha \bullet} m_f\|_1 \frac{W_f(r)}{r} < 1.$$

Denotamos $\mathcal{M} := \lambda r$ e seja $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma$ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \mathcal{M}$. Agora, definimos o operador $\Upsilon^{\#}$ sobre $l^\infty[r]$ por

$$(\Upsilon^{\#}\xi)(n) = T(n, 0)P(0)\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma(n, s)E^0(f(s, \xi(s))). \tag{6.12}$$

Desejamos aplicar o Teorema do Ponto fixo de Schauder, para isso devemos mostrar que $\Upsilon^{\#} : l^\infty[r] \longrightarrow l^\infty[r]$ é uma aplicação contínua e que sua imagem é relativamente compacta. Considere $\xi \in l^\infty[r]$, nós provaremos que $\Upsilon^{\#}\xi \in l^\infty[r]$. Com efeito, usando a condição $(C_2)^{**}$, nós notamos que $\Upsilon^{\#}\xi$ pode ser estimado por:

$$\begin{aligned} \|(\Upsilon^{\#}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq K\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + K \sup_{m \geq}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\{\sum_{s=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-(s+1))} m_f(s) \\ &\quad + \sum_{n}^{\infty} e^{\alpha(n-(s+1))} m_f(s)\} W_f(r) \\ &\leq K\mathcal{M} + Ke^{\alpha} \sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})\|e^{\alpha \bullet} m_f\|_1 W_f(r) = \Theta r. \end{aligned}$$

Então, $\|\Upsilon^{\#}\xi\|_\infty \leq r$.

Para provar a continuidade do operador $\Upsilon^{\#}$, nós procedemos considerando a sequência $(\xi_m)_m$ tal que $\xi_m \to \xi$ em $l^\infty[r]$. Escolhemos $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande; usando a condição $(C_2)^{**}$, obtem-se a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|\Upsilon^{\#}\xi_m - \Upsilon^{\#}\xi\|_\infty &= \sup_{n\geq 0} \|(\Upsilon^{\#}\xi_m)(n) - (\Upsilon^{\#}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sup_{n\geq 0} \left\{ \left\| \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi_m(s))) - f(s,\xi(s)) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \right. \\
&\left. + \left\| \sum_{s=n}^{\infty} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \right\} \\
&\leq \sup_{n\geq 0} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \|T(n,s+1)P(s+1)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \right. \\
&\left. + \sum_{s=n}^{\infty} \|T(n,s+1)Q(s+1)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \right\} \\
&\leq K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{n_1-1} e^{-\alpha(n_1-s-1)} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&+ K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=n_1}^{\infty} e^{-\alpha(n_1-s-1)} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&\leq C(n_1) \max_{0\leq s\leq n_1-1} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&+ K e^{-\alpha(n_1-1)} \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=n_1}^{\infty} e^{\alpha s} m_f(s) 2W_f(r)
\end{aligned}
$$

$$\leq C(n_1) \max_{0\leq s\leq n_1-1} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))|$$

$$+2Ke^{\alpha} \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})W_f(r)\sum_{s=n_1}^{\infty} e^{\alpha s} m_f(s),$$

onde $C(n_1)$ é uma constante dependendo de n_1. Assim a afirmação fica provada.

Usando o Lema 6.2 prova-se que a imagem de $\Upsilon^{\#}$ é relativamente compacta. De fato, considerando uma sequência $(\xi_m)_m$ arbitrária em $l^\infty[r]$, nós obtemos que $(f(\cdot,\xi_m(\cdot)))_m$ é relativamente compacto em $l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{C}^r)$. Portanto há uma subsequência $f(\cdot,\xi_{m_i}(\cdot))_{m_i}$ uniformemente convergente para algum $\psi\in l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{C}^r)$. Podemos verificar que a sequência $(\Upsilon^{\#}\xi_{m_i}(n))_{m_i}$ converge para $T(n,0)P(0)\varphi+\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(n,s)E^0(\psi(s))$. Para isso nós fazemos a seguinte estimativa:

$$\left\|(\Upsilon^{\#}\xi_{m_i})(n) - T(n,0)P(0)\varphi - \sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(n,s)E^0(\psi(s))\right\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \left\|\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi_{m_i})-\psi(s))\right\|_{\mathcal{B}_\gamma}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{\infty} Ke^{-\alpha|n-s-1|}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})|f(s,\xi_{m_i})-\psi(s)|$$

$$\leq 2K\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})(1-e^{-\alpha})^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}|f(s,\xi_{m_i})-\psi(s)|.$$

Então, nós provamos que $H(n)=\{(\Upsilon^{\#}\xi)(n):\xi\in l^\infty[r]\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}_\gamma$, para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. A equiconvergência em ∞ da imagem de $\Upsilon^{\#}$ é consequência imediata do fato que o limite $Z_\infty(\Upsilon^{\#}\xi)$ é zero, uniformemente em $\xi\in l^\infty[r]$. De fato, segue da estimativa

$$\|(\Upsilon^{\#}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha n}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sum_{s=0}^{n-1}Ke^{-\alpha(n-s-1)}\|P(s+1)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}|f(s,\xi(s))|$$

$$+\sum_{s=n}^{\infty}Ke^{\alpha(n-s-1)}\|Q(s+1)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma}|f(s,\xi(s))|$$

$$\leq Ke^{-\alpha n}[\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + e^{\alpha} \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{n-1} e^{\alpha s}|f(s,\xi(s))|]$$

$$+K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=n}^{\infty} e^{\alpha(s+1)} W_f(\|\xi(s)\|_{\mathcal{B}_\gamma}) m_f(s)$$

$$\leq Ke^{-\alpha n}[\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + e^{\alpha} \sup\nolimits_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) W_f(r) \|e^{\alpha \bullet} m_f\|_1]$$

$$+Ke^{\alpha} \sup\nolimits_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) W_f(r) \textstyle\sum_{s=n}^{\infty} e^{\alpha s} m_f(s).$$

Finalmente o Lema 6.2 nos leva a concluir que a imagem de $\Upsilon^{\#}$ é relativamente compacta. Usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, nós deduzimos que $\Upsilon^{\#}$ tem um ponto fixo $\xi \in l^{\infty}[r]$, o que conclui a prova do Teorema 6.4.

