UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

DEISE SOUZA DE ALMEIDA ANDRADE

DANDO SENTIDO AO ENSINO APRENDIZAGEM DA ADIÇÃO DE FRAÇÕES

ITABAIANA

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

DEISE SOUZA DE ALMEIDA ANDRADE

DANDO SENTIDO AO ENSINO APRENDIZAGEM DA ADIÇÃO DE FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Orientadora: Professora Dra. Marta Élid Amorim Mateus.

ITABAIANA

2020

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

A554d Andrade, Deise Souza de Almeida
Dando sentido ao ensino aprendizagem da adição de frações / Deise Souza de Almeida Andrade; orientação: Marta Élid Amorim Mateus. – Itabaiana, 2020.
100 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2020.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Aritmética 3. Sequências (Matemática). I. Mareus, Marta Élid Amorim(org.). II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

DANDO SENTIDO AO ENSINO APRENDIZAGEM DA ADIÇÃO DE FRAÇÕES

por

Deise Souza de Almeida Andrade

Aprovada pela banca examinadora:

Marta Élid Amorim Mateus

Profa. Marta Élid Amorim Mateus – UFS
Orientadora

Éder Mateus de Souza

Prof. Éder Mateus de Souza – UFS
Primeiro Examinador

Tetcheverria

Profa. Teresa Cristina Etcheverria – UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 26 de Novembro de 2020

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

DEDICATÓRIA

Dedico a Deus por permitir mais esta oportunidade em minha vida e por ter sido tão presente em cada etapa neste curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por tamanha bondade e misericórdia, pois me possibilitou a superação de tantos obstáculos nesta jornada. A ele toda a Glória!

Aos meus pais, Dilson e Claudenice, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todos os momentos me incentivando sempre a seguir. Sou consciente de que todo o orgulho ainda não seria suficiente para retribuir tudo o que fizeram e fazem por mim, mas ainda assim dedico a vocês mais essa conquista.

Ao meu amado esposo, Fernando, por sempre está ao meu lado, transmitindo amor e carinho. Obrigada por tanta compreensão e por me fazer tão feliz.

Ao meu irmão Daniel, pelo carinho, orações e palavras de apoio.

À minha irmã Débora e meu sobrinho Joaquim pela alegria transmitida.

Aos demais familiares, pelo amor e carinho constantes em minha vida, fatores essenciais para o meu sucesso. Em especial a minha tia Selma (In memorian) que tanto vibrou comigo em cada conquista, infelizmente não posso compartilhar mais essa alegria com ela, mas fico feliz só de imaginar que imenso seria o seu orgulho.

A minha amiga Thaiane, por me ouvir e sempre acreditar em mim, até mais do que eu mesma, obrigada por cada: “Você vai conseguir, amiga! ”

A Rejane, uma grande amiga que o Profmat me deu, por todo apoio e parceria de sempre. Jamais esquecerei dos momentos vividos ao seu lado. Obrigada por tudo!

A amiga Silvia, pela partilha e pela força que me deu com o Abstract.

Aos meus colegas, Laedson e Adriano pela companhia e por proporcionarem momentos descontraídos nesse curso.

A minha orientadora, Marta Élid, por acatar a minha ideia e apresentar contribuições que possibilitaram a concretização dessa pesquisa. Obrigada por cada momento de dedicação!

Aos membros da banca, professora Dr.ª Teresa Cristina Etcheverria e professor Dr. Eder Mateus de Souza, por contribuírem no aperfeiçoamento deste trabalho.

À escola em que trabalho e aos alunos participantes desta pesquisa, por todo o acolhimento que tornarem possível sua realização.

À Capes pela concessão da bolsa de estudos.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente com esta formação fazendo parte desta história, todo o meu carinho e muito obrigada!

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo propor uma sequência de atividades que facilite a compreensão dos procedimentos resolutivos da adição e subtração de frações, bem como analisar as resoluções de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental frente a essa sequência, a fim de perceber as suas contribuições para o ensino e aprendizagem da Matemática. Em busca de melhoria para o ensino, essa Investigação Matemática possui a natureza pragmática, com análises qualitativas no desenvolver das resoluções das atividades de 19 alunos de uma escola estadual da região centro sul sergipano. A sequência de atividades propostas é composta por quatro atividades, sendo que a primeira delas diagnostica o conhecimento dos alunos sobre frações e norteia a continuação das atividades; a segunda tem caráter instrutivo, a fim de intensificar o conhecimento a respeito das frações; a terceira atividade trata-se da aplicação de um material manipulável que viabiliza a compreensão do procedimento resolutivo da adição e subtração de frações e, por último, foi aplicada uma atividade de sistematização em que o aluno se desprenderá do material e irá registrar seu aprendizado a respeito das operações tratadas. Para investigar o fator que distancia os alunos da efetivação de cálculos coerentes utilizamos a Análise de Erros (Cury 1994) na atividade diagnóstica, além de um diário de campo e registros escritos elaborados pelos estudantes nas demais atividades que descrevem o trabalho de campo desenvolvido e enfatiza os avanços nas ideias dos alunos durante a prática. Diante da análise realizada, podemos perceber que a participação dos alunos nessa sequência de atividades os torna capazes de construir o seu próprio conhecimento a respeito do procedimento resolutivo da adição e subtração de frações e viabiliza um significado a este conteúdo matemático.

PALAVRAS-CHAVES: Ensino e aprendizagem da matemática; Adição e subtração de frações; Sequência de atividades; Material manipulável.

Abstract

This research aims to propose a sequence of activities that facilitate the understanding of the resolving procedures for adding and subtracting fractions, analyze the resolutions of a class of the 6th year of Elementary School facing this sequence and then understand their contributions to the teaching and learning of Mathematics. Seeking improvement for teaching, this Mathematical Investigation has a pragmatic nature with qualitative analyzes in the development of the resolutions of the activities of 19 students from a state school in the south of Sergipe. The proposed sequence of activities consists of four activities. The first activity diagnoses students' knowledge of fractions and guides the continuation of activities; the second is instructive in order to intensify knowledge about fractions; the third activity is the application of a manipulable material that makes it possible to understand the resolving procedure of adding and subtracting fractions and finally, the last is a systematization activity in which the student will detach himself from the material in order to recall his learning about the operations studied. To investigate the factor that distances students from making coherent calculations, we use Error Analysis (Cury 1994) in the diagnostic activity, besides a field diary and written records prepared by students in the other activities that describe the fieldwork developed and emphasizes advances in students' ideas during practice. In view of the analysis carried out, we can see that the participation of students in this sequence of activities makes them able to build their own knowledge about the resolving procedure of adding and subtracting fractions and enables meaning to this mathematical content.

KEYWORDS: Math teaching and learning; addition and subtraction of fractions; sequence of activities; manipulable material.

ÍNDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Desde que iniciamos nossa prática docente nos preocupamos com o impasse encontrado ao lidar com números em sua forma fracionária e buscamos estratégias que tornem essa escrita numérica familiar e mais fácil de ser manipulada nos mais diversos contextos matemáticos.

Foi diante dessa inquietude que realizamos uma pesquisa intitulada por “Dando sentido ao ensino e aprendizagem da adição de frações” que visa construir e aplicar uma sequência de atividades para o ensino e aprendizagem da adição de frações em que o aluno seja conduzido a construir um conhecimento consolidado sobre o procedimento resolutivo desta operação.

A escolha dessa operação foi exatamente por uma questão de busca por melhoria na prática deste ensino. Ao preparar as aulas sobre esse tema, existia uma preocupação em como tornar esse aprendizado mais significativo e amenizar essa barreira que existe tanto no 6º ano, quando se é apresentado este conteúdo, como em outros anos do Ensino Fundamental e Médio, quando trabalhamos algum conteúdo que envolve frações.

Na maioria dos livros didáticos do 6º ano é apresentado um procedimento resolutivo para a adição de frações vinculado ao uso do mínimo múltiplo comum (m.m.c), que geralmente precede o estudo das frações. Acontece que muitos alunos, principalmente de outras séries, não se recordam do algoritmo para encontrar o m.m.c. e isso desestimula o aluno a resolver de maneira correta essa operação, o que de fato os fazem seguir dois caminhos: cometer o erro de somar os termos de forma independente como na multiplicação de frações ou não se arriscar a responder.

Nessa pesquisa nos propusemos a buscar e apresentar uma sequência de atividades que torne o aluno agente construtor desse conhecimento, algo que o levasse a perceber que existe a necessidade de igualar os denominadores para adicionar ou subtrair frações, e que para isso ele poderia agir da maneira que achasse mais conveniente, desde que encontrasse frações equivalentes com o mesmo denominador.

Além de apresentarmos uma proposta para o ensino da Matemática, também constatamos bons resultados com uma aplicação numa turma de 6º ano do Ensino Fundamental numa escola do estado, localizada no Centro Sul Sergipano, na qual foi analisado os resultados de evoluções cognitivas dos alunos participantes.

Como a aplicação foi em uma sala de aula, onde normalmente acontece o processo de ensino e aprendizagem, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009), esta pesquisa é caracterizada como uma pesquisa de campo e se deu por uma pesquisa-ação, pois houve a inserção da pesquisadora no ambiente a ser estudado e além de ter sido observado e compreendido, foram aplicadas práticas que viabilizam melhorias na aprendizagem dos participantes.

Durante a aplicação foi realizada uma sequência de atividades dividida em quatro momentos, inicialmente uma atividade de sondagem para investigação dos conhecimentos dos participantes, seguida por uma atividade instrutiva para formação de alguns conceitos sobre frações. No terceiro momento houve a manipulação de um material didático adaptado da ideia de Druzian (2007, p. 25-27) cujas peças eram representadas por frações e contava com o auxílio das cores primárias e secundárias para a obtenção de frações equivalentes, fator essencial na resolução da adição e subtração de frações com denominadores diferentes. E, por fim, foi aplicado uma atividade final, para sistematizar os procedimentos nos cálculos e formalizar as propriedades em questão.

Na primeira atividade utilizamos a análise de erros (Cury, 1994) para quantificar e discutir os erros cometidos pelos alunos nas questões propostas e para as demais atividades utilizamos a descrição dessa intervenção por meio de um diário de campo e de análises nos registros escritos feitos pelos alunos.

Quanto a organização deste trabalho trouxemos no primeiro capítulo as suas configurações, mostrando a sua justificativa, seu objetivo e como se dará a sua metodologia.

No capítulo 2 foi exposto o conhecimento matemático relacionado ao nosso estudo, a saber, os números racionais em sua forma fracionária sob o olhar geométrico.

No capítulo 3, apresentamos os fundamentos teóricos que deram suporte ao nosso trabalho, com revisão de literatura nessa linha de pesquisa, conceitos de frações, bem como abordamos sobre o erro e sobre o uso do material manipulável no ensino da matemática.

No quarto capítulo, descrevemos a elaboração da sequência de atividades e expomos a nossa expectativa quanto a aplicação.

No capítulo 5, apresentamos e discutimos os resultados da atividade diagnóstica sob a perspectiva da Análise de erros, investigando procedimentos resolutivos registrados pelos alunos.

Continuando com as análises, expomos no sexto e último capítulo os dados obtidos a partir de observações feitas pela professora/pesquisadora durante a aplicação, bem como os registros escritos dos procedimentos apresentados nas respostas dos alunos.

Finalizamos com as nossas conclusões, que trazem uma síntese do processo da pesquisa, incluindo o caminho percorrido, e os resultados obtidos na análise dos dados e que nos permitiram responder à questão da nossa pesquisa.

CAPÍTULO 1

CONFIGURAÇÕES DA PESQUISA

1.1 Justificativa

Sendo professora de Matemática no sexto ano do ensino regular desde 2010, e encantada com esse público, sempre fiquei inquieta ao ensinar adição e subtração de frações, pois há uma grande dificuldade de absorção e como consequência um rendimento baixo dos alunos nesse conteúdo e analisando as séries posteriores, nos conteúdos que exigem essas operações, é perceptível que a maioria dos alunos não lembram de como efetuar este cálculo, nem atribuem o significado a essa operação.

Em todas as turmas em que já lecionei, inclusive do ensino médio, sempre senti esse impacto ao me deparar com alguma questão que envolva esse conteúdo, o que só aumenta a grande dificuldade dos alunos no estudo da Matemática. Além disso, também foi observado por Campos e Rodrigues (2007) que a prática de sala de aula:

> [...] revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos. (CAMPOS E RODRIGUES, 2007, p. 70)

Por ter ciência da imensa importância deste aprendizado tanto na Matemática quanto no cotidiano do aluno e da minha responsabilidade quanto professora, desejo compreender o que acontece durante o processo de ensino e aprendizagem e buscar mecanismos que favoreçam a apreensão desse saber.

Além da experiência ao labutar com o conteúdo de adição de frações nas diversas séries que leciono ou já lecionei, há comprovações da dificuldade de professores e alunos no processo de ensino e de aprendizagem dele, como se observa em resultados de avaliações externas.

> Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...] (FÁVERO, NEVE, 2012,p. 34)

Esses e outros tantos resultados nos levam a refletir a causa desse baixo rendimento e também a reelaborar a prática desse ensino e, exatamente sobre essa questão, nos esclarece muito bem Cavalieri em sua pesquisa sobre o estudo das frações:

> Sendo muito pouco usada no dia a dia, as frações, são esquecidas. Por esse motivo poucas pessoas sabem calcular com frações, mesmo sendo estudadas nas séries iniciais. O pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais as crianças têm dificuldades com as frações, diariamente não são oferecidas oportunidades para que as crianças se familiarizem com essa ideia. (CAVALIERI, 2005, p. 31)

Então, especulamos que a justificativa para esses obstáculos na aprendizagem das operações com números racionais – escritos na forma fracionária – esteja relacionada à distância dessa escrita numérica ao cotidiano dos alunos, o que sabemos não diminuir a necessidade da sua manipulação. Sobre isso, ainda nos respalda os PCN, quando relata que:

> Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos frequente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras raízes, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações. (BRASIL,1998, p.103)

O ensino das operações das frações, normalmente, é abordado por meio de um processo mecânico, em que os alunos memorizam regras, que geralmente não fazem sentido pra eles, pois não foram autores da construção desse saber. Esse é o contexto de um ensino tradicional, em que geralmente o professor fica engessado pelo uso do livro didático. E como afirma Brolezzi (1996), o ensino de matemática não tem conseguido

> [...] construir na mente dos alunos um conceito de Número Racional que permita sua utilização mais tarde. As operações com racionais são, quando muito, mecanizadas em torno de algumas regrinhas básicas geralmente confundidas umas com as outras (BROLEZZI, 1996, p.1).

Essa aprendizagem mecânica conduz ao aluno um saber momentâneo, o que explica o esquecimento fácil dos alunos ao se deparar com a necessidade de resolver uma operação envolvendo números racionais (representação fracionária) dentro de qualquer conteúdo, tornando assim a Matemática um conhecimento cada vez mais distante do alcance dos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que:

> O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo. (BRASIL, 1998, p.67).

É nessa abordagem que se quer mostrar com esta pesquisa o fato que a adição de frações é algo aplicável e que existe um sentido amparando o mecanismo de resolução, contribuindo assim para uma matemática significativa que gere um sentido para os aprendizes.

1.2 Objetivo e questão de pesquisa

Propor uma sequência de atividades para o ensino e aprendizagem de frações, principalmente no 6º ano do ensino fundamental, que dê sentido ao conhecimento que se pretende construir nos alunos tornando-os seres ativos nessa construção.

1.2.1 Questão de pesquisa

- De que maneira uma sequência de atividades contribui para o ensino e aprendizagem da adição e subtração de frações?

1.3 Metodologia

Tendo em vista uma maior compreensão no processo de ensino e de aprendizagem da adição e subtração de frações no 6º ano do Ensino Fundamental, essa pesquisa trata de uma investigação na Educação Matemática com a natureza pragmática, pois busca melhoria desse processo educacional.

Neste trabalho foram utilizadas análises com abordagem qualitativa, pois analisamos criteriosamente o desenvolver das resoluções das questões, tendo em vista que a primeira atividade norteia o nosso trabalho e a última busca observar se houve uma ressignificação do conteúdo, como também o desempenho dos alunos durante a atividade instrutiva e o manuseio do material manipulável.

Para alcançar o objetivo almejado recorremos ao trabalho de campo, pois este nos permite investigar na “fonte” as dificuldades e assim buscar mecanismos para fazer os alunos avançarem visando o aprendizado de novas estratégias no processo de resolução das operações tratadas.

Como a sequência de atividades elaborada para a coleta de dados foi aplicada em uma turma do ensino regular, em seu horário de aula. Portanto, esta pesquisa se caracteriza como naturalista ou de campo que é definida por Fiorentini e Lorenzato (2009) como

> [...] aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa–ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (p. 106).

Para uma observação real de como acontece a transmissão e a assimilação do conteúdo em questão, houve uma intervenção da pesquisadora com uma sequência de atividades que objetivava a condução do ensino de adição de fração junto a um dispositivo prático para atingir o significado almejado, portanto essa pesquisa se caracteriza como uma pesquisa-ação, que é também explicada por Fiorentini e Lorenzato (2009) como aquela

> [...] em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. (p. 112)

Inicialmente, a pesquisadora realizou um diagnóstico e a partir da análise dos resultados, elaborou uma sequência de atividades com o intuito de promover mudanças em concepções equivocadas sobre a equivalência de frações e o seu uso para se realizar operações, em particular, a adição e subtração de frações. A coleta de dados se deu em quatro etapas que aconteceram num período de seis aulas consecutivas de Matemática, incluídas no calendário letivo normal.

A atividade diagnóstica buscou sondar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da adição de frações e seus pré-requisitos (conceito de fração e equivalência de frações), seguida por uma atividade que também contemplou o conceito de fração e a adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes, mas que nesse momento acontece a instrução da pesquisadora, de forma que os alunos iam interagindo com a pesquisadora e de imediato respondendo as questões.

Como forma de auxílio para a concretização do procedimento resolutivo das operações foi manuseado pelos alunos um material didático composto por um retângulo branco (inteiro) e por peças coloridas que foram obtidas por partições de retângulos iguais ao inteiro, em forma e tamanho, cuja representação se dava por meio de frações e, em meio ao manuseio do material, os alunos foram orientados a registrar as observações de equivalências e de resolução de algumas adições e subtrações sugeridas em uma ficha de registros.

Para finalizar a intervenção desta pesquisa foi aplicada uma atividade final com o objetivo de verificar o desenvolvimento dos participantes da pesquisa em meio a interferência didática aplicada.

Os participantes da pesquisa foram alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do Centro Sul Sergipano. A turma era composta por 27 alunos na faixa etária entre 11 e 16 anos. No entanto, apenas 19 desses foram analisados, em consequência de alguns alunos terem se ausentado em algumas aulas , sendo assim haviam respondido e/ou participado de apenas algumas atividades, tornando inviável utilizá-las, uma vez que um dos objetivos era analisar a evolução dos conhecimentos adquiridos durante o processo.

Os participantes foram denotados pela letra A seguida de uma sequência de 1 a 19 (A1, A2, ..., A19), em uma ordem alfabética de acordo com os seus nomes, a fim de facilitar na análise dos dados e preservar a identidade dos participantes.

Foi escolhida uma turma de 6º ano, por ser o ano em que se sistematiza as operações de adição e subtração de frações de forma mais analítica, visto que esse conteúdo é desenvolvido muito pouco em anos anteriores e nos anos posteriores já são cobrados com outros focos, por exemplo no 7º ano, quando engloba também as frações negativas.

A escolha da escola se deu por uma facilidade de adequação à realidade da pesquisadora, que faz parte do quadro de docentes dessa escola e inclusive é a professora de Matemática do público participante da pesquisa, ressaltando que a atuação durante esta intervenção se deu sem ajustes tendenciosos que desfocassem o resultado da investigação.

Houve uma boa receptividade por parte da direção e dos alunos que fizeram parte desta pesquisa, estes se mostraram interessados em ampliarem os seus conhecimentos a respeito das frações, o que facilitou a conduta da aplicação e gratificou ainda mais o trabalho.

Como sugerido por Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 113), o relatório de investigação de uma pesquisa-ação, consiste na descrição e análise do trabalho desenvolvido, destacando sobretudo os avanços obtidos tanto no âmbito da prática como no âmbito das ideias do grupo. Por esse motivo, optamos pelo Diário de campo ou de bordo como um dos instrumentos de coleta de dados dessa pesquisa, pois nele expomos as reflexões diárias referentes à aplicação da pesquisa. Fiorentini e Lorenzato (2009) também caracteriza esse instrumento como um dos mais ricos de coleta de dados em meio a uma pesquisa de campo e ainda acrescenta sobre as suas perspectivas.

> Os diários, portanto, podem conter uma dupla perspectiva: uma descritiva e outra interpretativa. A perspectiva descritiva atém-se à descrição de tarefas e atividades, de eventos, de diálogos, de gestos e atitudes, de procedimentos didáticos, do ambiente e da dinâmica da prática, do próprio comportamento do observador etc. A perspectiva interpretativa, por sua vez, tenta olhar para a escola e a sala de aula como espaços socioculturais produzidos por seres humanos concretos, isto é, por sujeitos que participam da trama social com seus sentimentos, ideias, sonhos, decepções, intuições, experiências, reflexões e relações interpessoais. (p. 119)

Neste diário será descrito o passo a passo de todos os momentos da nossa intervenção em sala de aula, equilibrando um olhar técnico com o sensível de forma a interpretar os acontecimentos, relatos, diálogos, entre outros que consideramos relevante pra fundamentar as ideias desta pesquisa, levando em consideração que estamos diante de seres que trazem consigo histórias peculiares de vida e que se encontram em seu ambiente natural de estudo, sem nenhuma estratégia de mudança de comportamentos.

Na análise de dados deste trabalho será utilizada a abordagem da Análise de Erros que na perspectiva de Radatz (1980)

> A análise de erros parece ser um ponto de partida notável para pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem de matemática. A análise de erros deve ser considerada uma estratégia de pesquisa promissora para esclarecer algumas questões fundamentais do aprendizado de matemática. (RADATZ, 1980, p. 16, tradução nossa)[1]

[1] Error analysis seems to be a remarkable starting point for research on the mathematical teaching-learning process. Error analysis must be considered a promising research strategy for clarifying some fundamental questions of mathematics learning.

Com o objetivo de dar início a nossa intervenção e tentar transparecer as dificuldades dos alunos em relação a adição de frações, analisaremos os erros cometidos na avaliação diagnóstica e tentaremos intervir a fim de buscar soluções estratégicas para melhorar a compreensão desse objeto de estudo e como salienta Cury (1994) a função da análise de dados se restringe em diagnosticar e reparar algum problema no ensino da Matemática e nela os pesquisadores

> [...] preocupam-se em classificar os erros para permitir aos professores uma modificação nas estratégias de ensino, tornando-as mais eficazes. Parece vigorar, então, a visão absolutista da Matemática, no momento em que os pesquisadores e professores procuram oportunizar aos alunos meios de alcançarem a verdade absoluta, evitando os erros. (p. 81)

Portanto, essa pesquisa é de cunho construtivista, pois a exploração do erro será para aprimorar o processo de ensino e de aprendizagem no tocante a adição e subtração de frações.

CAPÍTULO 2

CONTEÚDOS RELACIONADOS AO ESTUDO

Com o objetivo de darmos um aporte teórico a esta pesquisa, neste capítulo abordaremos os principais conteúdos inseridos na sequência de atividades propostas e aplicadas neste trabalho.

Neste capítulo será feita a construção dos números racionais apenas na perspectiva geométrica a partir do conceito de medida de segmentos comensuráveis com a unidade, pois durante toda a aplicação das atividades foi a principal forma que conduzimos as explicações.

Como o foco dessa pesquisa são as operações de adição e subtração de frações, trataremos apenas dos números racionais escritos em sua forma fracionária.

2.1 Construção Geométrica dos números racionais

Diante da evolução das necessidades humanas surge a busca de novos números que as representem e é a partir das situações relacionadas às medições não exatas que nasce a ânsia por uma nova escrita numérica.

É fácil ver que tão importante quanto a contagem é a medição, ambos indispensáveis para o ser humano e

> Essencialmente medir é comparar. Para medir é necessário estabelecer uma unidade padrão de uma grandeza e verificar quantas cópias desta unidade são necessárias para obter toda a quantidade da grandeza que se deseja medir. O resultado dessa comparação será expresso através de um número que representa a medida da grandeza em relação a unidade. (SANTOS, 2015, p. 31)

Portanto, a ação de medir está diretamente ligada a uma comparação entre duas grandezas de mesma espécie e para tal é geralmente necessária a subdivisão de uma das grandezas em um número finito de partes, que será a unidade de medida, de forma que essa unidade de medida caiba uma quantidade inteira de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas e segundo (SANTOS, 2013, p.7) apesar de ser uma unidade de medida variável, deve-se ter o cuidado de manter essa escolha.

O problema é que nessa comparação nem sempre conseguimos encaixar uma quantidade inteira de vezes da unidade de medida, vejamos dois exemplos distintos que nos revelam essa situação:

i) Dados dois segmentos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tais que $\overline{AB}$ é menor que $\overline{CD}$, suponha que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é a unidade u, chamado de segmento unitário (de medida igual a 1), e que se quer medir o segmento $\overline{CD}$ adotando u como unidade.

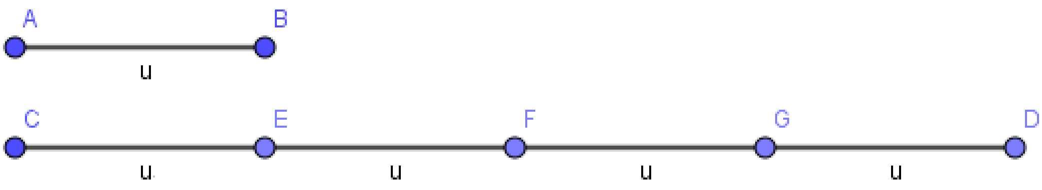


Figura 1: Medida do segmento $\overline{CD}$

Observe na figura 1, a representação geométrica dos segmentos $\overline{AB} = u$ e $\overline{CD}$. Note que os 3 pontos interiores E, F e G dividiram o segmento $\overline{CD}$ em quatro segmentos consecutivos e congruentes de medida igual ao segmento $\overline{AB}$, que é o segmento de medida unitária u. Portanto, como $\overline{CD} = 4u$ e $u = \overline{AB}$, então, $\overline{CD} = 4\overline{AB}$.

ii) Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, agora tomando $\overline{CD}$ como unidade de medida, ou seja, $\overline{CD} = u$ e que se quer medir o segmento $\overline{AB}$ adotando u como unidade.

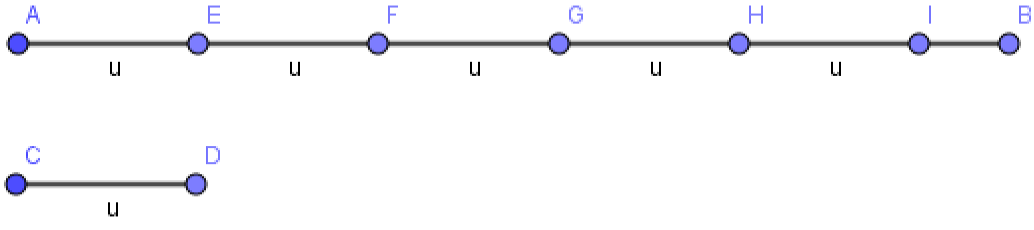


Figura 2: Medida do segmento $\overline{AB}$

Como geralmente acontece, o segmento $\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$, pois sobra o segmento $\overline{IB}$, então para conseguir realizar a comparação, vamos observar se o segmento $\overline{IB}$ cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{CD}$.

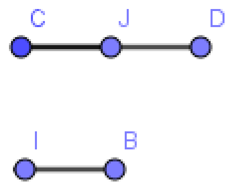


Figura 3: Segmentos $\overline{IB}$ e $\overline{CD}$

Veja que: $\overline{CD} = \overline{CJ} + \overline{JD}$ e como $\overline{CJ} = \overline{JD} = \overline{IB}$, logo $\overline{CD} = 2\overline{IB} \Leftrightarrow \overline{IB} = \frac{1}{2}\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{IB} = \frac{1}{2}u$. Assim:

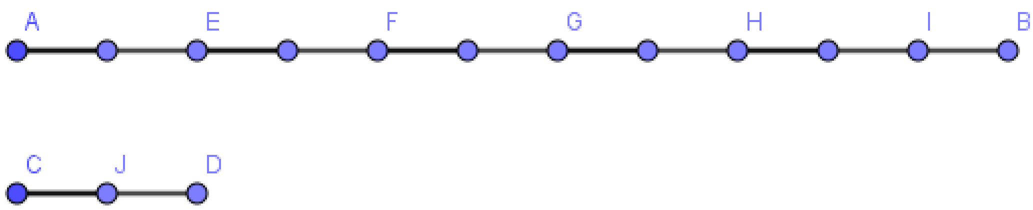
$$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IB}$$

$$\overline{AB} = u + u + u + u + u + \frac{1}{2}u$$

$$\overline{AB} = \frac{11}{2}u$$

$$\overline{AB} = \frac{11}{2}\overline{CD}$$

Figura 4: Subdivisões de $\overline{AB}$ em partes congruentes a $\frac{1}{2}\overline{CD}$



Fonte: Exemplo adaptado de (SANTOS, A.C.G., 2013, p. 8).

