



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



LUIZ PEREIRA DE AGUIAR NETO

TRAÇADO COMPUTACIONAL DE LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGAS

SÃO CRISTÓVÃO-SE

2018

LUIZ PEREIRA DE AGUIAR NETO

**TRAÇADO COMPUTACIONAL DE LINHAS DE INFLUÊNCIA
PARA VIGAS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal de
Sergipe – UFS, para encerramento do
componente curricular e conclusão da
graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa

SÃO CRISTÓVÃO-SE

2018

LUIZ PEREIRA DE AGUIAR NETO

TRAÇADO COMPUTACIONAL DE LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA VIGAS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal de
Sergipe – UFS, para encerramento do
componente curricular e conclusão da
graduação em Engenharia Civil.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA:

_____	Nota _____
Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa - UFS (Orientador)	
_____	Nota _____
Prof. DSc. Fabio Carlos da Rocha - UFS (Examinador)	
_____	Nota _____
Prof. MSc. Fernando Luiz de Bragança Ferro - UFS (Examinador)	

RESUMO

A análise estrutural é uma das grandes áreas da engenharia civil. Esta tem como principal objetivo antever o comportamento de uma estrutura sujeita a determinado carregamento. Uma estrutura divide-se em elementos, os quais podem ser estudados separadamente. Um desses elementos é a viga, definida de forma sucinta como um elemento estrutural projetado para suportar cargas aplicadas de forma perpendicular ao seu eixo longitudinal. Este trabalho segue as hipóteses da teoria clássica e apresenta o desenvolvimento, para implementação computacional, o método da rigidez para vigas visando desenvolver, analisar e comparar computacionalmente três formas distintas de se traçar a linha de influência em vigas. O método da rigidez trata-se de uma análise matricial sistemática e de fácil implementação computacional. Já a linha de influência é uma ferramenta gráfica de função imprescindível no dimensionamento de estruturas sujeitas a cargas móveis na sua extensão. O software utilizado para desenvolvimento do código computacional é o MATLAB, programa de fáceis manipulações matemáticas de matrizes, de ambiente interativo e de fácil utilização.

Palavras-chave: análise estrutural; análise matricial; método da rigidez; linhas de influência.

ABSTRACT

Structural analysis is one of the main areas of civil engineering. It serves a main purpose predicting the behavior of structures subjected to loading conditions. A structure can be divided into elements. A beam is defined as a structural element designed for supporting loads applied perpendicularly to its longitudinal axis. This work follows the classic beam theory hypotheses and introduces the development, for computational implementation, of the stiffness method, intending to analyze and compare computationally three forms to draw influence lines for beams. The stiffness method is a systematic matrix structural analysis (MSA) which has an easy computational implementation. Influence lines are a graphic tool indispensable in designing of structures subjected to live loads on their extension. The software used for development of the computational code is the MATLAB, a program of simple mathematical manipulations of matrices and a very easy-to-use interactive environment.

Keywords: structural analysis; matrix structural analysis; stiffness method; influence lines.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Discretização de uma viga.	5
Figura 2 – Relação entre força aplicada na mola e a deformação da mesma.	6
Figura 3 - Elemento de viga.	6
Figura 4 - Imposição de deslocamento arbitrário.	7
Figura 5 - Atribuição de deslocamentos (verticais e rotacionais) nos nós.	8
Figura 6 - Matriz de rigidez do elemento 1.	10
Figura 7 - Matriz de rigidez do elemento 2.	10
Figura 8 - Matriz de rigidez do elemento 3.	11
Figura 9 - Matriz de rigidez global da estrutura.	11
Figura 10 - Equivalente nodal de uma força pontual.....	11
Figura 11 - Funções de forma de Hermite.	13
Figura 12 - LI de momento fletor para seção de viga contínua.	16
Figura 13 - Exemplo do procedimento de tabulação de valores para traçado de LI.	17
Figura 14 - Exemplo do procedimento de equações de linha de influência.	18
Figura 15 - Campo de deslocamentos virtuais para determinação de L.I. da reação de apoio de uma viga biapoiada.	19
Figura 16 - Deslocamentos generalizados utilizados no método cinemático.	20
Figura 17 - Linha de influência da reação A_y pelo método cinemático.	20
Figura 18 - Linha de influência para o cortante em C pelo método cinemático.	21
Figura 19 - Linha de influência para momento em C pelo método cinemático.	21
Figura 20 - Aplicação do Teorema de Betti a duas vigas contínuas.	22
Figura 21 - Atribuição de deslocamento nodal vertical unitário.	27
Figura 22 - Atribuição de deslocamento nodal angular unitário.	27
Figura 23 - Exemplo de viga.	29
Figura 24 - Viga discretizada.	30
Figura 25 - Viga biengastada.	34
Figura 26 - L.I. da reação vertical no primeiro apoio.	34
Figura 27 - L.I. da reação de momento no primeiro apoio.	35
Figura 28 – L.I. para reação vertical no último apoio.	36
Figura 29 - L.I. do esforço cortante no meio do vão.	37
Figura 30 - L.I. do momento fletor no meio do vão.	38
Figura 31 - L.I. da reação de momento no último apoio.	39
Figura 32 - Exemplo de viga.	39
Figura 33 - L.I. da reação vertical no primeiro apoio.	40
Figura 34 - L.I. da reação de momento no primeiro apoio.	41
Figura 35 - L.I. da reação vertical no último apoio.	42
Figura 36 - L.I. do esforço cortante na seção C	43
Figura 37 - L.I. do momento fletor na seção C	44

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	2
1.3	OBJETIVOS.....	2
1.3.1	Objetivo geral	2
1.3.2	Objetivos específicos	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE MATRICIAL	4
2.2	MÉTODO DA RIGIDEZ	5
2.2.1	Observações preliminares	5
2.2.2	Matriz de rigidez de um elemento de viga.....	6
2.2.3	Matriz de rigidez da estrutura	9
2.2.4	Vetor de carregamento.....	11
2.2.5	Condições de apoio e resolução do sistema linear.....	12
2.2.6	Funções de forma.....	13
2.3	AÇÕES ATUANTES NAS ESTRUTURAS	15
2.3.1	Cargas móveis.....	15
2.4	LINHAS DE INFLUÊNCIA	15
2.5	TRAÇADO DA LINHA DE INFLUÊNCIA	16
2.5.1	Método Cinemático para Traçado de LI.....	19
3	METODOLOGIA	24
3.1	Obtenção de Linhas de Influência por carregamentos múltiplos	24
3.1.1	Linha de influência das reações	24
3.1.2	Linha de influência dos esforços internos	25
3.2	Obtenção de linhas de influência por inversão da matriz de rigidez.....	25
3.3	Obtenção de linhas de influência por imposição de deslocamentos	26
3.3.1	Linhas de influência de reação de apoio.....	26
3.3.2	Linhas de influência de cortante	26
3.3.3	Linhas de influência de momento fletor	27
4	Implementação computacional.....	28
4.1	DADOS DE ENTRADA.....	28
4.2	PRÉ-PROCESSAMENTO	30
4.3	PROCESSAMENTO.....	31
4.4	PÓS-PROCESSAMENTO	32
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	33
6	Conclusões	45
	Referências	46

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Partindo do ponto de vista em que cada obra é única, o produto final da disciplina de Engenharia Civil é, sobretudo, um protótipo. Logo, torna-se essencial prever o comportamento estrutural, visto que a confecção de modelos físicos específicos para testar o comportamento de cada edificação é descartada. Sendo assim, destaca-se a modelagem do comportamento estrutural por meio de equações diferenciais, que caracterizam o problema juntamente com suas condições de contorno. Todavia, a resolução destas equações é bastante complexa por conta da quantidade de variáveis existentes em suas formulações. Consequentemente, diversos métodos são utilizados para resolução do problema de engenharia, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e a Análise Matricial de Estruturas. Do ponto de vista teórico, estes diferenciam-se basicamente pela obtenção das relações de força-deslocamento do elemento. No MEF estas relações são geralmente derivadas pelos princípios de trabalho-energia de deslocamentos ou funções de deformação, enquanto que nos métodos matriciais as relações são baseadas em soluções exatas das equações diferenciais fundamentais.

A análise estrutural é um processo de prever o desempenho de uma dada estrutura sujeita a uma ou mais condições de carregamento. Os principais itens de interesse são os esforços internos (forças axiais, cortantes, momentos fletores, etc.), deflexões e reações de apoio. Assim, a análise estrutural baseia-se em determinar estes efeitos causados por um carregamento dado ou outros efeitos externos. A análise matricial de estruturas limita-se ao estudo de estruturas reticuladas (elementos onde a dimensão do comprimento é significativamente maior que a da seção transversal), tais como vigas, treliças e pórticos. Para esse estudo podem-se utilizar os métodos da flexibilidade e da rigidez. Entretanto, para uma análise de outros tipos de elemento, como chapas, placas ou cascas, faz-se necessário o uso de outros métodos mais avançados, como o MEF.

As cargas que solicitam uma estrutura dividem-se em: permanentes (peso próprio, revestimentos, etc.); e acidentais (ventos, empuxos de terra, impactos laterais, frenagens ou acelerações, cargas móveis, etc.). Logo, faz-se necessário o conhecimento do tipo do carregamento e a sua posição na estrutura, de forma a obter os maiores esforços e deflexões que podem ocorrer na estrutura. Tendo esta previsão, é possível obter um projeto econômico e eficiente, pontos fundamentais na engenharia estrutural.

Para o caso de cargas móveis, uma boa maneira de analisar o comportamento da estrutura diante de um sistema de cargas é por meio da linha de influência. A mesma mostra graficamente como o movimento de uma carga unitária ao longo da estrutura influencia algum efeito elástico (cortante, fletor, reação).

Este trabalho expõe o desenvolvimento das equações que modelam o problema de vigas, a resolução do problema pelo método matricial da rigidez e busca desenvolver metodologias para obtenção de linhas de influência para efeitos elásticos em vigas.

O método da rigidez foi escolhido pois o mesmo é mais sistemático e pode ser implementado computacionalmente com maior facilidade. Este método mantém como variáveis principais os deslocamentos nodais da estrutura, pois conhecidos os mesmos, obtém-se os efeitos desejados por meio de considerações de compatibilidade e relações de força-deslocamento do elemento. No entanto, para obtenção destes deslocamentos, é necessária a resolução de sistemas que ficam cada vez mais complexos a depender da quantidade de nós que possui a estrutura. Portanto, faz-se necessária a utilização de códigos computacionais para calculá-los.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Com exceção deste capítulo que expõe as concepções exordiais e o escopo do trabalho, o texto está decomposto em quatro capítulos complementares, sendo:

- Capítulo 2: apresentação da revisão bibliográfica, explicitando o método da rigidez e a sua formulação, bem como as matrizes empregadas na montagem do sistema de equações lineares, onde obtém-se os deslocamentos e rotações dos nós dos elementos;
- Capítulo 3: descrição da metodologia utilizada, detalhando as formas de obtenção da linha de influência;
- Capítulo 4: apresentação do código computacional, utilizando um exemplo de uma viga genérica, comparando os resultados com o software Ftool.
- Conclusão: apresenta-se as considerações fundamentais resultante da análise dos resultados obtidos no trabalho.

Além destes capítulos descritos, têm-se as referências.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho de conclusão de curso é comparar computacionalmente três formas distintas de calcular linhas de influência em vigas, com assistência do software MATLAB.

Por meio da implementação computacional, pode-se obter a linha de influência por carregamentos múltiplos, por inversão da matriz de rigidez e por imposição de deslocamentos.

1.3.2 Objetivos específicos

De forma a explicitar melhor a concepção deste trabalho, podem-se citar objetivos específicos, dos quais destacam-se os seguintes.

- Desenvolver a pesquisa bibliográfica a respeito dos conteúdos discutidos neste trabalho, como o desenvolvimento da Análise Matricial de vigas, visando a implementação computacional, os conceitos de linha de influência e suas formas de traçado;

- Aplicar conhecimentos de linguagem de programação e elaboração de algoritmos para solucionar problemas de engenharia pelo método da Análise Matricial;
- Discorrer os resultados adquiridos nos dados de saída do código computacional e assimilar o significado prático destes;
- Incentivar pesquisas na área de análise matricial e linha de influência, bem como na engenharia estrutural como um todo na Universidade Federal de Sergipe, utilizando este trabalho como base para outros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme Hibbeler (2010), vigas são elementos estruturais cuja função é suportar cargas aplicadas de forma perpendicular a seus eixos longitudinais. Devido a essas cargas, uma força de cisalhamento interna e um momento fletor são desenvolvidos. Estes geralmente variam de ponto a ponto ao longo do eixo da viga. Pode acontecer ainda de o elemento em questão estar submetido a uma força axial interna, no entanto, os efeitos desta são usualmente ignorados no projeto, pois, habitualmente, os deslocamentos e as tensões desenvolvidas por cisalhamento e flexão são muito maiores que as provocadas por esforço axial.

O comportamento estrutural de vigas pode ser satisfatoriamente aproximado pela teoria clássica de Euler-Bernoulli de flexão. A principal hipótese desta teoria é que a seção transversal permanece plana e perpendicular ao eixo da viga durante a flexão, implicando que a deformação por cisalhamento transversal se torna nula. Entretanto, esta teoria pode levar a sérias discrepâncias em casos de vigas profundas, com a relação comprimento/altura pequena, onde os efeitos do cisalhamento não são significantes. Logo, Timoshenko estendeu o domínio de validade da teoria de Euler-Bernoulli incorporando o efeito da deformação de cisalhamento, considerando-o constante na sua espessura, nas equações governantes (KANT, T.; GUPTA, A., 1988).

Melo (2014) cita as hipóteses da teoria clássica como:

- A viga é prismática, possuindo um eixo central reto, coincidente com o eixo horizontal;
- A seção transversal da viga possui ao menos um eixo de simetria, que coincide com o eixo vertical;
- Todas as cargas atuam no plano de simetria;
- As seções perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas e perpendiculares a este eixo após a deformação;
- Admite-se que o material é elástico, isotrópico e homogêneo;
- As deformações transversais são pequenas.

Sendo assim, as vigas para este trabalho seguirão estas hipóteses.

Os esforços internos que serão produzidos dependem da carga a qual é aplicada sobre a estrutura. Logo, faz-se necessário também o estudo de cargas móveis na estrutura.

2.1 BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE MATRICIAL

Segundo Kassimali (2012), James C. Maxwell apresentou em 1864 o método das deformações consistentes e, em 1915, George A. Maney desenvolveu o método da rotação-deflexão, métodos considerados os antecessores dos métodos da matriz de flexibilidade e de rigidez, respectivamente. Entretanto, essas teorias necessitavam de soluções diretas de equações algébricas simultâneas, o que se tornava cada vez mais complexo e trabalhoso para calcular à mão quando se aumentava o número de variáveis.

Com a invenção dos computadores no final da década de 40, a análise estrutural foi revolucionada. Como os computadores podiam resolver grandes sistemas de equações simultâneas, a análise pelos métodos de Maxwell e Maney deixou de ser desvantajosa e passou a ser mais utilizada, pois as equações simultâneas poderiam ser expressas na forma matricial e então programadas para soluções computacionais (KASSIMALI, 2012).

Considera-se que o método da flexibilidade foi apresentado em 1947 por S. Levy, que generalizou o método clássico das deformações consistentes. Porém, quem estendeu o método da flexibilidade e o expressou na forma matricial no início da década de 50 foram H. Falkenheimer, B. Langefors e P. H. Denke. Já o método da rigidez foi desenvolvido em 1954 por R. K. Livesley (KASSIMALI, 2012).

Desde então, diversos esforços em pesquisas estão sendo feitos, principalmente para formular procedimentos para a análise dinâmica e não linear de estruturas, e o desenvolvimento de técnicas computacionais eficientes para analisar grandes estruturas (KASSIMALI, 2012).