$\square$

Observação 6.2 *Pode-se observar da prova do Teorema 6.4 que* $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$*, pois na última parte da demonstração pôde ser verificado que* $\|(\Upsilon^{\#}\xi)(n)\| \to 0$ *quando* $n \to +\infty$ *e como a existência da solução* $y(n)$ *foi demonstrada através do ponto fixo do operador* $\Upsilon^{\#}$ *sendo* $\Upsilon^{\#} y = y$ *temos que a afirmação é verdadeira.*

A seguir, consideramos a equação funcional em diferença linear não homogênea com retardamento infinito

$$x(n+1) = A(x_n) + f(n, x_n),\ n \geq 0, \tag{6.13}$$

onde $A : \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$ é um operador linear e $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$.

Corolário 6.2 *Assuma que o operador solução da equação* $x(n+1) = A(x_n)$*,* $T(n)$ *decai exponencialmente, isto é, existem constantes positivas* K, α *tais que*

$$\|T(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha n},\ \forall\ n \geq 0. \tag{6.14}$$

(ver exemplo 7.2 do próximo capítulo). A perturbação f é uma função satisfazendo $(C_1)^{**}$, $(C_2)^{**}$ e $Ke^{\alpha}\lim_{r\to 0}\dfrac{W_f(r)}{r}\|e^{\alpha\bullet}m_f\|_1 < 1$. Então existe uma constante positiva $\mathcal{M}$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma[\mathcal{M}]$ existe uma função limitada $y = y(\varphi) = y(n,0,\phi)$ com $y_0 = \varphi$ da equação (6.13) para todo $n \geq 0$.

Demonstração: Aqui imitamos a demonstração do teorema anterior com algumas modificações. Com efeito, Seja r um número positivo e $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\Theta := \lambda K + Ke^{\alpha}\|e^{\alpha\bullet}m_f\|_1\frac{W_f(r)}{r} < 1.$$

Denotamos $\mathcal{M} := \lambda r$ e seja $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq \mathcal{M}$. Agora, definimos o operador $\Upsilon^{\#}$ sobre $l^\infty[r]$ por

$$(\Upsilon^{\#}\xi)(n) = T(n)\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} T(s)E^0(f(s,\xi(s))). \tag{6.15}$$

Desejamos aplicar o Teorema do Ponto fixo de Schauder, para isso devemos mostrar que $\Upsilon^{\#} : l^\infty[r] \longrightarrow l^\infty[r]$ é uma aplicação contínua e que sua imagem é relativamente compacta. Considere $\xi \in l^\infty[r]$, nós provaremos que $\Upsilon^{\#}\xi \in l^\infty[r]$. Com efeito, usando a condição $(C_2)^{**}$, nós notamos que $\Upsilon^{\#}\xi$ pode ser estimado por:

$$\begin{aligned}
\|(\Upsilon^{\#}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} &\leq Ke^{-\alpha n}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sum_{s=0}^{\infty}\|T(s)E^0(f(s,\xi(s)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq K\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + K\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\alpha s}W_f(r)m_f(s) \\
&\leq K\lambda r + Ke^{\alpha}W_f(r)\|e^{\alpha\bullet}m_f\|_1 = \Theta r < r.
\end{aligned}$$

Então, $\|\Upsilon^{\#}\xi\|_\infty \leq r$.

Para provar a continuidade do operador $\Upsilon^{\#}$, nós procedemos considerando a sequência $(\xi_m)_m$ tal que $\xi_m \to \xi$ em $l^\infty[r]$. Usando a condição $(C)^{**}$, obtem-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|\Upsilon^{\#}\xi_m - \Upsilon^{\#}\xi\|_\infty &= \sup_{n\geq 0} \|(\Upsilon^{\#}\xi_m)(n) - (\Upsilon^{\#}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sup_n \left\| \sum_{s=0}^{\infty} T(s)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sum_{s=0}^{\infty} Ke^{-\alpha s}|f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim a afirmação fica provada.

Usando o Lema 6.2 prova-se que a imagem de $\Upsilon^{\#}$ é relativamente compacta. De fato, considerando uma sequência $(\xi_m)_m$ arbitrária em $l^\infty[r]$, nós obtemos que $(f(\cdot,\xi_m(\cdot)))_m$ é relativamente compacto em $l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{C}^r)$. Portanto há uma subsequência $f(\cdot,\xi_{m_i}(\cdot))_{m_i}$ uniformemente convergente para algum $\psi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{C}^r)$. Podemos verifcar que a sequência $(\Upsilon^{\#}\xi_{m_i}(n))_{m_i}$ converge para $T(n)\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} T(s)E^0(\psi(s))$. Para isso, com m_i suficientemente grande, nós fazemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\left\| (\Upsilon^{\#}\xi_{m_i})(n) - T(n)\varphi - \sum_{s=0}^{\infty} T(s)E^0(\psi(s)) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} &= \left\| \sum_{s=0}^{\infty} T(s)E^0(f(s,\xi_{m_i}) - \psi(s)) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sum_{s=0}^{\infty} Ke^{|-\alpha n|}|f(s,\xi_{m_i}) - \psi(s)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Então, nós provamos que $H(n) = \{(\Upsilon^{\#}\xi)(n) : \xi \in l^\infty[r]\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}_\gamma$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. A equiconvergência em ∞ da imagem de $\Upsilon^{\#}$ é consequência imediata do fato que o limite $Z_\infty(\Upsilon^{\#}\xi)$ é zero, uniformemente em $\xi \in l^\infty[r]$. Finalmente conclui-se como na demonstração do Corolário 6.2.

□

Agora nós estamos interessados no problema de valor inicial definido pela equação em diferença semilinear com retardamento infinito

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f(n, x_n), \ n \geq 0, \tag{6.16}$$

com condição inicial

$$x_0 = \varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma. \tag{6.17}$$

Para estudar este problema de valor inicial, nós assumiremos que a função $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r$ satisfaz a seguinte condição:

Condição B: As seguintes hipóteses valem:

(B_1) A função $f(n, \cdot)$ é contínua para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

(B_2) Para cada $R > 0$, há uma função positiva γ_R tal que $e^{\alpha \cdot}\gamma_R \in l^1$ e $\sup\{|f(n, \psi)| : \|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq R\} \leq \gamma_R(n), \ n \in \mathbb{Z}^+$.

