



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**



DANIEL COSTA SALES

ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS

**SÃO CRISTÓVÃO - SE
2018**

DANIEL COSTA SALES

**ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS
PLANAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Sergipe – UFS, para
encerramento do componente curricular e
conclusão da graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa

SÃO CRISTÓVÃO - SE
2018

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta monografia e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Assinatura

SALES, Daniel Costa

ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS
PLANAS/ Daniel Costa Sales

São Cristóvão, 2018

46 p. : il.

Trabalho Acadêmico Orientado. Centro de Ciências Exatas e
Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

I. Universidade Federal de Sergipe/Sergipe. CDS

II. Título.

DANIEL COSTA SALES

ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Sergipe – UFS, para
encerramento do componente curricular e
conclusão da graduação em Engenharia Civil.

Aprovado em: _____ de _____ de _____.

BANCA EXAMINADORA:

Nota: _____

**Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa – Universidade Federal de Sergipe
(Presidente - Orientador)**

Nota: _____

**Prof. Dr. Higor Sérgio Dantas de Argôlo – Universidade Federal de Sergipe
(1º Examinador)**

Nota: _____

**Prof. Dr. Marco Antônio Brasiel Sampaio – Universidade Federal de Sergipe
(2º Examinador)**

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Marcos e Angela, por priorizarem a minha educação e me apoiarem durante a graduação e a minha irmã Lucila, pela parceria e apoio.

A todos professores, pelo conhecimento e sabedoria compartilhados. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa, por ter contribuído imensamente para meu aprendizado. Muito obrigado pelo apoio e incentivo.

Agradeço também a Ana Cecília pela paciência e apoio.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um código computacional na linguagem MATLAB para a análise geometricamente não linear de treliças planas. Tal desenvolvimento foi baseado em uma formulação para análise geometricamente não linear de treliças planas através do método da rigidez direta e na implementação do método de Newton-Raphson com incrementos de carga para solução do sistema de equações não lineares que representam as relações carga-deslocamento derivadas da formulação. O código foi, então, numericamente testado através de exemplos encontrados na literatura técnica e comparação de resultados. Observou-se boa concordância entre os resultados de deslocamentos nodais e forças axiais nas barras obtidos através do código desenvolvido pelo autor e os resultados disponíveis na bibliografia consultada. Nos exemplos 1 e 2, as treliças analisadas sofreram o efeito de instabilidade conhecido como “snap-through” e foi possível observar o comportamento das estruturas e a influência de tal efeito sobre o número de iterações necessárias para convergência da análise. No exemplo 4, pôde-se perceber a validade da análise linear para estruturas que sofrem pequenos deslocamentos através da comparação dos resultados com uma análise geometricamente não linear.

Palavras-chave: análise estrutural, mecânica computacional, treliça plana, não linearidade geométrica, método de Newton-Raphson.

ABSTRACT

This work presents the development of a computational code in the MATLAB language for geometrically nonlinear analysis of plane trusses. This development was based on a formulation for geometrically nonlinear analysis of plane trusses through the direct stiffness method and the implementation of the Newton-Raphson method with load increments for the solution of the nonlinear equations system that represents the load-displacement relations derived by the aforementioned formulation. The code was then numerically tested through examples found in the literature and comparison of results. Good agreement was noticed between the results of nodal displacements and axial forces in the bars obtained through the code developed by the author and the results available in the literature. In examples 1 and 2, the trusses analyzed underwent the instability effect known as "snap-through" and it was possible to observe the structural behaviour and the influence of such effect on the number of iterations needed for analysis convergence. In example 4, the validity of the linear analysis for structures that undergo small displacements could be noted by comparing the results with a geometrically nonlinear analysis.

