



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Dissertação de Mestrado

Estudo de cosmologia com interação no setor
escuro do Universo

Por

Jaelsson Silva Lima

**UFS – São Cristóvão / SE – Brasil
Agosto de 2020**

Jaelsson Silva Lima

**Estudo de cosmologia com interação no setor escuro do
Universo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física – NPGFI-UFS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Astrofísica

Linha de Pesquisa: Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Luciano Casarini

**UFS – São Cristóvão / SE
Agosto de 2020**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

L732e Lima, Jaelsson Silva
Estudo de cosmologia com interação no setor escuro do Universo /
Jaelsson Silva Lima; orientador: Casarini. – São Cristóvão, 2020.
133 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Sergipe,
2020.

1. Física 2. Astrofísica. 3. Matéria escura (Astronomia). 4.
Cosmologia. 5. Astronomia. I. Casarini, Luciano (orient.) II. Título.

CDU 524.8

Jaelsson Silva Lima

**Cosmology study with interaction in the dark sector of the
Universe**

Master dissertation submitted to the Program of Post-graduation in Physics – NPGFI-UFS, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master in Physics.

Concentration Area: Astrophysics

Research Line: Cosmology

Advisor: Prof. Dr. Luciano Casarini

**UFS – São Cristóvão / SE
August 2020**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Programa de Pós-Graduação em Física

***“Estudo de cosmologia com
interação no setor escuro do Universo”***

por

Jaelsson Silva Lima

Dissertação de mestrado **APROVADA** em sessão pública no dia sete de agosto do ano dois mil e vinte perante a banca examinadora constituída pelos seguintes professores:



Prof. Dr. Luciano Casarini
(DFI-UFS)

Documento assinado digitalmente
 RODRIGO GEORGETTI VIEIRA
Data: 24/04/2022 11:08:03-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Rodrigo Georgetti Vieira
(DFI-UFS)



Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
(DFis-UFES)

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.
Em especial, aos grandes sonhadores.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma forma tiveram contribuições importantes na minha formação como pessoa e como profissional.

Aos colegas e amigos durante o estágio, de arquivista, no Arquivo Central/UFS (2011-2013), em especial: Bartolomeu (Bartô), Dona Ivone, Dona Zenilde, Nelson Nascimento e Wellington Oliveira.

Aos colegas e amigos que estiveram comigo durante meu estágio como monitor na Casa de Ciência e Tecnologia da Cidade de Aracaju (2014-2016), em especial ao Prof. Augusto César (coordenador da CCTECA e sócio da SEASE) e Jeane Santana (na época, secretária da CCTECA), pela confiança e aposta depositada em mim, à Késia Cristina, Raianny Rodrigues, Valdice Araújo (dona Valdice), Cynthia Martins, Iasmin e Edilene Lima (Leninha), por terem sido pessoas justas.

Aos colegas e amigos da Sociedade de Estudos Astronômicos de Sergipe (SEASE), em especial à Shyenne Pinheiro, Hellen Chaves, Thaynara Santos, Ângelo Santana, Emerson Amaral, Liliane Martins, atriz Priscila Aragão e a Dra. Elza Ferreira.

Aos colegas e amigos na monitoria em física (2016-2018), além dos meus orientadores de monitoria: os professores Márcio Alencar e Rogério Machado.

Quero agradecer também à grande parte dos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica até aqui, uns cumpriram suas obrigações com excelência e alguns outros foram extraordinários, em especial às(aos) Profs(as). M.^a Aparecida (Cida), Dra. Alessandra Santana, Ana Paula, Ricardo Aragão, Alba, Edilma, Sheilla Batista, Eleomar Marques, Aline Santos, Dr. João Paulo Attiê, Dr. Osmar de Souza, Dr. Roberto Saito, Dr. Sérgio Scarano, Dra. Ana Cristina Veiga, Dr. Allyson de Oliveira, Dr. Wilberclay, Dr. Mário Everaldo, Dr. Raimundo Lopes, Dr. Milan Lalic e o Dr. Diogo Souto.

Ao meu orientador de mestrado, Dr. Luciano Casarini e ao Observatório Nacional (ON) por fornecer tempo computacional por meio da colaboração científica com o Dr. Rodrigo Von Martens. Este foi o meu co-orientador de mestrado, informalmente, sem ele não seria possível o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas e amigos dos ensinos fundamental, médio, graduação e pós-graduação, em especial: Alessandro Barros (O Boy), Laerton Costa, Ezenas Teixeira, Ramon Marques,

Cleidiane Fontes, Napoleão Segundo, Thainá Aragão, Ana Carla, Laís Santos, Jefferson Ximenes, Francisco Weldem, Leo Oliveira e Félix Lima. Aos amigos da infância Jeferson Liobino (Jefinho) e os irmãos: Armando Lima (Armandinho), Júnior Lima, Juliano Lima e Fabiano Lima. Além dos(as) meus(minhas) melhores amigos(as) Tayssa Barreto, Ívina Mittaraquis e Vinicius Grilo.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus pais e irmãos, Gilvanete Vieira da Silva, José de Argolo Lima, Jailsson Lima e Jalson Lima, respectivamente. Além da minha avó Bernadete Argôlo; meus(minhas) tios(as): José Beto Viera (Zé Beto), Euzébio Vieira (Zeba), Antônio Argôlo (Toim), Josinete Vieira, Josélia Vieira. Aos primos: Walisson Santos (Passinho), Marcelo Argôlo, Sérgio Lima, Ricardo Viera, Jaelson Vieira, Lucas Batista e Felipe Batista, Marcelo Lima, Iure Lima e a dupla Osmar & Osmailson. E à toda minha família, em especial: Mamede Tavares e Fátima Lima. Estes, mudaram para sempre minha infância, pois, nos ajudavam sempre que podiam perante a condição sub-humana que nossa família passava. Não deixando de agradecer ainda aos meus colegas de residência: Jaédson Barros e Joéliton Barros. Além de Roger Stankewski pela frase apresentada no epígrafe (que mudou para sempre minha forma de pensar e de almejar conquistas) e da atriz/engenhaira Bianca Salgueiro pelas grandes inspirações.

*“Mais importante que a vontade de vencer, é a
coragem de começar.”
(Roger Stankewski)*

*“As invenções são, sobretudo, o resultado de um
trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

*“Não existe o direito à vida em nenhuma sociedade
sobre a Terra hoje em dia, nem houve tal direito
em nenhuma época no passado (com algumas
raras exceções, como entre os jainistas da Índia):
criamos animais nas fazendas para a matança;
destruímos florestas; poluímos rios e lagos até que
os peixes não possam mais viver nesses ambientes;
matamos veados e alces por esporte, leopardos
pelas suas peles e as baleias para fabricar
fertilizantes: encurralamos golfinhos, arfando e se
contorcendo, em grandes redes; matamos a
pauladas filhotes de focas: e provocamos a
extinção de uma espécie a cada dia. Todos esses
animais e vegetais são tão Vivos como nós. O que
é (calcadamente) protegido não é a vida. mas a
vida humana.”
(Bilhões e Bilhões, Carl Sagan.)*

RESUMO

LIMA, J. S.. **Estudo de cosmologia com interação no setor escuro do Universo**. 2020. 133 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Núcleo de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2020.

Neste trabalho, foi realizada uma breve introdução à cosmologia moderna (cosmologia relativística), sendo objeto de estudo a cosmologia do setor escuro. O estudo se baseou na descrição matemática de alguns modelos específicos de interação do setor escuro do Universo: IDEM1, IDEM2 e IDEM4, com objetivo de descrever melhor a natureza da energia escura, Além disso, foram introduzidos os modelos padrão: Λ CDM e ω CDM para fins de comparação. Foram utilizados dados de SNe Ia da amostra *Pantheon* e dados de $H(z)$ independentes do modelo cosmológico, provenientes de medidas realizadas em galáxias antigas de *cosmic clocks (CC)*, além de dados de *Baryon Acoustic Oscillations (BAO)* e BAO provenientes de *extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)*. A análise baseou-se no código *Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS)* e no código de *MontePython* pelo o método *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*. O primeiro refere-se ao contexto cosmológico, enquanto que, o segundo refere-se à parte de análise estatística para a obtenção de alguns parâmetros cosmológicos de interesse. Em nosso trabalho, os resultados contendo os dados de BAO, BAO(eBOSS) sugerem valores para H_0 em torno de $69 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ em todos os modelos. A partir dos resultados da análise estatística para cada modelo de interação foram construídas regiões de sobreposição, a fim de identificar regiões proibidas para as densidades de energia escura e matéria escura, durante algum momento de sua evolução temporal cósmica. Os resultados corroboram o modelo padrão (Λ CDM).

Palavras-chave: Energia Escura, Matéria Escura, Modelos de Interação, Parâmetros Cosmológicos.

ABSTRACT

LIMA, J. S.. **Estudo de cosmologia com interação no setor escuro do Universo**. 2020. 133 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Núcleo de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2020.

In this work, a brief introduction to modern cosmology (relativistic cosmology) was made, with the object of study being the cosmology of the dark sector. The study was based on the mathematical description of some specific models of interaction of the dark sector of the Universe: IDEM1, IDEM2 and IDEM4, in order to better describe the nature of dark energy. In addition, the standard models Λ CDM and ω CDM were introduced for comparison purposes. SNe Ia data from the *Pantheon* sample and $H(z)$ data independent from the cosmological model were used, from measurements performed in ancient *cosmic clocks (CC)* galaxies, in addition to *Baryon Acoustic Oscillations (BAO)* and BAO data from *extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)*. The analysis is based on the *Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS)* code and on the *MontePython* code using the *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)* method. The first refers to the cosmological context, while the second refers to the statistical analysis part to obtain some cosmological parameters of interest. In our work, the results containing data from BAO, BAO(eBOSS) suggest values for H_0 around $69 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ in all models. From the results of the statistical analysis for each interaction model, overlapping regions were built, in order to identify prohibited regions for the densities of dark energy and dark matter, at some point in its cosmic temporal evolution. The results corroborate the standard model (Λ CDM).

Key-words: Dark Energy, Dark Matter, Interaction Models, Cosmological Parameters.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1.1—A <i>Lei de Hubble</i> relacionando linearmente a velocidade radial e a distância entre “nebulosas extra-galácticas”.	32
Figura 2.2.1—Figura mostrando a expansão do Universo, com a Terra na origem das coordenadas.	33
Figura 2.3.1—Galáxias de massas m , contidas em uma esfera de massa M , que está a uma distância r do centro, expandindo ou contraindo sob sua própria gravidade. Com a expansão do volume dada pela lei Hubble, $v = H_0 r$	35
Figura 2.4.1—Esquemática das coordenadas espaciais de um observador num referencial A' se afastando com velocidade relativa v com relação a outro observador no referencial A , ao longo do eixo x positivo.	37
Figura 2.5.1—Representação do sistema de coordenadas comóveis. Sistema que se move junto com a expansão, de modo que, qualquer objeto fica fixo com relação a esta coordenada, durante toda a evolução temporal.	41
Figura 2.5.2—Evolução temporal do fator de escala R para modelos contendo as diferentes possibilidades do parâmetro de desaceleração q	48
Figura 2.5.3—Esquemática das três possibilidades para expansão de um Universo que seja isotrópico e homogêneo. A Figura mostra uma evolução temporal do fator de escala $R(t)$	52
Figura 2.6.1—Um observador na origem das coordenadas $(0, 0, 0)$ observando uma galáxia na posição (r_1, θ_1, ϕ_1)	53
Figura 2.6.2—Comprimento de onda emitido λ_1 pela fonte e comprimento de onda λ_0 recebido pelo observador. Com a expansão do espaço o comprimento de onda recebido sofre um efeito Doppler para o vermelho.	55
Figura 2.7.1—Determinação de distâncias a partir do método de triangulação.	59
Figura 2.7.2—Esquemática da paralaxe estelar. A Terra se move em órbita em torno Sol e uma estrela mais próxima se desloca com relação a um fundo com estrelas mais distantes.	60
Figura 2.7.3—Representação de uma esfera “fictícia” com raio \mathcal{R}_0 , onde o área aumenta com o quadrado da distância e fluxo diminui na mesma taxa.	62
Figura 2.7.4—Representação esquemática para a distância de diâmetro angular.	64
Figura 4.2.1— <i>Likelihoods</i> e curvas de contorno para o modelo Λ CDM, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.	85

Figura 4.3.1– <i>Likelihoods</i> e curvas de contorno para o modelo ω CDM, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.	86
Figura 4.4.1– <i>Likelihoods</i> e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM1, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.	88
Figura 4.4.2– <i>Likelihoods</i> e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM2, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.	89
Figura 4.4.3– <i>Likelihoods</i> e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM4, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.	90
Figura 4.5.1–Simulação de 2 mil curvas de $\rho_c(R)$ para o modelo IDEM1. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($\rho_c(R) \geq 0$).	93
Figura 4.5.2–Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM1. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$).	93
Figura 4.5.3–Simulação de 2 mil curvas de $\rho_x(R)$ para o modelo IDEM2. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são todos positivos ($\rho_x(R) \geq 0$).	94
Figura 4.5.4–Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM2. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$) e as linhas em cor vermelha representam as curvas cujos valores em algum ponto possuem $r < 0$	94
Figura 4.5.5–Regiões de sobreposição para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , IDEM2	95
Figura 4.5.6–Simulação de 2 mil curvas de $\rho_x(R)$ para o modelo IDEM4. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($\rho_x(R) \geq 0$).	96
Figura 4.5.7–Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM4. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$) e as linhas em cor vermelha representam as curvas cujos valores em algum ponto possuem $r < 0$	96
Figura 4.5.8–Regiões de sobreposição para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , IDEM4	97
Figura A.1.1–Representação de geometrias bidimensionais, com superfície esférica, plana e hiperbólica, no sentido da esquerda para direita das imagens, respectivamente.	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.3.1—Medidas de $H(z)$, com seus respectivos erros, para dados de CC.	72
Tabela 4.1.1—Nesta tabela, apresentamos as <i>likelihoods</i> (dados de entradas) com pequena descrição e tipo, além das referências onde foram obtidas primeiramente.	83
Tabela 4.1.2—Nesta tabela, apresentamos as configurações de dados de entrada que usamos e as legendas que adotamos	84
Tabela 4.2.1—Resultados da análise estatística para o modelo Λ CDM, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$	85
Tabela 4.3.1—Resultados da análise estatística para o modelo ω CDM, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$	86
Tabela 4.4.1—Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM1, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$	87
Tabela 4.4.2—Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM2, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$	90
Tabela 4.4.3—Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM4, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$	91
Tabela 4.4.4—Alguns resultados para H_0 , Ω_{m0} e γ para diferentes dados e modelos.	92

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACDM ...	Lambda - Cold Dark Matter
ω CDM ...	ω - Cold Dark Matter
BAO	Oscilações Acústicas de Bárions
CAPES ...	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil
CC	<i>Cosmic Chronometers</i>
CLASS ...	Cosmic Linear Anisotropy Solving System
CMB	Cosmic Microwave Background
COBE	Cosmic Background Explorer Satellite
DDA	Distância de Diâmetro Angular
EE	Equação de Estado
FDDP ...	função distribuição de densidade de probabilidade
FLRW ...	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
IDEM ...	<i>Interacting Dark Energy Model</i>
MCMC ...	Markov Chain Monte Carlo
MIF	Matriz de Informação de Fisher
PC	Princípio Cosmológico
PRG	Princípio de Relatividade de Galileu
RCFM ...	Radiação Cósmica de Fundo de Micro-onda
SNe Ia ...	Supernovas do Tipo Ia
TG	Transformação de Galileu
TL	Transformações de Lorentz
TRE	Teoria da Relatividade Especial
TRG	Teoria da Relatividade Geral
TRR	Teoria da Relatividade Restrita

LISTA DE SÍMBOLOS

. — O separador decimal adotado nesta dissertação é o ponto (.)

$v, H_0, H(t)$ — velocidade de recessão; constante de Hubble; parâmetro de Hubble

m, M, V — Massa de uma galáxia; massa contida numa região esférica; volume

E, E_{cin}, E_{pot} — Energia total; energia cinética; energia potencial

γ_L — Fator de contração de Lorentz

ds^2 — Elemento de linha entre dois eventos (intervalo)

$\eta_{\mu\nu}$ — Tensor de métrica no espaço de Minkowski (espaço-tempo plano)

$(-, +, +, +)$ — Conversão adotada para a métrica

(x^0, x^1, x^2, x^3) — O quadrivetor posição do espaço-tempo

c — Velocidade da luz. No vácuo $c \cong 2,998 \times 10^8 m/s$. Quando $c \equiv 1$ será explicitado.

$G_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R, G, \kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}, T_{\mu\nu}$ — Tensor de Einstein; tensor de Ricci; componentes do tensor de métrica; escalar de curvatura de Ricci; constante gravitacional de Newton; contante gravitacional de Einstein; tensor momento-energia (estresse-energia)

μ, ν, \dots — Índices gregos, no contexto tensorial, variam de 0 a 3

Λ — Constante cosmológica

$R(t)$ — É o fator de escala do Universo para um evolução temporal t . Não confundir o escalar de Ricci R com o fator de escala $R(t)$. Mesmo que em alguma parte do texto o fator de escala seja mencionado apenas por R por simplificação. No entanto, estará claro no contexto que trata-se do mesmo e não do escalar de Ricci.

k — Constante de curvatura do Universo

U_μ — Componentes do quadrivetor-velocidade

i, j, \dots — Os índices latinos i, j, \dots , no contexto tensorial, variam de 1 a 3

t — Tempo cósmico

ω, P — Um parâmetro da equação de estado; pressão

z — Redshift

ρ, ρ_i, ρ_{cr} — Densidade de energia do Universo; densidade de energia para o sub índice i ($i = m, r, b, k, \Lambda, c, x, \dots$); densidade crítica do Universo

Ω_i — Parâmetro de densidade de energia, com índice i

$E(z)$ — Um funcional dos parâmetros de Hubble

$q(t)$ — Parâmetro de desaceleração

λ — Comprimento de onda

$\chi(r_1)$ — Distância comóvel

$d_p, d_L, F, L, S_k(r), A_p(t_0)$ — Distância própria; distância de luminosidade; fluxo; luminosidade; superfície; superfície própria

d_A — Distância de diâmetro angular

m, M, A_b, pc — Magnitude aparente (não confundir com a massa m); magnitude absoluta (não confundir com a massa M); absorção em magnitudes; parsecs

$\chi^2, y(x_i), y(x_i), \sigma_i, \mathcal{L}$ — Qui-quadrado; é o valor do cálculo de y relativo ao ponto x_i ; é um valor experimental (ou observacional) em torno de $y(x_i)$; desvio padrão; função *likelihood*

$\hat{R} - 1$ — Parâmetro de convergência Gelman-Rubin

$P(\theta | D, M), P(D), \theta, a$ — Probabilidade *posterior* do modelo (representa a probabilidade condicional de θ devido o evento ocorrido D, M (D – conjunto de dados, M – hipótese ou modelo)); probabilidade do evento D ; parâmetro paramétrico escolhido da referida hipótese/modelo; A razão entre a probabilidade *posterior* do modelo em $t + 1$ e a probabilidade *posterior* do modelo em t

$F_{ij}, (p_i, p_j), \mathbf{C}$ — Elementos da matriz de informação Fisher; parâmetros do modelo; matriz de covariância

c_s, r_s, D_V — Velocidade acústica; escala característica; média geométrica

$f, C[f], Q^\mu, \gamma, \mathcal{F}, r(R)$ — Função de distribuição; termos de colisão; age como fonte do tensor momento-energia (termo de interação) que em nosso caso se reduz a Q ; um parâmetro adimensional real (parâmetro de interação); uma função real de ρ_c e ρ_x , possuindo uma dimensão de densidade de energia; é definido como a razão entre a densidade de matéria escura (ρ_c) e a densidade de energia escura (ρ_x)

$f(r)$ — É uma função apenas de r (função de interação)

$(A, B), y, x$ — São constantes que representam frações escuras; é uma transformação de variável do tipo $y = \frac{2}{\pi} \arctan(\bar{y})$, com \bar{y} sendo: ρ_c ou ρ_x ou r ou R ; um intervalo que finito que definimos como $x = [0, 1]$

$\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ — Símbolos de Christoffel

η, η — Tempo conforme; Termo proporcional ao tempo conforme

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
2	A COSMOLOGIA MODERNA	31
2.1	A Lei de Hubble	31
2.2	O Princípio Cosmológico	32
2.3	A Cosmologia Newtoniana	34
2.4	A Cosmologia Relativística	35
2.4.1	<i>A Teoria da Relatividade Especial</i>	35
2.4.2	<i>Teoria da Relatividade Geral</i>	38
2.4.3	<i>A Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</i>	39
2.5	Equações de Friedmann	40
2.5.1	<i>Equações de Friedmann pela descrição newtoniana</i>	40
2.5.2	<i>Equações de Friedmann pela Descrição da TRG</i>	41
2.5.3	<i>A Dinâmica Cosmológica do Modelo de Friedmann</i>	42
2.5.3.1	<i>Soluções Para a Lei de Conservação</i>	42
2.5.3.2	<i>Parâmetros Cosmológicos</i>	45
2.5.3.2.1	O Parâmetro de Hubble	45
2.5.3.2.2	Densidade Crítica e Parâmetro de Densidade	45
2.5.3.2.3	Parâmetro de Desaceleração	47
2.5.3.3	<i>Soluções Para as Equações de Friedmann</i>	49
2.5.3.3.1	Universo de uma Única Componente ($P = \omega\rho c^2$)	49
2.5.3.3.2	Universo Dominado por Matéria ($P = 0$ com $\omega = 0$)	51
2.5.3.3.3	Universo Dominado por Radiação ($P = \frac{1}{3}\rho c^2$)	51
2.5.3.3.4	Universo Dominado pela Energia de Vácuo ($P = -\rho c^2$ com $\omega = -1$)	52
2.6	O Redshift Cosmológico	53
2.7	Distâncias em Cosmologia	56
2.7.1	<i>Distância Comóvel</i>	57
2.7.2	<i>Distância Própria</i>	58
2.7.3	<i>Método de Triangulação e Paralaxe Estelar</i>	59
2.7.4	<i>Distância de Luminosidade</i>	60
2.7.5	<i>Distância de Diâmetro Angular</i>	63
2.7.6	<i>Módulo de Distância</i>	65

3	COSMOLOGIA COM INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO DO UNIV- VERSO	67
3.1	Problemas do Modelo Λ CDM	67
3.2	Análise Estatística	68
3.2.1	<i>Qui-quadrado (χ^2)</i>	68
3.2.2	<i>Função Likelihood</i>	69
3.2.3	<i>Código CLASS e MontePython</i>	69
3.2.3.1	<i>Método Markov Chain Monte Carlo</i>	69
3.2.3.1.1	Algoritmo de <i>Metropolis-Hastings</i>	69
3.2.3.1.2	Matriz de Informação de Fisher e Matriz Covariância	70
3.3	Dados Observacionais	71
3.3.1	<i>Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia)</i>	71
3.3.2	<i>Cronômetros Cósmicos (CC)</i>	71
3.3.3	<i>Oscilações Acústicas de Bárions</i>	72
3.4	Descrição Matemática para o Modelo de Interação	73
3.4.1	<i>Formalismo Geral</i>	74
3.4.2	<i>Descrição Unificada de Modelos de Interação do Setor Escuro</i>	77
3.4.3	<i>Modelos Específicos de Interação de Energia Escura</i>	78
3.4.3.1	<i>IDEM 1: $f(r) = 1$</i>	78
3.4.3.2	<i>IDEM 2: $f(r) = r^{-1}$</i>	79
3.4.3.3	<i>IDEM 4: $f(r) = 1 + r^{-1}$</i>	79
3.5	Regiões de Sobreposições	80
3.5.1	<i>Equações Simplificadas</i>	80
3.5.1.1	<i>IDEM 1</i>	80
3.5.1.2	<i>IDEM 2</i>	81
3.5.1.3	<i>IDEM 4</i>	81
3.5.2	<i>Metodologia</i>	81
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	83
4.1	Legendas e listas de <i>likelihoods</i>	83
4.2	Resultados Observacionais do Modelo Λ CDM	84
4.3	Resultados Observacionais do Modelo ω CDM	85
4.4	Resultados Observacionais dos Modelos de Interação com $\omega_x = -1$	87
4.4.1	<i>Modelo IDEM1</i>	87
4.4.2	<i>Modelo IDEM2</i>	88
4.4.3	<i>Modelo IDEM4</i>	89
4.4.4	<i>Considerações Gerais</i>	91
4.5	Resultados das Regiões de Sobreposição	92
4.5.1	<i>Modelos IDEMs (com $\omega_x = -1$)</i>	92
4.5.1.1	<i>Modelo IDEM1</i>	92

4.5.1.2	<i>Modelo IDEM2</i>	94
4.5.1.3	<i>Modelo IDEM4</i>	95
4.5.2	<i>Considerações Finais</i>	97
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	99
5.1	Conclusões	99
5.2	Perspectivas	100
	REFERÊNCIAS	101
APÊNDICE A	OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA MÉTRICA FLRW E DAS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN	115
A.1	Obtenção da Métrica FLRW	115
A.2	Obtenção das Equações de Friedmann	117
APÊNDICE B	SOLUÇÕES E RESOLUÇÕES DE EXPRESSÕES	127
B.1	Resolução de Algumas Expressões	127
B.1.1	<i>O Redshift Cosmológico</i>	<i>127</i>
B.1.2	<i>O Tempo de Lookback Time em Termos de z</i>	<i>128</i>
B.2	Soluções para as Equações de Friedmann	128
B.2.1	<i>Universo Dominado por Matéria ($P = 0$, com $\omega = 0$)</i>	<i>128</i>
B.2.2	<i>Universo Dominado por Radiação ($P = \frac{1}{3}\rho c^2$)</i>	<i>130</i>
B.3	Resolução da integral $\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$	132
ANEXO A	PÁGINAS INTERESSANTES NA INTERNET	133

INTRODUÇÃO

“A ciência não pode prever o que vai acontecer. Só pode prever a probabilidade de algo acontecer.”
(César Lattes)

A palavra cosmologia teve sua origem na Grécia antiga, a partir da palavra “Kosmos”, que significa harmonia ou ordem. Ela é o ramo da astronomia que estuda a evolução e estrutura do Universo, desde pequenas até largas escalas, ou seja, o Universo como um todo (ROOS, 2015b; RYDEN, 2017c; SOUZA, 2004a; LIMA, 2018; HENRIQUES, 2009c). O estudo do cosmos ao longo do tempo pode ser compreendido em dois importantes momentos: a cosmologia pré-relativística e a cosmologia relativística. Aqui, estamos interessados apenas na cosmologia moderna (relativística).

A cosmologia relativística surge, em 1917, no momento quando Albert Einstein (1879–1955) apresenta o primeiro modelo cosmológico de Universo (EINSTEIN, 1917), baseado na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Esta, por sua vez, foi apresentada por ele entre o final de 1915 e início de 1916 numa série de publicações científicas Einstein (1915a), Einstein (1915b), Einstein (1915c), Einstein (1915d) e Einstein (1916). Tratava-se de um modelo de Universo com volume finito, de curvatura esférica, estático e sem bordas (KARTTUNEN *et al.*, 2007), obedecendo o Princípio Cosmológico (PC), que tem sua descrição na seção 2.2. No início, o modelo continha o termo cosmológico (a constante cosmológica Λ) para contrapor os efeitos de gravidade e manter o Universo de forma estática. Porém, após a descoberta da expansão do Universo por Hubble, ele classificou como sendo um dos maiores erros da sua vida (EINSTEIN, 1917; EINSTEIN, 1923a; ROOS, 2015a; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Na mesma época, Willem de Sitter propôs um modelo de curvatura plana, sem matéria e em um estado estacionário (SITTER, 1917). Enquanto que o modelo de Universo apresentado por Einstein era constituído de matéria e sem movimento, o modelo de Universo de de Sitter era o oposto disso. Esses foram os primeiros modelos cosmológicos de Universo na cosmologia

moderna.

Posteriormente, o matemático e cosmólogo soviético Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) apresentou soluções para dinâmica do Universo, com curvatura positiva, em 1922 (FRIEDMANN, 1922) e com curvatura negativa, em 1924 (FRIEDMANN, 1924). Mais tarde, de maneira independente Abbé G. Lemaître, em 1927 (LEMAÎTRE, 1927), H. P. Robertson, em 1935 (ROBERTSON, 1935) e A. G. Walker, em 1937 (WALKER, 1937), descobriram as mesmas soluções para o Universo (KARTTUNEN *et al.*, 2007). Antes disso, em 1929, Edwin Hubble, apresentou o resultado de suas observações (HUBBLE, 1929), mostrando que o Universo estava em expansão. Dessa forma, na época, a ideia de Universo estático apresentada no modelo de Einstein ficou desacreditada, sendo assim, essa ideia logo foi abandonada. Em 1932, Einstein em parceria com de Sitter trabalharam com um modelo de Universo em expansão de constante cosmológica nula, com geometria espacial plana e contendo matéria. Este modelo na literatura hoje é conhecido como modelo Einstein-de Sitter (ROOS, 2015a).

As soluções encontradas por Friedmann e Einstein-de Sitter, obtidas a partir das equações da TRG, também incluem expansão eterna do Universo ou recolapso (LIMA, 2018). Na situação em que temos a constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$), existem três possibilidades: $k = 0$, neste caso, a densidade de matéria é igual a densidade crítica do Universo ($\rho = \rho_{cr}$), que corresponde ao modelo de Friedmann euclidiano ou ao modelo *Einstein-de Sitter*; já quando $k = -1$, resulta em $\rho < \rho_{cr}$, que corresponde ao modelo de Friedmann hiperbólico e nesse caso, ele expandirá eternamente; por outro lado, para $k = 1$, temos $\rho > \rho_{cr}$, o Universo irá se contrair, o que corresponde ao modelo de Friedmann fechado. Esses foram considerados até o final dos anos 1990, os três modelos padrão da cosmologia para evolução do Universo (KARTTUNEN *et al.*, 2007; CARROLL; OSTLIE, 2007).

O modelo padrão da cosmologia tem sua base fundamentada na *Teoria do Big Bang*. Esta teoria, por sua vez, tem alicerce em pilares básicos (com aspectos teóricos e observacionais), alguns destes são: a formulação da TRG, que fundamenta os principais modelos de Universo na cosmologia; o princípio cosmológico; a formação de estruturas em largas escalas no Universo; a descoberta da expansão do Universo, isto é, a lei de Hubble (HUBBLE, 1929); o sucesso da teoria da nucleossíntese primordial, a verificação, na década de 1960, que os primeiros elementos leves: Deutério (2_1H), Hélio (3_2He , 4_2He) e Lítio (6_3Li , 7_3Li), poderiam ser formados ainda nos primeiros segundos do Universo, da ordem de ($t \simeq 10^{-2} - 200s$) (SCHRAMM, 1991; MALANEY; MATHEWS, 1993); a descoberta da Radiação Cósmica de Fundo de Micro-ondas (RCFM)¹, por A. Penzias e Robert W. Wilson, em 1965, de forma acidental (PENZIAS; WILSON, 1965). Essa radiação tinha o comportamento bem ajustado à curva de emissão de um corpo negro, obedecendo PC em largas escalas. Sua temperatura girava em torno de 2.7K. No entanto, em 1948, George A. Gamov já havia proposto a existência de uma radiação de fundo antes (ALPHER; HERMAN; GAMOW, 1948). Essa radiação, foi emitida cerca de 350 mil anos

¹ do inglês: Cosmic Microwave Background (CMB)

após o Big Bang², quando o Universo já estava frio o suficiente ($T \approx 3000K$) para ocorrer o desacoplamento dos fótons com a matéria (RYDEN, 2017d).

No início do anos 90, aparecem os primeiros dados observacionais mais detalhados sobre a curva de corpo negro da CMB, realizado pelo satélite *Cosmic Background Explorer Satellite (COBE)* (SMOOT *et al.*, 1990). Em 1998, a partir de observações de supernovas do tipo Ia³ (SNe Ia), pela análise do diagrama *Hubble-Sandage*⁴, é descoberto que o Universo está em expansão acelerada em pesquisa realizada por Riess *et al.* (1998), Perlmutter *et al.* (1998), Perlmutter *et al.* (1999), mudando assim nossa forma de pensar sobre o Universo. A partir de então, a constante cosmológica passou a vigorar novamente na equação de campos de Einstein, representando essa expansão acelerada. Daí, um novo modelo passa vigorar. Este, com característica de conteúdo energético de pressão negativa, denominada na literatura como energia escura (LIMA, 2004).

Apesar de possuir enorme sucesso observacional, o modelo padrão (Λ CDM e ω CDM) apresenta alguns problemas e comportamentos estranhos. Podemos citar, por exemplo, o problema da constante cosmológica e da coincidência cósmica, ainda assim, a constante cosmológica (Λ) é a candidata mais simples para ser a componente de energia escura (ELLIS *et al.*, 2011; WEINBERG, 1989; SAMI, 2009; VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014; MARTTENS *et al.*, 2019). No entanto, por esses e outros inúmeros problemas, há diversos modelos alternativos na literatura tentando descrever melhor a natureza da energia escura, uma vez que, do ponto de vista da física de partículas sua componente é totalmente desconhecida. Uma classe desses modelos é alternativos são os modelos de interação no setor escuro do Universo, que serão nossos objetos de estudos (MARTTENS *et al.*, 2019; MARTTENS, 2017).

Neste trabalho, temos como objetivo básico o estudo de alguns modelos de interação do setor escuro do Universo⁵: IDEM 1, IDEM 2 e IDEM 4 (MARTTENS *et al.*, 2019), além do modelo padrão: Λ CDM e ω CDM para fins de comparação, com proposito de obter uma descrição sobre a natureza da energia escura. Além da construção de regiões de sobreposições para os modelos de interações de energia escura estudados neste trabalho, afim de identificar regiões proibidas ou permitidas para as densidades de energia escura e matéria escura, durante algum momento de sua evolução temporal cósmica.

Neste trabalho, foram utilizados dados da amostra *Pantheon (SNe Ia)* (SCOLNIC *et al.*, 2018; BETOULE *et al.*, 2014) e dados de $H(z)$ independentes do modelo cosmológico, provenientes de medidas realizadas em galáxias antigas de amostras *Cosmic Chronometers (CC)* (MORESCO *et al.*, 2016), além de dados de *Baryon Acoustic Oscillations (BAO)* (ANDERSON *et al.*, 2014; ROSS *et al.*, 2015; FONT-RIBERA *et al.*, 2014) e BAO provenientes de *eBOSS (extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey)* (CUCEU *et al.*, 2019; BLOMQVIST *et al.*,

² Refere-se ao tempo de Planck $t \sim 10^{-43}s$.

³ São fortes explosões termonucleares em estrelas anãs brancas, compostas de Carbono e Oxigênio.

⁴ Descreve a curva de brilho observado em função do z .

⁵ Os modelos de interação chamaremos de IDEM (do inglês: *Interacting Dark Energy Model*), mais um número de referência para identificar o modelo, de acordo com Marttens *et al.* (2019).

2019; AGATHE *et al.*, 2019). A análise se baseia no código *Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS)*⁶ (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011) e no código de MontePython⁷ pelo método *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)* (AUDREN *et al.*, 2013). O primeiro refere-se ao contexto cosmológico, enquanto que, o segundo refere-se a parte de análise estatística⁸ para a obtenção de alguns parâmetros cosmológicos de interesse.

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos e apêndices. Neste capítulo vimos uma breve introdução da cosmologia relativística e dos elementos de estudo deste trabalho. No **Capítulo 2** será abordada uma revisão geral da literatura da cosmologia moderna. No **Capítulo 3** faremos a descrição matemática para o modelo de interação do setor escuro do Universo e alguns modelos específicos. Por último, abordaremos a metodologia usada para construir regiões de sobreposições. No **Capítulo 4** apresentaremos os resultados obtidos e discussões relacionadas. E por último no **Capítulo 5**, faremos as conclusões e apresentaremos as perspectivas.

⁶ Toda documentação CLASS está disponível em: <<http://class-code.net/>>.

⁷ Toda documentação do código MontePython está disponível em <https://github.com/baudren/montepython_public>.

⁸ Ver a [subseção 3.2.3](#).

A COSMOLOGIA MODERNA

“Daqui por diante, o espaço por si e o tempo por si estão condenados a desaparecer nas sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente.”
(Herman Minkowski)

A cosmologia moderna está fundamentada, em sua grande parte, no que chamamos de *modelo padrão da cosmologia*. Este, por sua vez é baseado na *Teoria do Big Bang*. Esta teoria, tem alicerce em alguns pilares básicos (com aspectos teóricos e observacionais): a formulação da TRG; o princípio cosmológico; a formação de estruturas em larga escala no Universo; a descoberta da expansão do Universo (a lei de Hubble) (HUBBLE, 1929); o sucesso da teoria da nucleossíntese primordial (SCHRAMM, 1991; MALANEY; MATHEWS, 1993); a descoberta da RCFM, por *A. Penzias* e *Robert W. Wilson*, em 1965, de forma acidental (PENZIAS; WILSON, 1965) etc, como já tínhamos mencionados antes. E neste capítulo trataremos discussões a respeito da cosmologia newtoniana, lei Hubble, PC, TRE, TRG, métrica FLRW, equações de Friedmann, *redshift* cosmológico, além de métodos e tipos de distâncias em cosmologia, afim de fundamentar alguns parâmetros cosmológicos de nosso interesse.