(B_3) $\displaystyle\liminf_{R \to +\infty} \frac{Ke^\alpha}{R} \sup_{m \geq 0} (1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1$, onde K, α são as constantes da Definição 2.1

O seguinte resultado assegura a existência de soluções limitadas sob hipóteses gerais.

Teorema 6.5 *Assuma que a equação (1.1) tem uma dicotomia exponencial e que a Condição (B) vale. Então existe uma solução limitada de (6.16)-(6.17). Além disso, se a seguinte condição for satisfeita*

(B_4) $\displaystyle\limsup_{R \to +\infty} \frac{Ke^\alpha}{R} \sup_{m \geq 0} (1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1,$

então o conjunto $\mathcal{S}$, das soluções limitadas de (6.16)-(6.17), é compacto em l^∞.

Demonstração: Ponha $l^\infty_\varphi := \{\xi \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma) : P(0)\xi(0) = \varphi\}$. Nós definimos a função $\mathcal{T} : l^\infty_\varphi \longrightarrow l^\infty_\varphi$ por (6.12). Claramente, $\mathcal{T}$ está bem definida e a condição (B_2) implica que

$\mathcal{T}$ é contínua. Procedemos como no teorema anterior, considerando a sequência $(\xi_m)_m$ tal que $\xi_m \to \xi$ em $l^\infty[r]$. Escolhemos $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande; usando a condição $(C_2)^{**}$, obtem-se a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\xi_m - \mathcal{T}\xi\|_\infty &= \sup_{n\geq 0} \|(\mathcal{T}\xi_m)(n) - (\mathcal{T}\xi)(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&\leq \sup_{n\geq 0} \Bigg\{ \left\| \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi_m(s))) - f(s,\xi(s)) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+ \left\| \sum_{s=n}^{\infty} \Gamma(n,s)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))) \right\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Bigg\} \\
&\leq \sup_{n\geq 0} \Bigg\{ \sum_{s=0}^{n-1} \|T(n,s+1)P(s+1)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\
&+ \sum_{s=n}^{\infty} \|T(n,s+1)Q(s+1)E^0(f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s)))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \Bigg\} \\
&\leq K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{n_1-1} e^{-\alpha(n_1-s-1)} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&+ K \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=n_1}^{\infty} e^{-\alpha(n_1-s-1)} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&\leq C(n_1) \max_{0\leq s\leq n_1-1} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))| \\
&+ K e^{-\alpha(n_1-1)} \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=n_1}^{\infty} e^{\alpha s} 2\gamma_R(s)
\end{aligned}
$$

$$\leq C(n_1) \max_{0\leq s\leq n_1-1} |f(s,\xi_m(s)) - f(s,\xi(s))|$$

$$+2Ke^{\alpha} \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})W_f(r)\sum_{s=n_1}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s),$$

onde $C(n_1)$ é uma constante dependendo de n_1.

Denote por $l^{\infty}_{\varphi}[n]$ a bola $\|\xi\|_\infty \leq n$. Nós afirmamos que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\mathcal{T} : l^{\infty}_{\varphi}[n] \longrightarrow l^{\infty}_{\varphi}[n]$. De fato, suponha que a afirmação seja falsa, nós podemos escolher uma sequência R_j crescente tal que

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \lim_{j\to\infty} \frac{Ke^{\alpha}}{R_j} \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s)\\ &= \liminf_{R\to+\infty} \frac{Ke^{\alpha}}{R} \sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1,\end{aligned}$$

assim como uma sequência $(n_j)_j$ em $\mathbb{Z}^+$ e uma sequência $\xi^j \in l^{\infty}_{\varphi}[n_j]$ tal que $n_j \leq R_j \leq n_j+1$ e $\|\mathcal{T}(\xi^j)\|_\infty > n_j$. Então para cada j nós temos

$$\begin{aligned}1 &< \frac{K}{n_j}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \frac{Ke^{\alpha}}{n_j}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s)\\ &\leq \frac{K}{n_j}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \left(\frac{Ke^{\alpha}}{R_j}\sup_{m\geq 0}(1+\|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma})\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s)\right)\left(1+\frac{1}{n_j}\right) \to \tilde{\alpha},\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$, o que contradiz (B_3). Usando (B_2) e o Lema 6.2, nós estabelecemos que $\mathcal{T}$ é completamente contínua (a prova da afirmação faz um uso similiar da construção usada na prova do Teorema 6.4). Aplicando o Teorema do ponto fixo de Schauder, podemos deduzir que $\mathcal{T}$ tem ponto fixo $\xi \in l^{\infty}[n]$. Mais ainda, a continuidade de $\mathcal{T}$ implica que o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os pontos fixos é fechado, pois tomando $\{\xi_m\}$ sequência de pontos fixos $\xi_m \to \xi$, temos que $\xi_m = \mathcal{T}\xi_m \to \mathcal{T}\xi$, pela unicidade do limite temos que $\mathcal{T}\xi = \xi$ e portanto $\xi \in \mathcal{G}$. Portanto o conjunto $\mathcal{S}$ consistindo de todas as soluções limitadas é fechado. Por outro lado, se a condição (B_4) vale então $\mathcal{G}$ é limitado. De fato, suponhamos que $\mathcal{G}$ não seja limitado, então existe uma sequência de funções $\xi^j \in \mathcal{G}$ tal que $q_j := \|\xi^j\|_\infty \geq j$. Portanto

$$\|\xi^j(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq K\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + Ke^\alpha \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{q_j}(s),$$

de onde nós obtemos

$$1 \leq \lim_{R\to+\infty} \sup \frac{Ke^\alpha}{R} \sup_{m\geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma}) \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s),$$

o que contradiz a hipótese (B_4). Finalmente, usando que $\mathcal{T}$ é completamente contínua, nós deduzimos que $\mathcal{G}$ é um compacto. Assim, $\mathcal{S}$ é compacto, o que finaliza a prova do teorema.