Keywords: structural analysis, computational mechanics, plane truss, geometric nonlinearity, Newton-Raphson method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Treliça devidamente rotulada.....	15
Figura 2: Sistemas de Coordenadas.....	16
Figura 3: Forças e Deslocamentos Axiais no Sistema de Coordenadas Locais	17
Figura 4: Barra arbitrária “m” em equilíbrio nas coordenadas locais e globais	19
Figura 5: Método de Newton-Raphson para uma estrutura com apenas um grau de liberdade livre.....	27
Figura 6: Diagrama com resumo do procedimento de análise	28
Figura 7: Interface do software MATLAB.....	29
Figura 8: Exemplo 1 – Desenho esquemático	31
Figura 9: Exemplo 1 – Gráfico de deslocamento por carga aplicada.....	34
Figura 10: Exemplo 1 – Configurações indeslocada e deslocadas para passos de carga 8 e 935	35
Figura 11: Exemplo 2 – Desenho esquemático	36
Figura 12: Exemplo 2 – Configurações indeslocada e deslocada final.....	38
Figura 13: Exemplo 2 – Gráfico de deslocamento por carga aplicada.....	39
Figura 14: Exemplo 3 – Desenho esquemático e modelo analítico.....	40
Figura 15: Exemplo 3 – Configurações indeslocada e deslocada final	41
Figura 16: Exemplo 4 – Desenho esquemático	42
Figura 17: Exemplo 4 – Configurações indeslocada e deslocada final	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Exemplo 1 - Comparação de resultados	32
Tabela 2: Exemplo 2 - Comparação de resultados	37
Tabela 3: Exemplo 3 - Comparação de resultados	41
Tabela 4: Exemplo 4 - Comparação de resultados - Deslocamentos	43
Tabela 5: Exemplo 4 - Comparação de resultados – Forças axiais	43
Tabela 6: Exemplo 4 - Comparação de resultados com análise linear – Forças axiais	44

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 OBJETIVO GERAL	12
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
1.3 BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS.....	12
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	14
2.1 MÉTODO DA RIGIDEZ.....	14
2.2 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS.....	16
2.1.1 Relações entre forças e deslocamentos de uma barra	17
2.1.2 Matriz de rigidez tangente de uma barra	21
2.1.3 Relações carga-deslocamento da estrutura	24
2.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES	25
3 METODOLOGIA.....	29
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
4.1 EXEMPLO 1 - TRELIÇA DE DUAS BARRAS	31
4.2 EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE UMA BARRA	36
4.3 EXEMPLO 3 - TRELIÇA DE TRÊS BARRAS	40
4.4 EXEMPLO 4 - TRELIÇA DE CINCO BARRAS.....	41
5 CONCLUSÕES.....	45
REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

Segundo Martha (2010), treliças são estruturas reticuladas que possuem todas as ligações entre barras articuladas (as barras podem girar independentemente nas ligações). Além disso, treliças são carregadas apenas por cargas ou reações de apoio concentradas nas articulações. A consequência disso, em conjunto com a hipótese de ligações articuladas, é que uma treliça apresenta apenas esforços internos axiais (esforços normais de tração ou compressão).

Segundo Cook, Malkus e Plesha (1989), na análise estrutural, um problema é não linear se a matriz de rigidez ou o vetor de cargas dependem dos deslocamentos. Não linearidades estruturais podem ser classificadas como não linearidades de material (associadas a mudanças nas propriedades materiais, como na plasticidade) ou como não linearidades geométricas (associadas a mudanças de configuração, como grandes deslocamentos de uma viga elástica esbelta).

A classificação em linear ou não linear é artificial, de acordo com Cook, Malkus e Plesha (1989), pois a realidade física apresenta vários problemas, dos quais alguns podem ser satisfatoriamente aproximados por equações lineares. Porém, muitas situações físicas apresentam não linearidades muito expressivas para serem ignoradas. Além disso, aproximações não lineares são mais difíceis de serem formuladas e a solução do sistema de equações resultante pode custar de 10 a 100 vezes o custo de uma aproximação linear com o mesmo número de graus de liberdade.

De acordo com Kassimali (2012), na análise geometricamente linear de treliças, os deslocamentos da estrutura são admitidos como pequenos o suficiente para que as deformações das barras possam ser expressas como funções lineares dos deslocamentos nodais e as equações de equilíbrio são baseadas na geometria não deformada da estrutura. Na análise geometricamente não linear, a restrição de pequenos deslocamentos é removida através da formulação de relações deformação-deslocamento e de equações de equilíbrio para a geometria deformada da estrutura.