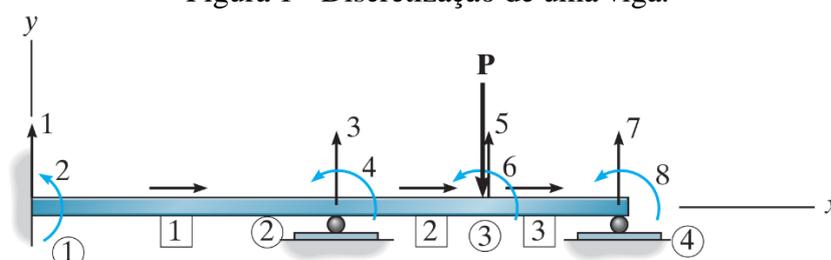
2.2 MÉTODO DA RIGIDEZ

2.2.1 Observações preliminares

Afim de aplicar o método da rigidez às vigas, deve-se primeiramente determinar como subdividir a viga em seus elementos componentes. De forma geral, cada elemento deve ser livre de carregamento e ter uma seção transversal prismática (constante). Por esta razão, os nós de cada elemento são posicionados nos apoios ou em pontos onde os elementos são conectados, onde forças externas são aplicadas, onde a seção transversal muda, ou onde o deslocamento vertical ou rotacional num ponto deve ser determinado (HIBBELER, 2012). No entanto, para o estudo em questão, este requisito será quebrado, pois devido ao carregamento móvel, faz-se necessário a atuação de uma força externa entre os nós do elemento.

A Figura 1 exemplifica como pode ser feita esta discretização. Os nós são numerados dentro de círculos, enquanto que os elementos em quadrados. A numeração próxima às setas correspondem aos graus de liberdade da estrutura. Considerando o efeito do momento e da força cortante, então cada nó da viga possuirá dois graus de liberdade: um deslocamento vertical e uma rotação.

Figura 1 - Discretização de uma viga.

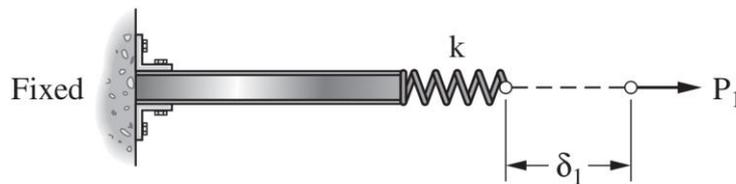


Fonte: HIBBELER (2012).

2.2.2 Matriz de rigidez de um elemento de viga

Segundo McComarc (2007), a rigidez de um nó é usualmente definida como a força (ou momento) requerido para produzir um deslocamento (ou rotação) unitário no nó se o deslocamento é impedido em todos os outros nós da estrutura. Inicialmente, considera-se a mola linear da Figura 2.

Figura 2 – Relação entre força aplicada na mola e a deformação da mesma.



Fonte: MCCOMARC (2007).

Dessa figura, nota-se que a relação da força aplicada P_1 e do alongamento da mola δ_1 pode ser escrita como:

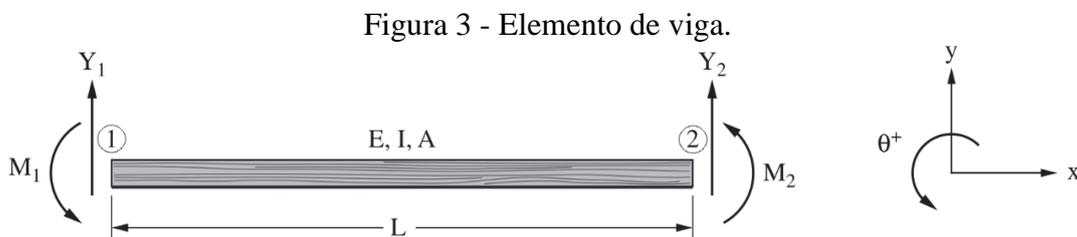
$$P_1 = k\delta_1 \quad (1)$$

Nesta expressão k é a constante da mola ou a força requerida para produzir um deslocamento unitário:

$$k = P_1 \quad \text{se} \quad \delta_1 = 1 \quad (2)$$

Portanto, se a constante da mola é conhecida, é possível determinar o deslocamento para qualquer força aplicada P_1 .

Na maioria dos problemas práticos, o deslocamento é requerido em mais de um nó ou localização, como é o caso das vigas. Para estas, as equações de rigidez são derivadas pelo método da rotação-deflexão. De acordo com Hibbeler (2012), as equações de rotação-deflexão relacionam os momentos desconhecidos aplicados nos nós aos deslocamentos dos nós para qualquer ponto da estrutura. Considera-se então a estrutura da Figura 3 abaixo:



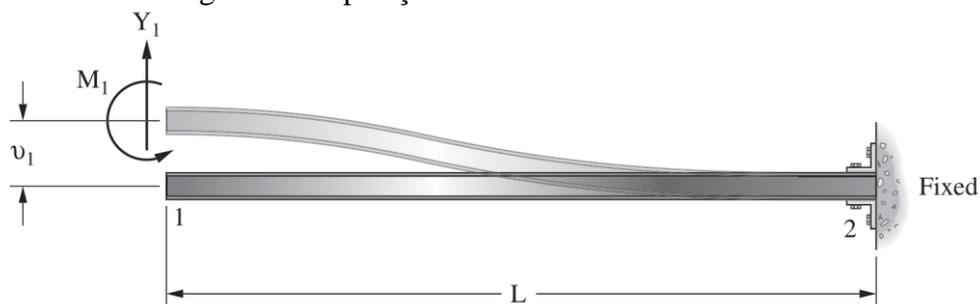
Fonte: MCCOMARC (2007).

Os nós da viga são designados como os locais onde as forças serão aplicadas e onde os deslocamentos serão medidos. Para a viga da Figura 3 as forças aplicadas consistem em forças transversais e momentos. Estas forças são designadas pelos símbolos Y_i e M_i , respectivamente, e são mostradas agindo em seu sentido positivo. Deslocamentos

nodais consistem de translações v_i , paralelas às forças cortantes, e rotações θ_i . Forças axiais podem agir no elemento de viga, porém, para simplificar assume-se neste caso que seu valor é nulo (MCCOMARC, 2007).

As relações entre as forças nos nós e os deslocamentos nos mesmos são desenvolvidas atribuindo um valor arbitrário a um único componente de deslocamento, enquanto que todos os outros componentes de deslocamento permanecem iguais a zero. Para ilustrar este caso, é dado ao Nó 1 da Figura 4 um valor arbitrário $v_1 = 1$, enquanto que $v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$.

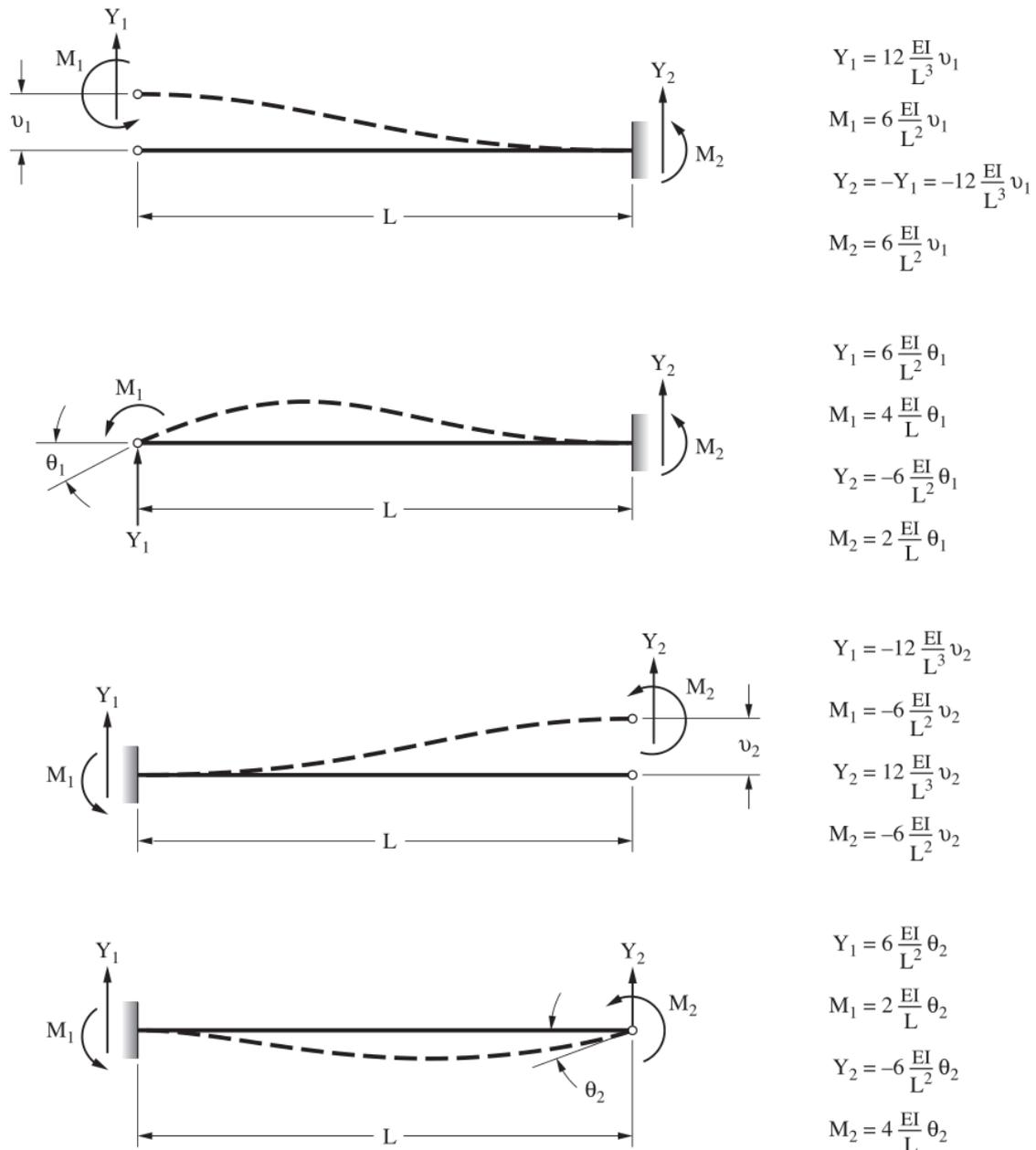
Figura 4 - Imposição de deslocamento arbitrário.



Fonte: MCCOMARC (2007).

Esta imposição irá gerar momentos e reações nos nós, os quais podem ser determinados por relações de força-deslocamento. As relações utilizadas para montagem da matriz de rigidez da viga estão descritas abaixo:

Figura 5 - Atribuição de deslocamentos (verticais e rotacionais) nos nós.



Fonte: MCCOMARC (2007).

Portanto, para a viga da Figura 4 e utilizando as relações de Força-Deslocamento da Figura 5, o resultado das forças nodais geradas são:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 12 \frac{EI}{L^3} v_1; \\
 M_1 &= 6 \frac{EI}{L^2} v_1; \\
 Y_2 &= -Y_1 = -12 \frac{EI}{L^3} v_1 \text{ e} \\
 M_2 &= 6 \frac{EI}{L^2} v_1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ou, escrevendo na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} \\ 6 \frac{EI}{L^2} \\ -12 \frac{EI}{L^3} \\ 6 \frac{EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1 \quad (4)$$

De forma similar, e pelo princípio da superposição, pode-se escrever na forma matricial todos os resultados mostrados na Figura 5, resultando então na equação a seguir:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} \\ 6 \frac{EI}{L^2} \\ -12 \frac{EI}{L^3} \\ 6 \frac{EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_1 + \begin{Bmatrix} 6 \frac{EI}{L^2} \\ 4 \frac{EI}{L} \\ -6 \frac{EI}{L^2} \\ 2 \frac{EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_1 + \begin{Bmatrix} -12 \frac{EI}{L^3} \\ -6 \frac{EI}{L^2} \\ 12 \frac{EI}{L^3} \\ -6 \frac{EI}{L^2} \end{Bmatrix} v_2 + \begin{Bmatrix} 6 \frac{EI}{L^2} \\ 2 \frac{EI}{L} \\ -6 \frac{EI}{L^2} \\ 4 \frac{EI}{L} \end{Bmatrix} \theta_2 \quad (5)$$

Ou na forma matricial ainda mais compacta:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}}_{\{f_A\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \\ -12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}}_{\{d\}} \quad (6)$$

Portanto, a Equação 6 pode ser escrita na forma abreviada como:

$$\{f_A\} = [k]\{d\} \quad (7)$$

Onde $\{f_A\}$ é o vetor de forças aplicadas à estrutura; $[k]$ é a matriz de rigidez do elemento; e $\{d\}$ é o vetor de deslocamentos nodais.

Os coeficientes k_{ij} representam o carregamento no elemento na direção i quando o mesmo sofre um deslocamento unitário específico na direção j . Por exemplo, se $v_1 = 1$, enquanto todos os outros deslocamentos são zero, o elemento estará submetido apenas a quatro carregamentos indicados na primeira coluna da matriz $[k]$.

Faz-se notar que este trabalho contempla apenas barras horizontais (vigas contínuas planas), evitando transformações de coordenadas.

2.2.3 Matriz de rigidez da estrutura

Uma vez que todos os elementos possuem sua matriz de rigidez definida, deve-se combiná-las na matriz de rigidez global da estrutura $[K]$. Este procedimento depende primeiramente em conhecer a posição de cada elemento na matriz $[K]$. Ao montar as matrizes, cada grau de liberdade deve ser colocado na mesma localização da matriz

global. Logo, esta terá uma ordem igual à duas vezes o número de nós da estrutura, visto que cada nó possui apenas dois graus de liberdade (GL).

Quando vários elementos são conectados a um nó, seus coeficientes de rigidez terão a mesma posição na matriz $[K]$, devendo então serem somados para determinar o coeficiente de rigidez nodal para a estrutura. Isso é necessário visto que cada coeficiente representa a rigidez nodal total da estrutura em uma direção particular, representando a força necessária para impor um deslocamento unitário (v ou θ) no mesmo ou em outro nó. Por exemplo, o coeficiente $K_{2,3}$ representa a carga na direção e localização do grau de liberdade 2 quando um deslocamento unitário ocorre na direção e localização do grau de liberdade 3 (HIBBELER, 2012). As figuras abaixo exemplificam este processo para a viga da Figura 1. Como esta viga possui 4 nós, ou seja, 8 graus de liberdade, a matriz de rigidez da estrutura terá ordem 8:

Figura 6 - Matriz de rigidez do elemento 1.

NÓ		1		2	
	GL	1	2	3	4
1	1	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$
	2	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_1$
2	3	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$
	4	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_1$

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 7 - Matriz de rigidez do elemento 2.

NÓ		2		3	
	GL	3	4	5	6
2	3	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$
	4	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_2$
3	5	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$
	6	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_2$

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 8 - Matriz de rigidez do elemento 3.

NÓ	3		4		
GL	5	6	7	8	
3	5	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$
	6	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_3$
4	7	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$
	8	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_3$

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 9 - Matriz de rigidez global da estrutura.

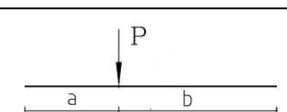
NÓ	1		2		3		4	
GL	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	0	0	0
	2	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_1$	0	0	0
2	3	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_1 + \left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1 + \left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	0
	4	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_1$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_1$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_1 + \left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_1 + \left(4 \frac{EI}{L}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_2$	0
3	5	0	0	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_2 + \left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2 + \left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$
	6	0	0	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_2$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_2$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_2 + \left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(4 \frac{EI}{L}\right)_2 + \left(4 \frac{EI}{L}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$
4	7	0	0	0	0	$\left(-12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(12 \frac{EI}{L^3}\right)_3$
	8	0	0	0	0	$\left(6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$	$\left(2 \frac{EI}{L}\right)_3$	$\left(-6 \frac{EI}{L^2}\right)_3$

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

2.2.4 Vetor de carregamento

O vetor de forças $\{f_A\}$ da Equação 7 é composto pelas forças pontuais ao longo das barras. Para estas cargas, são computados os carregamentos nodais equivalentes:

Figura 10 - Equivalente nodal de uma força pontual.

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra bi-engastada				
	M_A	M_B	V_A	V_B
	$\frac{Pab^2}{L^2}$	$-\frac{Pba^2}{L^2}$	$\frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2(a+3b)}{L^3}$

Fonte: adaptado de IST (2002).

Mais uma vez, escrevendo na forma matricial, pode-se obter:

$$\{f_P\} = \begin{Bmatrix} \frac{Pb^2(3a+b)}{L^3} \\ \frac{Pab^2}{L^2} \\ \frac{Pa^2(a+3b)}{L^3} \\ \frac{Pba^2}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Afim de obter um sistema cujos índices das matrizes são compatíveis, deve-se proceder de maneira similar ao feito na matriz de rigidez do elemento, obtendo o vetor de carregamento global $\{F\}$ da estrutura.