□

Corolário 6.3 *Suponha que o operador solução da equação $x(n+1) = A(x_n)$ decai exponencialmente e que as condições (B_1), (B_2) e $\liminf_{R\to+\infty} \frac{Ke^\alpha}{R} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1$ são válidas. Então há uma solução limitada de (6.13) com condição inicial $x_0 = \varphi \in \mathcal{B}_\gamma$. Mais ainda, se a condição $\limsup_{R\to+\infty} \frac{Ke^\alpha}{R} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1$ for satisfeita, então o conjunto $\mathcal{S}$, das soluções limitadas de (6.13) com $x_0 = \varphi$, é compacto.*

Demonstração: Pode-se proceder de modo análogo ao teorema anterior com algumas modificações, como por exemplo definir $\mathcal{T}$ como em (6.15) e com cálculos semelhantes obtém-se a continuidade de $\mathcal{T}$, também

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \lim_{j\to\infty} \frac{Ke^\alpha}{R_j} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s) \\ &= \liminf_{R\to+\infty} \frac{Ke^\alpha}{R} \sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_R(s) < 1,\end{aligned}$$

assim como uma sequência $(n_j)_j$ em $\mathbb{Z}^+$ e uma sequência $\xi^j \in l^\infty_\varphi[n_j]$ tal que $n_j \leq R_j \leq n_j + 1$ e $\|\mathcal{T}(\xi^j)\|_\infty > n_j$. Então para cada j nós temos

$$\begin{aligned} 1 \ &< \frac{K}{n_j}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \frac{Ke^\alpha}{n_j}\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s) \\ &\leq \frac{K}{n_j}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \left(\frac{Ke^\alpha}{R_j}\sum_{s=0}^{\infty} e^{\alpha s}\gamma_{R_j}(s)\right)\left(1+\frac{1}{n_j}\right) \to \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

quando $j \to \infty$, o que contradiz a hipótese dada.

Observação 6.3 *Um resultado similar foi obtido por Henríquez em [8] Teorema 2.2 para equações diferenciais funcionais com retardo.*

7 *Equações em Diferenças de Volterra com Retardamento Infinito*

Neste capítulo, serão usadas todas as ferramentas desenvolvidas anteriormente para analisar as soluções limitadas de equações em diferença de Volterra com retardamento infinito. Neste contexto, $A(n)$ e $K(m)$ denotam duas matrizes $r \times r$ definidas para $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$\|A\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |A(n)| < +\infty, \tag{7.1}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |K(n)| e^{\gamma n} < +\infty. \tag{7.2}$$

Nós consideramos o seguinte sistema em diferença de Volterra com retardamento infinito

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} A(n)K(n-s)x(s), \ n \geq 0. \tag{7.3}$$

Podemos ver a equação (7.3) como uma equação em diferença funcional sobre o espaço de fase $\mathcal{B}_\gamma$. Nós temos, como consequência do Teorema 4.1 a seguinte caracterização de dicotomia exponencial para sistemas de equações em diferenças de Volterra com retardamento infinito.

Teorema 7.1 *Para todo $1 \leq p \leq +\infty$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A equação (7.3) tem dicotomia exponencial.

(ii) O operador $\Upsilon : l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma) \longrightarrow l^p(\mathbb{Z}^+, \mathcal{B}_\gamma)$ definido em (2.3) é sobrejetivo e $\mathcal{B}^0(0)$ é complementado em $\mathcal{B}_\gamma$. Aqui $T(\cdot, \cdot)$ é o operador solução da equação (7.3) agindo sobre $\mathcal{B}_\gamma$ e $\mathcal{B}^0$ como definido na Seção 2.1.

Demonstração: A fim de aplicarmos o Teorema 4.1, ponha

$$L(n, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A(n)K(j)\varphi(-j),$$

e agora desejamos que a Condição 2.1 seja satisfeita. Com efeito, usamos (7.1) e (7.2) obtendo:

$$\begin{aligned} |L(n, \varphi)| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} A(n)K(j)\varphi(-j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|_\infty |K(j)||\varphi(-j)| \\ &\leq \|A\|_\infty \sum_{j=0}^{\infty} |K(j)| \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} e^{\gamma j} = M\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}. \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o Teorema 4.1 e obtermos o resultado.

□

Seja $D(n, s)$ uma matriz $r \times r$ definida para $n \in \mathbb{Z}^+$ e $s \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |D(n, j)| e^{\gamma j} < +\infty. \tag{7.4}$$

Como consequência do Teorema 5.1, nós obtemos a robustez da dicotomia exponencial da equação (7.3) sob pequenas perturbações argumentando semelhantemente ao teorema anterior (além de um ajuste conveniente para ν) para mostrar que a norma da perturbação é suficientemente pequena tal como se pede no Teorema 5.1. Em outras palavras, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 7.2 *Suponha que a equação (7.3) tem uma dicotomia exponencial. Seja ν um número real o qual é suficientemente pequeno, então*

$$y(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} A(n)K(n-s)y(s) + \nu \sum_{s=-\infty}^{n} D(n, n-s)y(s), \ n \geq 0, \tag{7.5}$$

também tem dicotomia exponencial.

Demonstração: Para podermos aplicar o Teorema 5.1 necessitamos que a Condição 2.1 seja satisfeita (o que já foi mostrado no teorema anterior) e pondo

$$\mathcal{L}(n, \varphi) = \nu \sum_{j=0}^{\infty} D(n, j)\varphi(-j),$$

que tenhamos $\mathcal{H} := \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \|\mathcal{L}(n, \cdot)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^r}$ seja suficientemente pequeno. Mas este fato decorre de (7.4) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} |\mathcal{L}(n, \varphi)| \\
&= \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} \left| \nu \sum_{j=0}^{\infty} D(n, j)\varphi(-j) \right| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} |\nu| \sum_{j=0}^{\infty} |D(n, j)||\varphi(-j)| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} |\nu| \sum_{j=0}^{\infty} |D(n, j)|\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} e^{\gamma j} \\
&= |\nu| \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \sum_{j=0}^{\infty} |D(n, j)| e^{\gamma j}.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $|\nu|$ adequadamente pequeno, temos que $\mathcal{H}$ é suficientemente pequeno como se pede no Teorema 5.1 e assim podemos aplicá-lo obtendo o resultado.