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver e validar um código computacional para análise geometricamente não linear de treliças planas.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar revisão bibliográfica acerca da análise não linear de treliças planas;
- Desenvolver um código computacional para análise geometricamente não linear de treliças planas;
- Testar numericamente o código com exemplos encontrados na bibliografia para efeito de validação do mesmo;
- Alcançar uma melhor compreensão do comportamento de treliças submetidas a análises geometricamente não lineares através da discussão dos resultados obtidos nos exemplos.

1.3 BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Segundo Kassimali (2012), a fundamentação teórica dos métodos matriciais de análise estrutural foi estabelecida por James C. Maxwell, que introduziu o método das deformações consistentes em 1864 e George A. Maney, que desenvolveu o método da inclinação-flecha em 1915. Esses métodos clássicos são considerados os precursores dos métodos matriciais da flexibilidade e da rigidez, respectivamente. Anteriormente à invenção dos computadores, a principal desvantagem desses métodos era que eles necessitam de uma solução direta de equações algébricas simultâneas - uma tarefa difícil de ser executada manualmente para problemas com grande número de incógnitas.

A invenção dos computadores no final da década de 1940 revolucionou a análise estrutural. Como os computadores poderiam resolver grandes sistemas de equações simultâneas, os métodos de análise baseados em soluções de tais sistemas não estavam mais em desvantagem, mas passaram a ser os preferidos, pois equações simultâneas poderiam ser expressas em forma de matriz e convenientemente programadas para solução em computadores.

S. Levy é considerado o primeiro a introduzir o método da flexibilidade em 1947, a partir da generalização do método clássico de deformações consistentes. Entre os pesquisadores subsequentes, que estenderam o método da flexibilidade e o expressaram em forma de matriz

no início da década de 1950, estavam H. Falkenheimer, B. Langefors e P. H. Denke. O método da rigidez da matriz foi desenvolvido por R. K. Livesley em 1954. No mesmo ano, J. H. Argyris e S. Kelsey apresentaram uma formulação de métodos matriciais baseados em princípios energéticos. Em 1956, M. T. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp derivaram matrizes de rigidez para os membros de treliças e quadros usando a abordagem de elementos finitos e introduziram o método da rigidez direta para gerar a matriz de rigidez de uma estrutura. No mesmo ano, Livesley apresentou uma formulação não-linear do método da rigidez para análise de estabilidade de quadros.

Desde meados da década de 1950, o desenvolvimento de métodos matriciais tem continuado em um ritmo acelerado, com investimentos em pesquisas nos últimos anos direcionados principalmente para a formulação de procedimentos para a análise dinâmica e não linear de estruturas e desenvolvimento de técnicas computacionais eficientes para analisar grandes estruturas. Avanços recentes nestas áreas podem ser atribuídos a S. S. Archer, C. Birnstiel, R. H. Gallagher, J. Padlog, J. S. Przemieniecki, C. K. Wang e E. L.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, será apresentada a fundamentação teórica que serviu de base para o desenvolvimento do código computacional pelo autor do trabalho.

2.1 MÉTODO DA RIGIDEZ

Segundo Hibbeler (2013), o método da rigidez é bastante adequado para o uso em computadores e, por isso, foi utilizado pelo autor deste trabalho no desenvolvimento de um código para análise geometricamente não linear de treliças planas.

O método da rigidez é uma análise pelo método dos deslocamentos. Ele pode ser utilizado para analisar tanto estruturas estaticamente determinadas como estruturas estaticamente indeterminadas e produz deslocamentos e forças diretamente. A aplicação do método exige subdividir a estrutura em elementos discretos e identificar seus pontos extremos como nós. Para a análise de treliças, tais elementos são representados pelos membros (barras) que compõem a treliça e os nós representam as ligações entre eles. As relações entre forças e deslocamentos de cada elemento são determinadas e então relacionadas umas com as outras usando equações de equilíbrio de forças aplicadas nos nós. Para a estrutura completa, tais relações são, então, agrupadas na chamada matriz de rigidez da estrutura, $\mathbf{K}$. Assim que estabelecida, os deslocamentos nodais desconhecidos podem ser determinados para qualquer carregamento dado. Conhecidos os deslocamentos, as forças internas e externas da estrutura podem ser calculadas usando as relações força-deslocamento para cada membro, em uma etapa de pós-processamento.