2.1 A Lei de Hubble

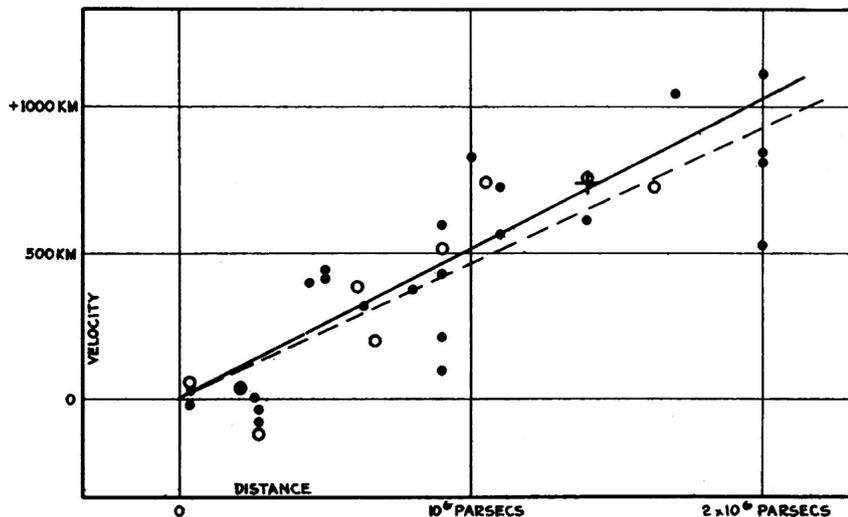
A publicação Hubble (1929) feita por Edwin Hubble, em março de 1929, revolucionou a forma que observamos o Universo, inaugurando e aprofundando os primeiros estudos no campo da cosmologia observacional moderna. Tais estudos revelaram que as galáxias estão se afastando de nós com uma velocidade recessiva, v de modo proporcional à sua distância, r , até nós (ver a Figura 2.1.1). Isto é, galáxias que estão mais distantes se afastam mais rapidamente do que galáxias que estão mais próximas de nós. Tal evidência revelou que o Universo encontrava-se em expansão e ficou conhecida como *Lei de Hubble* que é relacionada pela seguinte expressão

(BAHCALL, 2015):

$$v = H_0 \times r, \quad (2.1.1)$$

onde: H_0 é a constante de Hubble, que na época, seu valor foi em torno de $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, posteriormente, descobriu-se que Hubble havia subestimado as distâncias das galáxias individuais (RYDEN, 2017b). Essa constante, na verdade, é um parâmetro que depende do tempo, $H(t)$, como veremos na subseção 2.5.3.2.1. Para o tempo presente, esse parâmetro é $H(t_0) \equiv H_0$ (CARROLL; OSTLIE, 2007).

Figura 2.1.1 – A Lei de Hubble relacionando linearmente a velocidade radial e a distância entre “nebulosas extragalácticas”, onde, na época, os discos pretos e linha de ajuste contínua representava o uso das nebulosas individualmente. Enquanto que, os círculos e linha de ajuste tracejada representavam as nebulosas em grupos e o ponto em forma de cruz representava 22 nebulosas, nas quais suas distâncias não puderam ser estimadas individualmente. Hoje sabemos que a grande maioria destas nebulosas, na verdade, são galáxias.



Fonte: Hubble (1929).

2.2 O Princípio Cosmológico

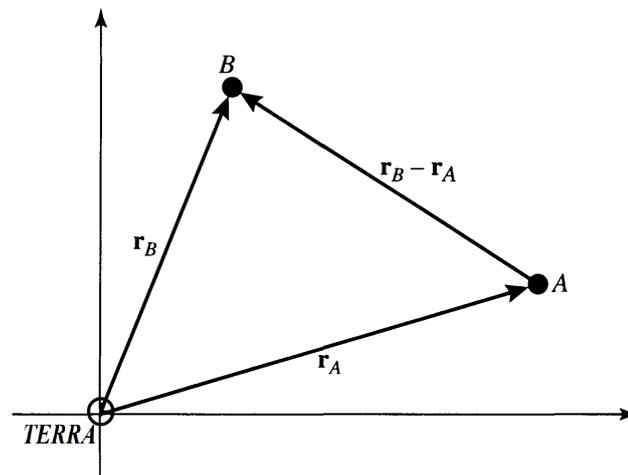
O PC¹ foi introduzido por Einstein, em 1917 (EINSTEIN, 1917), para simplificar o problema do primeiro modelo cosmológico apresentado por ele, mesmo não tendo ainda alguma justificativa observacional. De acordo com esse princípio, não existem observadores privilegiados no Universo. Ele é o mesmo em qualquer direção e em qualquer posição, em outras palavras, o Universo é *homogêneo e isotrópico* (somente é verdade para escalas maiores que 100 Mpc) (MILNE, 1932; MAROTO; RAMIREZ, 2004; COLES; LUCCHIN, 2002b; PANDEY; SARKAR,

¹ O PC, na verdade, trata-se de uma extrapolação do Princípio de Copérnico. Este afirma que: a Terra não está em uma região central e favorecida. O princípio cosmológico como conhecemos hoje foi formulado por *Edward A. Milne*, em 1933, uma generalização das ideias propostas por Einstein. A versão apresentada por Einstein se baseava no que chamamos de “Princípio Cosmológico Perfeito”, o qual afirmava que o Universo era homogêneo, isotrópico e imutável. Isto é, na consideração de um Universo que não havia expansão (Universo estático).

2015; VALKENBURG; MARRA; CLARKSON, 2013; BONDI, 1960). As primeiras evidências observacionais surgiram com as observações de contagens de galáxias e radiogaláxias, mostrando-se possuir uma certa homogeneidade para volumes cada vez maiores. E a expansão isotrópica do Universo que foi descoberta por Hubble. Entretanto, a evidência mais forte surge juntamente com a descoberta da RCFM, por conta do seu alto grau de isotropia (PENZIAS; WILSON, 1965; WILSON; PENZIAS, 1967; HENRIQUES, 2009b; PANDEY; SARKAR, 2015).

É interessante enfatizar como a *Lei de Hubble* satisfaz o PC. De acordo com ela se duas galáxias A e B estiverem localizadas nas posições \vec{r}_A e \vec{r}_B , respectivamente, com relação a Terra, cuja esquematização é vista na Figura 2.2.1, a velocidade de recessão entre ambas é relacionada

Figura 2.2.1 – Figura mostrando a expansão do Universo, com a Terra na origem das coordenadas.



Fonte: Adaptada de Carroll e Ostlie (2007).

por

$$\vec{v}_A = H(t)\vec{r}_A \quad (2.2.1)$$

e

$$\vec{v}_B = H(t)\vec{r}_B, \quad (2.2.2)$$

onde a velocidade de recessão da galáxia B do ponto de vista da galáxia A é dada por

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = H(t)\vec{r}_B - H(t)\vec{r}_A = H(t)(\vec{r}_B - \vec{r}_A). \quad (2.2.3)$$

Dessa forma, o observador localizado em B (ou em A) vê os demais se afastando (ou se aproximando) no Universo com velocidades recessivas descritas pela mesma lei de expansão do referencial da Terra. Daí, de fato, a *Lei de Hubble* é a única lei de expansão que é compatível com a homogeneidade e isotropia do Universo (CARROLL; OSTLIE, 2007; MUKHANOV, 2005).

2.3 A Cosmologia Newtoniana

A gravitação sendo uma força de longo alcance, tem contribuição decisiva para que objetos possam se aglutinar e assim haja a desaceleração da expansão cosmológica. Por outro lado, na teoria newtoniana esta desaceleração é um processo de difícil entendimento. Nela, teríamos um Universo finito, que iria de encontro com o PC, já que, a distribuição de massa possuiria observadores em seus limites, percebendo assim, uma irregularidade na distribuição de objetos cosmológicos (galáxias, grupos de galáxias, etc), em contrapartida a um observador que estivesse posicionado na região central. No entanto, para um Universo infinito e preenchido por matéria uniformemente, a aceleração gravitacional seria a mesma para todos os pontos de igual distância, dessa forma anulando-a. Dessa maneira, a dinâmica newtoniana se relaciona com a equação de *Poisson* por:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.3.1)$$

onde \vec{g} é a aceleração gravitacional (que é nula), G é a constante gravitacional, ϕ é o potencial gravitacional em um ponto do espaço e ρ é a densidade de matéria no ponto. Portanto, este modelo satisfaz o PC, se e somente se, o Universo fosse vazio (SOUZA, 2004b). O desenvolvimento deste cálculo pode ser visto em Symon (1996).

Uma forma para se construir uma cosmologia newtoniana seria usar o *Teorema de Birkoff*, o qual diz que apenas a massa inferior a um raio r infere no movimento de sua camada esférica, que pode ser apenas demonstrado fazendo uso da TRG. No entanto, fazendo um esboço dos resultados, pode-se verificar suas consequências. Na consideração de uma região esférica, onde r é a distância em relação ao centro, m a massa de uma galáxia contida nesta região e M é a massa contida em toda região esférica (esfera) de raio r (ver Figura 2.3.1), e sabendo que a *densidade de matéria hoje* é dada por $\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$, tem-se (SOUZA, 2004b; SOUZA, 2007):

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3, \quad (2.3.2)$$

que é a massa no qual a galáxia será atraída ao interior do volume em consideração. Uma vez que a massa dessa região esférica é constante, ou seja, não há criação de massa, a expansão é dada pela soma da energia cinética mais a energia potencial gravitacional (que é a energia total),

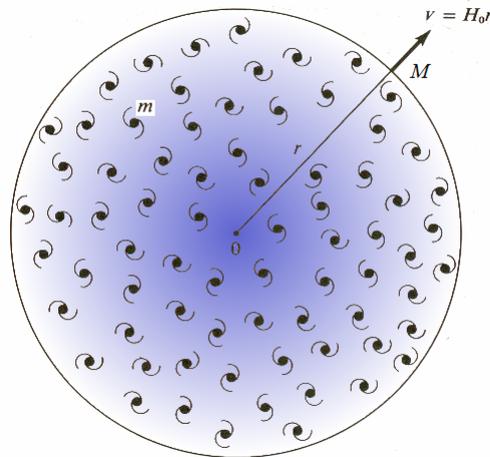
$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{const.}, \quad (2.3.3)$$

onde v é a expansão do volume obtida pela lei Hubble (Equação 2.1.1) e com o parâmetro Hubble para tempo atual, H_0 (FILHO; SARAIVA, 2014a). A depender da quantidade de energia total do Universo, ele será aberto ou fechado. Para $E > 0$ (Universo é aberto), para $E = 0$ (Universo é plano) e para $E < 0$ (Universo é fechado); já que, a energia total é uma constante.

No caso em que a energia total for igual a zero (um Universo estático), $E = 0$, pode-se calcular a densidade crítica do universo hoje, ρ_{cr0} . Pela Equação 2.3.3,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r}, \quad (2.3.4)$$

Figura 2.3.1 – Galáxias de massas m , contidas em uma esfera de massa M , que está a uma distância r do centro, expandindo ou contraindo sob sua própria gravidade. Com a expansão do volume dada pela lei Hubble, $v = H_0 r$.



Fonte: Adaptada de Souza (2007).

usando a *lei de Hubble* e da [Equação 2.3.2](#) associado com a densidade crítica, temos,

$$\frac{1}{2}m(H_0\vec{r})^2 = \frac{Gm}{r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{cr0} \right], \quad (2.3.5)$$

dessa forma, a *densidade crítica*, ρ_{cr0} , para o tempo atual é dada por ,

$$\rho_{cr0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.3.6)$$

Se a densidade do Universo for menor que esta, significa que ele continuará expandindo eternamente. Caso seja maior, ele irá parar sua expansão e depois iniciará sua fase de contração (CARROLL; OSTLIE, 2007).

Na [subseção 2.5.1](#) será feita uma discussão mais detalhada sobre a dinâmica das equações Friedmann, usando a cosmologia newtoniana.

2.4 A Cosmologia Relativística

2.4.1 A Teoria da Relatividade Especial

No final do século XIX, alguns cientistas acreditavam que não haveria mais grandes descobertas nos ramos da física. Os mesmos achavam que quase todos os conhecimentos da física já estavam compreendidos, exceto pequenos detalhes a serem acrescentados ou modificados (SALINAS, 2010). No entanto, o início do século XX revelou grandes descobertas na física, entre elas, a descrição, em 1901, por Max Planck sobre a *absorção e emissão da radiação na forma discreta*; a *Teoria do efeito fotoelétrico*, baseada na teoria de Planck, e a *Teoria da*

*Relatividade Especial (TRE)*² (ou Teoria da Relatividade Restrita (TRR)) apresentadas por Einstein em 1905 (EINSTEIN; STACHEL; PENROSE, 1998; EINSTEIN, 1905b; EINSTEIN, 1905a; KOX, 2009) etc. A TRE foi formulada por conta de alguns aspectos incompatíveis e contraditórios entre teoria da mecânica de I. Newton³ (NEWTON, 2016; NEWTON, 2012) com a teoria do eletromagnetismo de J. Maxwell^{4,5} (GAZZINELLI, 2005a). Diante disso, Einstein resumiu suas ideias, que formam a base da TRE, em dois postulados:

- I. *As leis da física são as mesmas para quaisquer referenciais inerciais;*
- II. *A velocidade da luz, c , permanece a mesma no vácuo e não depende do movimento de sua fonte. Além desta ser a maior velocidade da natureza.*

O primeiro postulado é uma extensão do PRG para todas as leis da física, ou seja, todas as leis da física são invariantes e independentes de referenciais, inclusive as equações do eletromagnetismo de Maxwell. Como consequência, tem-se o segundo postulado, no qual observadores em movimentos relativos e uniformes, no vácuo, obterão sempre os mesmos valores para a velocidade da luz. Dessa forma, as ideias para um espaço e um tempo absoluto perdem todo o sentido. No entanto, o objetivo da teoria é tornar as leis da física absolutas (HENRIQUES, 2009d; GAZZINELLI, 2005b; EINSTEIN, 1905a).

A TRE traz uma descrição importante para o espaço e o tempo, ambos passam a se relacionar. O tempo passa a ser considerado um parâmetro de uma coordenada e todo o conjunto passam a ser chamado de *espaço-tempo*, sendo uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais (HENRIQUES, 2009d). Diferentes referenciais inerciais são conectados entre si pelas Transformações de Lorentz (TL). Considerando um observador em um referencial A' (nas coordenadas $(x', y' z'$ e $ct')$) se afastando com relação a um outro observador num referencial A (nas coordenadas $(x, y z$ e $ct)$) com uma velocidade relativa \vec{v} ao longo do eixo x positivo (com

² No início Einstein se referia à TRE por *Teoria da Invariância*. O nome *relatividade* foi introduzido posteriormente por Henri Poincaré (1854–1912) e Max Planck (1858–1947), depois disso ele passou a adotar também.

³ Newton acreditava no conceito de um espaço absoluto e para ele era possível determinar uma aceleração absoluta. Ele atribuía isso em consequência das forças fictícias que surgem nos movimentos com aceleração. Mas, esta ideia não era compatível com o Princípio de Relatividade de Galileu (PRG), pois significaria ser possível escolher um conjunto infinito de referenciais inerciais, que era o referencial do espaço absoluto. No final do século XIX, Ernst Mach (1838-1916) apresentou uma crítica fundamental à teoria newtoniana. Para Mach só existem movimentos relativos e isto foi de grande valia nas concepções de Einstein para TRE.

⁴ As equações de Maxwell não eram invariantes a uma Transformação de Galileu (TG). Isto é, observadores em diferentes referenciais inerciais observariam fenômenos diferentes e incompatíveis a uma TG.

⁵ A TG, o PRG (estendido também ao eletromagnetismo) e as equações de Maxwell não são compatíveis. Diante deste cenário surgem três reflexões possíveis: a) O PRG não pode ser estendido também ao eletromagnetismo. Daí, deve existir um referencial absoluto para o eletromagnetismo; b) O PRG pode ser estendido também ao eletromagnetismo; a mecânica newtoniana e a TG estão corretas. Daí, a teoria do eletromagnetismo estaria incorreta (não é invariante perante a TG) e precisa ser modificada; c) O PRG pode ser estendido também ao eletromagnetismo. E a teoria de Maxwell, do eletromagnetismo, está correta. Daí, a TG e a mecânica de Newton estão incorretas e precisam de modificações. Por conta disso, Michelson e Morley tentaram, por meio de experiências, determinar um referencial absoluto (o éter), dessa forma descartaria ou não a opção (a). No entanto, os resultados na tentativa de encontrar um referencial absoluto deram sempre nulos.

esquemática vista na [Figura 2.4.1](#)), as TL são dadas por

$$x' = \gamma_L(x - vt), \quad (2.4.1a)$$

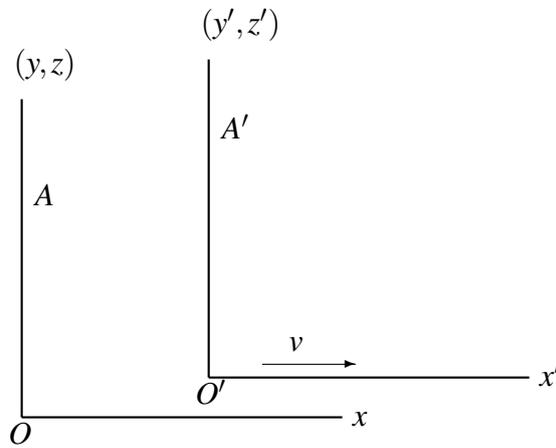
$$y' = y, \quad (2.4.1b)$$

$$z' = z, \quad (2.4.1c)$$

$$t' = \gamma_L \left(t - \frac{v}{c^2}x \right), \quad (2.4.1d)$$

onde o termo $\gamma_L \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ é o fator de contração de Lorentz ([GAZZINELLI, 2005c](#)).

Figura 2.4.1 – Esquemática das coordenadas espaciais de um observador num referencial A' se afastando com velocidade relativa v com relação a outro observador no referencial A , ao longo do eixo x positivo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na TRE, o espaço-tempo é descrito pela geometria quadrimensional de Minkowski (pseudo euclidiana). O elemento de linha entre dois eventos⁶, nesta geometria, é definido por ([GAZZINELLI, 2005c](#)),

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.4.2)$$

onde ds^2 é uma grandeza física invariante, isto é, que independe do referencial ($ds^2 = ds'^2 = ds''^2 = \dots$). Na forma tensorial ds^2 é expressado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4.3)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor do espaço-tempo na métrica de Minkowski ([Equação 2.4.4](#))

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.4)$$

⁶ Um evento é acontecimento físico numa posição bem definida do espaço-tempo, exemplo: (x, y, z, t) ou (x', y', z', t') etc.

dx^μ e dx^ν são os elementos de linhas das coordenadas espaciais e temporal. Os índices gregos μ e ν variam de 0 a 3. Para $\mu = \nu$ temos $\eta_{\mu\nu} = 1$ (se $\mu, \nu \neq 0$), enquanto que $\eta_{\mu\nu} = -1$ (se $\mu, \nu = 0$) e $\eta_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, sendo o quadri vetor posição do espaço-tempo é dado por (WEINBERG, 2008; HEINICKE; HEHL, 2003):

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z. \quad (2.4.5)$$

2.4.2 Teoria da Relatividade Geral

A versão final da TRG foi apresentada por Einstein entre o final de 1915 e início de 1916 numa série de publicações científicas Einstein (1915a), Einstein (1915b), Einstein (1915c), Einstein (1915d) e Einstein (1916)⁷. Na TRG, na presença de um campo gravitacional, a velocidade da luz, c , deixa de ser uma constante e passa a ser dependente do sistema de coordenadas. Enquanto a atuação da TRE é restrita ao caso de campos gravitacionais nulos, a TRG tem abrangência universal sobre a gravidade (FILHO; SARAIVA, 2014a; LIMA, 2018). A Teoria da Gravitação Universal e a TRG são compatíveis apenas na presença de campos gravitacionais fracos. A equação de campos de Einstein que descreve a dinâmica em curvaturas, assim como o movimento local da *matéria-energia* do espaço-tempo, é dada por (ver Apêndice A):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.4.6)$$

onde o termo $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein; $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci (tensor de espaço-tempo); $g_{\mu\nu}$ trata-se das componentes do tensor de métrica; R é o escalar de curvatura de Ricci⁸; G é a constante gravitacional de Newton, onde $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ trata-se da constante gravitacional de Einstein; $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia; enquanto que os índices gregos μ e ν variam de 0 a 3 (FILHO; SARAIVA, 2014a; EINSTEIN, 1915a; EINSTEIN, 1917).

Em 1917, Einstein apresentou o primeiro modelo de Universo da cosmologia moderna. Tratava-se de um Universo com volume finito, estático, esférico e sem bordas. Para que o Universo fosse estático, inicialmente, ele acrescentou um termo cosmológico (a constante cosmológica, Λ) para contrapor o efeito da gravidade, por mais que após a descoberta da expansão do Universo por Hubble ele tenha classificado isso como o maior erro de sua vida (EINSTEIN, 1917; EINSTEIN, 1923a; ROOS, 2015a; KARTTUNEN *et al.*, 2007). Entretanto, após a descoberta da expansão acelerada do Universo por Riess *et al.* (1998) e Perlmutter *et al.* (1998) esse termo passou a vigorar novamente na equação de campos de Einstein, representando essa expansão acelerada. Dessa maneira a equação de campos de Einstein com o termo cosmológico é descrita por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.4.7)$$

⁷ Artigo de Einstein traduzido para o inglês por Satyendra Nath Bose no livro Einstein (1920) ou versão traduzida por W. Perrett e G.B. Jeffery no livro Einstein (1923b).

⁸ Não confundir o escalar de Ricci com o fator de escala $R(t)$. Por mais que em algum momento do texto o fator de escala seja mencionado apenas por R por simplificação. No entanto, estará claro no contexto que trata-se do mesmo e não do escalar de Ricci.

Na publicação [Einstein \(1915b\)](#) Einstein fez uma descrição para explicar a discrepância na precessão do periélio do Planeta Mercúrio (essa foi a primeira evidência para TRG⁹). No entanto, para comprovar que a TRG estava correta era necessário ter mais evidências observacionais que corroborassem com as hipóteses relativísticas propostas por ele. Uma das primeiras e mais fortes evidências observacionais, da época, aconteceu em 1919, com a observação do eclipse total do Sol em Sobral (Brasil) e na ilha do Príncipe (oeste da África), com medidas da deflexão da luz oriunda do campo gravitacional do Sol ([DYSON; EDDINGTON; DAVIDSON, 1920](#); [LONGAIR, 2008](#)). Uma das mais recentes e importantes comprovações é a confirmação da existência das ondas gravitacionais, prevista pela TRG cem anos antes ([ABBOTT *et al.*, 2016a](#); [ABBOTT *et al.*, 2016b](#)). Esta descoberta, fortaleceu o arcabouço da TRG e inaugurou um novo campo de estudos na astronomia moderna: Astronomia de ondas gravitacionais.

2.4.3 A Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Na TRG, as propriedades da métrica mudam com relação a métrica dada na [Equação 2.4.3](#), pois agora trata-se uma métrica que admite curvatura. Sendo o espaço-tempo com curvaturas as componentes do tensor de métrica são dadas por $g_{\mu\nu}$. Quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ trata-se de uma métrica do espaço-tempo plano, ou seja, pseudo euclidiano. A separação entre dois eventos com localizações em (t, r, θ, ϕ) e $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ na métrica de Minkowski quadrimensional em coordenadas esféricas é dada por ([RYDEN, 2017g](#)):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.4.8)$$

A métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é a única métrica que satisfaz o PC de forma mais geral. Tendo em vista as [Equação 2.4.7](#) e [Equação 2.4.8](#) um elemento de linha em coordenadas esféricas na métrica FLRW é dada por (ver [Apêndice A](#)):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (2.4.9)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala; k é a constante de curvatura do Universo, sendo que k pode assumir valores de 1, 0 e -1 , que corresponde ao tipo de geometria do Universo: elíptica (esférica), plana (pseudo-euclidiano), hiperbólica (aberta), respectivamente; $r \equiv r_1$ representa a posição comóvel; A coordenada temporal, t , é medida em repouso com relação às coordenadas comóveis¹⁰ ([HENRIQUES, 2009b](#); [ISLAM, 2004b](#); [WEINBERG, 1972](#); [TERZIĆ, 2008](#)), onde

⁹ Em 1859, Urbain Le Verrier (1811-1877) já havia calculado a elipticidade de Mercúrio em $e = 0.2$ e sabia-se que Mercúrio tinha uma discrepância de cerca de $\dot{\omega} = 45 \pm 5 \text{ arcsec}$ por século de variação do seu periélio. No entanto, pela TRG era previsto uma discrepância em torno de $\dot{\omega} = 43 \text{ arcsec}$ ([VERRIER, 1859](#); [LONGAIR, 2008](#); [EINSTEIN, 1915b](#)).

¹⁰ Um sistema de coordenadas comóveis é aquele que se move com a fonte.

as componentes do tensor de métrica $g_{\mu\nu}$ neste caso são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2(t)/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t)r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.4.10)$$

sendo as componentes da diagonal: $g_{00} = -1$, $g_{11} = R^2(t)/(1-kr^2)$, $g_{22} = R^2(t)r^2$, $g_{33} = R^2(t)r^2\text{sen}^2\theta$ e as restantes $g_{\mu\nu} = 0$, para $\mu \neq \nu$.

2.5 Equações de Friedmann

Após a descrição do primeiro modelo cosmológico apresentado por *A. Einstein*, em 1917 (EINSTEIN, 1917), baseado na TRG que o mesmo desenvolveu dois anos antes. Este modelo satisfazia o PC. Posteriormente, em 1922 (FRIEDMANN, 1922) e 1924 (FRIEDMANN, 1924), o matemático e cosmólogo soviético Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) viera apresentar soluções de Universo dinâmico, com curvaturas positivas e negativas, respectivamente. Estas soluções podem ser obtidas pelo formalismo newtoniano, tanto quanto pelo formalismo da TRG (KARTTUNEN *et al.*, 2007; RYDEN, 2017g; LIDDLE, 2015b). O formalismo da cosmologia newtoniana surgiu somente após a evolução dinâmica das equações da TRG. Mas, é interessante enfatizar que mesmo com a mecânica newtoniana é possível obter também as equações de Friedmann, condicionado à algumas restrições. Uma descrição mais completa é feita por meio pela TRG (LIMA, 2018). Nesta seção, faremos uma descrição de suas equações, assim como a dinâmica do modelo e soluções, descrevendo alguns parâmetros cosmológicos de interesse.

2.5.1 Equações de Friedmann pela descrição newtoniana

Usando a conservação de energia (dado na seção 2.3), da Equação 2.3.3, reescrevendo em termos de r e ρ , obtém-se que,

$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m, \quad (2.5.1)$$

onde nesta equação é descrito a evolução da separação r na região esférica.

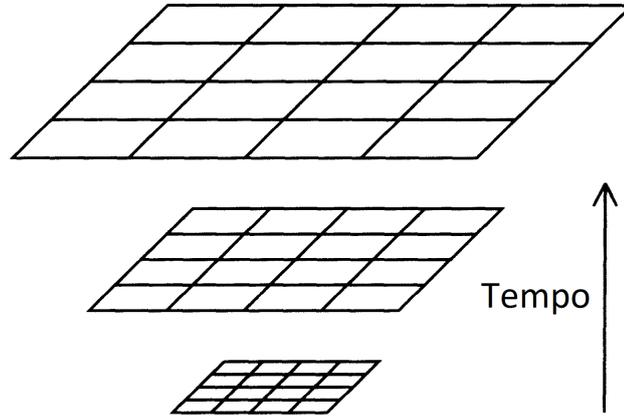
Adotando um sistema de coordenadas que se move com a expansão, as *coordenadas comóveis* (ver representação na Figura 2.5.1). Uma vez que, o Universo é homogêneo e isotrópico, com expansão uniforme. A distância real $\vec{r}(t)$ (coordenadas físicas) em termos da distância comóvel \vec{r}_1^{11} (coordenadas comóveis) pode ser escrita como (LIDDLE, 2015b):

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}_1 \quad (2.5.2)$$

¹¹ Na subseção 2.7.1 denotaremos as coordenadas comóveis por χ , isto é, $\chi \equiv \vec{r}_1$.

onde $R(t)$ é o fator de escala do Universo e é uma função da evolução temporal (ver [subseção 2.7.1](#)). Reescrevendo a [Equação 2.5.1](#) em termos do fator de escala e distâncias comóveis,

Figura 2.5.1 – Representação do sistema de coordenadas comóveis. Sistema que se move junto com a expansão, de modo que, qualquer objeto fica fixo com relação a esta coordenada, durante toda a evolução temporal.



Fonte: Adaptada de [Liddle \(2015b\)](#).

ou seja, substituindo a [Equação 2.5.2](#),

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 r_1^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho R^2 r_1^2 m, \quad (2.5.3)$$

onde o termo com r_1 desaparece ($\dot{r}_1 = 0$), já que r_1 não tem dependência temporal. Multiplicando ambos os lados da [Equação 2.5.3](#) por $\frac{2}{mR^2 r_1^2}$, daí,

$$\frac{2E}{mR^2 r_1^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{8\pi}{3}G\rho, \quad (2.5.4)$$

fazendo $kc^2 \equiv -2E/mr_1^2$ e $H(t) \equiv \dot{R}/R$, a [Equação 2.5.4](#) pode ser escrita ainda como,

$$H^2(t) \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{R^2}, \quad (2.5.5)$$

Esta é a *equação de Friedmann* na forma padrão, obtida a partir da descrição newtoniana, em que $k = \frac{-2E}{mc^2 r_1^2}$ ($k \propto 1/r_1^2$) é uma constante e representa o tipo de curvatura para o universo. No entanto, k aparece aqui de modo arbitrário, condicionado à imposição. Na TRG, ele surge naturalmente ([RYDEN, 2017g](#); [LIDDLE, 2015b](#); [SCHNEIDER, 2015](#)).

2.5.2 Equações de Friedmann pela Descrição da TRG

Na TRG, as equações da Friedmann são obtidas a partir do tensor *estresse-energia* juntamente com a utilização da métrica FLRW. O tensor momento-energia (estresse-energia) que descreve um fluido perfeito é dado por¹² ([ELLIS et al., 2011](#); [CARROLL, 2001](#); [TERZIĆ,](#)

¹² O Universo tem sua descrição dada por um fluido perfeito, que trata-se do único sistema físico que está de acordo com o PC, sem efeitos de cisalhamentos ou fluxos de calor em largas escalas.

2008; HENRIQUES, 2009a; SCHUTZ, 2009b; COMBES *et al.*, 1996; CARROLL, 2004):

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}P \end{pmatrix}, \quad (2.5.6a)$$

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho c^2)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.5.6b)$$

onde: $T_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor estresse-energia (neste caso, especialmente, é conhecido como tensor momento-energia por ter componentes não nulas somente na diagonal). Dessa forma, temos: $T_{00} = \rho c^2$, $T_{ij} = g_{ij}P$ se $i = j$ e $T_{ij} = 0$ se $i \neq j$; U_μ e U_ν são as componentes do quadrivetor-velocidade (com índices abaixados), onde: $U_\mu, U_\nu = (-1, 0, 0, 0)$; ρ é a densidade de energia do Universo, P é a pressão; T_{0i} é o fluxo de energia, onde: $T_{0i} = 0$; T_{i0} é a densidade de momento, $T_{i0} = 0$; T_{ij} é o fluxo de momento, com os índices i e j variando de 1 a 3; e $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica (neste caso, trata-se da métrica FLRW).

A partir das equações obtidas para o tensor momento-energia (Equação 2.5.6) e para a métrica FLRW (Equação 2.4.9), substituindo-as na equação de campos de Einstein da TRG (Equação 2.4.6), com demonstração no Apêndice A, são obtidas duas equações (NARLIKAR, 1993; WEINBERG, 2008; DALARSSON; DALARSSON, 2015a):

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2kc^2}{R^2} = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho c^2 - P), \quad (2.5.7)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P). \quad (2.5.8)$$

Estas são conhecidas como as *equações de Friedmann*. Esta última é conhecida como a *equação da aceleração*. Substituindo a Equação 2.5.8 na Equação 2.5.7, temos:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2}, \quad (2.5.9)$$

esta é a *equação de Friedmann* na forma padrão, obtida pela descrição da TGR. Esta, ainda pode ser expressada com o termo cosmológico acrescentado:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (2.5.10)$$

2.5.3 A Dinâmica Cosmológica do Modelo de Friedmann

2.5.3.1 Soluções Para a Lei de Conservação

Fazendo uma diferenciação na Equação 2.5.9 ou Equação 2.5.10 com relação ao tempo cósmico t , podemos expressar (DALARSSON; DALARSSON, 2015a)

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho 2R\dot{R}. \quad (2.5.11)$$

Os termos com k e Λ na equação de Friedmann desaparecem na derivação temporal. Reorganizando esta equação, temos:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} \frac{R}{\dot{R}} + \frac{4\pi G}{3} 2\rho. \quad (2.5.12)$$

Igualando a [Equação 2.5.12](#) com a equação da aceleração ([Equação 2.5.8](#)), podemos reescrever

$$\frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} \frac{R}{\dot{R}} + \frac{4\pi G}{3} 2\rho = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P), \quad (2.5.13)$$

isto é

$$\frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} \frac{R}{\dot{R}} + \frac{4\pi G}{3} 3\rho = -\frac{4\pi G}{3c^2} 3P, \quad (2.5.14)$$

ainda, podemos simplificar e reorganizar em termos de $\dot{\rho}$. Dessa forma, obtém-se que

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{R}}{Rc^2} (\rho c^2 + P). \quad (2.5.15)$$

Esta equação trata-se da *lei de conservação* e também pode ser obtida pelo tensor momento-energia: $T^{\nu\mu}_{;\mu} = 0 = \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{R}}{Rc^2} (\rho c^2 + P)$. Para mais detalhes, veja [Weinberg \(2008, Sec. 1.1\)](#).

A [Equação 2.5.15](#) tem solução caracterizada por parâmetros cosmológicos da Equação de Estado (EE) que obedecem uma relação linear:

$$P = \omega \rho c^2, \quad (2.5.16)$$

onde ω é um parâmetro da equação de estado; ρ é a densidade de energia; c é a velocidade da luz; e P é a pressão. Multiplicando ambos os lados da [Equação 2.5.15](#) por $\frac{dt}{\rho}$ e substituindo a [Equação 2.5.16](#), podemos reescrevê-la por:

$$\frac{d\rho}{\rho} + 3\frac{dR}{R}(1 + \omega) = 0 \implies \frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{dR}{R}, \quad (2.5.17)$$

integrando ambos os lados desta equação, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\rho(t)}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} &= - \int_{R(t)}^{R_0} 3(1 + \omega) \frac{dR}{R}, \\ \ln \rho \Big|_{\rho(t)}^{\rho_0} &= -3(1 + \omega) \ln \Big|_{R(t)}^{R_0}, \\ \ln \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right) &= \ln \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

sabemos que $e^{\ln(x)} = x$. Dessa forma, a solução da equação da lei de conservação ([Equação 2.5.15](#)) é dada por ([ROOS, 2015a](#); [WEINBERG, 1972](#); [CARROLL, 2001](#); [WEINBERG, 2008](#); [ROOS, 2015a](#)):

$$\rho(R(t)) = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)} = \rho_0 (1+z)^{3(1+\omega)}. \quad (2.5.19)$$

com $\frac{R_0}{R} \equiv (1+z)$ sendo obtido através da relação de *expansão de redshift*¹³ ([HARRISON, 2000](#)), apresentado na [seção 2.6](#), onde z é o *redshift* observado; ω é um fator de proporcionalidade para

¹³ Pois, na astronomia é comum encontrar o fator de escala $R(t)$ a partir de medidas de *redshifts* z .

equação de estado; enquanto que ρ_0 e R_0 tratam-se da densidade de energia e do fator de escala para o tempo atual, respectivamente. Podemos derivar diferentes valores para ω , de acordo com alguns casos especiais:

- I. *Universo dominado por matéria*: Um Universo preenchido por matéria fria e não-relativística na forma de poeira, sem a presença de radiação e pressão. Isto é, com $P = 0$ (logo $\omega = 0$). Daí a densidade de matéria evolui com fator de escala por:

$$\rho_m(R) = \rho_{m0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \rho_{m0} (1+z)^3, \quad (2.5.20)$$

onde ρ_{m0} é densidade de matéria medida hoje.

- II. *Universo dominado por radiação*: Tratando-se de um Universo com um gás quente e ultra-relativístico na forma de partículas quente (matéria quente). Isto é, $P = \frac{1}{3}\rho_r c^2$ (ou seja: $\omega = \frac{1}{3}$). Dessa forma, a densidade de energia da radiação evolui com o fator de escala por

$$\rho_r(R) = \rho_{r0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 = \rho_{r0} (1+z)^4, \quad (2.5.21)$$

onde ρ_{r0} trata-se da densidade de energia da radiação medida hoje.

- III. *Energia do vácuo*: Corresponde a um universo estático ($\ddot{R} = \dot{R} = 0$), que não contém poeira ou radiação. Possui uma componente de pressão negativa do tipo $P = -\rho_\Lambda c^2$ (ou seja: $\omega = -1$), a densidade de energia de vácuo (densidade de energia escura) evolui por:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^0 = \rho_{\Lambda 0} (1+z)^0 = \rho_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.5.22)$$

onde $\rho_{\Lambda 0}$ trata-se da densidade de energia de vácuo medida hoje; e Λ é a constante cosmológica.

- IV. *Curvatura*: Corresponde ao caso do Universo que contém curvatura, isto é, com $P = -\frac{1}{3}\rho_k c^2$ (logo $\omega = -\frac{1}{3}$), onde a densidade de curvatura evolui com fator de escala por:

$$\rho_k(R) = \rho_{k0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = \rho_{k0} (1+z)^2. \quad (2.5.23)$$

onde ρ_{k0} trata-se da densidade de curvatura do Universo medida hoje.

- V. *Fluido desconhecido*: Considerando um caso geral possível para um fluido desconhecido e com equação de estado arbitrária, com uma componente de proporcionalidade dada por ω_x (podendo assumir valores arbitrários em torno de -1), assim, a densidade de energia evolui por:

$$\rho_i(R) = \rho_{i0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega_x)} = \rho_{i0} (1+z)^{3(1+\omega_x)}. \quad (2.5.24)$$

onde ρ_{i0} trata-se da densidade do fluido desconhecido medida hoje.

2.5.3.2 Parâmetros Cosmológicos

Nesta [subseção 2.5.3.2](#) serão definidos alguns parâmetros cosmológicos observáveis em estudos de cosmologia.

2.5.3.2.1 O Parâmetro de Hubble

Nesta [subseção 2.5.3.2.1](#) iremos mostrar como a correlação entre o volume do Universo (V) e fator de escala ($R(t)$) resulta numa razão que é definida como *parâmetro de Hubble*. Vimos que a distância física em termos da distância comóvel é ([subseção 2.5.1](#)): $\vec{r} = R(t)\vec{r}_1$, assim, o volume físico do Universo tem dependência com o fator de escala $R(t)$ por ([SCHNEIDER, 2015](#); [RYDEN, 2017a](#)):

$$V = R(t)^3 V_x; \quad V \propto R(t)^3 V_1; \quad V \propto R(t)^3, \quad (2.5.25)$$

onde $V_x = |J|V_1$ contém o volume comóvel V_1 e a transformação jacobiana $|J|$ adequada para o volume. Considerando um Universo esférico essa transformação é $\frac{4\pi}{3}$, com isso, fazendo uma derivada temporal na [Equação 2.5.25](#), obtemos que:

$$\dot{V} = 3R(t)^2 \dot{R} V_x. \quad (2.5.26)$$

Dividindo a [Equação 2.5.26](#) por [Equação 2.5.25](#):

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{3R(t)^2 \dot{R} V_x}{R(t)^3 V_x} = 3 \frac{\dot{R}}{R}. \quad (2.5.27)$$

Portanto, a relação entre o volume e fator de escala, fornece o parâmetro de Hubble:

$$\frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{R}}{R} \equiv H(t). \quad (2.5.28)$$

Este está associado à taxa de expansão do Universo. Para o tempo atual é denotado por $H(t = t_0) \equiv H(t_0) \equiv H_0$, com valores atuais, a depender de modelos e dados, aproximadamente, compreendidos entre $(65\text{—}75) \times \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} = (65\text{—}75) \times 3.24 \times 10^{-20} \text{s}^{-1}$.