$\square$

A seguir, nós consideramos a equação diferença de Volterra com retardamento infinito

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} [A(n)K(n-s) + \nu B(n)G(s-n)|x(0)| + \mu C(n,s)]x(s), \tag{7.6}$$

onde $n \geq 0$, sendo $B(n),\ G(t),\ C(n,s)$ matrizes $r \times r$ definidas para $n \in \mathbb{Z}^+,\ t \in \mathbb{Z}^-,\ s \in \mathbb{Z}$. Além disso $\nu,\ \mu$ são números reais tais que $|\nu| + |\mu|$ é suficientemente pequeno e

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha+\gamma)n}[B(n) + \delta(n)] < +\infty, \tag{7.7}$$

onde $\delta(n) = \sum_{s=-\infty}^{n} |C(n,s)|e^{-\gamma s}$.

Como consequência do Teorema 6.4, o próximo resultado assegura a existência de soluções limitadas da equação (7.6).

Teorema 7.3 *Assuma que a equação (7.3) tem uma dicotomia exponencial com dado* $(\alpha, K, P(n))$. *Então há uma constante positiva* $\mathcal{M}$ *tal que para cada* $\varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma[\mathcal{M}]$ *existe uma solução limitada* $y = y(\varphi) = y(n, 0, \psi)$ *com* $P(0)\psi = \varphi$ *de (7.6), para* $n \geq 0$.

A seguir desenvolveremos num modelo concreto os resultados apresentados acima.

Exemplo 7.1 *Sejam* $a_i(n),\ i = 1, 2$ *duas sequências em* $\mathbb{Z}^+$ *e* α, σ, γ *três constantes positivas tais que*

(i) $\rho_1^* = \sup_{n\geq 0} \max_{-n\leq\theta\leq 0} [\prod_{s=n+\theta}^{n-1} |a_1(s)|^{-1} e^{\gamma\theta}] < +\infty$,

(ii) $\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)| \leq \sigma e^{-\alpha(n-\tau)},\ n \geq \tau \geq 0$,

(iii) $\displaystyle\prod_{s=n}^{\tau-1}|a_2(s)^{-1}| \leq \sigma e^{-\alpha(\tau-n)},\ \tau \geq n \geq 0.$

Nós consideramos a seguinte equação

$$x(n+1) = L(n, x_n),\ n \geq 0, \tag{7.8}$$

com $L(n,\varphi) = A(n)\varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$, *onde* $A(n)$ *é uma matriz* 2×2 *definida por* $diag(a_1(n), a_2(n))$. *O operador solução* $T(n,\tau)$, $n \geq \tau$, *da equação (7.8), é um operador linear limitado definido sobre o espaço de fase* $\mathcal{B}_\gamma$ *e é definido por:*

$$[T(n,\tau)\varphi](\theta) = \begin{cases} \left(\left(\displaystyle\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_1(s)\right)\varphi^1(0),\ \left(\displaystyle\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s)\right)\varphi^2(0)\right), & -(n-\tau) \leq \theta \leq 0, \\ (\varphi^1(n-\tau+\theta), \varphi^2(n-\tau+\theta)), & \theta < -(n-\tau). \end{cases}$$

E definimos as projeções $P(n) : \mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma$ como
$[P(n)\varphi](\theta) =$

$$\begin{cases} \left(\varphi^1(\theta) + \left(\displaystyle\prod_{s=0}^{n+\theta-1} a_1(s)\right)\left(\displaystyle\prod_{s=0}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0), \varphi^2(\theta) - \left(\displaystyle\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -n \leq \theta, \\ (\varphi^1(\theta), \varphi^2(\theta)), & \theta < -n, \end{cases}$$

com $\theta \leq 0$ e $Q(n) = I - P(n)$. E podemos verificar que $P(n)$ são de fato projeções da seguinte maneira:

$[P(n)(P(n)\varphi)](\theta) =$

$$\begin{cases} ((P(n)\varphi)^1(\theta) + \left(\displaystyle\prod_{s=0}^{n+\theta-1} a_1(s)\right)\left(\displaystyle\prod_{s=0}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)(P(n)\varphi)^2(0), & \\ (P(n)\varphi)^2(\theta) - \left(\displaystyle\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)(P(n)\varphi)^2(0)), & -n \leq \theta, \\ ((P(n)\varphi)^1(\theta), (P(n)\varphi)^2(\theta)), & \theta < -n, \end{cases}$$

observe que no caso $-n \leq \theta$, $(P(n)\varphi)^1(\theta)$ é justamente a primeira coordenada de $P(n)\varphi$

(a qual nós desejamos) e portanto queremos que o restante da primeira coordenada de $[P(P(n)\varphi)](\theta)$ seja nula. Mas isso vem do fato que a segunda coordenada $(P(n)\varphi)^2(0)$ em zero é nula, pois

$$(P(n)\varphi)^2(0) = \left(1 - \prod_{s=n}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0) = 0.$$

Pelo mesmo motivo verificamos que $[P(n)(P(n)\varphi)](\theta)$ coincide com $P(n)\varphi$ na segunda coordenada quando $-n \leq \theta$. O caso $\theta < -n$ é claro.

Nós podemos provar que $T(n,\tau), n \geq \tau$ é um isomorfismo de $Q(\tau)\mathcal{B}_\gamma$ em $Q(n)\mathcal{B}_\gamma$. Definimos a aplicação inversa $T(\tau, n)$ por
$[T(\tau,n)Q(n)\varphi](\theta) =$

$$\begin{cases} \left(-\left(\prod_{s=0}^{\tau+\theta-1} a_1(s)\right)\left(\prod_{s=\tau}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0), \left(\prod_{s=\tau+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & -\tau \leq \theta, \\ (0,0), & \theta < -\tau. \end{cases}$$

Afirmamos que existe uma constante positiva K tal que

$$\|T(n,\tau)P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha(n-\tau)},\ n \geq \tau. \tag{7.9}$$

Para obtermos a estimativa, começamos observando que

$[T(n,\tau)(P(\tau)\varphi)](\theta) =$

$$\begin{cases} (\left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_1(s)\right)\left(\varphi^1(0) + \left(\prod_{s=0}^{\tau-1} a_1(s)a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & \\ \left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s)\right)\varphi^2(0)), & -(n-\tau) \leq \theta, \\ \left((P(\tau)\varphi)^1(n-\tau+\theta), (P(\tau)\varphi)^2(n-\tau+\theta)\right), & \theta < -(n-\tau). \end{cases}$$