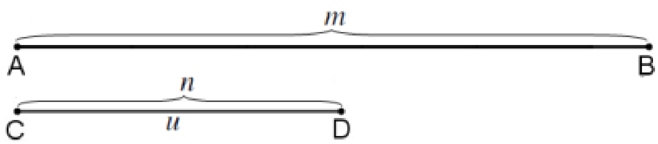
Observe que a figura 4 nos mostra que foi preciso subdividir o segmento $\overline{AB}$ em quantidades menores que $\overline{CD}$, mas que essa parte coube uma quantidade finita de vezes também em $\overline{CD}$.

É notório que para se medir segmentos comensuráveis são utilizados números inteiros ou uma relação entre eles e no entendimento de Roque e Pitombeira (2012, p. 60) “é desse tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros que chamamos hoje de “racionais” (justamente por serem associados a uma razão)”.

Definição 2.1. *Sejam, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u, ou seja, $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u.*

Podemos representar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ como a seguir:

Figura 5: Segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$



Fonte: Adaptado de CARAÇA (1951)

Diz-se, por ***definição****, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o* ***número*** *$\frac{m}{n}$, e escreve-se*

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$$

quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é o quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário*.*

O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional *– ao número m chama-se* numerador *e ao número n* denominador*. (CARAÇA, 1951, p.35-36).*

Dessa forma, sempre que conseguirmos subdividir o segmento $\overline{CD}$ em n partes iguais e essas partes cabem m vezes em $\overline{AB}$, podemos dizer que o segmento $\overline{AB}$ é comensurável e a sua medida pode ser expressa por um número racional indicado pela razão entre m e n, caso isso não seja possível dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é incomensurável.

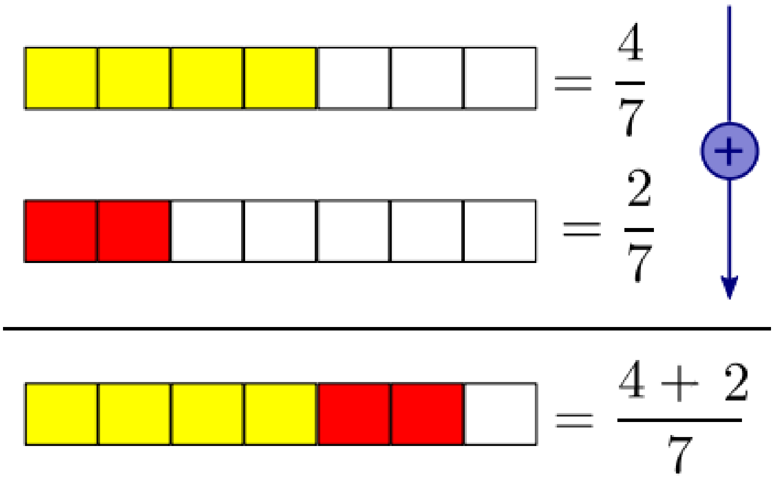
2.2 Representação geométrica da adição e subtração com números racionais

Ao nos depararmos com situações problemas que envolvem adição e subtração de números costumamos encontrar uma certa facilidade na identificação dessas operações, pois as suas ideias são bem claras e objetivas. As ideias básicas da adição e da subtração são de juntar quantidades, acrescentar uma quantidade a outra já existente, retirar uma quantidade de outra, de completar para saber quanto falta e comparar quantidades. E essas ideias geralmente são simples de serem percebidas, como justifica Druck (2006):

> Essas operações, por terem uso em situações similares, seja envolvendo números naturais ou fracionários, não costumam apresentar uma grande dificuldade no tocante à atribuição de significados aos seus conceitos pelos alunos. Mesmo sobre pedaços (de tecidos, pizzas ou o que for) é fácil conceber que eles sejam juntados ou acrescentados uns aos outros. Também é plausível retirar-se um pedaço de outro ou querer saber "que pedaço faltaria para completar outro", ou ainda, perguntar sobre o tamanho do pedacinho que corresponde à diferença entre dois outros (e, portanto comparar). Ou seja, todas as ações correspondentes às ideias da adição ou subtração fazem sentido também no universo das frações. (DRUCK, I. F., 2006, p. 8).

As ideias das operações não mudam quando estamos lidando com novos números, o que mudam são as técnicas de resolução. Então, se o aluno aprender bem a definição de fração e souber o que significa cada um dos seus termos (numerador e denominador), ele provavelmente não terá dificuldade ao somar ou subtrair frações com denominadores iguais. Observemos um exemplo exposto no portal da matemática:

Figura 6: Adição de frações com o mesmo denominador



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[2]

Se temos duas figuras idênticas divididas em sete partes iguais, cada uma das partes representando um sétimo, em uma delas pintamos quatro partes de amarelo (quatro sétimos) e na outra pintamos duas partes de vermelho (dois sétimos), juntando

[2] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 08 de nov. de 2020

as duas partes pintadas em uma única figura, teremos seis sétimos $\left(\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}\right)$, como ilustra a Figura 6.

A subtração de frações é resolvida de forma análoga. Portanto, podemos generalizar a adição e subtração de frações com o mesmo denominador da seguinte maneira:

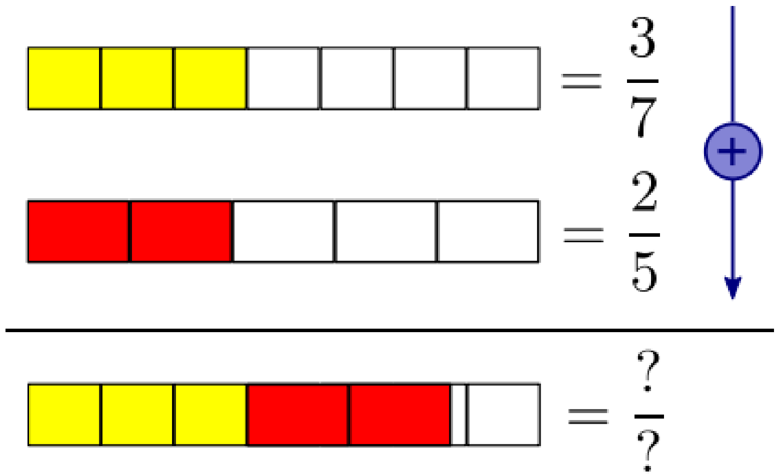
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Quando se é conhecido o conceito de frações, é fácil perceber a lógica dessas resoluções. A dificuldade maior se encontra no processo resolutivo da adição e subtração das frações com denominadores diferentes. Vamos observar o exemplo:

Dados dois retângulos idênticos, sendo que o primeiro foi dividido em sete partes iguais, e três delas são pintadas de amarelo, ou seja, $\frac{3}{7}$, já no segundo retângulo a divisão é feita apenas em cinco partes e duas são pintadas de vermelho, ou seja, $\frac{2}{5}$. Quando precisarmos juntar as partes pintadas, veremos que não fica exposto claramente a resposta.

Figura 7: Adição de frações com denominadores diferentes



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[3]

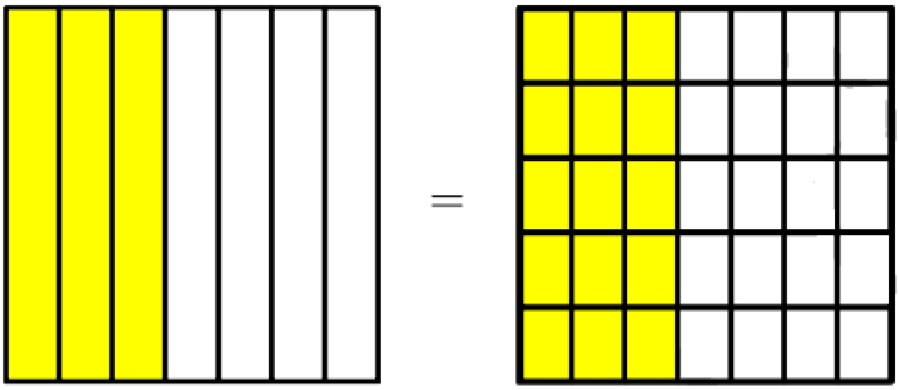
[3] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 08 de nov. de 2020

Dessa forma, temos que recorrer a outras representações, frações equivalentes, para assim obtermos frações com o mesmo denominador e encontrarmos a soma e procedermos como na Figura 6.

Para encontrarmos formas diferentes de representar essas frações, recorreremos à propriedade fundamental das frações equivalentes assim descrita: “Sempre que você tiver uma fração $\frac{a}{b}$, ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador da fração por um mesmo número natural que deve ser diferente de zero), o resultado será uma outra representação da mesma fração.”(Portal da Matemática – OBMEP). Dessa forma, aplicaremos essa técnica e buscaremos encontrar as frações equivalentes a $\frac{3}{7}$ e a $\frac{2}{5}$ e que tenham os denominadores comuns.

Para encontrarmos uma fração equivalente a $\frac{3}{7}$, iremos redividir a figura (ampliada para uma melhor observação), agora de forma horizontal, em cinco partes iguais e cruzando com as sete partes divididas verticalmente encontraremos trinta e cinco partes iguais , das quais quinze estarão pintadas, como mostra a figura abaixo:

Figura 8: Encontrando fração equivalente a $\frac{3}{7}$



$$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

Fonte: Portal da matemática - OBMEP[4]

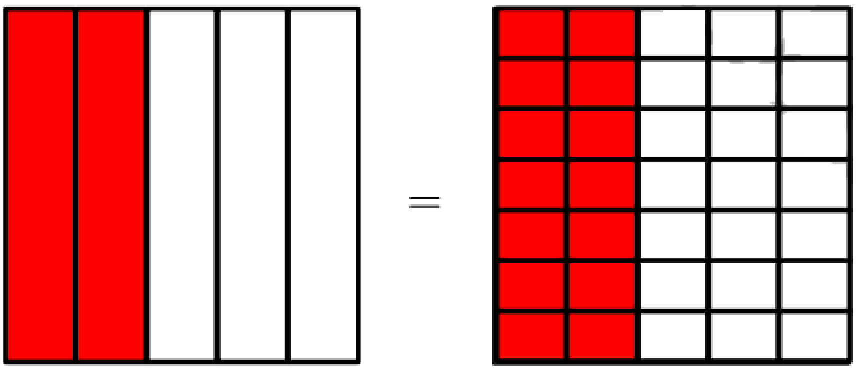
Portanto, teremos agora $\frac{15}{35}$ da figura pintada de amarelo, sem alterar o seu tamanho original. Se observarmos de forma algébrica, os termos da fração foram

[4] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 08 de nov. de 2020

multiplicados por 5, $\frac{3}{7} = \frac{3\,.5}{7\,.5} = \frac{15}{35}$, aplicando a propriedade fundamental das frações equivalentes como foi descrita acima.

De maneira semelhante iremos redividir a segunda figura (ampliada para uma melhor observação) para encontrarmos uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ com o denominador igual a 35. Como a figura tem cinco partes verticais, traçaremos retas horizontais que o dividirá em sete partes horizontais, formando assim um total de 35 partes na figura. Como é ilustrado abaixo:

Figura 9: Encontrando fração equivalente a $\frac{2}{5}$



$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

Fonte: Adaptado do Portal da matemática - OBMEP[5]

Ou seja, teremos agora $\frac{14}{35}$ da figura pintada de vermelho e essa equivalência também pode ser justificada pela propriedade das frações equivalentes, pois, $\frac{2}{5} = \frac{2\,.7}{5\,.7} = \frac{14}{35}$.

Agora que encontramos equivalências: $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ e $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ com denominadores iguais a 35, basta efetuarmos a adição como fizemos no primeiro exemplo deste tópico.

[5] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 08 de nov. de 2020

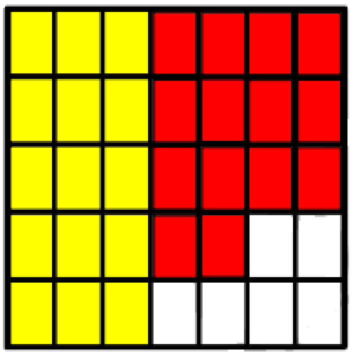


Figura 10: Adição de frações com o mesmo denominador

$$\frac{15}{35}+\frac{14}{35}=\frac{29}{35}$$

Fonte: Adaptado do Portal da matemática - OBMEP[6]

Portanto, $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{15}{35}+\frac{14}{35}=\frac{15+14}{35}=\frac{29}{35}$.

De maneira geral, pode ser usado o seguinte algoritmo para a resolução da adição e subtração de frações com denominadores diferentes:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a.d}{c.d}+\frac{b.c}{d.c}=\frac{a.d+b.c}{c.d}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{a.d}{c.d}-\frac{b.c}{d.c}=\frac{a.d-b.c}{c.d}$$

Dessa forma, é notório que a adição e a subtração de frações estão associadas a igualdade dos seus denominadores, pois caso tenham denominadores diferentes deveremos substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador, para possibilitar o encontro do resultado dessas operações.

O intuito dessa pesquisa é exatamente transmitir esse conteúdo de maneira a ressignificar essa técnica resolutiva da adição e subtração de fração.

[6] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 08 de nov. de 2020

CAPÍTULO 3

REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Por reconhecermos a importância do estudo das frações para o bom desempenho escolar do aluno na disciplina de Matemática e sabermos que a ausência desse entendimento refletirá em dificuldades com diversos outros conteúdos mais avançados da área, apresentaremos neste capítulo uma revisão literária de trabalhos que destacam resultados de pesquisas com estudantes do 6º ano, bem como fundamentos teóricos que embasam o nosso trabalho, a saber, conceitos de frações, a relevância do erro para a aprendizagem e o uso do material manipulável no ensino da matemática.

3.1 Revisão de literatura

Barreto (2017), em sua pesquisa intitulada “Análise de erros cometidos por alunos do 6º ano na resolução de problemas envolvendo operações com frações”, buscou identificar os erros mais comuns cometidos por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em uma Escola Estadual do Agreste Sergipano, ao se depararem com questões relacionadas às operações com frações. Para isso, o autor aplicou dois questionários no mesmo dia e durante duas horas aulas sem a intervenção do aplicador; contendo no primeiro, questões de aplicação direta sobre frações e suas operações; e no segundo questionário havia problemas que envolviam operações com frações.

Na análise dos dados, o pesquisador utilizou formas diferentes para os dois questionários. Para o primeiro usou as categorias de Cury (1994) e para o segundo usou as quatro fases de Polya (1995).

Com a participação de 29 alunos, sendo que três desses deixaram os questionários totalmente em branco, percebeu-se que em comparação entre os dois tipos de questionário uma parte dos alunos apresentou mais dificuldade na interpretação do que na operação, ou seja, mostraram que, mesmo quando sabem resolver o cálculo não o identificam no problema.

No questionário I os alunos mostraram ter maiores dificuldades na adição e subtração de frações com denominadores diferentes e na divisão de frações. Já no questionário II, a maioria dos alunos que conseguiu estabelecer um plano de resolução mostraram não saber dividir um número inteiro por uma fração, além de apresentarem dificuldades nas outras operações. O que também nos chama atenção é que a maior parte dos alunos executou o plano de resolução corretamente e chegou a montar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes que resolvia a situação, mas não o conseguiu resolver.

Diante dos resultados analisados, o autor destaca a dificuldade relacionada às operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes e sugere a aplicação de jogos como possibilidade de sanar este problema.

Com o resultado dessa análise, pode-se observar um pouco da realidade dos conhecimentos operacionais de frações no público do 6º ano e isso é motivador na busca de mecanismos que melhorem esses resultados nada satisfatórios do desempenho desses alunos.

Patrono (2011), em sua pesquisa intitulada como “A aprendizagem de Números Racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino” constrói e divulga uma proposta de ensino sobre os Números Racionais em sua forma fracionária, para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a linhagem construtivista de ensino e materiais manipulativos, como também jogos.

Na elaboração da pesquisa, a coleta de dados se deu por meio de: diário de campo, cadernos dos alunos, quatro atividades aplicadas em períodos diferentes e uma entrevista feita com a professora anterior. Por conta da diversidade da natureza dos dados coletados em diferentes momentos, a análise destes foi realizada com uma leitura profunda usando várias fontes de evidências e com a comparação delas, buscando assim, construir afirmativas sobre os conteúdos abordados.

Com a devida investigação, os alunos mostraram ter compreendido bem os conceitos de representação e leitura de frações (numérica e desenho), comparação de frações com denominadores e/ou numeradores iguais, bem como a adição e a subtração de frações com denominadores iguais. Todavia, algumas dificuldades foram observadas no cálculo do operador multiplicativo e na aplicação da equivalência para comparar frações com numeradores e denominadores diferentes e para adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes.

A autora considera que a equivalência de frações é um conceito básico necessário tanto na comparação, quanto na adição e subtração de frações com denominadores diferentes e admite necessitar de uma criação de novos esquemas que proporcione de forma mais direta o alcance dessa aprendizagem.

Apesar de ter sido um trabalho bem abrangente sobre as frações, o que nos chama a atenção é a percepção da dificuldade dos alunos na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, o que nos leva a repensar a prática pedagógica durante a construção desse saber, mesmo reconhecendo que é primordial uma proposta antecedente bem elaborada no ensino e aprendizagem de conceitos primitivos de frações.

Pereira (2017) em sua dissertação nomeada por “Uma sequência didática para o ensino de adição de frações” apresenta uma proposta didática para o ensino da adição de frações no 6º ano. Nessa oportunidade o autor também analisa a abordagem do conteúdo de frações em livros didáticos utilizados na Educação Básica de Palmas – TO.

Foi percebido por Pereira (2017) algumas observações unânimes na apresentação do conceito de adição de frações nos livros didáticos analisados, como: os conteúdos que o antecedem, a introdução por uma situação problema e geralmente a abordagem de um reforço nos conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações, como também a presença da ideia geométrica para justificar a forma de adicionar frações com o mesmo denominador.

Houve divergências na forma de abordar a adição de frações com denominadores diferentes. Na maioria dos livros analisados, é sugerido o uso do MMC para encontrar as frações equivalentes, seja como forma única, de forma implícita nos exemplos ou até como sendo mais prático do que escolher dentre a classe de equivalência das frações aquela que possua o mesmo denominador. Em apenas duas das seis obras não foi encontrado o uso do MMC como sugestão de resolução, uma orienta a multiplicar os termos de uma fração pelo denominador da outra, encontrando assim frações equivalentes com o mesmo denominador e a outra dar ênfase a demonstração da resolução pelo processo geométrico apenas no caso em que um denominador é múltiplo do outro, nos demais exemplos, com casos mais críticos de denominadores, expõe a resolução aritmética sem justificar o cálculo.

Dentre as várias dificuldades encontradas pelos estudantes nos conteúdos matemáticos, o pesquisador selecionou a adição de frações para propor alternativas de superação desse problema com uma sequência didática, buscando assim uma abordagem mais eficaz desse conteúdo, proposta essa que coloca o professor como mediador de descobertas e o aluno como o ponto central do processo.

Essa proposta foi elaborada com base na Engenharia Didática e é composta por 3 fases: o diagnóstico, a experimentação e a avaliação; todas constituídas por tarefas com uma ascensão continuada do nível de complexidade. No diagnóstico, o objetivo é sondar o conhecimento fracionário dos alunos, em seu conceito, equivalência, comparação e adição. A partir da análise das tarefas do diagnóstico é sugerido que seja elaborado as atividades de experimentação, e que de acordo com o esperado da aplicação, o autor também sugere três atividades compostas por tarefas que dizem respeito respectivamente a: Frações equivalentes, Adição de frações com denominadores iguais e a Adição de frações com denominadores diferentes. Nas duas primeiras atividades dessa fase é utilizado os tabuleiros de Tangram e de Xadrez na resolução das tarefas, além de outras situações que envolvem diferentes significados de frações com quantidades contínuas e discretas, e de natureza intensiva e extensiva. Essas três atividades devem ser aplicadas, segundo o autor, em equipes e na conclusão de cada uma delas deve haver um momento de socialização e discussão de respostas de cada equipe com a turma. Além disso, o professor deve orientá-los na resolução de todas as tarefas, inclusive na atividade diagnóstica, evitando assim possíveis erros por falta de compreensão das tarefas. Todos os objetivos apresentados pelo autor em cada tarefa são previsões, pois nesse trabalho não houve a concretização dessas ideias.

Em uma das tarefas da atividade 3, o autor apresenta itens que objetivam o estudante perceber que para reduzir as frações ao mesmo denominador, pode-se de maneira mais prática, multiplicar os termos de uma fração pelo denominador da outra e cita a comutatividade da multiplicação como garantia de se chegar a obter denominadores comuns.

Na última fase de Avaliação, objetiva-se verificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos na fase de experimentação sobre a adição de frações. Agora, de maneira individual, os alunos respondem e o professor-aplicador observa todos os aspectos importantes a serem corrigidos com os alunos para o alcance de uma aprendizagem ainda mais significativa desse conteúdo. É esperado que os alunos consigam resolver as tarefas dessa avaliação, mas o autor enfatiza que a Sequência Didática não é uma metodologia totalmente eficaz, pois pode ser que os alunos errem, principalmente na interpretação das situações apresentadas.

Esse trabalho visou mostrar sugestões de atividades as quais são passíveis de análises e adaptações para serem aplicadas como proposta de ensino da adição de frações. O autor aponta que a Sequência Didática é uma ferramenta na proposta do ensino de frações, não esperando ser a solução dos problemas do ensino de adição de frações, mas como tentativa de mudanças, podendo este trabalho ser analisado, adaptado e aplicado em pesquisas posteriores.

3.2 Fundamentos teóricos

3.2.1 Diferentes conceitos de fração

Apesar de encontrarmos vestígios da escrita fracionária há milhares de anos, pesquisas indicam que ainda existem muitos entraves no processo de ensino e de aprendizagem desse tema, gerando assim desconfortos na conduta desse conteúdo em sala de aula. (MAGINA e CAMPOS, 2008; ETCHEVERRIA, AQUINO, OLIVEIRA e LISBOA, 2019)

Além das inúmeras pesquisas com foco nas frações, avaliações nacionais como as do SAEB (2001) – Sistema de Avaliação da Educação Básica, desenvolvido pelo INEP/MEC, também comprovam a dificuldade dos alunos com relação as frações na 4ª série (5° ano) do Ensino Fundamental e em seu relatório recomenda que os números na forma de fração precisam ser melhor explorados, especialmente em situações práticas, de modo a adquirir significado pelos alunos. E essa exploração das diferentes possibilidades de aplicação das frações deva ter prioridade sobre a memorização dos procedimentos para realizar operações que as envolvam.

De acordo com Santos (2019), os números naturais e os números decimais suprem a maioria das necessidades numéricas do dia a dia, porém, as frações são fundamentais para uma melhor compreensão de conteúdos como número racional, proporcionalidade, probabilidade e cálculo algébrico, além de trazer mais significado para as escalas, porcentagens, razões e possibilidades e ainda aparecem com frequência em receitas culinárias, necessitando assim serem bem interpretadas.

Acredita-se que a vivência de situações que exija da criança números cuja representação não seja por elas conhecida, mas que naquele momento o seu uso te faça sentido, trará significado ao estudo de novos números para solucionar tais situações, sendo essa percepção instigante para a busca de uma ampliação em seu conhecimento numérico.

Essa ideia também é proposta por Bertoni (2009) destacando que a necessidade de novos números para quantificar surgem em meio a situações que envolvem números naturais e conduzem ao surgimento de um número racional, por exemplo, quando é proposto a uma criança a divisão de três laranjas pra duas delas, é esperado que ela responda facilmente que é uma laranja e meia para cada uma, surgindo assim, uma mistura de um número natural – 1 - com um número racional que pode ser escrito em forma de fração – meio. Situação como essa facilita a construção do conceito de número racional, pois é vivenciado pelo aluno a indispensabilidade de manusear números que estão fora do conjunto dos números naturais, além de possibilitar a interiorização de uma noção de número menor que uma unidade de forma implícita (no caso de um meio).

Além da situação quociente apresentada por Bertoni, é retratado por Campos, Nunes, Bryant, Garcia Silva, Canova, Cervantes (2014) outra situação que oportuniza a introdução ao conhecimento das frações:

> Na situação parte-todo, uma unidade (como uma pizza, uma barra de chocolate, ou uma figura geométrica) é dividida em partes iguais. A unidade passa a ser concebida como o todo ao qual a fração se refere. O denominador da fração representa o número de partes em que o todo foi dividido. O numerador da fração representa o número de partes às quais a quantidade se refere: por exemplo, em um retângulo que foi dividido em quatro partes iguais, três das quais foram pintadas, a fração $\frac{3}{4}$ representa a parte pintada. (Campos et al., p. 106)

Para o aluno as ideias de parte-todo e de quociente se diferem, “pois, dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas” (PCN, 1997, p. 68), apesar de serem representadas pelo mesmo número racional.

Essas situações podem fazer brotar noções intuitivas na mente das crianças substituindo as possíveis dificuldades que surgem por falta de convicção conceitual das frações, além de atingir um objetivo proposto pelos PCN (1997, p. 67) para o 2º ciclo, atuais 4º e 5º ano que diz: “Explorando situações em que usando apenas números naturais não conseguem exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, os alunos identificam nos números racionais a possibilidade de resposta a novos problemas”. A continuidade dessa prática também é proposta pelo PCN (1998, p. 101) no ensino de Matemática para o 3º e 4º ciclo (6º ao 9º ano).

É possível ainda que uma situação de comparação entre duas grandezas de mesma espécie some às vivências aqui abordadas, por exemplo em uma atividade contendo cinco questões em que o aluno acertou quatro delas. A comparação entre as questões corretas e o total de questões pode ser encontrada por meio de contagens simples, surgindo assim a percepção que o aproveitamento da atividade foi de 4 para 5 e posteriormente ajudando na disposição dos termos da fração (numerador e denominador), dessa forma é explorada a ideia de razão no conceito de frações.

Os três significados abordados nas situações aqui já citadas, são para Smole e Diniz (2016, p. 25) os principais significados que as frações representam ao se iniciar a aprendizagem desse conceito e estão apresentados no esquema a seguir:

Figura 11: Significados de frações

Fonte: Livro: Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 25)

Legitimando a convicção destes autores, os PCN, que sugerem iniciar o estudo desse conceito no 2º ciclo, atuais 4º e 5º ano, indicam que o conceito de fração deva ser introduzido com os significados de parte-todo, quociente e razão, relatando que

> [...] são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal (Brasil, 1997, p. 57).

Vivências que possibilitem o sentir da necessidade de expandir o seu conhecimento numérico dará um significado a aprendizagem desses novos números, pois será exposta uma situação em que aparecem quantidades que não são inteiras e impulsiona a criança ao estudo mais amplo e participativo da representação destes.

Depois de perceber a utilidade dessa nova escrita numérica de maneira informal, é importante que a definição de frações em seus diferentes significados seja muito bem explorada e formalizada, para que assim haja uma fluência maior ao lidar com estes números em situações que envolvem diferentes contextos e cálculos.

Corroboram com essa ideia Etcheverria, et al. (2019, p. 74) inspiradas por Llianares e Sánchez (1988), afirmando que mesmo os estudantes compreendendo o significado de fração em uma situação, podem não conseguir relacionar seu conhecimento a respeito das frações em outra situação com o contexto diferente. Daí se sucede a necessidade de discutir com os alunos os diferentes significados de fração de forma em que estes estejam permeados em meio às diversas situações expostas e/ou vivenciadas em variadas contextualizações. Possibilitando assim a aquisição do conhecimento seguro da aplicação de frações em seu cotidiano.

Sobre a formalidade no conceito de frações, Druck afirma

> Em Matemática a notação p/q indica diferentes noções, dependendo do contexto no qual é empregada: uma fração, a indicação de uma divisão de p por q, uma razão ou um número racional. Além disso, em linguagem corrente, a palavra "fração" significa "pedaço", "porção" (de alguma coisa), o verbo "fracionar" refere-se a "partir", "quebrar" ou "dividir" (algo). (DRUCK, I.F., 2006, p. 1).

Já Souza, J. e Parato (2015, p. 129), define fração como "um número que pode representar parte de um inteiro ou parte de uma quantidade".

As duas definições supracitadas foram voltadas para o significado de parte-todo, até mesmo por conta da etimologia da própria palavra “fração”, que já conduz a este conceito.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) indicam que os estudos dos números racionais, tanto na forma fracionária como decimal, devem ser abordados principalmente no terceiro ciclo do ensino fundamental, atuais 6º e 7º ano, percorrendo significados como: relação parte-todo, quociente, razão e operador, pois é constatado que apesar de serem conteúdos desenvolvidos em ciclos iniciais, a assimilação desses números em seus diferentes significados não acontece.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento recentemente implantado na educação, elaborado a luz dos PCN e que especifica os objetivos de aprendizagem de cada ano escolar do ensino fundamental, quando trata do ensino de frações, comunga praticamente da mesma ideia descrita anteriormente, mostrando que um dos objetos de conhecimento no 6º ano é a fração com os seus significados de parte/todo e quociente (p. 300), sendo este conceito ampliado e aprofundado no 7º ano com os seguintes significados: como parte de um inteiro, resultado da divisão, razão e operador, (p. 306).

Mediante o exposto, reconhecemos a importância do contato da criança com o conceito de fração em seus diversos significados. Porém, a fim de buscarmos respostas para as nossas questões com mais precisão, restringiremos nesta dissertação, a possibilidade do tratamento com a adição e subtração de frações permeando apenas a concepção parte-todo por julgarmos ser a mais conveniente para o alcance do avanço intelectual dos alunos frente a essas operações.