2.5.3.2.2 Densidade Crítica e Parâmetro de Densidade

Como já mencionado na [seção 2.3](#), a densidade crítica é encontrada na condição que temos um Universo estático ($E = 0$). Em termos da Eq. de Friedmann ([Equação 2.5.9](#))

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R^2}, \quad (2.5.29)$$

onde vimos que $H(t)^2 = \dot{R}/R$. Para $k = 0$ (Universo plano), a densidade crítica do Universo assume a seguinte expressão ([CARROLL; OSTLIE, 2007](#)):

$$\rho_{cr}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (2.5.30)$$

podemos reescrever o parâmetro de Hubble: $H(t) = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3.24 \times 10^{-18} h \text{ s}^{-1}$. E em termos do tempo atual, a densidade crítica é dada pela expressão:

$$\rho_{cr0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.87798 \times 10^{-26} h^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (2.5.31)$$

com: $G = 6.674184 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$. Dessa forma, se conhecemos a densidade de energia do Universo, é possível determinar o seu tipo de curvatura (hiperbólica, plana e fechada).

O *parâmetro de densidade de energia* é definido pela razão entre a densidade de energia e a densidade crítica de energia:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)} = \frac{8\pi G \rho(t)}{3H(t)^2} \quad \text{ou} \quad \Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}(t)} = \frac{8\pi G \rho_i}{3H(t)^2}. \quad (2.5.32)$$

E para o tempo atual é dado por:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{cr0}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.5.33)$$

Diante do que foi apresentando nesta subseção (seção 2.5), podemos reescrever a [Equação 2.5.10](#) em termos da contribuição de cada componente de densidade de energia:

$$H(t)^2 \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (2.5.34)$$

onde: ρ_m é densidade de energia da matéria; ρ_r a densidade de energia da radiação e ρ_Λ a densidade de energia do vácuo. Daí, podemos reescrever a [Equação 2.5.34](#) em termos dos parâmetros de densidades e *redshifts* (ELLIS *et al.*, 2011; ROOS, 2015a; CARROLL; OSTLIE, 2007; WEINBERG, 2008; ISLAM, 2004a):

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4], \quad (2.5.35)$$

onde Ω_{m0} , Ω_{r0} e Ω_Λ , respectivamente, são os parâmetros de densidade da matéria, radiação e energia do vácuo (energia escura) para o tempo atual. E $\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$ é definido como parâmetro de densidade de curvatura espacial para o tempo atual.

Da [Equação 2.5.34](#) podemos reescrever:

$$-k = \frac{R^2 H(t)^2}{c^2} \left(1 - \frac{8\pi G}{3H(t)^2} \rho_{tot} \right) \quad (2.5.36)$$

onde fizemos $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$. Dessa forma, o Universo é plano se apenas $\rho_{tot} = \frac{3H(t)^2}{8\pi G} \equiv \rho_{cr}$. Logo teremos: $k > 0$, $k < 0$ e $k = 0$ se $\rho_{tot} > \rho_{cr}$, $\rho_{tot} < \rho_{cr}$ e $\rho_{tot} = \rho_{cr}$, respectivamente. E definindo em termos de um parâmetro de densidade $\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho_{tot}}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H(t)^2}$, permite-nos explorarmos possibilidades e estimativas de como a curvatura espacial é correlacionada com a matéria e energia do universo:

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{kc^2}{R^2 H(t)^2} \quad \text{assim} \quad \begin{cases} \Omega_{tot} > 1, & \text{Universo fechado } (k = 1); \\ \Omega_{tot} = 1, & \text{Universo plano } (k = 0); \\ \Omega_{tot} < 1, & \text{Universo aberto } (k = -1). \end{cases} \quad (2.5.37)$$

De modo geral, a equação de Friedmann (Equação 2.5.35) pode ser reescrita por:

$$H^2(z) \equiv H_0^2 E(z), \quad (2.5.38)$$

sendo que no modelo padrão atual $E(z) = [\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4]$ representa a soma dos parâmetros de densidade para um determinado tempo t .

2.5.3.2.3 Parâmetro de Desaceleração

Em um modelo de Universo em que suas propriedades físicas são bem conhecidas, o fator de escala, $R(t)$, pode ser facilmente encontrado a partir da própria equação de Friedmann. No entanto, para o Universo real as medições dessas propriedades com precisão não é simples e $R(t)$ é obtido indiretamente das observações. Então, é útil expressar $R(t)$ numa expansão de série de Taylor em torno do tempo presente $t = t_0$, pois, assim é possível extrair algumas informações empíricas (RYDEN, 2017e; WEINBERG, 2008; HAWLEY; HOLCOMB, 2005; NĂSTASE, 2019a):

$$R(t) = R(t_0) + \left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2R}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \dots, \quad (2.5.39)$$

dividindo ambos os lados da Equação 2.5.39 por $R(t_0)$, podemos reescrevê-la por:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + \left. \frac{\dot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \dots. \quad (2.5.40)$$

É uma boa aproximação considerar os três primeiros termos, se não existir grandes flutuações em $R(t)$ por conta de t (não há evidências que o Universo real tenha um fator de escala com muitas oscilações), assim:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} \approx 1 + \left. \frac{\dot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2, \quad (2.5.41)$$

como $R(t_0) = R_0 = 1$. Daí:

$$R(t) \approx 1 + \left. \frac{\dot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{R}}{R} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2. \quad (2.5.42)$$

Sabemos que a constante de Hubble pode ser escrita por:

$$H_0 \equiv \left. \frac{\dot{R}}{R} \right|_{t=t_0}. \quad (2.5.43)$$

A partir do terceiro termo da Equação 2.5.42:

$$\left. \frac{\ddot{R}}{R} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\ddot{R} \dot{R}^2 R^2}{R \dot{R}^2 R^2} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\ddot{R} R^2}{R \dot{R}^2} H^2 \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2 H^2} H^2 \right|_{t=t_0} = -q(t) H^2 \Big|_{t=t_0} \quad (2.5.44)$$

podemos definir o *parâmetro de desaceleração*, para um tempo qualquer t , pela expressão:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} = -\frac{\ddot{R}}{R H^2}. \quad (2.5.45)$$

E em termos do tempo atual ($t = t_0$) é obtido por

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)_{t=t_0} = - \left(\frac{\ddot{R}}{R\dot{H}^2} \right)_{t=t_0}. \quad (2.5.46)$$

Dessa maneira, a [Equação 2.5.42](#) pode ser reescrita em termos do parâmetro de desaceleração, q_0 , e da constante de Hubble, H_0 ,

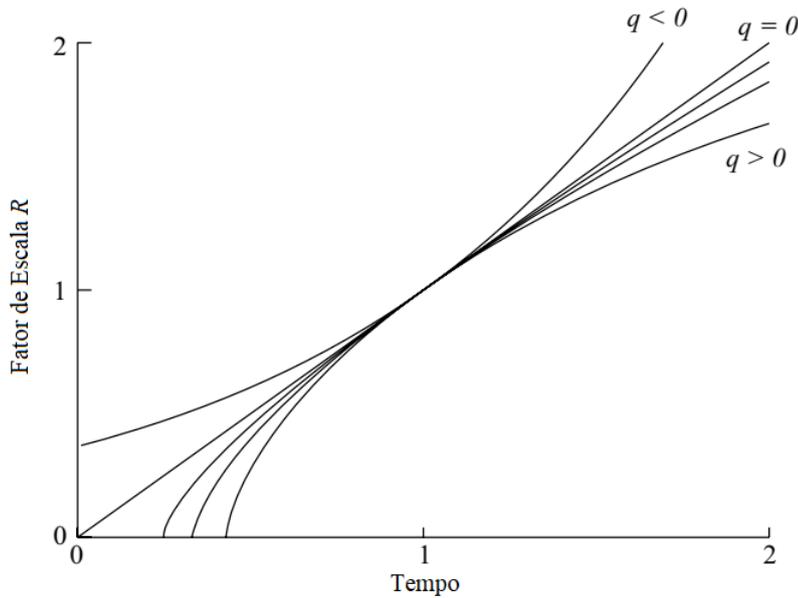
$$R(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2. \quad (2.5.47)$$

A [Equação 2.5.45](#) assume três diferentes possibilidades:

$$\begin{cases} q > 0, & \text{se } \ddot{a} < 0 & (\text{Expansão desacelerada}); \\ q = 0, & \text{se } \ddot{a} = 0 & (\text{Expansão constante}); \\ q < 0, & \text{se } \ddot{a} > 0 & (\text{Expansão acelerada}), \end{cases} \quad (2.5.48)$$

ou seja, quando $q > 0$ significa que a expansão do Universo está de modo desacelerada; quando $q < 0$ está de modo acelerada e quando $q = 0$ a expansão do universo acontece de modo constante. A escolha do sinal na definição de $q(t)$ foi realizada na década de 1950 e na época não acreditava-se na possibilidade de um Universo com expansão acelerada. A [Figura 2.5.2](#) expressa as três possibilidades de q para evolução do fator de escala $R(t)$. A [Equação 2.5.47](#) foi obtida a partir de

Figura 2.5.2 – Evolução temporal do fator de escala R para modelos contendo as diferentes possibilidades do parâmetro de desaceleração q .



Fonte: Adaptada de [Hawley e Holcomb \(2005\)](#).

uma descrição matemática e independente das Equações de Friedmann. No entanto, combinada com a equação da aceleração ([Equação 2.5.8](#)) conseguiremos obter q para diferentes modelos

de Universo. Considerando um modelo de Universo com N componentes e com valores de parâmetros para equação de estado ω_i , a equação da aceleração é reescrita por

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_{i=1}^N (\rho_i c^2 + 3\rho_i \omega_i c^2) = -\frac{4\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (2.5.49)$$

Dividindo ambos os lados da [Equação 2.5.49](#) por H^2 , obtemos:

$$\frac{\ddot{R}}{RH^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{8\pi G}{3H^2} \right] \sum_{i=1}^N \rho_i (1 + 3\omega_i). \quad (2.5.50)$$

Usando a [Equação 2.5.32](#) podemos reescrever [Equação 2.5.50](#) por

$$\frac{\ddot{R}}{RH^2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Omega_i (1 + 3\omega_i). \quad (2.5.51)$$

Logo, temos que o parâmetro de desaceleração pode ser reescrito em termos do parâmetro de densidade, Ω_i , de energia e do parâmetro da equação de estado, ω_i :

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Omega_i (1 + 3\omega_i). \quad (2.5.52)$$

Em termos do tempo atual é reescrito:

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Omega_{0i} (1 + 3\omega_{0i}). \quad (2.5.53)$$

Considerando um Universo composto de matéria (Ω_m), radiação (Ω_r), constante cosmológica (Ω_Λ) e de uma componente x de um fluido desconhecido (Ω_x), a [Equação 2.5.53](#) torna-se

$$q_0 = \Omega_{r0} + \frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0} + \frac{1}{2}\Omega_{x0} (1 + 3\omega_{0x}). \quad (2.5.54)$$

2.5.3.3 Soluções Para as Equações de Friedmann

Aqui serão tratadas algumas soluções para as equações de Friedmann.

2.5.3.3.1 Universo de uma Única Componente ($P = \omega\rho c^2$)

- Para $k = 0$:

Para um Universo de uma única componente e de constante de curvatura $k = 0$, da [Equação 2.5.9](#) e usando a [Equação 2.5.19](#), temos ([NĂSTASE, 2019a](#); [MCMAHON; ALSING, 2005](#); [HENRIQUES, 2009a](#); [TERZIĆ, 2008](#); [DALARSSON; DALARSSON, 2015b](#); [ROOS, 2015a](#); [RYDEN, 2017f](#)):

$$\dot{R}(t)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} R^{-(1+3\omega)}. \quad (2.5.55)$$

Para solucionar a [Equação 2.5.55](#), é conveniente supor que esta obedece uma lei de potência do tipo $R = \beta t^\tau \propto t^\tau$, sendo β uma constante. Daí:

$$\dot{R}(t)^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d(\beta t^\tau)}{dt}\right)^2 = (\tau\beta t^{\tau-1})^2 = (\tau^2\beta^2 t^{2\tau-2}) \propto t^{2\tau-2}. \quad (2.5.56)$$

Da [Equação 2.5.55](#) e da suposição usada:

$$\frac{8\pi G\rho_0}{3} R^{-(1+3\omega)} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} (\beta t^\tau)^{-(1+3\omega)} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} (\beta)^{-(1+3\omega)} (t)^{-(1+3\omega)} \propto t^{-\tau(1+3\omega)}.$$

Logo $t^{2\tau-2} = t^{-\tau(1+3\omega)}$, ou seja, $2\tau - 2 = -\tau(1 + 3\omega)$. Assim:

$$\tau = \frac{2}{3+3\omega}; \quad \text{com } \omega \neq -1. \quad (2.5.57)$$

Dessa maneira, o fator de escala em função temporal tem a forma:

$$R(t) \propto t^{2/(3+3\omega)}. \quad (2.5.58)$$

Para o tempo atual: $R(t_0) \propto t_0^{2/(3+3\omega)}$. Normalizando a [Equação 2.5.58](#) por $R(t_0) = 1$, reescrevemos:

$$R(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3\omega)}. \quad (2.5.59)$$

Por outro lado, a idade do Universo t_0 está relacionado com a densidade de energia, podemos reescrever [Equação 2.5.55](#) por:

$$\frac{dR}{dt} = \left[\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right]^{1/2} R^{-1/2(1+3\omega)}; \quad R^{1/2(1+3\omega)} dR = \left[\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right]^{1/2} dt, \quad (2.5.60)$$

integrando a [Equação 2.5.60](#):

$$\int_{R_i=0}^{R_f=R_0=1} R^{1/2(1+3\omega)} dR = \int_{t_i=0}^{t_f=t_0} \left[\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right]^{1/2} dt, \quad (2.5.61)$$

$$\frac{R^{1/2(1+3\omega)}}{\frac{1}{2}(1+3\omega)+1} \Big|_0^1 = \left[\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right]^{1/2} t \Big|_0^{t_0}; \quad \frac{1}{\frac{3}{2}(1+\omega)} = \left[\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right]^{1/2} t_0, \quad (2.5.62)$$

reorganizando esta equação, finalmente podemos expressar a idade do Universo por:

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega} \left[\frac{1}{6\pi G\rho_0}\right]^{1/2}. \quad (2.5.63)$$

Mas, vimos na [Equação 2.5.31](#) que: $\rho_{cr0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \equiv \rho_0$, de modo que, a idade do Universo pode ser dada em termos da constante de Hubble:

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}. \quad (2.5.64)$$

Para uma fonte que emite num tempo t , usando a [Equação 2.5.59](#) com $1+z = R(t_0)/R(t)$, o tempo de emissão é expresso em função do *redshift* z :

$$t(z) = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}} = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(1+\omega)/2}}. \quad (2.5.65)$$

2.5.3.3.2 Universo Dominado por Matéria ($P = 0$ com $\omega = 0$)

- Para $k = 0$ (Universo plano):

Para um Universo dominado por matéria (matéria não relativística) e de curvatura nula ($k = 0$), a densidade de energia evolui de acordo a [Equação 2.5.20](#). Utilizando a [Equação 2.5.59](#), o fator de escala para matéria em função temporal evolui por ([HENRIQUES, 2009a](#); [TERZIĆ, 2008](#); [DALARSSON; DALARSSON, 2015b](#); [ROOS, 2015a](#); [RYDEN, 2017f](#); [WEINBERG, 2008](#))

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \quad (2.5.66)$$

E a partir da [Equação 2.5.64](#), a idade do Universo é dada por:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.52 \times 10^9 h^{-1} \text{anos}. \quad (2.5.67)$$

Para $h = 0.70$, obtemos que: $t_0 = 9.31 \times 10^9$ anos. Esta idade é inferior à idade que foi estimada para as estrelas mais antigas e aglomerados estelares que é da ordem de 13×10^9 anos. Este problema só foi solucionado, quando descobriu-se que uma contribuição importante da energia do Universo era oriunda da energia escura. O parâmetro de desaceleração ([Equação 2.5.46](#) e [Equação 2.5.53](#)) neste caso é

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)_{t=t_0} = \frac{1}{2}. \quad (2.5.68)$$

Neste caso, o Universo se expande de forma desacelerada. Este modelo de Universo, com $k = 0$ (Universo plano), é conhecido na literatura como modelo de *Einstein-de Sitter*. As soluções para outras curvaturas: $k = 1$ e $k = -1$ são vistas na [subseção B.2.1](#). A [Figura 2.5.3](#) mostra a esquematização das três possibilidades de curvaturas para evolução do Universo.

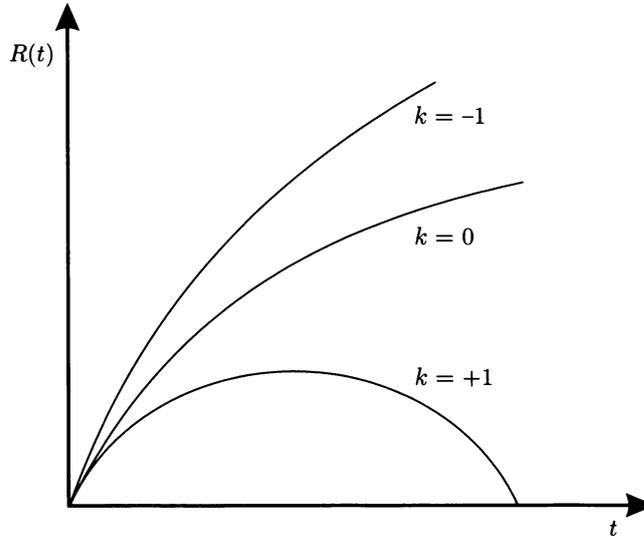
2.5.3.3.3 Universo Dominado por Radiação ($P = \frac{1}{3}\rho c^2$)

- Para $k = 0$:

Para um Universo dominado por radiação e constante de curvatura nula ($k = 0$), a densidade de energia evolui de acordo com a [Equação 2.5.21](#). Este caso é de bastante interesse, pois nos primórdios da história física do Universo, a radiação dominava o lado direito da equação Friedmann. Utilizando a [Equação 2.5.59](#), o fator de escala para radiação em função temporal evolui por ([HENRIQUES, 2009a](#); [TERZIĆ, 2008](#); [ROOS, 2015a](#); [RYDEN, 2017f](#); [WEINBERG, 2008](#); [MCMAHON; ALSING, 2005](#))

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}. \quad (2.5.69)$$

Figura 2.5.3 – Esquemática das três possibilidades para expansão de um Universo que seja isotrópico e homogêneo. A Figura mostra uma evolução temporal do fator de escala $R(t)$.



Fonte: [Henriques \(2009a\)](#).

A partir da [Equação 2.5.64](#), a idade do Universo dominado pela radiação é dada por:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} = 4.89 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos.} \quad (2.5.70)$$

Para $h = 0.70$, obtemos que: $t_0 = 6.99 \times 10^9$ anos. O parâmetro de desaceleração ([Equação 2.5.46](#) e [Equação 2.5.53](#)) neste caso é

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)_{t=t_0} = 1. \quad (2.5.71)$$

Neste modelo, o Universo também se expande de forma desacelerada. As soluções para outras curvaturas: $k = 1$ e $k = -1$ são vistas na [subseção B.2.2](#).

2.5.3.3.4 Universo Dominado pela Energia de Vácuo ($P = -\rho c^2$ com $\omega = -1$)

- Para $k = 0$:

Representa um Universo espacialmente plano ($k = 0$), com a densidade de energia advinda da contribuição de uma constante cosmológica Λ , de acordo a [Equação 2.5.22](#). A equação de Friedmann ([Equação 2.5.9](#)) pode ser reescrita por ([HENRIQUES, 2009a](#); [TERZIĆ, 2008](#); [ROOS, 2015a](#); [RYDEN, 2017f](#); [WEINBERG, 2008](#); [MCMAHON; ALSING, 2005](#))

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{R^2}; \quad H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (2.5.72)$$

Neste caso, para $k = 0$, temos

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}, \quad (2.5.73)$$

onde ρ_Λ é constante temporal. A Equação 2.5.73 pode ser reescrita por:

$$\dot{R}(t) = \frac{dR}{dt} = H_0 R; \quad H_0 = \left(\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2}. \quad (2.5.74)$$

Integrando a Equação 2.5.74, temos:

$$\int_R^{R_0=1} \frac{dR}{R} = \int_t^{t_0} H_0 dt; \quad \implies \quad \ln R|_R^1 = H_0 t|_t^{t_0}, \quad (2.5.75)$$

como $\ln 1 = 0$, assim:

$$\ln R = H_0(t - t_0), \quad (2.5.76)$$

dessa forma, a expansão do Universo acontece de forma exponencial:

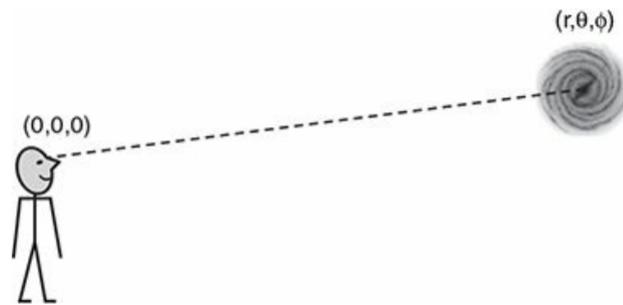
$$R(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (2.5.77)$$

Aqui o parâmetro de desaceleração é $q_0 = -1$, ou seja, a expansão do Universo acontece de forma acelerada. Na literatura, este modelo é conhecido como *modelo de De Sitter*.

2.6 O Redshift Cosmológico

Na astronomia, as medições do fator de escala $R(t)$, na maioria da vezes, são obtidas a partir das medidas observacionais advindas do *redshift* z . Considerando um observador A , que esteja na origem ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$) e um objeto astronômico B na posição ($r = r_1, \theta = \theta_1, \phi = \phi_1$), mostrado na Figura 2.6.1, e supondo que a distância entre eles seja enorme, o suficiente, para desprezar quaisquer perturbações de pequenas escalas do espaço-tempo, com a métrica FLRW sendo adotada. E considerando que uma onda eletromagnética seja emitida no

Figura 2.6.1 – Um observador na origem das coordenadas (0, 0, 0) observando uma galáxia na posição (r_1, θ_1, ϕ_1).



Fonte: Ryden (2017g).

tempo t_1 pelo objeto astronômico B e que esta viaje em direção a $-r$, com θ e ϕ mantidos fixos ($d\theta_1 = d\phi_1 = 0$) e que o observador localizado em A detecte-a no tempo t_0 . O raio de luz viaja obedecendo uma geodésica radial nula. A equação que o descreve é dada pelo seguinte elemento de linha (RYDEN, 2017g; HARRISON, 2000; WEINBERG, 1972; COLES; LUCCHIN, 2002b; WEINBERG, 2008; CARROLL; OSTLIE, 2007):

$$0 = ds^2 = -c^2 dt^2 + R(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (2.6.1)$$

daí,

$$cdt = \frac{\pm R(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.6.2)$$

onde: o sinal (+) representa o a luz viajando no sentido contrário da origem (observador A); enquanto que o sinal (-) representa a luz viajando da fonte (B) na direção da origem (observador A). Dessa forma, para o nosso caso, temos:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.6.3)$$

Por outro lado, a crista de onda seguinte deixa a fonte no tempo $t_1 + \delta t_1$ e chega ao observador A no tempo $t_0 + \delta t_0$. Daí obtemos que:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.6.4)$$

Os lados direitos das equações (2.6.3) e (2.6.4) são iguais, pois representam a posição comóvel do objeto astronômico em questão e não mudam com a expansão do Universo. Entretanto, no lado esquerdo das mesmas equações se substituirmos a Equação 2.6.3 na Equação 2.6.4 produzimos:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}, \quad (2.6.5)$$

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = 0. \quad (2.6.6)$$

Ainda, podemos reescrever o termo (ver subseção B.1.1):

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)}. \quad (2.6.7)$$

Assim, da Equação 2.6.6, temos:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = 0. \quad (2.6.8)$$

Daí:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} = 0 \implies \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{cdt}{R(t)} = 0. \quad (2.6.9)$$

Podemos considerar que o fator de escala $R(t)$ não varia durante o pequeno intervalo de tempo do pulso de luz emitido entre duas cristas consecutivas, uma vez esse tempo é da ordem de 10^{-14} s. Isso nos permite tratar $R(t)$ como uma constante com relação a integral, ou seja: $R(t_0 + \delta t_0) \simeq R(t_0)$ e $R(t_1 + \delta t_1) \simeq R(t_1)$, daí:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} &= \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{cdt}{R(t)}, \\ \frac{1}{R(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} cdt &= \frac{cdt}{R(t_1)} \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} cdt. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Logo,

$$\frac{c\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{c\delta t_1}{R(t_1)}, \quad (2.6.11)$$

mas sabemos que o período das ondas se relaciona com o comprimento de onda λ . Dessa forma, para o caso em questão:

$$\lambda_1 = c\delta t_1 \quad \text{e} \quad \lambda_0 = c\delta t_0. \quad (2.6.12)$$

Assim, podemos reescrever a [Equação 2.6.11](#) como

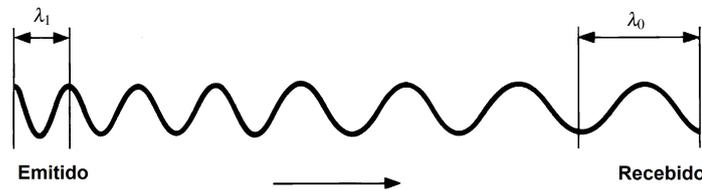
$$\frac{\lambda_0}{R(t_0)} = \frac{\lambda_1}{R(t_1)} \implies \frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (2.6.13)$$

A relação entre *redshift* z e comprimento de onda é dada por

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1, \quad (2.6.14)$$

onde λ_1 é o comprimento de onda associado a emissão do pulso de luz pela fonte (objeto astronômico situado em B); enquanto que λ_0 é o comprimento de onda medido pelo observador A. A esquematização na [Figura 2.6.2](#) mostra os comprimentos de onda da luz emitida e recebida, levando em conta o efeito Doppler devido a expansão do espaço. Dessa forma, combinando a

Figura 2.6.2 – Comprimento de onda emitido λ_1 pela fonte e comprimento de onda λ_0 recebido pelo observador. Com a expansão do espaço o comprimento de onda recebido sofre um efeito Doppler para o vermelho.



Fonte: Adaptada de [Harrison \(2000\)](#).

[Equação 2.6.13](#) com a [Equação 2.6.14](#), podemos reescrever a relação entre o *redshift* z e o fator de escala $R(t_1)$ por

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1, \quad (2.6.15)$$

onde $R(t_0) \equiv R_0 \equiv 1$ é fator de escala para o tempo hoje; $R(t_1)$ é o fator de escala para o tempo t_1 e z é o *redshift* observado, como já mencionado antes. Generalizando para um tempo qualquer t , temos:

$$z = \frac{1}{R(t)} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R(t)} = z + 1 \quad \text{ou} \quad R(t) = \frac{1}{z + 1}, \quad (2.6.16)$$

ou seja, o fator de escala $R(t)$ tem proporcionalidade inversa ao *redshift* z e vice-versa.

Desenvolvendo a [Equação 2.6.16](#) em termos da expansão em série de Taylor, temos:

$$\frac{1}{R(t)} = R(t)^{-1} = \frac{1}{R(t_0)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.6.17)$$

Considerando apenas os três primeiros termos da expansão:

$$\frac{1}{R(t)} \approx \frac{1}{R(t_0)} + \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2, \quad (2.6.18)$$

desenvolvendo o segundo e terceiro termos do lado direito da [Equação 2.6.18](#):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) = -R^{-2} \dot{R} = -\frac{H}{R} \quad (2.6.19)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{d}{dt} (-R^{-2} \dot{R}) = \frac{2}{R^3} \dot{R}^2 - \frac{\ddot{R}}{R^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^3} \left(\frac{2}{R} \right) - \frac{\ddot{R}}{R^2} \left(\frac{\dot{R}^2}{\dot{R}^2} \right) \\ &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left(\frac{2}{R} - \frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2} \right) = H^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2} \right) = \frac{H^2}{R} \left(2 - \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Podemos reescrever em termos do parâmetro desaceleração ([Equação 2.5.45](#)). Assim, a expressão da [Equação 2.6.20](#) torna-se:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{H^2}{R} \left(2 - \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right) = \frac{H^2}{R} (2 + q(t)). \quad (2.6.21)$$

Daí, finalmente, podemos reescrever a [Equação 2.6.18](#) em termos do parâmetro desaceleração e do parâmetro de Hubble:

$$\frac{1}{R(t)} \approx 1 - H_0 (t-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t-t_0)^2, \quad (2.6.22)$$

com: $R_0 = 1$. Dessa maneira, combinando a [Equação 2.6.22](#) e [Equação 2.6.16](#), podemos expressar o *redshift* z observado de um fonte por:

$$z \approx -H_0 (t-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t-t_0)^2, \quad (2.6.23)$$

ainda, podemos expressar na notação de *lookback time*¹⁴ ([RYDEN, 2017e](#); [LIMA, 2018](#)):

$$z \approx H_0 (t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t)^2. \quad (2.6.24)$$

Invertendo a [Equação 2.6.24](#) podemos também expressar o tempo de *lookback time* em termos de *redshift* z (demonstrado na [subseção B.1.2](#)):

$$t_0 - t \approx H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 \right]. \quad (2.6.25)$$

2.7 Distâncias em Cosmologia

Na astronomia, há diversos tipos de distâncias, métodos e maneiras de medi-las. Na [subseção 2.5.1](#), foi mostrado o sistema de coordenadas comóveis, sistema este que se move

¹⁴ *Lookback time* é definido como sendo a diferença entre a idade Universo hoje t_0 e a idade para certo *redshift* z de quando a luz foi emitida t , ou seja: $t_L = t_0 - t$.

junto com a expansão, qualquer ponto situado numa certa posição dele, fica fixo e evolui com a medição do tempo próprio, descrito pela métrica FLRW. Em astronomia, normalmente medidas astronômicas de distâncias e outras, são obtidas indiretamente. Para objetos astronômicos distantes, em termos gerais, temos apenas sua luz como informação e por um tempo limitado. E para a obtenção destes parâmetros cosmológicos, o estudo do Universo em altos *redshift* se dá a partir de medidas realizadas por indicadores secundários de distâncias. Estas medidas, geralmente são influenciadas pelas calibrações realizadas por métodos locais de medidas de distâncias. Estes são chamados de indicadores primários de distância e conseguem realizar medidas apenas em baixos *redshift*, onde os efeitos de curvaturas são desprezíveis (ROOS, 2015c; COLES; LUCCHIN, 2002a). Por outro lado, a descrição dos tipos de distâncias em cosmologia sob os aspectos do Universo em expansão também é importante. Nesta seção iremos abordar alguns destes tipos, além de alguns métodos de medir distâncias.

2.7.1 Distância Comóvel

Como vimos na subseção 2.5.1 a *distância comóvel*, χ^{15} , é a distância física entre dois diferentes eventos que estejam em repouso entre si (observadores comóveis) com relação a expansão do espaço-tempo (o Universo), a exemplo de um observador localizado em A e um objeto astronômico localizado em B (a galáxia) se a expansão do espaço-tempo entre eles for nula. Vimos anteriormente na seção 2.6 que a posição comóvel de um objeto astronômico localizado em $r = r_1$ é dada por (ROOS, 2015c; COLES; LUCCHIN, 2002b; RYDEN, 2017g; HARRISON, 2000; WEINBERG, 1972; WEINBERG, 2008; CARROLL; OSTLIE, 2007):

$$\chi(r_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (2.7.1)$$

onde $t_1 \equiv t$ é o tempo de emissão da radiação na localização do objeto astronômico; enquanto que t_0 é o tempo de detecção pelo observador. Daí, usando a Equação 2.7.1 e a Equação 2.6.16, podemos reescrever:

$$\chi(r_1) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} \frac{\dot{R}}{\dot{R}} = \int_{R(t)}^{R_0} \frac{cdR}{R(t)^2 \dot{R}/R}, \quad (2.7.2)$$

onde $dt = dR/(dR/dt)$. Como $1/R(t) = 1+z$, $dR = -dz/(1+z)^2$ e $\dot{R}/R \equiv H(t)^{16}$, dessa forma, temos que a distância comóvel em termos do *redshift* é dada por:

$$\chi(r_1) = \int_{R=\frac{1}{1+z}}^{R_0=1} \frac{cdR}{R(t)^2 \dot{R}/R} = - \int_{z=z}^{z=0} \frac{cdz}{H(z)} = - \frac{1}{H_0} \int_z^0 \frac{cdz}{E(z)^{1/2}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}}, \quad (2.7.3a)$$

$$\chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}}, \quad (2.7.3b)$$

onde $H(z) = H_0 E(z)^{1/2}$, sendo que no modelo padrão atual $E(z) = [\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4]$ é a soma dos parâmetros de densidade para um tempo t .

¹⁵ O χ é equivalente à \bar{r}_1 visto na subseção 2.5.1.

¹⁶ $H(t) = H(z) = H(R)$, uma vez que R tem dependência com t e pode ser reescrito em função de z .

2.7.2 Distância Própria

A *distância própria*, d_p , isto é, a distância física entre dois observadores levando-se em conta a expansão do espaço-tempo, a exemplo de um observador localizado em A e um objeto astronômico localizado em B (a galáxia) - já discutido anteriormente na [seção 2.6](#) e [subseção 2.7.1](#)-, é igual ao comprimento espacial geodésico com o fator de escala associado. Como já explicitado antes na [seção 2.6](#), é adotada a métrica FLRW, daí (ROOS, 2015c; COLES; LUCCHIN, 2002b; RYDEN, 2017g; RYDEN, 2017e; HARRISON, 2000; WEINBERG, 1972; WEINBERG, 2008; CARROLL; OSTLIE, 2007):

$$ds = \sqrt{g_{rr}}dr, \quad d_p = \int ds. \quad (2.7.4)$$

Assim,

$$d_p(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{rr}}dr = R(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t)\chi(r_1), \quad (2.7.5)$$

onde $\chi(r_1)$ é a *distância comóvel*. Trata-se de um sistema de coordenadas localizado na posição r_1 que se move com a fonte durante a expansão do espaço-tempo, como já referido antes. A integral dada na [Equação 2.7.5](#) tem solução do tipo (ver [Apêndice B](#)):

$$\chi(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\text{arc sen}(\sqrt{k}r_1)}{\sqrt{k}}, \quad (2.7.6)$$

dessa maneira,

$$\chi(r_1) = \begin{cases} r_1, & \text{se } (k = 0), \\ \text{arc sinh}(r_1), & \text{se } (k = -1), \\ \text{arc sen}(r_1), & \text{se } (k = 1), \end{cases} \quad (2.7.7)$$

ou seja, a distância própria do observador até o objeto astronômico (em coordenada comóvel) tem dependência do fator de escala.

Por outro lado, a distância própria, para observadores em t_0 e o objeto astronômico emitindo no tempo t , ainda pode ser expressada por

$$d_p(t_0) = R(t_0)\chi(r_1) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}. \quad (2.7.8)$$

Pela discussão realizada na [seção 2.6](#), reescrevemos a [Equação 2.7.8](#) por:

$$d_p(t_0) = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} \approx c(t_0 - t) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t)^2. \quad (2.7.9)$$

Ainda, a partir da [Equação 2.6.25](#) podemos expressá-la em termos do parâmetro de desaceleração e *redshift*:

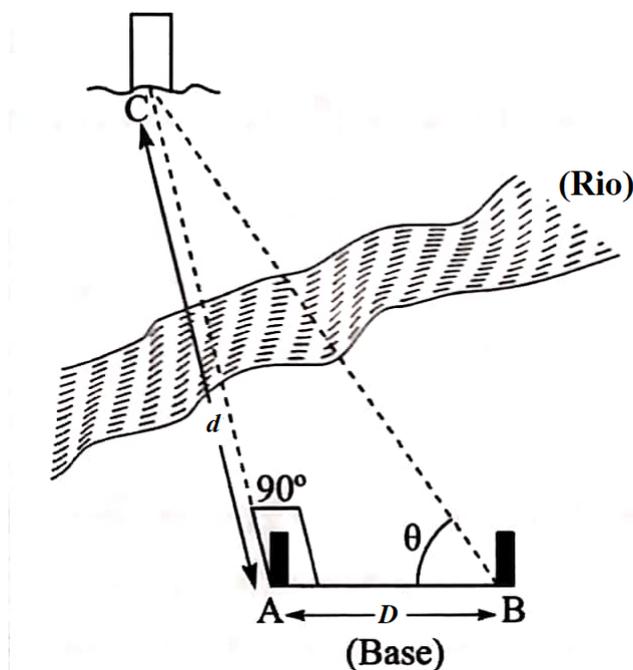
$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 \right] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2} = \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z \right], \quad (2.7.10)$$

para $z \ll 1$.

2.7.3 Método de Triangulação e Paralaxe Estelar

O método da triangulação para medidas de distâncias é muito simples, ele consiste em poder medir distâncias grandes¹⁷ e a pontos inacessíveis, por meio de uma distância base conhecida e usando um instrumento que possa medir ângulos (a exemplo de um teodolito: instrumento que mede ângulos horizontais e verticais), fornecendo o ângulo entre a direção de mira e a base. A Figura 2.7.1 fornece uma esquematização, por exemplo, de como poderia-se aplicar o método para medir uma distância, d , entre o ponto A até o ponto C (que é inacessível por estar situado no outro lado de um rio). A distância entre os pontos A e B é a distância de base, D (NUSSENZVEIG, 2013; FILHO; SARAIVA, 2014b). Assim, para determinar uma distância

Figura 2.7.1 – Determinação de distâncias a partir do método de triangulação.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2013).

qualquer é necessário conhecer a distância de base e os ângulos dos vértices correlacionados, fazendo um dos ângulos igual a 90° , podemos determinar por meio da relação:

$$d = D \operatorname{tg}(\theta), \quad (2.7.11)$$

com θ sendo o outro ângulo e $\theta < 90^\circ$. Se esta distância for muito grande o ângulo θ será muito próximo de 90° e conseqüentemente pequenos erros nas medições de θ podem resultar em grandes discrepâncias entre os valores medidos e os valores reais das distâncias.