No entanto temos que $(P(\tau)\varphi)^1(n-\tau+\theta) =$

$$\begin{cases} \varphi^1(n-\tau+\theta) + \left(\displaystyle\prod_{s=0}^{\tau+n-\tau+\theta-1} a_1(s)\right)\left(\displaystyle\prod_{s=0}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0), & -n \leq \theta < -(n-\tau), \\ \varphi^1(n-\tau+\theta), & \theta < -n. \end{cases}$$

E $(P(\tau)\varphi)^2(n-\tau+\theta) =$

$$\begin{cases} \varphi^2(n-\tau+\theta) + \left(\displaystyle\prod_{s=\tau+n-\tau+\theta}^{\tau-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0), & -n \leq \theta < -(n-\tau), \\ \varphi^2(n-\tau+\theta), & \theta < -n. \end{cases}$$

Também observamos que

$$\|T(n,\tau)P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} \|T(n,\tau)P(\tau)\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}=1} \sup_{\theta\in\mathbb{Z}^-} |[T(n,\tau)P(\tau)\varphi](\theta)|e^{\gamma\theta}.$$

Também, usando as limitações para os produtos $\prod_{s=\tau}^{n-1}|a_1(s)|$, podemos chegar a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |[T(n,\tau)(P(\tau)\varphi)](\theta)| &\leq \left(\left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \left(\prod_{s=0}^{\tau-1}|a_1(s)||a_2(s)|^{-1}\right)\right)\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\ &+\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}e^{\gamma(\tau-n)} + \left(\prod_{s=0}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right)\left(\prod_{s=0}^{n-1}|a_2(s)|^{-1}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\ &+\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}e^{\gamma(\tau-n)} + \left(\prod_{s=n+\theta-1}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\ &\leq \left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta}|a_1(s)|\right)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + \sigma e^{-\alpha(n-1)}\sigma e^{-\alpha(0-n+1)}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \\ &+2\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}e^{\gamma(\tau-n)} + \left(\prod_{s=0}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right)\left(\prod_{s=0}^{n-1}|a_2(s)|^{-1}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma} \end{aligned}$$

$$+\left(\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}.$$

Usando as considerações acima, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|T(n,\tau)P(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma\longrightarrow\mathcal{B}_\gamma} &\leq (1+\sigma^2)\max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0}\left[\left[\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&+2e^{\gamma(\tau-n)}+\max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)}\left[\left[\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&+\max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)}\left[\left[\prod_{s=0}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right]\left[\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&\leq (1+\sigma^2)\max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0}\left[\left[\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&+3\max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)}\left[\left[\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&+\max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)}\left[\left[\prod_{s=0}^{n+\theta-1}|a_1(s)|\right]\left[\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1}|a_2(s)|^{-1}\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&\leq (1+\sigma^2)\left[\prod_{s=\tau}^{n-1}|a_1(s)|\right]\max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0}\left[\left[\prod_{s=n+\theta}^{n-1}|a_1(s)^{-1}|\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&+4\sigma^2\left[\prod_{s=\tau}^{n-1}|a_1(s)|\right]\max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)}\left[\left[\prod_{s=n+\theta}^{n-1}|a_1(s)^{-1}|\right]e^{\gamma\theta}\right] \\
&\leq (1+5\sigma^2)\rho_1^*\prod_{s=\tau}^{n-1}|a_1(s)|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, analogamente, pode-se verificar que

$$\|T(n,\tau)Q(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq (\sigma\rho_1^* + \rho_2^*)\sigma e^{-\alpha(n-\tau)}, \ \tau \geq n, \tag{7.10}$$

onde $\rho_2^* := \sup_{n\geq 0} \max_{-n\leq\theta\leq 0} \left[\left[\prod_{s=n+\theta}^{n-1} |a_1(s)^{-1}| \right] e^{\gamma\theta} \right]$. Das estimativas (7.9) e (7.10) nós obtemos que a equação (7.8) tem uma dicotomia exponencial com dado $(\alpha, K, P(n))$. Seguindo o método geral estabelecido na Observação 2.2 pode-se construir novas projeções. Por exemplo:

$$[\hat{P}(n)\varphi](\theta) = \begin{cases} \left(\varphi^1(\theta), \varphi^2(\theta) - \left(\prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(\theta)\right), & -n \leq \theta \leq 0, \\ (\varphi^1(\theta), \varphi^2(\theta)), & \theta < -n, \end{cases}$$

e $\hat{Q}(n) = I - \hat{P}(n)$.

Nós podemos demonstrar que $T(n,\tau), \ n \geq \tau$ é um isomorfismo de $\hat{Q}(\tau)\mathcal{B}_\gamma$ em $\hat{Q}(n)\mathcal{B}_\gamma$. A aplicação inversa é dada por:

$$[T(\tau,n)\hat{Q}(n)\varphi](\theta) = \begin{cases} (0, \prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\varphi^2(0)), & -\tau \leq \theta \leq 0, \\ (0,0), & \theta < -\tau \end{cases}$$

Obtemos as seguintes estimativas:

$$\|T(n,\tau)\hat{P}(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq 4\sigma^2\rho_1^* e^{-\alpha(n-\tau)}, \ n \geq \tau,$$

$$\|T(n,\tau)\hat{Q}(\tau)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq \sigma\rho_2^* e^{-\alpha(\tau-n)}, \ \tau \geq n.$$

Agora considere a seguinte equação:

$$x(n+1) = L(n, x_n) + \sum_{s=-\infty}^{n} E(n)R(s)x(s) + p(s), \ n \geq 0, \tag{7.11}$$

onde $p \in l^\infty(\mathbb{Z}^+, \mathbb{C}^2)$, $E(n)$ e $R(s)$ são duas matrizes 2×2 definidas para $n \in \mathbb{Z}^+$ e

$s \in \mathbb{Z}$ tais que $R(s) = R(-s)$, $s \in \mathbb{Z}$; $\chi := \sum_{s=0}^{\infty} \|R(s)\| e^{\gamma s} < +\infty$ e $\sup_{m \geq 0}(1 + \|P(m)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma})(2\chi \|E\|_\infty + \|p\|_\infty) < \frac{1-e^{-\alpha}}{2K}$, onde α e K são novamente as constantes da Definição 2.1. Então pelo Teorema 6.2 nós obtemos soluções limitadas para a equação (7.11).