Para aplicar o método da rigidez, é necessário identificar os elementos ou membros da estrutura e seus nós separadamente. Isto pode ser feito através da numeração dos mesmos. É necessário também identificar os nós aos quais cada elemento está conectado e a orientação dos membros (declarar qual nó extremo é o inicial, tornando final o nó restante).

Tendo em vista que cargas e deslocamentos são quantidades vetoriais, é necessário estabelecer um sistema de coordenadas, a fim de especificar direções e sentidos. Geralmente, dois tipos diferentes de sistemas de coordenadas são utilizados no método da rigidez: o sistema de coordenadas global e o sistema de coordenadas local. O sistema de coordenadas global é único e compartilhado entre todos os elementos da estrutura. Um sistema de coordenadas local

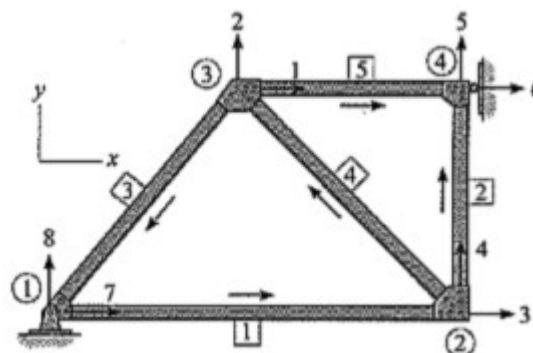
xy é utilizado para cada membro, tendo origem no nó inicial definido e com eixo x na direção longitudinal da barra, com sentido ao nó final.

Cada deslocamento nodal possível em uma estrutura é chamado de grau de liberdade. No caso de treliças planas, cada nó apresenta dois graus de liberdade, um para deslocamentos verticais e outro para deslocamentos horizontais. Ao impor condições de apoio a uma estrutura, os graus de liberdade com deslocamentos impossibilitados passam a ser chamados de graus de liberdade restritos e os demais são chamados de graus de liberdade livres. Os deslocamentos nos graus de liberdade livres representam as incógnitas primárias para qualquer método de deslocamento.

Uma vez que a estrutura esteja devidamente rotulada quanto aos graus de liberdade, nós e elementos da mesma, sua matriz de rigidez $\mathbf{K}$ pode ser determinada. Isso pode ser feito a partir do estabelecimento de uma matriz de rigidez local $\mathbf{k}'$ para cada membro da estrutura. A matriz de rigidez global é definida pela soma das matrizes de rigidez local de cada elemento nos graus de liberdade pertinentes. É importante observar que, antes de serem somadas, as matrizes de rigidez local devem estar no mesmo sistema de coordenadas que a global. Os deslocamentos nos graus de liberdade livres podem ser então determinados pela solução do sistema $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}$, em que $\mathbf{u}$ é o vetor dos deslocamentos e $\mathbf{P}$ é o vetor de cargas externas, após a aplicação das condições de contorno (deslocamentos nodais nulos ou prescritos, ou ainda, coeficientes de mola nos graus de liberdade).

A Figura 1 a seguir exemplifica uma treliça devidamente rotulada.