Confirma a nossa ideia os PCN (1997, p. 68), quando diz que é nas situações em que está implícita a relação parte-todo que encontramos a prática mais comum para explorarmos o conceito de frações. O fato de ser a prática mais comum, ratifica a recomendação de Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983), inspirados por Ellerbruch e Payne (1978) de ser a prática mais acessível às crianças e, portanto, o mais prático a ser utilizado para o ensino de adição de frações (com o mesmo denominador).

Sustentados nessa ideia e sem contradizer os documentos que regem o ensino é que prosseguiremos nossa pesquisa fazendo uma breve apresentação da concepção parte-todo, acreditando também que esta é fundamental na formação das demais concepções.

3.2.1.1 Fração como parte de um todo

Este significado consiste em repartir um inteiro, seja contínuo ou discreto, em partes iguais, seja essa igualdade na quantidade de elementos contados, no caso da grandeza discreta, ou uma igualdade de tamanho (área) no caso de grandezas contínuas. A representação de alguma dessas partes se dá por meio de uma fração em que o numerador indica a quantidade de partes consideradas e o denominador representa o total de partes que dividimos todo o inteiro. Nas palavras de Behr et al. (1983)

> A interpretação parte-todo do número racional depende diretamente da capacidade de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em subpartes ou conjuntos de tamanhos iguais. (Behr et al.,1983)[7] tradução nossa

Eles afirmam que a interpretação parte-todo do número racional depende da capacidade de particionar uma quantidade contínua em subpartes de tamanho igual ou um conjunto de objetos discretos em subconjuntos com a mesma quantidade de elementos. Ou ainda, como conceitua Moutinho (2005), “a ideia presente nesse significado é a de partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, na qual cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$.”

Segundo Santos (2019), a natureza do inteiro em questão, de que forma ele pode ser dividido e o que será considerado são pontos que merecem atenção, pois desses detalhes é que se resultam os diferentes tratamentos para se resolver as diversas situações. Como podemos observar nas situações que seguem que diferem na natureza do conjunto. A primeira particionamos um conjunto contínuo e encontramos

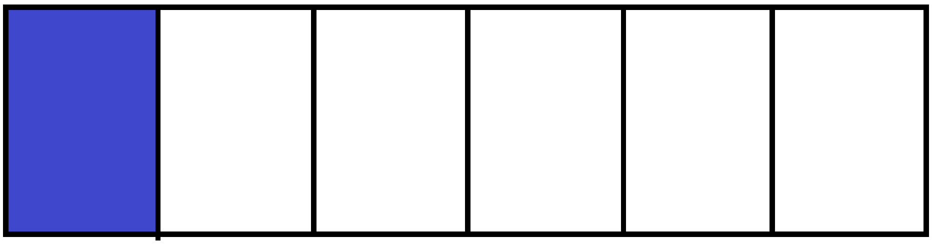
---

[7] The part-whole interpretation of rational number depends directly on the ability to partition either a continuous quantity or a set of discrete objects into equal-sized subparts or sets. (trecho retirado do artigo de Behr et al. (1983)

a fração associada a uma das partes e a segunda trabalhamos em um conjunto discreto, em que o todo é a soma das partes.

Considerando um retângulo como inteiro e dividindo-o em 6 partes iguais com uma delas pintada, poderemos representar essa parte pintada da figura por uma fração que será constituída por uma dupla entrada numérica, uma na parte superior (numerador) do traço indicando a quantidade de partes que estamos representando e outra na parte inferior (denominador) representando o total de partes iguais à pintada que possui em todo o inteiro, formando assim a fração $\frac{1}{6}$ que representará a parte destacada desta figura.

Figura 12: Representação geométrica da fração $\frac{1}{6}$



Esse exemplo trata-se de uma quantidade contínua e por isso a divisão é feita por meio da sua área. Essa representação geométrica das frações possibilita uma visualização rápida e acessível à contagem das entradas dos termos da fração (numerador e denominador) de forma significativa do conceito de fração o que justifica a prevalência dessa representação na nossa etapa de intervenção.

Consideremos agora um exemplo de fração como parte-todo em uma situação de quantidade discreta, a qual foi utilizada em uma das atividades de aplicação desta pesquisa. Observe que as partes consideradas são subconjuntos do inteiro (conjunto de ovos), ou seja, a quantidade de ovos foi igualmente dividida, o que mostra que nessa natureza de grandeza as frações são finitas, pois só podemos utilizar nos denominadores números em que dividem a quantidade inteira (18), já que não faz sentido haver quebra dos objetos considerados (ovos).

Figura 13: Fração de uma quantidade discreta

Fonte: LONGEN, 2018, p. 172

Tomando como unidade uma cartela com 18 ovos de codorna, poderemos representar a parte comida por Marcos com uma fração de numerador 6 e denominador 18 ($\frac{6}{18}$), ou de maneira mais simples, observar que temos três subconjuntos contendo seis ovos de codorna cada na cartela que representa o inteiro e como queremos representar uma dessas partes, teremos $\frac{1}{3}$ (fração irredutível equivalente a $\frac{6}{18}$), assim como representaremos a fração de Luana por $\frac{3}{18}$, ou ainda, $\frac{1}{3}$. Nessa situação também foi exigido que o aluno juntasse as duas partes comidas por Marcos e Luana, abordando assim a adição de frações com denominadores iguais.

3.2.2 Análise de erros: O erro como ferramenta de aprendizado

E como bem diz o ditado popular: “É errando que se aprende”, nessa pesquisa acreditamos que o erro é uma ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem e mesmo que, na maioria das vezes, seja interpretado como um fracasso e conduza a péssimas consequências, como até mesmo a reprovação de um aluno, ele pode ser desvinculado do fracasso desde que o enxerguemos como um aliado para o alcance da aprendizagem. Outras maneiras de encarar o erro são sugeridas por Carvalho em seu artigo publicado em Aquino (1997)

> Erro e esperança, erro e verdade ou erro e aprendizagem são apenas alguns dos pares possíveis. Eles foram citados simplesmente para mostrar que o automatismo da ligação entre o erro e fracasso pode ser proveniente mais de uma associação mecânica e, muitas vezes, preconceituosa, do que de uma relação causal que se introduziu em máxima pedagógica. (Aquino,1997, p. 12)

Sendo assim, o erro nos motiva a refletir sobre onde está o cerne do problema, ou seja, nos mostra o porquê não ter se chegado à resposta esperada e possibilita a aplicação de medidas que renove a esperança de se alcançar a aprendizagem. Segundo Castro (2016, p. 238)

> A perspectiva piagetiana vê o erro como parte do processo de construção de conhecimento, no qual pode dar indícios sobre o tipo de relação que a criança está estabelecendo com o objeto a conhecer; ou seja, através do erro é possível entender qual a lógica que o sujeito empregou, o que está “por trás” de seu raciocínio e a partir da compreensão do mesmo, propor uma ajuda eficaz.

A autora ainda corrobora com Castorina (1988), que afirma haver possibilidade de tratar a questão do erro na atividade escolar sob uma perspectiva diferente: “O erro é fecundo e positivo porque tem um lugar no mecanismo produtivo de conhecimento, (...) ele representa um papel construtivo na aquisição de conhecimento” (p. 238). Nessa perspectiva, consideramos que há uma grande contribuição do erro nesse processo, já que auxilia o professor a ler e interpretar o caminho do raciocínio do aluno e buscar estratégias para que a aprendizagem seja cada vez mais eficaz.

Ainda que o professor identifique o erro e não veja sentido algum por ser uma resposta inventada pelo aluno, ele pode ser analisado e trazer alguma informação sobre o cognitivo do aluno. Sobre isso, os PCN (1998) apontam que

> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho. (BRASIL, 1998, p. 55)

O professor também pode definir regras matemáticas e apresentar contraexemplos, partindo do erro do aluno para se justificar o cálculo correto, pois assim desconstrói algo que de forma errada foi fixado na mente do aprendiz, como salienta Cury (1995)

> Pensando na natureza da Matemática, pode-se partir da regra incorreta e questionar a própria ideia de regra em Matemática: como se deduz uma regra, quais os limites de validade ou que condições devemos impor para utilizá-la. Nessas condições, é possível explorar certos aspectos gerais da matemática, tais como a formalização de resultados. (p. 47)

No processo da adição e subtração de frações, o erro mais comum é o de que os alunos somam os numeradores e os denominadores para montar a respectiva fração do resultado, como salientam Etcheverria, et al. (2019, p. 75), inspiradas por alguns outros autores

> Monteiro e Groenwald (2014), ao se referirem aos erros cometidos pelos estudantes ao somarem ou subtraírem frações, afirmam que o erro mais comum consiste na soma independente de numeradores e denominadores e consideram a possibilidade de que por já terem estudado o algoritmo da multiplicação de frações, possam estar aplicando essa ideia. Llinares e Sánchez (1988) explicam que esse tipo de erro pode ser causado pela semelhança que há entre os números Naturais e as frações, ou seja, os estudantes não veem a fração 4/7 eles veem o número 4 e o número 7 e operam com eles como se fossem independentes.

Logo, no momento de intervenção, poderá ser esclarecido que esse caminho nos levaria a uma resposta incorreta e bem diferente da real, tentando assim formalizar a regra correta de resolução.

Esse erro supracitado talvez seja justificado pela associação equivocada de regras para adição de números naturais com aquelas utilizadas para a operação com números racionais ou quando há uma “generalização” da regra usada para a multiplicação entre frações, como exposto por Etcheverria, et al. (2019, p. 75). Entretanto, independente das possíveis justificativas, o que o erro mostra é um desequilíbrio na absorção do conhecimento e por isso a importância da sua identificação, como afirmam Oliveira, Arruda, Silva e Camargo (2012) ao fazerem uma análise sobre a teoria do Brousseau

> Ao conhecer e ler sobre a teoria de Brousseau percebemos o quanto é importante a identificação do erro no espaço de ensino e aprendizagem, sendo que quando os erros são identificados, o aluno passa por um desequilíbrio em relação ao seu conhecimento, pois este não é mais válido. A superação deste desequilíbrio mostra que novos conhecimentos foram integrados aos antigos, voltando o aluno a um novo equilíbrio. Por isso erro para Brousseau é um conhecimento, pois a cada desequilíbrio o aluno supera seu conhecimento para adquirir um novo, que será válido até um novo desequilíbrio.

O desequilíbrio que o erro representa na adição de frações é o que tenta ser estabilizado nesta pesquisa, expondo de forma concreta a justificativa do procedimento e esclarecendo a necessidade de percorrer todo um longo caminho pra se chegar ao resultado correto, diferenciado do simples fato de somar os numeradores e denominadores, por exemplo.

3.2.3 O uso de materiais manipulativos

A apresentação de conteúdos matemáticos de maneira instigante permite que os alunos vivenciem experiências que os aproximem do conhecimento a ser atingido, diferenciando de uma apresentação apenas teórica que muitas das vezes não faz sentido algum para os aprendizes. Como proposta para a tentativa de amenizar as barreiras existentes no ensino e na aprendizagem da matemática, utilizaremos o material manipulável pois acreditamos que

> Com o auxílio de materiais manipuláveis é possível garantir uma nova perspectiva acerca de um objeto com o qual o aluno só teve contato mediante informações recebidas por parte de livros ou explicações teóricas dadas por professores, possibilitando uma experiência única deste aluno com este objeto, ampliando suas percepções e promovendo rearranjos de ideias na memória de trabalho. (GOMES, 2019, p.54)

A relação que o material manipulável traz com situações mais concretas possibilita uma aprendizagem mais natural e prazerosa, auxilia na construção do pensamento do aluno e impõe, mesmo que de forma indireta, que a matemática é algo humanamente atingível, diferente de apresentar uma regra pronta, pois permite que o aluno ative o seu raciocínio lógico e acompanhe as descobertas enxergando sentido no que se pratica e aproximando a Matemática de sua realidade.

Aplicando esses benefícios ao ensino e aprendizagem da adição e subtração de frações, tentaremos substituir um mecanismo formal de resolução por um processo resolutivo com propriedade, usando estrategicamente materiais manipuláveis para tornar o processo de aprendizagem mais participativo, com uma maior interação entre o aluno e o conteúdo por meio da montagem concreta da resolução, possibilitando assim, a construção do seu conhecimento. Como reforça Silva e Martins (2000):

> Acontece que estes materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as ideias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático. (SILVA; MARTINS, 2000)

Partindo desse princípio, DRUZIAN (2007) propõe o uso de um material manipulável em sala de aula para explicarmos o processo resolutivo dessas operações ao qual associamos uma atividade exploratória que segundo SMOLE; DINIZ, (2016, p.11) "é um poderoso instrumento para a aquisição de novos conhecimentos porque a motivação para explorar, descobrir e aprender está presente em todas as pessoas de modo natural", considerando como um dos pressupostos para que haja uma aprendizagem mais significativa. E eles ainda reforçam que

> De fato, qualquer recurso didático deve servir para que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem mediante sua participação nas atividades de aprendizagem. Mas são os processos de pensamento do aluno que permitem a mediação entre os procedimentos didáticos e os resultados da aprendizagem. (SMOLE; DINIZ, 2016, p.12)

Para aflorar o processo resolutivo da adição e subtração de frações no intelecto dos alunos, é imprescindível que os seus processos mentais acompanhem todos os passos de resolução, por exemplo, o aluno precisa sentir a necessidade de obter frações com o mesmo denominador para calcular uma soma ou uma subtração entre esses números, e assim ir em busca das frações equivalentes de forma espontânea. Essa mediação entre o processo resolutivo e o processo mental se torna mais permissiva quando o aluno manipula um material que comprove aquilo que houve na explicação com o que está sendo palpado. Mesmo diante de tamanha importância

> O material manipulável não pode ser visto apenas como um "brinquedo" ou "escada", que são adequados em determinados momentos do processo de ensino-aprendizagem. Espera-se que o aluno, ao sentir-se seguro, abra mão desse suporte para seu crescimento e então opte por trabalhar sem esse auxílio. (BORDIN; BISOGNIN, 2011)

Embora reconhecendo a importância do uso do material manipulável em sala de aula, espera-se que o uso do material não seja necessário com o passar do tempo, ou seja, que os alunos compreendam os conceitos e propriedades envolvidos e, sem o material, consigam fazer articulações, podendo associá-las as diferentes situações.

Ainda destaca- se que o objetivo de um trabalho com uso de materiais manipuláveis é ajudar o aluno a ganhar segurança no cálculo e que com os significados acomodados eles possam usar o seu raciocínio todas as vezes que se depararem com situações que envolvam o tema abordado (no nosso caso particular, as operações com frações), buscando amenizar também a rejeição, que é um reconhecido problema no ensino e aprendizagem da matemática.

Apesar de vermos que os materiais manipuláveis são objetos didáticos aliados à uma aprendizagem significativa temos ciência de que

> No entanto, é fundamental não esquecer que só a utilização de materiais não garante uma aprendizagem eficaz e significativa. Para além da manipulação, é preciso refletir nos processos e nos produtos porque o mais importante no ensino-aprendizagem da Matemática é a atividade mental a desenvolver nos e pelos alunos. (SILVA; MARTINS, 2000)

Por isso, um dos legados a ser deixado por uma sequência de atividades que priorize o uso de material manipulável é que alunos não apresente apenas as respostas corretas, mas estejam conscientes dos conceitos e procedimentos envolvidos que permitiram chegar as suas conclusões.

CAPÍTULO 4

Procedimentos metodológicos: Sobre a concepção da sequência de atividades

Buscando significar o ensino da adição e subtração de frações para os alunos, montamos uma sequência de atividades que aproximasse ao máximo os alunos desse conteúdo, de forma que eles participassem do processo e criassem um vínculo consistente (memorável) nesta resolução.

Usaremos esse espaço para descrevermos o planejamento de cada uma das atividades que compuseram a nossa sequência, mostrando as suas finalidades e expectativas na aplicação.

4.1 Atividade 1: Diagnóstico

Para iniciarmos, achamos por bem aplicar uma atividade de sondagem, para entender o nível de dificuldade dos alunos participantes da pesquisa com relação ao conteúdo de frações. Aqui não focamos apenas nas operações em destaque nesta pesquisa, a adição e subtração de fração e sim também em alguns pré-requisitos para a compreensão deste conteúdo, ou seja, usamos questões que abordaram desde o conceito de frações até as operações propriamente ditas.

Essa atividade, nomeada de atividade diagnóstica, foi composta por 6 questões. As duas primeiras questões buscam indícios de como os estudantes entendem as frações como parte de um inteiro, seja ele de natureza contínua, no caso da primeira, ou de natureza discreta, no caso da segunda. Seguem as questões:

Figura 14: Questão 1 da atividade diagnóstica

1. Observe a torta de morangos que Letícia fez. Ela dividiu a torta em 8 partes iguais e comeu 3 partes dela.

Qual a fração que representa as partes que ela comeu?

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{8}{5}$

d) $\frac{8}{3}$

Fonte: SAEB (2011, p.29)

A questão apresenta uma torta de morango que foi dividida igualmente em 8 fatias, como mostra no desenho, e fica destacada três delas, representando aquelas que foram comidas por Letícia. Os conceitos requeridos neste item referem-se

> [...] ao reconhecimento de partes de um todo (3/8), do significado de fração, do conhecimento de seus elementos de composição (numerador/denominador) e da representação de um número racional na sua forma fracionária. (SAEB, 2001, p. 29)

Com essa questão busca-se verificar se o aluno associa a fração à ideia de parte-todo, bem como saber se a representação de uma fração era conhecida por ele, sendo assim solicitado a escolha da alternativa que indicasse a escrita correta dessa fração.

Analisemos agora a segunda questão:

Figura 15: Questão 2 da atividade diagnóstica

2. De uma cartela com 18 ovos de codorna, veja quanto os irmãos Marcos e Luana comeram:
Responda:

a) Que fração da cartela representa a porção que Marcos comeu? ____

b) E a porção que Luana comeu, equivale a que fração da cartela? ____

c) Os dois juntos comeram que fração da cartela de ovos de codorna? ____

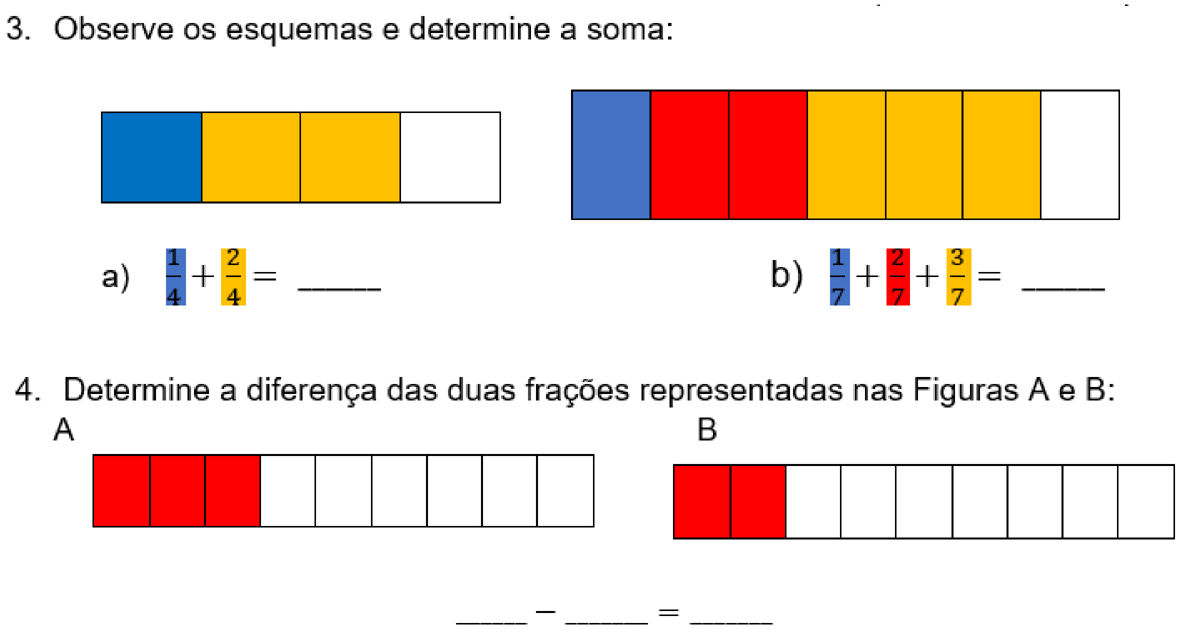
d) Escreva a fração do item anterior de uma forma mais simples. ____

(LONGEN, 2018, p. 172)

O que gostaríamos de entender nessa questão é também se os alunos reconhecem a fração como parte de um todo, em um conjunto discreto, e a composição da escrita fracionária, introduzindo também a junção de duas frações com o mesmo denominador e a simplificação dela. Acreditamos que a partir dela é possível introduzir, de maneira sutil, a adição entre frações.

Na terceira e na quarta questão buscamos representar inteiros com retângulos, já familiarizando os alunos dessa representação gráfica das frações, visto que essa será a representação utilizada posteriormente nas atividades da sequência, estes eram divididos em partes iguais e coloridas, daí solicitamos a resolução de algumas adições no caso da terceira e na quarta, uma subtração, ambas com frações de mesmo denominador, já que eram frações retiradas de um mesmo retângulo em cada item. Essas questões objetivavam entender se as ideias fundamentais da adição e subtração estavam concebidas pelos alunos, assim como se havia a compreensão de que na resolução dessas operações se mantinha o denominador, visto que as próprias imagens esclareciam este fato.

Figura 16: Questões 3 e 4 da atividade diagnóstica



Fonte: Acervo da pesquisa

Na terceira, com a intenção de facilitar a visualização dos alunos e de retomar a ideia de fração como parte de um todo, colorimos a fração de acordo com a sua representação no desenho, solicitando apenas a soma das partes coloridas em cada figura. Já na quarta, aumentando o nível de complexidade das questões, solicitamos que representasse as partes pintadas de vermelho em cada figura para que somente a partir da sua escrita encontrassem a diferença entre elas.

Seguindo com as investigações nas questões, decidimos salientar sobre a equivalência de frações, item fundamental para a compreensão do procedimento de cálculo da adição e subtração de frações. A questão apresentou uma situação em que dois garotos nomeados por Hebercley e Felipe ganharam barras de chocolate do mesmo tamanho, porém decidiram dividi-las em quantidades diferentes de parte e comeram algumas delas. A questão solicitou a seguinte análise:

Figura 17: Questão 5 da atividade diagnóstica

5. Hebercley e Felipe ganharam barras de chocolates do mesmo tamanho. Hebercley dividiu seu chocolate em 6 partes iguais e comeu 4 delas. Felipe preferiu dividir o seu em 3 partes iguais e comeu 2.
   Analise as afirmativas abaixo e marque apenas a correta:

a) Hebercley comeu mais chocolate que Felipe.
b) Felipe comeu mais chocolate que Hebercley.
c) Eles comeram a mesma quantidade de chocolate.

(adaptado de IEZZI, 2009, p.167)

Essa foi uma questão de múltipla escolha em que exigia a comparação entre quatro sextos e dois terços, esperando que os alunos percebessem que mesmo com termos diferentes nas frações, essas tinham o mesmo valor.

Por último, apresentamos uma situação problema envolvendo um ciclista que saiu da cidade A em direção à cidade B, mas que percorreu no primeiro dia um meio desse percurso e no segundo dia, um terço. Foi solicitado que os alunos dissessem qual a fração esse ciclista já havia percorrido, como também qual a fração faltava ele percorrer e, finalizando, mostra que essa fração que faltava correspondia a 60 quilômetros, possibilitando assim a descoberta da distância entre as duas cidades. Como mostra a seguir:

Figura 18: Questão 6 da atividade diagnóstica

6. Um ciclista saiu da cidade A em direção à cidade B. No primeiro dia, percorreu $\frac{1}{2}$ da distância que separa as duas cidades e, no segundo dia, $\frac{1}{3}$ dessa mesma distância.

Agora, responda:

a) Qual é a fração que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem?

b) Qual é a fração que representa a distância que falta para chegar à cidade B?

c) Sabendo que a distância que falta para chegar à cidade B é de 60 quilômetros, qual é a distância entre essas duas cidades?

(BIANCHINI, 2018, p.186)

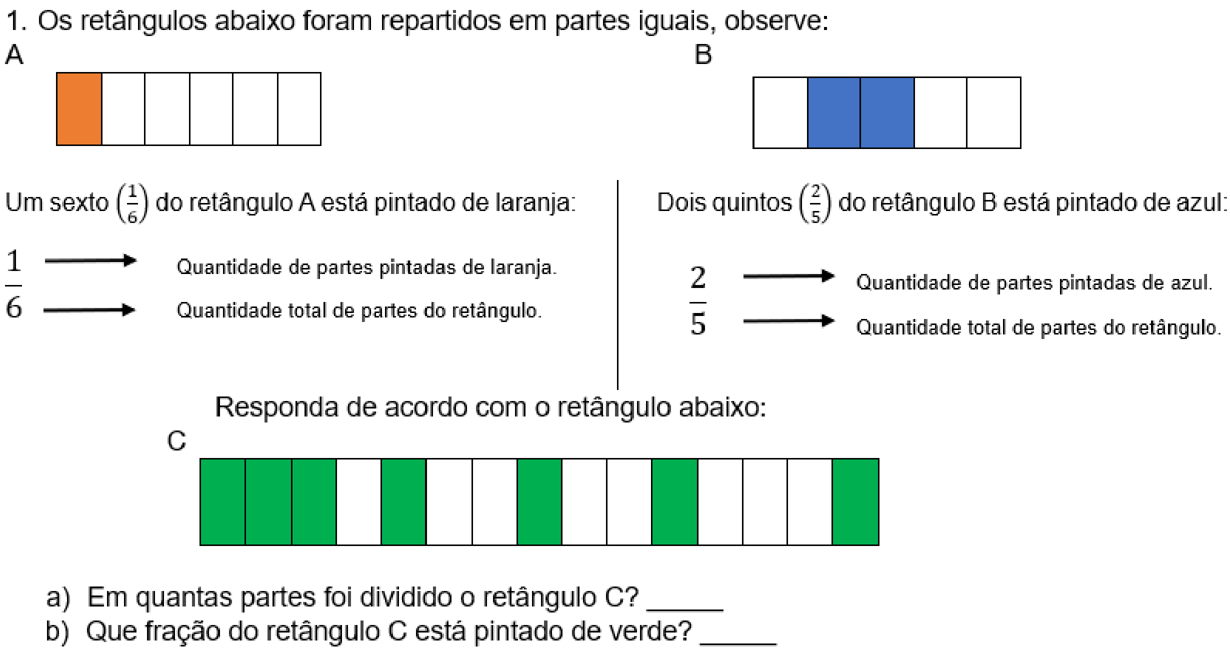
Nessa questão, além de se buscar perceber o nível de interpretação e compreensão dos alunos em uma situação problema, abordou-se a adição e subtração entre frações com denominadores diferentes, como também o cálculo do inteiro, partindo do valor dado de parte dele.

4.2 Atividade 2: Instrutiva

Continuando no caminho que busca levar a significação do conteúdo de adição e subtração de frações, pensamos em uma atividade pela qual a professora/pesquisadora poderia orientar os alunos na resolução das questões, intencionando a intensificação da compreensão deste objeto de conhecimento. Orientações essas que seriam dadas oralmente, com o suporte visual, dependendo da necessidade durante a realização da atividade. Importante salientar que toda a representação gráfica das frações nessa atividade será de forma retangular, por ser uma figura fácil de dividir em partes iguais e que também serão manuseadas pelos alunos em um material nos próximos passos dessa aplicação.

Essa atividade foi composta por três questões auto explicativas, em que a primeira deixa explícito a formação da escrita de uma fração, que quantidades representam o numerador e o denominador, com dois exemplos detalhados dessa formação nos retângulos A e B e solicita que eles contêm as partes que foram divididas o retângulo C e representem a parte pintada por meio de uma fração. Como mostra a figura a seguir:

Figura 19: Questão 1 da atividade instrutiva



1. Os retângulos abaixo foram repartidos em partes iguais, observe:

A

B

Um sexto $\left(\frac{1}{6}\right)$ do retângulo A está pintado de laranja:

1 → Quantidade de partes pintadas de laranja.

6 → Quantidade total de partes do retângulo.

Dois quintos $\left(\frac{2}{5}\right)$ do retângulo B está pintado de azul:

2 → Quantidade de partes pintadas de azul.

5 → Quantidade total de partes do retângulo.

Responda de acordo com o retângulo abaixo:

C

a) Em quantas partes foi dividido o retângulo C? _____

b) Que fração do retângulo C está pintado de verde? _____

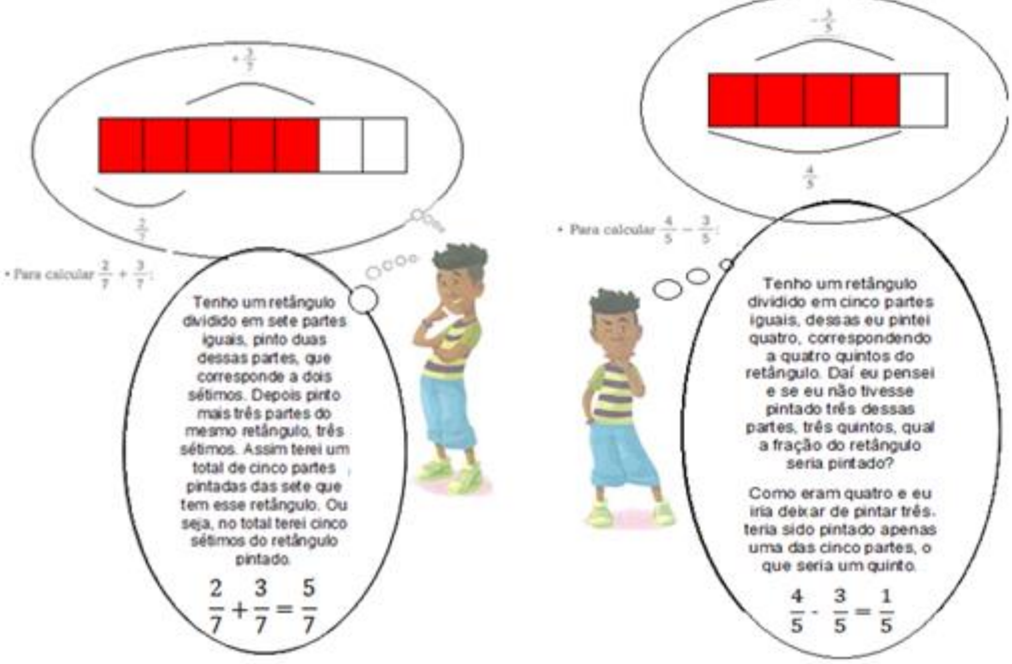
Fonte: Acervo da pesquisa

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em montar a fração pedida no item b, haja vista que os exemplos presentes na própria questão esclarecem a formação dela. A finalidade dessa questão é a de formalizar a escrita fracionária e a ideia conceitual de fração como parte-todo.