Já o método da paralaxe estelar é uma extrapolação da triangulação. Neste caso, a medida de base, D , é obtida por meio do movimento orbital da Terra em torno do Sol num intervalo de

¹⁷ Distâncias grandes (a nível local), mas que permita instrumentos medir os dois ângulos entre uma distância de base de referência e a direção de mira.

tempo de seis meses. Daí, a relação para a paralaxe é dada por:

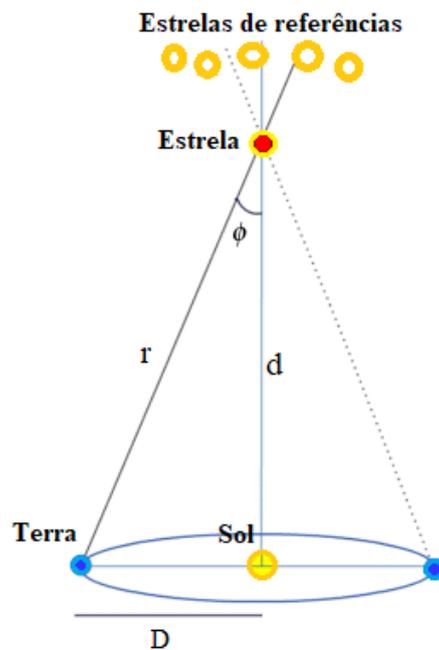
$$d = \frac{D}{\text{tg}(\phi)}, \quad (2.7.12)$$

onde d é a distancia até a estrela ou objeto astronômicos de interesse; $D = 1 \text{ U.A.}$ é o raio médio da orbita da Terra em torno do Sol; ϕ é o ângulo de separação subentendido entre o raio orbital da Terra em torno do Sol. Neste caso, o ângulo é muito pequeno ($\text{tg}(\phi) \simeq \phi$ em radianos), assim a Equação 2.7.12 pode ser reescrita como

$$\phi(\text{rad}) = \frac{D}{d}. \quad (2.7.13)$$

A Figura 2.7.2 mostra uma esquematização mais detalhada da paralaxe estelar. As medidas de

Figura 2.7.2 – Esquematização da paralaxe estelar. A Terra se move em orbita em torno Sol e uma estrela mais próxima se desloca com relação a um fundo com estrelas mais distantes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

distâncias por paralaxe na astronomia só é usada para as estrelas mais próximas da Terra. Para estrelas mais distantes é necessário utilizar outros métodos mais precisos, pelo fato de ângulos pequenos não poderem ser medidos com precisão. No entanto, o método de paralaxe é utilizado para calibrar outros métodos de distâncias.

2.7.4 Distância de Luminosidade

Para distâncias astronômicas relativamente próximas, as mesmas normalmente são calculadas a partir de medidas de luminosidade. Na consideração de um espaço euclidiano, um objeto astronômico de fonte luminosa, uma medida de seu fluxo pode-se associar com a sua

luminosidade absoluta (SCHUTZ, 2009a). Daí:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.7.14)$$

onde: L é a luminosidade absoluta, F é o fluxo medido e d é a própria distância do observador até o objeto astronômico em questão.

A distância de luminosidade, d_L , é definida a partir da Equação 2.7.14. Dessa forma:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}, \quad (2.7.15)$$

onde d_L é a distância de luminosidade, que é a distância própria do observador até o objeto astronômico em questão, já mencionado anteriormente. No entanto, supondo que o Universo seja descrito pela métrica FLRW (ver subseção 2.4.3), a descrição mais completa leva-se em consideração o tipo de geometria e a expansão do Universo (RYDEN, 2017e). Assim,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) [dr^2 + S_k^2(r) d\Omega^2], \quad (2.7.16)$$

com

$$S_k(r) = \begin{cases} \mathcal{R}_0 \sin(r/\mathcal{R}_0) & (k = +1) \\ r & (k = 0) \\ \mathcal{R}_0 \sinh(r/\mathcal{R}_0) & (k = -1) \end{cases} \quad (2.7.17)$$

onde \mathcal{R}_0 é o raio “fictício” da esfera (ver representação na Figura 2.7.3). Se o observador encontra-se na origem, em $t = t_0$, ele vê a luz emitida por uma fonte (uma vela padrão) no tempo $t = t_1$. Os fótons que foram emitidos em t_1 , no momento, estão em t_0 espalhados sobre uma esfera de raio próprio $d_p(t_0) = R_0 r = r$ e numa superfície própria de área $A_p(t_0)$. Para um Universo de geometria pseudo-euclidiana a distribuição de área própria é dada por

$$A_p(t_0) = 4\pi d_p^2(t_0) = 4\pi r^2. \quad (2.7.18)$$

De modo geral,

$$A_p(t_0) = 4\pi S_k^2(r). \quad (2.7.19)$$

Se $k = 1$, a curvatura é positiva e: $A_p(t_0) < 4\pi r^2$. Caso contrário, $k = -1$, a curvatura é negativa e agora temos: $A_p(t_0) > 4\pi r^2$.

Por outro lado, o fóton que foi emitido no instante t_1 possui energia $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$. Vimos na seção 2.6 que

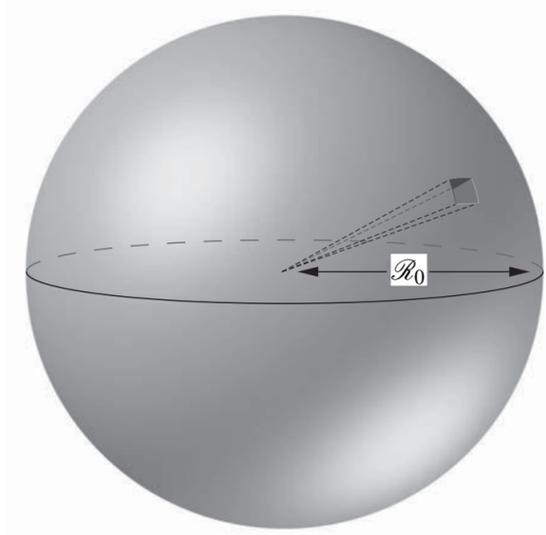
$$\lambda_0 = \lambda_1 \frac{R_0}{R} = (1+z)\lambda_1, \quad (2.7.20)$$

onde $R_0 = 1$ e $R = R(t = t_1)$. Então, a energia medida em t_0 será:

$$E_0 = \frac{E_1}{1+z}. \quad (2.7.21)$$

A expansão do Universo modifica a quantidade de energia medida, assim como o intervalo de tempo entre dois fótons que foram emitidos em t_1 e posteriormente detectados em t_0 . A distância

Figura 2.7.3 – Representação de uma esfera “fictícia” com raio \mathcal{R}_0 , onde o área aumenta com o quadrado da distância e fluxo diminui na mesma taxa.



Fonte: Adaptada de Liddle (2015a).

própria entre o intervalo de tempo destes fótons na emissão (δt_1) é $c(\delta t_1)$. Enquanto que, a distância própria na observações dos fótons em t_0 é de $c\delta t_1(1+z)$. E o intervalo de tempo será $\delta t_0 = \delta t_1(1+z)$. A relação entre o fluxo F observado e luminosidade L (potência) passa a ter a seguinte característica:

$$F = \frac{E_0}{\delta t_0} = \frac{\left(\frac{E_1}{1+z}\right)}{\delta t_1(1+z)} = \frac{E_1}{\delta t_1} = \frac{L}{4\pi S_k^2(r)(1+z)^2}. \quad (2.7.22)$$

Dessa forma, agora a distância de luminosidade possui uma relação com o *redshift* z :

$$d_L = S_k(r)(1+z), \quad (2.7.23)$$

assumindo uma geometria plana ($k=0$), temos: $S_k(r) = r$ e a relação entre a distância própria e distância de luminosidade é dada por:

$$d_L = r(1+z) = d_p(t_0)(1+z), \quad (2.7.24)$$

quando $z \approx$ pequeno: $d_L \simeq d_p(t_0)$. Neste caso, da Equação 2.7.10, podemos expressar:

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right) (1+z) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right). \quad (2.7.25)$$

O cálculo de distâncias de luminosidade ou diâmetro angular exige a necessidade de sabermos a coordenada radial. O cálculo da coordenada radial $r(z)$ de uma fonte observada hoje num *redshift* z é obtido por (WEINBERG, 2008; SCOLNIC *et al.*, 2018)

$$r(z) = S \left[\int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \right], \quad (2.7.26)$$

onde

$$S[y] \equiv \begin{cases} \text{sen } y & k = +1 \\ y & k = 0 \\ \text{senh } y & k = -1 \end{cases}. \quad (2.7.27)$$

De modo semelhante ao que foi feito na [subseção 2.7.1](#), $r(z)$ pode ser escrito com dependência de uma integral avaliada no *redshift*, de forma que:

$$r(z) = S \left[\int_0^z \frac{dz}{R_0 H(z)} \right]. \quad (2.7.28)$$

Uma vez que, vimos:

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\text{arc sen}(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}}, \quad (2.7.29)$$

ou seja,

$$r(z) = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen} \left(\frac{\sqrt{k}c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}} \right). \quad (2.7.30)$$

Sendo $\Omega_{k0} \equiv -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$, podemos expressar $R_0 H_0$ em termos de Ω_{k0} para obter:

$$R_0 r(z) = \frac{c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \text{senh} \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}} \right], \quad (2.7.31)$$

onde $E(z)^{1/2} \equiv H(z)/H_0$. Esta é forma geral para incluir todos os valores de curvatura. Se $\Omega_{k0} = 0$, a geometria plana é recuperada. Mas, se $\Omega_{k0} < 0$, podemos fazer $\text{senh}(ix) = \text{isen}(x)$. Com isso, a distância de luminosidade pode ser escrita como:

$$d_L(z) = R_0 r(z)(1+z) = \frac{(1+z)c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2}} \text{senh} \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}} \right]. \quad (2.7.32)$$

No modelo Λ CDM, $E(z)^{1/2}$ é obtido por:

$$E(z)^{1/2} = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{r0})(1+z)^2}. \quad (2.7.33)$$

Para $k = 0$, implica em $\Omega_{k0} = 0$ e a distância de luminosidade é escrita por:

$$d_L(z) = R_0 r(z)(1+z) = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}}, \quad (2.7.34)$$

com: $E(z)^{1/2} = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4}$.

2.7.5 Distância de Diâmetro Angular

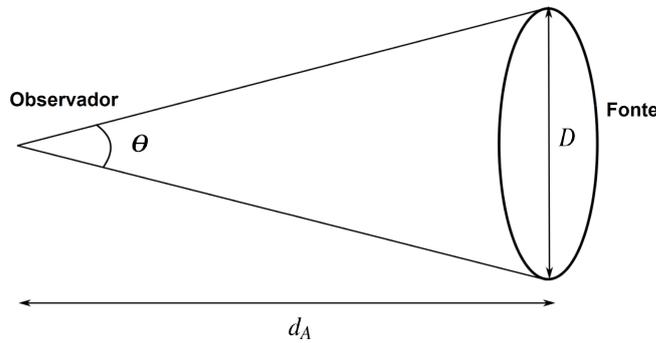
A distância de luminosidade não é única medida de distância que pode ser obtida a partir de observações de propriedades de objetos astronômicos (RYDEN, 2017e). A Distância de Diâmetro Angular (DDA), d_A , também é obtida de propriedades observacionais. Ela está

associada ao comprimento intrínseco dos objetos astrofísicos e sua definição é baseada na geometria euclidiana, com a esquematização representada na [Figura 2.7.4](#), é dada por

$$d_A \equiv \frac{D}{\theta}, \quad (2.7.35)$$

sendo D o comprimento físico; d_A a distância de luminosidade do observador até a fonte e θ é o ângulo medido correlacionado ao comprimento da fonte (com $\theta \ll 1$ rad), ou seja, a fonte localizada na coordenada r e emitindo luz no tempo t_1 é observada pelo ângulo θ que se estende por uma distância D igual a $R(t_1)r\theta$ ([MAKLER, 2019](#); [CARROLL; OSTLIE, 2007](#)). Dessa

Figura 2.7.4 – Representação esquemática para a distância de diâmetro angular.



Fonte: Adaptada de [Makler \(2019\)](#).

forma,

$$d_A = R(t_1)r. \quad (2.7.36)$$

Comparando a [Equação 2.7.36](#) com a [Equação 2.7.24](#) e usando [Equação 2.6.16](#) podemos ver que a razão entre a DDA e a distância de luminosidade tem dependência do *redshift* de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{d_A}{d_L} = (1+z)^{-2}. \quad (2.7.37)$$

Assim, a partir da [Equação 2.7.32](#) podemos reescrever a DDA, em termos da coordenada radial, por:

$$d_A(z) = \frac{c}{H_0 \Omega_{k0}^{1/2} (1+z)} \sinh \left[\Omega_{k0}^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}} \right]. \quad (2.7.38)$$

Daí, se comparar a [Equação 2.7.32](#) e a [Equação 2.7.38](#) é recuperada a [Equação 2.7.37](#). Esta relação é denominada de *dualidade de distâncias cósmicas*:

$$\frac{d_L}{d_A(1+z)^2} = 1. \quad (2.7.39)$$

Para $z \approx$ pequeno ($z \ll 1$), espera-se que $d_L \simeq d_A \simeq d_p(t_0)$. Neste caso, análogo à [Equação 2.7.25](#), podemos ainda expressar por:

$$d_A \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{3+q_0}{2} z \right). \quad (2.7.40)$$

2.7.6 Módulo de Distância

A relação de *magnitude aparente*¹⁸, m , em função do brilho aparente, F , é definida por:

$$m = -2,5 \log F + \text{constante}, \quad (2.7.41)$$

com F sendo o fluxo. Por outro lado, a *magnitude absoluta*¹⁹, M , é definida como a magnitude teórica que a estrela (ou um objeto astronômico) teria se estivesse a 10 parsecs (pc) de distância de nós e é dada a partir da seguinte relação (NĂSTASE, 2019b; ROOS, 2015c; RYDEN, 2017e):

$$M = -2,5 \log[F(10\text{pc})] + \text{constante}. \quad (2.7.42)$$

A diferença entre a magnitude aparente e a absoluta é obtida por:

$$m - M = -2,5 \log[F(d_L)] + 2,5 \log[F(10\text{pc})] \quad (2.7.43)$$

$$m - M = -2,5 \log \frac{F(d_L)}{F(10\text{pc})}, \quad (2.7.44)$$

como

$$\frac{F(d_L)}{F(10\text{pc})} = \frac{L/4\pi d_L^2}{L/4\pi(10\text{pc})^2} = \frac{(10\text{pc})^2}{d_L^2} = \frac{100\text{pc}^2}{d_L^2}, \quad (2.7.45)$$

assim,

$$m - M = -2,5 \log \frac{100\text{pc}^2}{d_L^2} = -2,5 \log \left[\frac{10\text{pc}}{d_L} \right]^2 \quad (2.7.46)$$

$$m - M = -5 \log \left[\frac{10\text{pc}}{d_L} \right] = -5 \log(10\text{pc}) + 5 \log(d_L) \quad (2.7.47)$$

ou seja, podemos reescrever na forma:

$$m - M = 5 \log(d_L) - 5 \quad (2.7.48)$$

ou

$$m - M = 5 \log(d_L) - 5 + A_b, \quad (2.7.49)$$

em que A_b representa a absorção em magnitudes, quando existente. Estas duas últimas equações são conhecidas como equações do *módulo de distância*. Simplificando a [Equação 2.7.48](#) e reescrevendo em termos de d_L , o cálculo de distância é dado por:

$$\frac{m - M + 5}{5} = \log(d_L) \quad (2.7.50)$$

$$10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\log(d_L)} \quad (2.7.51)$$

$$d_L = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \quad (2.7.52)$$

onde d_L é a distância de luminosidade e é dada em unidades de pc.

¹⁸ Não confundir com a massa m , pois estará claro no contexto.

¹⁹ Não confundir com a massa M , pois estará claro no contexto.

COSMOLOGIA COM INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO DO UNIVERSO

“Se, a princípio, a ideia não é absurda, então não há esperança para ela.”
(Albert Einstein)

Neste capítulo, descreveremos alguns dos problemas do modelo padrão (Λ CDM), a exemplo do problema da constante cosmológica e coincidência cósmica. Abordaremos as análises estatísticas e os dados usados, além da descrição matemática para o modelo de interação do setor escuro do Universo e alguns modelos específicos. Por último, abordaremos a metodologia usada para construir regiões de sobreposições.

3.1 Problemas do Modelo Λ CDM

Na literatura, o modelo Λ CDM é considerado o modelo padrão da cosmologia, tendo como alicerce pilares básicos com aspectos observacionais e também teóricos. Observacionalmente ele consegue descrever de modo satisfatório, a expansão do Universo de forma acelerada, a nucleossíntese primordial, assim como a radiação cósmica de fundo etc.

Por outro lado, apesar de possuir enorme sucesso observacional, o modelo apresenta alguns problemas ou comportamentos estranhos. Entre eles, o problema da constante cosmológica e coincidência cósmica (ELLIS *et al.*, 2011; WEINBERG, 1989; SAMI, 2009; VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014).

A constante cosmológica, com representação dada por Λ , é a candidata mais simples para ser a componente de energia escura. Como já mencionamos no capítulo anterior, ela foi implementada por Einstein no primeiro modelo cosmológico de Universo. Ela está associada aos estados de vácuos quânticos existente no Universo. Do ponto de vista observacional, a densidade

de energia de vácuo (associado a Λ) tem valor observacional de

$$\rho_{\Lambda} \simeq 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (3.1.1)$$

Por outro lado, o valor associado aos campos quânticos, descrito por osciladores com massa m , por meio da teoria quântica é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{\text{vac}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2} \simeq \frac{k_{\text{max}}^4}{16\pi^2} \simeq 2 \times 10^{71} \text{GeV}^4, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

resultando numa diferença em torno de 118 vezes em ordem de grandezas, a maior diferença encontrada na física.

O problema da coincidência cósmica é relacionado ao fato da densidade de energia da matéria ser da mesma ordem de grandeza que a densidade de energia da energia escura para tempos atuais. Em termo de densidades de energia totais, elas se relacionam por

$$\frac{\rho_m}{\rho_{\Lambda}} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}} R^{-3}. \quad (3.1.3)$$

Do ponto de vista temporal cósmico, este valor foi adquirido na história recente do Universo, já que tem a dependência com o fator de escala. No modelo Λ CDM é previsto que os fluidos cósmicos não se interagem entre si, isto é, possui dinâmicas independentes. No livro clássico [D’Inverno \(1992\)](#) o autor menciona “sempre que encontramos coincidências em uma teoria física, devemos suspeitar muito da teoria”. E, de fato, não há motivos para que a equivalência tenha acontecido somente agora. Isso justifica e instiga a investigar modelos alternativos, já que na física não gostamos de coincidências.

Devido a esses e inúmeros outros problemas com o modelo padrão (Λ CDM), há diversas abordagens e modelos alternativos na literatura na tentativa de descrever melhor a natureza da energia escura, já que esta, do ponto de vista da física de partículas é totalmente desconhecida.

3.2 Análise Estatística

3.2.1 Qui-quadrado (χ^2)

Na consideração de um sistema com N variáveis aleatórias x_i , definimos χ^2 como sendo a soma dos quadrados das distâncias, d_i , relativo aos ajustes dos pontos do conjunto de dados, por meio do método dos mínimos quadrados (MMQ) ([BONAMENTE, 2017](#); [BEVINGTON; ROBINSON, 2003](#); [VUOLO, 1996](#); [HELENE; VANIN, 1991](#); [TAYLOR, 1997](#)),

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{\sigma_i^2} \right\}, \quad (3.2.1)$$

onde: $y(x_i)$ é o valor do cálculo de y relativo ao ponto x_i . Este é o valor verdadeiro (ou teórico) para y . Enquanto que, y_i é um valor experimental (ou observacional) em torno de $y(x_i)$, com desvio padrão associado de σ_i .

3.2.2 Função Likelihood

A função distribuição de densidade de probabilidade (FDDP), ou ainda, denominada de função *likelihood*¹, fornece a melhor estimativa para um conjunto de parâmetros numa base de dados (VUOLO, 1996; HELENE; VANIN, 1991).

$$\mathcal{L} \propto \exp \left[\frac{-\chi^2}{2} \right]. \quad (3.2.2)$$

3.2.3 Código CLASS e MontePython

A análise se baseia no código CLASS² (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011) e no código de MontePython³ pelo o método MCMC (AUDREN *et al.*, 2013). O primeiro refere-se ao contexto cosmológico⁴, enquanto que, o segundo refere-se a parte de análise estatística. Para os modelos Λ CDM e ω CDM, serão utilizados os códigos sem nenhuma modificação. Já para modelos de interação do setor escuro (os IDEMs) serão usados códigos modificados, para obter numericamente as soluções do *background* para cada modelo. Para todas as nossas cadeias, na análise MCMC, exigimos que o parâmetro de convergência Gelman-Rubin atenda à condição $\hat{R} - 1 < 0.01$ (VATS; KNUDSON, 2018; GELMAN; RUBIN, 1992). Outras informações sobre como utilizar o MontePython pode ser vista em Brinckmann e Lesgourgues (2018) ou no link <<http://research.iac.es/congreso/cosmo2017//media/montepython.pdf>>.

3.2.3.1 Método Markov Chain Monte Carlo

O método MCMC é uma integração de Monte Carlo⁵ via cadeias Markov⁶. Existem diversos algoritmos de MCMC, dentre eles, temos o algoritmo de *Metropolis-Hastings* (METROPOLIS *et al.*, 1953; HASTINGS, 1970). Posteriormente, GEMAN e GEMAN (1984) apresentou um caso especial para o algoritmo *Metropolis-Hastings* (BROOKS *et al.*, 2011; GEMAN; GEMAN, 1984; ANDRIEU *et al.*, 2003; RAVENZWAAIJ; CASSEY; BROWN, 2018).

3.2.3.1.1 Algoritmo de *Metropolis-Hastings*

O algoritmo de *Metropolis-Hastings* para o caso em questão leva em conta a estatística bayesiana. Pelo *teorema de bayes*, temos (PADILLA *et al.*, 2019a; SPEAGLE, 2019; LEWIS, 2013; HASTINGS, 1970; METROPOLIS *et al.*, 1953; GEMAN; GEMAN, 1984; GELMAN; RUBIN, 1992; RAVENZWAAIJ; CASSEY; BROWN, 2018; BROOKS *et al.*, 2011;

¹ Na literatura também pode ser encontrada por *verossimilhança*.

² Toda documentação CLASS está disponível em: <<http://class-code.net/>>.

³ Toda documentação do código MontePython está disponível em <https://github.com/baudren/montepython_public> e <https://github.com/brinckmann/montepython_public>.

⁴ Nesta parte utiliza-se as equações de *background* referente a cada modelo cosmológico de estudo (exemplo: Λ CDM, IDEM1 etc).

⁵ Monte Carlo: Geração/amostragem aleatória de números (amostra de uma distribuição).

⁶ Markov Chain: Cadeia de números, em que cada número depende do número anterior.

MITZENMACHER; UPFAL, 2005; ANDRIEU *et al.*, 2003; BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2018; CHRISTENSEN *et al.*, 2001; RIEMER-SØRENSEN, 2017; VATS; KNUDSON, 2018; SHARMA, 2017; BOLMER, 2017):

$$P(\theta | D, M) = \frac{P(D | \theta, M)P(\theta)}{P(D)}, \quad (\text{Teorema de Bayes}) \quad (3.2.3)$$

em que $P(\theta | D, M)$ é conhecida como a probabilidade *posterior* do modelo (representa a probabilidade condicional de θ devido o evento ocorrido D, M); M representa a hipótese ou modelo, D o conjunto de dados e θ é o parâmetro paramétrico escolhido da referida hipótese/modelo. E a probabilidade do evento D é dada por

$$P(D) = \int_{\theta} P(x, \theta) d\theta. \quad (3.2.4)$$

Dado θ, D, M e uma distribuição proposta (nesse caso a Normal), o método é iniciado em $t = 0$ e com N interações:

- Passo 1: Encontrar θ_{t+1}

$$\theta_{t+1} = \text{Normal}(\theta_t, \sigma) \quad (3.2.5)$$

- Passo 2: Encontrar a razão a

$$a = \frac{P(\theta_{t+1} | D, M)}{P(\theta_t | D, M)} = \frac{\frac{P(D|\theta_{t+1},M)P(\theta_{t+1})}{P(D)}}{\frac{P(D|\theta_t,M)P(\theta_t)}{P(D)}} = \frac{\mathcal{L}(\theta_{t+1})P(\theta_{t+1})}{\mathcal{L}(\theta_t)P(\theta_t)}, \quad (3.2.6)$$

em que geralmente,

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_i l_i(\theta) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (3.2.7)$$

- Passo 3: Geração de θ_{t+1} de acordo com

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_{t+1}, & \text{se } a > 1; \\ \theta_t, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

- Passo 4: Incremente t e retorne ao passo 1.

3.2.3.1.2 Matriz de Informação de Fisher e Matriz Covariância

A Matriz de Informação de Fisher (MIF) é útil no processo de determinar incertezas dos parâmetros cosmológicos via análise estatística dos dados observacionais ou simulados. Esta matriz corresponde a 1/2 da matriz Hessiana da função qui-quadrado (χ^2) (PAPATHANASIOU, 1993; KAGAN; LANDSMAN, 1999; TAYLOR, 1997; OLIVEIRA-FILHO; SARAIVA, 2004; BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2018; COE, 2009):

$$[\mathbf{F}]_{ij} \equiv F_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_i \partial p_j} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_i \partial p_j}, \quad (3.2.9)$$

sendo as derivadas parciais relativo aos parâmetros do modelo. Esta matriz é relacionada com a matriz de covariância por meio

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.2.10)$$

A matriz de covariância possui em sua diagonal a variância de cada um dos parâmetros $\sigma_{p_i}^2$ e fora da diagonal corresponde à covariância dos pares $\sigma_{p_i p_j}$, de modo que, na forma bi-paramétrica é expressada por

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{p_1}^2 & \sigma_{p_1 p_2} \\ \sigma_{p_1 p_2} & \sigma_{p_2}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

3.3 Dados Observacionais

Nesta seção, apresentaremos os dados observacionais que serão utilizados nos modelos de interação no setor escuro, quanto dos modelos Λ CDM e ω CDM. As *Likelihoods* e χ^2 em termos gerais para os dados são calculados utilizando as relações [Equação 3.2.1](#) e [Equação 3.2.2](#).

3.3.1 Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia)

As SNe Ia são objetos astronômicos de extrema importância na astronomia. Elas são consideradas velas padrão, por possuírem brilhos característicos e intensos. Em um contexto histórico, as SNe Ia foram de fundamental importância para a observação da expansão acelerada do Universo ([Planck Collaboration et al., 2020](#); [RIESS et al., 1998](#); [PERLMUTTER et al., 1998](#); [PERLMUTTER et al., 1999](#)). De modo geral, usando a [Equação 2.7.34](#) e as definições obtidas na [subseção 2.7.6](#) e definindo o módulo de distância por $\mu \equiv m - M$, podemos expressá-lo teoricamente por

$$\mu(z) = 5 \log \left(\frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)^{1/2}} \right) + 25, \quad (3.3.1)$$

em unidades de *Mpc*. Esta quantidade é fundamental na análise estatística de dados de SNe Ia. Em nosso trabalho, para os dados de SNe Ia, foi usado o módulo de distâncias de 1048 amostras Pantheon^{7,8,9}, que abrange o intervalo de *redshift*: $0.01 < z < 2.3$ ([SCOLNIC et al., 2018](#); [BETOULE et al., 2014](#)).

3.3.2 Cronômetros Cósmicos (CC)

Este conjunto de dados que chamaremos de cronômetros cósmicos (do inglês: *Cosmic Chronometers*), refere-se a dados que são independentes do modelo cosmológico, advindos de

⁷ Dados disponíveis em: <https://github.com/dscolnic/Pantheon>.

⁸ Dados disponível também na amostra de dados adicionada ao Monte Python https://github.com/brinckmann/montepython_public/tree/3.3/data/Pantheon.

⁹ Pantheon é uma amostra de dados de medidas contendo 1048 SNe Ia realizadas pelos trabalhos [Scolnic et al. \(2018\)](#) e [Betoule et al. \(2014\)](#).

medidas feitas em galáxias antigas. Em nosso trabalho, utilizamos 30 pontos entre $0.07 < z < 1.965$ apresentados na Tabela 3.3.1¹⁰, de acordo com Moresco *et al.* (2016).

Tabela 3.3.1 – Medidas de $H(z)$, com seus respectivos erros, para dados de CC.

z	$H(z)$	$\sigma_{H(z)}$	Ref.
0.07	69.0	19.6	Zhang <i>et al.</i> (2014)
0.09	69.0	12.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.12	68.6	26.2	Zhang <i>et al.</i> (2014)
0.17	83.0	8.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.179	75.0	4.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.199	75.0	5.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.2	72.9	29.6	Zhang <i>et al.</i> (2014)
0.27	77.0	14.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.28	88.8	36.6	Zhang <i>et al.</i> (2014)
0.352	83.0	14.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.3802	83.0	13.5	Moresco <i>et al.</i> (2016)
0.4	95.0	17.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
0.4004	77.0	10.2	Moresco <i>et al.</i> (2016)
0.4247	87.1	11.2	Moresco <i>et al.</i> (2016)
0.4497	92.8	12.9	Moresco <i>et al.</i> (2016)
0.4783	80.9	9.0	Moresco <i>et al.</i> (2016)
0.48	97.0	62.0	Stern <i>et al.</i> (2010)
0.593	104.0	13.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.68	92.0	8.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.781	105.0	12.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.875	125.0	17.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
0.88	90.0	40.0	Stern <i>et al.</i> (2010)
0.9	117.0	23.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.037	154.0	20.0	Moresco <i>et al.</i> (2012)
1.3	168.0	17.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.363	160.0	33.6	Moresco (2015)
1.43	177.0	18.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.53	140.0	14.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.75	202.0	40.0	Simon, Verde e Jimenez (2005)
1.965	186.0	50.4	Moresco (2015)

Fonte: Adaptada de Moresco *et al.* (2016).

3.3.3 Oscilações Acústicas de Bárions

O quarto conjunto de dados, são advindos das Oscilações Acústicas de Bárions (BAO)¹¹. Estas, trazem informações do Universo do pré-desacoplamento. Nos primeiros minutos do Universo, após a singularidade inicial, os primeiros prótons no Universo primordial interagem com os elétrons por (RYDEN, 2017d)

$$p + e^{-} \rightarrow H + \gamma. \quad (3.3.2)$$

¹⁰ Dados disponíveis também na amostra de dados adicionada ao Monte Python: <https://github.com/brinckmann/montepython_public/tree/3.3/data/cosmic_clocks>.

¹¹ Do inglês: *Baryon Acoustic Oscillations*.

No início, a reação no sentido da esquerda era mais favorecida, por conta, da escala de energia dos fótons, de modo que, o Universo passa a ser um sistema ionizado. Por outro lado, os fótons ainda interagiam com os elétrons por meio do espalhamento Thomson (BASSETT; HLOZEK, 2010). Nessa época, o Universo era opaco, pois a taxa de espalhamento era muito alta, fazendo com que o livre caminho médio dos fótons que foram espalhados fosse menor que o raio de Hubble. Esse acoplamento entre os fótons e os elétrons dá indicação que ambas componentes estavam em equilíbrio térmico, resultando em um fluido único de plasma ionizado.

Enquanto isso, na componente de matéria escura, ocorrem flutuações no campo gravitacional, pois esta já estava desacoplada por não ter interação eletromagnética, produzindo gradientes de pressão e gerando ondas sonoras no plasma.

Neste momento, os bárions, que estão acoplados aos fótons, começarão a oscilar. Esta onda no fluido de bárions e fótons começam a se propagar uma velocidade acústica do tipo (BASSETT; HLOZEK, 2010; EISENSTEIN; SEO; WHITE, 2007; CID *et al.*, 2019; PADILLA *et al.*, 2019b):

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad \text{com} \quad R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \propto \frac{\Omega_b}{1+z}. \quad (3.3.3)$$

Após o desacoplamento entre a componente de bárions e a componente de radiação, os fótons viajam livremente em uma escala característica, r_s , dada por:

$$r_s \equiv \int_0^{R_{drag}} \frac{c_s(R)}{HR^2} dR, \quad (3.3.4)$$

onde c_s , na Equação 3.3.4, corresponde à velocidade do som no plasma primordial composto de fótons e bárions. E essas ondas (após o desacoplamento) deixam de existir. No entanto, já deixaram marcas que permitem medições atualmente. No caso das componentes de bárions, as BAO, é quantificada por meio da média geométrica e definida por (EISENSTEIN *et al.*, 2005; CID *et al.*, 2019)

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 d_A^2(z) \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (3.3.5)$$

onde d_A é a DDA apresentada na subseção 2.7.5.

Neste trabalho, os dados de BAO são proveniente de Anderson *et al.* (2014), Ross *et al.* (2015) e Font-Ribera *et al.* (2014) e para *extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)*¹² são provenientes de Cuceu *et al.* (2019), Blomqvist *et al.* (2019) e Agathe *et al.* (2019).

3.4 Descrição Matemática para o Modelo de Interação

Nesta seção, apresentaremos o formalismo matemático para os modelos de interação de energia escura.

¹² Dados disponíveis na amostra de dados adicionada ao Monte Python: <https://github.com/brinckmann/montepython_public/tree/3.3/data/eBOSS_DR14_scans>.

3.4.1 Formalismo Geral

O nível de *background* do Universo está de acordo com o PC e possui distribuição espacial plana. Assim, o modelo de interação obedece a métrica FLRW (Equação 2.4.9), com ($k = 0$), e a lei de conservação (Equação 2.5.15). Aqui iremos definir $c \equiv 1$. Daí, a lei de conservação passa a ser reescrita por (MARTTENS *et al.*, 2019):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (3.4.1)$$

Assumindo que o conteúdo energético do Universo seja composto apenas por: radiação, bárions, matéria escura e energia escura, com subíndices representados por: r , b , c e x , respectivamente, os parâmetros da equação de estado são dados por: $\omega_r = 1/3$ (radiação), $\omega_b = 0$ (bárions), $\omega_c = 0$ (matéria escura) e $\omega_x = -1$ (energia escura), de acordo com a subseção 2.5.3.1¹³. Assim, a densidade de energia total pode ser reescrita por:

$$\rho = \rho_r + \rho_b + \rho_c + \rho_x; \quad P = P_r + P_x. \quad (3.4.2)$$

Da Equação 2.5.32 podemos reescrever em termos dos parâmetros de densidades:

$$\Omega_r + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_x = 1. \quad (3.4.3)$$

Vimos ainda (subseção 2.5.3.1) que a radiação e matéria (bárions) evoluem por:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad \implies \quad \rho_r = \rho_{r0}R^{-4}; \quad (3.4.4)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad \implies \quad \rho_b = \rho_{b0}R^{-3}. \quad (3.4.5)$$

No campo da física, a descrição de uma interação pode ser feita por meio da equação de Boltzmann (KREMER, 2014; DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (3.4.6)$$

sendo f uma função de distribuição e $C[f]$ representa todos os termos de colisão. Em geral, esse termo é descrito por seções de choque associadas a física de cada partícula.

No entanto, sendo a natureza do setor escuro desconhecida, não faria sentido físico escrever seções de choques para partículas do setor escuro. Uma forma alternativa, para descrever essa interação no setor escuro, seria assumir uma natureza fenomenológica por meio da derivada covariante do tensor momento-energia:

$$T_{c;v}^{\mu\nu} = -T_{x;v}^{\mu\nu} = Q^\mu, \quad (3.4.7)$$

onde Q^μ trata-se do quadrivetor e age como fonte do tensor momento-energia; enquanto que $T_c^{\mu\nu}$, $T_x^{\mu\nu}$ são tensores momento-energia para matéria escura e energia escura, respectivamente.

¹³ A matéria nessa seção representa a soma entre bárions e matéria escura. Isso, será explorado adiante.

Para o caso de um fluido perfeito, temos que as componentes espaciais da derivada covariante do tensor-momento energia são nulas, de modo que, o termo de interação no *background* é representando por uma função escalar e dada por (MARTTENS *et al.*, 2019; MARTTENS, 2017; MARTTENS *et al.*, 2020)

$$Q^\mu = (Q, \vec{0}). \quad (3.4.8)$$

Dessa forma, a conservação de energia do *background* torna-se

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -Q; \quad (3.4.9)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x(1 + \omega_x) = Q; \quad (3.4.10)$$

quando $\omega_x = -1$, temos: $\dot{\rho}_x = Q$. Aqui, podemos compreender as equações (3.4.9 – 3.4.10) como sendo transferência de energia entre as componentes do setor escuro. De modo que, a direção desse fluxo de energia depende do sinal de Q . Quando $Q > 0$, o processo da criação da matéria escura e energia escura é deteriorado. Já, quando $Q < 0$ acontece o oposto.