Figura 1: Treliça devidamente rotulada



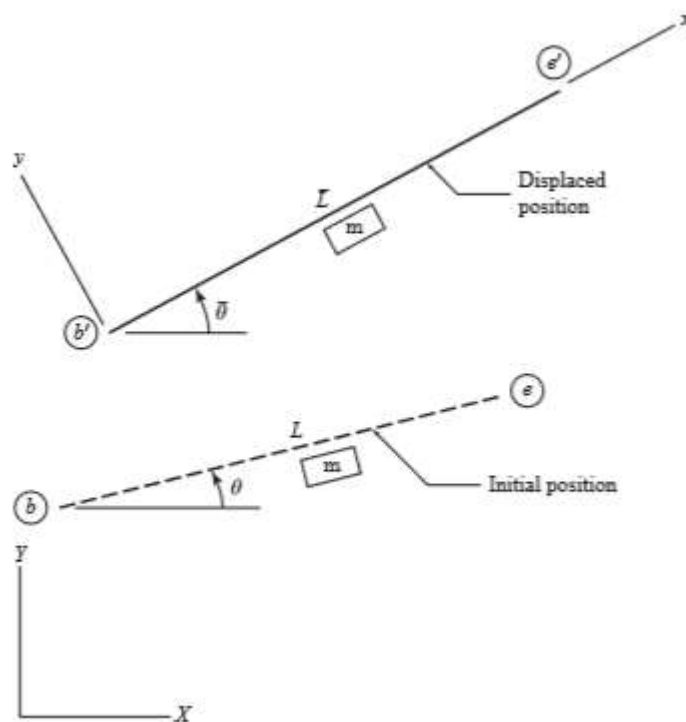
Fonte: Hibbeler, 2013.

2.2 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS

Para realizar a análise geometricamente não linear de treliças planas neste trabalho, utilizou-se um método geral da rigidez direta.

O modelo analítico utilizado foi desenvolvido a partir de dois sistemas de coordenadas, apresentados na Figura 2. O sistema XY é um sistema cartesiano, conhecido como sistema de coordenadas global. O sistema global não pode ser transladado ou rotacionado e é compartilhado entre todos os elementos da estrutura. O sistema xy é um sistema corrotacional, ou Euleriano, conhecido como sistema de coordenadas locais. Um sistema de coordenadas locais é definido para cada barra de treliça. Esse sistema é fixado à barra e se desloca (translada e/ou rotaciona) junto com a mesma, à medida em que a estrutura se deforma. O sistema local tem origem em um dos extremos da barra, com o eixo x no eixo centroidal da mesma, na direção de seu comprimento e com sentido à outra extremidade. O sentido positivo do eixo y é definido de forma que o sistema de coordenadas obedeça à regra da mão direita e o eixo z local tenha a mesma direção e sentido do eixo Z global.

Figura 2: Sistemas de Coordenadas



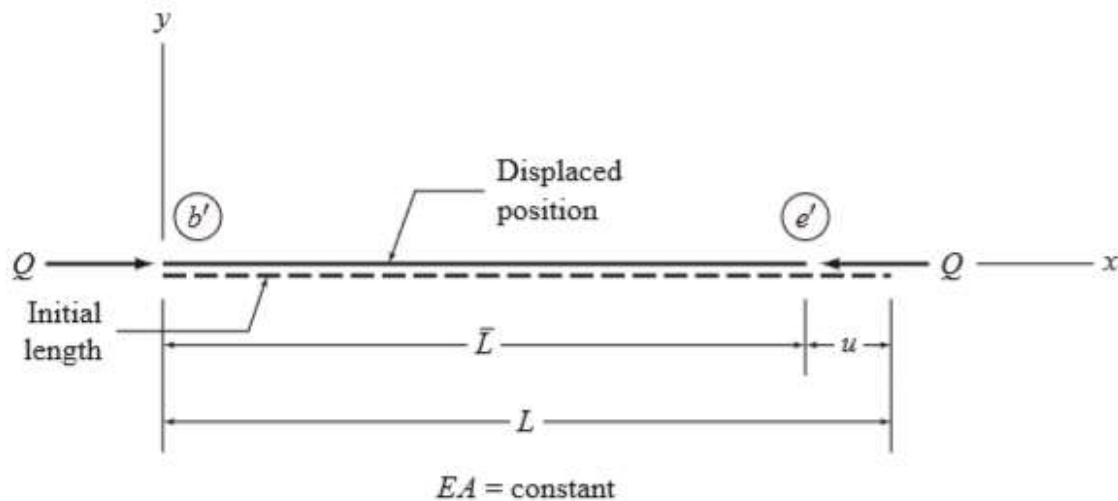
Fonte: Kassimali, 2012.

A principal vantagem na utilização do sistema de coordenadas Euleriano é a possibilidade de separação entre a deformação axial de uma barra e o deslocamento de corpo rígido da mesma, que é considerado arbitrariamente grande na análise geometricamente não linear.