Na segunda questão (Figura 20) há imagens revelando as formas de pensar de um menino para realizar as operações de adição e subtração de frações com o mesmo denominador. A princípio, o menino tem a ideia de adição como junção de quantidades em um retângulo divido em sete partes iguais. Ele pinta duas partes para representar a primeira fração e depois, no mesmo retângulo, pinta outras três partes para representar a segunda e, assim, com a junção, obter o resultado esperado. O raciocínio elaborado para a subtração está calcado em tirar uma quantidade de outra, pois ele de início pinta quatro das cinco partes do retângulo e reflete sobre como ficaria se não tivesse pintado três delas. Ao final, as conclusões são representadas numericamente e expressas em palavras. Como mostra a imagem a seguir:

Figura 20: Questão 2 da atividade instrutiva

2. Kelvin imagina partes de um retângulo para calcular o resultado de adições e subtrações de frações com o mesmo denominador. Observe:



Calcule as operações com as frações abaixo, se preferir use o raciocínio de Kelvin:

a) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} =$ ____ d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} =$ ____

b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$ ____ e) $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} =$ ____

c) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} =$ ____

(Adaptado de BIANCHINI, 2018, p. 180)

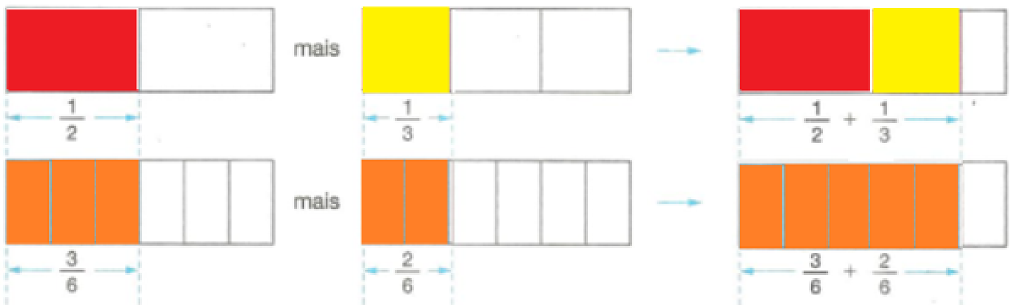
Ao final da questão há a solicitação de resoluções de adições e subtrações semelhantes às resolvidas no balão de pensamento do menino, todas com denominadores comuns, objetivando a percepção do acompanhamento do aluno na explicação da questão e, consequentemente, no domínio da adição e subtração envolvendo frações com o mesmo denominador.

Para finalizar essa atividade, propomos uma situação-problema, em que Eliane (nome fictício) vai a feira com uma certa quantia e gasta um meio na banca de frutas e um terço da mesma quantia na banca de verduras e legumes. Em seguida, procura saber a fração que ela gastou nas duas bancas. Para resolver essa situação é necessário que se faça a adição de duas frações com denominadores diferentes, cálculo distinto do apresentado na questão anterior e que não se resolve com o raciocínio exposto por Kelvin. Diante disso, depois do questionamento, é exposto um texto explicando essa resolução representando graficamente a quantia por um retângulo e cada uma das partes gastas com uma cor primária: a vermelha e a amarela, as quais foram trocadas por partes do mesmo tamanho e pintadas da cor laranja, que é uma cor secundária originada exatamente pelo vermelho junto ao amarelo, ilustrando assim a equivalência de frações, fator essencial na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, além de deixar claro a ideia de juntar quantidades que é associada à adição. Veja a figura a seguir:

Figura 21: Questão 3 da atividade instrutiva

3. Eliane foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Eliane gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Para ajudar na compreensão da resolução dessa questão, a quantia que Eliane tinha será representada por um retângulo, como o mostrado ao lado, e nele será representado as frações indicadas:



As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$. Então complete:

$\underbrace{\_\_\_\_ + \_\_\_\_}_{\text{Frações denominadores diferentes}} = \underbrace{\_\_\_\_ + \_\_\_\_}_{\text{Frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \_\_\_\_\_$

Eliane gastou ____ da quantia inicial.

(Adaptado de GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

O intuito dessa questão é ilustrar o procedimento necessário para se resolver a adição de frações com denominadores distintos, induzindo ao aluno a entender a sua importância e formalização, sem a necessidade de decorar regra alguma. Espera-se que o aluno complete as linhas com as frações, primeiro com as mostradas na questão, depois com as suas respectivas equivalentes com o denominador comum e por fim o seu resultado que também é solicitado na resposta do problema.

Estima-se, com o desenrolar das questões dessa atividade, que os estudantes compreendam o processo de adição de frações com denominadores diferentes.

4.3 Atividade 3: Manuseando e aprendendo

Com o propósito de enriquecer a nossa aplicação e ir ao encontro ao que pretendemos alcançar nesta pesquisa, buscamos um material para ser aplicado e manuseado pelos alunos na construção do conhecimento sobre adição e subtração de frações e encontramos uma ideia que se encaixou nas nossas expectativas, que foi o “Jogo de frações” descrito por DRUZIAN (2007, p. 25 a 27). Essa ideia foi aprimorada para que melhor se enquadrasse nas nossas pretensões, como por exemplo a utilização desse jogo como material manipulativo e o formato das peças, entre outras que achamos necessário.

O objetivo deste material é facilitar a visualização das frações equivalentes e aplicá-las na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, visto que esse entendimento é primordial no desenrolar da resolução dessas operações.

Confeccionamos este material partindo de um retângulo branco com 60 cm de comprimento e 10 cm de largura, que será considerado o nosso inteiro (referência), pois a partir de retângulos congruentes a ele, diferenciando apenas na cor, e com divisões em partes iguais formaremos as demais peças. Iniciando as partições com um retângulo vermelho que foi dividido em duas partes iguais: um amarelo que foi dividido em três partes iguais, outro retângulo vermelho dividido em quatro partes iguais, um azul repartido em cinco partes iguais, um laranja dividido em seis partes iguais, um verde repartido em doze partes iguais e um violeta repartido em 20 partes.

Com seis materiais idênticos ao descrito anteriormente, iremos iniciar o seu uso em sala de aula dividindo a turma em seis grupos e distribuindo o material para a sua exploração. Para abordar inicialmente o conceito de frações como parte de um todo, será proposto aos alunos que comparem as peças coloridas com o retângulo branco que será identificado como o inteiro e que registre as frações correspondentes a cada cor.

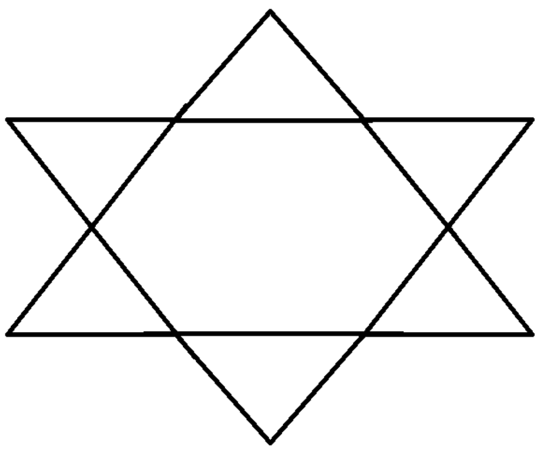
As cores nesse material didático são intencionais, pois usaremos a arte para nos ajudar a entender a “troca” das frações com denominadores diferentes por frações com denominadores iguais, frações estas equivalentes às anteriores. Serão usadas peças de cores primárias: amarelo, azul e vermelho para gerar peças de cores secundárias: laranja, verde e violeta. E apesar dos alunos nesta fase já serem conscientes dessa abordagem artística, iremos revigorar esses conceitos por meio de um vídeo “O Show da Luna! O Amarelo que ficou Verde #Clipe com Letra 2”[8], com a seguinte descrição:

Luna está terminando um lindo desenho com suas tintas coloridas, quando de repente duas cores, ainda molhadas, se misturam deixando o radiante sol de Luna completamente verde. Ao lado de Júpiter e Cláudio, seus amigos inseparáveis, ela conclui que o amarelo se juntou ao azul e virou verde. Será? Mas como? Depois de algumas suposições ela decide que a melhor forma de obter a resposta é entrar no seu desenho e perguntar para o sol como ele ficou verde. (https://www.youtube.com/watch?v=KlPuQL3psQ8)

Nesse pequeno vídeo é ilustrado pelos personagens que o encontro de algumas cores forma outras, ou seja, fica claro que o amarelo com o vermelho forma o laranja, que o azul com o amarelo forma o verde e que o vermelho com a azul forma o violeta.

Além do vídeo iremos propor uma atividade prática para fortalecer a convicção dessas misturas e de seus resultados. Essa atividade se chama: “Estrela das cores”, formada por dois triângulos equiláteros e congruentes, sobrepostos e em posições opostas, formando a estrela que com o uso de tintas guaches, os alunos irão misturar as cores primárias e obter as secundárias. Os alunos receberão o desenho abaixo junto a três potes de tinta guache, uma amarela, outra vermelha e outra azul.

Figura 22: Estrela das cores



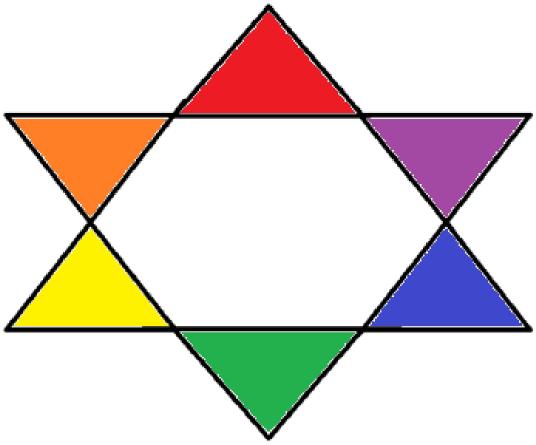
Fonte: Acervo da pesquisa

[8] disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KlPuQL3psQ8

Os alunos serão orientados a pintar os triângulos formados nas pontas de forma alternada, ou seja, pintando um sim e outro não, com as cores amarela, vermelha e azul e entre essas cores irá ser proposto que eles as misturem gerando assim as cores secundárias: laranja, violeta e verde.

Espera-se que os alunos sigam as instruções de forma correta e finalize sua figura como mostrado abaixo, mudando apenas as tonalidades pois dependem da quantidade de tinta de cada cor que for utilizada.

Figura 23: Estrela das cores pintada



Fonte: Acervo da pesquisa

Sem mudar o foco da aplicação desta pesquisa, tanto o vídeo ilustrativo, como a atividade prática objetivam a melhor compreensão do material ao se tratar da troca de peças que representam frações por outras sem perca de sua generalidade.

Dando continuidade à abordagem de conteúdos no referido material, iremos explorar a obtenção de frações equivalentes, usando a sobreposição de peças e para norteá-los nessa observação iremos produzir uma ficha de registros em que os alunos irão escrever todas as suas descobertas.

O objetivo dessa ficha é amarrar as descobertas dos alunos, pois apesar de ser algo intencional, o maior foco aqui é torná-los construtores do seu conhecimento, direcionando-os ao esclarecimento de cada etapa do processo resolutivo das operações em questão.

Essa ficha conterá uma explicação resumida do material e duas questões: uma abordando a equivalência de frações e a outra com operações de adição e subtração de frações, que serão apresentadas posteriormente.

Na primeira questão será solicitado que os alunos completem as frações a fim de formar classes de equivalências usando a sobreposição de peças do material.

Figura 24: Questão 1 da atividade 3

Para o auxílio na compreensão de frações, iremos manusear um material didático. Este material é composto por um retângulo branco que será o nosso inteiro (referência), e peças coloridas de cores primárias e secundárias que foram obtidas por divisões em partes iguais de retângulos como o inteiro (branco).

1) Usando a sobreposição das figuras obtenha frações equivalentes às indicadas abaixo, completando o numerador ou denominador com o número apropriado:

a) $1 = \frac{\quad}{2} = \frac{3}{\quad} = \frac{4}{\quad} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{6} = \frac{15}{\quad} = \frac{\quad}{20}$

b) $\frac{\quad}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{\quad} = \frac{\quad}{20}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{20}$

d) $\frac{1}{5} = \frac{4}{\quad}$

e) $\frac{\quad}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{\quad}$

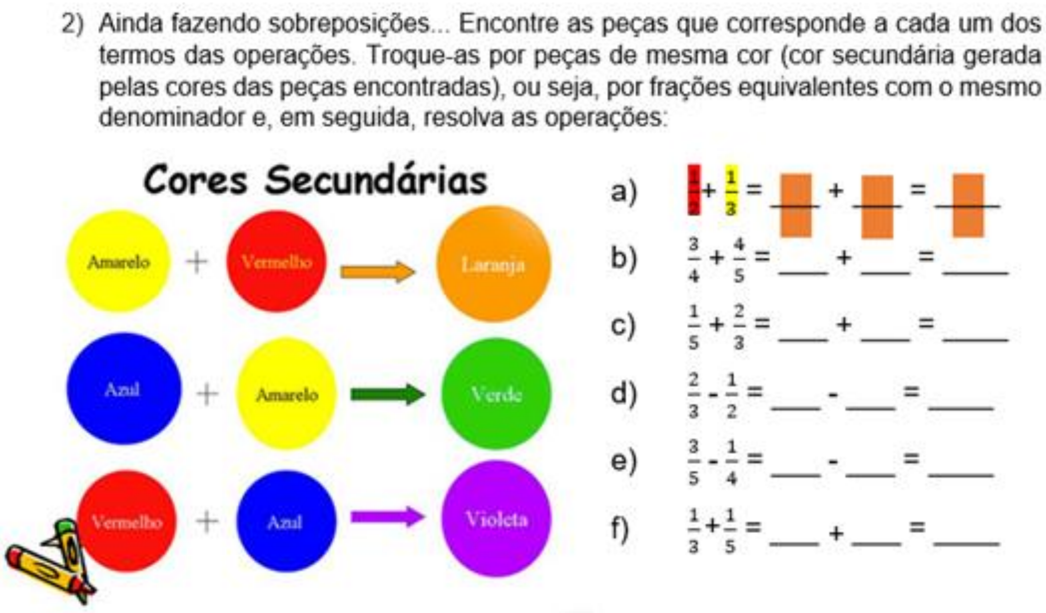
f) $\frac{4}{5} = \frac{12}{\quad}$

Fonte: Acervo da pesquisa

Assim, espera-se que com a ajuda de um dos termos da fração, numerador e/ou denominador os alunos façam as comparações e anotem as equivalências encontradas percebendo que frações com termos diferentes podem representar a mesma parte no inteiro.

Na segunda questão, orienta-se que os alunos encontrem as peças que correspondem aos termos das operações e por meio de sobreposições ele troque-as por peças que juntas sejam do mesmo tamanho, fazendo com que as duas peças correspondentes aos dois termos da operação sejam trocadas por peças de mesma cor, que correspondem a frações equivalentes as frações dadas, como visto na questão anterior. Para dar apoio nessa relação de troca será disposto uma imagem relembrando a ideia das cores primárias e secundárias, pois as cores das peças referentes a cada um dos termos nas operações serão trocadas pela cor resultante da mistura entre elas e no item a, as parcelas da adição e a soma, estão pintadas das cores das peças do material em questão. Como mostra a imagem abaixo:

Figura 25: Questão 2 da atividade 3



Fonte: Acervo da pesquisa

A ideia é que os alunos com a orientação da professora/pesquisadora preencham as lacunas resolvendo as operações propostas de maneira correta, percebendo que não se pode somar ou subtrair as frações de maneira imediata sem fazer o uso das frações equivalentes nesse processo.

E para finalizar esta etapa da pesquisa e aflorar o pensamento do aluno a respeito de como resolver uma adição e subtração de frações com ou sem o uso do material proposto, a professora/pesquisadora dará exemplos no quadro usando ou não as peças do material para resolver algumas adições e subtrações com frações, descrevendo o passo a passo a ser seguido para se chegar ao resultado, não para mecanizar o processo, mas orientando e respaldando o procedimento didático para o alcance dessa aprendizagem.

4.4 Atividade 4: Sistematização

Após o estímulo a compreensão do procedimento necessário para encontrar a soma e a diferença entre as frações com o uso do material, será a hora de executar uma atividade em que o aluno não contará com o apoio do material didático antes utilizado, até porque o intuito aqui não será a aprendizagem apenas com o uso do material e sim uma aprendizagem ampla e segura sobre a resolução das operações de adição e subtração entre frações.

Chegando ao fim da aplicação da presente pesquisa, precisaremos observar o quanto os alunos evoluíram em aprendizado relacionado as operações trabalhadas, por isso pensamos em aplicar uma última atividade contendo três questões a fim de verificar a evolução cognitiva dos alunos a respeito dos conteúdos abordados ao compará-la com a avaliação diagnóstica proposta inicialmente.

A primeira questão será de observação direta para investigar de forma clara e objetiva se o procedimento resolutivo da adição e subtração com frações foi bem compreendido por eles. Veja:

Figura 26: Questão 1 da atividade 4

1) Resolva as adições e subtrações abaixo:

a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=$

c) $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=$

b) $\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=$

d) $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=$

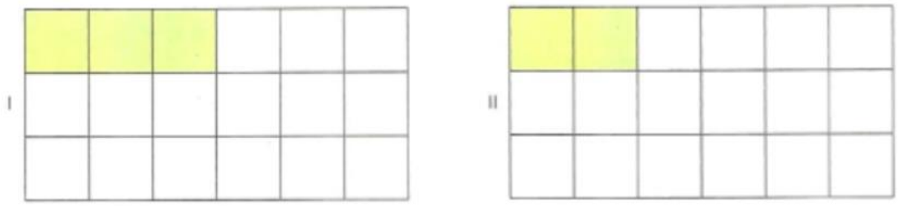
Fonte: Acervo da pesquisa

Nessa questão foi apresentada duas adições, item a e d, e duas subtrações, item b e c, sendo que uma de cada uma delas apresenta denominadores iguais e outra, denominadores diferentes, objetivando reconhecer a atenção dos alunos quanto a esse detalhe e distinção de fatos.

Na segunda questão será apresentada duas figuras retangulares repartidas em 18 partes iguais, e com uma parte em cada uma delas pintadas de amarelo. A forma geométrica dessas figuras foi a única explorada nessa sequência de atividades por sua fácil repartição. Veja a seguir:

Figura 27: Questão 2 da atividade 4

2) Observe as figuras abaixo e responda:



a) Qual é a fração representada pela parte hachurada (pintada) das figuras:
I: ______ II: ______

b) Escreva essas frações na forma irredutível (simplificada):
I: ______ II: ______

c) Calcule a adição das duas frações representadas:

d) Calcule a diferença dessas duas frações:

(adaptado de CENTURIÓN, JAKUBOVIK, 2015, p.180)

O estudante será questionado nessa questão em quatro itens. O primeiro pede a fração que representa a parte pintada em cada uma das figuras, no segundo é solicitado que os alunos simplifiquem as frações tornando-as irredutíveis, e nesta espera-se que o aluno se lembre da troca das frações por suas equivalentes, agora fazendo uma espécie de caminho de "volta". No terceiro item é solicitado a soma e no quarto, a diferença. A expectativa aqui é que os alunos reconheçam que possuem dois pares de frações que são equivalentes entre si e que eles prefiram aquelas que possuem o mesmo denominador, que são exatamente as respostas esperadas do item a.

A nossa intenção nessa questão é que os alunos mostrem saber representar uma fração, saber simplificar uma fração a ponto de torná-la irredutível, e que ele mostre firmeza durante o processo resolutivo da adição e subtração entre frações.

Por último, apresentaremos uma situação-problema, similar com a apresentada na atividade instrutiva, em que a personagem vai a feira com uma determinada quantia e gasta uma parte na compra de sardinhas e outra na compra de camarão e é solicitado que os alunos encontrem a fração do dinheiro que foi gasto com peixes na feira. Como mostra a seguir:

Figura 28: Questão 3 da atividade 4

3) Clarice foi à feira para comprar peixes. Gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que levou para comprar sardinhas e $\frac{1}{3}$ para comprar camarão. Que fração do dinheiro que Clarice levou à feira foi gasto na barraca de peixes?

Resposta: _______________________

(GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

Uma vez apropriados do conceito de equivalência de fração e do procedimento resolutivo da adição, espera-se que os alunos reconheçam- na e possam resolver a atividade com facilidade.

Ao fim dessa aplicação, os alunos participantes serão prestigiados pela participação e empenho, reforçando a importância da presente pesquisa para o ensino da Matemática.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS DA ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

Nesse capítulo apresentaremos os resultados da aplicação da atividade diagnóstica. A exposição desse resultado se dará por meio de análises nas respostas dos alunos, investigando as suas estratégias resolutivas tanto em soluções corretas, parcialmente corretas ou incorretas para, a partir desses resultados, adequarmos os próximos passos da aplicação, pois mesmo com a sequência de atividades premeditada foram feitas alterações pontuais para tentar sanar as dificuldades apresentadas.

Essa análise será feita seguindo preceitos encontrados na nossa fundamentação teórica e terão como principais inspiradores autores como: Etcheverria, et al. (2019), Magina e Campos, 2008, Castro (2016) e documentos oficiais, como Brasil (1997; 1998; 2015).

Como essa atividade teve a importante função de buscar indícios sobre a relação dos alunos com o conteúdo de frações, iniciaremos a análise com a perspectiva na abordagem da análise de erros (Cury, 1994) para podermos identificar o problema que distancia os alunos de efetuar cálculos coerentes na adição e subtração de frações e assim aplicarmos práticas condizentes de superação de obstáculos para aproximá-los destes conteúdos matemáticos.

Para uma melhor compreensão dos dados coletados, definimos alguns critérios para a correção, considerando quatro aspectos elencados por Cury (1994) e que acreditamos abranger toda a demanda de respostas. A seguir mostraremos os critérios de identificação para cada um desses aspectos.

— **Corretas:** consideramos como respostas corretas aquelas que chegaram ao resultado esperado usando procedimentos adequados na resolução.
— **Parcialmente corretas:** as respostas em que o aluno usa procedimento adequado, mas durante o processo resolutivo há algum tipo de equívoco e por isso não alcança o resultado esperado.
— **Incorretas:** são respostas em que há a exposição de caminhos equivocados nos cálculos e, portanto, se chega a resultados falsos.

— **Em branco:** é considerado uma questão em branco quando o aluno não inicia nenhuma resolução.

Tabela 1: Desempenho dos alunos na atividade diagnóstica

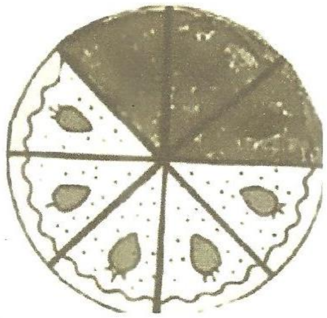
Atividade diagnóstica					
		Corretas	**Parc. Corretas**	**Incorretas**	**Em Branco**
Questão 1		17	--	2	0
Questão 2	a)	13	3	2	1
	b)	14	4	0	1
	c)	14	4	0	1
	d)	4	2	10	3
Questão 3		12	6	0	1
Questão 4		13	5	0	1
Questão 5		16	--	3	0
Questão 6	a)	2	11	3	3
	b)	1	0	15	3
	c)	0	1	14	4

Fonte: Acervo da pesquisa

Como a primeira questão dessa atividade foi objetiva, não houve respostas consideradas parcialmente corretas. Nela, a maioria dos alunos mostrou conhecer a fração como parte de um inteiro contínuo e como se compunha a sua representação, pois assinalaram a resposta $\frac{3}{8}$. Um dos dois erros foi a alteração da ordem da função do numerador e do denominador e o outro erro foi a marcação da fração que representa a parte da pizza não comida por Letícia, como mostra a figura:

Figura 29: Resposta do Aluno A14

1. Observe a torta de morangos que Letícia fez. Ela dividiu a torta em 8 partes iguais e comeu 3 partes dela.



Qual a fração que representa as partes que ela comeu?

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{8}{5}$

d) $\frac{8}{3}$

Fonte: Acervo da pesquisa

Diferente da primeira questão, a segunda questão era subjetiva e com quatro itens, os itens a e b solicitavam a escrita da fração que representava a parte comida por Marcos e Luana, respectivamente. No item a) verificamos dois erros distintos, um que foi a fração $\frac{6}{3}$, em que o aluno registrou as duas quantidades de ovos comidas para compor a fração e o outro foi $\frac{5}{14}$ que possivelmente tenha sido erro de contagem, como ilustramos a seguir:

Figura 30: Resposta do aluno A4

2. De uma cartela com 18 ovos de codorna, veja quanto os irmãos Marcos e Luana comeram:

Responda:

a) Que fração da cartela representa a porção que Marcos comeu? $\frac{5}{14}$

b) E a porção que Luana comeu, equivale a que fração da cartela? $\frac{3}{12}$

c) Os dois juntos comeram que fração da cartela de ovos de codorna? $\frac{8}{18}$

d) Escreva a fração do item anterior de uma forma mais simples. $\frac{5}{18} + \frac{3}{12} = 8$

(LONGEN, 2018, p. 172)

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse item, as três respostas parcialmente corretas foram: A primeira resposta que incluímos nessa categoria foi $\frac{6}{12}$ em que no denominador foi colocado a quantidade restante dos ovos. A segunda apresentou uma ambiguidade de respostas $\left(\frac{6}{18}\, ou\, \frac{3}{18}\right)$, revelando um pouco de insegurança, ou também porque o aluno acabou fazendo uma anotação de uma dúvida e esquecendo de retornar para conferir a resposta. A terceira, na verdade, não conseguimos identificar o numerador por conta de arranjos na escrita numérica, mas o denominador estava correto.

No item b) que é bem semelhante ao item a), encontramos 4 respostas parcialmente corretas, em que uma delas encontramos a mesma lógica de erro do item anterior desse mesmo aluno, $\frac{3}{15}$, apresentando no denominador a quantidade de ovos que não foram comidos por Luana. A segunda $\frac{3}{6}$, cujo denominador foi a quantidade de ovos que Marcos comeu e, por fim, outros dois erros que não apresentaram sentido em sua representação. Até aqui, podemos concluir que a definição de fração como parte de um inteiro, bem como sua representação está presente entre os conhecimentos dos participantes, visto que aproximadamente 77% deles acertaram aos três questionamentos iniciais.

A partir do item c) há a introdução de cálculos entre as frações com a solicitação da representação da parte dos ovos comidos, em que fica implícito uma adição de frações com denominadores iguais. Encontramos 14 acertos e especulamos que essas resoluções foram feitas por contagem de ovos na própria imagem disponível ou por meio de adição das frações que poderia ser encontrado via cálculo mental ou expondo o cálculo, como fez uma aluna ao fazer o registro: $\left(\frac{6}{18} + \frac{3}{18} = \frac{9}{18}\right)$.

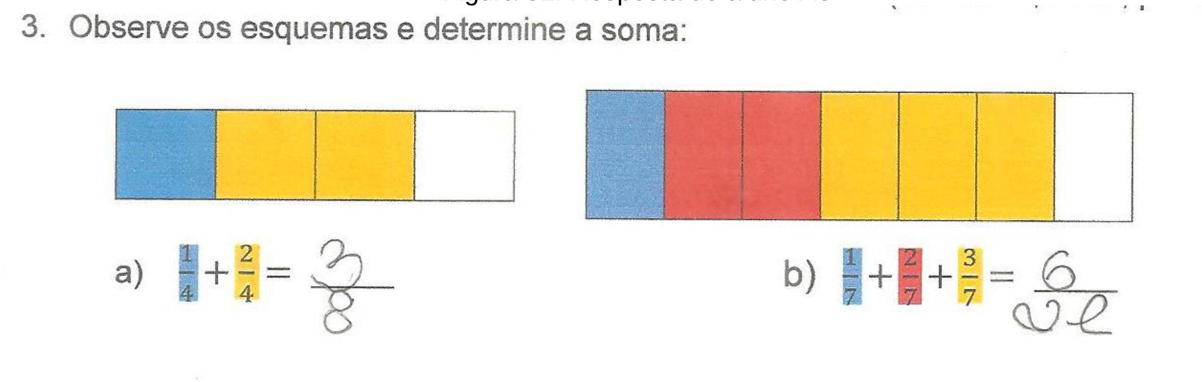
Encontramos 4 respostas parcialmente corretas nesse item, nessa categoria elencamos as seguintes respostas: troca da ordem dos termos da fração resultante; uso da quantidade de ovos não comidos no denominador; o numerador 8, suspeitamos que por erro de contagem, trata-se da resposta exposta na imagem acima e; denominador 27, juntando o total de ovos com os ovos comidos.