2.2.5 Condições de apoio e resolução do sistema linear

O uso do método dos deslocamentos resulta em uma imposição do equilíbrio tendo os deslocamentos nodais da estrutura como incógnita principal. Com as definições já feitas para a matriz de rigidez global $[K]$ e o vetor global de forças $\{F\}$, esse sistema se traduz em

$$[K]\{D\} = \{F\},$$

onde $\{D\}$ reúne os deslocamentos nodais da estrutura. Este sistema linear de equações será singular até que sejam impostas as condições de apoio da estrutura. Estas imposições são feitas listando os graus de liberdade livres e restritos da estrutura. Os graus de liberdade livres são aqueles onde se conhece o carregamento imposto e os restritos são aqueles cujos deslocamentos são conhecidos.

Assim, o vetor de deslocamentos nodais $\{D\}$ pode ser separado em dois subvetores: $\{D_l\}$, correspondentes aos deslocamentos dos graus de liberdade livres e $\{D_r\}$, que reúne os deslocamentos impostos. Similarmente, o vetor $\{F\}$ é dividido em $\{F_l\}$ e $\{F_r\}$, sendo este correspondente aos carregamentos nodais impostos e aquele correspondentes às reações de apoio. Faz-se necessário, então, também dividir a matriz de rigidez global. Esta é dividida em quatro submatrizes conforme se tomam linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade livres e restritos. O sistema pode então ser listado como

$$\begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lr} \\ K_{rl} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_l \\ D_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_l \\ F_r \end{Bmatrix}.$$

Neste sistema dividido, são conhecidos todos os elementos da matriz de rigidez, os deslocamentos restritos $\{D_r\}$ e as forças impostas $\{F_l\}$. São incógnitas do problema os deslocamentos livres $\{D_l\}$ e as reações de apoio $\{F_r\}$. Pode-se então escrever um novo sistema

$$[K_{ll}]\{D_l\} = \{F_l\} - [K_{lr}]\{D_r\},$$

cujas resolução provê os deslocamentos nodais livres. Com estes, se obtém as reações de apoio por simples multiplicações vetoriais

$$\{F_r\} = [K_{rl}]\{D_l\} + [K_{rr}]\{D_r\}.$$

2.2.6 Funções de forma

A discretização do elemento leva a uma solução nodal. No entanto, funções de forma são necessárias para aproximar valores de deslocamento transversal no intervalo entre os nós.

Fish e Belytschko (2007) conclui que funções de peso para um elemento de viga devem ser funções de classe C^1 , ou seja, funções cuja primeira derivada existe e é contínua. Logo, utiliza-se os polinômios de Hermite, descritos abaixo para um elemento de comprimento l :

$$N_{Y_1} = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) = H_1,$$

$$N_{M_1} = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi) = H_2,$$

$$N_{Y_2} = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) = H_3,$$

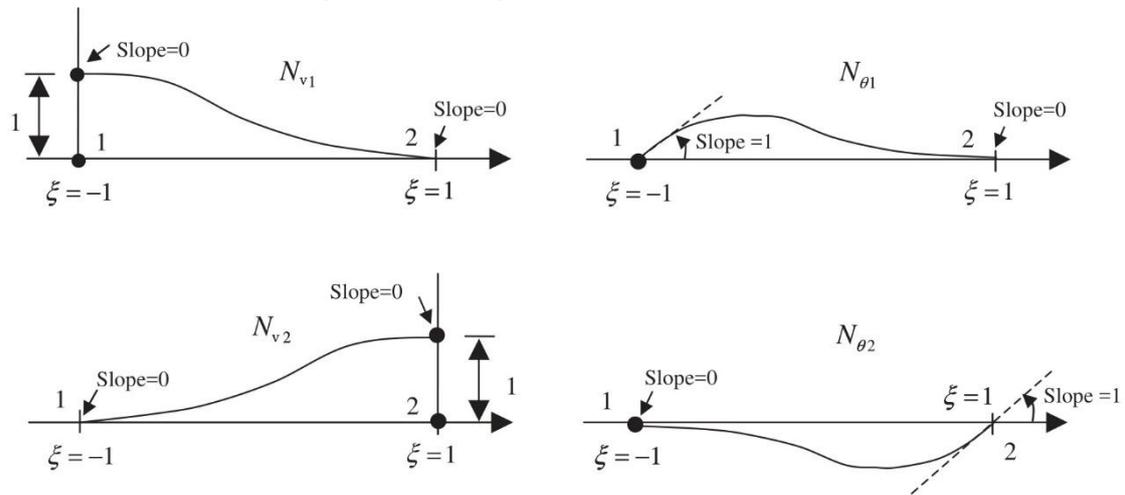
$$N_{M_2} = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1) = H_4,$$

Onde

$$\xi = \frac{2x}{l^e} - 1, \text{ então } -1 \leq \xi \leq 1.$$

Estas quatro funções de forma são apresentadas na abaixo.

Figura 11 - Funções de forma de Hermite.



Fonte: FISH, J.; BELYTSCHKO, T. (2007).

Chandrupatla e Belegundu (2002) dizem que essas funções podem ser usadas para escrever a forma deformada da viga (v):

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_2 \quad (9)$$

Derivando ambos os lados da equação de ξ , tem-se que:

$$dx = \frac{l^e}{2} d\xi$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{l^e}{2} \frac{dv}{dx} \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{l^e} \frac{dv}{d\xi} \quad e \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{l^{e^2}} \frac{d^2v}{d\xi^2} \quad (11)$$

Sabendo-se que $\frac{dv}{dx}$ nos nós inicial (1) e final (2) são θ_1 e θ_2 , respectivamente, pode-se chegar na equação a seguir:

$$v(\xi) = H_1 d_1 + \frac{l^e}{2} H_2 d_2 + H_3 d_3 + \frac{l^e}{2} H_4 d_4 \quad (12)$$

Logo, $v = [H]\{d\}$, sendo $H = \left[H_1, \frac{l^e}{2} H_2, H_3, \frac{l^e}{2} H_4 \right]$, e $\{d\}$ o vetor de deslocamentos nodais.

Derivando $H(\xi)$ e usando a Equação 13, é possível chegar na Equação 15 a seguir:

$$\left(\frac{d^2H}{d\xi^2} \right) = \left[\frac{3}{2} \xi, \frac{-1+3\xi}{2} \frac{l^e}{2}, -\frac{3}{2} \xi, \frac{1+3\xi}{2} \frac{l^e}{2} \right] \quad (13)$$

Derivando mais uma vez:

$$\left(\frac{d^3H}{d\xi^3} \right) = \left[\frac{3}{2}, \frac{3l^e}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3l^e}{4} \right] \quad (14)$$

Da teoria de Euler-Bernoulli, para pequenas deformações, recorda-se que

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad e \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

Logo:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad e \quad Q = EI \frac{d^3v}{dx^3}$$

Por final, pode-se escrever a configuração deformada v , o momento fletor M e o esforço cortante Q ao longo de um elemento de viga como:

$$\begin{aligned} v &= [H]\{d\} \\ M &= \frac{4EI}{l^{e^2}} \left[\frac{d^2H}{d\xi^2} \right] \{d\} \\ Q &= \frac{8EI}{l^{e^3}} \left[\frac{d^3H}{d\xi^3} \right] \{d\} \end{aligned}$$

2.3 AÇÕES ATUANTES NAS ESTRUTURAS

De acordo com a ABNT NBR-8681/2003, ações são as causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas. As ações podem ser classificadas em:

- Ações permanentes

Aquelas que ocorrem com valores constantes ou de pequena variação em torno de sua média, durante toda a vida da construção. Estas podem ser diretas, como pesos próprios dos elementos construtivos, e indiretas, tal como protensão, recalques de apoio, etc.

- Ações variáveis

As que ocorrem com valores que apresentam variações significativas em torno de sua média, durante a vida da construção. Trata-se das cargas móveis ou acidentais, i.e., cargas que atuam nas construções em função de seu uso, como pessoas, mobiliário, veículos, etc.

- Ações excepcionais

As ações que têm duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas nos projetos de determinadas estruturas. Exemplos: choques de veículos, explosões, incêndios, etc.

2.3.1 Cargas móveis

Segundo Holtz (2005), as cargas móveis solicitam diversas estruturas, como pórticos industriais, pontes rodoviárias e ferroviárias, etc. Os esforços internos nestas estruturas variam com a posição de atuação das cargas e com a magnitude das mesmas. Logo, o projeto de um elemento estrutural que receba essa solicitação requer que as posições das cargas móveis que geram valores extremos dos esforços nas seções do elemento sejam determinadas.

A posição de ação de cargas acidentais de ocupação em projeto de estruturas sujeitas a cargas fixas também tem influência na determinação dos esforços dimensionantes. Essas posições determinam os valores limites dos esforços na seção analisada. Desta forma, é necessária a determinação das posições de atuação das cargas que produzem os valores extremos para cada seção a ser dimensionada e para cada esforço dimensionante (NUNES, A. C.; MARTHA, L. F., 2001).

De acordo com Martha (2018), pode-se solucionar este problema analisando a estrutura em várias posições de cargas móveis e selecionando os valores extremos. Entretanto, esta estratégia é complexa e ineficiente para estruturas e carregamentos mais complicados. Portanto, utiliza-se o auxílio de Linhas de Influência no procedimento para determinar, de uma forma geral e objetiva, as posições de cargas móveis e acidentais que fornecem valores extremos de um determinado esforço em uma seção desejada.

2.4 LINHAS DE INFLUÊNCIA

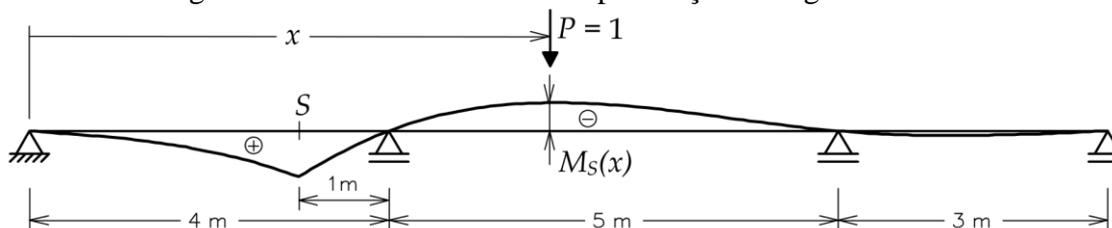
Süssekind (1981) define a linha de influência de um efeito elástico qualquer em uma dada seção como sendo a representação gráfica ou analítica do valor deste efeito, na seção em questão, produzida por uma carga concentrada unitária, de cima para baixo, que percorre a estrutura.

Hibbeler (2012) diz que, uma vez que esta linha é construída, pode-se saber onde a carga móvel deve ser colocada na estrutura de forma que gere a maior influência no ponto especificado. Além disso, é possível calcular a magnitude da reação, cortante, momento ou deflexão a partir das ordenadas do gráfico da linha de influência. Por estes motivos, as linhas de influência desempenham um importante papel no dimensionamento de pontes, trilhos de guias industriais, transportadores, entre outras estruturas que estão sujeitas a cargas móveis na sua extensão.

Embora o procedimento para construção das linhas de influência seja básico, deve-se saber diferenciar a construção da LI e a construção dos diagramas de momento e cortante. A LI representa o efeito de uma carga móvel apenas em um ponto específico na estrutura, enquanto que os diagramas de momento e cortante representam o efeito das cargas fixas em todos os pontos ao longo do eixo do elemento (HIBBELER, 2012).

A Figura 12 exemplifica a LI de momento fletor na seção S indicada. Plotando-se o gráfico em um eixo cartesiano (x, y) , o eixo das abcissas representa a posição da carga unitária $P = 1$ e eixo das ordenadas o valor do momento fletor na seção em questão em função de x , indiciando que $LIM_S = M_S(x)$. Geralmente, desenham-se os valores positivos dos esforços nas linhas de influência para baixo, enquanto que os valores negativos para cima.

Figura 12 - LI de momento fletor para seção de viga contínua.



Fonte: HOLTZ (2005).

Partindo-se dos traçados de LI' s, é possível chegar nas envoltórias limites de esforços. Trata-se do lugar geométrico dos esforços máximos (positivos e negativos) atuantes em cada seção da estrutura (SÜSSEKIND, J. C., 1981).

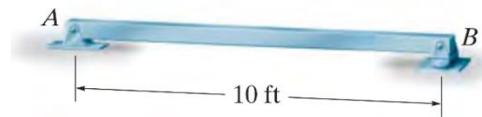
2.5 TRAÇADO DA LINHA DE INFLUÊNCIA

Conforme Hibbeler (2012), há dois procedimentos diretos para traçado das LI' s:

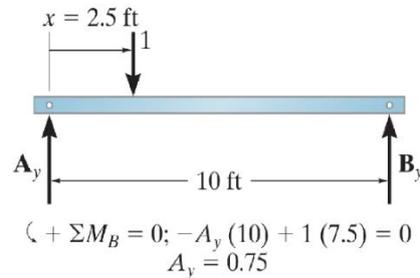
a) tabulando valores: coloca-se uma carga unitária em vários pontos, x , ao longo da estrutura, e para cada ponto utiliza-se estática para determinar o valor da função no ponto especificado.

No exemplo da Figura 13 uma carga unitária é colocada na viga em cada ponto de x selecionado e o valor de A_y é calculado somando os momentos em relação a B. Fazendo, se isso para várias posições de x , pôde-se chegar nos valores abaixo de A_y .

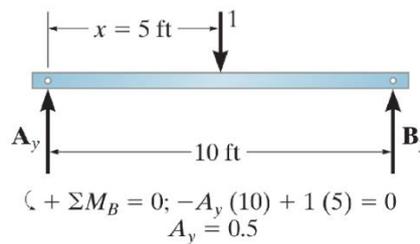
Figura 13 - Exemplo do procedimento de tabulação de valores para traçado de LI.



(a)



(b)



(c)

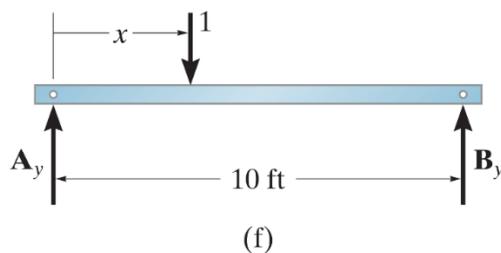
x	A_y
0	1
2.5	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0

(d)

Fonte: HIBBELER (2012).

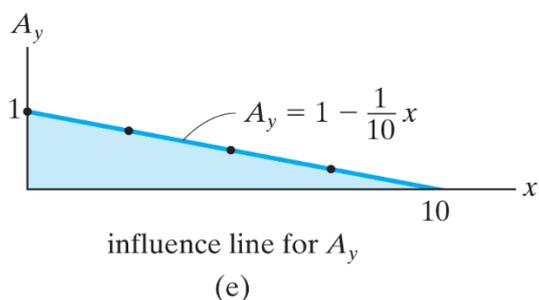
b) equações de linha de influência: coloca-se a carga unitária numa posição variável x na estrutura e então computa-se o valor do efeito elástico no ponto desejado como função de x . Desta forma, as equações de vários dos vários segmentos de linha compondo a LI podem ser determinadas e plotadas. Quando a carga unitária é colocada a uma distância variável x de A, a reação A_y como função de x pode ser determinada como demonstrado na Figura 14 abaixo:

Figura 14 - Exemplo do procedimento de equações de linha de influência.



$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad -A_y(10) + (10 - x)(1) = 0$$

$$A_y = 1 - \frac{1}{10}x$$



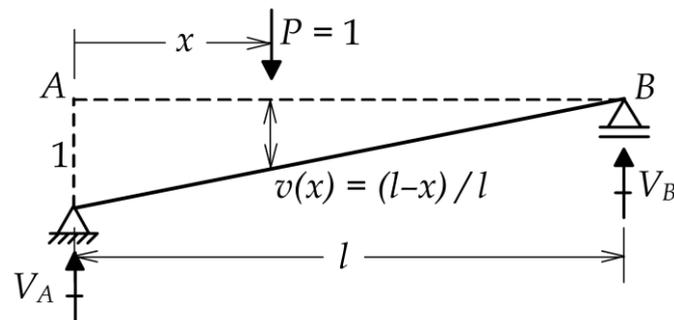
Fonte: HIBBELER (2012).