2.1.1 Relações entre forças e deslocamentos de uma barra

Seja uma barra com seção transversal constante A (prismática) arbitrária de uma treliça qualquer. O modelo utilizado para essa barra apresenta dois nós, um no início (b' , $x = 0$ no sistema de coordenadas locais) e um no final (e') da mesma. Quando a treliça é sujeita a cargas externas, essa barra deforma com o surgimento de forças axiais em seus extremos. A Figura 3 a seguir apresenta o estado deslocado da barra no sistema de coordenadas locais.

Figura 3: Forças e Deslocamentos Axiais no Sistema de Coordenadas Locais



Fonte: Kassimali, 2012.

Nota-se que, devido às características do sistema de coordenadas locais adotado, apenas um deslocamento nodal independente (grau de liberdade) é necessário para definir a posição deslocada da barra, o axial na extremidade final da barra (e'). Assim, este grau de liberdade pode ser tomado como u , deslocamento do nó final da barra na direção axial, e pode ser

expresso de acordo com os comprimentos inicial L e deformado $\bar{L}$ da barra, de acordo com a equação (1) a seguir:

$$u = L - \bar{L} \quad (1)$$

Observa-se que o deslocamento axial u é considerado positivo quando o comprimento da barra diminui e negativo quando o mesmo aumenta. Similarmente, a força axial na barra Q é positiva quando comprime a barra e negativa quando a traciona. Para estabelecer a relação entre a força axial Q e o deslocamento u , utilizam-se princípios da Mecânica dos Materiais. De acordo com esses princípios, em barras prismáticas sujeitas a forças axiais de tração ou compressão, a tensão normal à seção transversal σ é dada pela equação (2) a seguir:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (2)$$

Ainda de acordo com os princípios da Mecânica dos Materiais, a deformação específica normal à seção transversal da barra é dada pela equação (3) a seguir:

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \quad (3)$$

Além disso, para materiais linearmente elásticos, a relação tensão-deformação é dada pela Lei de Hooke de acordo com a equação (4) a seguir:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4)$$

Faz-se notar que, conforme os objetivos apresentados, este trabalho trata da não linearidade advinda da geometria do problema. O material é tratado como elástico e linear. Substituindo-se as equações (2) e (3) na equação (4), chega-se à seguinte relação entre forças e deslocamentos nodais para barras prismáticas de treliças planas no sistema de coordenadas local:

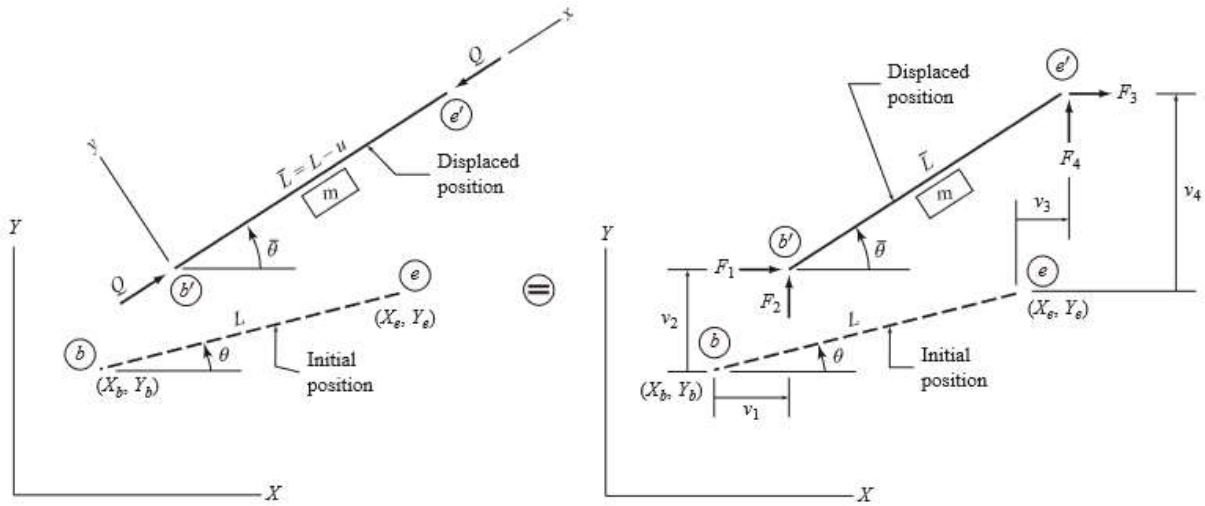
$$Q = \left(\frac{EA}{L}\right)u \quad (5)$$