No item d) abordamos a simplificação de frações que é um caso especial de equivalência de frações, aqui não exigimos que essa simplificação fosse ao ponto de que tornar-se irredutível a fração, então consideramos como certa qualquer fração encontrada por meio de uma simplificação correta. Dos três participantes que não responderam, um deles é o mesmo que não respondeu toda essa questão, os outros dois só não responderam a este item e, acreditamos que, por não conhecerem o processo de simplificação de frações, optaram por não arriscar. As duas respostas parcialmente corretas, uma foi por erro no processo de divisão de um dos termos e o outro foi por conta da divisão em apenas um dos termos da fração.

A maioria dos erros neste item se deu por repetição da resposta ou de um dos termos da fração apresentada no item anterior, acreditamos que por não lembrarem de como executar a simplificação, preferiram colocar a fração da forma em que já estava. E quanto aos acertos, apenas dois deles deixaram a fração irredutível, uma expondo os caminhos de resolução e a outra colocando diretamente a fração (um meio), os outros dois dividiram os termos da fração por três e encontraram a fração três sextos. Com esse item percebemos que nem todos os estudantes compreendem a equivalência de frações, o que nos fez reafirmar a inclusão desse tema na nossa sequência de atividades.

Na questão 3 foi apresentada duas adições envolvendo frações de mesmo denominador, representadas por duas maneiras diferentes, a geométrica e a numérica, como os itens a e b são semelhantes, diferenciando apenas pela quantidade de parcelas, analisaremos em conjunto. Nela contabilizamos 12 acertos, e 6 respostas parcialmente corretas destas, cinco são pelo mesmo equívoco resolutivo, mostrado na imagem a seguir:

Figura 31: Resposta do aluno A3

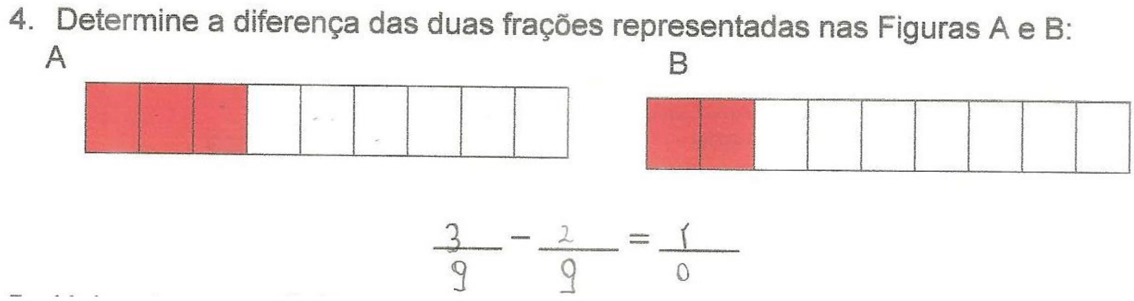


Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse tipo de resposta, foi somado tanto os numeradores quanto os denominadores, como se os termos da fração tratassem de números naturais isolados ou especulamos também ser por uma confusão de regras operatórias com frações, pois a multiplicação se efetua operando os seus termos, como afirma Brolezzi (1996) e a outra resposta parcialmente correta foi por erro de cálculo na adição dos numeradores do item b. Um dos alunos deixou a questão em branco.

A Questão 4, exige que os alunos calculem a diferença entre duas frações que estão representadas como parte de retângulos pintadas de vermelho, a exigência vai além da operação de subtração, pois o participante também precisa representar numericamente essas frações e montar a operação que já está definida por seu sinal entre os traços das frações e só assim encontrar essa diferença, que pode ser visualizada por meio do desenho ou encontrada por meio de cálculos numéricos. Nessa questão, 13 dos participantes responderam como o esperado, 5 acertaram parcialmente e 1 deixou em branco. Vale destacar que esse aluno que deixou essa questão em branco não coincide com o aluno que deixou em branco a questão anterior. Das cinco respostas que estão parcialmente corretas, três correspondem ao erro de subtrair tanto os numeradores como os denominadores, como podemos verificar na resposta a seguir:

Figura 32: Resposta do aluno A8



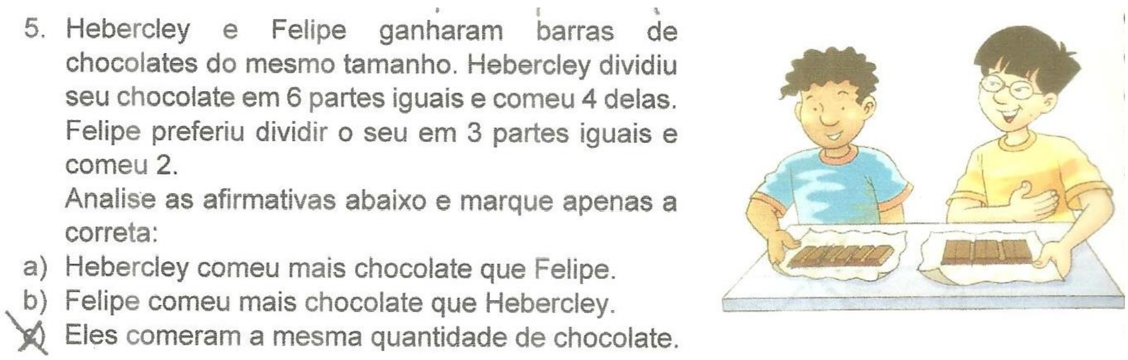
Fonte: Acervo da pesquisa

Vale ressaltar que esses são também alunos que cometeram esse mesmo erro nas adições da questão anterior, encontrando como resultado inclusive uma fração que por definição nem existe $\left(\frac{1}{0}\right)$. Os outros dois erros aconteceram pela ausência dos denominadores na representação das frações, um deles ainda chegou a expor o denominador, porém apenas na resposta, o outro só respondeu com o numerador.

Mais de 70% dos erros cometidos nas questões 3 e 4 dizem respeito ao erro mais comum nas operações de adição e subtração de frações, segundo Monteiro e Groenwald (2014) citado por Etcheverria et al. (2019, p. 75), que é operar de forma isolada os numeradores e também os denominadores, mesmo com a clareza das representações geométricas das frações operadas.

A quinta questão aborda uma situação em que nos permite coletar informações acerca da percepção da equivalência de frações, mesmo essas frações possuindo termos diferentes, com a representação de dois chocolates iguais, mas que foram tanto divididos em partes diferentes como também comidas quantidades de partes diferentes pelos dois garotos apresentados. É esperado que o aluno perceba que a fração $\left(\frac{4}{6}\right)$ tem o mesmo valor que $\left(\frac{2}{3}\right)$, como encontramos na maioria das respostas que são idênticas a apresentada a seguir:

Figura 33: Resposta do aluno A9



5. Hebercley e Felipe ganharam barras de chocolates do mesmo tamanho. Hebercley dividiu seu chocolate em 6 partes iguais e comeu 4 delas. Felipe preferiu dividir o seu em 3 partes iguais e comeu 2.
Analise as afirmativas abaixo e marque apenas a correta:
a) Hebercley comeu mais chocolate que Felipe.
b) Felipe comeu mais chocolate que Hebercley.
c) Eles comeram a mesma quantidade de chocolate.

Fonte: Acervo da pesquisa

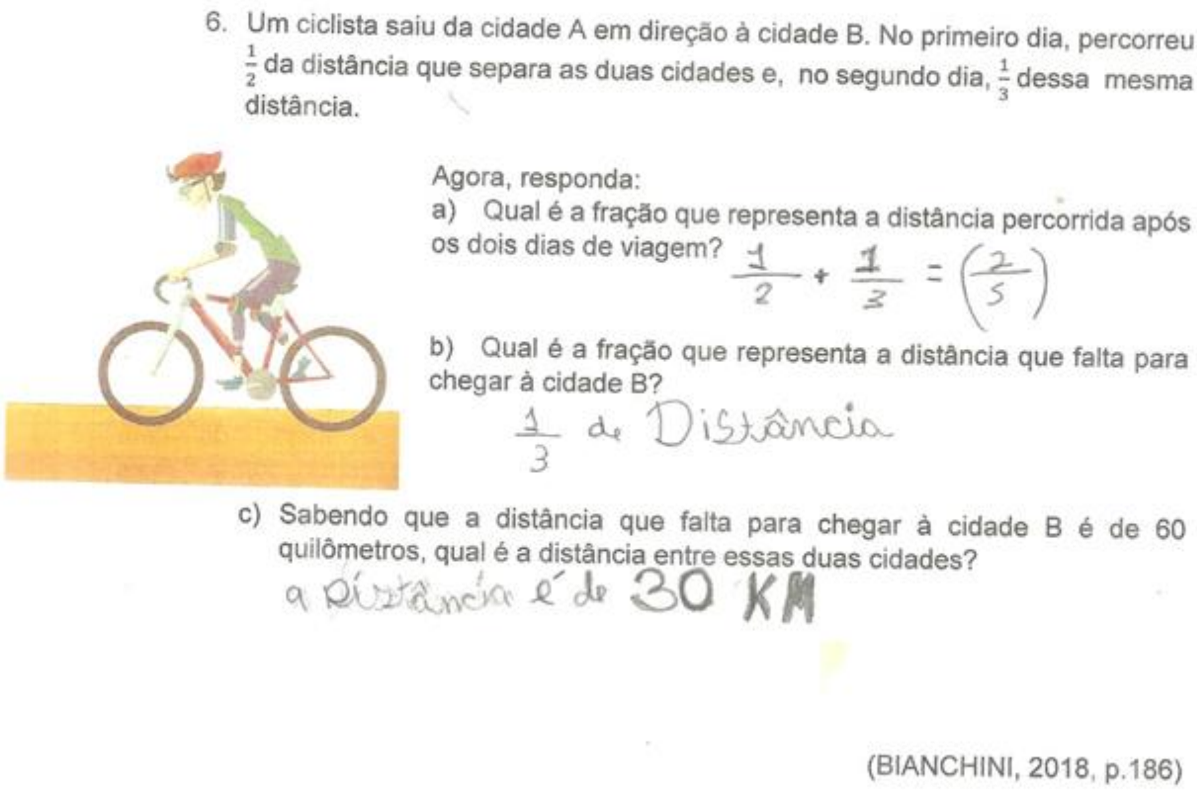
Como essa questão é objetiva, não temos a opção da resolução do aluno está parcialmente correta e somente três dos alunos marcaram a alternativa que mostra que Hebercley comeu mais chocolate que Felipe, talvez pelo fato de Hebercley ter comido 4 partes e Felipe apenas 2. Esses alunos não se atentaram que os tamanhos das partes eram diferentes. Mas o que nos leva a entender com o resultado dessa questão em que 16 dos participantes marcaram a alternativa correta é que a noção de frações equivalentes é conhecida por eles e esse fato é bem importante para as operações tratadas nessa pesquisa.

A última questão dessa atividade é uma situação problema em que um ciclista sai de uma cidade a outra e no primeiro dia ele percorre um meio $\left(\frac{1}{2}\right)$ da distância entre as cidades e no outro dia $\left(\frac{1}{3}\right)$ dessa mesma distância. No primeiro item da questão é solicitado que o aluno indique a fração que representa a distância percorrida nos dois dias de viagem, necessitando que ele interprete a situação e identifique que é necessário que se faça uma adição entre as frações dadas.

Diante das respostas em que encontramos no item a, três alunos deixaram em branco e três apresentaram respostas incorretas. Entre essas respostas tem uma que nos dá a entender que foi erro de interpretação, pois o aluno coloca as duas frações dadas separadas por vírgula, ou seja, ele representou as distâncias percorridas de maneira separada e os outros dois erros foram com a exposição da fração $\left(\frac{1}{3}\right)$ o que nos dá a entender que ele expôs a distância apenas do segundo dia.

Foram consideradas respostas parcialmente corretas aquelas que mostraram a intenção de juntar as frações, mas que não a adicionaram adequadamente, foram 11 respostas nesse nível. Dentre elas, tivemos duas opções de respostas, dois alunos responderam com a fração $\frac{1}{5}$, mostrando a adição ($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$) supõe-se que eles inverteram a operação da soma de frações com denominadores iguais, pois aqui eles somam os denominadores e mantêm os numeradores, por serem iguais. As demais respostas foram $\frac{2}{5}$, seis dessas respostas expuseram a maneira com que fizeram a adição, somando tanto os numeradores como os denominadores, como vemos abaixo, assim como as outras três que apesar de só colocarem essa resposta, deixa subentendido que seguiram o mesmo procedimento.

Figura 34: Resposta do aluno A10



6. Um ciclista saiu da cidade A em direção à cidade B. No primeiro dia, percorreu $\frac{1}{2}$ da distância que separa as duas cidades e, no segundo dia, $\frac{1}{3}$ dessa mesma distância.

Agora, responda:

a) Qual é a fração que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem? $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5}\right)$

b) Qual é a fração que representa a distância que falta para chegar à cidade B?

$\frac{1}{3}$ da Distância

c) Sabendo que a distância que falta para chegar à cidade B é de 60 quilômetros, qual é a distância entre essas duas cidades?

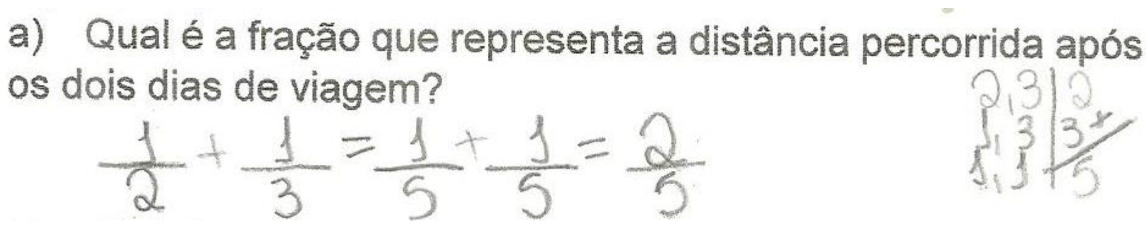
a Distância é de 30 KM

(BIANCHINI, 2018, p.186)

Fonte: Acervo da pesquisa

Um dos participantes até chegou a fazer o dispositivo de decomposição dos números 2 e 3 para encontrar o MMC entre esses números, porém ao invés de multiplicar o 2 pelo 3 fez a soma e ainda ao colocar nas frações não modificou os numeradores, como segue:

Figura 35: Resolução do aluno A13

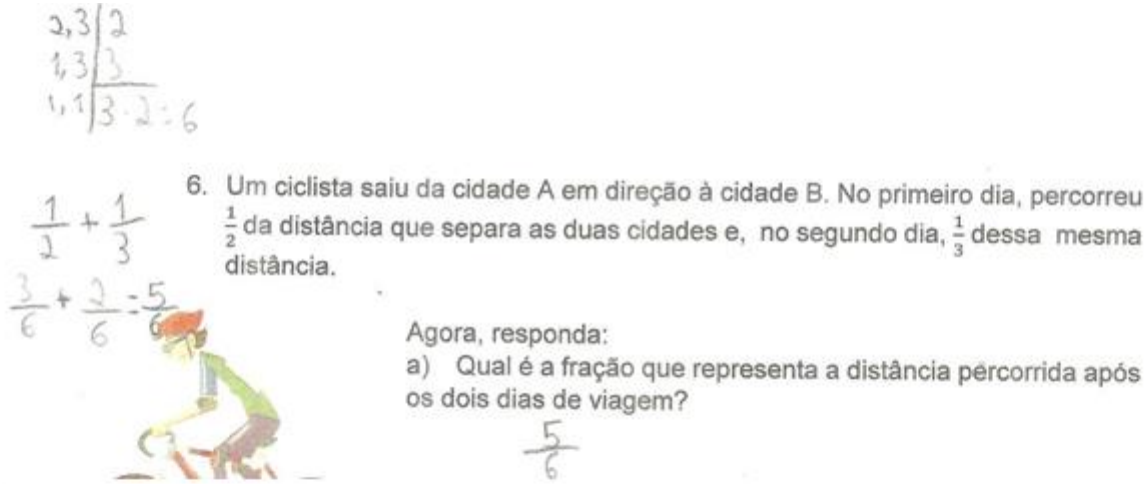


Fonte: Acervo da pesquisa

Essa resposta nos faz pensar que esse participante memorizou um procedimento resolutivo e na hora da atividade lembrou dele em partes.

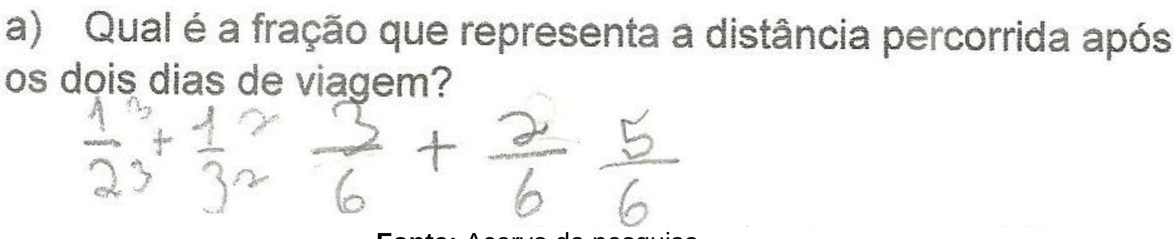
Os dois acertos foram resolvidos de maneiras diferentes, um foi utilizando o MMC e o outro foi encontrando as equivalências. Vejamos, a seguir, essas resoluções:

Figura 36: Resposta do aluno A18



Fonte: Acervo da pesquisa

Figura 37: Resposta do aluno A 19



Fonte: Acervo da pesquisa

Essas duas resoluções corretas e com procedimentos distintos nos mostram que esses alunos tiveram aprendizagens significativas desse conteúdo, pois apesar de não ter assistido a explicações recentes, conseguiram resolver a questão corretamente.

Ao contrário de Barreto (2017), ao comparar dois questionários um com cálculos prontos e outro com cálculos apresentados em forma de situações problema, aqui notamos que a maioria dos alunos, nesse item, identificou a necessidade de se resolver a adição, porém apresentaram dificuldade ao desenvolver os cálculos, cometendo inclusive o erro considerado por Monteiro e Groenwald (2014) citado por Etcheverria et al. (2019, p. 75), como o mais comum, supondo eles que seja por uma confusão com o algoritmo da multiplicação de frações antes já estudado pelos alunos.

O item b depende do item a, pois pede a fração que representa a distância que falta para ele chegar ao destino, esperando que o aluno complete a fração da resposta anterior ao inteiro por meio de uma subtração $\left(1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\right)$. Acontece que dentre as duas resoluções corretas do item a, apenas uma conseguiu acertar a b sem expor o cálculo, podendo ter sido feito mentalmente (se já percorreu cinco sextos, falta um sexto para concluir o trajeto) e a outra não soube que operação executar, fazendo cálculos desconexos. Todas as demais respostas estavam erradas com a exceção de três que optaram por não responder. Os erros desse item foram aleatórios e, em sua maioria, sem justificativas visíveis, até porque procedem do erro do item anterior.

O item c também é sequencialmente dependente do item anterior, pois ele diz a quantidade de quilômetros que faltam para o ciclista chegar à cidade B e o aluno deve pensar na proporcionalidade que se associa a multiplicação que se um sexto vale 60 km, então o inteiro será seis vezes desse valor e foi isso que o único aluno que respondeu parcialmente correto fez. Porém, errou no algoritmo de multiplicação e obteve como resposta o número 320 ao invés de 360. Quatro alunos optaram por não responder este item e 14 alunos responderam erroneamente com valores aleatórios.

A análise dos erros cometidos pelos alunos nesse questionário nos revela que a maioria deles não conhece os procedimentos operatórios com frações e acabam aplicando regras que memorizaram em algum momento, mesmo desconhecendo a sua validade, o que nos alerta quanto a necessidade de aplicação de processos que consolidem esse saber.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nesse capítulo descreveremos como se deu a sequência de atividades descrita no capítulo 4 que deu prosseguimento a intervenção dessa pesquisa e foi adaptada diante dos resultados da atividade diagnóstica expostas no capítulo anterior.

Aqui também serão expostos alguns comentários de observações da professora/pesquisadora ao aplicar essa sequência e ao final será apresentado as conclusões sobre o quanto a intervenção aplicada pode ter contribuído com a compreensão dos alunos a respeito dos conteúdos abordados.

6.1 Atividade 2: Instrutiva

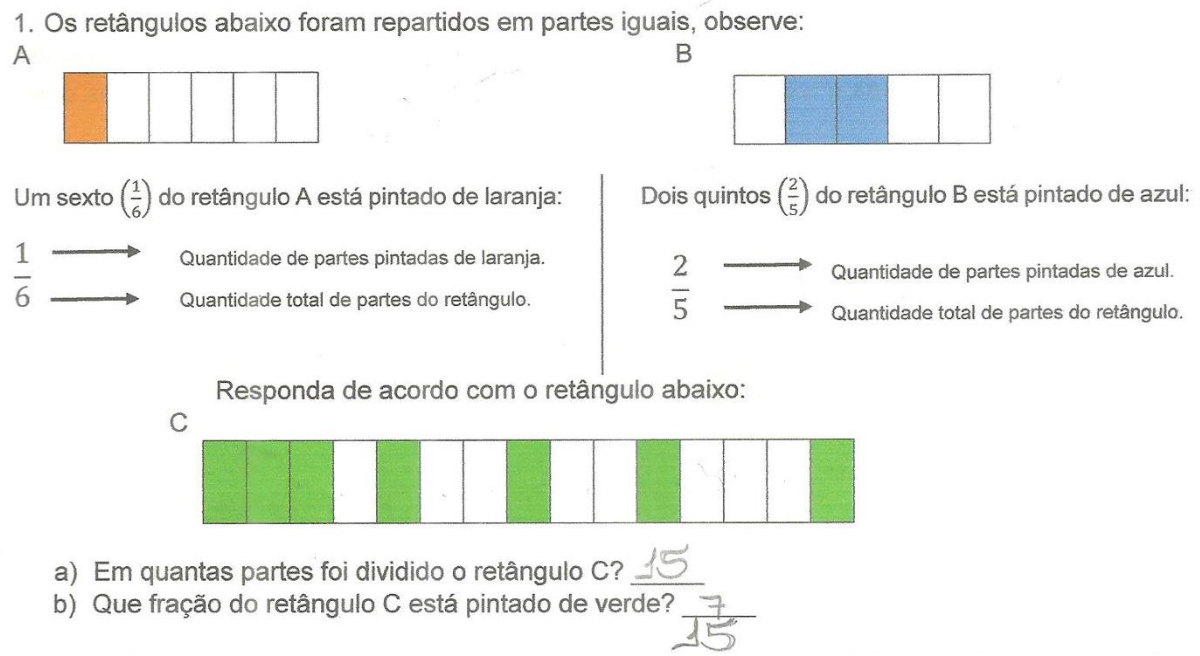
Diante do resultado da atividade diagnóstica, exposto no capítulo anterior, buscamos mecanismos de intervenção no ambiente de aprendizagem do nosso público-alvo a fim de agregar conhecimentos sobre fração. A princípio aplicamos uma segunda atividade na qual abordamos inicialmente o conceito de fração, para assim chegarmos nas operações de adição e subtração.

A abordagem dessa segunda atividade teve o diferencial da inserção de instruções tanto orais quanto escritas, ou seja, ao passo que os alunos iam resolvendo cada uma das questões eles ouviam as instruções da professora/pesquisadora e também liam em sua própria atividade orientações que os ajudavam a obter êxito em suas respostas.

Na observação dessa atividade não será enfatizada a análise de erros, nem focaremos em dados numéricos de erros e acertos das questões, pois a intenção será expor algumas situações de aprendizagem.

A primeira questão dessa atividade tem a importante missão de enfatizar a formação da escrita numérica de uma fração que representa partes pintadas de um retângulo. Os exemplos apresentados na questão descrevem a quantidade que deve ser colocada no numerador e no denominador, instruindo como o aluno deve escrever a fração pedida. Aproximadamente 80% dos alunos mostraram ter entendido essa escrita respondendo à questão corretamente, como mostra um exemplo abaixo:

Figura 38: Resposta do Aluno A15

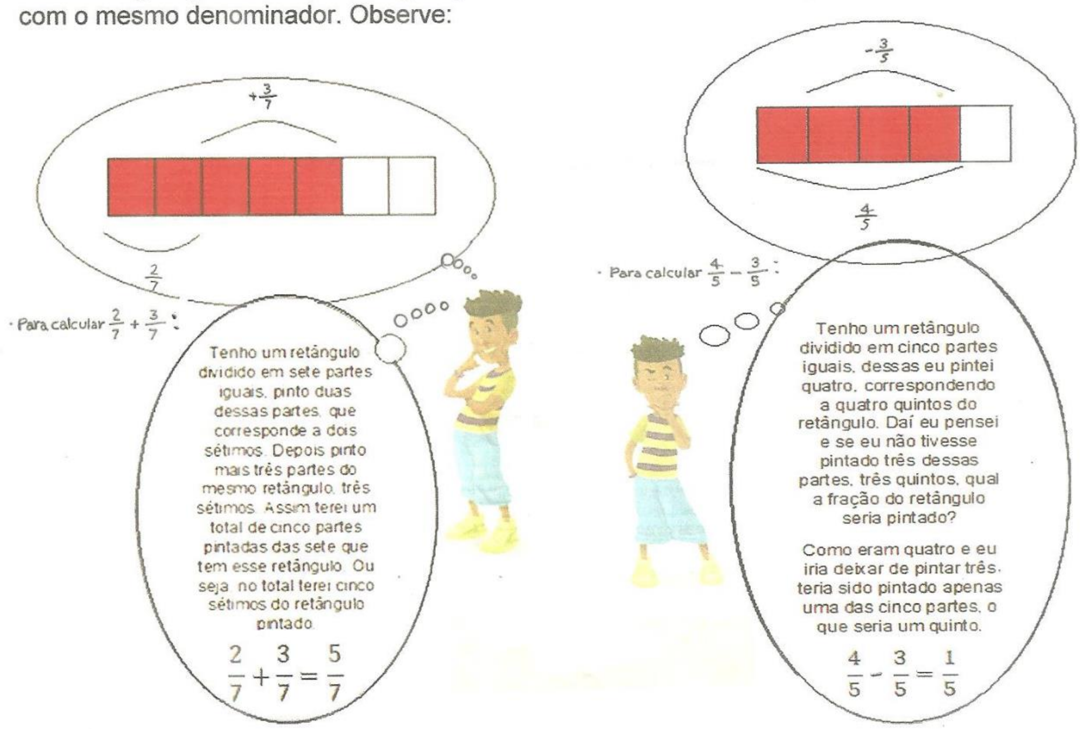


Fonte: Acervo da pesquisa

Eis que na segunda questão apresentamos uma proposta resolutiva para a adição e subtração de frações cujos denominadores são iguais, mostrando uma linha de raciocínio por meio da abordagem de uma situação estratégica de resolução e da representação geométrica da fração como parte de um retângulo, tentando deixar implícito que para resolvê-las basta efetuar o cálculo no numerador e manter o denominador, desta forma tratando um erro que foi bastante visto na atividade anterior em que operavam tanto o numerador quanto o denominador. Foram solicitados cinco itens de adição e subtração de frações com o mesmo denominador e cerca de 85% dos participantes registraram as respostas de forma totalmente corretas, situação que mostra um bom acolhimento dessa informação, como podemos ver na imagem a seguir:

Figura 39: Resposta do Aluno A10

2. Kelvin imagina partes de um retângulo para calcular o resultado de adições e subtrações de frações com o mesmo denominador. Observe:



Calcule as operações com as frações abaixo, se preferir use o raciocínio de Kelvin:

a) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

e) $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

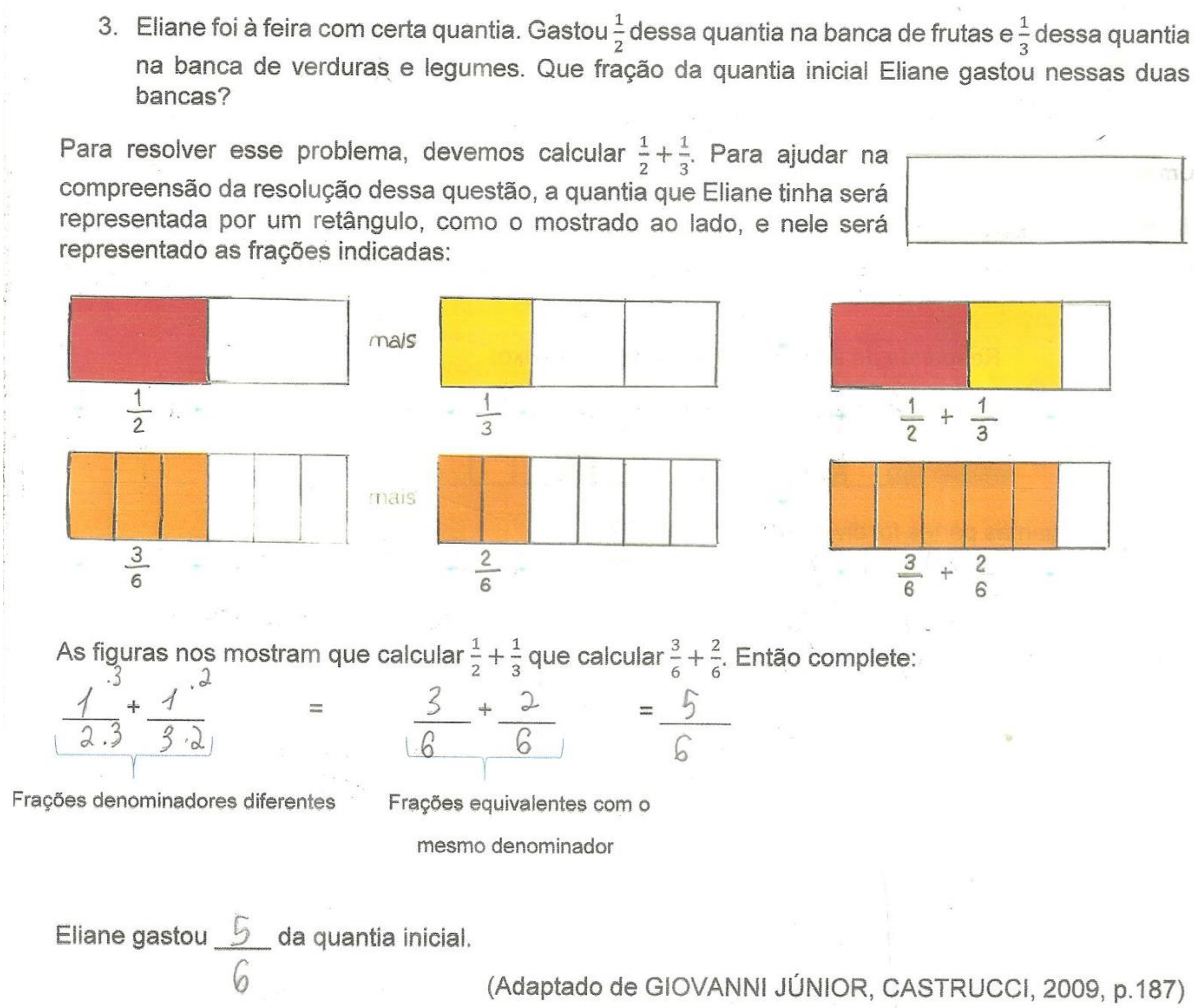
(Adaptado de BIANCHINI, 2018, p. 180)

Fonte: Acervo da pesquisa

Na terceira e última questão dessa atividade foi apresentada uma situação em que o aluno se depara com a necessidade de juntar duas quantidades que estão representadas por meio de frações com denominadores diferentes. O aluno já é instruído a adicionar as frações dadas e é convidado a compreender melhor essa situação ilustrando o inteiro por meio de um retângulo que será colorido de cores diferentes para representar cada uma das frações. Por meio de desenhos, o aluno é levado a perceber que juntando essas partes em um único retângulo, a fração que expressa as duas juntas não fica diretamente definida e por isso se faz necessário trocá-las por pedaços resultantes de uma divisão do inteiro na mesma quantidade de partes para que os tamanhos das peças fiquem iguais e possibilite a aquisição dos termos da fração da soma. A ideia de fração equivalente fica implícita no momento da troca sem remeter a nenhum procedimento algébrico, como o uso do MMC, e é solicitado que os alunos registrem numericamente essa troca na adição por meio de uma igualdade onde já existe uma predisposição desses dados.