No entanto, em 1866, Heinrich Müller-Breslau desenvolveu uma técnica para construir rapidamente o formato da linha de influência. Conhecido como o princípio de Müller-Breslau ou método cinemático para traçado de LI, este diz que a linha de influência para uma função está para a mesma escala que a forma defletida da viga quando a função atua sobre esta. A fim de traçar esta forma defletida de maneira adequada, a capacidade da viga de resistir ao esforço desejado é removida de maneira que a viga possa defletir quando a função for aplicada. (HIBBELER, 2012).

Pode-se demonstrar o resultado deste princípio por meio do Princípio dos Deslocamentos Virtuais - PDV, podendo-se aplicá-lo para estruturas isostáticas ou hiperestáticas. Esse princípio diz que o trabalho virtual produzido pelas forças externas da estrutura pelos deslocamentos externos virtuais correspondentes é igual à energia de deformação interna virtual.

Estruturas isostáticas, com um vínculo rompido, tornam-se mecanismos hipostáticos, deformando-se como corpos rígidos. Como não há deformação interna virtual, esta é considerada nula. Logo, o trabalho virtual das forças externas também é nulo (MARTHA, L. F., 2018). Como exemplo, apresenta-se o cálculo para figura.

Figura 15 - Campo de deslocamentos virtuais para determinação de L.I. da reação de apoio de uma viga biapoiada.



Fonte: NUNES, A. C.; MARTHA, L. F. (2001).

$$-V_A + P \cdot v(x) + V_B \cdot 0 = 0 \rightarrow V_A(x) = \frac{l-x}{l}$$

Da mesma forma pode-se demonstrar este cálculo para esforço cortante e momento fletor.

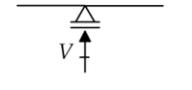
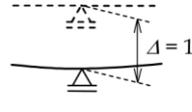
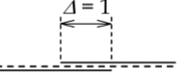
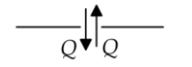
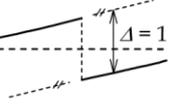
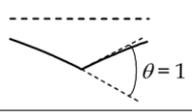
2.5.1 Método Cinemático para Traçado de LI

Para se traçar a linha de influência de um efeito elástico E , procede-se da seguinte forma (SÜSSEKIND, J. C., 1980):

- rompe-se o vínculo capaz de transmitir o efeito E , cuja linha de influência se deseja determinar;
- na seção onde atua E , atribui-se à estrutura, no sentido oposto ao de E positivo, uma deformação (absoluta, no caso de reação de apoio ou relativa, no caso de esforço simples) unitária, que será tratada como pequena deformação;
- a linha elástica obtida é a linha de influência de E .

O deslocamento generalizado referido depende do efeito em consideração (Figura 16).

Figura 16 - Deslocamentos generalizados utilizados no método cinemático.

Efeito	Deslocamento generalizado
Reação de apoio 	
Esforço normal 	
Esforço cortante 	
Momento fletor 	

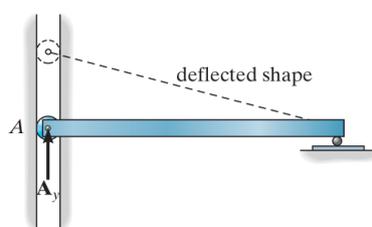
Fonte: HOLTZ (2015).

As Figura 17, Figura 18 e Figura 19 abaixo exemplificam o método.

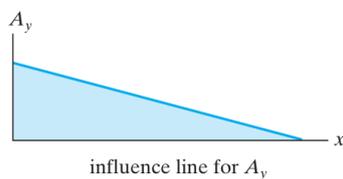
Figura 17 - Linha de influência da reação A_y pelo método cinemático.



(a)



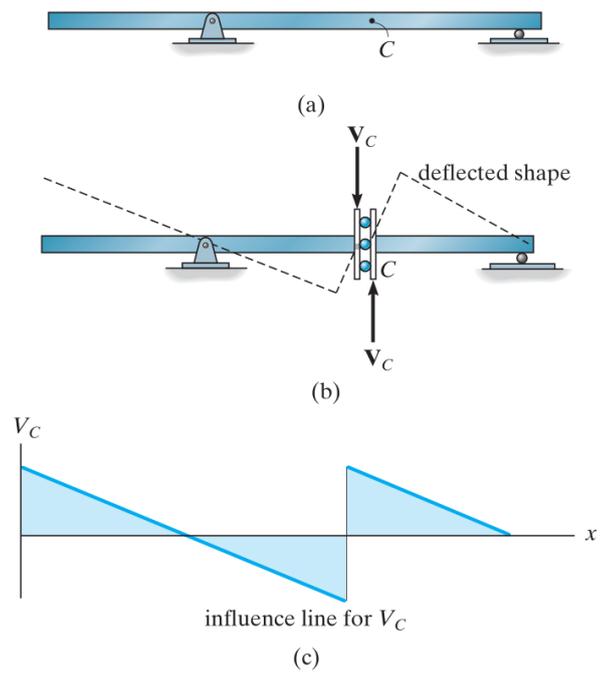
(b)



(c)

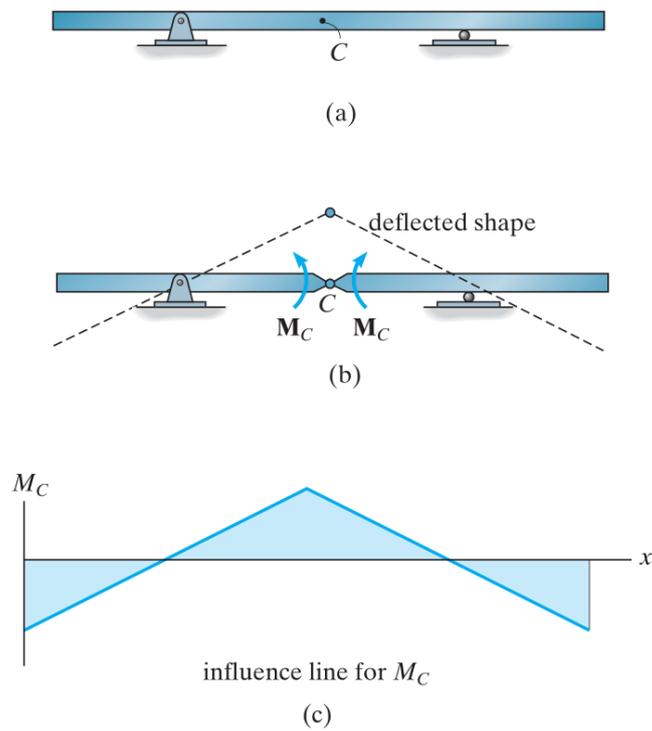
Fonte: HIBBELER (2012).

Figura 18 - Linha de influência para o cortante em C pelo método cinemático.



Fonte: HIBBELER (2012).

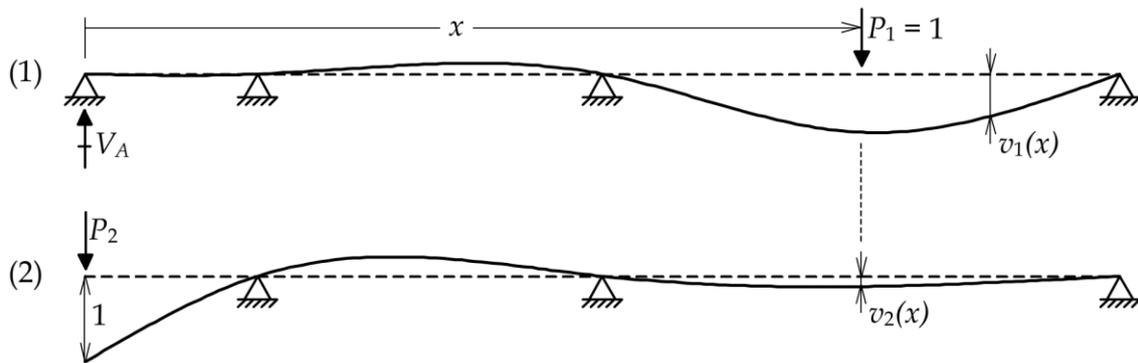
Figura 19 - Linha de influência para momento em C pelo método cinemático.



Fonte: HIBBELER (2012).

Para estruturas hiperestáticas, é possível demonstrar o princípio utilizando o Teorema de Betti. Sejam as vigas de mesmo comprimento da Figura 20. A primeira viga está sujeita a uma carga concentrada unitária $P_1 = 1$, aplicada a uma distância x do início da viga. Já na segunda viga não existe o primeiro apoio, sendo aplicada nesta posição uma carga concentrada P_2 que causa um deslocamento unitário pra baixo no seu ponto de aplicação.

Figura 20 - Aplicação do Teorema de Betti a duas vigas contínuas.



Fonte: NUNES, A. C.; MARTHA, L. F. (2001).

Impondo $v_2(x)$ como campo de deslocamentos virtuais imposto à primeira viga e $v_1(x)$ o campo de deslocamentos virtuais imposto à segunda viga, aplica-se o PDV, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\sum F_1 v_2 = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int \frac{Q_1 Q_2}{GA_c} dx$$

$$\sum F_2 v_1 = \int \frac{M_2 M_1}{EI} dx + \int \frac{Q_2 Q_1}{GA_c} dx$$

onde:

$\sum F_1 v_2$ é o trabalho das forças da primeira viga, com os correspondentes deslocamentos externos da segunda viga;

$\sum F_2 v_1$ é o trabalho das forças da segunda viga, com os correspondentes deslocamentos externos da primeira viga;

$\int \frac{M_1 M_2}{EI} dx$ e $\int \frac{M_2 M_1}{EI} dx$ é a energia de deformação virtual interna por flexão na primeira e segunda viga, respectivamente;

$\int \frac{Q_1 Q_2}{GA_c} dx$ e $\int \frac{Q_2 Q_1}{GA_c} dx$ é a energia de deformação virtual interna por cisalhamento na primeira e segunda viga, respectivamente.

Pode-se notar que a energia de deformação virtual interna das duas expressões é idêntica. Logo:

$$\sum F_1 v_2 = \sum F_2 v_1$$

Esta expressão representa o Teorema de Betti, válido para estruturas elásticas-lineares e pode ser explicada como: o trabalho das forças externas de uma estrutura com os correspondentes deslocamentos externos de outra estrutura é igual ao trabalho das forças externas da outra estrutura com os correspondentes deslocamentos da primeira (NUNES, A. C.; MARTHA, L. F., 2001).

Finalmente, aplicando o Teorema de Betti para as vigas da Figura 20, obtém-se que:

$$-V_A \cdot 1 + P_1 \cdot v_2(x) - P_2 \cdot 0 = 0 \rightarrow V_A(x) = v_2(x) \quad \therefore \quad LIV_A = v_2(x)$$

Analogamente, pode-se demonstrar a validade do princípio em vigas hiperestáticas para linhas de influência de esforço cortante e momento fletor, bem como para outros tipos de estruturas.

3 METODOLOGIA

Postas as considerações feitas nos capítulos anteriores, especialmente aquelas sobre Linhas de Influência e Análise Matricial de Estruturas, três métodos são propostos para a obtenção de linhas de influência de efeitos elásticos: por carregamentos múltiplos, por inversão da matriz de rigidez e por imposição de deslocamentos relativos.

3.1 OBTENÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA POR CARREGAMENTOS MÚLTIPLOS

O primeiro método apresentado busca valer-se da capacidade do ambiente computacional de resolver simultaneamente sistemas lineares com múltiplos vetores de coeficientes independentes (MATHWORKS, 2018), que no caso da análise estrutural, representam o carregamento da estrutura.

Tal capacidade é coerente com o propósito do pacote de facilitar implementações de álgebra linear. Não faz parte do escopo deste texto discutir o método de resolução do sistema linear, seja com um ou múltiplos vetores independentes, cabendo apenas ressaltar que o mesmo é feito sem a inversão da matriz de rigidez (computacionalmente custosa) e de forma ágil e eficiente.

Assim, partindo-se da definição de linhas de influência apresentada em 2.5a, vários vetores de carga são gerados, um para cada posição possível da carga unitária. Faz-se aqui uma ressalva, contrária à consideração feita em 2.2.1 de que um ponto de aplicação de carga deve necessariamente tornar-se um nó da estrutura. Seria inviável criar, para cada ponto onde a carga for aplicada, um novo nó, já que implicaria em mudar a matriz de rigidez da estrutura. Utiliza-se assim, o vetor de carregamento nodal equivalente descrito em 2.2.4, seção “força pontual”.

A carga é aplicada em intervalos regulares e para cada posição é criado um vetor global de carregamento $\{P_i\}$. Esses vetores são reunidos em uma matriz de carregamento $[P]$ de forma que podemos alimentar o *solver* do MATLAB com vários sistemas lineares de equações simultâneos que tem a mesma matriz de coeficientes $[K]$.

$$[K][D] = [P]$$

Faz-se notar que $[K]$ tem a mesma definição anterior, que a matriz $[P]$ é uma coleção de vetores $\{P\}$ definidos em 2.2.4 e, conseqüentemente, $[D]$ será também uma matriz, de mesmas dimensões que $[P]$, cujas colunas representam a solução do sistema linear (equilíbrio da estrutura) para cada caso de carregamento.

A linha de influência será construída mediante obtenção do efeito elástico desejado a partir de cada um dos deslocamentos nodais obtidos.

3.1.1 Linha de influência das reações

Tendo em vista que $[P]$ é uma matriz composta pelos vetores de força, calculando-se as reações é possível obter também uma matriz $[R]$, onde suas colunas são vetores de

reação $\{R\}$ para cada posição da carga unitária. Logo, a linha de influência para reação desejada, é a linha da matriz $[R]$ correspondente ao grau de liberdade da reação em questão.

3.1.2 Linha de influência dos esforços internos

Já para os esforços, inicialmente, extrai-se dos vetores contidos na matriz $[D]$ os deslocamentos nodais do elemento para o qual se deseja a linha de influência, obtendo uma outra matriz $[d]$, com quatro linhas, correspondentes aos quatro graus de liberdade deste elemento e tantas colunas quantos pontos desejados para a linha de influência.

Feito isso, visando obter as forças nodais atuantes no elemento, faz-se a multiplicação $[f] = [k][d]$, onde $[f]$ é uma matriz onde as colunas representam os vetores de carregamento do elemento e $[k]$ a matriz de rigidez do elemento.

Logo, como representado na Figura 3, os vetores contidos na matriz $[f]$ são da forma descrita na Equação 15.

$$[f] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \left\{ \begin{matrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{matrix} \right\}_2 & \dots & \left\{ \begin{matrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{matrix} \right\}_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sendo $x_1, x_2 \dots x_n$ as posições da carga pontual unitária.

Visando compensar a ação do engastamento perfeito no elemento onde a LI será calculada, subtrai-se de $[f]$ os valores da matriz $[f_p]$ correspondentes ao elemento em questão.

$$[f] - [f_p]_e$$

Assim, a linha de influência para cortante no início e no final do elemento corresponde respectivamente às linhas 1 e 3 do resultado dessa subtração, bem como a linha de influência para o momento corresponde à linha 2 ou 4.

3.2 OBTENÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA POR INVERSÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Com a mesma justificativa da seção anterior, propõe-se a obtenção de Linhas de Influência a partir da inversão da matriz de rigidez $[K]$ da estrutura. Por esse método, a matriz de rigidez é montada e invertida antes mesmo da definição do vetor de carregamento.

A obtenção da linha de influência é realizada, então, construindo um vetor de carregamento para cada posição da carga unitária, de forma similar à descrita na seção anterior, e utilizando-se de

$$\{D\} = [K]^{-1}\{P\}$$

para obter o vetor de deslocamentos nodais para cada posição da carga. De posse deste, também de forma similar à seção 3.1, pode-se extrair o valor do efeito elástico para o qual se deseja a linha de influência.

Por este método, não é necessário guardar os vetores de carregamento correspondentes a cada posição de carga. Podem ser montados, utilizados para extrair o efeito elástico desejado e descartados a seguir.