As interações que nos interessam possuem o termo de interação do tipo:

$$Q = 3H\gamma\mathcal{F}(\rho_c, \rho_x), \quad (3.4.11)$$

com γ sendo um parâmetro adimensional; e \mathcal{F} uma função real de ρ_c e ρ_x , possuindo uma dimensão de densidade de energia. Então, a Equação 3.4.9 e a Equação 3.4.10 transforma-se:

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c \left(\gamma \frac{\mathcal{F}}{\rho_c} + 1 \right) = 0; \quad (3.4.12)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x \left(1 + \omega_x - \gamma \frac{\mathcal{F}}{\rho_x} \right) = 0. \quad (3.4.13)$$

E uma vez que $\mathcal{F}(\rho_c, \rho_x)$ corresponde à uma função geral com dependência de ρ_c e ρ_x , as equações acima são acopladas. Para modelos com $\omega_x = -1$ a Equação 3.4.13 torna-se:

$$\dot{\rho}_x - 3\gamma H\mathcal{F} = 0. \quad (3.4.14)$$

Por outro lado, é conveniente rescrever a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura como sendo uma razão r :

$$r \equiv \frac{\rho_c}{\rho_x}. \quad (3.4.15)$$

De modo que, a derivada da Equação 3.4.15 com relação ao tempo cósmico t fornece:

$$\dot{r} = r \left(\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} - \frac{\dot{\rho}_x}{\rho_x} \right). \quad (3.4.16)$$

Combinando as equações (3.4.12 – 3.4.16) é obtida uma equação diferencial em termos de r :

$$\dot{r} + 3Hr \left(\gamma \mathcal{F} \frac{\rho_c + \rho_x}{\rho_c \rho_x} - \omega_x \right) = 0. \quad (3.4.17)$$

Quando existe uma solução analítica para $r = r(R)$, a [Equação 3.4.17](#) é usada para desacoplar a [Equação 3.4.12](#) e [Equação 3.4.13](#). Dessa forma, podemos encontrar soluções analíticas para ρ_c e ρ_x . No entanto, isto requer que seja feito

$$f(r) \equiv \mathcal{F} \frac{\rho_c + \rho_x}{\rho_c \rho_x}, \quad (3.4.18)$$

ou seja, $f(r)$ é uma função apenas de r . Em consequência, [Equação 3.4.18](#) o termo de interação passa a ser reescrito por

$$Q = 3H\gamma \frac{\rho_c \rho_x}{\rho_c + \rho_x} f(r). \quad (3.4.19)$$

De modo que, utilizando a definição [Equação 3.4.17](#) a [Equação 3.4.18](#) reescrevemos como

$$\dot{r} + 3Hr \left[\gamma f(r) - \omega_x \right] = 0. \quad (3.4.20)$$

Aqui, nosso interesse é na classe de modelos no qual a [Equação 3.4.20](#) possui solução analítica que depende apenas do fator de escala, isto é, para $r = r(R)$. Assim, a interação $\mathcal{F}(\rho_c, \rho_x)$ tem possibilidade de ser reescrita em termos do fator de escala e de somente uma das densidades de energia:

$$\mathcal{F} = \frac{f(r)}{1+r} \rho_c \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} = \frac{f(r)}{1+r^{-1}} \rho_x, \quad (3.4.21)$$

consequentemente as [Equação 3.4.12](#) e [Equação 3.4.13](#) de balanço de energia podem ser reescritas separadamente por:

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c \left(\gamma \frac{f(r)}{1+r} + 1 \right) = 0, \quad (3.4.22)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H\rho_x \left(1 + \omega_x - \gamma \frac{f(r)}{1+r^{-1}} \right) = 0. \quad (3.4.23)$$

A princípio, de acordo com [Yang, Pan e Barrow \(2018\)](#) a função $f(r)$ pode possuir características gerais, porém, aqui vamos assumir um tratamento no qual a interação é dado pela seguinte forma:

$$Q = 3H\gamma\rho_c^\alpha \rho_x^\beta (\rho_c + \rho_x)^\sigma, \quad (3.4.24)$$

de modo que, a relação $\alpha + \beta + \sigma = 1$ precisa ser satisfeita, por conta das unidades. A [Equação 3.4.24](#) corresponde a

$$f(r) = r^{\alpha-1} (r+1)^{\sigma+1}. \quad (3.4.25)$$

No caso em que σ seja um número inteiro, a [Equação 3.4.24](#) ainda pode ser obtida por meio de uma função $f(r)$ onde esta função, na verdade, trata-se de uma lei de potência e que pode ser derivada a partir da série binomial de Newton,

$$f(r) = r^{\alpha-1} \quad \text{quando} \quad \sigma = -1, \quad (3.4.26)$$

$$f(r) = \sum_{i=0}^{|\sigma+1|} \binom{|\sigma+1|}{i} r^{\alpha-1+i} \quad \text{quando} \quad \sigma \neq -1. \quad (3.4.27)$$

3.4.2 Descrição Unificada de Modelos de Interação do Setor Escuro

A classe desses modelos, com interação dada na [Equação 3.4.11](#), pode ser descrito de forma unificada, de modo que, torna-se possível combinar as componentes de matéria escura e energia escura em um único fluido conservativo. Esse novo fluido passa a ter a equação de estado descrita por

$$P_d = \omega_d(R) \rho_d, \quad (3.4.28)$$

sendo que subíndice d (de *dark*) corresponde a componente escura do fluido. As densidades de energia e pressão são as somas das componentes de energia escura e matéria escura,

$$\rho_d = \rho_c + \rho_x \quad \text{e} \quad P_d = P_c + P_x = P_x. \quad (3.4.29)$$

Ainda, essa densidade de energia pode ser reescrita em termos de r , com somente uma das densidades: ρ_c ou ρ_x ,

$$\rho_d = \left(\frac{1+r}{r} \right) \rho_c \quad \text{ou} \quad \rho_d = (1+r) \rho_x. \quad (3.4.30)$$

Da [Equação 3.4.29](#) e [Equação 3.4.30](#), podemos escrever ¹⁴:

$$P_d = \frac{\omega_x}{1+r} \rho_d, \quad (3.4.31)$$

sendo esta, uma relação geral. No entanto, a [Equação 3.4.28](#) só é válida se houver uma solução analítica para r em que dependa apenas do fator de escala R ,

$$\omega_d(R) = \frac{\omega_x}{1+r(R)}. \quad (3.4.32)$$

Deste modo, o fluido conservativo deve satisfazer a equação de conservação,

$$\dot{\rho}_d + 3H\rho_d \left[1 + \frac{\omega_x}{1+r(R)} \right] = 0. \quad (3.4.33)$$

Como a expansão de fundo do Universo, isto é, a taxa de expansão de Hubble, tem possibilidade de ser obtida por intermédio da equação de Friedmann, então:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_b + \rho_d), \quad (3.4.34)$$

com ρ_r e ρ_b sendo dada na [Equação 3.4.4](#) e [Equação 3.4.5](#), respectivamente. E ρ_d trata-se da solução da [Equação 3.4.33](#). Isso, permite usar somente a componente do fluido escuro unificado, sem a necessidade das componente de energia escura e matéria escura de modo separado.

¹⁴ Pois $P_x = \omega_x \rho_x = P_d$.

3.4.3 Modelos Específicos de Interação de Energia Escura

De modo geral, fazendo uso da [Equação 3.4.26](#) e [Equação 3.4.27](#), temos que a solução para [Equação 3.4.17](#) não pode ser tratada analiticamente, de modo que, de acordo com [Marttens et al. \(2019\)](#) e [Marttens \(2017\)](#) consideraremos alguns casos específicos no qual a solução pode ser encontrada. Nesta dissertação, serão estudados apenas os modelos IDEMs 1, 2 e 4. Os modelos IDEM 3 e IDEM 5 não serão avaliados neste trabalho, pois são extremamente sensíveis à interação.

3.4.3.1 IDEM 1: $f(r) = 1$

A função $f(r) = 1$ corresponde ao caso mais simples, onde a [Equação 3.4.26](#) tem $\alpha = \beta = 1$ e $\sigma = -1$, de modo que, o termo de interação é dado por

$$Q = 3H\gamma \frac{\rho_c \rho_x}{\rho_c + \rho_x}. \quad (3.4.35)$$

Esta interação, é amplamente conhecida na literatura, pois coincide com modelo de gás de *Chaplygin* generalizado. Alguns estudos sobre o gás de *Chaplygin* podem ser vistos em [Marttens et al. \(2017\)](#), [Wang et al. \(2013\)](#), [Amendola et al. \(2003\)](#) e [Bento, Bertolami e Sen \(2002\)](#). Usando essa interação, [Equação 3.4.35](#), a solução para a [Equação 3.4.20](#), é obtida por

$$r(R) = r_0 R^{-3(\gamma - \omega_x)}. \quad (3.4.36)$$

Fazendo uma suposição de que a interação em questão seja fraca, isto é, $|\gamma| < |\omega_x|$, $r(R)$ se comporta assintoticamente da mesma forma que o modelo Λ CDM, significa que $r(R) \rightarrow 0$ para o tempo futuro e diverge para o tempo longínquo do passado, sendo a matéria dominante sobre a energia escura no passado e energia escura dominante perante a matéria no tempo no futuro.

A solução de *background* das densidade de matéria escura e energia escura é obtida a partir das resoluções das [Equação 3.4.22](#) e [Equação 3.4.23](#),

$$\rho_c = \rho_{c0} R^{-3} \left(\frac{\Omega_{c0} + \Omega_{x0} R^{3(\gamma - \omega_x)}}{\Omega_{c0} + \Omega_{x0}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - \omega_x}}, \quad (3.4.37)$$

$$\rho_x = \rho_{x0} R^{-3(1 + \gamma - \omega_x)} \left(\frac{\Omega_{c0} + \Omega_{x0} R^{-3(\gamma - \omega_x)}}{\Omega_{c0} + \Omega_{x0}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - \omega_x}}, \quad (3.4.38)$$

onde a razão entre a [Equação 3.4.37](#) e [Equação 3.4.38](#) resulta na [Equação 3.4.36](#). Por outro lado, a densidade de energia em termos do fluido unificado tem solução por

$$\rho_d = \rho_{d0} \left(\frac{\Omega_{c0} + \Omega_{x0} R^{3(\gamma - \omega_x)}}{\Omega_{c0} + \Omega_{x0}} \right)^{\frac{\omega_x}{\omega_x - \gamma}} R^{-3}. \quad (3.4.39)$$

Deste modo, a equação de Friedmann em termos do parâmetro de Hubble pode ser reescrita por:

$$H^2 = H_0^2 \left[(\Omega_{c0} + \Omega_{x0}) \left(\frac{\Omega_{c0} + \Omega_{x0} R^{3(\gamma - \omega_x)}}{\Omega_{c0} + \Omega_{x0}} \right)^{\frac{\omega_x}{\omega_x - \gamma}} R^{-3} + \Omega_{b0} R^{-3} + \Omega_{r0} R^{-4} \right]. \quad (3.4.40)$$

Dessa forma, a dinâmica do *background* para este modelo está compreendida.

3.4.3.2 IDEM 2: $f(r) = r^{-1}$

A função $f(r) = \frac{1}{r}$ é o segundo caso a ser estudado. Este caso tem a [Equação 3.4.26](#) com $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\sigma = -1$. Deste modo, o termo de interação é dado pela expressão

$$Q = 3H\gamma \frac{\rho_x^2}{\rho_c + \rho_x}. \quad (3.4.41)$$

Usando essa interação, [Equação 3.4.41](#), a solução para a [Equação 3.4.20](#), é obtida por

$$r(R) = r_0 R^{3\omega_x} + \frac{\gamma}{\omega_x} (1 - R^{3\omega_x}). \quad (3.4.42)$$

Este caso fornece a seguinte situação: quando $\omega_x < 0$, no limite em que o fator de escala, $R(t)$, tende a infinito, $r(r)$ difere do modelo padrão, Λ CDM e do *IDEM 1*, no entanto, tende a um valor constante diferente de zero.

A solução de *background* das densidade de matéria escura e energia escura é obtida a partir das resoluções das [Equação 3.4.22](#) e [Equação 3.4.23](#), e neste caso temos:

$$\rho_c = \rho_{c0} R^{-3\left(1 + \frac{\omega_x^2}{\omega_x + \gamma}\right)} \left[\frac{\Omega_{x0}(\omega_x + \gamma) + (\Omega_{c0}\omega_x - \Omega_{x0}\gamma)R^{3\omega_x}}{(\Omega_{c0} + \Omega_{x0})\omega_x} \right]^{-\frac{\gamma}{\omega_x + \gamma}} \left[\Omega_{c0}R^{3\omega_x} + \Omega_{x0}\frac{\gamma}{\omega_x}(1 - R^{3\omega_x}) \right] \quad (3.4.43)$$

e

$$\rho_x = \rho_{x0} R^{-\frac{3(\omega_x + \omega_x^2 + \gamma)}{\omega_x + \gamma}} \left[\frac{(\omega_x + \gamma)\Omega_{x0} + R^{3\omega_x}(\omega_x\Omega_{c0} - \gamma\Omega_{x0})}{\omega_x(\Omega_{c0} + \Omega_{x0})} \right]^{-\frac{\gamma}{\omega_x + \gamma}}. \quad (3.4.44)$$

3.4.3.3 IDEM 4: $f(r) = 1 + r^{-1}$

O terceiro caso que iremos analisar é o quarto de caso de [Martens et al. \(2017\)](#), [Martens \(2017\)](#). Neste caso, temos a função $f(r) = 1 + \frac{1}{r}$, na qual a [Equação 3.4.27](#) possui $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\sigma = 0$. Para este caso, o termo de interação é dado pela expressão,

$$Q = 3H\gamma\rho_x. \quad (3.4.45)$$

Dessa forma, obtém-se $r(R)$ fazendo uso da [Equação 3.4.17](#), que é expressado pela equação,

$$r(R) = R^{-3\gamma} \frac{(r_0\omega_x R^{3\omega_x} - \gamma R^{3\omega_x} + \gamma R^{3\gamma} - r_0\gamma R^{3\omega_x})}{\omega_x - \gamma}. \quad (3.4.46)$$

A solução de *background* das densidade de matéria escura e energia escura é obtida a partir das resoluções das [Equação 3.4.22](#) e [Equação 3.4.23](#), para este caso é dada pelas expressões:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{(\Omega_{c0}\omega_x R^{3\omega_x} - \Omega_{c0}\gamma R^{3\omega_x} - \Omega_{x0}\gamma R^{3\omega_x} + \Omega_{x0}\gamma R^{3\gamma}) R^{-3(1+\omega_x)}}{\omega_x - \gamma} \right], \quad (3.4.47)$$

e

$$\rho_x = \rho_{x0} R^{-3(1+\omega_x-\gamma)}. \quad (3.4.48)$$

3.5 Regiões de Sobreposições

Nesta seção, apresentaremos o formalismo e a metodologia usada para a construção de regiões de sobreposições para os modelos de interações de energia escura estudados nesta dissertação, afim de identificar regiões proibidas ou permitidas para as densidades de energia escura e matéria escura, durante algum momento de sua evolução temporal cósmica.

3.5.1 Equações Simplificadas

Do formalismo para o modelo de interação, da [Equação 3.4.3](#) podemos expressar:

$$\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{c0} + \Omega_{x0} = 1. \quad (3.5.1)$$

Como $\Omega_{r0} \sim 10^{-5} \rightarrow 0$ e $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$, dessa forma, expressamos

$$\Omega_{x0} = 1 - \Omega_{m0}; \quad \Omega_{c0} = \Omega_{m0} - \Omega_{b0}. \quad (3.5.2)$$

Da [Equação 2.5.32](#), temos que

$$\rho_i = \frac{3H^2\Omega_i}{8\pi G}, \quad (3.5.3)$$

ou seja,

$$\rho_{c0} = \frac{3H^2\Omega_{c0}}{8\pi G} = 1.87798 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} h^2 (\Omega_{m0} - \Omega_{b0}) \quad (3.5.4)$$

e

$$\rho_{x0} = \frac{3H^2\Omega_{x0}}{8\pi G} = 1.87798 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} h^2 (1 - \Omega_{m0}), \quad (3.5.5)$$

usando: $G = 6.674184 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$ e $H(t) = 100h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3.24 \times 10^{-18} \text{ hs}^{-1}$. Por outro lado, da [Equação 3.4.15](#), $r = \rho_c / \rho_x$, obtemos:

$$r(R) = \frac{\Omega_c}{\Omega_x}; \quad r_0 = \frac{\Omega_{c0}}{\Omega_{x0}} = \frac{\Omega_{m0} - \Omega_{b0}}{1 - \Omega_{m0}}. \quad (3.5.6)$$

Definindo ainda as seguintes constantes:

$$A = \frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{b0}} - \frac{\Omega_{b0}}{1 - \Omega_{b0}} = \frac{\Omega_{m0} - \Omega_{b0}}{1 - \Omega_{b0}} \quad (3.5.7)$$

e

$$B = \frac{(1 - \Omega_{m0})}{1 - \Omega_{b0}}, \quad (3.5.8)$$

que representam frações escuras. Dessa forma, podemos simplificar as equações do *IDEMs* ([subseção 3.4.3](#)) para fazer as simulações e construir as regiões de sobreposições. As equações são reescritas e expressas a seguir.

3.5.1.1 IDEM 1

- Para $\omega_x = -1$:

$$\rho_c = \rho_{c0} R^{-3} \left(A - BR^{3(\gamma+1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (3.5.9)$$

$$r(R) = r_0 R^{-3(\gamma+1)}, \quad (3.5.10)$$

3.5.1.2 IDEM 2

- Para $\omega_x = -1$:

$$\rho_x = \rho_{x0} R^{-\frac{3\gamma}{\gamma-1}} \left[(1-\gamma)B + R^{-3}(A + \gamma B) \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (3.5.11)$$

$$r(R) = r_0 R^{-3} - \gamma(1 - R^{-3}). \quad (3.5.12)$$

3.5.1.3 IDEM 4

- Para $\omega_x = -1$:

$$\rho_x = \rho_{x0} R^{3\gamma}. \quad (3.5.13)$$

$$r(R) = R^{-3\gamma} \frac{(r_0 R^{-3} + \gamma R^{-3} - \gamma R^{3\gamma} + r_0 \gamma R^{-3})}{1 + \gamma}. \quad (3.5.14)$$

3.5.2 Metodologia

Estamos interessados em obter regiões na quais as densidades ρ_x e ρ_c são positivas¹⁵, isto é, queremos identificar regiões permitidas para as densidades de energia escura e matéria escura, durante algum momento de sua evolução temporal cósmica, pois somente essas possuem significados físicos. Como $r = \rho_c/\rho_x$, nesse caso, é suficiente avaliar apenas os pares: ρ_x, ρ_c ou $\rho_x, r(R)$ ou $\rho_c, r(R)$. Fizemos a escolha que foi apresentada nas equações da subseção anterior, por facilidade computacional.

Foram realizadas simulações com 2 mil curvas¹⁶ para cada equação e modelo adotado. Para cada curva foi adotado $\Omega_{b0} = 0.05$, o mesmo valor adotado para a análise com MCMC. Sendo colocado como parâmetro para cada curva: Ω_{c0} , h e γ para os IDEMs com $\omega = -1$. As equações $r(R)$ não contém o parâmetro de Hubble h . Na simulação das curvas, cada parâmetro foi gerado aleatoriamente dentro dos limites obtidos na análise MCMC em cada modelo, a fim de mapear as regiões positivas ($\rho_c \geq 0$ e $\rho_x \geq 0$) e negativas ($\rho_c < 0$ ou $\rho_x < 0$).

Para garantir, de fato, que as curvas tenham um valor positivo desde o fator de escala de $R = 0$ até $R \rightarrow \infty$, foi realizado uma transformação de variável do tipo:

$$R = \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right); \quad y = \frac{2}{\pi} \arctan(\bar{y}), \quad (3.5.15)$$

com \bar{y} , nesse caso, sendo: ρ_c ou ρ_x ou r ou R . E x assume um intervalo finito, que podemos adotar $x = [0, 1]$.

¹⁵ Neste contexto adotaremos “positivo” como sendo valores maiores que zero, assim como os valores iguais a zero, por simplicidade.

¹⁶ Por acharmos que já são suficientes na identificação das regiões proibidas.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

“Muito aprendizado não nos ensina a compreender.”
(Heráclito, 540a.c.– 480a.c.)

Neste capítulo, apresentaremos as legendas adotadas, os resultados obtidos e discussões relacionadas.

4.1 Legendas e listas de *likelihoods*

Na [Tabela 4.1.1](#) é apresentado um resumo da lista de *likelihoods* usadas, bem como as referências onde elas foram apresentadas pela primeira vez e na [Tabela 4.1.2](#) são apresentadas as configurações dos dados de entrada e legendas adotadas.

Tabela 4.1.1 – Nesta tabela, apresentamos as *likelihoods* (dados de entradas) com pequena descrição e tipo, além das referências onde foram obtidas primeiramente.

Nome	Descrição	Tipo	Referência
cosmic_clocks_2016	cosmic clocks	H(z)	Moresco et al. (2016)
Pantheon	Pantheon Simple	Supernova	Scolnic et al. (2018) , Betoule et al. (2014)
bao_boss_dr12	BOSS DR12: LOWZ & CMASS	BAO	Anderson et al. (2014) , Ross et al. (2015) , Font-Ribera et al. (2014)
bao_smallz_2014	6dFGS, SDSS DR7: MGS	BAO	Anderson et al. (2014) , Ross et al. (2015) , Font-Ribera et al. (2014)
eBOSS_DR14_Lya_cross	BOSS, SDSS DR14	BAO, eBOSS	Cuceu et al. (2019) , Blomqvist et al. (2019)
eBOSS_DR14_Lya_combined	BOSS, SDSS DR14, eBOSS DR14	BAO, eBOSS	Cuceu et al. (2019) , Blomqvist et al. (2019) , Agathe et al. (2019)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.1.2 – Nesta tabela, apresentamos as configurações de dados de entrada que usamos e as legendas que adotamos

Dados de entrada	Legenda
Pantheon, cosmic_clocks_2016	Pantheon+CC (CP)
Pantheon, cosmic_clocks_2016, bao_boss_dr12, bao_smallz_2014	Pantheon+CC+BAO (CPB)
Pantheon, cosmic_clocks_2016, eBOSS_DR14_Lya_cross	Pantheon+CC+BAO_EBOSS_CROSS (CPE1)
Pantheon, cosmic_clocks_2016, eBOSS_DR14_Lya_combined	Pantheon+CC+BAO_EBOSS_COMB (CPE2)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Resultados Observacionais do Modelo Λ CDM

Apresentaremos nesta seção os resultados observacionais obtidos para o modelo Λ CDM. Este é o modelo padrão, amplamente discutido na literatura, com parâmetro da equação de estado $\omega_x = -1$, que representa a energia do vácuo. No entanto, os resultados obtidos aqui servirão de padrão para validar os resultados dos modelos de interação do setor escuro que serão apresentados nas próximas seções.

A análise se baseia no código CLASS (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011) e no código de MontePython (AUDREN *et al.*, 2013). O primeiro refere-se ao contexto cosmológico, enquanto que, o segundo refere-se a parte de análise estatística. Para este modelo, foram utilizados os códigos sem nenhuma modificação.

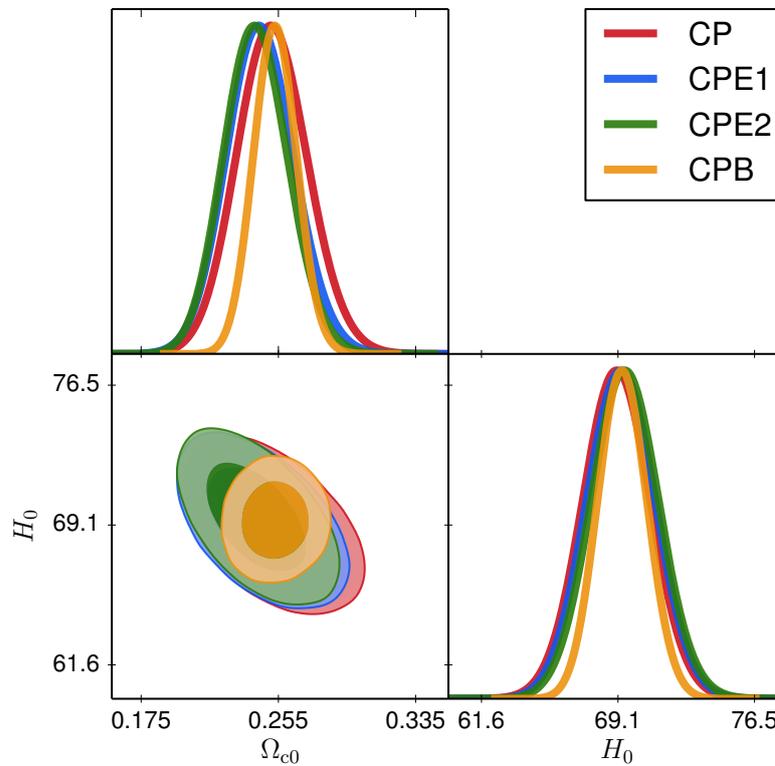
A análise estatística foi dividida em quatro etapas. Primeiramente, foram utilizados dados de $H(z)$ independentes do modelo cosmológico, advindos de medidas realizadas em galáxias antigas, apresentados na Tabela 3.3.1. Além, de dados de SNe Ia advindos da amostra Pantheon (SCOLNIC *et al.*, 2018; BETOULE *et al.*, 2014). Essa escolha reflete em dados observacionais do *background*, influenciado somente pela recente história do universo.

Na segunda etapa, foram adicionados dados relativos a medida da média geométrica advinda das oscilações acústicas de bárions (ANDERSON *et al.*, 2014; ROSS *et al.*, 2015; FONT-RIBERA *et al.*, 2014). Estas também possui dados provenientes do *background*. No entanto, neste caso, as BAO recebe influência da época primordial.

Já a terceira e quarta etapa trata-se de dados também de BAO, advindos da *extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)* (CUCEU *et al.*, 2019; BLOMQVIST *et al.*, 2019; AGATHE *et al.*, 2019). Também trata-se de dados do *background* e também recebe influência da época do Universo primordial.

Os resultados obtidos nessas análises para o modelo Λ CDM são mostrados na Tabela 4.2.1 e as curvas de contorno correspondentes são ilustradas na Figura 4.2.1. Os parâmetros cosmológicos avaliados em ambas análises deste modelo foram Ω_{c0} (ou Ω_{m0} , já que $\Omega_{b0} = 0.05$ é fixo) e H_0 . Note que, os dados de CPE1, CPE2 e CPB, restringem melhor que os dados de supernova+CC (CP), sendo que o CPB é o que melhor restringe entre todos.

Figura 4.2.1 – *Likelihoods* e curvas de contorno para o modelo Λ CDM, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.2.1 – Resultados da análise estatística para o modelo Λ CDM, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$.

Dados	Ω_{c0}	Ω_{m0}	H_0
CP	$0.252^{+0.020}_{-0.022}$	$0.302^{+0.020}_{-0.022}$	$68.9^{+1.9}_{-1.9}$
CPB	$0.253^{+0.013}_{-0.013}$	$0.303^{+0.013}_{-0.013}$	$69.3^{+1.3}_{-1.4}$
CPE1	$0.245^{+0.020}_{-0.021}$	$0.295^{+0.020}_{-0.021}$	$69.2^{+1.9}_{-1.9}$
CPE2	$0.242^{+0.018}_{-0.020}$	$0.292^{+0.018}_{-0.020}$	$69.4^{+1.9}_{-1.9}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

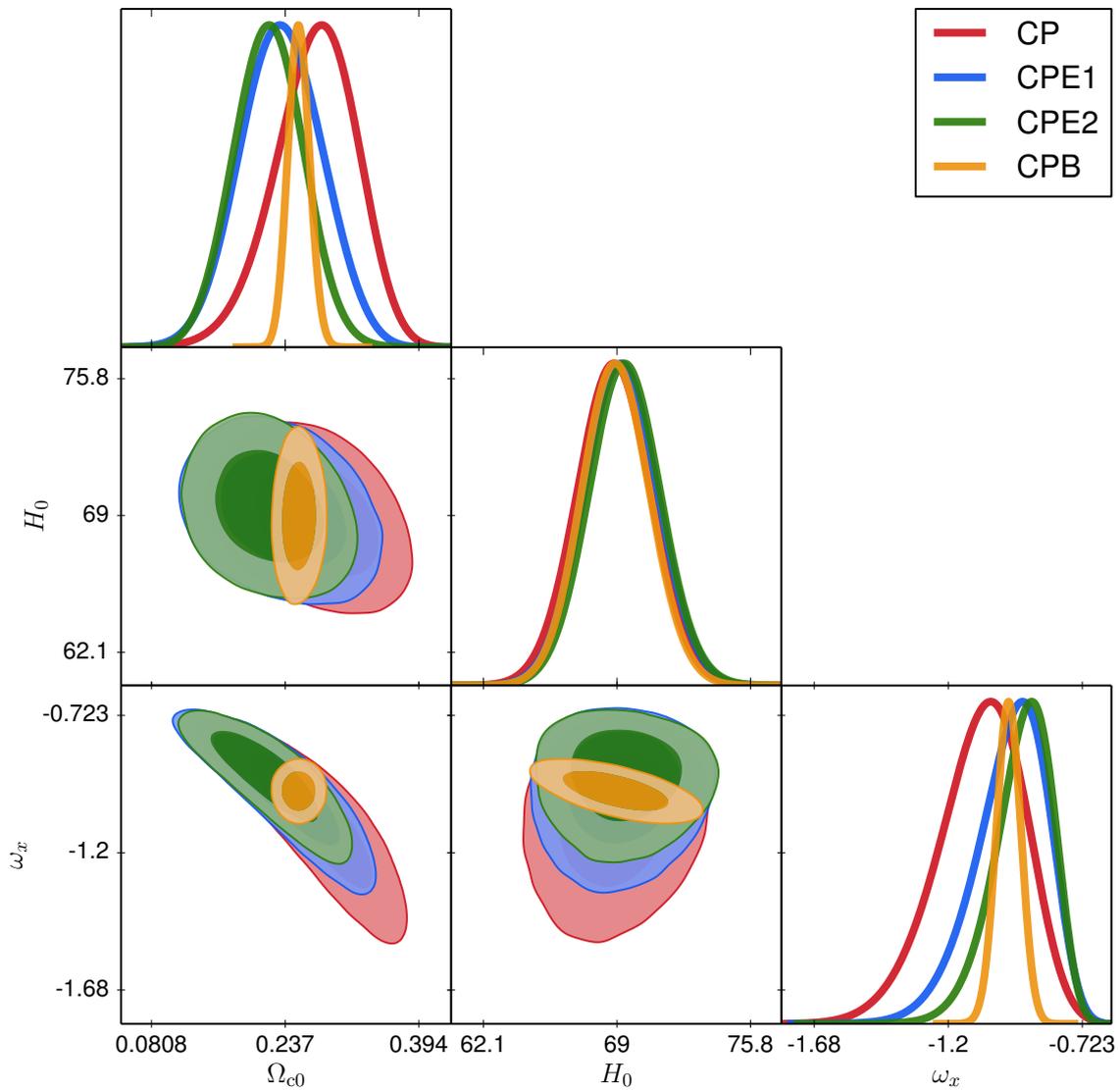
4.3 Resultados Observacionais do Modelo ω CDM

No modelo ω CDM foi realizado o mesmo procedimento. Aqui o parâmetro da equação de estado assume valores de $\omega_x \neq -1$. Este resultado pode ser usado na avaliação dos modelos ω IDEMs em trabalhos futuros.

Os parâmetros cosmológicos avaliados em ambas análises deste modelo foram Ω_{c0} , H_0 e ω_x . Os resultados obtidos nessas análises para o modelo ω CDM são mostrados na Tabela 4.3.1 e as curvas de contorno correspondentes são ilustradas na Figura 4.3.1.

Note que, os resultados obtidos nessas análises para o modelo ω CDM, mostrados

Figura 4.3.1 – Likelihoods e curvas de contorno para o modelo ω CDM, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.3.1 – Resultados da análise estatística para o modelo ω CDM, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$.

Dados	Ω_{c0}	Ω_{m0}	H_0	ω_x
CP	$0.272^{+0.052}_{-0.043}$	$0.322^{+0.052}_{-0.043}$	$68.8^{+1.9}_{-1.9}$	$-1.09^{+0.17}_{-0.14}$
CPB	$0.252^{+0.013}_{-0.013}$	$0.302^{+0.013}_{-0.013}$	$68.9^{+1.8}_{-1.8}$	$-0.99^{+0.05}_{-0.04}$
CPE1	$0.234^{+0.049}_{-0.047}$	$0.284^{+0.049}_{-0.047}$	$69.2^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.98^{+0.15}_{-0.11}$
CPE2	$0.218^{+0.041}_{-0.042}$	$0.268^{+0.041}_{-0.042}$	$69.3^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.94^{+0.12}_{-0.08}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

na Tabela 4.3.1, possuem o parâmetro ω_x igual a $\omega_x = -1.09^{+0.17}_{-0.14}$, $\omega_x = -0.99^{+0.05}_{-0.04}$, $\omega_x = -0.98^{+0.15}_{-0.11}$, $\omega_x = -0.94^{+0.12}_{-0.08}$ para os dados de CP, CPB, CPE1 e CPE2, respectivamente. Isto é,

considerando as margens das incertezas, o modelo Λ CDM passa a ser bem aceito. Aqui também, os dados de CPE1, CPE2 e CPB, restringem melhor que os dados de supernova+CC (CP), sendo que os dados de CPB é também o que melhor restringe entre todos.

4.4 Resultados Observacionais dos Modelos de Interação com $\omega_x = -1$

Apresentaremos nesta seção os resultados observacionais obtidos para os modelos de interação com $\omega_x = -1$ (os IDEM1, IDEM2 e IDEM4) de (MARTTENS *et al.*, 2019). Os modelos IDEM3 e IDEM5 não foram avaliados neste trabalho, pois são extremamente sensíveis à interação, por exemplo, um pequeno valor do parâmetro de interação tem possibilidade de afetar, de modo drástico, toda a dinâmica do *background*.

A análise se baseia no código CLASS (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011) e no código de MontePython (AUDREN *et al.*, 2013). Como já mencionado antes, o primeiro refere-se ao contexto cosmológico, enquanto que, o segundo refere-se a parte de análise estatística. Para este modelo, foi utilizado os códigos do CLASS modificados, incluindo as soluções de *background* deste modelo.

4.4.1 Modelo IDEM1

Para o modelo IDEM1, os parâmetros cosmológicos avaliados em ambas análises deste modelo foram Ω_{c0} , H_0 e γ . Os resultados obtidos nessas análises para o modelo de interação, IDEM1, são mostrados na Tabela 4.4.1 e as curvas de contorno correspondentes são ilustradas na Figura 4.4.1.

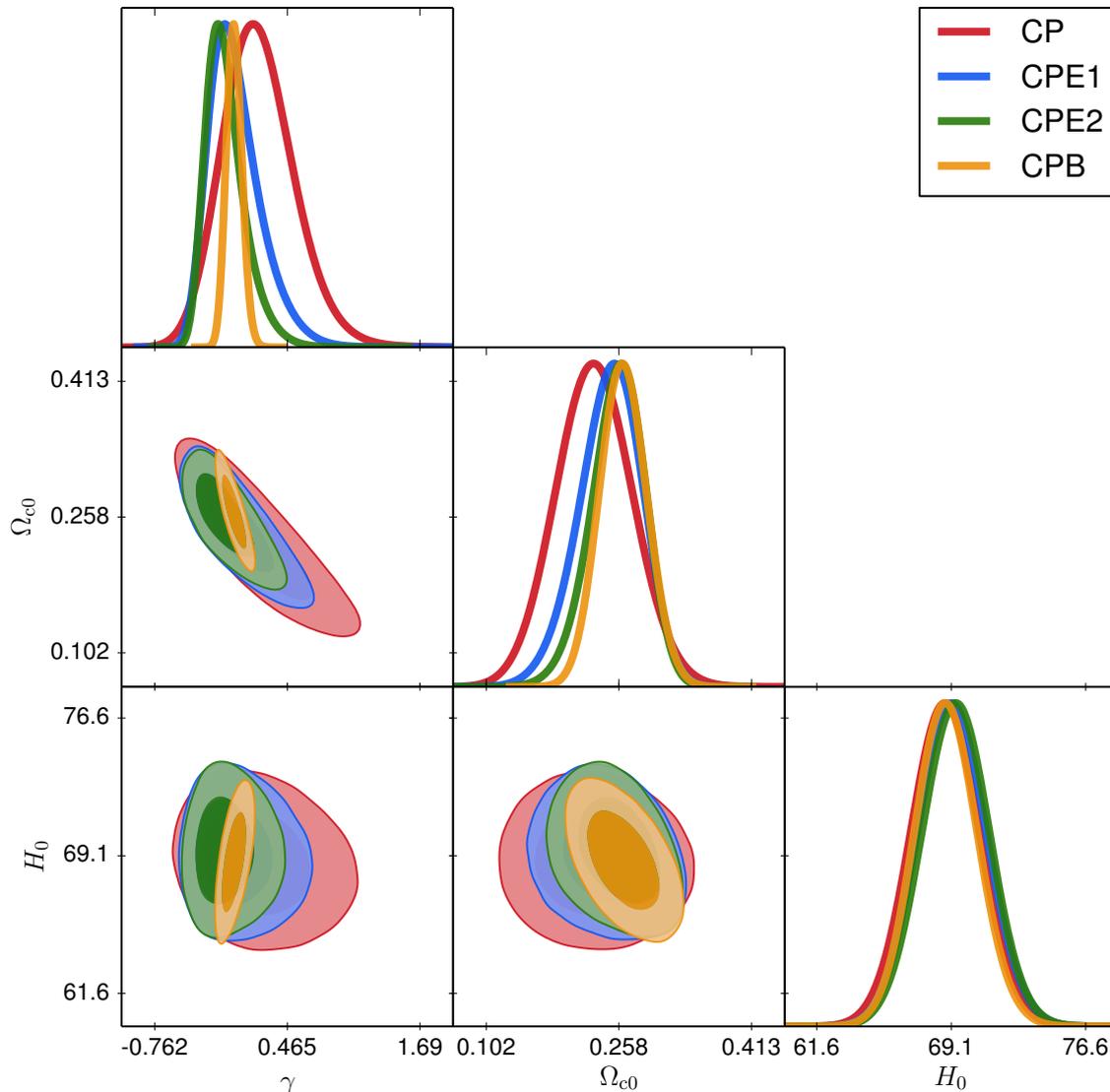
Tabela 4.4.1 – Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM1, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$.