Ainda continuando com o exemplo, nós consideramos a seguinte perturbação da equação (7.8):

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n)x(n-1), \ n \geq 0, \tag{7.12}$$

onde $B(n)$ é uma matriz 2×2 com $\|B(n)\|_\infty$ suficientemente pequeno. Então pelo Teorema 5.1 a equação (7.12) tem uma dicotomia exponencial e usando o Teorema 6.1 nós obtemos soluções limitadas para a equação (7.12) sob perturbações limitadas.

Considere a seguinte perturbação da equação (7.12)

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n)x(n-1) + D(n)(x_n), \ n \geq 0, \tag{7.13}$$

onde $D(n) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathbb{C}^2)$ com $N_D := \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \|D(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathbb{C}^2}$ suficientemente pequeno. Então pelo Corolário 6.1 nós temos soluções limitadas para a equação (7.13).

Finalmente, consideramos a seguinte perturbação da equação (7.12):

$$x(n+1) = L(n, x_n) + h\left(\sum_{s=-\infty}^{n} F(n)G(s-n)x(s)\right), \ n \geq 0, \tag{7.14}$$

onde $L(n, \varphi) = A(n)\varphi(0) + B(n)\varphi(-1)$, $F(n)$ e $G(t)$ são duas matrizes 2×2 definidas para $n \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}^-$ tais que

$$\hat{\chi} := \sum_{n=0}^{\infty} |G(-n)| e^{\gamma n} < +\infty, \tag{7.15}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} |F(n)|^\beta < +\infty, \tag{7.16}$$

com $\beta \in (0,1)$ e $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é uma função contínua. Assumimos também que existe uma constante $C_1 \geq 0$ tal que h satisfaça a condição $|h(z)| \leq C_1|z|^\beta,\ z \in \mathbb{C}^2$. Com estas definições, a equação (7.14) pode ser vista da forma da equação (1.4) e pode ser verificado que as hipóteses do Teorema 6.5 são válidas. De fato, seja $f(n,\varphi)$ a perturbação associada a equação (7.14). Da equação (7.15) e levando em conta que h é contínua pode-se ver que a condição (B_1) é válida. Além disso, $|f(n,\varphi)| \leq C_1\hat{\chi}^\beta|F(n)|^\beta\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^\beta$ e isso mostra que (B_2) vale com $\gamma_R(n) = C_1\hat{\chi}^\beta|F(n)|^\beta R^\beta$ e assim (B_4) é satisfeita. Consequentemente, as hipóteses do Teorema 6.5 ficam satisfeitas e pode-se afirmar que a equação (7.14) com condição inicial $x_0 = \varphi \in P(0)\mathcal{B}_\gamma$ tem soluções limitadas e que o conjunto formado por estas soluções é compacto. É importante destacar que obtemos estas propriedades sem supor que h satisfaz a condição local de Lipschitz. Isto finaliza a discussão do Exemplo 7.1.

Exemplo 7.2 *Considere a equação em diferença de Volterra em* $\mathbb{C}^r$

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} K(n-s)x(s),\ n \geq 0, \tag{7.17}$$

onde $K(n) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^r)$. *Nós assumimos a seguinte condição:*

$$\exists\ \gamma > 0,\ l \geq 1\ : \sum_{n=0}^{\infty} \|K(n)\|_{\mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r} e^{\gamma n} \leq l < +\infty. \tag{7.18}$$

Seja $\tilde{K}(z)$ *a* Z*-transformada de* $K(n),\ n \in \mathbb{Z}^+$*, isto é,* $\tilde{K}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K(n)z^{-n}$. *Note que* $\tilde{K}$ *existe e é analítica no domínio* $|z| > e^{-\gamma}$ *do plano complexo. Seja* $R(n) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^r),\ n \in \mathbb{Z}^+$*, a solução fundamental de (7.17),* $R(n)$ *satisfaz a seguinte relação:*

$$R(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} K(n-s)R(s),\ n \geq 0, \tag{7.19}$$

e $R(0) = I$. *Nós obtemos a seguinte estimativa:* $\|R(n)\|_{\mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r} \leq l,\ n \in \mathbb{Z}^+$. *Então, a* Z*-tranformada de* $R(n),\ n \in \mathbb{Z}^+$*, existe e é analítica no domínio* $|z| > l$ *do plano complexo.*

Furumochi e colaboradores [19] e [20] provaram o seguinte resultado.

Teorema 7.4 *Suponha que o operador característico de (7.17), $zI - \tilde{K}(z)$, é inversível para $|z| \geq 1$, isto é,*

$$(z - \tilde{K}(z))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^r), \ \forall \ |z| \geq 1, \tag{7.20}$$

onde I é o operador identidade sobre $\mathbb{C}^r$. Então o operador solução $R(n)$ de (7.17) decai exponencialmente, isto é, existem constantes positivas K e α tais que $\|R(n)\|_{\mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r} \leq Ke^{-\alpha n}$, para todo $n \geq 0$. Reciprocamente, no caso em que $K(j)$, $j \in \mathbb{Z}^+$ são operadores compactos, se $R(n)$ decai exponencialmente, então a condição (7.20) é verdadeira.