3.3 OBTENÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA POR IMPOSIÇÃO DE DESLOCAMENTOS

Este método se vale do Princípio de Müller-Breslau para traçar linhas de influência (NUNES, A. C.; MARTHA, L. F., 2001). Ao vínculo energeticamente conjugado ao efeito elástico (ver Figura 16) é imposto valor prescrito unitário. A estrutura é analisada usando-se da formulação matricial sem carregamento algum. A deformada do eixo da estrutura será, então a linha de influência desejada. Esta é calculada conforme o explicitado em 2.2.6.

3.3.1 Linhas de influência de reação de apoio

O vínculo estrutural energeticamente conjugado a uma reação de apoio é o deslocamento no ponto e direção da reação desejada. Assim, para obter a linha de influência de uma reação, basta submeter à estrutura um deslocamento prescrito unitário na direção desejada como descrito em 2.2.5. O deslocamento transversal de cada ponto da estrutura será o valor da linha de influência naquele ponto.

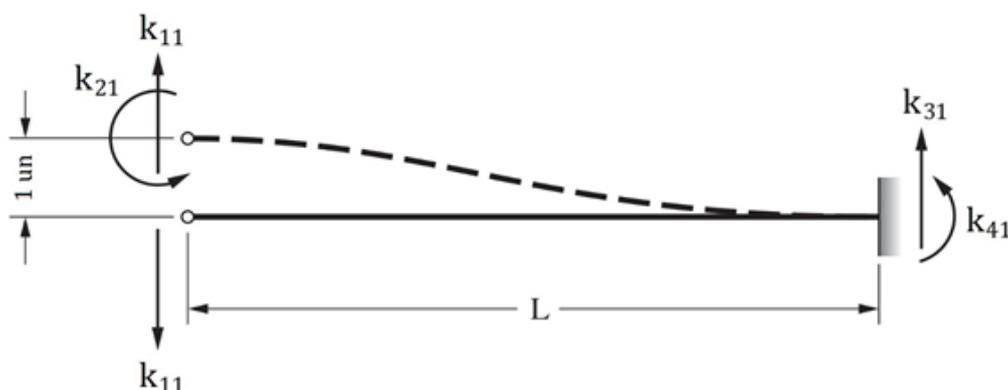
3.3.2 Linhas de influência de cortante

A construção de uma linha de influência para força cortante não é tão intuitiva quando às de reação de apoio. É necessário impor à viga um deslocamento transversal descontínuo, já que este é o par energeticamente conjugado ao cortante como mostrado nas figuras Figura 16 e Figura 18.

Essa descontinuidade é imposta internamente no elemento, fixando-se que o deslocamento da extremidade do elemento em questão é uma unidade de comprimento diferente do deslocamento do nó onde está vinculada (que corresponde ao deslocamento das extremidades dos outros elementos vinculados a esse nó). Para tal, faz-se necessário impor um par de forças entre a extremidade da viga e o nó da estrutura, k_{11} na Figura 21.

A situação mostrada na Figura 21 corresponde à primeira parte da Figura 5, onde se determinou a matriz de rigidez local empregando-se o método da rigidez direta. Desta forma, o carregamento nodal necessário para impor essa descontinuidade na viga é igual à primeira coluna da matriz de rigidez local do elemento. Na verdade, por analogia, será a coluna da matriz de rigidez correspondente ao grau de liberdade para o qual se quer a linha de influência.

Figura 21 - Atribuição de deslocamento nodal vertical unitário.



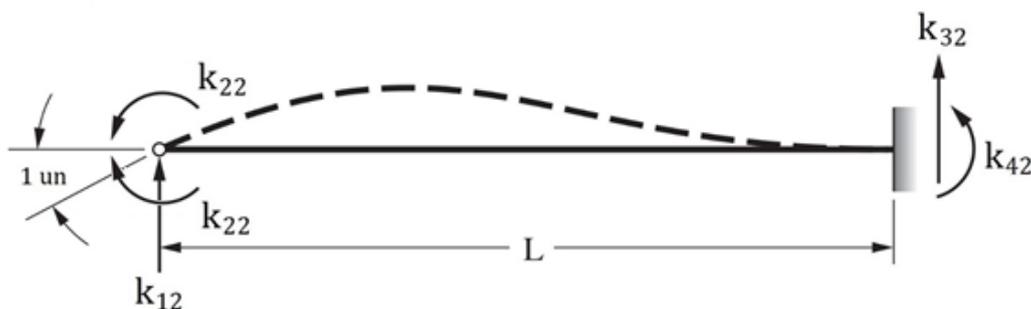
Fonte: Adaptado de MCCOMARC (2007).

Assim, a construção de linhas de influência para cortante no início ou no final do elemento, usando-se do método de Müller-Breslau, se dá impondo um carregamento nodal no elemento foco igual respectivamente à 1ª ou 3ª coluna de sua matriz de rigidez local e adotando como deslocamento de sua extremidade uma unidade a mais que o deslocamento nodal equivalente.

3.3.3 Linhas de influência de momento fletor

O desenvolvimento é similar à seção 3.3.2, sendo que o deslocamento a ser imposto como unitário é a rotação relativa entre barras. Parte-se do pressuposto que uma barra tenha, em sua extremidade, rotação igual ao grau de liberdade de rotação daquele nó. A descontinuidade é imposta afirmando-se que outra barra que chegue a esse mesmo nó tenha rotação igual à do nó (grau de liberdade global da estrutura) acrescido de uma unidade.

Figura 22 - Atribuição de deslocamento nodal angular unitário.



Fonte: Adaptado de MCCOMARC (2007).

Portanto, a construção de linhas de influência para momento utilizando-se do método de Müller-Breslau se dá impondo um carregamento nodal no elemento foco igual à 2ª ou 4ª coluna de sua matriz de rigidez local e adotando como rotação de sua extremidade uma unidade a mais que a rotação nodal equivalente.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A partir dos conceitos introduzidos no item 2, faz-se o uso do principal software da The Math Works, Inc., o MATLAB, para implementar computacionalmente o método da análise matricial para vigas, bem como as linhas de influência da mesma.

Como o nome infere, MATLAB foi originalmente desenvolvida como um laboratório matricial (*matrix laboratory*). Até os dias atuais, o maior elemento do software ainda é a matriz. Manipulações matemáticas de matrizes são facilmente implementadas, num ambiente interativo e de fácil uso. O MATLAB adicionou à estas manipulações matriciais uma variedade de funções numéricas, cálculos simbólicos e ferramentas de visualização. Como consequência, a versão atual representa um ambiente de computação técnica bastante abrangente, justificando assim a utilização deste software neste trabalho (CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P., 2010).

4.1 DADOS DE ENTRADA

Inicialmente, para que seja possível a resolução de um problema de engenharia estrutural, é necessário conhecimento de alguns dados de entrada, como por exemplo: propriedades geométricas e mecânicas dos materiais utilizados, coordenadas dos elementos, conectividades, forças atuantes, etc. Sendo assim, é disponibilizado o arquivo *inputdata.txt* onde o usuário do programa deverá introduzir os dados iniciais do problema.

Como dados de entrada para o programa do trabalho em questão, pode-se citar:

- Título: uma identificação em caracteres alfanuméricos para o problema;
- Número de nós: quantidade total de nós da viga a ser analisada;
- Número de elementos: quantidade total de elementos;
- Número de graus de liberdade por nó: o usuário deve informar a quantidade de graus de liberdade cada nó do elemento possuirá. Este poderá ter 2 ou 3 graus, visto que a diferença se trata da consideração da força axial no elemento para o caso de 3 graus;
- Quantidade de materiais: número de diferentes materiais utilizados para compor o problema;
- Módulo de elasticidade dos materiais: deve ser informado para cada elemento, podendo haver a possibilidade de mudança de material de um elemento para outro, variando com o número de elementos informado;
- Quantidade de seções transversais: número de diferentes seções transversais utilizadas para compor o problema;
- Seção transversal: Informa a área e momento de inércia dos elementos;
- Coordenadas dos nós da estrutura: valores dos pares ordenados (x, y) que posicionam cada nó;
- Conectividade: seção onde o usuário deve informar o elemento e seus respectivos nós;
- Número de condições de contorno: sabendo-se que cada nó possui apenas dois graus de liberdade (deslocamento vertical e rotação), deve-se informar o número total de

restrições desses graus, devendo o mesmo ser superior a 2 para manter as condições de estática da viga;

- Grau de liberdade e condição de contorno: o usuário deve informar os graus de liberdade com seus respectivos valores prescritos, seguindo

$$\begin{cases} 2i - 1 \\ 2i \\ 2j - 1 \\ 2j \end{cases}$$

Sendo i e j os números dos nós inicial e final, respectivamente.

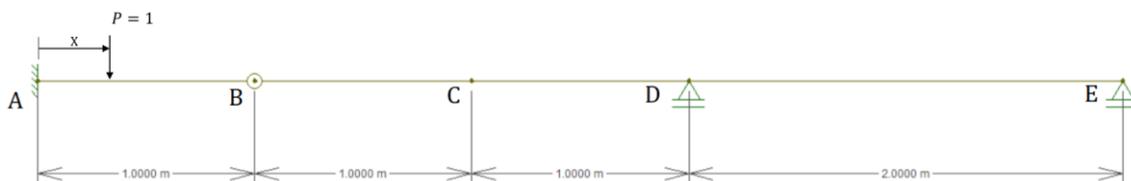
- Número de rótulas: valor total de rótulas (momentos nulos) que a viga possui;
- Posição das rótulas: considera-se que elementos subsequentes que possuem uma rótula em sua interseção possuem nós diferentes como conexão, sendo necessária a identificação das rótulas e suas devidas posições;

Para traçado da linha de influência, também deve-se computar alguns dados de entrada:

- Número de divisores por elemento: representa a quantidade de divisões que haverá no elemento, para cálculo de deformada e LI.
- Método de cálculo da LI: Para traçar a LI pelo Método dos Carregamentos Múltiplos, digita-se 1 (um); Método da Inversão da Matriz de Rigidez, 2 (dois); Método Cinemático, 3 (três);
- Elemento para traçado da LI: é necessário computar o elemento em que estará a seção a qual deseja-se obter a linha de influência;
- Carregamento pontual: trata-se do carregamento unitário que percorrerá a viga, devendo-se, inicialmente, informar o elemento e a posição inicial da carga.

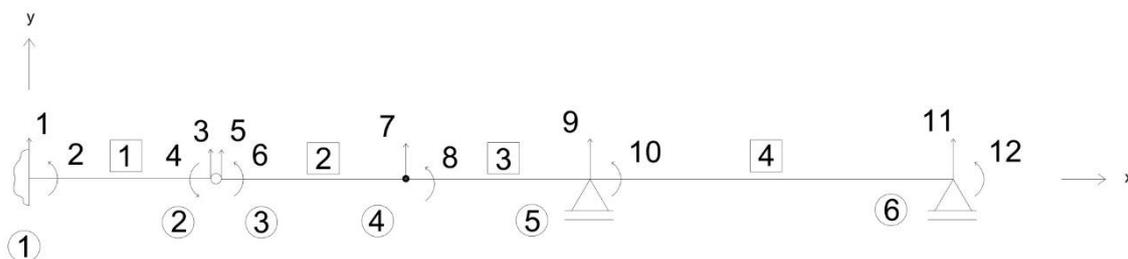
Visando a ilustração da utilização dos dados de entrada, considera-se a viga da Figura 23 abaixo, bem como a sua discretização (Figura 24). Mais uma vez, os números entre círculos referem-se ao nó, enquanto que os números em quadrados aos elementos.

Figura 23 - Exemplo de viga.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 24 - Viga discretizada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Para os elementos 1, 2 e 3 utilizou-se concreto, cujo $E = 200 \text{ GPa}$ e seção transversal $20\text{cm} \times 40\text{cm}$. Já para o elemento 4, foi usado como material o aço, de módulo de elasticidade $E = 205 \text{ GPa}$ e seção transversal $20\text{cm} \times 30\text{cm}$.

4.2 PRÉ-PROCESSAMENTO

O pré-processamento trata-se do cálculo das matrizes de rigidez e aplicação das condições de contorno.

A matriz de rigidez do elemento e da estruturas são obtidas conforme descrito em 2.2.2 e 2.2.3, respectivamente. Primeiramente, há uma alocação das matrizes que serão utilizadas, seguidas de um condicional (*if*) que analisa se a estrutura possui ou não rótulas. Posteriormente, calcula-se os comprimentos dos elementos, baseando-se nas coordenadas dos nós. Visto que uma viga é uma reta no plano, pode-se calcular os comprimentos pela Equação a seguir:

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (16)$$

Sendo L o comprimento do elemento, x_i e y_i as coordenadas do nó inicial da barra e x_j e y_j as coordenadas do nó final.

Possuindo o vetor $\{L\}$, o módulo de elasticidade e a inércia, calcula-se a matriz do elemento $[k]$.

Posteriormente, soma-se as matrizes em seus devidos graus de liberdade, obtendo a matriz de rigidez global $[K]$.

Adiante, calcula-se o vetor de forças global, podendo então seguir para a montagem do sistema linear. Deve-se ressaltar que a ordem e a forma de obtenção das parcelas necessárias para montagem do sistema são diferentes a depender do método que será usado para cálculo.

Tendo todos os parâmetros definidos, aplica-se as condições de contorno conforme explicado em 2.2.5.

Havendo rótulas na viga, este trabalho utiliza multiplicadores de Lagrange visando expandir a matriz de rigidez e os vetores de forças e deslocamentos, buscando

transformar o sistema linear $[K]\{D\} = \{F\}$ em uma versão expandida (FONTES, 2016), descrita abaixo:

$$\begin{bmatrix} [K] & [\bar{C}]^T \\ [\bar{C}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo λ o multiplicador de Lagrange; $[0]$ a matriz nula de ordem $m \times m$, onde m é o número de rótulas; e $[\bar{C}]$ uma matriz de ordem $m \times 2n$, com $n =$ número de nós, sendo seus elementos da seguinte forma:

- $\bar{C}_{w,(2i-1)} = 1$, para $i =$ nó 1 da rótula; $w =$ número de identificação da rótula informados nos dados de entrada;
- $\bar{C}_{w,(2j-1)} = -1$, para $j =$ nó 2 da rótula; $w =$ número de identificação da rótula informados nos dados de entrada;
- Os outros elementos são nulos.

4.3 PROCESSAMENTO

Para adquirir os resultados desejados do sistema linear $[K]\{D\} = \{F\}$, necessita-se da matriz de rigidez global da estrutura $[K]$, do vetor de forças global $[F]$ e das condições de contorno (CC) definidos.

Para resolução dos sistemas, procedeu-se, computacionalmente, das seguintes maneiras:

- a) Para cálculo da L.I pelo método de Müller-Breslau:

Utiliza-se “barra invertida” (*backslash*).

$$\{D_l\} = [K_{ll}] \setminus \{\{F_l\} - [K_{lr}]\{D_r\}\}$$

- b) Para cálculo da L.I. pelo método dos carregamentos múltiplos:

Utiliza-se o comando *linsolve*.

$$\{D_u\} = \text{linsolve}([K_{ll}], \{\{F_l\} - [K_{lr}]\{D_r\}\})$$

- c) Para cálculo da L.I. pelo método da inversão da matriz de rigidez:

Inverte-se a matriz $K_{SISTEMA}$ e a armazena, resolvendo, posteriormente, a multiplicação de matrizes:

$$[K_{INV}] = [K_{ll}]^{-1}$$

$$\{D_l\} = [K_{INV}]\{\{F_l\} - [K_{lr}]\{D_r\}\}$$

4.4 PÓS-PROCESSAMENTO

O pós-processamento resume-se à obtenção das linhas de influência, à saída de dados e plotagem dos gráficos.

Por conseguinte, tendo resolvido todas as variáveis do problema, é possível organizar o vetor de deslocamento global da estrutura, posicionando os prescritos $\{D_r\}$ e os valores de deslocamentos e rotações calculados $\{D_l\}$. Ademais, pode-se calcular - a depender do método usado - as reações, linha elástica e esforços internos. Com estes calculados, obtém-se a linha de influência, como explicitado no item 0, e então plota-se as mesmas.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo trata da apresentação de dois exemplos de vigas, buscando a validação do código computacional por meio da comparação com valores adquiridos pelo software Ftool.