Nas resoluções encontramos aproximadamente 70% das respostas corretas, o que nos leva a pensar que a maioria dos alunos conseguiu perceber propriedades dos números fracionários. Um dos casos que nos leva a essa afirmação é a evolução do aluno A1 que na atividade 1 mostra não saber resolver adição de frações, deixando inclusive questões que a aborda sem resposta, e na atividade 2 fez bem diferente, pois responde de maneira correta toda a atividade e ainda expõe a percepção de que a troca das frações por outras com o mesmo valor pode ser feita sem o uso de desenhos, apenas multiplicando os termos de uma fração pelo mesmo valor e conclui a operação corretamente, como mostra a figura a seguir:

Figura 40: Resposta do Aluno A1



3. Eliane foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Eliane gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Para ajudar na compreensão da resolução dessa questão, a quantia que Eliane tinha será representada por um retângulo, como o mostrado ao lado, e nele será representado as frações indicadas:

As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ que calcular $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$. Então complete:

$$\underbrace{\frac{1^{\cdot 3}}{2.3}+\frac{1^{\cdot 2}}{3.2}}_{\text{Frações denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}_{\text{Frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$$

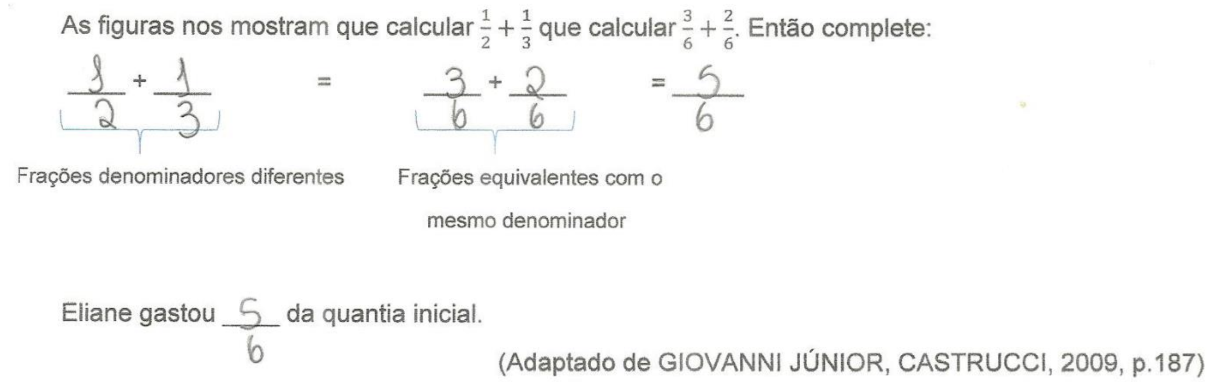
Eliane gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

(Adaptado de GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

Fonte: Acervo da pesquisa

Haviam dois aspectos comuns entre essa questão e a última questão da atividade diagnóstica: A ideia da adição de frações e as parcelas dessa adição, o que facilitou a observação de alguns casos como o do aluno A13 que respondeu na primeira atividade com o cálculo errado do MMC e que ainda ao colocar novos denominadores nas frações não alterou numeradores (Resolução exposta na página 70) e aqui nessa questão apresentou corretamente a mesma adição, mostrando estar compreendendo as instruções, como mostra a figura:

Figura 41: Resposta do Aluno A13



As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ que calcular $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$. Então complete:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{Frações denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}_{\text{Frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$$

Eliane gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

(Adaptado de GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

Fonte: Acervo da pesquisa

Esses e outros casos semelhantes são o que nos motivam a continuar buscando alternativas para o ensino da Matemática, pois percebemos que há uma disposição de aprender por parte da maioria dos alunos e visualizar engajamentos como esses na educação nos abastece e nos instiga a planejar atividades que tornem o aprendizado mais efetivo.

6.2 Atividade 3: Manuseando e aprendendo

Essa atividade envolve o manuseio de um material didático preparado como forma de concretizar o procedimento resolutivo da adição e subtração de frações. Sua prática foi conduzida pela professora/pesquisadora e como não foi apenas uma atividade registrada pelos alunos no papel, mas sim uma junção de momentos vivenciados, a sua análise e descrição dos dados se dará com a ajuda de um diário de campo, além de expormos resultados qualitativos dos registros feitos pelos alunos.

Para facilitar a compreensão no manejo do material ao precisar substituir peças, um assunto extra precisou ser envolvido nessa sequência, a classificação das cores em primárias e secundárias, que apesar de ser muito provável que os alunos já dominassem essa abordagem, não podíamos deixar que a ausência desse conhecimento impossibilitasse a sua evolução, portanto esse tópico foi reativado por meio de um vídeo e uma pintura em que os alunos misturavam as cores primárias e comprovavam a formação de cores secundárias, como descrito no capítulo anterior. As cores que foram manuseadas foram apenas as que seriam utilizadas no material para ajudar na compreensão.

A princípio foi apresentado o material manipulável que objetivava instigá-los a perceber a necessidade de cada etapa no processo resolutivo da adição e subtração de frações e desconstruir a imagem de uma matemática pronta que é ensinada e estimulada a apenas ser reproduzida. Na verdade, nesse momento da pesquisa os alunos foram convidados a se tornarem ativos na construção do seu próprio conhecimento, como afirma Fiorentini e Miorim (1990), quando afirmam que

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um “aprender” mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 6)

Em busca do aprender com a capacidade de intervir nesse processo é que houve uma interação inicial para familiarização do material didático sobre as peças do material manipulável de frações, observando o seu formato retangular e a fração que representa cada uma das peças coloridas quando comparadas com o retângulo branco (cor neutra) que representa o inteiro, já que cada uma delas foram oriundas de repartições em partes iguais de retângulos congruentes ao branco, mas de cores diferentes. A medida que os alunos iam percebendo o envolvimento das cores no processo, foi notada uma curiosidade por parte dos alunos em saber como esse material contribuiria para o aprendizado de operações com as frações.

Logo após essa apresentação, foi solicitado que a turma fosse dividida em grupos de 5 ou 6 alunos e em seguida foi distribuído um material por grupo. Foi solicitado que eles observassem, agora com o manuseio das peças, a fração que correspondia a peça de cada cor, assim, mesmo sem essa orientação, eles acharam necessário arrumar o material uma cor abaixo da outra, em ordem crescente das divisões formando um quadro de equivalências, para saber qual a fração correspondia a cada peça por meio de comparações, como mostra a figura a seguir:

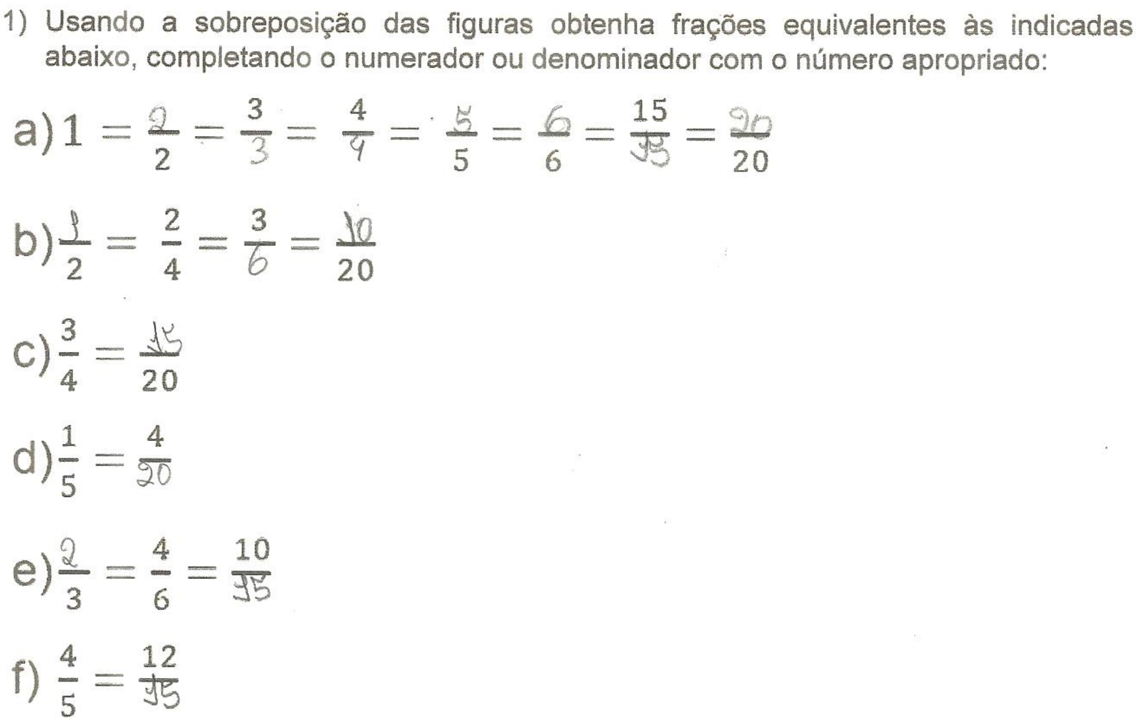
Figura 42: Disposição do material feita por um grupo de alunos

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse momento, os alunos vivenciaram situações em que os números naturais já não os satisfaziam, por exemplo, para representar o número correspondente a parte amarela $\left(\frac{1}{3}\right)$, visto que esta é uma parte do inteiro, sendo assim eles vivenciaram a necessidade de adentrar em um novo campo numérico, possibilitando que a noção de número racional fosse compreendida com o significado de parte-todo, assim como a sua representação fracionária, e isso nos é sugerido pelos PCN (1997, p. 57).

Depois desse reconhecimento concreto dos alunos com o material, foi solicitado que observassem as equivalências de frações e fizessem os registros de suas descobertas em uma ficha de registros que foi disponibilizada em que já haviam sugestões que norteavam essas observações, e que requeria partes das frações para completar as classes de equivalências, como mostra a imagem a seguir:

Figura 43: Resposta do Aluno A6



1) Usando a sobreposição das figuras obtenha frações equivalentes às indicadas abaixo, completando o numerador ou denominador com o número apropriado:

a) $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{15}{15} = \frac{20}{20}$

b) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

d) $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

e) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$

f) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$

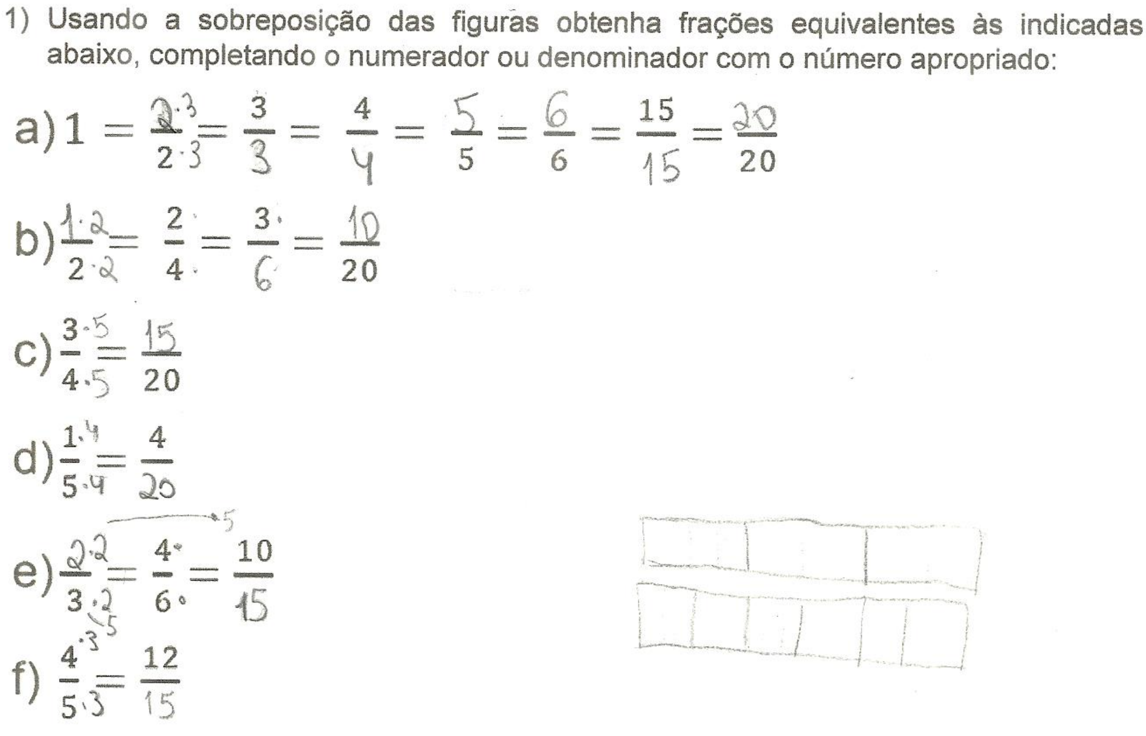
Fonte: Acervo da pesquisa

Para assegurar o entendimento dos alunos a respeito do que deviam fazer naquele momento foi exposto no quadro o item b como exemplo e, por ser a única fração completa neste item, pegamos duas peças vermelhas (pequenas), que correspondiam a dois quartos e questionamos como cobriríamos essas peças usando peças vermelhas grandes (que representavam meios). Eles foram unânimes em responder que precisava de uma peça, ou seja, um meio. Ao serem perguntados qual a cor da peça que com três delas preencheria esse mesmo espaço, eles responderam que eram as laranjas, ou seja, três sextos. Da mesma forma foram questionados de quantas peças com denominador 20, que eram as peças violetas, eram necessárias para cobrir a peça vermelha grande, com uma colagem das peças no quadro, eles de imediato responderam que eram dez e foi preenchido o numerador que faltava na fração.

Para que continuassem as descobertas foi sugerido que usassem as cores para ajudar a encontrar equivalências, pois as peças de cores primárias só poderiam ser comparadas com peças de cores secundárias que fossem formadas por elas, por exemplo, a cor vermelha forma a violeta e a laranja, a peça vermelha só poderá ser preenchida por essas duas cores de peça, e como contraexemplo, foi mostrado que não era possível sobrepor com uma quantidade inteira de peças verdes à peça vermelha, pois não é possível encontrar frações equivalentes a um meio ou a um quarto com denominador quinze. Foi notório a leveza com que surgiam as respostas por conta da sobreposição das peças as quais estavam manuseando, então eles iam fazendo as suas observações e registrando no papel ao tempo que professora/pesquisadora interagia com os alunos dando todo o suporte para uma boa análise do material e, consequentemente, uma boa compreensão do conteúdo.

Interessante que, neste momento, mesmo sem a apresentação formal da propriedade fundamental das frações equivalentes, surgiram comentários entre os alunos de que os termos da fração estavam sendo multiplicados por um mesmo valor e assim se obtinha a fração equivalente, uns viam no material e comprovavam com os cálculos a aplicação da propriedade, como mostra uma resolução a seguir:

Figura 44: Resposta do Aluno A18



1) Usando a sobreposição das figuras obtenha frações equivalentes às indicadas abaixo, completando o numerador ou denominador com o número apropriado:

a) $1 = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{15}{15} = \frac{20}{20}$

b) $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

c) $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$

d) $\frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{4}{20}$

e) $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$

f) $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$

Fonte: Acervo da pesquisa

Nessa questão foi comprovado o acerto em aproximadamente 85% das resoluções, mostrando uma compreensão de equivalência pela maior parte dos participantes, fator que aumenta as expectativas para uma excelente aplicação nas operações em questão.

Dando continuidade nesse cenário de prática, conduzimos os alunos a desenvolverem adição e subtração de frações com o uso do material proposto. A professora/pesquisadora deu exemplos no quadro usando as peças do material para resolver algumas adições e subtrações com frações, descrevendo o passo a passo a ser seguido para se chegar ao resultado, não para mecanizar o processo, mas orientando e respaldando o procedimento didático para o alcance dessa aprendizagem.

De início os alunos foram questionados sobre qual fração representa a parte vermelha maior e a parte amarela do material. Eles responderam: um meio e um terço, respectivamente, mostrando ter compreendido a função dos termos da fração e lembrado dos detalhes do material trabalhado.

Em seguida, foi apresentado a eles a necessidade de juntar essas duas peças que foram coladas no quadro, uma ao lado da outra, abaixo da peça branca que já estava colada no quadro. De repente, um aluno responde em voz alta que a soma daria dois quintos, daí foi exposto e representado no quadro, dois quintos que são duas peças azuis e coladas embaixo das peças que já estavam coladas no quadro, e a esse mesmo aluno foi solicitado que comparasse o tamanho das duas peças azuis, que representavam dois quintos, com a peça vermelha e a amarela juntas e ele falou que não tinha o mesmo tamanho. Pudemos verificar que outros alunos também pensavam da mesma forma, tanto nas nossas observações, registradas em Diário de Campo, como na atividade diagnóstica.

Essa resposta errada do aluno foi no momento propício para que ficasse provado por meio do material que o processo não era apenas somar numerador e denominador das frações, pois se assim o fizesse encontraríamos resultados absurdos e distante do real.

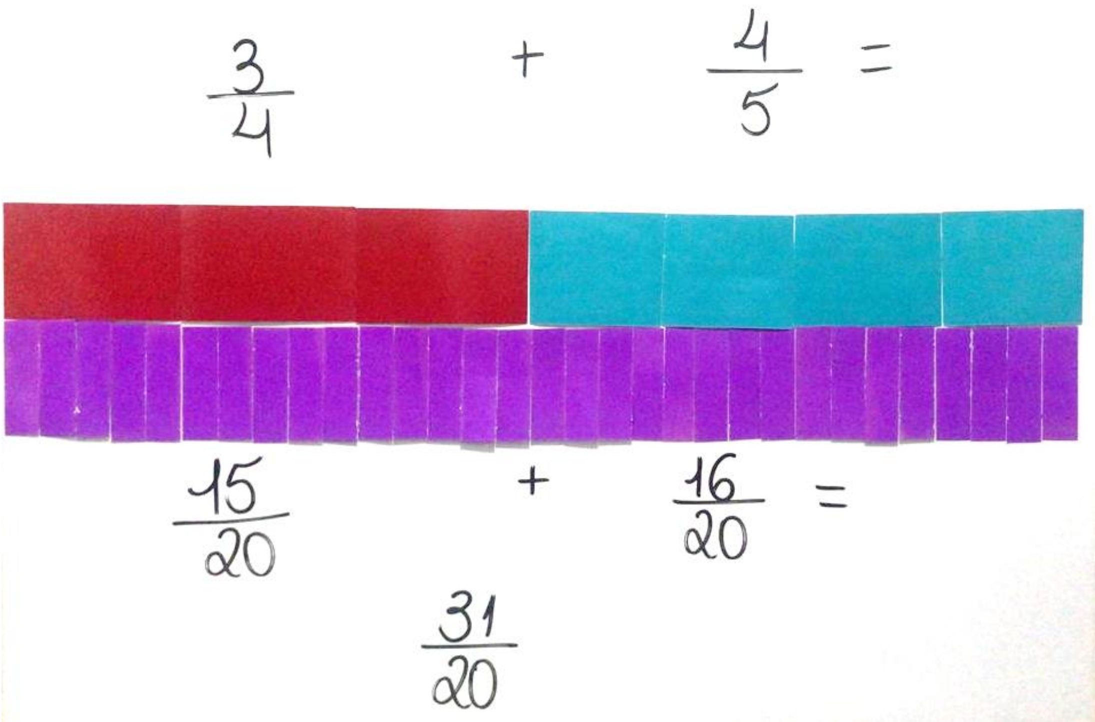
Dando prosseguimento à explicação, voltamos ao caminho da descoberta da fração que representa à junção das peças vermelha e amarela e com a participação dos alunos iria sendo montada no quadro a resolução. Iam surgindo dicas em forma de perguntas como: qual cor é formada pelas cores dessas duas peças (vermelha e amarela)? Para que se tenha o mesmo tamanho, a peça vermelha pode ser trocada por quantas peças laranjas? E a amarela? E os alunos iam respondendo e daí formulando a resolução que estava sendo exposta no quadro.

Figura 45: Exemplo de adição no quadro

Fonte: Acervo da pesquisa

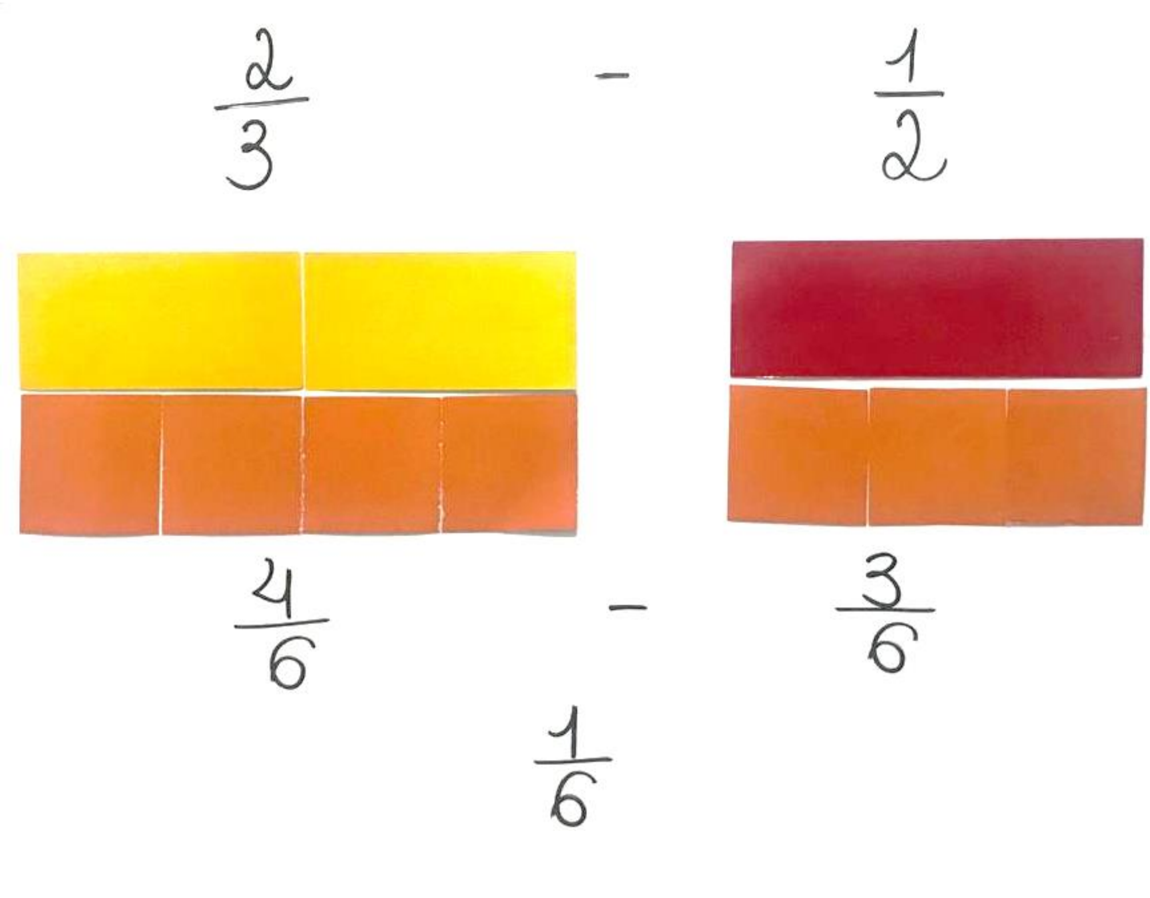
Durante a explicação da professora/pesquisadora foi citado como algo semelhante a esse procedimento, a necessidade de trocar notas de dinheiro com valor maior por uma quantidade diferente de notas em valores menores, quando precisamos dar um troco a alguém, que é exatamente isso que faremos com essas frações, será trocado um meio por três sextos e um terço por dois sextos que são frações que apesar de terem termos diferentes, mas apresentam o mesmo valor, são as frações equivalentes. Reforçando esse raciocínio, foi citado que três é a metade de seis, dando um exemplo de pizzas, assim como um de dois, daí o mesmo aluno que adiantou a resposta da adição falou: “Do mesmo jeito que 4 em 8”, mostrando estar acompanhando a explicação. Agora que tinha sido encontrado duas frações com o mesmo denominador, ficou possível de representar essas duas frações juntas, que são cinco sextos. De maneira semelhante a esse exemplo de adição, também foram expostos outros dois, que são dois itens da própria atividade, e incluindo uma subtração.

Figura 46: Exemplo de adição no quadro



Fonte: Acervo da pesquisa

Figura 47: Exemplo de subtração no quadro

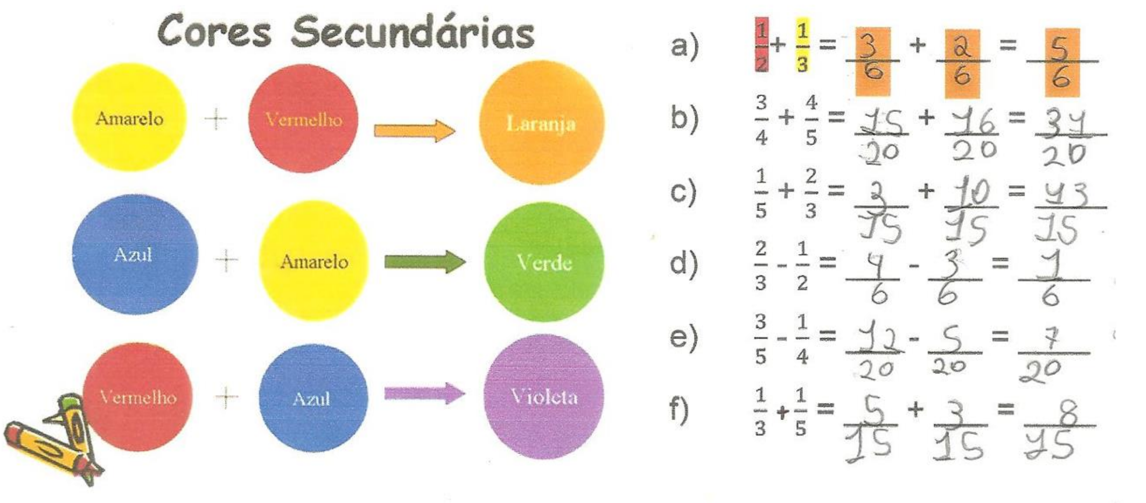


Fonte: Acervo da pesquisa

Concluindo esses exemplos compartilhados, os alunos foram solicitados a resolverem outras adições e subtrações na segunda questão com a ajuda do material, e registrarem em suas fichas todas as suas resoluções, como bem fez o aluno A5.