Para cada $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$, e $n \in \mathbb{Z}^+$, nós consideramos a aplicação $T(n)\varphi : \mathbb{Z}^- \longrightarrow \mathbb{C}^r$ definida por $T(n)\varphi = x_n(\bullet, \varphi)$; $T(n)$ é chamado operador solução de (7.17). Pode-se ver que

$$[T(n)\varphi](\theta) = \begin{cases} \varphi(n+\theta), & \theta < -n, \\ R(n+\theta)\varphi(0) + \displaystyle\sum_{r=0}^{n+\theta-1} R(n+\theta-1+r)\left(\sum_{j=-\infty}^{-1} K(r-j)\varphi(j)\right), & -n \leq \theta < 0. \end{cases}$$

Por esta fórmula nós vemos que $T(n)$ é um operador linear limitado sobre $\mathcal{B}_\gamma$. Além disso, pode-se ver que $T(n)$ satisfaz as seguintes propriedades de semigrupo:

$$T(n)T(m) = T(n+m), \ n, m \in \mathbb{Z}^+, \ T(0) = I.$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 7.5 *[Furumochi e colaboradores [19] e [20]] Suponha que a condição (7.20) é verdadeira. Então $T(n)$ decai exponencialmente, isto é, existem constantes positivas K e α tais que $\|T(n)\|_{\mathcal{B}_\gamma \longrightarrow \mathcal{B}_\gamma} \leq Ke^{-\alpha n}$, $\forall \ n \geq 0$.*

Seja (a_n) uma sequência real em $\mathbb{Z}^+$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{\gamma n} < +\infty, \tag{7.21}$$

e ν uma constante real tal que $|\nu| \leq [Ke^{\alpha}\|e^{\bullet\alpha}a\|_1]^{-1}$. Nós consideramos a seguinte perturbação de (7.17):

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} K(n-s)x(s) + \nu a(n)(|x(n)|^{\frac{1}{2}} + 1)x(n), \; n \geq 0, \tag{7.22}$$

Nós podemos verificar que as hipóteses do Corolário 6.2 valem. De fato, seja $f(n,\varphi)$ a pertubação associada a equação (7.22). Observamos que as condições $(C_1)^{**}$ e $(C_2)^{**}$ respectivamente seguem como consequência da seguinte estimativa:

$$|f(n,\varphi) - f(n,\psi)| \leq [|\psi(0)|^{-\frac{1}{2}}(\|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} + 1) + \|\psi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^{\frac{1}{2}} + 1]\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}_\gamma},$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_\gamma$, com $\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}_\gamma} < 1$, e $|f(n,\varphi)| \leq |\nu||a(n)|(\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^{\frac{1}{2}} + 1)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}$. Por outro lado, de (7.21) e levando em conta que $|\nu| \leq [Ke^{\alpha}\|e^{\bullet\alpha}a\|_1]^{-1}$, nós obtemos que

$$Ke^{\alpha} \lim_{r \to 0} \frac{W_f(r)}{r} \|e^{\bullet\alpha} m_f\|_1 < 1.$$

Então pelo Corolário 6.2 há uma constante positiva $\mathcal{M}$, tal que para cada $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma[\mathcal{M}]$, existe uma solução limitada $y = y(\varphi) = y(n, 0, \phi)$ com $y_0 = \varphi$ da equação (7.22), para $n \geq 0$. Isto finaliza a discussão do Exemplo 7.2.

Referências

[1] F. Cardoso e C. Cuevas, *Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations*. A aparecer em J. Difference Equ..

[2] C. Cuevas e C. Vidal, *Discrete dichotomies and asymptotic behavior for abstract retarded functional difference equations in phase space*, J. Difference Equ., **8** (7) (2002), 603-640.

[3] C. Cuevas e M. Pinto, *Asymptotic behavior in Volterra difference systems with unbounded delay*, J. Comp. Appl. Math., 113 (2000), 217-225.

[4] C. Cuevas e M. Pinto, *Convergent solutions of linear functional difference equations in phase space*, J. Math. Anal. Appl., 227 (2003), 324-341.

[5] C. Cuevas e C. Vidal, *A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay*, Adv. Difference Equ., (2006), 1-11.

[6] C. Cuevas e L. Del Campo, *An Asymptotic theory for retarded functional difference equations*, Comput. Math. Appl., **49** (2005), 841-855.

[7] Coffman, Ch. V. e Schäffer, J. J., *Dichotomies for Linear Difference Equations*, Math. Ann., **172** (1967), 139-166.

[8] H. Henríquez, *The Kneser property for abstract retarded functional differential equations with infinite delay*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **26** (2003), 1645-1661.

[9] H. Matsunaga e S. Murakami, *Some invariant manifolds for functional difference equations with infinite delay*, J. Difference Equ. Appl. **10** (7) (2004), 661-689.

[10] H. Matsunaga e S. Murakami, *Asymptotic behavior of solutions of functional difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), 391-410.

[11] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies, shadowing lemma and transversal homoloclinic points*, Dynamics Reported, 1(1998), 265-306.

[12] N. T. Huy e Vu Ha, *Exponential dichotomy of difference equations in l_p-phase space on the half-line*, Adv. Difference Eqs., **2006** (2006), 1-14.

[13] N. T. Huy e N. V. Minh, *Exponential dichotomy for difference equations and applications to evolution equations on the half-line*, Comput. Math. Appl., **42** (2001), 301-311.

[14] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[15] S. Elaydi, S. Murakami, E. Kamiyama, *Asymptotic equivalence for difference equations with infinite delay*, J. Difference Equ. Appl. (1999), 1-23.

[16] S. Murakami, *Some spectral properties of the solution operator for linear Volterra difference system*, In Proc. the Third International Conference on Difference Equations, Taipe, Taiwan, (1997), 301-311.

[17] S. Murakami, *Representation of solutions of linear functional difference equations in phase space*, Nonlinear Anal. T.M.A., (30)2 (1997), 1153-1164.

[18] S. Murakami e Y. Nagabuchi, *Invariant manifolds for abstract functional differential equations and related Volterra difference equations in a Banach space*, Funkcialaj Ekvacioj, **50** (2007), 133-170.

[19] T. Furumochi, S. Murakami e Y. Nagabuchi, *Stabilities in Volterra difference equations on a Banach space*, Fields Institute Communications, AMS, **42** (2004), 159-175.

[20] T. Furumochi, S. Murakami e Y. Nagabuchi, *Volterra difference equations on a Banach space and abstract differential equations with piecewise continuous delay*, Japan. J. Math., **30**(2) (2004), 387-412.

[21] Y. Hamaya, *Existence of an almost periodic solution in a difference equation with infinite delay*, J. Difference Equ. Appl. **9** (2) (2003), 227-237.

[22] Y. Nagabuchi, *Decompostition of phase space for linear Volterra difference equations in a Banach space*, Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 269-290.