Algumas considerações devem ser feitas em relação à comparação dos resultados, das quais:

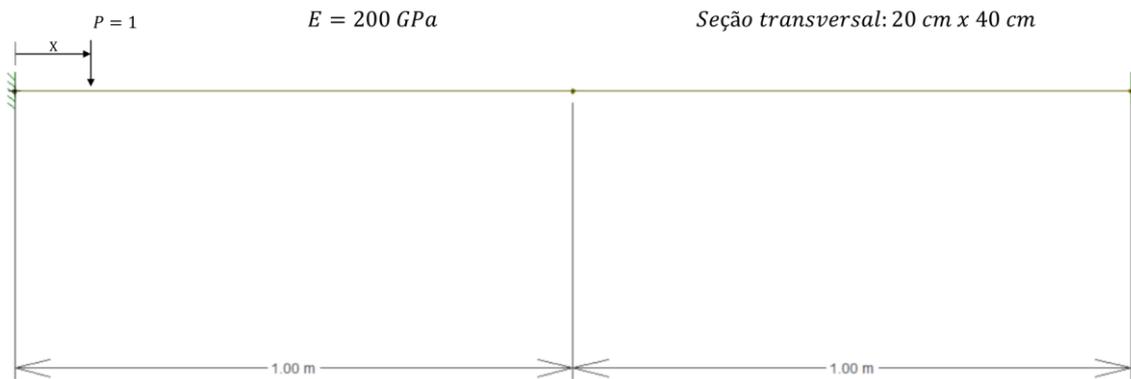
- I. Como o Ftool não apresenta a L.I. para reações de apoio, estas podem ser comparadas apenas para os apoios extremos, calculando a linha de influência para esforço cortante ou momento fletor no apoio em questão;
- II. O Ftool desenha para cima os valores negativos e para baixo os positivos, contrário ao calculado no trabalho em questão;
- III. Por convenção, o sinal do esforço cortante à direita da seção é considerado positivo para baixo. Portanto, a L.I. que representa a reação vertical no apoio mais à direita possuirá sinal contrário pelo Ftool, já que esta reação é considerada positiva para cima e a L.I. do Ftool representa o cortante no apoio. Devido à consideração II, os gráficos para esta reação coincidirão;
- IV. As reações de momento fletor também possuirão sinais contrários, visto que o Ftool mostra o momento fletor no apoio e este trabalho calcula a reação deste momento. Logo, estes gráficos também coincidirão;
- V. Para o método de Müller-Breslau, as L.I. das reações são obtidas por meio da configuração deformada da viga, quando se aplica um deslocamento unitário generalizado no apoio em questão. Logo, devido à convenção de sinais, as reações poderão ser contrárias.

Foram obtidos resultados idênticos ao do Ftool, pelo menos até o quarto algarismo significativo.

Sabendo-se que, para todos os métodos as linhas de influência possuem o mesmo resultado, apresenta-se esses resultados, obtidos para duas vigas:

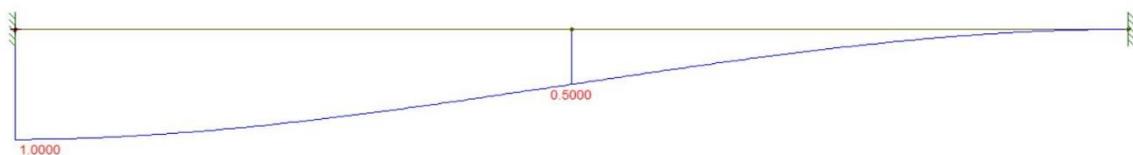
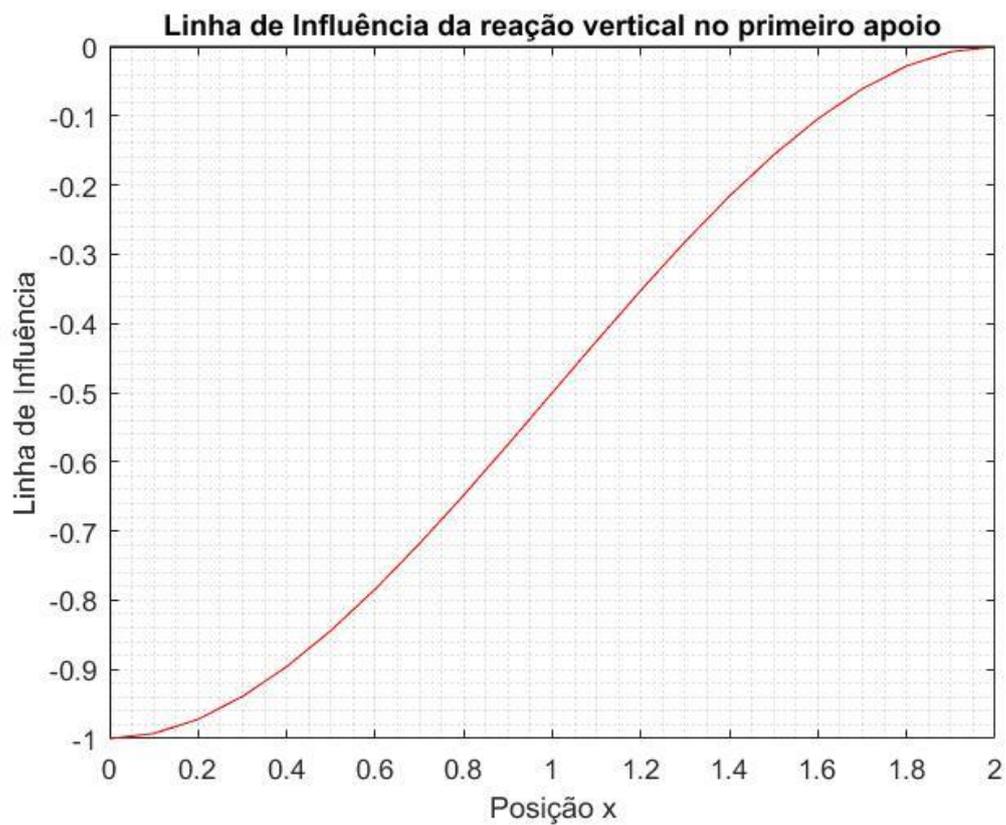
Inicialmente, são traçadas e comparadas as linhas de influência das reações de apoio e do esforço cortante e momento fletor no meio do vão de uma viga biengastada (Figura 25), pelo método de Müller-Breslau. Posteriormente, serão expostas e confrontadas as mesmas L.I. para a viga da Figura 23, porém, para outra seção pelo método dos carregamentos múltiplos.

Figura 25 - Viga biengastada.



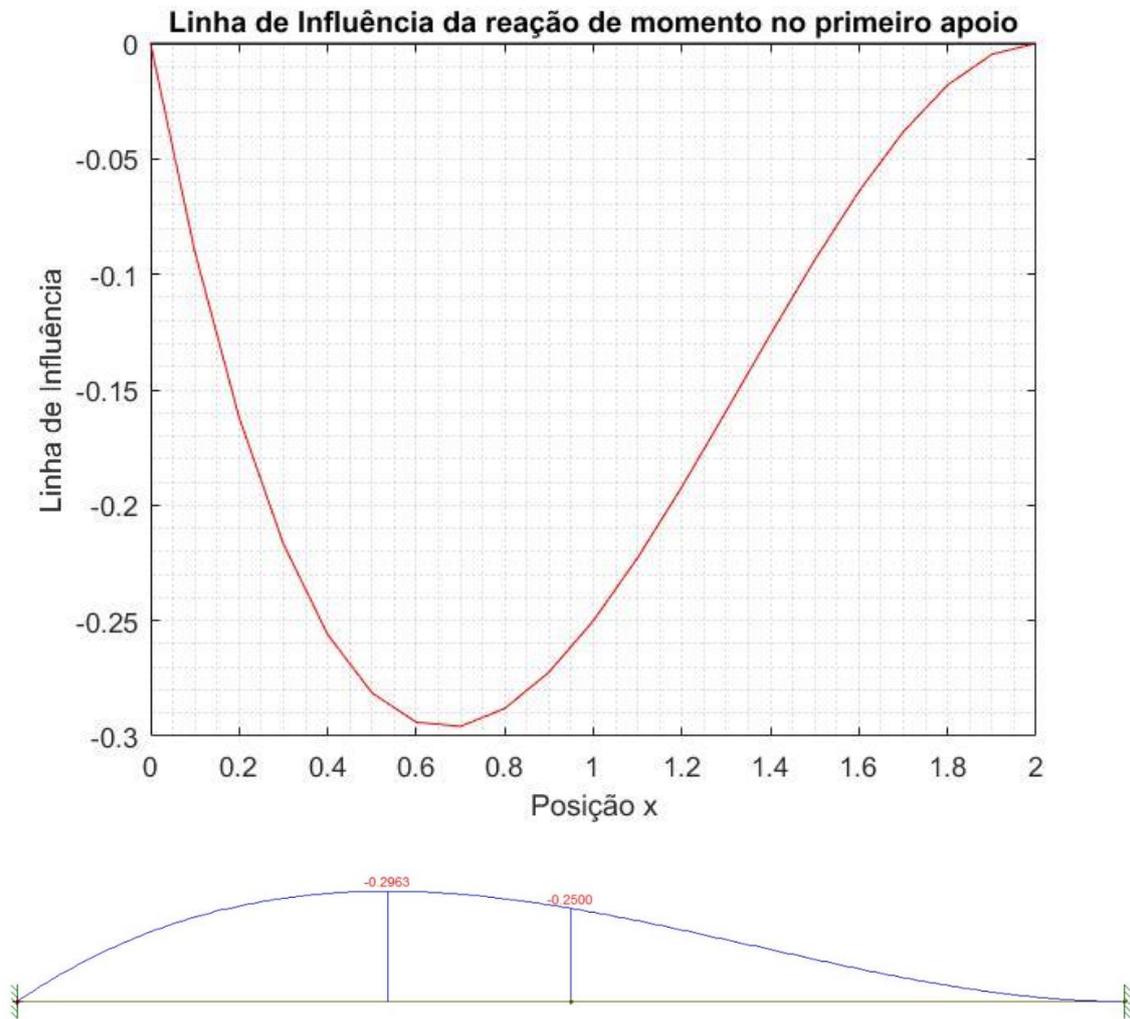
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 26 - L.I. da reação vertical no primeiro apoio.



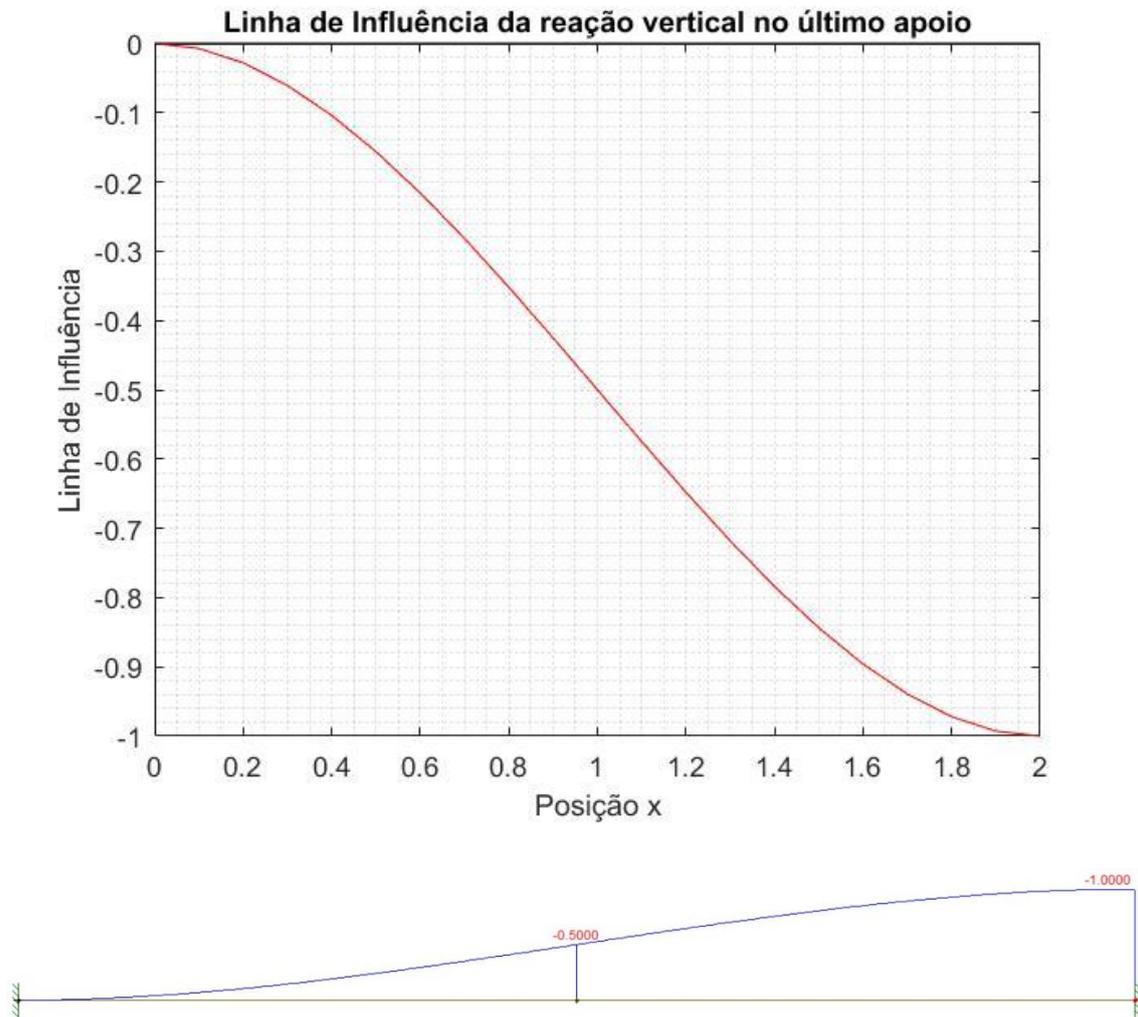
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 27 - L.I. da reação de momento no primeiro apoio.



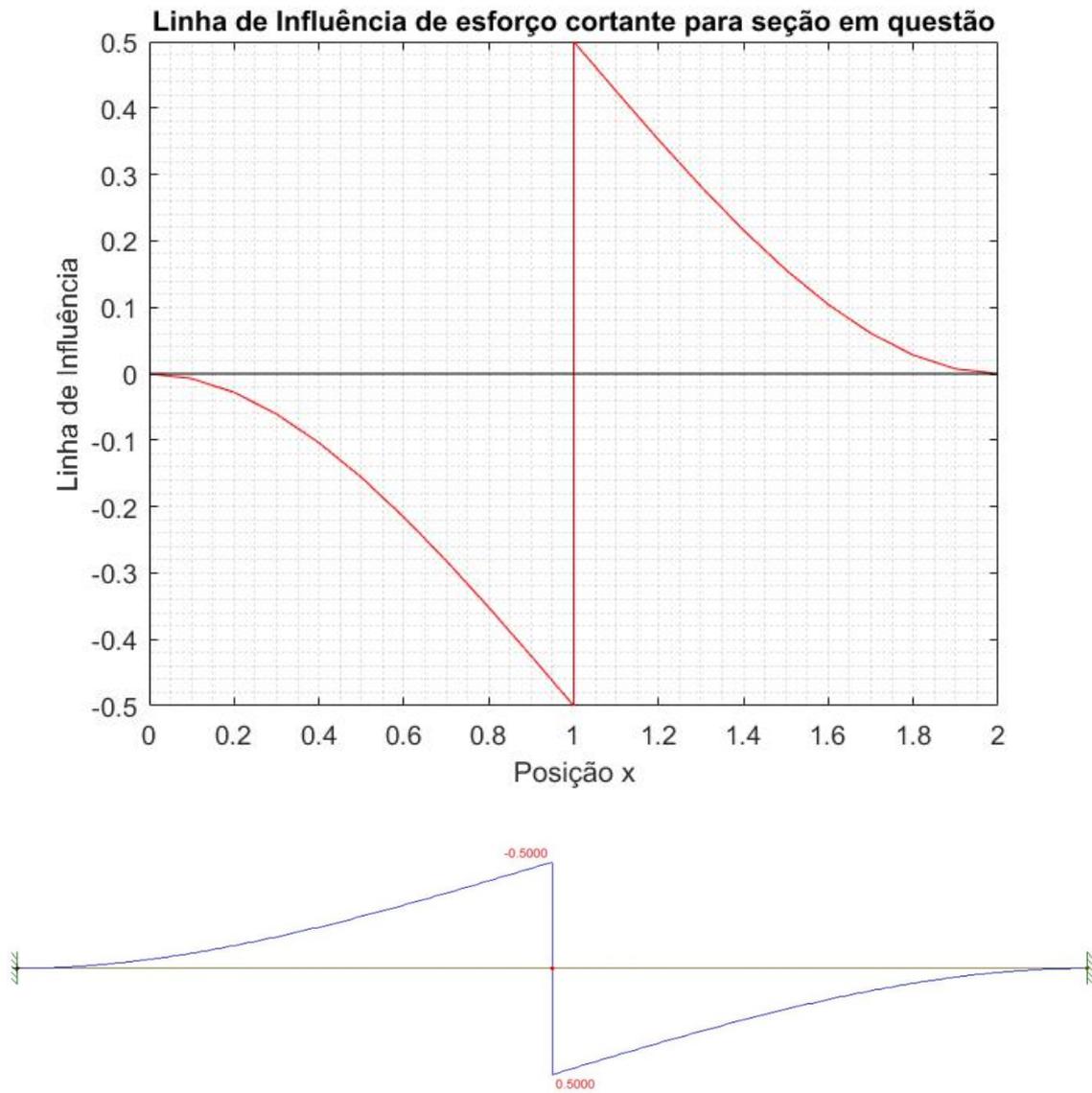
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 28 – L.I. para reação vertical no último apoio.