Dados	Ω_{c0}	Ω_{m0}	H_0	γ
CP	$0.229^{+0.044}_{-0.047}$	$0.279^{+0.044}_{-0.047}$	$68.8^{+1.9}_{-1.9}$	$0.197^{+0.290}_{-0.369}$
CPB	$0.263^{+0.027}_{-0.029}$	$0.313^{+0.027}_{-0.029}$	$68.8^{+1.8}_{-1.8}$	$-0.026^{+0.068}_{-0.078}$
CPE1	$0.247^{+0.040}_{-0.034}$	$0.297^{+0.040}_{-0.034}$	$69.2^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.011^{+0.176}_{-0.296}$
CPE2	$0.256^{+0.034}_{-0.029}$	$0.306^{+0.034}_{-0.029}$	$69.3^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.098^{+0.132}_{-0.224}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste modelo, assim como ocorreu nos modelos Λ CDM e ω CDM, os dados de CPB são mais restritivos que os demais. Os dados de SNe Ia+CC (CP) conseguem restringir de maneira relativamente satisfatória o parâmetro de interação γ , mas com uma certa degenerescência com o parâmetro Ω_{c0} , isto é, apresentam uma anti-correlação. Os demais dados também possuem uma pequena degenerescência com este parâmetro, no entanto numa ordem de grandeza bem

Figura 4.4.1 – *Likelihoods* e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM1, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

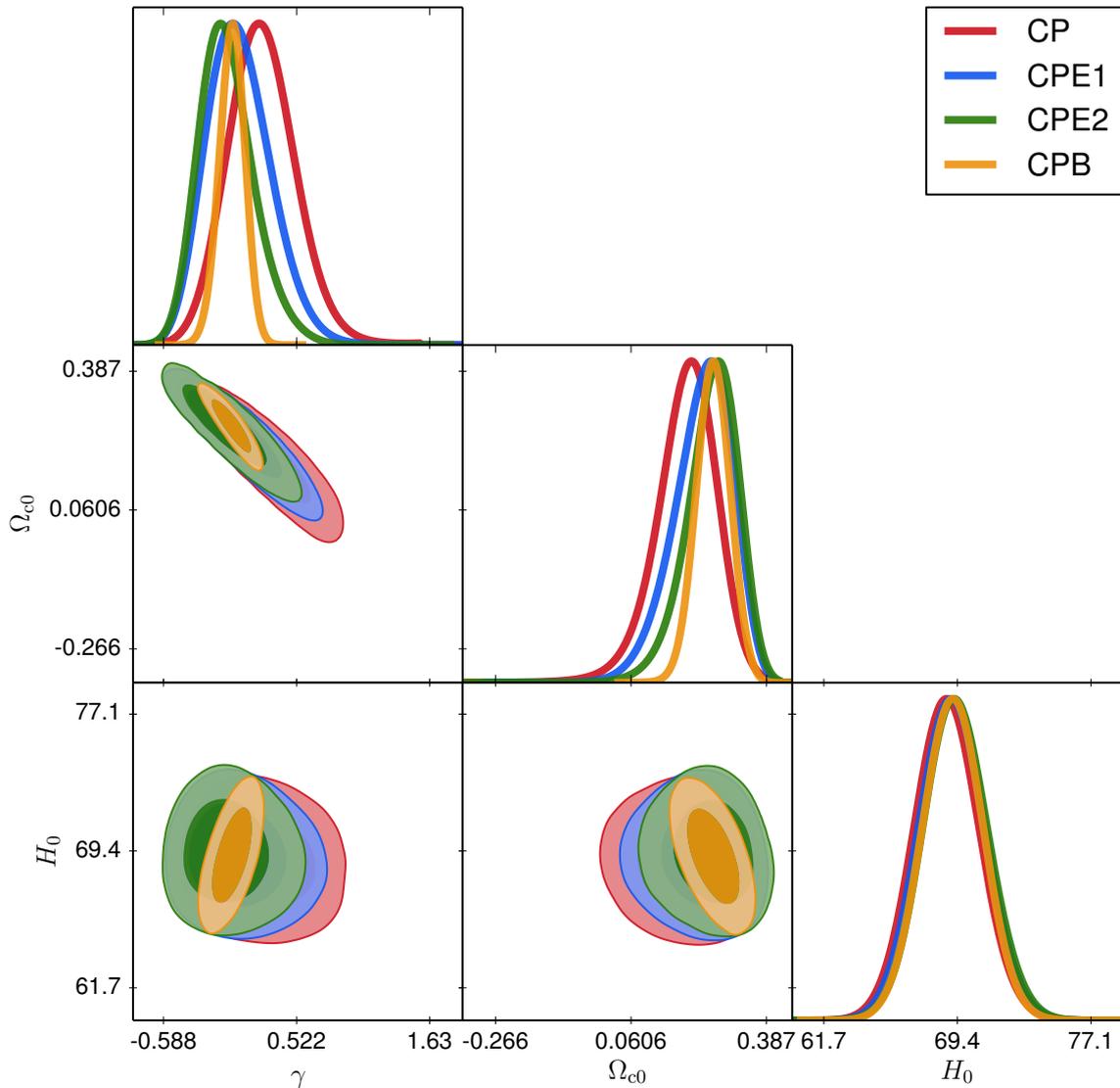
menor. O valor do parâmetro de interação, γ , foi positivo para os dados CP e negativos para os demais (CPB, CPE1 e CPE2) em números absolutos, no entanto, são bem próximos de zero. Isso significa que para estes dados, a interação $\gamma < 0$ afeta atrasando a equivalência entre a radiação e matéria (matéria escura + bárions). Na consideração dos limites superiores e inferiores de incertezas em 1σ , o modelo Λ CDM é preferido.

4.4.2 Modelo IDEM2

Para o modelo IDEM2, os parâmetros cosmológicos avaliados em ambas análises deste modelo foram Ω_{c0} , H_0 e γ . Os resultados obtidos nessas análises para o modelo de interação,

IDEM2, são mostrados na Tabela 4.4.2 e as curvas de contorno correspondentes são ilustradas na Figura 4.4.2.

Figura 4.4.2 – Likelihoods e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM2, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4.3 Modelo IDEM4

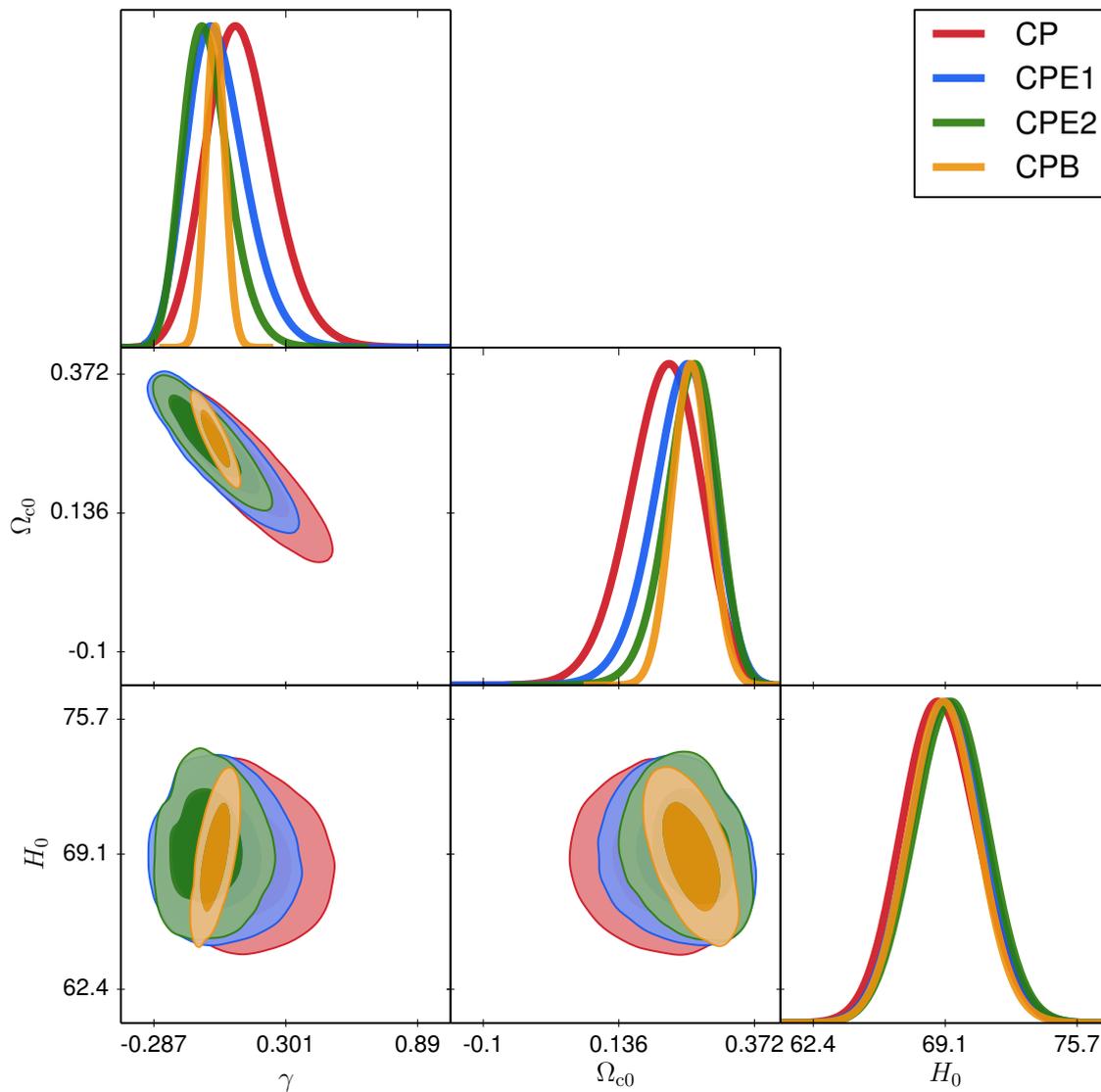
Para o modelo IDEM4, os parâmetros cosmológicos avaliados em ambas análises deste modelo foram Ω_{c0} , H_0 e γ . Os resultados obtidos nessas análises para o modelo de interação, IDEM4, são mostrados na Tabela 4.4.3 e as curvas de contorno correspondentes são ilustradas na Figura 4.4.3.

Tabela 4.4.2 – Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM2, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$.

Dados	Ω_{c0}	Ω_{m0}	H_0	γ
CP	$0.191^{+0.089}_{-0.067}$	$0.241^{+0.089}_{-0.067}$	$68.8^{+1.9}_{-1.9}$	$0.231^{+0.27}_{-0.313}$
CPB	$0.258^{+0.043}_{-0.040}$	$0.308^{+0.043}_{-0.040}$	$69.1^{+1.7}_{-1.8}$	$-0.018^{+0.113}_{-0.105}$
CPE1	$0.233^{+0.081}_{-0.057}$	$0.283^{+0.081}_{-0.057}$	$69.1^{+1.9}_{-1.9}$	$0.041^{+0.234}_{-0.299}$
CPE2	$0.254^{+0.073}_{-0.052}$	$0.304^{+0.073}_{-0.052}$	$69.3^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.050^{+0.202}_{-0.265}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.4.3 – Likelihoods e curvas de contorno para o modelo de interação IDEM4, com nível de confiança de 1σ e 2σ , respectivamente, obtidas por meio dos dados: CP, CPB, CPE1 e CPE2, de acordo com a seção 3.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.4.3 – Resultados da análise estatística para o modelo de interação IDEM4, com nível de confiança de 1σ . O valor de Ω_{b0} foi fixado em $\Omega_{b0} = 0.05$.

Dados	Ω_{c0}	Ω_{m0}	H_0	γ
CP	$0.214^{+0.067}_{-0.054}$	$0.264^{+0.067}_{-0.054}$	$68.8^{+1.9}_{-1.9}$	$0.103^{+0.130}_{-0.172}$
CPB	$0.262^{+0.034}_{-0.032}$	$0.312^{+0.034}_{-0.032}$	$69^{+1.73}_{-1.78}$	$-0.013^{+0.042}_{-0.046}$
CPE1	$0.244^{+0.059}_{-0.048}$	$0.294^{+0.059}_{-0.048}$	$69.1^{+1.9}_{-1.9}$	$0.003^{+0.115}_{-0.147}$
CPE2	$0.260^{+0.051}_{-0.043}$	$0.31^{+0.051}_{-0.043}$	$69.3^{+1.9}_{-1.9}$	$-0.044^{+0.095}_{-0.120}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4.4 Considerações Gerais

Os modelos IDEM2 e IDEM4 tiveram os dados de CPB mais restritivos que os demais, assim como aconteceu no IDEM1 e nos modelos padrão Λ CDM e ω CDM. Os dados CP também conseguem restringir de maneira relativamente satisfatória para o parâmetro de interação γ , mas também contém uma certa degenerescência com o parâmetro Ω_{c0} , isto é, com uma anti-correlação entre ambas¹. Ainda nos modelos IDEM2 e IDEM4 os valores para γ foram positivos nos dados de CP e CPE1. E para os dados CPB e CPE2 apresentaram valores negativos. Para os dados de CP o valor é mais distante de zero, mas, são todos iguais a zero, dentro da margem de 1σ de confiança.

Valor Atual da Taxa de Expansão de Hubble (H_0): Na literatura, é possível encontrar diversos valores para a taxa de expansão de Hubble. Os valores dependem dos tipos de dados e de modelos cosmológicos aplicados. A referência [Riess et al. \(2016\)](#) apresenta $H_0 = (73.24 \pm 1.74) \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (em 3.4σ) como melhor estimativa para o valor de H_0 , advindos de medidas de um conjunto de observações de mais de 600 cefeidas, na frequência do infravermelho e do visível, independente do modelo.

Por outro lado, para outros dados e modelos, por exemplo, na [Tabela 4.4.4](#), podemos encontrar alguns outros valores para H_0 . Geralmente, os modelos com dados de BAO tem os valores de H_0 entorno de $68\text{--}70 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Dessa maneira, em nosso trabalho, os resultados contendo os dados de BAO (CPB) e BAO eBOSS(CPE1, CPE2) tiveram valores em torno de $69 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ em todos os modelos: Λ CDM, ω CDM, IDEM1, IDEM2 e IDEM4, o que é condizente com os valores encontrados na literatura envolvendo BAO, BAO (eBOSS). O mesmo comportamento pode ser observado para os valores da densidade de matéria.

Em todos esses modelos de interação e o modelo ω CDM, o modelo Λ CDM é preferido, pois quando o valor de $\gamma = 0$ nos modelos de interações significam que estes reduzem ao modelo padrão Λ CDM.

¹ Esta anti-correlação acontece porque o valor de γ no sentido negativo dos eixos dos gráficos em questão afeta atrasando a equivalência entre a radiação e matéria (matéria escura + bárions) em comparação a um valor de γ situado mais a direita dos eixos, consequentemente, para um valor de γ situado mais a esquerda do gráfico representa um Universo que contém uma densidade de matéria mais elevada e vice-versa.

Tabela 4.4.4 – Alguns resultados para H_0 , Ω_{m0} e γ para diferentes dados e modelos.

Dados / Nível de confiança	Ω_{m0}	H_0 [$\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$]	γ	Modelo	Referências
$TT,TE,EE+LowE$ (1σ)	0.3166 ± 0.0084	67.27 ± 0.60	–	Λ CDM	Planck Collaboration <i>et al.</i> (2020)
$TT,TE,EE+LowE+lensing$ (1σ)	0.3153 ± 0.0073	67.36 ± 0.54	–	Λ CDM	Planck Collaboration <i>et al.</i> (2020)
$TT,TE,EE+LowE+lensing+BAO$ (1σ)	0.3111 ± 0.0056	67.66 ± 0.42	–	Λ CDM	Planck Collaboration <i>et al.</i> (2020)
$TT,TE,EE+LowE+lensing+SNe+BAO$ (1σ)	–	68.31 ± 0.82	–	Parametrização $w(a)$	Planck Collaboration <i>et al.</i> (2020)
SPARC sample (1σ)	–	75.1 ± 2.3	–	CosmicFlows-3	Schombert, McGaugh e Lelli (2020)
$SNe\ Ia$ (JLA) (2σ)	$0.295^{+0.072}_{-0.068}$	–	–	Λ CDM	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0$ (2σ)	$0.354^{+0.109}_{-0.162}$	$73.37^{+3.63}_{-3.61}$	$0.53^{+1.02}_{-0.91}$	IDEM1	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0+CC+BAO$ (2σ)	$0.321^{+0.072}_{-0.078}$	$69.44^{+3.62}_{-3.61}$	$0.06^{+0.16}_{-0.18}$	IDEM1	Martens <i>et al.</i> (2019)
Planck TT (2σ)	$0.3143^{+0.0636}_{-0.0685}$	$68.13^{+2.86}_{-2.96}$	$0.010^{+0.108}_{-0.140}$	IDEM1	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0$ (2σ)	$0.371^{+0.189}_{-0.136}$	$73.29^{+3.60}_{-3.60}$	$0.40^{+0.58}_{-0.94}$	IDEM2	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0+CC+BAO$ (2σ)	$0.326^{+0.110}_{-0.104}$	$69.72^{+3.60}_{-3.60}$	$0.08^{+0.28}_{-0.24}$	IDEM2	Martens <i>et al.</i> (2019)
Planck TT (2σ)	$0.3054^{+0.0500}_{-0.0540}$	$68.00^{+2.28}_{-2.47}$	$0.0024^{+0.1040}_{-0.1050}$	IDEM2	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0$ (2σ)	$0.379^{+0.097}_{-0.239}$	$73.21^{+3.60}_{-3.61}$	$0.26^{+0.70}_{-0.24}$	IDEM4	Martens <i>et al.</i> (2019)
$SNe\ Ia+H_0+CC+BAO$ (2σ)	$0.320^{+0.087}_{-0.089}$	$69.64^{+3.60}_{-3.61}$	$0.037^{+0.220}_{-0.200}$	IDEM4	Martens <i>et al.</i> (2019)
Planck TT (2σ)	$0.309^{+0.058}_{-0.058}$	$67.51^{+2.47}_{-2.66}$	$0.0052^{+0.1020}_{-0.0980}$	IDEM4	Martens <i>et al.</i> (2019)
Planck CMB data ((TT,TE,EE+lowE+lensing)) (0.7σ)	–	$67.71^{+0.42}_{-0.42}$	–	Λ CDM	Martens <i>et al.</i> (2020)
Planck CMB data ((TT,TE,EE+lowE+lensing)) (0.7σ)	–	$68.39^{+0.78}_{-0.81}$	–	\bar{w} CDM	Martens <i>et al.</i> (2020)
Planck CMB data ((TT,TE,EE+lowE+lensing)) (0.3σ)	–	$68.32^{+0.78}_{-0.85}$	–	\overline{CPL}	Martens <i>et al.</i> (2020)
Radio+ GW + EM data (1σ)	–	$68.9^{+4.7}_{-4.6}$	–	–	Hotokezaka <i>et al.</i> (2019)
CMB+BAO (2σ)	0.310 ± 0.008	67.900 ± 0.747	–	σ CDM	Scolnic <i>et al.</i> (2018)
SN+CMB+ H_0 (2σ)	0.274 ± 0.012	72.236 ± 1.572	–	σ CDM	Scolnic <i>et al.</i> (2018)
JLA+BAO3+CC+CMB (1σ)	0.3037 ± 0.0080	68.53 ± 0.61	–	Λ CDM	Cid <i>et al.</i> (2019)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 Resultados das Regiões de Sobreposição

4.5.1 Modelos IDEMs (com $\omega_x = -1$)

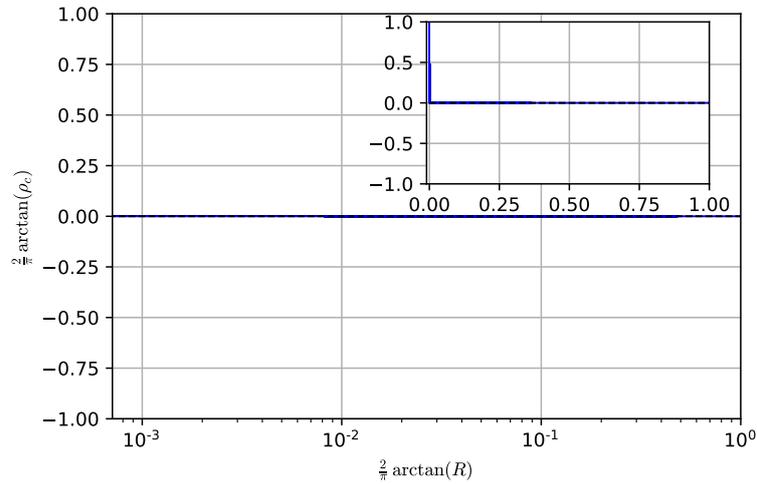
Nesta secção discutiremos os resultados obtidos da simulação de 2 mil curvas utilizando as equações dos modelos IDEM1, IDEM2 e IDEM4, considerando as margens dos gráficos dos resultados obtidos na análise estatística dos respectivos modelos, a fim de identificar regiões permitidas ou proibidas para as regiões de contorno para os parâmetros cosmológicos. As regiões proibidas (sem sentido físico) acontecem quando a densidade de energia escura $\rho_x < 0$ ou matéria escura $\rho_c < 0$. Sabendo que $r = \rho_c/\rho_x$, avaliamos este e uma das densidades, já que das três equações ($\rho_c(R)$, $\rho_x(R)$ e $r(R)$) é suficiente apenas avaliar duas delas. No caso da equação com $r(R)$, este é negativo ($r < 0$) se uma das densidades for negativa e positivo ($r \geq 0$) quando as duas densidade são negativas ou as duas são positivas. Com isso, conhecendo $r(R)$ e uma das densidades já é suficiente. Todas as equações dependem apenas do fator de escala $R(t)$ e dos parâmetros cosmológicos de entrada, de acordo com a [seção 3.5](#).

4.5.1.1 Modelo IDEM1

Para o modelo IDEM1 fizemos a escolha das equações com $\rho_c(R)$ e $r(R)$ (Equação 3.5.9 e Equação 3.5.10). A simulação das curvas para $\rho_c(R)$ e $r(R)$ são apresentadas na [Figura 4.5.1](#) e [Figura 4.5.2](#), respectivamente. Lembrando que, nas figuras apresentadas, foram realizadas uma transformação de variáveis de acordo com a [Equação 3.5.15](#) para garantir $R = 0$ até $R \rightarrow \infty$.

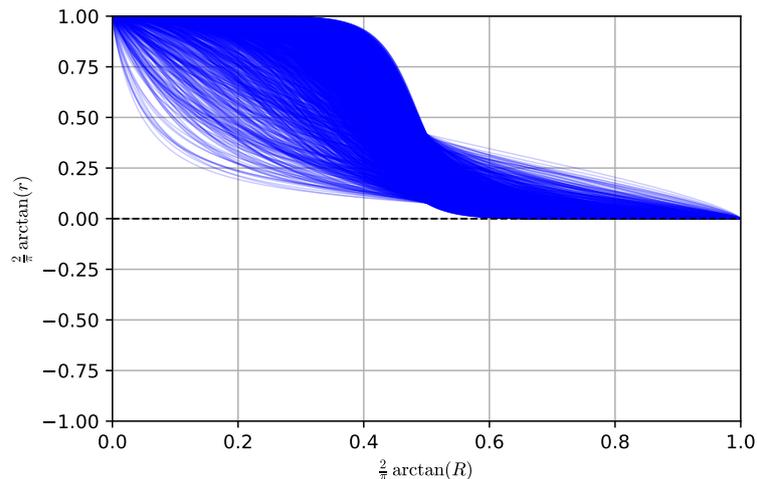
Neste modelo, ambas as densidades são positivas ($\rho_c \geq 0$, $\rho_x \geq 0$), pois nenhuma das curvas mostradas nas [Figura 4.5.1](#) e [Figura 4.5.2](#), respectivamente, cruzam para o lado negativo do eixo vertical dos gráficos, o que representaria uma densidade negativa. Isso significa que

Figura 4.5.1 – Simulação de 2 mil curvas de $\rho_c(R)$ para o modelo IDEM1. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($\rho_c(R) \geq 0$). Para este caso, não houve curvas com valores negativos. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < \rho_c < \infty$ e $0 < R < \infty$, por isso, as curvas estão fora de escala, pois foi realizada uma transformação de variável nos eixos para que fosse possível mostrar todos os espaços amostrais. Aqui, não temos interesse na estética das curvas e sim nas informações que podem ser extraídas. O gráfico interno representa o mesmo gráfico, mas com todos os eixos em escalas lineares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.5.2 – Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM1. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$). Para este caso, não houve curvas com valores negativos $r(R) < 0$. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < r < \infty$ e $0 < R < \infty$.



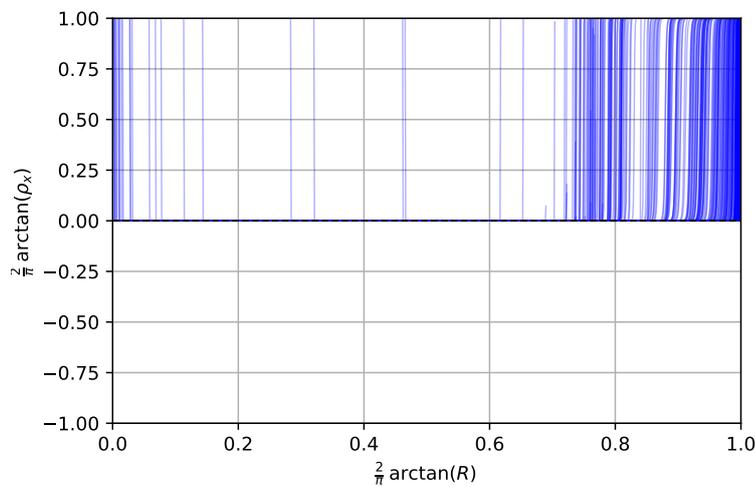
Fonte: Elaborada pelo autor.

não há região de restrição nos valores dos parâmetros cosmológicos apresentados na análise do IDEM1 (Figura 4.4.1) para todo tempo cósmico.

4.5.1.2 Modelo IDEM2

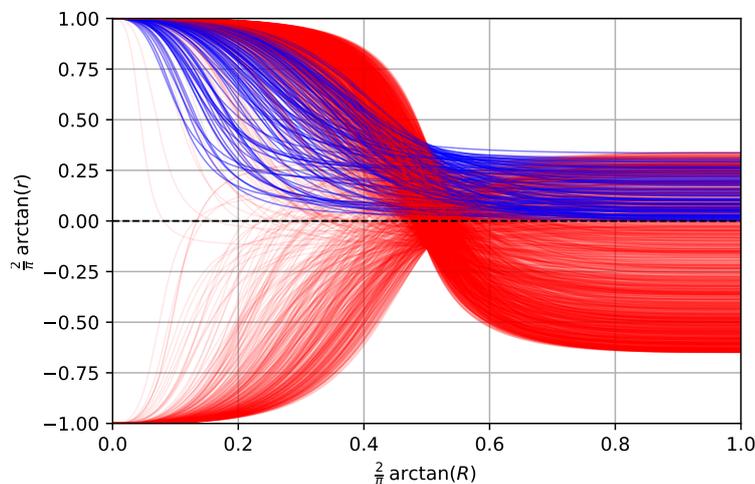
De modo análogo ao procedimento realizado no modelo IDEM1, realizamos também para o modelo IDEM2. Neste fizemos a escolha das equações com $\rho_x(R)$ e $r(R)$ (Equação 3.5.11 e Equação 3.5.12). A simulação das curvas para $\rho_x(R)$ e $r(R)$ são apresentadas na Figura 4.5.3 e Figura 4.5.4, respectivamente. Neste modelo, as curvas referentes a equação de $\rho_x(R)$ são

Figura 4.5.3 – Simulação de 2 mil curvas de $\rho_x(R)$ para o modelo IDEM2. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($\rho_x(R) \geq 0$). Para este caso, não houve curvas com valores negativos. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < \rho_x < \infty$ e $0 < R < \infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

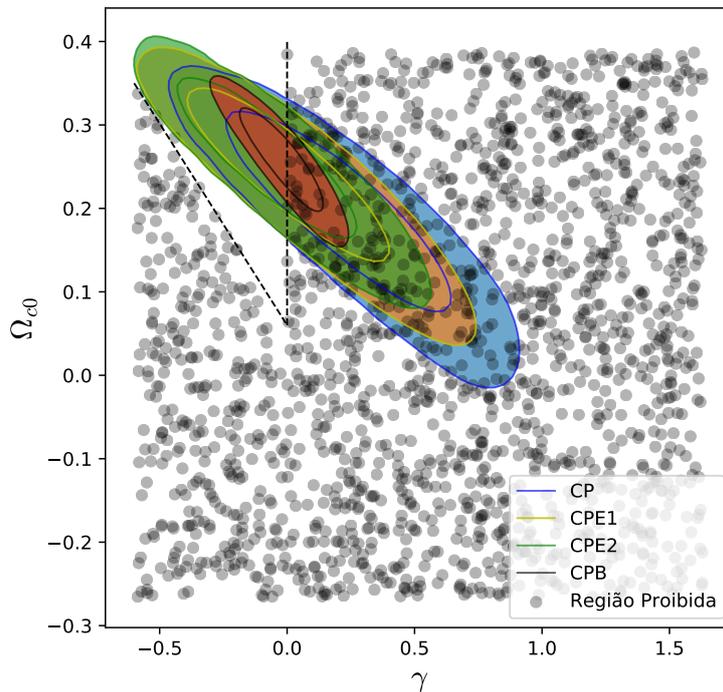
Figura 4.5.4 – Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM2. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$) e as linhas em cor vermelha representam as curvas cujos valores em algum ponto possuem $r < 0$. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < r < \infty$ e $0 < R < \infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

todas positivas. Enquanto que as curvas para $r(R)$ possuem parte positiva (em azul) e outra parte negativa (em vermelho). Isso significa que a densidade de matéria escura (ρ_c) possui curvas com valores negativos. Neste caso, $r(R)$ assume valores positivos e negativos. Com isso, foi possível restringir regiões para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ . E como a equação com $r(R)$ não depende do parâmetro h , não foi possível restringir regiões para este parâmetro H_0 . Assim, a [Figura 4.5.5](#) mostra a região proibida para as regiões de contorno dos parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , obtidas pela análise estatística do IDEM2 mostrada na [Figura 4.4.2](#). Isso significa que ρ_c e ρ_x são positivos, para toda evolução temporal, apenas na possibilidade de $\gamma \leq 0$. No entanto, mesmo quando $\gamma < 0$ existe ainda a região não permitida. Esta região parece crescer de modo linear no sentido de γ negativo, iniciando esse crescimento em torno do valor de Ω_{b0} . Para $\gamma > 0$ toda esta região é proibida, considerando toda evolução temporal.

Figura 4.5.5 – Regiões de sobreposição para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ . A figura mostra a região proibida para as regiões de contorno dos parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , obtidas pela análise estatística do IDEM2 mostrada na [Figura 4.4.2](#), em algum momento da evolução cósmica temporal. Os pontos em cor cinza representam as regiões proibidas, isto é, representam as curvas cuja a densidade de matéria escura (ρ_c) fornece valor negativo em algum momento de toda evolução cósmica.



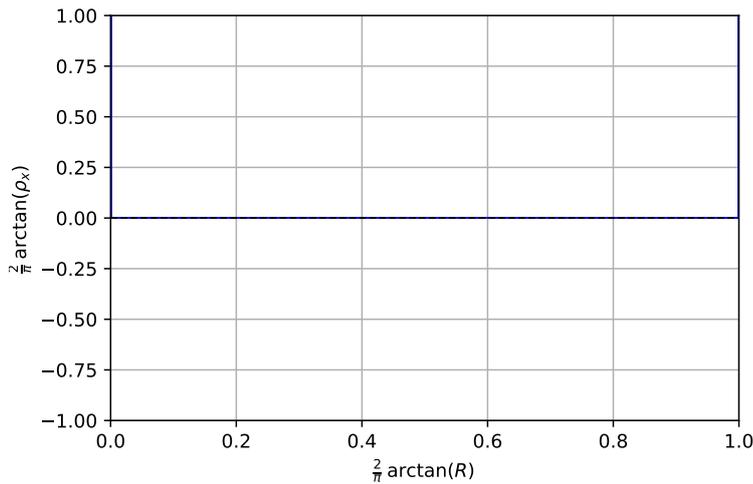
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5.1.3 Modelo IDEM4

Para o modelo IDEM4, de modo análogo ao IDEM2, fizemos as mesmas escolhas de equações, ou seja, escolhemos as equações com $\rho_x(R)$ e $r(R)$ ([Equação 3.5.13](#) e [Equação 3.5.14](#)).

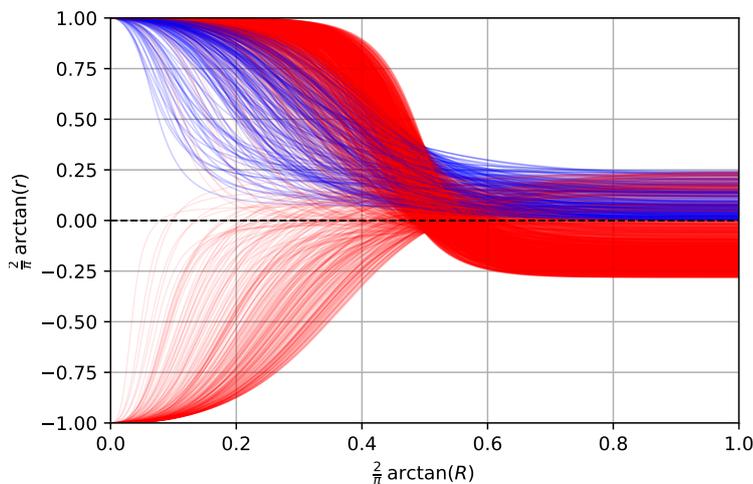
A simulação das curvas para $\rho_x(R)$ e $r(R)$ são apresentadas na [Figura 4.5.6](#) e [Figura 4.5.7](#), respectivamente.

Figura 4.5.6 – Simulação de 2 mil curvas de $\rho_x(R)$ para o modelo IDEM4. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($\rho_x(R) \geq 0$). Para este caso, não houve curvas com valores negativos. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < \rho_x < \infty$ e $0 < R < \infty$, por isso, as curvas estão fora de escala. Aqui, não temos interesse na estética das curvas e sim nas informações que podem ser extraídas. Mudar a escala, significa mudar o espaço da amostragem.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.5.7 – Simulação de 2 mil curvas de $r(R)$ para o modelo IDEM4. As linhas em azul representam as curvas cujos valores são positivos ($r(R) \geq 0$) e as linhas em cor vermelha representam as curvas cujos valores em algum ponto possuem $r < 0$. O gráfico representa a maior escala possível para $-\infty < r < \infty$ e $0 < R < \infty$.

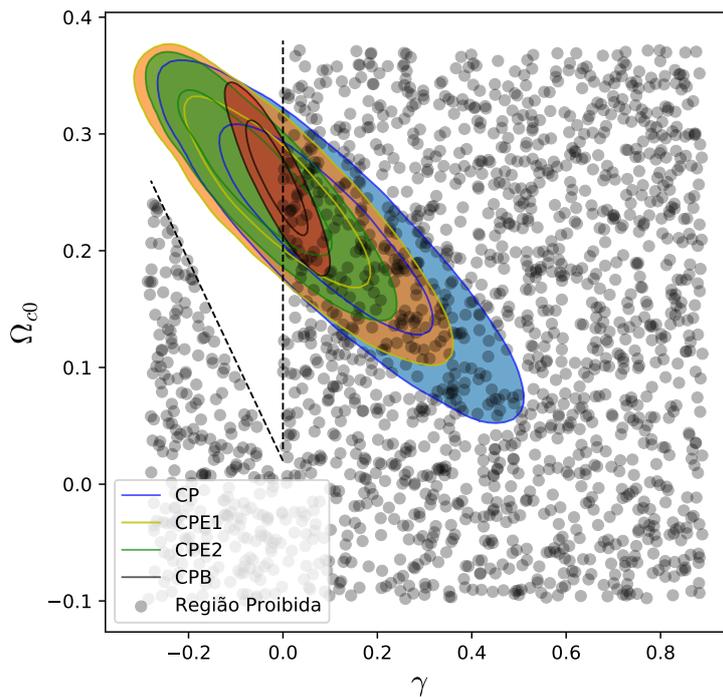


Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste modelo, assim como aconteceu no modelo IDEM2, as curvas referentes a equação de $\rho_x(R)$ também são todas positivas. Enquanto que as curvas para $r(R)$ possuem parte positiva

(em azul) e outra parte negativa (em vermelho). Neste caso, $r(R)$ assume valores positivos e negativos. Assim, também foi possível restringir regiões para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ . Dessa forma, a Figura 4.5.8 mostra a região proibida para as regiões de contorno dos parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , obtidas pela análise estatística do IDEM4 mostrada na Figura 4.4.3. Aqui também ρ_c e ρ_x são positivos, para toda evolução temporal, apenas na possibilidade de $\gamma \leq 0$. Aqui também, para $\gamma < 0$ existe ainda a região não permitida. Esta região parece crescer de modo linear no sentido de γ negativo, iniciando esse crescimento em torno do valor de $\Omega_{c0} > 0$ e $\Omega_{c0} < \Omega_{b0}$, no geral, semelhante ao IDEM2. E para $\gamma > 0$ toda esta região é proibida, para algum momento da idade cósmica.

Figura 4.5.8 – Regiões de sobreposição para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ . A figura mostra a região proibida para as regiões de contorno dos parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ , obtidas pela análise estatística do IDEM4 mostrada na Figura 4.4.3, em algum momento da evolução cósmica temporal. Os pontos em cor cinza representam as regiões proibidas, isto é, representam as curvas cuja a densidade de matéria escura (ρ_c) fornece valor negativo em algum momento de toda evolução cósmica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5.2 Considerações Finais

Na construção de regiões de sobreposição, afim, de descobrir regiões restritivas para toda evolução temporal. O IDEM1 não teve nenhuma região restritiva, isto é, as densidades de energia escura e matéria escura são sempre positivas ($\rho_c \geq 0$, $\rho_x \geq 0$) em toda sua evolução temporal. Já o IDEM2 e o IDEM4 apresentaram comportamento semelhantes. Em ambos, foi

possível restringir regiões para os parâmetros cosmológicos Ω_{c0} e γ . De modo que, para $\gamma > 0$, a densidade de energia da matéria escura (ρ_c) apresenta o valor negativo em algum momento de sua evolução temporal.

No modelo IDEM2 e IDEM4 os valores para γ foram positivos para os dados de CP e CPE1. Enquanto que, os dados de CPB e CPE2 apresentaram valores negativos, sendo CP o mais distante de zero, mas todos iguais a zero, dentro da margem de 1σ de confiança. Assim, os dados de CPB e CPE2 fornecem valores γ que estão dentro da região permitida para que as densidades não tenham valores negativos. No entanto, todos os dados fornecem valores dentro da região permitida e vice-versa se a margem de confiança de 1σ for colocada. Já os valores de Ω_{c0} nos IDEM2 e IDEM4 ficam dentro da região permitida quando $\gamma \leq 0$.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

“Em ciência, o crédito vai para o homem que convence o mundo de uma idéia, não para aquele que a teve primeiro.”
(William Osle)

Neste capítulo, faremos as conclusões necessárias e apresentaremos as perspectivas.

5.1 Conclusões

Nesta dissertação, foram abordados, os principais pontos da cosmologia moderna (cosmologia relativística), sendo objeto de estudo, a cosmologia do setor escuro. Nesta, o estudo se baseou na descrição matemática de alguns modelos específicos de interação do setor escuro do Universo: IDEM1, IDEM2 e IDEM4 (MARTTENS, 2017; MARTTENS *et al.*, 2019), com análise estatística associada. Além disso, ainda foi objeto de estudo o modelo padrão: Λ CDM e ω CDM, para servir de comparação. Também foram construídas regiões de sobreposição para os modelos de interação, afim de identificar regiões proibidas (com as densidades de matéria escura ou energia escura negativas).