Figura 48: Resposta do Aluno A5

2) Ainda fazendo sobreposições... Encontre as peças que corresponde a cada um dos termos das operações. Troque-as por peças de mesma cor (cor secundária gerada pelas cores das peças encontradas), ou seja, por frações equivalentes com o mesmo denominador e, em seguida, resolva as operações:



Fonte: Acervo da pesquisa

Muitos, ao concluírem as suas anotações, iam ajudando aos seus colegas a entenderem e representarem as suas adições e assim foi percebido que muitos deles conseguiram compreender propriedades da adição e da subtração de fração.

Essa questão era composta por seis itens, dos quais três foram resolvidos de maneira compartilhada e com exposição no quadro como itens a, b e d. No item a, encontramos 100% de respostas corretas; no item b, três dos alunos se equivocaram, um esquecendo os denominadores, outra somando de maneira errada os numeradores e a terceira colocando uma resposta que não encontramos explicação. No item d, a quantidade de erros dobrou, seis alunos usaram frações com denominadores iguais a quinze para representar as frações equivalentes, supõe-se que esses alunos não tenham se atentado que o exemplo correspondia a um dos itens da questão e tenham tentado resolver sozinhos.

Nos itens que eles tentaram resolver sozinhos manipulando o material, tivemos os seguintes resultados: No item c, houveram seis erros idênticos, do tipo que os alunos escreveram os denominadores corretos das frações equivalentes, o numerador da primeira também correto, mas no numerador da segunda não usaram a proporção $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{15}+\frac{5}{15}=\frac{8}{15}\right)$, os demais acertaram.

No item e, houve nove erros, sendo que se tratando de uma subtração: seis desses alunos fizeram o procedimento correto, porém efetuou uma soma; um trocou a ordem dos termos da subtração na equivalência, encontrando a resposta correta e; outros dois não vimos sentido na resolução. No último item, apenas cinco alunos erraram, um dos alunos fez o procedimento correto e a fração do resultado deixou incompleta, sem o numerador; outro encontrou a resposta, mas colocou um numerador errado na segunda fração da equivalência e; os outros três não dar para enxergar uma justificativa para o erro.

Dentre as resoluções, foi notado que apenas um aluno fez o uso do MMC e outro mostrou que fez a multiplicação dos denominadores para encontrar um múltiplo comum. Isso nos mostra que os alunos mesmo sem ter contato com procedimentos práticos (regras), eles buscam encontrá-los e com a visualização na prática é possível relacionar e encontrar um sentido para a regra posta, o que torna mais prazeroso o processo de ensino e de aprendizagem.

Concluímos ter sido bem produtivo esse momento, tanto com os registros escritos quanto ao vivenciar um momento em que os alunos manuseavam o material e o relacionavam com procedimentos e operações, ao tempo que enxergávamos uma esperança de que isso marque o aprendizado dos participantes.

6.3 Atividade 4: Sistematização

Essa é a nossa última atividade e tem por objetivo verificar o aprendizado dos alunos a respeito das operações trabalhadas na pesquisa, não com a intenção de comparar resultados, mas de coletar informações de procedimentos eficazes utilizados que demonstram evoluções cognitivas a respeito dos assuntos trabalhados.

Inicialmente houve uma interação com os alunos a respeito de algumas adições feitas com o material e observações surgiram de maneira que os alunos expressavam oralmente suas próprias estratégias de resolução, para assim aplicar nas operações sem o vínculo do material manipulável, apenas com a aquisição dos conhecimentos comprovados. Ou seja, tinha chegado a hora de se desconectar da concretização e aplicar os conhecimentos construídos em cálculos feitos no papel.

O desapego do material manipulável se faz necessário, pois como afirmam Bornin e Bisognin (2011), ele serve de suporte para o crescimento intelectual do aluno, mas seu uso não deve ser contínuo, então nesse momento esperamos que o aluno mostre segurança diante do que foi aprendido.

Também foi apresentado no quadro um exemplo de adição e outro de subtração com frações cuja representação não era encontrada no material, e foram resolvidas usando o raciocínio resolutivo com cálculos, ditado em coro pelos alunos, e registrado no quadro pela professora/pesquisadora, inclusive no exemplo da adição $\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{2}\right)$, eles descobriram dois caminhos, uns disseram que podíamos encontrar frações equivalentes com denominadores iguais a 16 $\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{2}=\frac{6}{16}+\frac{40}{16}=\frac{46}{16}\right)$, outros com denominadores iguais a 8 $\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{2}=\frac{3}{8}+\frac{20}{8}=\frac{23}{8}\right)$, entre outros múltiplos comuns que foram citados, mas escolhemos esses dois denominadores para que os alunos percebessem que por caminhos diferentes chegávamos a resultados equivalentes.

O que nos encanta nesse momento é o fato de perceber que apesar de o mínimo múltiplo comum ser o processo mais utilizado para resolver uma adição entre frações com denominadores diferentes, e como bem descrevem Silva e Almouloud (2008, p. 61) “[...] tal procedimento prejudica a compreensão da definição da operação de adição”, essas atividades estão conduzindo o raciocínio desse público ao reconhecimento de que existe a necessidade de encontrar equivalências, porém não há exigência de como deve ser o denominador das frações, desde que sejam iguais, e assim o produto entre os denominadores é sempre uma boa opção.

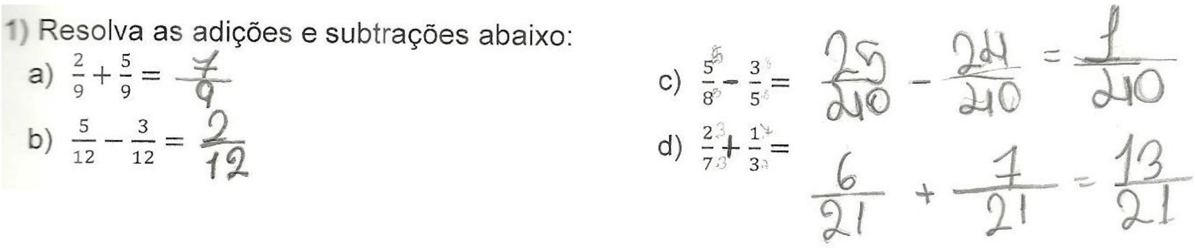
No cálculo da subtração $\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right)$ eles disseram apenas o denominador 35 para as equivalências $\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10}{35}-\frac{7}{35}=\frac{3}{35}\right)$, foi perceptível que eles notaram a facilidade de encontrar um múltiplo comum apenas multiplicando os denominadores, e foi resolvido de maneira correta, usando estratégias que eles mesmo perceberam ser necessárias e capazes de alcançar a diferença.

Nessas interações ficou clara a compreensão dos alunos quanto à necessidade de trocar as frações por outras equivalentes de modo a ficarem com o mesmo denominador no processo resolutivo dessas duas operações, fator essencial para o seu desenvolvimento. Nesse momento, notamos que uma semente de aprendizagem significativa foi plantada ao tempo de que nenhum algoritmo foi repassado diretamente para os alunos e aqueles que mostraram estar acompanhando o processo foram autores do seu próprio conhecimento e que os frutos seriam colhidos em algum momento na vida desses aprendizes, por isso somos conscientes de que não são as respostas dessa última atividade que nos mostrarão as consequências dessa sequência didática aplicada, sabemos que existem várias interferências que alteram resultados e que essa não é uma maneira totalmente eficaz para se determinar uma conclusão, porém precisávamos de uma atividade que sintetizasse os conceitos abordados e oferecesse a oportunidade do aluno redigir o seu crescimento intelectual ligado ao conteúdo matemático estimulado.

A atividade proposta continha três questões e foi feita sem o uso do material manipulável e sem qualquer tipo de auxílio e foi solicitado que os alunos deixassem todos os cálculos necessários para a resolução das questões, em prol de uma boa análise dos dados coletados.

A primeira questão propunha a resolução de adições e subtrações com frações de denominadores iguais e também diferentes. Notamos que nas frações que já tinham denominadores iguais apenas dois alunos ainda efetuaram as operações no denominador, alunos esses que se mantiveram bem apáticos durante toda a realização da pesquisa. Outros dois alunos, não se atentaram ao sinal de subtração e a resolveram como uma adição; os demais alunos resolveram corretamente, como podemos ver em uma das respostas:

Figura 49: Resposta do Aluno A9



Fonte: Acervo da pesquisa

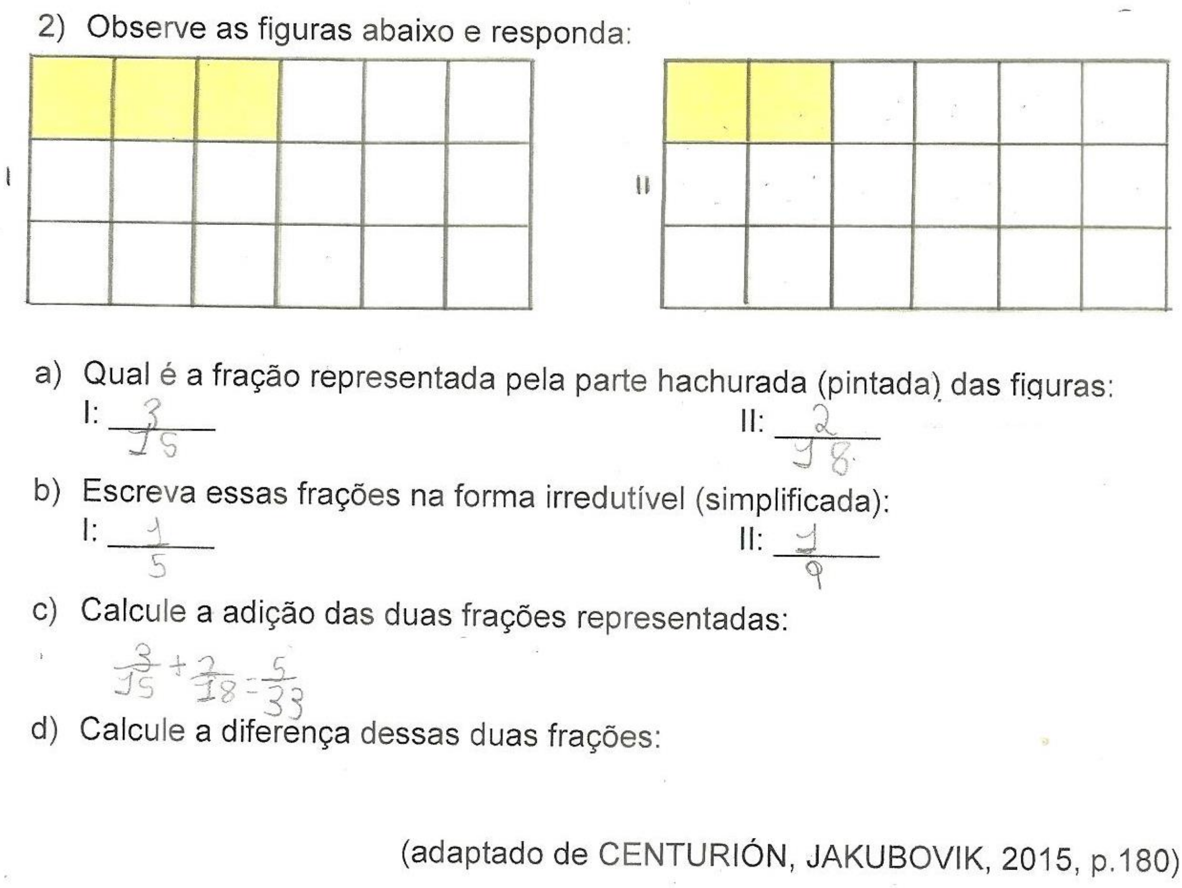
No que diz respeito a adição e subtração de frações com denominadores distintos observamos que 8 dos alunos conseguiram desenvolver corretamente os cálculos e obter resultados plausíveis, como o mostrado acima.

Durante a resolução da atividade houve uma citação do aluno nomeado por A2 na pesquisa que nos encheu de alegria, pois ele declarou estar sentindo falta do material didático usado na atividade anterior por achar que ficaria mais fácil de resolver. Isso nos revela que para alguns alunos era uma questão de tempo para se habituar a resolução deste cálculo, tempo este que não nos era mais disponível por conta do calendário letivo da escola em que estávamos realizando a aplicação, o que comprova uma das interferências de resultados. Esse aluno, inclusive, fez a adição corretamente e na subtração, apesar de apresentar erros multiplicativos nos termos das frações ao fazer as equivalências, mostrou que compreendia o procedimento que deveria ser feito.

Obtendo quase 50% de aproveitamento nas resoluções de adição e subtração propostas de maneira direta, pensamos ser um resultado satisfatório quando analisados seguindo alguns critérios: as frações a serem operadas possuíam denominadores diferentes dos abordados em atividades anteriores, os participantes não contavam com nenhum auxílio material ou pessoal e também não lhes foi apresentado nenhum método resolutivo em que determinava os passos a serem seguidos.

Na segunda questão da atividade foram mostradas duas figuras retangulares com partes pintadas e em quatro itens foram feitas algumas solicitações. No primeiro item foi solicitado a fração da figura que estava pintada em cada um dos retângulos, aqui 16 dos alunos representaram corretamente. O aluno A5 se equivocou no denominador de uma das frações, colocando a quantidade de partes não pintadas, como vemos na figura a seguir:

Figura 50: Resposta do Aluno A5


2) Observe as figuras abaixo e responda:

I

II

a) Qual é a fração representada pela parte hachurada (pintada) das figuras:
I: $\frac{3}{15}$ II: $\frac{2}{18}$

b) Escreva essas frações na forma irredutível (simplificada):
I: $\frac{1}{5}$ II: $\frac{1}{9}$

c) Calcule a adição das duas frações representadas:
$\frac{3}{15} + \frac{2}{18} = \frac{5}{33}$

d) Calcule a diferença dessas duas frações:

(adaptado de CENTURIÓN, JAKUBOVIK, 2015, p.180)

Fonte: Acervo da pesquisa

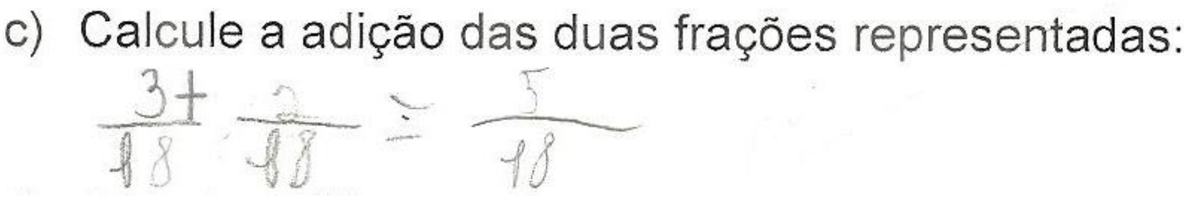
O aluno A15 trocou a função dos termos da fração e o aluno A14 representou as frações considerando apenas a primeira linha como o inteiro, já que eram três linhas e seis colunas. Apesar de alguns erros, esse item nos mostra uma certa familiarização dos alunos com as frações.

No item b foi solicitado que os alunos simplificassem as frações do item anterior, e encontramos que apenas quatro alunos apresentaram as respostas totalmente corretas, além dessas, o aluno A4 efetuou a simplificação, dividindo os termos da fração, porém, na fração 3/18, dividiu os dois termos por um o que resultou na mesma fração. O aluno A5, mostrado na figura 50, simplificou corretamente, porém por conta da representação errada da fração no item anterior foi encontrada também uma resposta equivocada. Entretanto, em se tratando de simplificação, mostrou estar ciente do procedimento. Já os demais alunos erraram totalmente o item, o que nos revela uma lacuna nesse conteúdo, e apesar de não ter sido um tópico diretamente trabalhado nesta pesquisa, a simplificação também é uma equivalência e se não existe uma boa relação com este conteúdo haverá interferências ao operar as frações.

O item c sugere que os alunos façam a adição das duas frações representadas e essa adição se enquadra em dois perfis, um é se o aluno decide usar as frações que já possuem os denominadores iguais e foram expostas no primeiro item dessa questão, e o outro é se o aluno decide lidar com as frações simplificadas expostas no item b, que possuem os denominadores diferentes. Segue essa análise nas estratégias resolutivas dos alunos.

Dentre as catorze respostas corretas, o aluno A8, junto a outros onze dos seus colegas, seguiram a mesma linha de pensamento escolhendo as frações do item a. Supomos que o motivo da escolha se deu por conta da percepção da necessidade de se ter as frações com os denominadores comuns para serem adicionadas.

Figura 51: Resposta do Aluno A8



Fonte: Acervo da pesquisa

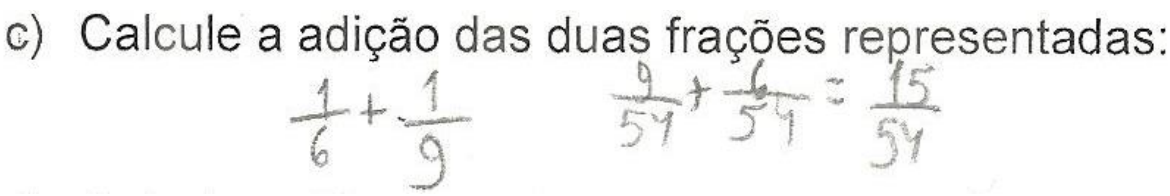
Apenas dois dos participantes preferiram lidar com as frações irredutíveis, mesmo possuindo denominadores diferentes. Acredita-se que essa escolha pode ter sido feita por terem realizado a simplificação das frações no item imediatamente anterior (b) e também por terem adquirido uma certa segurança ao trabalhar com frações de denominadores diferentes. Esse fato está presente na seguinte resolução:

Figura 52: Resposta do Aluno A13

Fonte: Acervo da pesquisa

Já o aluno A18 que também preferiu usar as frações irredutíveis, não utilizou o menor múltiplo comum na equivalência (figura 53), fato que reflete o não uso de um mecanismo resolutivo único durante essa sequência de atividades que é exatamente o grande embasamento dessa pesquisa, o fato de não mecanizar o processo, como nos sugere os PCN (1998, p. 67).

Figura 53: Resposta do Aluno A18

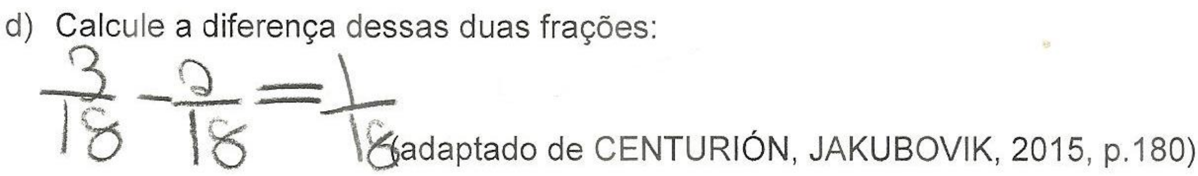


Fonte: Acervo da pesquisa

Esse aluno mostra ter aprendido que o caminho de resolução da adição é encontrando equivalências, e que não precisa exatamente dispor do conhecimento do menor múltiplo comum para encontrar novas frações, basta dispor de um múltiplo comum aos dois denominadores, inclusive o produto entre eles.

O próximo item solicita a diferença entre essas mesmas frações, e percebemos que a associação entre o termo “diferença” e o resultado da operação de subtração eram desconhecidos por alguns alunos, visto que quatro alunos deixaram em branco, dois alunos resolveram de maneira aleatória e um aluno expôs a diferença com suas palavras fazendo um comparativo da representação geométrica dessas frações. Os demais alunos acertaram, sendo que a maioria usou as frações que foram citadas no item a, como mostra a imagem a seguir:

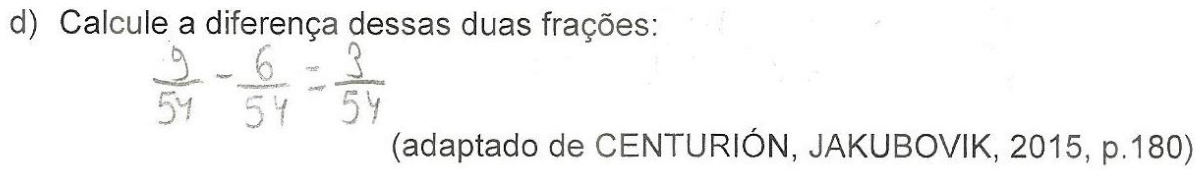
Figura 54: Resposta do Aluno A16



Fonte: Acervo da pesquisa

Apenas um aluno aproveitou as frações equivalentes que encontrou no item c para calcular a diferença:

Figura 55: Resposta do Aluno A18


d) Calcule a diferença dessas duas frações:

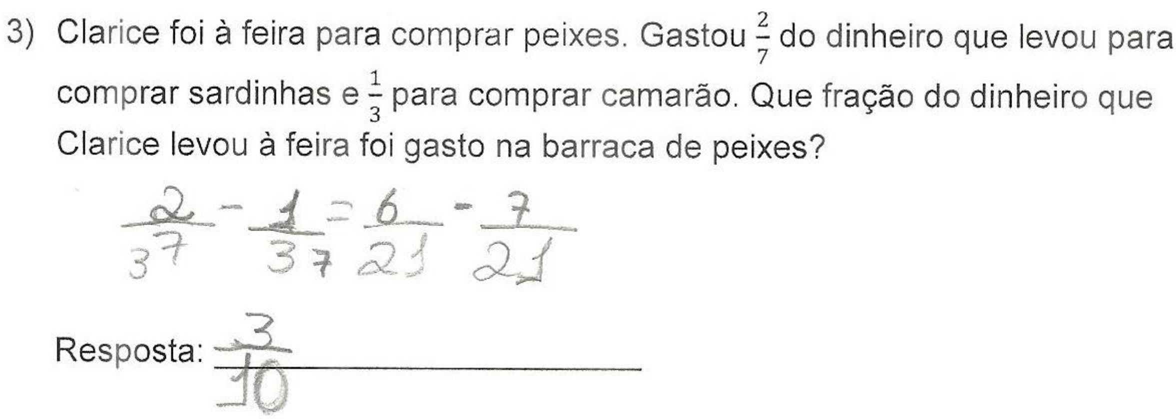
$\frac{9}{54} - \frac{6}{54} = \frac{3}{54}$

(adaptado de CENTURIÓN, JAKUBOVIK, 2015, p.180)

Fonte: Acervo da pesquisa

O problema da última questão apresenta uma situação de compra de peixes e expressa a ideia de juntar a fração do dinheiro que foi gasto com sardinhas com a que foi gasto com camarão. Como se trata de um problema, podemos observar que seis dos alunos não o compreendeu, ou até mesmo não identificaram a necessidade de somar. Dentre eles está o aluno A1 que deixou a questão em branco e outros cinco alunos que seguiram na tentativa de efetuar uma subtração entre as frações dadas. Vale ressaltar que a ordem da disposição das frações na questão não favorece o cálculo da subtração, já que $\frac{2}{7}$ é menor que $\frac{1}{3}$, e isso foi nitidamente perceptível em uma dessas resoluções:

Figura 56: Resposta do Aluno A15


3) Clarice foi à feira para comprar peixes. Gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que levou para comprar sardinhas e $\frac{1}{3}$ para comprar camarão. Que fração do dinheiro que Clarice levou à feira foi gasto na barraca de peixes?

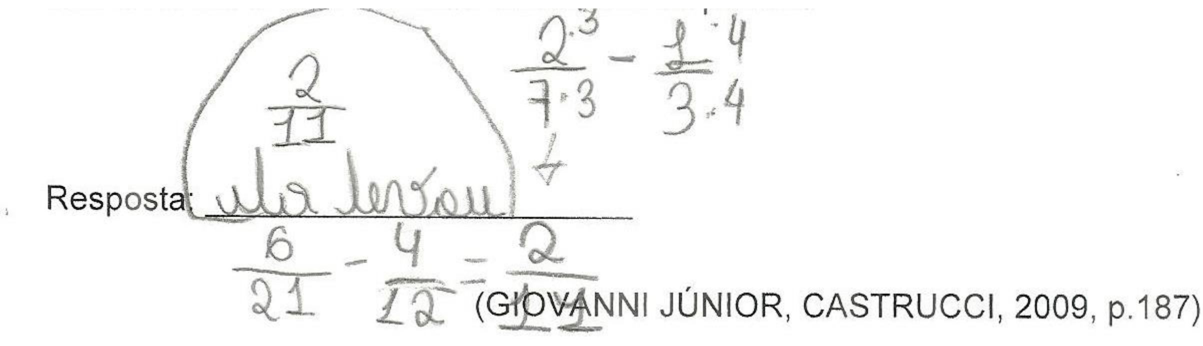
$\frac{2}{3\ 7} - \frac{1}{3\ 7} = \frac{6}{21} - \frac{7}{21}$

Resposta: $\frac{3}{10}$

Fonte: Acervo da pesquisa

Percebe-se na figura 56 que o aluno A15, apesar de não aplicar a operação correta para a ideia da situação, percorre um caminho de cálculo correto, mas não o conclui, supostamente por perceber que se deparou com uma subtração impossível de ser resolvida dentro do seu conhecimento numérico. Podemos também analisar que ele desiste desse cálculo e apresenta uma resposta que aparenta ser uma soma incorreta entre as frações dadas. Outro erro nos chama a atenção:

Figura 57: Resposta do Aluno A12



Fonte: Acervo da pesquisa

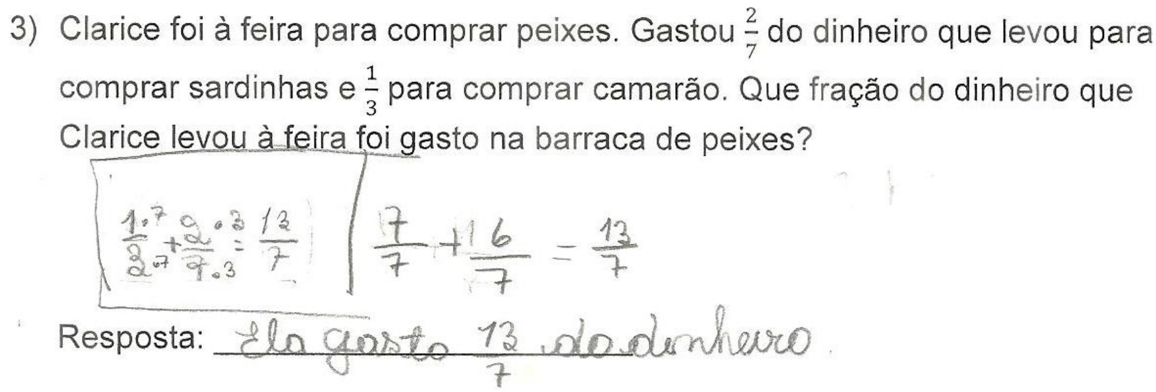
Como mostra a figura 57, o aluno A12 encontra equivalências em sua subtração, porém com denominadores diferentes e ao efetuar o cálculo faz uma subtração com os termos da fração, mostrando que ele não entendeu o objetivo de se encontrar equivalências nesse processo de resolução.

Observando os outros três erros desse grupo de alunos que não perceberam a necessidade de somar e acreditaram que a subtração resolvia o problema, verificamos que o aluno A8 subtraiu os termos das frações como elas foram dispostas, encontrando $\frac{1}{4}$, o aluno A11 fez a subtração no numerador e multiplicou os denominadores encontrando $\frac{1}{21}$ e o aluno A3 que respondeu com $\frac{1}{10}$, efetuando uma subtração com os numeradores e uma adição nos denominadores.

Agora analisaremos os procedimentos utilizados pelos seis participantes que apesar de tomarem a direção correta de efetuar a adição para encontrar a solução, apresentaram incoerências nas resoluções.

Os alunos: A5, A10, A14 e A16 apresentaram respostas diretas revelando terem cometido o erro que é bem comum nessa operação, somaram os termos das frações, encontrando $\frac{3}{10}$ como resposta, já o aluno A4 efetuou a soma nos numeradores e manteve o sete como denominador, sem justificar essa colocação e a resposta do aluno A7 nos chama a atenção, pois este mostra ter entendido que se encontra frações equivalentes multiplicando os seus termos por um mesmo valor, mas não efetua a multiplicação nos denominadores e coloca nos denominadores apenas o termo 7 ao invés de 21, como mostra a imagem a seguir:

Figura 58: Resposta do Aluno A7


3) Clarice foi à feira para comprar peixes. Gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que levou para comprar sardinhas e $\frac{1}{3}$ para comprar camarão. Que fração do dinheiro que Clarice levou à feira foi gasto na barraca de peixes?