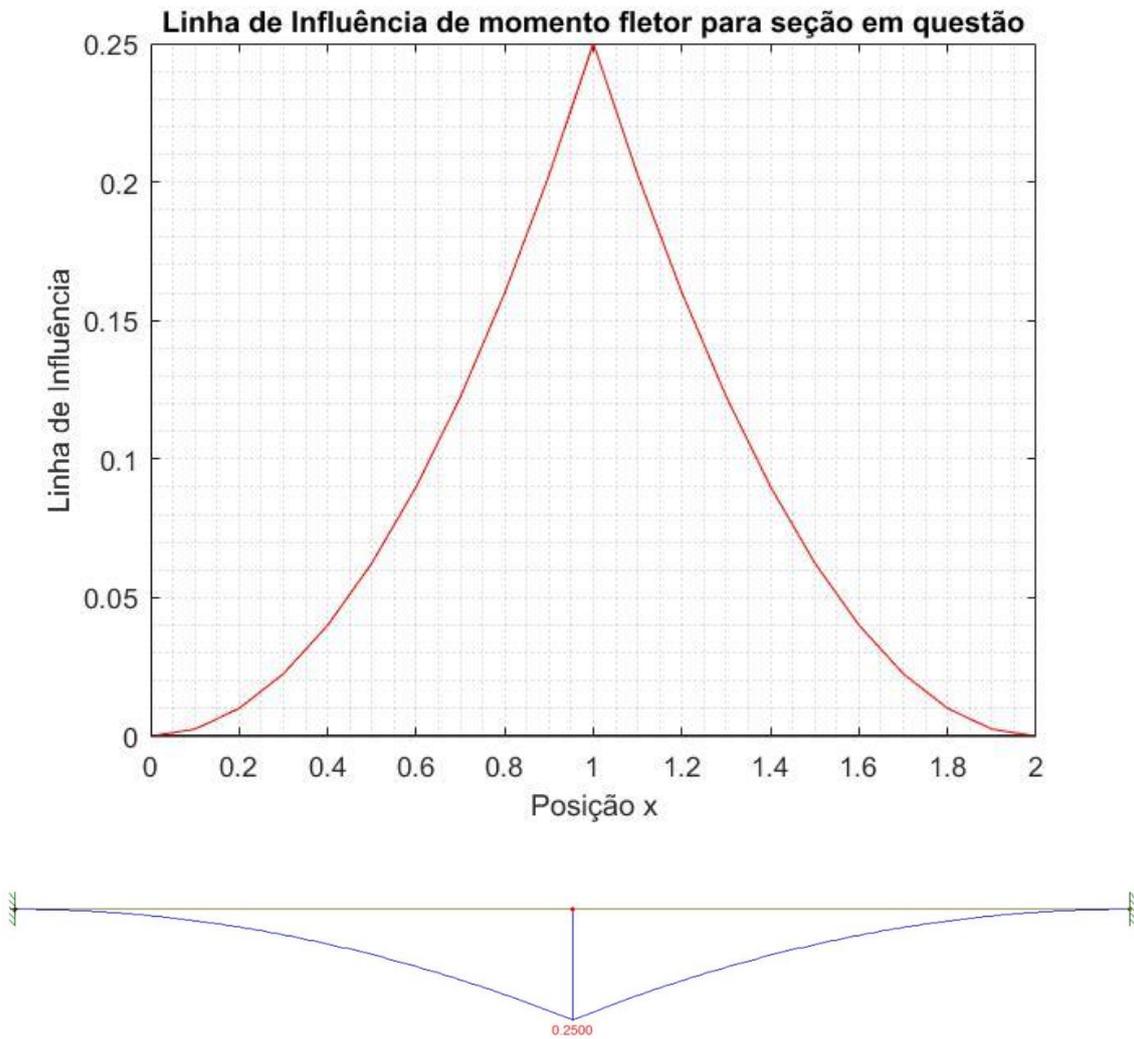
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 29 - L.I. do esforço cortante no meio do vão.



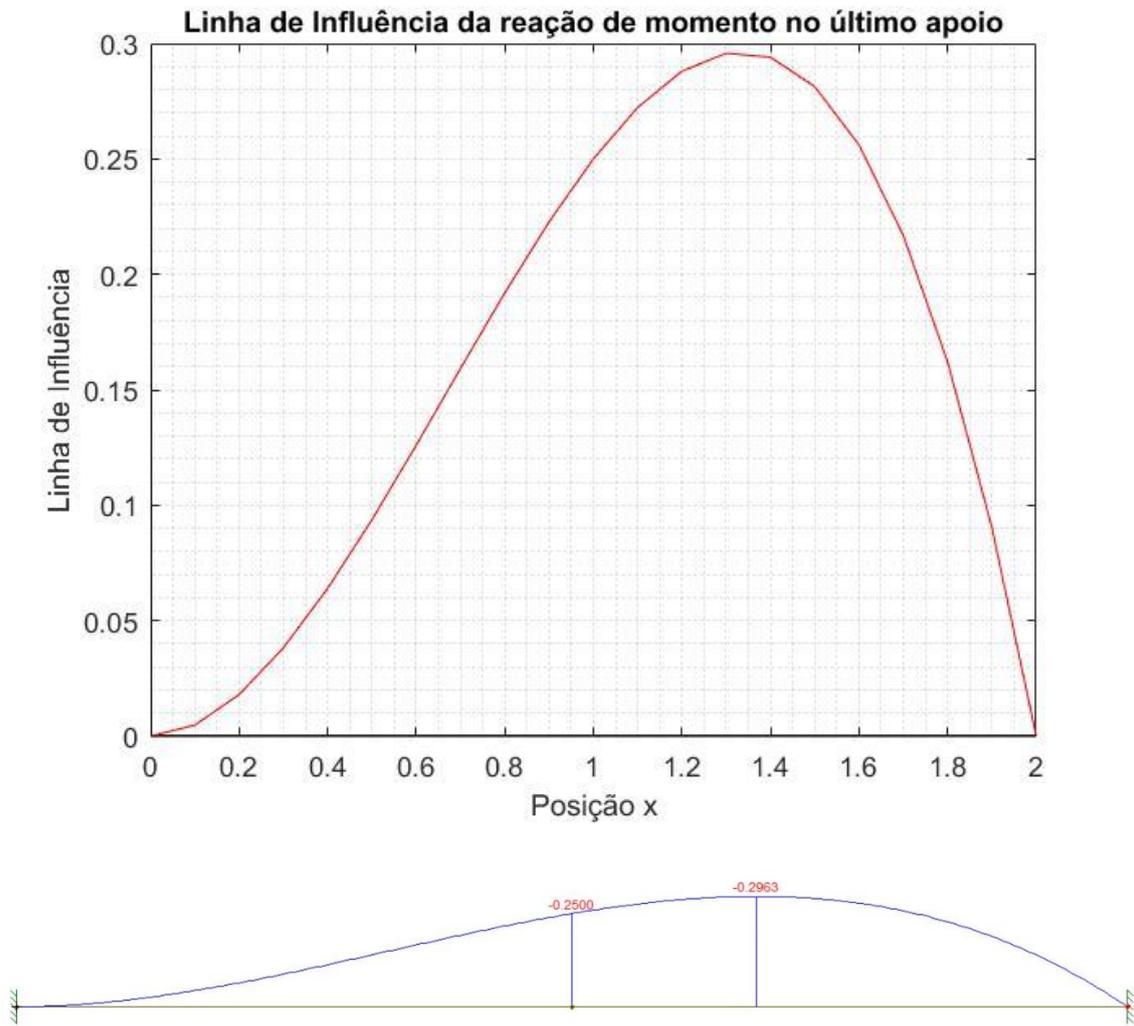
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 30 - L.I. do momento fletor no meio do vão.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

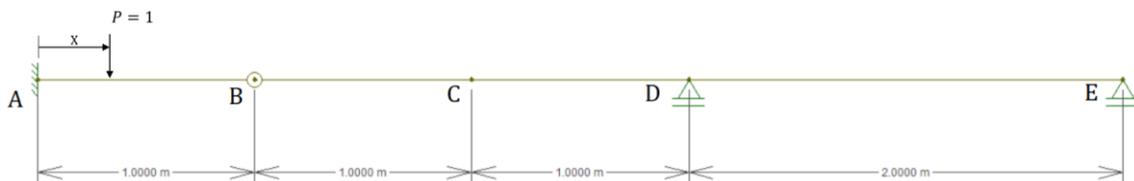
Figura 31 - L.I. da reação de momento no último apoio.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

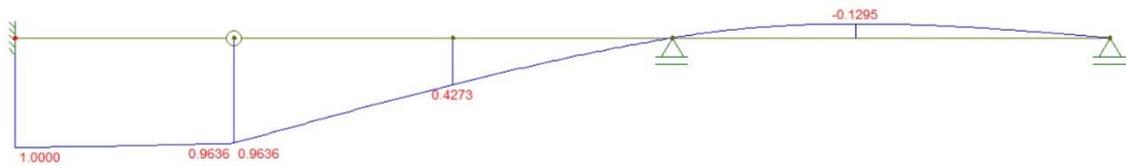
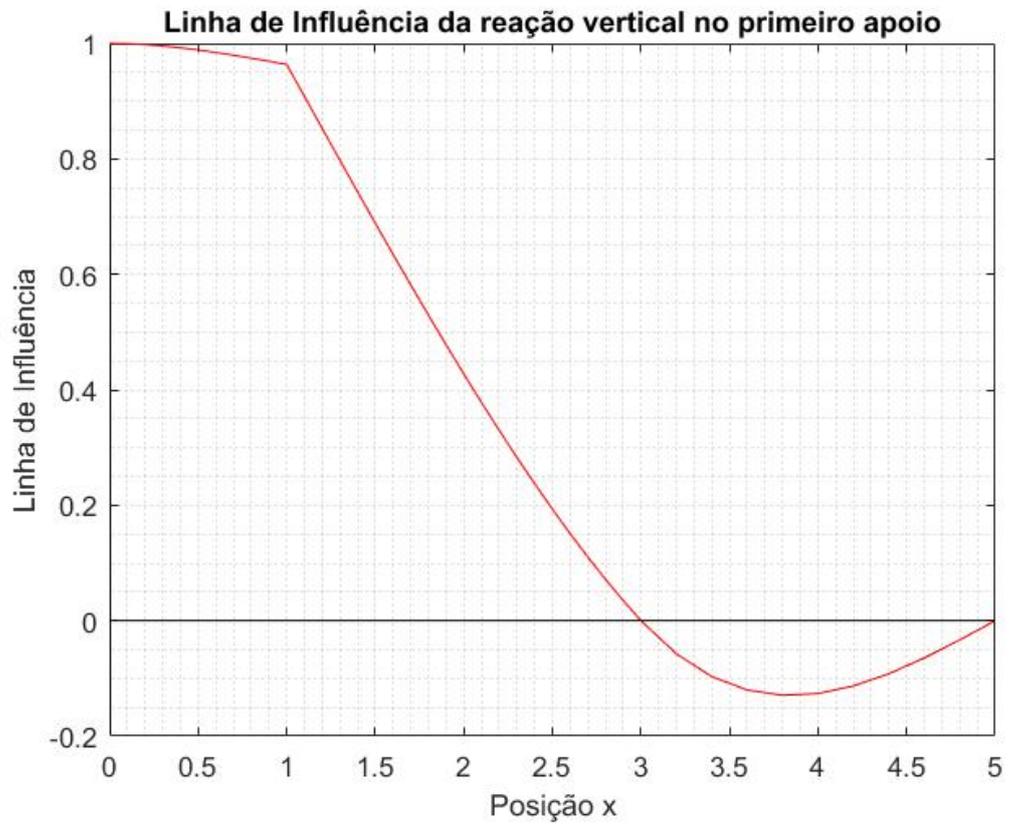
A seguir os resultados da viga da Figura 23.

Figura 32 - Exemplo de viga.



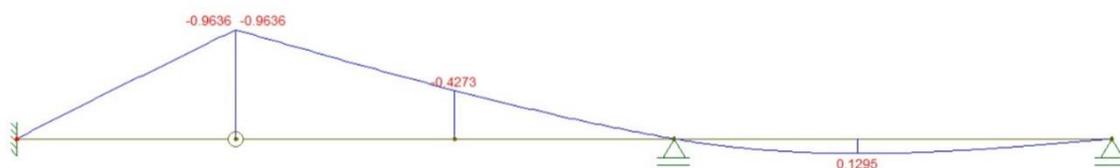
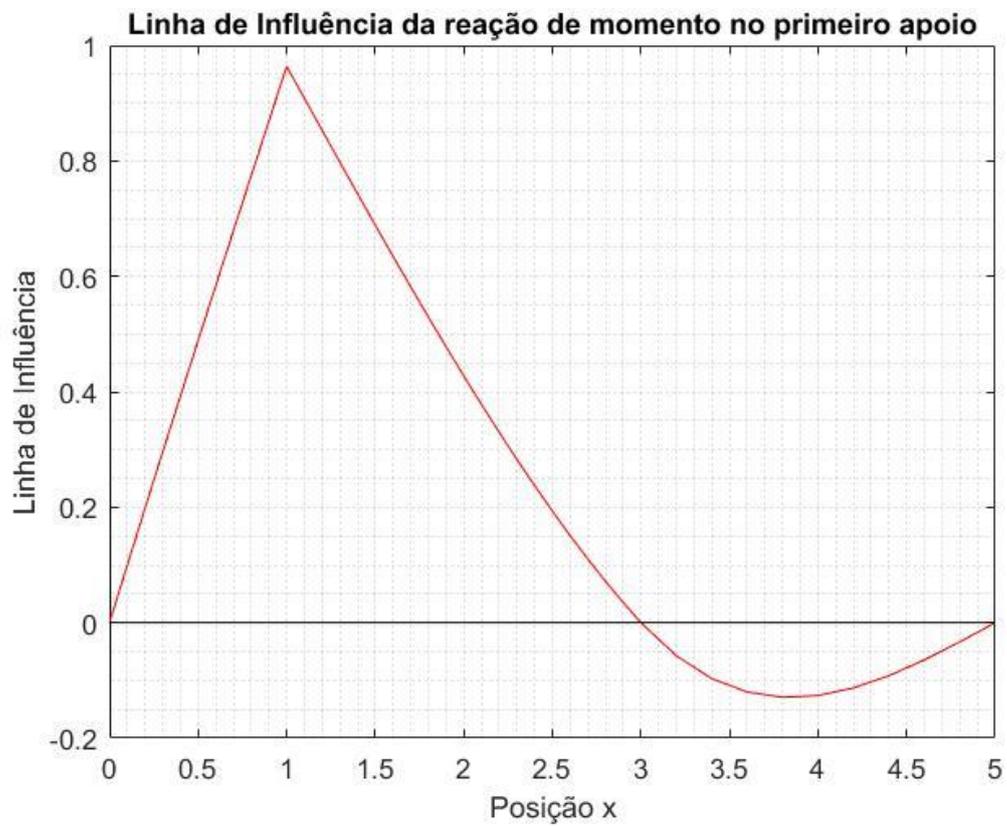
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 33 - L.I. da reação vertical no primeiro apoio.