A análise se baseia no código CLASS (BLAS; LESGOURGUES; TRAM, 2011) e no código de MCMC MontePython (AUDREN *et al.*, 2013). O primeiro refere-se ao contexto cosmológico, enquanto que, o segundo refere-se a parte de análise estatística. Para os modelos Λ CDM e ω CDM, foram utilizados os códigos sem nenhuma modificação. Já para modelos de interação do setor escuro (os IDEMs) foram usados códigos modificados, para obter numericamente as soluções do *background* para cada modelo.

Os dados foram implementados em quatro etapas. Na primeira etapa, foram utilizados dados de $H(z)$ independentes do modelo cosmológico, advindos de medidas realizadas em galáxias antigas, apresentados na Tabela 3.3.1. Além, de dados de SNe Ia advindos da amostra Pantheon (SCOLNIC *et al.*, 2018; BETOULE *et al.*, 2014). Na segunda etapa, consistiu de

dados relativo a medida da média geométrica advinda das oscilações acústicas de bárions (ANDERSON *et al.*, 2014; ROSS *et al.*, 2015; FONT-RIBERA *et al.*, 2014). E na terceira e quarta etapa trataram-se de dados também de BAO, advindos da *extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)* (CUCEU *et al.*, 2019; BLOMQUIST *et al.*, 2019; AGATHE *et al.*, 2019), adicionado de acordo com a Tabela 4.1.2.

Em nosso trabalho, os resultados contendo os dados de BAO (CPB) e BAO eBOSS (CPE1,CPE2) sugerem valores para H_0 em torno de $69 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ em todos os modelos: Λ CDM, ω CDM, IDEM1, IDEM2 e IDEM4, o que é condizente com os valores encontrados na literatura envolvendo BAO, BAO(eBOSS). O parâmetro de interação γ se manteve próximo de zero e na região de confiança de 1σ satisfaz o modelo padrão. Em geral os dados CPB foram mais restritivos e os dados CP os menos restritivos. Houve uma maior degenerescência entre o parâmetro de interação γ com o parâmetro Ω_{c0} , isto é, uma anti-correlação entre ambas. Em todas as análises envolvendo os modelos de interação e o modelo ω CDM, o modelo Λ CDM é favorecido, pois quando o valor de $\gamma = 0$ nos modelos de interações significam que estes reduzem ao modelo padrão Λ CDM.

Nas regiões de sobreposições, o modelo IDEM2 e IDEM4 sugere que para $\gamma > 0$ a densidade de energia da matéria escura (ρ_c) apresenta um valor negativo em algum momento de sua evolução temporal. Para o modelo IDEM1 não houve restrições.

5.2 Perspectivas

Por conta do elevado tempo computacional, não foi possível obter e avaliar os resultados para os modelos de interação considerando $\omega_x \neq -1$. Por outro lado, como perspectivas, temos interesse em continuar trabalhando nesses resultados e modelos com $\omega_x \neq -1$ (ω IDEMs), com possibilidade de publicações futuras.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D. *et al.* Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 241103, Jun 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.241103>>. Citado na página 39.

_____. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 39.

AGATHE, V. de S.; BALLAND, C.; BOURBOUX, H. du Mas des *et al.* Baryon acoustic oscillations at $z = 2.34$ from the correlations of Ly α absorption in eBOSS DR14. **aap**, v. 629, p. A85, set. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935638>>. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 73, 83, 84 e 100.

ALPHER, R. A.; HERMAN, R.; GAMOW, G. A. Thermonuclear reactions in the expanding universe. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 74, p. 1198–1199, Nov 1948. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1198.2>>. Citado na página 28.

AMENDOLA, L.; FINELLI, F.; BURIGANA, C.; CARTURAN, D. WMAP and the generalized chaplygin gas. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2003, n. 07, p. 005–005, jul 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2003%2F07%2F005>>. Citado na página 78.

ANDERSON, L. *et al.* The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 441, n. 1, p. 24–62, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stu523>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 73, 83, 84 e 100.

ANDRIEU, C.; FREITAS, N. de; DOUCET, A.; JORDAN, M. I. An introduction to mcmc for machine learning. **Machine Learning**, Springer, v. 50, p. 5–43, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1020281327116>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

AUDREN, B.; LESGOURGUES, J.; BENABED, K.; PRUNET, S. Conservative constraints on early cosmology: an illustration of the monte python cosmological parameter inference code. **JCAP**, v. 1302, p. 001, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/001>>. Citado 5 vezes nas páginas 30, 69, 84, 87 e 99.

BAHCALL, N. A. Hubble's law and the expanding universe. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 112, n. 11, p. 3173–3175, 2015. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/112/11/3173>>. Citado na página 32.

BASSETT, B.; HLOZEK, R. Baryon acoustic oscillations. In: _____. **Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches**. [s.n.], 2010. p. 246. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010deot.book..246B>>. Citado na página 73.

- BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, p. 043507, Aug 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.043507>>. Citado na página 78.
- BETOULE, M.; KESSLER, R.; GUY, J. *et al.* Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. **Astronomy and Astrophysics**, v. 568, p. A22, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423413>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 71, 83, 84 e 99.
- BEVINGTON, P. R.; ROBINSON, D. **Data Reduction and Error analysis for the Physical Sciences**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003. Citado na página 68.
- BLAS, D.; LESGOURGUES, J.; TRAM, T. The cosmic linear anisotropy solving system (CLASS). part II: Approximation schemes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2011, n. 07, p. 034–034, jul 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2011%2F07%2F034>>. Citado 5 vezes nas páginas 30, 69, 84, 87 e 99.
- BLOMQVIST, M.; BOURBOUX, H. du Mas des; BUSCA, N. G. *et al.* Baryon acoustic oscillations from the cross-correlation of Ly α absorption and quasars in eBOSS DR14. **aap**, v. 629, p. A86, set. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935641>>. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 73, 83, 84 e 100.
- BOLMER, J. **The PyMC MCMC python package**. ESO, 2017. Disponível em: <https://www.sc.eso.org/~bdias/pycoffee/talks/20171207_pymc-mcmc-python.pdf>. Acesso em: 05 Ago. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- BONAMENTE, M. Hypothesis testing and statistics. In: _____. **Statistics and Analysis of Scientific Data**. New York: Springer, 2017. cap. 7, p. 117–146. Disponível em: <https://doi.org/978-1-4939-6572-4_7>. Citado na página 68.
- BONDI, H. The cosmological principle. In: _____. **Cosmology**. 2. ed. London: Cambridge University Press, 1960. cap. 2, p. 9–15. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- BRINCKMANN, T.; LESGOURGUES, J. MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1804.07261, abr. 2018. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv180407261B>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- BROOKS, S.; GELMAN, A.; JONES, G. L.; MENG, X.-L. **Handbooks of Modern Statistical Methods**. [S.l.]: CRC Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.
- CARROLL, B.; OSTLIE, D. Cosmology. In: _____. **An Introduction to Modern Astrophysics**. 2. ed. San Francisco: Pearson Addison-Wesley, 2007. cap. 29, p. 1144–1229. Citado 10 vezes nas páginas 28, 32, 33, 35, 45, 46, 53, 57, 58 e 64.
- CARROLL, S. Cosmology. In: _____. **Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004. cap. 8, p. 323–375. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 117.
- CARROLL, S. M. The cosmological constant. **Living Reviews in Relativity**, v. 4, n. 1, p. 1, Feb 2001. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2001-1>>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.

CHRISTENSEN, N.; MEYER, R.; KNOX, L.; LUEY, B. Bayesian methods for cosmological parameter estimation from cosmic microwave background measurements. **Classical and Quantum Gravity**, v. 18, n. 14, p. 2677–2688, jul. 2001. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001CQGra..18.2677C>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

CID, A.; SANTOS, B.; PIGOZZO, C.; FERREIRA, T.; ALCANIZ, J. Bayesian comparison of interacting scenarios. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 03, p. 030–030, mar 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2019%2F03%2F030>>. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 92.

COE, D. Fisher Matrices and Confidence Ellipses: A Quick-Start Guide and Software. **arXiv e-prints**, p. arXiv:0906.4123, jun. 2009. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0906.4123C>>. Citado na página 70.

COLES, P.; LUCCHIN, F. **Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. 2. ed. Chichester, West Sussex – England: John Wiley & Sons, Ltd, 2002. 512 p. ISBN 0471489093. Citado na página 57.

_____. First principles. In: _____. **Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. 2. ed. Chichester, West Sussex – England: John Wiley & Sons, Ltd, 2002. cap. 1, p. 3–31. ISBN 0471489093. Citado 5 vezes nas páginas 32, 33, 53, 57 e 58.

COMBES, F. .; BOISSÉ, P.; MAZURE, A.; BLANCHARD, A. Cosmology. In: _____. **Galaxies and Cosmology**. 2. ed. Berlin: Springer, 1996. cap. 13, p. 393–436. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

CUCEU, A.; FARR, J.; LEMOS, P.; FONT-RIBERA, A. Baryon Acoustic Oscillations and the Hubble constant: past, present and future. **jcnp**, v. 2019, n. 10, p. 044, out. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019JCAP..10..044C>>. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 73, 83, 84 e 100.

DALARSSON, M.; DALARSSON, N. 24 - the cosmic dynamics. In: DALARSSON, M.; DALARSSON, N. (Ed.). **Tensors, Relativity, and Cosmology**. 2. ed. Amsterdam: Academic Press, 2015. cap. 24, p. 225–235. ISBN 978-0-12-803397-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803397-5.00024-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 117.

_____. 25 - non-static models of the universe. In: DALARSSON, M.; DALARSSON, N. (Ed.). **Tensors, Relativity, and Cosmology**. 2. ed. Amsterdam: Academic Press, 2015. cap. 25, p. 237–246. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-803397-5.00025-X>>. Citado 4 vezes nas páginas 49, 51, 128 e 129.

D'INVERNO, R. The principles of general relativity. In: _____. **Introducing Einstein's Relativity**. New York: Clarendon Press, Oxford University Press, 1992. cap. 9, p. 120–133. Citado na página 68.

DODELSON, S.; SCHMIDT, F. 3 - the fundamental equations of cosmology. In: DODELSON, S.; SCHMIDT, F. (Ed.). **Modern Cosmology (Second Edition)**. Second edition. Academic Press, 2021. cap. 3, p. 57 – 83. ISBN 978-0-12-815948-4. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128159484000097>>. Citado na página 74.

DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. Ix. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers**

of a Mathematical or Physical Character, v. 220, n. 571-581, p. 291–333, 1920. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.1920.0009>>. Citado na página 39.

EINSTEIN, A. Ist die trägheit eines körpers von seinem energieinhalt abhängig? **Annalen der Physik**, v. 323, n. 13, p. 639–641, 1905. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053231314>>. Citado na página 36.

_____. Zur elektrodynamik bewegter körper. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 17, p. 891–921, 1905. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004>>. Citado na página 36.

_____. Die Feldgleichungen der Gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 844–847, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

_____. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 831–839, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....831E>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 38 e 39.

_____. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 778–786, 1915. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....778E>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

_____. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag). **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 799–801, 1915. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:GTN3GYS8>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

_____. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916. [Version translated Into English by Satyendra Nath Bose: *The Foundation of the Generalised Theory of Relativity*]. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

_____. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152.**, 1917. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1917SPAW.....142E>>. Citado 4 vezes nas páginas 27, 32, 38 e 40.

_____. The foundation of the generalised theory of relativity. In: _____. **The Principle of Relativity: Original Papers by A. Einstein and H. Minkowski**. 1. ed. Calcutta, India: Univerity of Calcutta, 1920. cap. 6, p. 89–163. Translated Into English by M.N. Saha and S.N. Bose; With a Historical Introd. by P.C. Mahalanobis. Disponível em: <https://openlibrary.org/books/OL13573608M/The_principle_of_relativity>. Citado na página 38.

_____. Cosmological considerations on the general theory of. In: _____. **The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity**. 1. ed. United States of America: Methuen & Company Limited, 1923. cap. IX, p. 175–188. With notes by A. Sommerfeld. Translated by W. Perrett and G.B. Jeffery. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WakNAQAIAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 38.

_____. The foundation of the generalised theory of relativity. In: _____. **The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity**. 1. ed. United States of America: Methuen & Company Limited, 1923. cap. VII, p. 109–164. With notes by A. Sommerfeld. Translated by W. Perrett and G.B. Jeffery. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WakNAQAIAAJ>>. Citado na página 38.

EISENSTEIN, D. J.; SEO, H.-J.; WHITE, M. On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter. **APJ**, v. 664, n. 2, p. 660–674, ago. 2007. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJ...664..660E>>. Citado na página 73.

EISENSTEIN, D. J.; ZEHAVI, I.; HOGG, D. W. *et al.* Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 633, n. 2, p. 560–574, nov 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F466512>>. Citado na página 73.

EISNSTEIN, A.; STACHEL, J.; PENROSE, R. **Einstein's Miraculous Year: Five Papers That Changed the Face of Physics**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1998. Disponível em: <<https://press.princeton.edu/titles/6272.html>>. Citado na página 36.

ELLIS, G. F. R.; ELST, H. van; MURUGAN, J.; UZAN, J.-P. On the trace-free einstein equations as a viable alternative to general relativity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 28, n. 22, p. 225007, oct 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F28%2F22%2F225007>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 41, 42, 46 e 67.

FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. de F. O. Astronomia e astrofísica: Cosmologia: O universo como um todo. In: _____. Departamento de Astronomia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. cap. 27, p. 639–702. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>>. Acesso em: 10 de Outubro de 2019. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.

_____. Astronomia e astrofísica: Determinação de distâncias. In: _____. Departamento de Astronomia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014. cap. 18, p. 177–186. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>>. Acesso em: 16 de Fevereiro de 2020. Citado na página 59.

FONT-RIBERA, A. *et al.* Quasar-Lyman α Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations. **JCAP**, v. 1405, p. 027, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/05/027>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 73, 83, 84 e 100.

FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, n. 1, p. 377–386, Dec 1922. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01332580>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 40.

_____. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 21, n. 1, p. 326–332, Dec 1924. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01328280>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 40.

GAZZINELLI, R. Em busca do espaço absoluto. In: _____. **Teoria da Relatividade Especial**. 1. ed. Edgard Blucher, 2005. cap. 1, p. 1–23. ISBN 9788521203575. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VaOjBAAACA AJ>>. Citado na página 36.

_____. Postulados da teoria da relatividade especial. In: _____. **Teoria da Relatividade Especial**. 1. ed. Edgard Blucher, 2005. cap. 2, p. 25–38. ISBN 9788521203575. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VaOjBAAACA AJ>>. Citado na página 36.

_____. A transformação de lorentz. In: _____. **Teoria da Relatividade Especial**. 1. ed. Edgard Blucher, 2005. cap. 3, p. 39–60. ISBN 9788521203575. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VaOjBAAACAAJ>>. Citado na página 37.

GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statist. Sci.**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 4, p. 457–472, 11 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/ss/1177011136>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, PAMI-6, n. 6, p. 721–741, 1984. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4767596>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

HARRISON, E. R. Redshifts. In: _____. **Cosmology: the science of the universe**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2000. cap. 15, p. 301–322. Fifth printing 2010. Citado 5 vezes nas páginas 43, 53, 55, 57 e 58.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 97–109, 04 1970. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

HAWLEY, J. F.; HOLCOMB, K. A. Modeling the universe. In: _____. **Foundations of Modern Cosmology**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2005. cap. 3, p. 313–335. Disponível em: <<https://global.oup.com/academic/product/foundations-of-modern-cosmology-9780198530961>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

HEINICKE, C.; HEHL, F. W. The schwarzschild black hole: a general relativistic introduction. In: _____. **The Galactic Black Hole: lectures on general relativity and astrophysics**. London: IOP Publishing Ltd, 2003. cap. 1, p. 3–34. Citado na página 38.

HELENE, O. A. M.; VANIN, V. R. **Tratamento estatístico de dados em física experimental**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher LTDA, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

HENRIQUES, A. B. Cosmologia: O modelo standard da cosmologia. In: _____. **Teoria da Relatividade Geral, Uma Introdução**. 2. ed. Lisboa, Portugal: IST Press, 2009. cap. 7, p. 111–145. Citado 9 vezes nas páginas 41, 42, 49, 51, 52, 128, 129, 130 e 131.

_____. Cosmologia: Princípios físicos e observações. In: _____. **Teoria da Relatividade Geral, Uma Introdução**. 2. ed. Lisboa, Portugal: IST Press, 2009. cap. 6, p. 87–110. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 39.

_____. **Teoria da Relatividade Geral, Uma Introdução**. 2. ed. Lisboa, Portugal: IST Press, 2009. ISBN 9728469780. Citado na página 27.

_____. A teoria da relatividade restrita. In: _____. **Teoria da Relatividade Geral, Uma Introdução**. 2. ed. Lisboa, Portugal: IST Press, 2009. Anexo A, p. 181–201. Citado na página 36.

HOTOKEZAKA, K.; NAKAR, E.; GOTTLIEB, O. *et al.* A Hubble constant measurement from superluminal motion of the jet in GW170817. **Nature Astronomy**, v. 3, p. 940–944, jul. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019NatAs...3..940H>>. Citado na página 92.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 31 e 32.

ISLAM, J. N. The friedmann models. In: _____. **AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL COSMOLOGY**. The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. cap. 4, p. 60–75. Citado na página 46.

_____. The robertson–walker metric. In: _____. **AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL COSMOLOGY**. The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. cap. 3, p. 37–59. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 115.

KAGAN, A.; LANDSMAN, Z. Relation between the covariance and fisher information matrices. **Statistics and Probability Letters**, v. 42, n. 1, p. 7 – 13, 1999. ISSN 0167-7152. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715298001783>>. Citado na página 70.

KARTTUNEN, H.; KRÖGER, P.; OJA, H.; POUTANEN, M.; DONNER, K. Cosmology. In: _____. **Fundamental Astronomy**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. cap. 19, p. 393–414. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-540-34144-4>>. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 38, 40 e 115.

KOLB, E. W.; TUNER, M. S. Robertson-walker metric. In: _____. **The Early Universe**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1990. cap. 2, p. 29–46. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 117.

KOX, A. Einstein’s miraculous year: Five papers that changed the face of physics. **European Journal of Physics**, v. 19, 08 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0143-0807/19/5/013>>. Citado na página 36.

KREMER, G. M. Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation. **arXiv e-prints**, abr. 2014. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014arXiv1404.7083K>>. Citado na página 74.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. Reativistic cosmology. In: _____. **The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics Series – Volume 2**. Fourth revised english edition. U.S.S.R.: Butterwort Heinemann, 1980. cap. 14, p. 382–424. Translated from the Russian by Morton Hamermesh, University of Minnesota. Citado na página 115.

LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, v. 47, p. 49–59, jan. 1927. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L>>. Citado na página 28.

LEWIS, A. Efficient sampling of fast and slow cosmological parameters. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, p. 103529, May 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.103529>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

LIDDLE, A. Advanced topic 2. classic cosmology: Distances and luminosities. In: _____. **An Introduction to Modern Cosmology**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, Institute for Astronomy, University of Edinburgh, 2015. cap. A2, p. 127–139. Citado na página 62.

_____. Newtonian gravity. In: _____. **An Introduction to Modern Cosmology**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, Institute for Astronomy, University of Edinburgh, 2015. cap. 3, p. 21–28. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

LIMA, J. A. S. Alternative dark energy models: an overview. **Brazilian Journal of Physics**, scielo, v. 34, p. 194 – 200, 03 2004. ISSN 0103-9733. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332004000200009>>. Citado na página 29.

LIMA, J. S. **Teste cosmológico com idade de galáxias velhas**. 18 f. Monografia (Bacharelado em Astronomia) — Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2018. Disponível em: <<http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/8452>>. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 38, 40 e 56.

LONGAIR, M. S. An introduction to relativistic gravity. In: _____. **Galaxy Formation**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. cap. 6, p. 173–198. ISBN 978-3-540-73478-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73478-9_6>. Citado na página 39.

MAKLER, M. Lentes gravitacionais: Um rico recurso didático na ocasião da celebração dos 100 anos do eclipse de sobral. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, p. 21–36, 2019. ISSN 2176-0144. Disponível em: <<http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1679>>. Citado na página 64.

MALANEY, R. A.; MATHEWS, G. J. Probing the early universe: a review of primordial nucleosynthesis beyond the standard big bang. **Physics Reports**, v. 229, n. 4, p. 145 – 219, 1993. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390134Y>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.

MAOZ, D. Big-bang cosmology. In: _____. **Astrophysics in a Nutshell**. [S.l.]: Princeton University Press, 2007. cap. 8, p. 191–208. Citado na página 115.

MAROTO, A. L.; RAMIREZ, J. A Conceptual Tour About the Standard Cosmological Model. **arXiv e-prints**, p. astro-ph/0409280, Sep 2004. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2004astro.ph..9280M>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

MARTTENS, R. F. L. C. von. **Cosmologia com interação no setor escuro do Universo**. 119 f. Tese (Doutorado em Física) — PPGFIS, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2017. Disponível em: <<http://repositorio.ufes.br/handle/10/7388>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 75, 78, 79 e 99.

MARTTENS, R. F. vom; CASARINI, L.; ZIMDAHL, W.; HIPÓLITO-RICALDI, W. S.; MOTA, D. F. Does a generalized chaplygin gas correctly describe the cosmological dark sector? **Phys. Dark Univ.**, v. 15, p. 114–124, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.02.001>>. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 79.

MARTTENS, R. von; CASARINI, L.; MOTA, D.; ZIMDAHL, W. Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy. **Physics of the Dark Universe**, v. 23, p. 100248, 2019. ISSN 2212-6864. **arXiv:1807.11380** [astro-ph.CO]. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686418300992>>. Citado 7 vezes nas páginas 29, 74, 75, 78, 87, 92 e 99.

MARTTENS, R. von; LOMBRISER, L.; KUNZ, M.; MARRA, V.; CASARINI, L.; ALCANIZ, J. Dark degeneracy i: Dynamical or interacting dark energy? **Physics of the Dark Universe**,

v. 28, p. 100490, 2020. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686419303292>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 92.

MCMAHON, D.; ALSING, P. Cosmology. In: _____. **Relativity Demystified**. New York, USA: McGraw-Hill Professional, 2005. cap. 12, p. 256–278. ISBN 0071455450. Disponível em: <<https://mhebooklibrary.com/doi/book/10.1036/0071455450>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 52.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1699114>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

MILNE, E. A. World structure and the expansion of the universe. **nat.**, v. 130, p. 9–10, jul. 1932. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/130009a0>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

MITZENMACHER, M.; UPFAL, E. **Probability and Computing Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Letters**, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 04 2015. ISSN 1745-3925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/slv037>>. Citado na página 72.

MORESCO, M. *et al.* Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to z 1.1 from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. **JCAP**, v. 1208, p. 006, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>>. Citado na página 72.

MORESCO, M.; POZZETTI, L.; CIMATTI, A.; JIMENEZ, R.; MARASTON, C.; VERDE, L.; THOMAS, D.; CITRO, A.; TOJEIRO, R.; WILKINSON, D. A 6% measurement of the hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014–014, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2016%2F05%2F014>>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 72 e 83.

MUKHANOV, V. Kinematics and dynamics of an expanding universe. In: _____. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. cap. 1, p. 3–36. Disponível em: <www.cambridge.org/9780521563987>. Citado na página 33.

NARLIKAR, J. V. The friedmann models. In: _____. **Introduction To Cosmology**. 2. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1993. cap. 4, p. 105–134. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 117.

NĂSTASE, H. The expanding universe and the big bang. In: _____. **Cosmology and String Theory**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 3–14. ISBN 978-3-030-15077-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15077-8_1>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.

_____. The propagation of light and measurements of distance, luminosity and mass. In: _____. **Cosmology and String Theory**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 27–39. ISBN 978-3-030-15077-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15077-8_3>. Citado na página 65.

NEWTON, I. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural - O Sistema do Mundo, livros II e III**. 1. ed. São Paulo, SP: Edusp, 2012. [Tradução: André Koch Torres Assis]. Citado na página 36.

_____. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, livro I**. 2. ed. São Paulo, SP: Edusp, 2016. [Tradução: Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sônia Terezinha Gehring, Maria Helena Curcio Célia]. Citado na página 36.

NOBURY, J. W. Einstein field equations. In: _____. **General Relativity and Cosmology For Undergraduates**. Milwaukee: Physics Department, University of Wisconsin-Milwaukee, 1997. cap. 5. Citado na página 115.

NUSSENZVEIG, H. M. Introdução. In: _____. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2013. cap. 1, p. 15–40. Citado na página 59.

OLIVEIRA-FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. 2. ed. [S.l.]: Editora: Livraria da Física, São Paulo, 2004. Citado na página 70.

PADILLA, L. E.; TELLEZ, L. O.; ESCAMILLA, L. A.; VAZQUEZ, J. A. Cosmological parameter inference with Bayesian statistics. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1903.11127, mar. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019arXiv190311127P>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

_____. _____. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1903.11127, mar. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019arXiv190311127P>>. Citado na página 73.

PANDEY, B.; SARKAR, S. Testing homogeneity in the Sloan Digital Sky Survey Data Release Twelve with Shannon entropy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 454, n. 3, p. 2647–2656, 10 2015. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stv2166>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

PAPATHANASIOU, V. Some Characteristic Properties of the Fisher Information Matrix via Cacoullos-Type Inequalities. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 44, n. 2, p. 256–265, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jmva.1993.1014>>. Citado na página 70.

PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, jul. 1965. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 31 e 33.

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDBERGER, G. *et al.* Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F307221>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 71.

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; VALLE, M. D. *et al.* Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. **Nature**, v. 391, n. 6662, p. 51–54, jan. 1998. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/34124>>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 38 e 71.

Planck Collaboration; AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M. *et al.* Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. **Astronomy and Astrophysics**, March 2020. arXiv:1807.06209 [astro-ph.GA]. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 92.

RAVENZWAAIJ, D. van; CASSEY, P.; BROWN, S. D. A simple introduction to markov chain monte-carlo sampling. **Psychon. Bull. Rev.**, Springer, v. 25, p. 143–154, 2018. ISSN 1531-5320. Disponível em: <<https://doi.org/10.3758/s13423-016-1015-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

RIEMER-SØRENSEN, S. **Statistics and model selection in cosmology**. Cosmology Tools in Theory and in Practice - CANTATA Cost-Action Summer School, 2017. Disponível em: <http://icg.port.ac.uk/~jschewts/cantata/L5/Statistics_Notes.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F300499>>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 38 e 71.

RIESS, A. G. *et al.* A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. **Astrophys. J.**, v. 826, n. 1, p. 56, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/0004-637X/826/1/56>>. Citado na página 91.

ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure. **apj**, v. 82, p. 284, nov. 1935. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/143681>>. Citado na página 28.

ROOS, M. Cosmological model. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 5, p. 81–110. Citado 8 vezes nas páginas 27, 28, 38, 43, 46, 49, 51 e 52.

_____. From newton to hubble. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 1, p. 1–23. Citado na página 27.

_____. Special relativity. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 4. ed. [S.l.]: John-Wiley & Sons, 2015. cap. 2, p. 25–47. Citado 4 vezes nas páginas 57, 58, 65 e 115.

ROSS, A. J.; SAMUSHIA, L.; HOWLETT, C.; PERCIVAL, W. J.; BURDEN, A.; MANERA, M. The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 449, n. 1, p. 835–847, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 29, 73, 83, 84 e 100.

RYDEN, B. Cosmic dynamic. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 4, p. 77–104. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado na página 45.

_____. Fundamental observations. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 2, p. 20–47. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado na página 32.

_____. Introduction. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 1, p. 13–19. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado na página 27.

_____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107154834. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 72.

_____. Measuring cosmological parameters. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 6, p. 153–181. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado 6 vezes nas páginas 47, 56, 58, 61, 63 e 65.

_____. Model universes. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 5, p. 105–152. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 52.

_____. Newton versus einstein. In: _____. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. New York, NY: Cambridge University Press, 2017. cap. 3, p. 48–76. ISBN 9781107154834. Disponível em: <www.cambridge.org/9781107154834>. Citado 6 vezes nas páginas 39, 40, 41, 53, 57 e 58.

SALINAS, S. R. A. A física do século xx. **Estudos Avançados**, scielo, v. 24, p. 369 – 374, 2010. ISSN 0103-4014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-40142010000100025>>. Citado na página 35.

SAMI, M. A primer on problems and prospects of dark energy. **arXiv e-prints**, p. arXiv:0904.3445, abr. 2009. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0904.3445S>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 67.

SCHNEIDER, P. Cosmology i: Homogeneous isotropic world models. In: _____. **Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. cap. 4, p. 173–210. Disponível em: <<https://www.doi.org/10.1007/978-3-642-54083-7>>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 45.

SCHOMBERT, J.; MCGAUGH, S.; LELLI, F. Using The Baryonic Tully-Fisher Relation to Measure H_0 . **arXiv e-prints**, p. arXiv:2006.08615, jun. 2020. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020arXiv200608615S>>. Citado na página 92.

SCHRAMM, D. N. Big bang nucleosynthesis: the standard model and alternatives. **Physica Scripta**, IOP Publishing, T36, p. 22–29, jan 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/02F0031-8949%2F1991%2Ft36%2F003>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.

SCHUTZ, B. F. Comology. In: _____. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. New York, United States: Cambridge University Press, 2009. cap. 12, p. 335–370. Citado na página 61.

_____. Perfect fluids in special relativity. In: _____. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. New York, United States: Cambridge University Press, 2009. cap. 4, p. 84–110. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

SCOLNIC, D. M.; JONES, D. O.; REST, A. *et al.* The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe ia from pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 859, n. 2, p. 101, may 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>>. Citado 7 vezes nas páginas 29, 62, 71, 83, 84, 92 e 99.

SHARMA, S. Markov chain monte carlo methods for bayesian data analysis in astronomy. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 55, n. 1, p. 213–259, Aug 2017. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122339>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Phys. Rev.**, D71, p. 123001, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.123001>>. Citado na página 72.

SITTER, W. de. On einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 78, n. 1, p. 3–28, 11 1917. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/78.1.3>>. Citado na página 27.

SMOOT, G.; BENNETT, C.; WEBER *et al.* COBE Differential Microwave Radiometers: Instrument Design and Implementation. **apj**, v. 360, p. 685, set. 1990. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990ApJ...360..685S>>. Citado na página 29.

SOUZA, R. de. **Introdução à Cosmologia**: A expansão do universo. 2007. Notas de Aulas: Capítulo 2. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/intrcosm/Notas/index.html>>. Acesso em: 10 de Setembro de 2019. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

SOUZA, R. E. de. Do geocentrismo ao princípio cosmológico. In: _____. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo, SP,: Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, 2004. cap. 1, p. 17–40. ISBN 9788531408434. Citado na página 27.

_____. O universo em expansão. In: _____. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo, SP,: Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, 2004. cap. 2, p. 41–80. ISBN 9788531408434. Citado na página 34.

SPEAGLE, J. S. A Conceptual Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1909.12313, set. 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019arXiv190912313S>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

STERN, D.; JIMENEZ, R.; VERDE, L.; KAMIONKOWSKI, M.; STANFORD, S. A. Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I: H(z) Measurements. **JCAP**, v. 1002, p. 008, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/02/008>>. Citado na página 72.

SYMON, K. R. Gravitação. In: _____. **Mecânica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996. cap. 6, p. 291–302. Citado na página 34.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. 2. ed. Sausalito, California: University Science Books, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.

TERZIĆ, B. **PHYS 652 - Astrophysics Course Physics**. NICADD, Northern Illinois University, 2008. Notes. Disponível em: <http://nicadd.niu.edu/~bterzic/PHYS652/PHYS652_notes.pdf>. Acesso em: 18 de Outubro de 2019 – 02 de Junho de 2020. Citado 11 vezes nas páginas 39, 41, 42, 49, 51, 52, 115, 128, 129, 130 e 131.

VALKENBURG, W.; MARRA, V.; CLARKSON, C. Testing the Copernican principle by constraining spatial homogeneity. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 438, n. 1, p. L6–L10, 11 2013. ISSN 1745-3925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt140>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

VATS, D.; KNUDSON, C. Revisiting the Gelman-Rubin Diagnostic. **arXiv e-prints**, p. arXiv:1812.09384, dez. 2018. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv181209384V>>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 1, p. 3160, 2014. ISSN 1434-6062. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3160-4>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 67.

VERRIER, U. L. Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris)**, v. 49, p. 379–383, 1859. Disponível em: <<https://archive.org/stream/comptesrendusheb49acad#page/378/mode/2up>>. Citado na página 39.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher LTDA, 1996. (4a reimpressão, 2005). Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

WALKER, A. G. On milne's theory of world-structure*. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s2-42, n. 1, p. 90–127, 1937. Disponível em: <<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.90>>. Citado na página 28.

WANG, Y.; WANDS, D.; XU, L.; DE-SANTIAGO, J.; HOJJATI, A. Cosmological constraints on a decomposed chaplygin gas. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, p. 083503, Apr 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.083503>>. Citado na página 78.

WEINBERG, S. Cosmography. In: _____. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. [S.l.]: Wiley, 1972. cap. 14, p. 407–468. Citado 5 vezes nas páginas 39, 43, 53, 57 e 58.

_____. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 67.

_____. The expansion of the universe. In: _____. **Cosmology**. 1. ed. Oxford University Press, New York, United States, 2008. cap. 1, p. 1–100. Disponível em: <<https://global.oup.com/academic/product/cosmology-9780198526827>>. Citado 11 vezes nas páginas 38, 42, 43, 46, 47, 51, 52, 53, 57, 58 e 62.

WILSON, R. W.; PENZIAS, A. A. Isotropy of cosmic background radiation at 4080 megahertz. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 156, n. 3778, p. 1100–1101, 1967. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/156/3778/1100>>. Citado na página 33.

YANG, W.; PAN, S.; BARROW, J. D. Large-scale stability and astronomical constraints for coupled dark-energy models. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 97, p. 043529, Feb 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.043529>>. Citado na página 76.

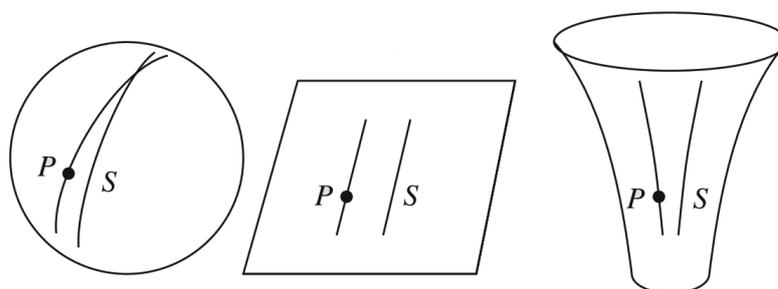
ZHANG, C.; ZHANG, H.; YUAN, S.; LIU, S.; ZHANG, T.-J.; SUN, Y.-C. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. **Research in Astronomy and Astrophysics**, IOP Publishing, v. 14, n. 10, p. 1221–1233, sep 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1674-4527%2F14%2F10%2F002>>. Citado na página 72.

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA MÉTRICA FLRW E DAS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

A.1 Obtenção da Métrica FLRW

A única métrica, de forma geral, que atende a isotropia e homogeneidade do Universo é a métrica FLRW. Se temos um espaço homogêneo, ele precisa conter a mesma curvatura para todos os lugares do Universo. Como vimos no [Capítulo 2](#), existem apenas três possibilidades de curvatura: plana, positiva e negativa. Em duas dimensões essa geometria é representada de acordo com a [Figura A.1.1](#) (MAOZ, 2007; NOBURY, 1997; TERZIĆ, 2008; LANDAU; LIFSHITZ, 1980; ROOS, 2015c; ISLAM, 2004b; KOLB; TUNER, 1990). Para uma esfera de

Figura A.1.1 – Representação de geometrias bidimensionais, com superfície esférica, plana e hiperbólica, no sentido da esquerda para direita das imagens, respectivamente.



Fonte: Adaptada de [Karttunen et al. \(2007\)](#).

3-dimensões de raio R (constante) possui curvatura constante para todos os pontos na superfície 2-dimensões, de modo que, obedece a seguinte relação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (\text{A.1.1})$$

A derivada de [Equação A.1.1](#) fornece:

$$xdx + ydy + zdz = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Um elemento de linha em um espaço euclidiano de 3-dimensões é dado por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (\text{A.1.3})$$

A coordenada z não precisa ser colocada na descrição de um espaço curvado de 2-dimensões incorporado num espaço 3-dimensões, pois, aqui trata-se medidas de distâncias na superfície. Por outro lado, a geodésica de uma esfera são círculos em torno da esfera. Em coordenadas esféricas temos:

$$x = R \sin \theta \sin \phi, \quad y = R \sin \theta \cos \phi, \quad z = R \cos \theta, \quad (\text{A.1.4})$$

e o elemento de linha é reescrito por:

$$dl^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{A.1.5})$$

porém como R aqui não é uma coordenada, temos: $r = R \implies dr = 0$. Assim,

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.1.6})$$

Estendendo o conceito para 4-dimensões (hiperesfera), com superfície positivamente curvada de 3-dimensões, incorporada num espaço de 4 coordenadas: x, y, z e w , seguindo o mesmo procedimento temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2. \quad (\text{A.1.7})$$

A derivada de [Equação A.1.7](#) fornece:

$$xdx + ydy + zdz + wdw = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

Um elemento de linha em um espaço euclidiano de 4-dimensões é dado por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (\text{A.1.9})$$

Fazendo $x^2 + y^2 + z^2 = r'^2$, onde r' é coordenada radial do espaço 3-dimensões. Dessa forma, podemos reescrever o elemento de linha em termos da coordenadas esféricas por:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r'^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} = \frac{R^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= \frac{dr'^2}{1 - \frac{r'^2}{R^2}} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = R^2 \left(\frac{dr'^2/R^2}{1 - k \frac{r'^2}{R^2}} + \frac{r'^2}{R^2} d\theta^2 + \frac{r'^2}{R^2} \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Na última expressão, foi introduzido a constante k para diferentes curvaturas, onde para o caso em questão $k = 1$ (hiperesfera). Admitindo que $k = 0$ temos a relação euclidiana, já quando

$k = -1$, temos um espaço tridimensional com curvatura negativa. Fazendo as seguintes definições, podemos expressar as coordenadas de forma adimensional:

$$r \equiv \frac{r'}{R}, \quad dr \equiv \frac{dr'}{R} \quad (\text{A.1.11})$$

e adicionando a dimensão temporal, o elemento de linha para a separação entre dois eventos no espaço-tempo é reescrito por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 + R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (\text{A.1.12})$$

Esta trata-se de um elemento de linha na métrica FLRW, isto é, os coeficientes desse intervalo é representado pelas componentes da métrica FLRW, dada de acordo com a [Equação 2.4.10](#). O fator R que multiplica a parte espacial adimensional, trata-se, na verdade, do fator de escala $R(t)$.