$\frac{1\cdot7}{3\cdot7}+\frac{2\cdot3}{7\cdot3}=\frac{13}{7}$ $\quad \frac{7}{7}+\frac{6}{7}=\frac{13}{7}$

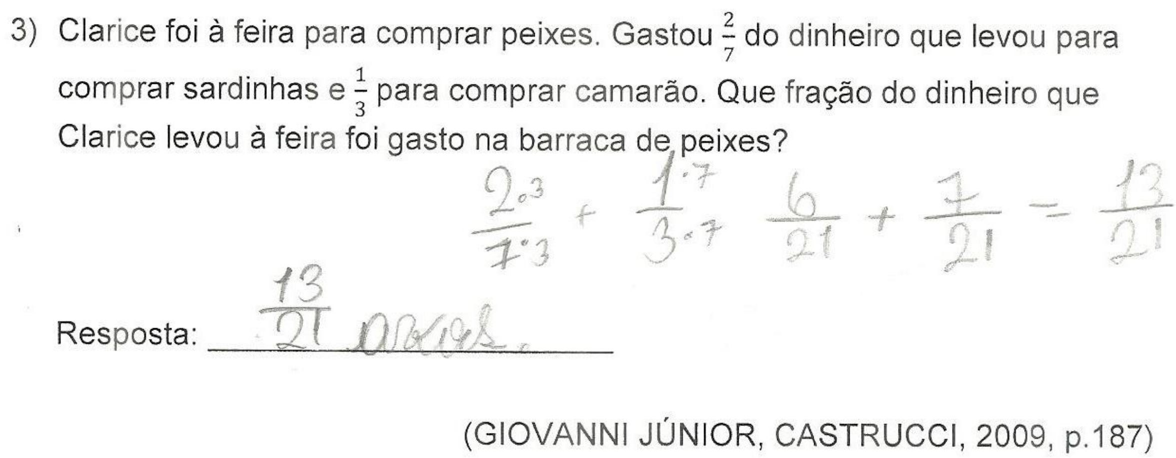
Resposta: Ela gasto $\frac{13}{7}$ do dinheiro

Fonte: Acervo da pesquisa

Percebe-se que esse aluno ainda apresenta insegurança na resolução, porém alguns critérios necessários foram seguidos, como a ideia de multiplicar os termos de cada fração por um número adequado e somar apenas os numeradores, mantendo o denominador.

E para finalizarmos essa análise, observamos o modelo das outras sete resoluções dos alunos que conseguiram alcançar a resolução correta, como mostra a figura abaixo:

Figura 59: Resposta do Aluno A9


3) Clarice foi à feira para comprar peixes. Gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que levou para comprar sardinhas e $\frac{1}{3}$ para comprar camarão. Que fração do dinheiro que Clarice levou à feira foi gasto na barraca de peixes?

$\frac{2\cdot3}{7\cdot3}+\frac{1\cdot7}{3\cdot7}\quad \frac{6}{21}+\frac{7}{21}=\frac{13}{21}$

Resposta: $\frac{13}{21}$ avos.

(GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

Fonte: Acervo da pesquisa

Houve tanto a identificação da operação correta na interpretação, como também a execução dessa operação seguindo o algoritmo que foi descoberto ser necessário na fase de concretização do conteúdo nesta pesquisa.

CONCLUSÃO

Motivados por um desconforto ao perceber o impacto causado ao se lidar com a adição e subtração de frações em sala de aula, seja de forma independente ou como aplicação em diversos conteúdos, buscamos entender o processo de aprendizagem dos alunos e de imediato intervir de maneira a agregar situações favoráveis de significação desse conteúdo.

Realizou-se em primeiro lugar uma varredura na literatura de autores que comungavam desta mesma preocupação e que contribuíram com seus estudos obtendo resultados que destacavam a necessidade de uma aplicação de metodologias inovadoras para sanar a dificuldade encontrada nas operações com frações.

É assim que nasce a ideia de fazermos uma pesquisa que visa uma superação de algoritmos mecanizados por muitos e que acabam sendo introduzidos nas aulas de matemática da Educação Básica. Para tal, construímos uma sequência de atividades que acreditamos alcançar uma compreensão significativa do conteúdo de adição e subtração de frações e aplicamos de maneira a observar os seus resultados.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009) essa é uma pesquisa-ação, pois o pesquisador se incorpora no ambiente de estudo, procura compreendê-lo e busca meios de intervenção na realidade. Nosso ambiente de estudo foi uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual no Centro sul de Sergipe, e apesar de ser composta por 27 alunos, só foram analisadas as atividades de 19 deles por estes terem participado de toda a sequência de atividades.

A intervenção desta pesquisa se deu com a aplicação de quatro atividades com aspectos diferentes, porém sempre em busca de dar sentido ao estudo da adição e subtração de frações. A primeira atividade teve o caráter investigativo afim de nos orientar quanto aos detalhes dos próximos passos da aplicação, a segunda já teve a visão instrutiva de tentar fazer o aluno enxergar critérios importantes sobre frações. A terceira atividade teve a intenção de mostrar aos participantes os procedimentos resolutivos necessários para a obtenção da soma e diferença entre frações com denominadores iguais e diferentes e, por fim, uma atividade de sistematização, agora para que os alunos pudessem se desprender do material manipulável e realizar as atividades sem o uso deste.

A coleta de dados se deu em meio a descrições e análise de situações vivenciadas, tendo como destaque evoluções tanto em ideias como em práticas do grupo participante durante os momentos de intervenção, junto a uma análise das respostas encontradas nas atividades. Entre essas análises, abordamos a análise de erros (Cury, 1994) afim de transparecer dificuldades a serem superadas durante a aplicação.

Toda essa trilha de aprendizagem nos possibilitou responder a seguinte questão que motivou a presente pesquisa:

- De que maneira uma sequência de atividades contribui para o ensino e aprendizagem da adição e subtração de frações?

Uma sequência de atividades que foge dos padrões de memorização de fórmulas, que prioriza a formação de ideias corretas para a construção do conhecimento, quando bem correspondida, conduz o aluno à aquisição de conhecimentos consistentes, que inclusive o faz perceber caminhos pertinentes de resolução.

Pela observação dos aspectos analisados, tanto escritos como orais, foi perceptível que a vivência dessa sequência ofereceu oportunidades de familiarização dos alunos com a adição e subtração de frações e acreditamos que vários mitos resolutivos foram desconstruídos.

Na primeira atividade, os alunos envolvidos mostraram conhecer o conceito de fração como parte-todo e apesar de mostrarem saber a ideia da equivalência de frações, desconhecem procedimentos corretos para encontrá-las. Quanto as resoluções das operações de adição e subtração, tanto em questões diretas como na situação-problema, mostraram dificuldade em sua resolução, com grande parte dos erros se dando pela resolução isolada dos termos da fração.

Na segunda atividade foi percebido que muitos alunos que mostraram não conhecer o procedimento de resolução da adição e subtração de frações na atividade anterior, estavam desenvolvendo habilidades de compreensão, pois avistamos a interação entre os alunos e destes com o material de maneira a realizar procedimentos corretos e, consequentemente, a obtenção de respostas corretas e isso prova que os alunos estavam engajados na busca de significações para essas operações.

A concretização do procedimento resolutivo da adição de frações foi apresentada na atividade 3, em que os alunos montavam resoluções com peças de um material e apenas registravam as suas observações numa ficha. Nesse momento os alunos participavam da construção do seu conhecimento, pois não houve uma transmissão de técnicas e sim oportunidades de percepção do caminho adequado para se alcançar o resultado esperado, ou seja, tudo que estavam aprendendo era a partir das descobertas feitas por eles.

Algumas propriedades importantes foram comprovadas e citadas por eles, como a propriedade fundamental das frações equivalentes que eles citaram e usaram na atividade de maneira correta, assim como a escolha do denominador comum das frações, muitos perceberam ser mais prático colocar o produto entre os denominadores diferentes, o que consideramos uma boa escolha e, muitas vezes, de fácil obtenção.

Apesar de nenhum algoritmo pronto ter sido apresentado para os alunos, foi notório, durante a última atividade, que havia sido compreendido a necessidade de se encontrar frações equivalentes de denominadores iguais para encontrar a soma ou diferença entre frações de denominadores diferentes, tanto por escrito como oralmente, quando questionados com exemplos no quadro que foram resolvidos por eles consolidando aquele momento de aprendizagem coletivo.

Diante dos estudos, análises feitas e das discussões realizadas a partir da aplicação das atividades propostas, nos é mostrado a maneira como uma sequência de atividade pode contribuir com este aprendizado, e daí surge a resposta da nossa questão de pesquisa, pois a condução de um trabalho que possibilite ao aluno participar do processo, os leve a tirar as próprias conclusões e percorrer o caminho para resolução das atividades, torna o processo marcante e acreditamos que o irá sempre lembrar de como se efetua essas operações, haja visto que houve uma preocupação em dar significado a cada uma das etapas.

Adicionalmente, podemos destacar a sistematização de ideias trazidas pelo professor, oportunizando ao aluno a vivência da necessidade do algoritmo, portanto ao se deparar com o problema em suas mãos e com suporte para resolver, isso se torna mais simples e significativo. Como sabemos que este material não irá acompanhá-los em todos as situações (até mesmo pela limitação deste), é importante que aconteça a interiorização desse processo de forma a formalizá-lo, afim de que em outros momentos os alunos apresentem um certo domínio desse conhecimento e possam aplicá-lo.

Mediante os resultados desta pesquisa, sentimos a necessidade de fazer mais intervenções como essas nos diversos conteúdos matemáticos para tentar sanar várias dificuldades no ensino da Matemática.

Esperamos que essa pesquisa possa impulsionar várias outras que servirão de complementos para que os alunos possam melhor se relacionar com números racionais, incluindo outras formas de representação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AQUINO, Júlio Groppa, **Erro e fracasso na escola**, 1997. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=rcJ9M_FTQ1gC&pg=PA5&hl=pt-br&source=gbs_selected_pages&cad=2#v=onepage&q&f=false. Acesso em 13 de março de 2020.

BARRETO, José Rogério. Análise de erros cometidos por alunos do 6° ano na resolução de problemas envolvendo operações com frações. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –Universidade Federal de Sergipe, 2017.

BEHR, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts.In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts andProcesses, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

BERTONI, N. E. Módulo IV: Educação e Linguagem Matemática IV. 1. ed. Brasília-DF: Universidade de Brasília, 2009. 95 p. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/fracoes.pdf>.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini. 9 ed., São Paulo: Moderna, 2018.

BORDIN; Laura Moreira; BISOGNIN, Eleni. **Os materiais manipuláveis e a utilização de jogos pedagógicos no processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros**, 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE80.pdf.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: ensino de quinta a oitava séries. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 20 de fevereiro de 2020

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Matemática do Ensino. Brasília. 2015. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

BROLEZZI, A. C. Frações e Decimais: História e significado. CAEM/USP, 1996.

CAMPOS, T. M. M; NUNES, T.; BRYANT, P. ; SILVA, A. F. G.; CANOVA, R. F.; CERVANTES, P. B. M.**Uso de situações quociente no ensino de frações.** JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. n. 102 – v.7(3)-2014. Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/72.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis (SC), v.2, n.4, p. 68-93, 2007. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/12992/12093

CARAÇA, B. d. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951. 319 p.

CASTRO, Michele G. BREDEL de. O processo ensino-aprendizagem na visão da perspectiva piagetiana. Mnemosine Vol.12, nº2, p. 233-240 (2016) – Artigos.

CAVALIERI, L. O Ensino das Frações. (Monografia da especialização em Ensino de Matemática). Umuarama – PR, Universidade Paranaense, 2005.

CENTURION, Marília; JAKUBOVIC, José. Matemática nos dias de hoje, 6º ano: na medida certa. 1. Ed, São Paulo: Leya, 2015.

CURY, Helena Noronha. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** 276 f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, Helena Noronha**. Retrospectiva histórica e perspectiva atuais da análise de erros na Educação Matemática.** In Revista Zetetiké. V. 3, n° 1, p. 39-50. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 1995. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646879/13781 20 de março de 2020.

DRUCK, I. F. Frações: **Uma análise de dificuldades conceituais.** São Paulo- SP: IME/USP,2006. 16 p. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4642963/mod_resource/content/1/Druck%20-%20Fra%C3%A7%C3%B5es%20-%20uma%20an%C3%A1lise%20de%20dificuldades%20conceituais.pdf

DRUZIAN, Maria Eliana Barreto. **Jogos como recurso didático no ensino no ensino-aprendizagem de frações.** Dissertação de Mestrado do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – RS, 2007.

ETCHEVERRIA, T. C.; AQUINO, V.J.L.; OLIVEIRA, J.S.; LISBOA, C.C. **Reflexões acerca do desempenho e das dificuldades de estudantes da educação básica e superior nas operações com frações.** In Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (Revisem, ano 2019, Nº 2, p. 71 – 88). Disponível em: https://doi.org/10.34179/revisem.v4i2.11840

FAVERO, M. H.; NEVES, R. S. P.**A divisão e os racionais: revisão bibliografia e análise.** In Revista Zetetiké.v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun2012. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646635/13537 - acesso em 12 de novembro de 2020

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. – 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2009. – (Coleção formação de professores)

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática.** Texto extraído do Boletim da SBEM-SP, n.7, de julho-agosto de1990. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf. Acesso em: 20 de março de 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**, 6º ano. Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2009.

GOMES, Marcelo da Silva. **Uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas: uma proposta para o desenvolvimento cognitivo**. Rio de janeiro, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170500084. Acesso em: 20 de fevereiro de 2020.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade**: 6º ano. – 6. Ed. – São Paulo: Atual, 2009.

LOGEN, Adilson. Projeto **Apoema – Matemática** – 6º ano. 2 ed, 2018.

MAGINA, S., & CAMPOS, T. A. (2008). **A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental.** Bolema, 21 (31), 23-40. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221883003

MOUTINHO, L. V. (2005). **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.** São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

OLIVEIRA, J. V.; ARRUDA, A. M.; SILVA, F. C.; CAMARGO, J. A. **OS CONCEITOS DE ERRO, OBSTÁCULO E CONTRATO DIDÁTICOSEGUNDO GUY BROUSSEAU**, 2012. Disponível em: **http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Oliveira_Joselba.pdf**

PATRONO, Rosângela Milagres. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental: análise de uma proposta de ensino.** Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

PEREIRA, Onésimo Rodrigues. **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES.** Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

RADATZ, Hendrik. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a survey. For the Learning of Mathematics, v. 1, n.1, p.16-20, July 1980.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2012. 269 p.

SANTOS, A. C. G. dos. **Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio.** Campina Grande - PB, p. 147, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=32935>.

SANTOS, Simone de Carvalho. **Uma construção geométrica dos números reais** /. – São Cristóvão, 2015. 93 f. il. Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/6478/1/SIMONE_CARVALHO_SANTOS.pdf. Acesso em Nov./2020

SANTOS, Solange Ferreira dos. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. – Jataí-Go, 2019-115 p.: il., figs. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170290209. Acesso em: 05 de novembro de 2020.

SILVA, A.; MARTINS, S. (2000, Out). **Falar de matemática hoje é ...** *Millenium* – Revista do ISPV: n. 20. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm. Acesso em: Mar./2020.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. **As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, n. 31, p. 55-78, 2008. Disponível em https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883005.pdf

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignes. Materiais Manipulativos para o ensino de Frações e números decimais. Porto Alegre: Penso, 2016.

SOUZA, J.; PARATO, P. M. Vontade de Saber. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. 480 p.

________, Relatório Saeb 2001 – Matemática. Disponível em:. http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/Relat%C3%B3rio+SAEB+2001+-+Matem%C3%A1tica/2abcece2-8582-4800-a263-c37a5d3be9ae?version=1.0 Acesso em 24 de fevereiro de 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE 1
(Atividade diagnóstica)

1. Observe a torta de morangos que Letícia fez. Ela dividiu a torta em 8 partes iguais e comeu 3 partes dela.

Qual a fração que representa as partes que ela comeu?

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{8}{5}$

d) $\frac{8}{3}$

2. De uma cartela com 18 ovos de codorna, veja quanto os irmãos Marcos e Luana comeram:
Responda:

a) Que fração da cartela representa a porção que Marcos comeu? ____

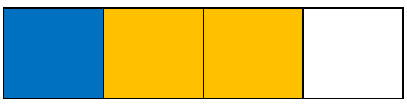
b) E a porção que Luana comeu, equivale a que fração da cartela? ____

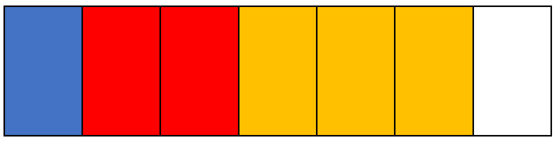
c) Os dois juntos comeram que fração da cartela de ovos de codorna? ____

d) Escreva a fração do item anterior de uma forma mais simples. ____

(LONGEN, 2018, p. 172)

3. Observe os esquemas e determine a soma:





a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$ ____

b) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$ ____

4. Determine a diferença das duas frações representadas nas Figuras A e B:

A

B

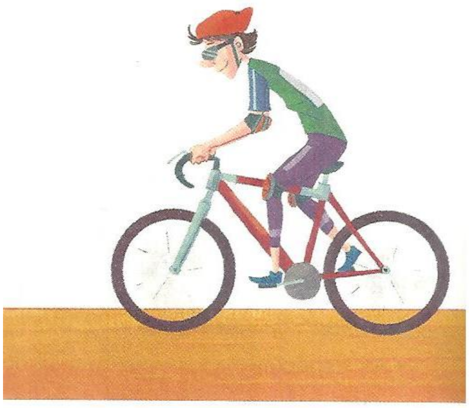
____ – _____ = _____

5. Hebercley e Felipe ganharam barras de chocolates do mesmo tamanho. Hebercley dividiu seu chocolate em 6 partes iguais e comeu 4 delas. Felipe preferiu dividir o seu em 3 partes iguais e comeu 2.
   Analise as afirmativas abaixo e marque apenas a correta:

a) Hebercley comeu mais chocolate que Felipe.
b) Felipe comeu mais chocolate que Hebercley.
c) Eles comeram a mesma quantidade de chocolate.

(adaptado de IEZZI, 2009, p.167)

6. Um ciclista saiu da cidade A em direção à cidade B. No primeiro dia, percorreu $\frac{1}{2}$ da distância que separa as duas cidades e, no segundo dia, $\frac{1}{3}$ dessa mesma distância.



Agora, responda:

a) Qual é a fração que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem?

b) Qual é a fração que representa a distância que falta para chegar à cidade B?

c) Sabendo que a distância que falta para chegar à cidade B é de 60 quilômetros, qual é a distância entre essas duas cidades?

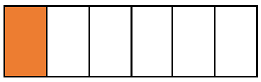
(BIANCHINI, 2018, p.186)

APÊNDICE 2

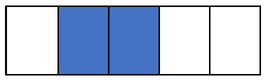
(Atividade instrutiva)

1. Os retângulos abaixo foram repartidos em partes iguais, observe:

A



B



Um sexto $\left(\frac{1}{6}\right)$ do retângulo A está pintado de laranja:

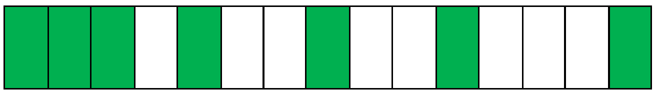
$\frac{1}{6}$ → 1: Quantidade de partes pintadas de laranja. 6: Quantidade total de partes do retângulo.

Dois quintos $\left(\frac{2}{5}\right)$ do retângulo B está pintado de azul:

$\frac{2}{5}$ → 2: Quantidade de partes pintadas de azul. 5: Quantidade total de partes do retângulo.

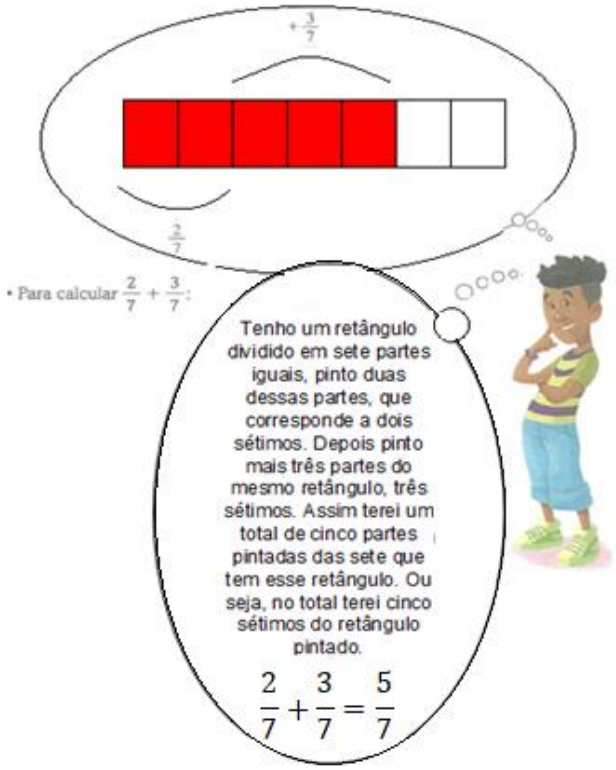
Responda de acordo com o retângulo abaixo:

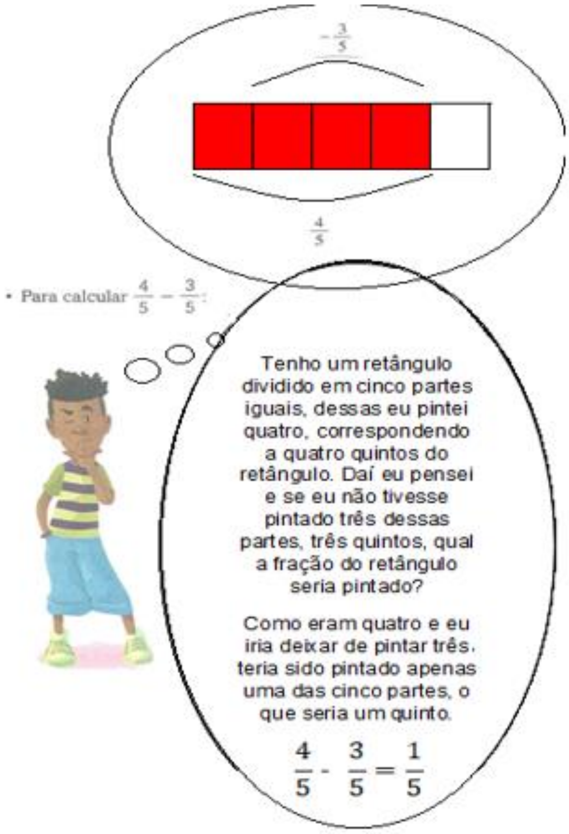
C



a) Em quantas partes foi dividido o retângulo C? _____
b) Que fração do retângulo C está pintado de verde? _____

2. Kelvin imagina partes de um retângulo para calcular o resultado de adições e subtrações de frações com o mesmo denominador. Observe:





Calcule as operações com as frações abaixo, se preferir use o raciocínio de Kelvin:

a) $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=$ _____

b) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$ _____

c) $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=$ _____

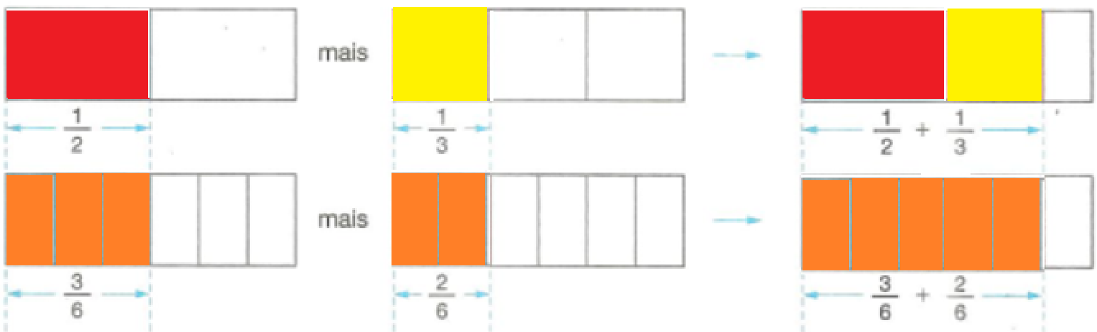
d) $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=$ _____

e) $\frac{6}{7}-\frac{4}{7}=$ _____

(Adaptado de BIANCHINI, 2018, p. 180)

3. Eliane foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Eliane gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Para ajudar na compreensão da resolução dessa questão, a quantia que Eliane tinha será representada por um retângulo, como o mostrado ao lado, e nele será representado as frações indicadas:

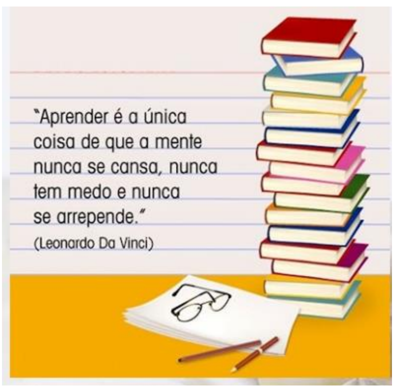


As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$. Então complete:

$\underbrace{\_\_\_\_ + \_\_\_\_}_{\text{Frações denominadores diferentes}} = \underbrace{\_\_\_\_ + \_\_\_\_}_{\text{Frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \_\_\_\_\_$

Eliane gastou ____ da quantia inicial.

(Adaptado de GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)



APÊNDICE 3

(Atividade 3: Manuseando e aprendendo)

Aluno (a): ________________________________

Para o auxílio na compreensão de frações, iremos manusear um material didático. Este material é composto por um retângulo branco que será o nosso inteiro (referência), e peças coloridas de cores primárias e secundárias que foram obtidas por divisões em partes iguais de retângulos como o inteiro (branco).

1) Usando a sobreposição das figuras obtenha frações equivalentes às indicadas abaixo, completando o numerador ou denominador com o número apropriado:

a) $1 = \frac{\;}{2} = \frac{3}{\;} = \frac{4}{\;} = \frac{\;}{5} = \frac{\;}{6} = \frac{15}{\;} = \frac{\;}{20}$

b) $\frac{\;}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{\;} = \frac{\;}{20}$

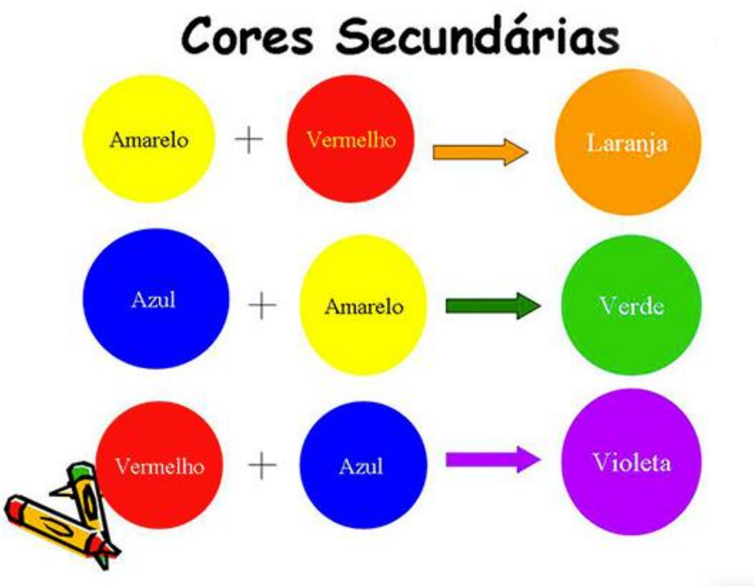
c) $\frac{3}{4} = \frac{\;}{20}$

d) $\frac{1}{5} = \frac{4}{\;}$

e) $\frac{\;}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{\;}$

f) $\frac{4}{5} = \frac{12}{\;}$

2) Ainda fazendo sobreposições... Encontre as peças que corresponde a cada um dos termos das operações. Troque-as por peças de mesma cor (cor secundária gerada pelas cores das peças encontradas), ou seja, por frações equivalentes com o mesmo denominador e, em seguida, resolva as operações:



a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ ____ + ____ = ____

b) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$ ____ + ____ = ____

c) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} =$ ____ + ____ = ____

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$ ____ - ____ = ____

e) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} =$ ____ - ____ = ____

f) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$ ____ + ____ = ____

APÊNDICE 4

(Atividade 4: Sistematização)

1) Resolva as adições e subtrações abaixo:

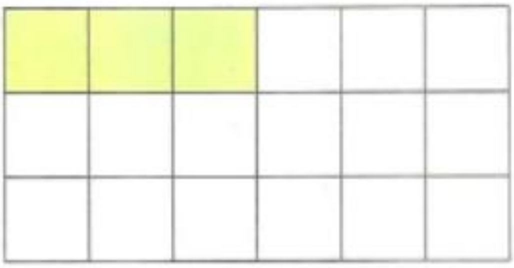
a) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} =$

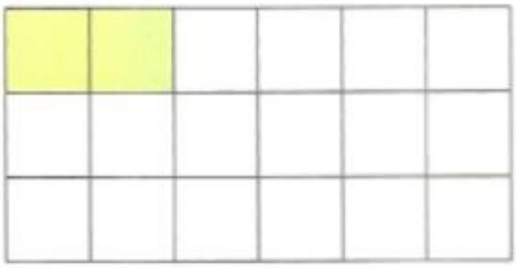
b) $\frac{5}{12} - \frac{3}{12} =$

c) $\frac{5}{8} - \frac{3}{5} =$

d) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$

2) Observe as figuras abaixo e responda:

I 

II 

a) Qual é a fração representada pela parte hachurada (pintada) das figuras:
I: ______ II: ______

b) Escreva essas frações na forma irredutível (simplificada):
I: ______ II: ______

c) Calcule a adição das duas frações representadas:

d) Calcule a diferença dessas duas frações:

(adaptado de CENTURIÓN, JAKUBOVIK, 2015, p.180)

3) Clarice foi à feira para comprar peixes. Gastou $\frac{2}{7}$ do dinheiro que levou para comprar sardinhas e $\frac{1}{3}$ para comprar camarão. Que fração do dinheiro que Clarice levou à feira foi gasto na barraca de peixes?

Resposta: ________________________

(GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009, p.187)

"Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino."

Paulo Freire

Obrigada por sua participação!