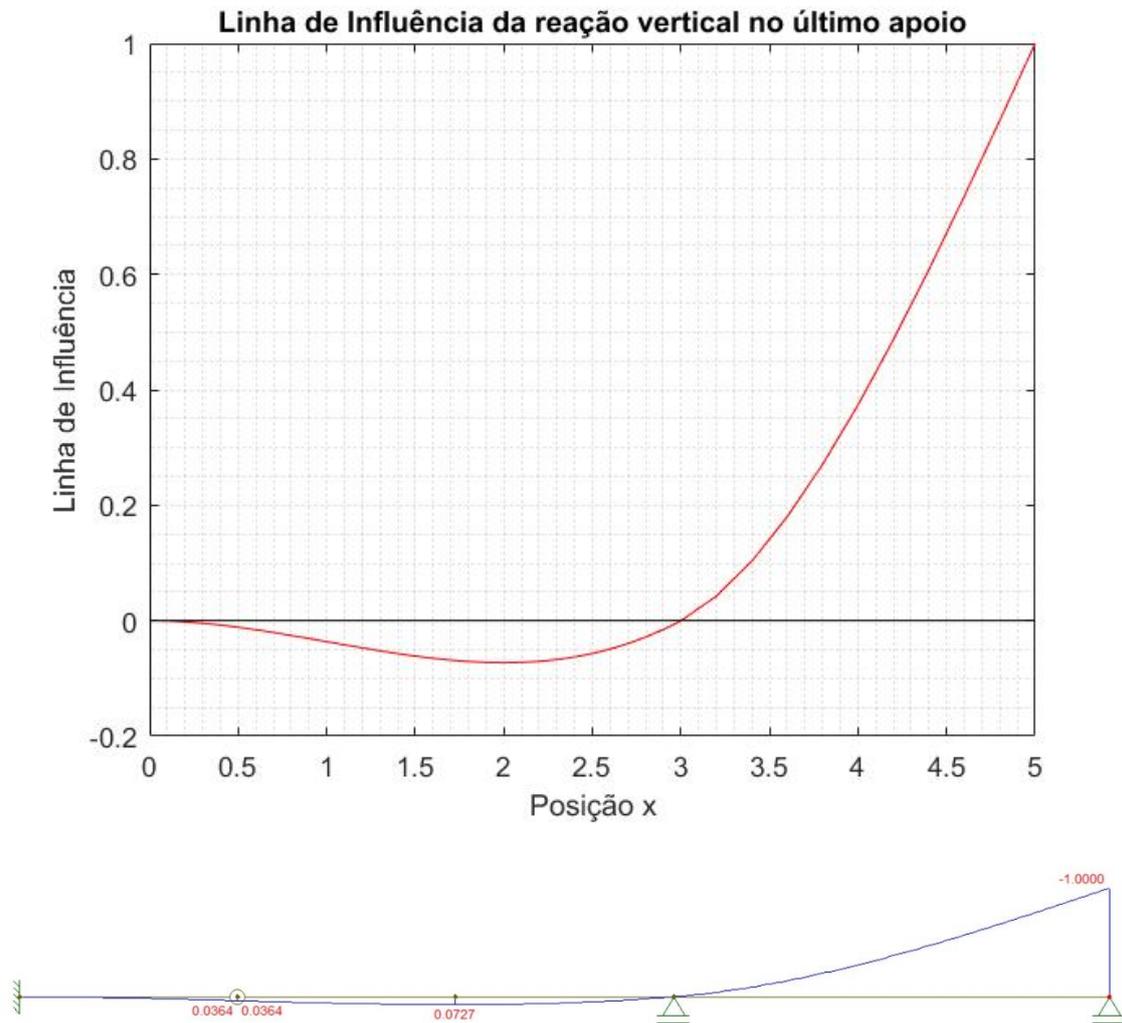
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 34 - L.I. da reação de momento no primeiro apoio.



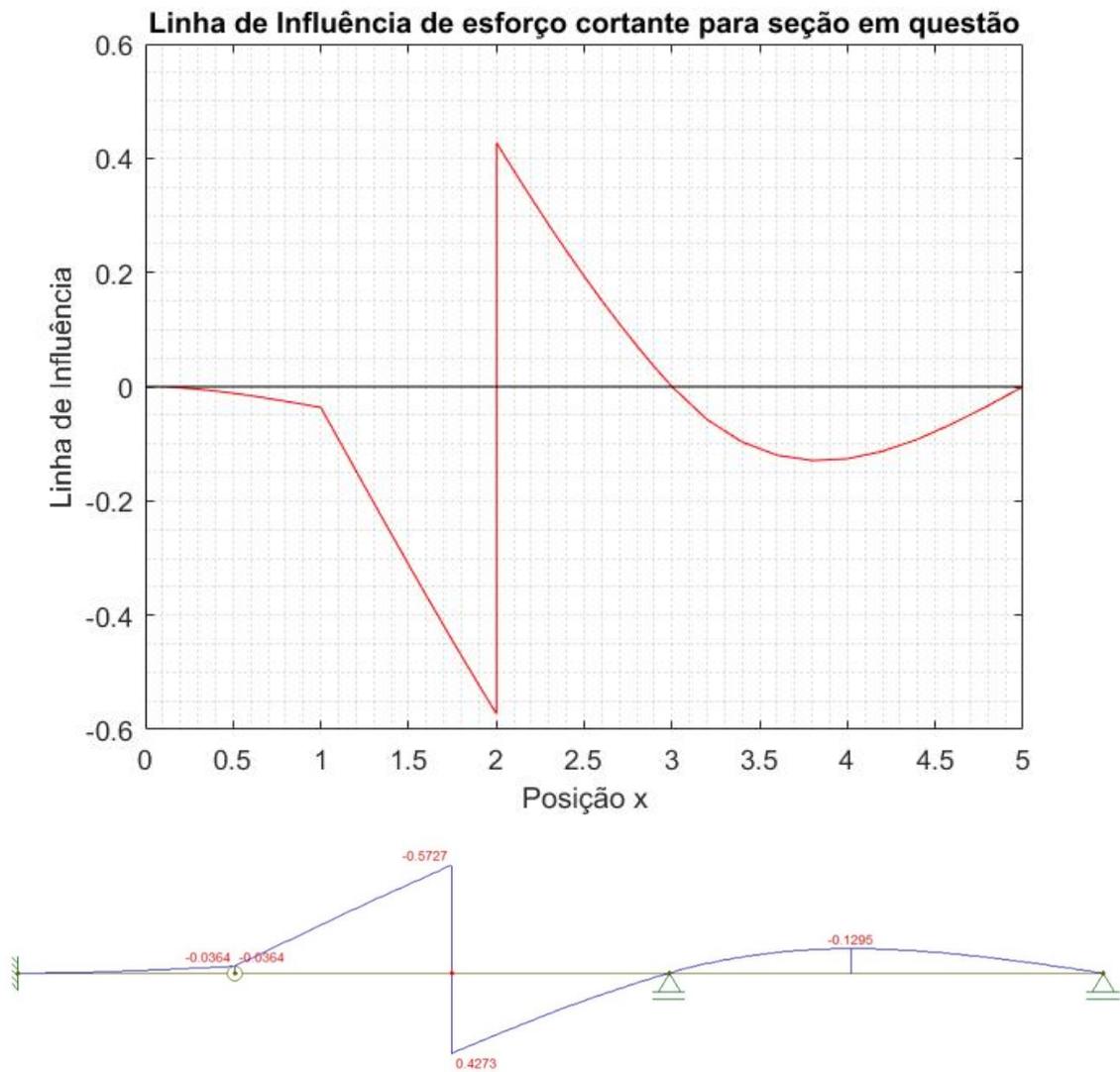
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 35 - L.I. da reação vertical no último apoio.



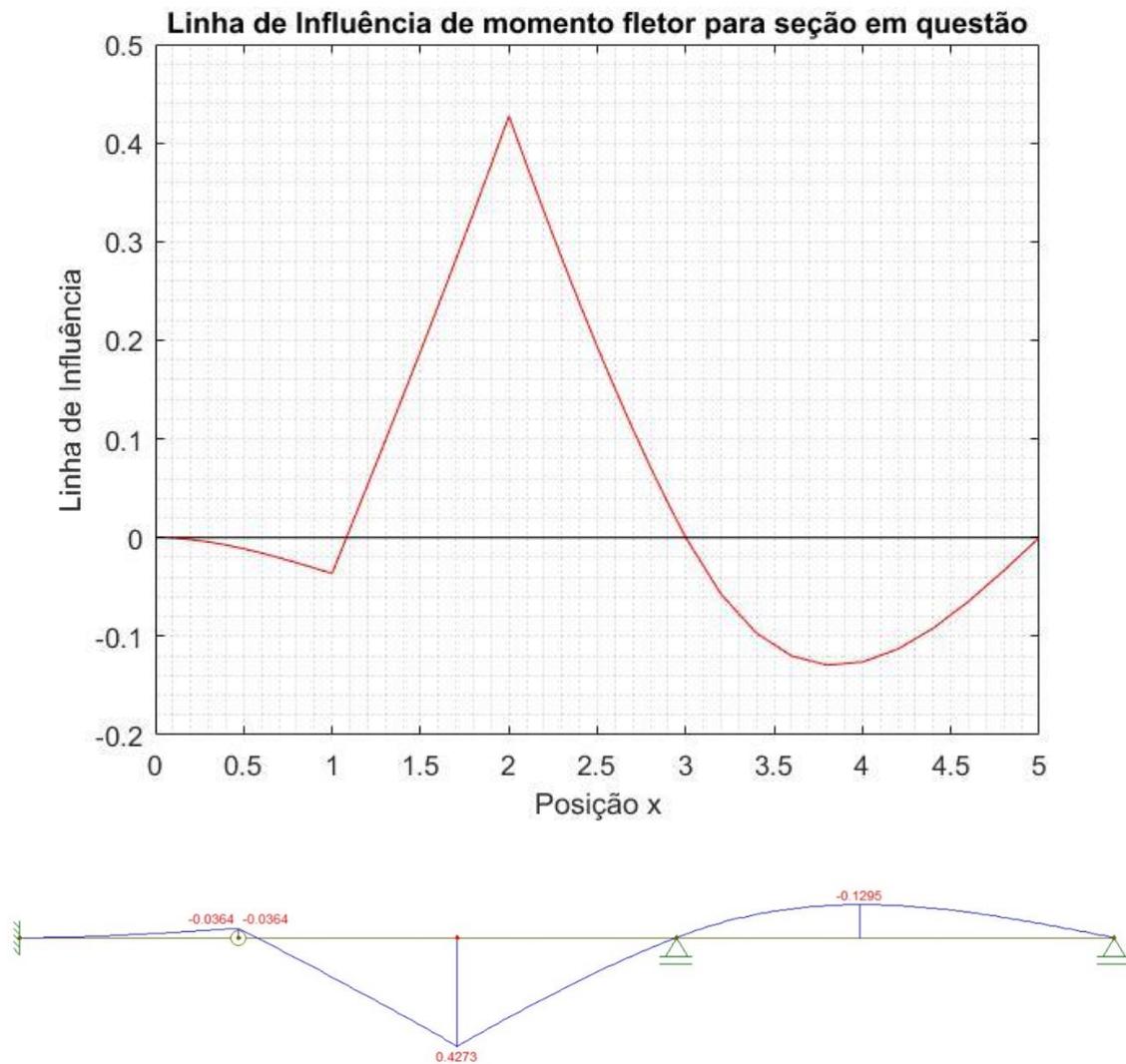
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 36 - L.I. do esforço cortante na seção C.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 37 - L.I. do momento fletor na seção C.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

6 CONCLUSÕES

Por meio dos conceitos teóricos de Análise Matricial e Linha de Influência, foi possível desenvolver três formas de traçar uma L.I. para reações de apoio, esforço cortante e momento fletor. Desenvolveu-se algoritmos capazes de fornecer deslocamentos e reações, dos quais foi possível obter o resultado em questão. Comparando esses algoritmos e sua funcionalidade, percebe-se que o algoritmo do método de Müller-Breslau, para uma única L.I., é mais eficiente. Isto acontece, pois, além de possuir um código computacional mais simples, nesse método o sistema linear possui menos variáveis e, portanto, uma resolução mais fácil e ágil para cada efeito elástico desejado, resultando em um tempo de processamento final menor. No entanto, para a obtenção de várias L.I., necessita-se de uma análise mais detalhada no tempo de processamento para então poder julgar a melhor opção.

Outrossim, esse trabalho proporcionou um melhor entendimento sobre linhas de influência e suas aplicações, por meio do estudo da literatura e sua composição.

Por final, o trabalho abre as portas para novos estudos utilizando os conceitos e desenvolvimento aqui apresentados. Um exemplo é o desenvolvimento das envoltórias de esforços, que podem ser implementadas automatizando o cálculo das L.I. para diversas seções e aplicando-se as ações necessárias para obtenção dos esforços máximos e mínimos desejados.

Uma outra opção é estender o programa para pórticos, desenvolvendo a L.I. para o esforço normal em uma barra. Indo ainda mais além, pode-se chegar nas grelhas, desenvolvendo-se as chamadas superfícies de influência.

REFERÊNCIAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) – NBR – 8681 – *Ações e segurança nas estruturas - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.
2. BHATTI, M.A. *Fundamental finite element analysis and applications: With Mathematica and MATLAB Computations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2005. 700 p.
3. CHANDRUPATLA, T. R. ; BELEGUNDU, A. D. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. 3. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
4. CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. 6. ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2010. 968 p.
5. Departamento de Engenharia Civil, Grupo de Análise de Estruturas (Org.). *Análise de Estruturas I: Tabelas de Análise de Estruturas*. Instituto Superior Técnico [S.l.: s.n.], 2002. p. Disponível em: <<http://www.civil.ist.utl.pt/ae2/tabela02.pdf>>. Acesso em: 26 mar. 2018.
6. FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in Finite Elements*. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
7. FONTES, D. B. *Análise de vigas pelo Método dos Elementos Finitos utilizando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko*. 109 p. (Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Civil) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016.
8. HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
9. HIBBELER, R. C. *Structural Analysis*. Eighth ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2012. 718 p.
10. HOLTZ, G. C. *Traçado automático de envoltórias de esforços em estruturas planas utilizando um algoritmo evolucionário*. 2005. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)- PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <<http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/teses/GiseleCunhaHoltz-Mestrado-2005.pdf>>. Acesso em: 26 fev. 2018.
11. KANT, T.; GUPTA, A. *A finite element model for a higher-order shear-deformable beam theory*. Journal of Sound and Vibration, p. 193-202, 1988.
12. KASSIMALI, A. *Matrix Analysis of Structures*. 2. ed. Southern Illinois University-Carbondale: Cengage Learning, 2012. 657 p.
13. MARTHA, L. F.– *Métodos Básicos da Análise de Estruturas*. Disponível em: <<http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/>>. Acesso em: 27 fev. 2018.
14. MATHWORKS. *Symbolic Math Toolbox: User's Guide*. (R2018a). Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/symbolic/symbolic_tb.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2018.
15. MCCOMARC, J. C. *Structural Analysis: Using Classical and Matrix Methods*. 4. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2007. 587 p.
16. MELO, E. H. V. M. *Análise dinâmica de vigas de Euler-Eernoulli e de Timoshenko com o método das Diferenças Finitas*. 67 p. (Trabalho de Conclusão de Curso de

Engenharia Civil) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: <http://www.dcc.ufpr.br/mediawiki/images/5/57/Eduardo_Mello_2014.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2018.

17. NUNES, A. C.; MARTHA, L. F. *Ferramenta Gráfica para Traçado de Linhas de Influência*. Disponível em: <<http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/teses/AndreCahnNunes-InicCient-2001.pdf>>. Acesso em: 25 fev. 2018.
18. SÜSSEKIND, J. C. *Curso de Análise Estrutural: Estruturas Isostáticas*. 6. ed. Porto Alegre - Rio de Janeiro: Globo, 1981. 367 p. v. 1.
19. SÜSSEKIND, J. C. *Curso de Análise Estrutural 2: Deformações em estrutura. Método das forças*. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1980. 310 p. v. 2.