A.2 Obtenção das Equações de Friedmann

Partindo da métrica FLRW, [Equação 2.4.10](#), onde as componentes é dada por (DALARSSON; DALARSSON, 2015a; NARLIKAR, 1993; KOLB; TUNER, 1990; CARROLL, 2004):

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1; & g_{11} &= R^2(t)/(1 - kr^2); & g_{22} &= R^2(t)r^2; \\ g_{33} &= R^2(t)r^2 \text{sen}^2 \theta; & g_{\mu\nu} &= 0, \quad \text{para } \mu \neq \nu; \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

ou ainda em termos contravariantes:

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1; & g^{11} &= \frac{1}{R^2(t)/(1 - kr^2)}; & g^{22} &= \frac{1}{R^2(t)r^2}; \\ g^{33} &= \frac{1}{R^2(t)r^2 \text{sen}^2 \theta}; & g^{\mu\nu} &= 0, \quad \text{para } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Usando as seguintes definições:

$$x^\mu \quad \Longrightarrow \quad x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv r, \quad x^2 \equiv \theta, \quad x^3 \equiv \varphi, \quad (\text{A.2.3})$$

com notações

$$\partial_\mu(A^\nu) \equiv \frac{\partial(A^\nu)}{\partial x^\mu} \equiv (A^\nu)_{,\mu}, \quad (\text{A.2.4})$$

onde: $\mu = 0, 1, 2, 3$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \partial_0 A^\nu &= \frac{1}{c} \partial_t A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^\nu}{\partial t}, \\ \partial_1 A^\nu &= \partial_r A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^1} = \frac{\partial A^\nu}{\partial r}, \\ \partial_2 A^\nu &= \partial_\theta A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^2} = \frac{\partial A^\nu}{\partial \theta}, \\ \partial_3 A^\nu &= \partial_\varphi A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^3} = \frac{\partial A^\nu}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

Calculando as derivadas das componentes da [Equação A.2.1](#) em termos μ , temos:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu g_{00} &= 0, \\
\partial_0 g_{11} &= \frac{1}{c} \partial_t g_{11} = \frac{1}{c} \frac{2R\dot{R}}{(1-kr^2)}, \quad \partial_r g_{11} = \frac{2krR^2}{(1-kr^2)^2}, \quad \partial_\theta g_{11} = \partial_\varphi g_{11} = 0, \\
\partial_0 g_{22} &= \frac{1}{c} \partial_t g_{22} = \frac{1}{c} 2R\dot{R}r^2, \quad \partial_r g_{22} = 2R^2 r, \quad \partial_\theta g_{22} = \partial_\varphi g_{22} = 0, \\
\partial_0 g_{33} &= \frac{1}{c} \partial_t g_{33} = \frac{1}{c} 2R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta, \quad \partial_r g_{33} = 2R^2 r \sin^2 \theta, \\
\partial_\theta g_{33} &= 2R^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad \partial_\varphi g_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{A.2.6}$$

Os símbolos de Christoffel para a métrica FLRW ([Equação 2.4.10](#)) podem ser obtidos usando a definição:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{A.2.7}$$

ou

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\mu} &= g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma,\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\gamma\beta,\mu} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\mu,\gamma}).
\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

Dessa forma, os resultados do símbolos de Christoffel para os valores calculados na [Equação A.2.6](#):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{0,01} &= \Gamma_{0,10} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{0,02} &= \Gamma_{0,20} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{00} + \partial_0 g_{20} - \partial_0 g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{0,03} &= \Gamma_{0,30} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{00} + \partial_0 g_{30} - \partial_0 g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{0,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{01} + \partial_r g_{10} - \partial_0 g_{11}) = -\frac{1}{c} \frac{R\dot{R}}{(1-kr^2)} \\
\Gamma_{0,12} &= \Gamma_{0,21} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{01} + \partial_r g_{20} - \partial_0 g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{0,13} &= \Gamma_{0,31} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{01} + \partial_r g_{30} - \partial_0 g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{0,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{02} + \partial_\theta g_{20} - \partial_0 g_{22}) = -\frac{1}{c} R\dot{R}r^2 \\
\Gamma_{0,23} &= \Gamma_{0,32} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{02} + \partial_\theta g_{30} - \partial_0 g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{0,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{03} + \partial_\varphi g_{30} - \partial_0 g_{33}) = -\frac{1}{c} R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{A.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_r g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{1,01} &= \Gamma_{1,10} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_r g_{01}) = \frac{1}{c} \frac{R\dot{R}}{(1-kr^2)} \\
\Gamma_{1,02} &= \Gamma_{1,20} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_r g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{1,03} &= \Gamma_{1,30} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_r g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{11} + \partial_r g_{11} - \partial_r g_{11}) = + \frac{R^2 k r}{(1-kr^2)^2} \\
\Gamma_{1,12} &= \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{11} + \partial_r g_{21} - \partial_r g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{1,13} &= \Gamma_{1,31} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{11} + \partial_r g_{31} - \partial_r g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{1,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{12} + \partial_\theta g_{21} - \partial_r g_{22}) = -R^2 r \\
\Gamma_{1,23} &= \Gamma_{1,32} = \frac{1}{2} (\partial_3 g_{12} + \partial_\theta g_{31} - \partial_r g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{1,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{13} + \partial_\phi g_{31} - \partial_r g_{33}) = -R^2 r \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{A.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_\theta g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{2,01} &= \Gamma_{2,10} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_\theta g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{2,02} &= \Gamma_{2,20} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_\theta g_{02}) = + \frac{1}{c} R\dot{R}r^2 \\
\Gamma_{2,03} &= \Gamma_{2,30} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{20} + \partial_0 g_{32} - \partial_\theta g_{03}) = 0 \\
\Gamma_{2,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{21} + \partial_r g_{12} - \partial_\theta g_{11}) = 0 \\
\Gamma_{2,12} &= \Gamma_{2,21} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{21} + \partial_r g_{22} - \partial_\theta g_{12}) = +R^2 r \\
\Gamma_{2,13} &= \Gamma_{2,31} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{21} + \partial_r g_{32} - \partial_\theta g_{13}) = 0 \\
\Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{22} + \partial_\theta g_{22} - \partial_\theta g_{22}) = 0 \\
\Gamma_{2,23} &= \Gamma_{2,32} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{22} + \partial_\theta g_{32} - \partial_\theta g_{23}) = 0 \\
\Gamma_{2,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{23} + \partial_\phi g_{32} - \partial_\theta g_{33}) = -R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{A.2.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_\phi g_{00}) = 0 \\
\Gamma_{3,01} &= \Gamma_{3,10} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_\phi g_{01}) = 0 \\
\Gamma_{3,02} &= \Gamma_{3,20} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_\phi g_{02}) = 0 \\
\Gamma_{3,03} &= \Gamma_{3,30} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_\phi g_{03}) = \frac{1}{c} R \dot{R} r^2 \sin^2 \theta \\
\Gamma_{3,11} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{31} + \partial_r g_{13} - \partial_\phi g_{11}) = 0 \\
\Gamma_{3,12} &= \Gamma_{3,21} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{31} + \partial_r g_{23} - \partial_\phi g_{12}) = 0 \\
\Gamma_{3,13} &= \Gamma_{3,31} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{31} + \partial_r g_{33} - \partial_\phi g_{13}) = +R^2 r \sin^2 \theta \\
\Gamma_{3,22} &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{32} + \partial_\theta g_{23} - \partial_\phi g_{22}) = 0 \\
\Gamma_{3,23} &= \Gamma_{3,32} = \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{32} + \partial_\theta g_{33} - \partial_\phi g_{23}) = +R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{3,33} &= \frac{1}{2} (\partial_\phi g_{33} + \partial_\phi g_{33} - \partial_\phi g_{33}) = 0.
\end{aligned} \tag{A.2.12}$$

Da Equação A.2.8 vimos que:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma,\beta\mu}. \tag{A.2.13}$$

Daí, das Equações (A.2.2, A.2.9, A.2.10, A.2.11 e A.2.12), temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,00} = g^{00} \Gamma_{0,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,01} = g^{00} \Gamma_{0,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,02} = g^{00} \Gamma_{0,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,03} = g^{00} \Gamma_{0,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^0 &= g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,11} = g^{00} \Gamma_{0,11} = +\frac{1}{c} \frac{R \dot{R}}{(1 - kr^2)} \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{21}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,12} = g^{00} \Gamma_{0,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,13} = g^{00} \Gamma_{0,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^0 &= g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,22} = g^{00} \Gamma_{0,22} = +R \dot{R} r^2 \\
\Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{32}^0 = g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,23} = g^{00} \Gamma_{0,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^0 &= g^{0\gamma} \Gamma_{\gamma,33} = g^{00} \Gamma_{0,33} = +\frac{1}{c} R \dot{R} r^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{A.2.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,00} = g^{11}\Gamma_{1,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,01} = g^{11}\Gamma_{1,01} = +\frac{1}{c}\frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,02} = g^{11}\Gamma_{1,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,03} = g^{11}\Gamma_{1,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^1 &= g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,11} = g^{11}\Gamma_{1,11} = +\frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,12} = g^{11}\Gamma_{1,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,13} = g^{11}\Gamma_{1,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^1 &= g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,22} = g^{11}\Gamma_{1,22} = -r(1-kr^2) \\
\Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,23} = g^{11}\Gamma_{1,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^1 &= g^{1\gamma}\Gamma_{\gamma,33} = g^{11}\Gamma_{1,33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{A.2.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,00} = g^{22}\Gamma_{2,00} = 0 \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,01} = g^{22}\Gamma_{2,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,02} = g^{22}\Gamma_{2,02} = +\frac{1}{c}\frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,03} = g^{22}\Gamma_{2,03} = 0 \\
\Gamma_{11}^2 &= g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,11} = g^{22}\Gamma_{2,11} = 0 \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,12} = g^{22}\Gamma_{2,12} = +\frac{1}{r} \\
\Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,12} = g^{22}\Gamma_{2,12} = 0 \\
\Gamma_{22}^2 &= g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,22} = g^{22}\Gamma_{2,22} = 0 \\
\Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = g^{2\gamma}\Gamma_{\gamma,23} = g^{22}\Gamma_{2,23} = 0 \\
\Gamma_{00}^2 &= g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,00} = g^{22}\Gamma_{3,00} = -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{A.2.16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,01} = g^{33}\Gamma_{3,01} = 0 \\
\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,02} = g^{33}\Gamma_{3,02} = 0 \\
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,03} = g^{33}\Gamma_{3,03} = +\frac{1}{c}\frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{11}^3 &= g^{3j}\Gamma_{\gamma,11} = g^{33}\Gamma_{3,11} = 0 \\
\Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,12} = g^{33}\Gamma_{3,12} = 0 \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,12} = g^{33}\Gamma_{3,12} = +\frac{1}{r} \\
\Gamma_{22}^3 &= g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,22} = g^{33}\Gamma_{3,22} = 0 \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,23} = g^{33}\Gamma_{3,23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \\
\Gamma_{33}^3 &= g^{3\gamma}\Gamma_{\gamma,33} = g^{33}\Gamma_{3,33} = 0
\end{aligned} \tag{A.2.17}$$

Destes resultados concluímos que:

$$\Gamma_{00}^\beta \equiv 0, \quad \Gamma_{0\beta}^0 = \Gamma_{\beta 0}^0 \equiv 0, \quad (\text{A.2.18})$$

e

$$\Gamma_{ab}^0 = \frac{1}{c} \dot{R} g_{ab}, \quad \Gamma_{a0}^b = \Gamma_{0a}^b = \delta_a^b \frac{1}{c} \frac{\dot{R}}{R}, \quad (\text{A.2.19})$$

onde $(a, b = 1, 2, 3)$. Ainda temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^0 &\equiv 0, \quad \Gamma_{ab}^1 \equiv 0 \quad \text{quando} \quad a \neq b, \\ \Gamma_{ab}^2 &= \delta_a^1 \delta_b^2 \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{ab}^3 = \delta_a^1 \delta_b^3 \frac{1}{r} + \delta_a^2 \delta_b^3 \cot \theta \quad \text{quando} \quad a \neq b. \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

Utilizando as Equação A.2.19 e Equação A.2.20, obtemos que

$$\partial_\gamma \Gamma_{ab}^\gamma = 0 \quad \text{quando} \quad a \neq b, \quad \partial_b \partial_b \Gamma_{a0}^b = 0. \quad (\text{A.2.21})$$

Assim:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\gamma}^\gamma &= \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 = +\frac{3}{c} \frac{\dot{R}}{R} \\ \Gamma_{1\gamma}^\gamma &= \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 = \frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \\ \Gamma_{2\gamma}^\gamma &= \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \\ \Gamma_{3\gamma}^\gamma &= \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

Da Equação A.2.22, pode-se concluir que

$$\partial_b \Gamma_{a\gamma}^\gamma = 0 \quad \text{quando} \quad a \neq b, \quad \partial_0 \Gamma_{a\gamma}^\gamma = 0. \quad (\text{A.2.23})$$

O tensor de Ricci para a métrica FLRW (Equação 2.4.10) pode ser obtido usando a definição

$$R_{\beta\mu} = R_{\beta\mu\gamma}^\gamma \equiv \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \quad (\text{A.2.24})$$

sendo o escalar de Ricci definido por: $R = g^{\beta\mu} R_{\beta\mu}$. E o tensor de Ricci é um tensor simétrico, isto é, $R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}$, possuindo assim, apenas, 10 componentes que são independentes. Para a métrica FLRW é fornecido:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{00}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\gamma - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{01} &= R_{10} = \partial_r \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{01}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\gamma - \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{02} &= R_{20} = \partial_\theta \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{02}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\gamma - \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{03} &= R_{30} = \partial_\phi \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{03}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\gamma - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{11}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\gamma - \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{12} &= R_{21} = \partial_\theta \Gamma_{1\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{12}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\gamma - \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{13} &= R_{31} = \partial_\phi \Gamma_{1\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{13}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\gamma - \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{22} &= \partial_\theta \Gamma_{2\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{22}^\gamma + \Gamma_{2\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\gamma - \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{23} &= R_{32} = \partial_\phi \Gamma_{2\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{23}^\gamma + \Gamma_{2\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\gamma - \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma, \\ R_{33} &= \partial_\phi \Gamma_{3\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{33}^\gamma + \Gamma_{3\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\gamma - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.2.25})$$

Estes são as 10 componentes individuais do tensor de Ricci, os símbolos de *Christoffel* são os da métrica FLRW, porém o cálculo pode ser simplificado se usarmos os resultados obtidos nas [Equação A.2.18](#)–[Equação A.2.23](#). De modo, quando $a, b = 1, 2, 3$ e sendo $a \neq b$, obtemos

$$R_{ab} = \partial_b \Gamma_{a\gamma}^\gamma - \partial_\gamma \Gamma_{ab}^\gamma + \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma - \Gamma_{ab}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma. \quad (\text{A.2.26})$$

Da [Equação A.2.21](#)–[Equação A.2.23](#), temos que os dois primeiros termos da direita da [Equação A.2.26](#) desaparecem. Dessa forma, temos que:

$$R_{ab} = \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma - \Gamma_{ab}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \Gamma_{ab}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma - \Gamma_{ab}^2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma. \quad (\text{A.2.27})$$

Por outro lado, usando $\Gamma_{ab}^0 = 0$ e também $\Gamma_{ab}^1 = 0$ quando $a \neq b$ e da [Equação A.2.20](#), resulta

$$R_{ab} = \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma - \delta_a^1 \delta_b^2 \frac{\cot \theta}{r} \quad \text{quando } a \neq b, \quad (\text{A.2.28})$$

sendo que, o segundo termo a direita na [Equação A.2.28](#) só é diferente de zero quando ($ab = 12$).

Dessa forma, podemos calcular o primeiro termo e expressar por

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma &= \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^0 + \Gamma_{aw}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^w, \\ \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma &= \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0b}^0 + \Gamma_{\alpha 0}^s \Gamma_{sb}^0 + \Gamma_{aw}^0 \Gamma_{0b}^w + \Gamma_{aw}^s \Gamma_{\sigma b}^w. \end{aligned} \quad (\text{A.2.29})$$

Os três primeiros termos do lado direito da [Equação A.2.29](#) desaparecem, daí

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma &= \Gamma_{aw}^s \Gamma_{sb}^w = \Gamma_{aw}^1 \Gamma_{1b}^w + \Gamma_{aw}^2 \Gamma_{2b}^w + \Gamma_{aw}^3 \Gamma_{3b}^w \\ &= \Gamma_{a1}^1 \Gamma_{1b}^1 + \Gamma_{a2}^1 \Gamma_{1b}^2 + \Gamma_{a3}^1 \Gamma_{1b}^3 + \Gamma_{a1}^2 \Gamma_{2b}^1 + \Gamma_{a2}^2 \Gamma_{2b}^2 + \Gamma_{a3}^2 \Gamma_{2b}^3 \\ &\quad + \Gamma_{a1}^3 \Gamma_{3b}^1 + \Gamma_{a2}^3 \Gamma_{3b}^2 + \Gamma_{a3}^3 \Gamma_{3b}^3. \end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

Fazendo uso da [Equação A.2.30](#), temos que:

$$\Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha b}^\gamma = \delta_a^1 \delta_b^2 \Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 = \delta_a^1 \delta_b^2 \frac{\cot \theta}{r}. \quad (\text{A.2.31})$$

Assim, substituindo a [Equação A.2.31](#) na [Equação A.2.28](#), é obtido

$$R_{ab} = R_{ba} = 0, \quad (a \neq b). \quad (\text{A.2.32})$$

Por outro lado, fazendo $a = 1, 2, 3$ podemos obter

$$R_{a0} = \partial_0 \Gamma_{a\gamma}^\gamma - \partial_0 \Gamma_{a0}^0 - \partial_b \Gamma_{a0}^b + \Gamma_{a\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\gamma - \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma. \quad (\text{A.2.33})$$

Fazendo uso do que foi obtido na [Equação A.2.18](#), [Equação A.2.21](#) e [Equação A.2.23](#), temos que os três primeiros termos a direita na [Equação A.2.33](#) se anulam. Assim,

$$R_{a0} = \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0 + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^b - \Gamma_{a0}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma - \Gamma_{a0}^b \Gamma_{b\gamma}^\gamma. \quad (\text{A.2.34})$$

Fazendo uso do que foi obtido na [Equação A.2.18](#), o primeiro e terceiro termo do lado direito da [Equação A.2.34](#) se cancelam, de modo que, reescrevemos:

$$R_{a0} = \Gamma_{ab}^0 \Gamma_{00}^b + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\nu 0}^b - \Gamma_{a0}^b \Gamma_{b0}^0 - \Gamma_{a0}^b \Gamma_{b\nu}^\nu. \quad (\text{A.2.35})$$

Fazendo uso outra vez do que foi obtido na [Equação A.2.18](#), o primeiro e terceiro termo do lado direito da [Equação A.2.35](#) se cancelam e assim temos:

$$R_{a0} = \Gamma_{ab}^{\nu} \Gamma_{\nu 0}^b - \Gamma_{a0}^b \Gamma_{b\nu}^{\nu}. \quad (\text{A.2.36})$$

Fazendo uso do que foi obtido na [Equação A.2.30](#), podemos mostrar que

$$R_{a0} \equiv 0 \quad (a = 1, 2, 3). \quad (\text{A.2.37})$$

Dos resultados obtidos nas [Equação A.2.30](#) e [Equação A.2.37](#), pode-se concluir que as componentes fora da diagonal do tensor de Ricci são idênticas e iguais a zero

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta} = 0 \quad (\beta \neq \mu). \quad (\text{A.2.38})$$

Dessa forma, apenas as componentes da diagonal não são triviais. Por simplicidade, iremos adotar daqui por diante $c \equiv 1$, mas sabendo que:

$$\dot{R}(t) = \frac{dR(t)}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{dR(t)}{dt}, \quad (\text{A.2.39})$$

e no final recuperaremos a expressão original. Fazendo uso dos resultados obtidos em [Equação A.2.18](#)–[Equação A.2.23](#), temos

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\gamma}^{\gamma} + \Gamma_{0\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} = 3 \partial_0 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + (\Gamma_{01}^1)^2 + (\Gamma_{02}^2)^2 + (\Gamma_{03}^3)^2 = 3 \frac{\ddot{R}}{R} \quad (\text{A.2.40})$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1\gamma}^{\gamma} - \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_r \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{1\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\gamma}^{\gamma} \\ &= \partial_r \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) - \partial_0 \left(\frac{\dot{R}R}{1-kr^2} \right) - \partial_r \left(\frac{kr}{1-kr^2} \right) + \frac{2\dot{R}^2}{1-kr^2} + \frac{k^2 r^2}{(1-kr^2)^2} \\ &\quad + \frac{2}{r^2} - \frac{3\dot{R}^2}{1-kr^2} - \frac{kr}{1-kr^2} \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) = -\frac{R^2}{1-kr^2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.41})$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_{\theta} \Gamma_{2\gamma}^{\gamma} - \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_r \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{2\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^{\gamma} - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\gamma}^{\gamma} \\ &= \partial_{\theta} (\cot \theta) - \partial_0 (R\dot{R}r^2) - \partial_r [-r(1-kr^2)] + 2\dot{R}^2 r^2 - 2(1-kr^2) \\ &\quad + \cot^2 \theta - 3\dot{R}^2 r^2 + 2 - kr^2 = -R^2 r^2 \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.42})$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= -\partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_r \Gamma_{33}^1 - \partial_{\theta} \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{3\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^{\gamma} - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\gamma}^{\gamma} \\ &= -\partial_0 (R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta) - \partial_r [-r(1-kr^2) \sin^2 \theta] - \partial_{\theta} (-\sin \theta \cos \theta) + 2\dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta \\ &\quad - 2(1-kr^2) \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - 3\dot{R}^2 r^2 \sin^2 \theta + (2-kr^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= -R^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2.43})$$

que ainda podem ser reescritos em termos das componentes covariantes e contravariante por meio da [Equação A.2.8](#)

$$R_0^0 = g^{00}R_{00} = 3\frac{\dot{R}}{R}; \quad (\text{A.2.44})$$

$$R_1^1 = g^{11}R_{11} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}; \quad (\text{A.2.45})$$

$$R_2^2 = g^{22}R_{22} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}; \quad (\text{A.2.46})$$

$$R_3^3 = g^{33}R_{33} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}, \quad (\text{A.2.47})$$

sendo assim, o escalar de Ricci $R \equiv R^\gamma_\gamma$ é dado por

$$R^\gamma_\gamma = 3\frac{\ddot{R}}{R} + 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2}\right) = 6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right). \quad (\text{A.2.48})$$

Por outro lado, podemos reescrever também, por facilidade, a equação de campos de Einstein ([Equação 2.4.6](#)) em termos das componentes contravariante e covariante

$$G_\mu^\beta = R_\mu^\beta - \frac{1}{2}\delta_\mu^\beta R^\gamma_\gamma = \frac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\beta, \quad (\text{A.2.49})$$

onde G_μ^β é chamado de tensor de Einstein. Dessa forma, substituindo as [Equação A.2.44](#) – [Equação A.2.47](#) na [Equação A.2.48](#), temos

$$G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R^\gamma_\gamma = 3\frac{\dot{R}}{R} - 3\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right) = -3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} \quad (\text{A.2.50})$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = R_1^1 - \frac{1}{2}R^\gamma_\gamma = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} - 3\frac{\dot{R}}{R} - 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = -\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2}\right). \quad (\text{A.2.51})$$

Recuperando a expressão dada em [Equação A.2.39](#), reescrevemos a [Equação A.2.50](#)–[Equação A.2.51](#) por:

$$G_0^0 = -\frac{3}{c^2}\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2}, \quad (\text{A.2.52})$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{c^2}\left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2}\right). \quad (\text{A.2.53})$$

Essas são componentes do tensor de Einstein para métrica FLRW.

Por outro lado, O tensor momento-energia dado na [Equação 2.5.6](#), que descreve um fluido perfeito, podemos reescrever também em termos de componentes covariantes e contravariantes

$$T_\mu^\beta = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.54})$$

$$T_\mu^\beta = (P + \rho c^2)U_\mu U^\beta + \delta_\mu^\beta P, \quad (\text{A.2.55})$$

onde

$$U^0 = 1, \quad U_0 = -1, \quad U^a = 0 \quad (a = 1, 2, 3). \quad (\text{A.2.56})$$

e assim, temos:

$$T_0^0 = -\rho c^2, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P. \quad (\text{A.2.57})$$

Fazendo uso da [Equação A.2.49](#) e a partir dos resultados das componentes do tensor momento-energia ([Equação A.2.57](#)) e do tensor de campos de Einstein ([Equação A.2.52](#) – [Equação A.2.53](#)), obtemos, finalmente, as equações de Friedmann:

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (\text{A.2.58})$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P. \quad (\text{A.2.59})$$

Multiplicando a [Equação A.2.58](#) por 3 e somando com a [Equação A.2.59](#), e depois substituindo a [Equação A.2.58](#) na [Equação A.2.59](#), podemos ainda expressá-las por

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2kc^2}{R^2} = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho c^2 - P), \quad (\text{A.2.60})$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P). \quad (\text{A.2.61})$$

SOLUÇÕES E RESOLUÇÕES DE EXPRESSÕES

B.1 Resolução de Algumas Expressões

B.1.1 O Redshift Cosmológico

Da [Equação 2.6.7](#), se fizermos:

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = f(t_0 + \delta t_0) - f(t_1 + \delta t_1), \quad (\text{B.1.1})$$

temos também que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} &= (f(t_1) - f(t_1 + \delta t_1)) + (f(t_0) - f(t_1)) + (f(t_0 + \delta t_0) - f(t_0)) \\ &= \cancel{f(t_1)} - f(t_1 + \delta t_1) + \cancel{f(t_0)} - \cancel{f(t_1)} + f(t_0 + \delta t_0) - \cancel{f(t_0)} \\ &= f(t_0 + \delta t_0) - f(t_1 + \delta t_1), \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

de modo que, as [Equação B.1.1](#) e [Equação B.1.2](#), de fato, pode ser igualadas.

B.1.2 O Tempo de Lookback Time em Termos de z

Invertendo a [Equação 2.6.24](#) podemos escrever o tempo de *lookback time* em termos de *redshift* z :

$$\begin{aligned}
 (t_0 - t) &\approx \frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 (t_0 - t)^2 \\
 &= \frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 \left(\frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 (t_0 - t)^2\right)^2 \\
 &= \frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 \left[\left(\frac{z}{H_0}\right)^2 + \left(\left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 (t_0 - t)^2\right)^2 - \frac{2z}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 (t_0 - t)^2 \right] \\
 &= \frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0 \left(\frac{z}{H_0}\right)^2 + \mathcal{O}(z^3). \tag{B.1.3}
 \end{aligned}$$

Daí:

$$t_0 - t \approx H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 \right]. \tag{B.1.4}$$

B.2 Soluções para as Equações de Friedmann

B.2.1 Universo Dominado por Matéria ($P = 0$, com $\omega = 0$)

- Para $k = 1$ (Universo fechado):

Neste caso, a equação de Friedmann ([Equação 2.5.9](#)) pode ser reescrita por ([DALARSSON; DALARSSON, 2015b](#); [HENRIQUES, 2009a](#); [TERZIĆ, 2008](#))

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{c^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} R^2 - k. \tag{B.2.1}$$

Sendo $k = 1$ e da [Equação 2.5.20](#), temos:

$$\frac{1}{c} \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2 R} - 1} \implies \int_0^t c dt = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2 R} - 1}}. \tag{B.2.2}$$

Reescrevendo a integral da [Equação B.2.2](#) em termos do tempo conforme: $d\eta \equiv \frac{dt}{R}$:

$$\int c d\eta = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3 R}{3c^2} - R^2}}, \tag{B.2.3}$$

sendo $R_0 = 1$ e fazendo $A \equiv (8\pi G/3c^2)\rho_0 = \text{constante}$, além de $c\eta \equiv \eta$, então:

$$(\eta - \eta_0) = \int_0^R \frac{d\tilde{R}}{\sqrt{A\tilde{R} - \tilde{R}^2}} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{R - \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} \right) + \frac{1}{2}\pi \tag{B.2.4}$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $R = 0$ e por definição $\eta_0 = 0$. Dessa forma, temos:

$$\frac{R - \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} = \text{sen} \left(\eta - \frac{1}{2}\pi \right) = -\cos(\eta) \implies R = \frac{A}{2}(1 - \cos(\eta)). \quad (\text{B.2.5})$$

E como $dt = Rd\eta$, temos:

$$c(t - t_0) = \int Rd\eta = \int \frac{A}{2}(1 - \cos\eta)d\eta = \frac{A}{2} \int (1 - \cos\eta)d\eta = \frac{A}{2}(\eta - \text{sen}\eta). \quad (\text{B.2.6})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $t = 0$ e por definição $t_0 = 0$. Portanto, temos duas equações parametrizadas pelo tempo conforme η : uma para tempo e outra para o fator de escala

$$R = \frac{A}{2}(1 - \cos\eta), \quad ct = \frac{A}{2}(\eta - \text{sen}\eta). \quad (\text{B.2.7})$$

O fator de escala $R(t)$ é definida por um cicloide, ou seja, é uma função cíclica no tempo cósmico. O universo se expande e atinge o máximo de sua expansão e depois começa a se contrair até terminar num estado de contração total, que é definido como *Big Crunch*.

- Para $k = -1$ (Universo aberto):

Neste caso, a equação de Friedmann (Equação 2.5.9) pode ser reescrita por (DALARSSON; DALARSSON, 2015b; HENRIQUES, 2009a; TERZIĆ, 2008)

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{c^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}R^2 - k, \quad (\text{B.2.8})$$

sendo $k = -1$ e da Equação 2.5.20, de modo análogo ao caso anterior, temos:

$$\frac{1}{c} \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2 R} + 1} \implies \int_0^t c dt = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2 R} + 1}}. \quad (\text{B.2.9})$$

Reescrevendo a integral da Equação B.2.9 em termos do tempo conforme: $d\eta \equiv \frac{dt}{R}$:

$$\int cd\eta = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2} + R^2}}. \quad (\text{B.2.10})$$

Fazendo $R_0 = 1$ e fazendo $A \equiv (8\pi G/3c^2)\rho_0 = \text{constante}$, além de $c\eta \equiv \eta$, então:

$$\begin{aligned} (\eta - \eta_0) &= \int_0^R \frac{d\tilde{R}}{\sqrt{A\tilde{R} + \tilde{R}^2}} = \ln \left(\frac{R + A/2 + \sqrt{R(A + R)}}{A/2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{R}{A/2} + 1 + \sqrt{2\frac{R}{A/2} + \left(\frac{R}{A/2}\right)^2} \right) = \cosh^{-1} \left(\frac{R}{A/2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.11})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $R = 0$ e por definição $\eta_0 = 0$. Dessa forma, temos:

$$\frac{R + \frac{A}{2}}{\frac{A}{2}} = \cosh(\eta) \implies R = \frac{A}{2}(\cosh(\eta) - 1). \quad (\text{B.2.12})$$

E como $dt = Rd\eta$, temos:

$$c(t - t_0) = \int Rd\eta = \int \frac{A}{2}(\cosh\eta - 1)d\eta = \frac{A}{2} \int (\cosh\eta - 1)d\eta = \frac{A}{2}(\sinh\eta - \eta). \quad (\text{B.2.13})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $t = 0$ e por definição $t_0 = 0$. Portanto, temos duas equações parametrizadas pelo tempo conforme η : uma para tempo e outra para o fator de escala

$$R = \frac{A}{2}(\cosh\eta - 1), \quad ct = \frac{A}{2}(\sinh\eta - \eta). \quad (\text{B.2.14})$$

Assim como na solução para o universo plano, a solução aberta o Universo expande-se para sempre. Vale ressaltar que neste modelo a expansão é mais rápida que o modelo de Universo plano.

B.2.2 Universo Dominado por Radiação ($P = \frac{1}{3}\rho c^2$)

- Para $k = 1$:

Para este caso, de radiação dominante, a equação de Friedmann (Equação 2.5.9) pode ser reescrita por (HENRIQUES, 2009a; TERZIĆ, 2008)

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{c^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}R^2 - k, \quad (\text{B.2.15})$$

sendo $k = 1$ e da Equação 2.5.21, temos:

$$\frac{1}{c} \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2 R^2} - 1} \implies \int_0^t c dt = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2 R^2} - 1}}. \quad (\text{B.2.16})$$

Reescrevendo a integral da Equação B.2.16 em termos do tempo conforme: $d\eta \equiv \frac{dt}{R}$:

$$\int c d\eta = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2} - R^2}}. \quad (\text{B.2.17})$$

Fazendo $R_0 = 1$ e fazendo $A \equiv (8\pi G/3c^2)\rho_0 = \text{constante}$, além de $c\eta \equiv \eta$, então:

$$(\eta - \eta_0) = \int_0^R \frac{d\tilde{R}}{\sqrt{A - \tilde{R}^2}} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{R}{\sqrt{A}} \right). \quad (\text{B.2.18})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $R = 0$ e por definição $\eta_0 = 0$. Dessa forma, temos:

$$\left(\frac{R}{\sqrt{A}} \right) = \text{sen}(\eta) \implies R = \sqrt{A} \text{sen}(\eta). \quad (\text{B.2.19})$$

E como $dt = Rd\eta$, temos:

$$c(t - t_0) = \int Rd\eta = \int \sqrt{A} \text{sen}(\eta) d\eta = \sqrt{A} \cos(\eta). \quad (\text{B.2.20})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $t = 0$ e por definição $t_0 = \sqrt{A}$. Portanto, temos duas equações parametrizadas pelo tempo conforme η : uma para tempo e outra para o fator de escala

$$R = \sqrt{A} \operatorname{sen}(\eta), \quad ct = \sqrt{A}(1 - \cos \eta). \quad (\text{B.2.21})$$

O fator de escala $R(t)$ é definida por um cicloide, assim como ocorre quando a matéria é dominante. Aqui também, o Universo se expande e atinge o máximo de sua expansão e depois começa a se contrair até terminar num estado de contração total, que é definido como *Big Crunch*, só que de modo mais rápido do que a matéria.

- Para $k = -1$ (Universo aberto):

Neste caso, a equação de Friedmann (Equação 2.5.9) pode ser reescrita por (HENRIQUES, 2009a; TERZIĆ, 2008)

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{c^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} R^2 - k, \quad (\text{B.2.22})$$

sendo $k = -1$ e da Equação 2.5.21, de modo análogo ao caso anterior, temos:

$$\frac{1}{c} \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2 R^2} + 1} \implies \int_0^t c dt = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2 R^2} + 1}}. \quad (\text{B.2.23})$$

Reescrevendo a integral da Equação B.2.23 em termos do tempo conforme: $d\eta \equiv \frac{dt}{R}$:

$$\int c d\eta = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 R_0^4}{3c^2} + R^2}}. \quad (\text{B.2.24})$$

Fazendo $R_0 = 1$ e fazendo $A \equiv (8\pi G/3c^2)\rho_0 = \text{constante}$, além de $c\eta \equiv \eta$, então:

$$(\eta - \eta_0) = \int_0^R \frac{d\tilde{R}}{\sqrt{A + \tilde{R}^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{R}{\sqrt{A}} \right). \quad (\text{B.2.25})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $R = 0$ e por definição $\eta_0 = 0$. Dessa forma, temos:

$$\left(\frac{R}{\sqrt{A}} \right) = \operatorname{senh}(\eta) \implies R = \sqrt{A} \operatorname{senh}(\eta). \quad (\text{B.2.26})$$

E como $dt = R d\eta$, temos:

$$c(t - t_0) = \int R d\eta = \int \sqrt{A} \operatorname{senh}(\eta) d\eta = \sqrt{A} \cos(\eta). \quad (\text{B.2.27})$$

No entanto, é exigido que $\eta = 0$ em $t = 0$ e por definição $t_0 = \sqrt{A}$. Portanto, temos duas equações parametrizadas pelo tempo conforme η : uma para tempo e outra para o fator de escala

$$R = \sqrt{A} \operatorname{senh}(\eta), \quad ct = \sqrt{A}(\cosh \eta - 1). \quad (\text{B.2.28})$$

Assim como ocorreu na matéria, a solução aberta o Universo expande-se para sempre.

B.3 Resolução da integral $\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$

Partindo da integral

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (\text{B.3.1})$$

assumindo, a princípio, que todas as variáveis do integrando da [Equação B.3.1](#), $\frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}$, sejam positivas e fazendo:

$$r \equiv \frac{\text{sen}(\theta)}{\sqrt{k}}; \quad dr = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{k}} d\theta. \quad (\text{B.3.2})$$

Então, temos que:

$$\sqrt{1-kr^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2(\theta)} = \cos(\theta); \quad \theta = \text{sen}^{-1}(\sqrt{k}r). \quad (\text{B.3.3})$$

Assim a integral [Equação B.3.1](#) torna-se:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int 1 d\theta. \quad (\text{B.3.4})$$

A integral $\int 1 d\theta = \theta + c_1$. Daí:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\theta + c_1}{\sqrt{k}}. \quad (\text{B.3.5})$$

Dessa forma, da [Equação B.3.3](#) obtemos a seguinte solução para integral dada na [Equação 2.6.3](#):

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\text{sen}^{-1}(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}} + \text{constante}. \quad (\text{B.3.6})$$

PÁGINAS INTERESSANTES NA INTERNET

<<http://class-code.net/>> *CLASS* fornece toda documentação disponível relativo ao código *CLASS*;

<https://github.com/brinckmann/montepython_public> *MontePython* fornece toda documentação atualizada relativo ao código *MontePython*;

<<https://web.archive.org/>> *Wayback Machine* é uma ferramenta dedicada em arquivamento de páginas da internet, por meio de um programa chamado *Archive-It* para identificar páginas importantes da web ou mesmo a partir do arquivamento manual realizado pelos próprios usuários (é considerado o museu da internet). Esta ferramenta pertence ao *Internet Archive*, que é uma organização sem fins lucrativos. Atualmente, já são mais de 450 bilhões de páginas da internet salvas, desde 1996. **Nesta dissertação**, a maioria dos links usados de páginas da *internet* foram salvos no *Wayback Machine* permitindo aos leitores futuramente poderem recuperar conteúdos que ficarem indisponíveis ou que forem modificados posteriormente;

<<http://www.arxiv.org>> *ArXiv* fornece uma versão preliminar (preprints), de forma gratuita, para a maioria dos artigos usados na dissertação;

<<https://ui.adsabs.harvard.edu>> *Astrophysics Data System* é um banco de dados disponibilizado e gerenciado pela NASA, para bibliografias nas áreas de astronomia, astrofísica, física e geofísica. E inclui preprints do sistema ArXiv e INSPIREHEP;