Então, considera-se as relações forças-deslocamentos no sistema de coordenadas globais. A

Figura 4 a seguir mostra as posições iniciais e deslocadas de uma barra arbitrária m de uma treliça plana. No lado esquerdo da figura, a barra é demonstrada em equilíbrio sob a ação

de forças axiais locais Q . Já no lado direito, a mesma barra é demonstrada em equilíbrio sob a ação do sistema de forças nodais F equivalente às forças Q , atuando nas direções dos eixos coordenados X e Y globais. O sistema de forças F e os deslocamentos nodais v são numerados da maneira apresentada na figura citada.

Figura 4: Barra arbitrária “m” em equilíbrio nas coordenadas locais e globais



Fonte: Kassimali, 2012.

Se (X_b, Y_b) e (X_e, Y_e) denotam as coordenadas dos nós inicial e final, respectivamente, no sistema de coordenadas global em suas posições indeslocadas, o comprimento inicial L da barra pode ser expresso através do Teorema de Pitágoras por:

$$L = \sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2} \quad (6)$$

Semelhantemente, baseando-se no lado direito da

Figura 4, o comprimento deslocado da barra $\bar{L}$ e os cossenos diretores c_X e c_Y da barra em seu estado deslocado podem ser expressos em termos das coordenadas iniciais (X_b, Y_b) e (X_e, Y_e) e deslocamentos nodais v , ambos nas coordenadas globais, a partir das seguintes relações:

$$\bar{L} = \sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2} \quad (7)$$

$$c_X = \cos \bar{\theta} = \frac{(X_e + v_3) - (X_b + v_1)}{\bar{L}} \quad (8)$$

$$c_Y = \sin \bar{\theta} = \frac{(X_e + v_4) - (X_b + v_2)}{\bar{L}} \quad (9)$$

Em que $\bar{\theta}$ representa o ângulo medido no sentido anti-horário da direção positiva do eixo X global à direção positiva do eixo x local da barra em seu estado deslocado.

Ainda a partir da

Figura 4, observa-se que no nó inicial da barra, as forças F_1 e F_2 no sistema de coordenadas global devem ser, respectivamente, iguais às componentes da força axial local Q nas direções dos eixos X e Y globais. Assim, tem-se que:

$$F_1 = c_X Q \quad (10)$$

$$F_2 = c_Y Q \quad (11)$$

Utilizando o mesmo raciocínio para o nó final, obtém-se:

$$F_3 = -c_X Q \quad (12)$$

$$F_4 = -c_Y Q \quad (13)$$

As equações (10) a (13) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X \\ c_Y \\ -c_X \\ -c_Y \end{bmatrix} Q \quad (14)$$

Ou ainda simbolicamente como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T Q \quad (15)$$

Com a matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{T}$ dada por:

$$\mathbf{T} = [c_X \quad c_Y \quad -c_X \quad -c_Y] \quad (16)$$

Então, se as coordenadas dos nós no estado inicial e os deslocamentos nodais, ambos no sistema de coordenadas global, são conhecidos, é possível calcular as forças nodais

correspondentes no sistema de coordenadas global a partir da seguinte expressão não linear, que pode ser obtida a partir das equações (1), (5), (6), (7), (8), (9) e (14).

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(X_e + v_3) - (X_b + v_1)}{\sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2}} \\ \frac{(X_e + v_4) - (X_b + v_2)}{\sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2}} \\ -\frac{(X_e + v_3) - (X_b + v_1)}{\sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2}} \\ -\frac{(X_e + v_4) - (X_b + v_2)}{\sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2}} \end{bmatrix} Q \quad (17)$$

Com:

$$Q = \left(\frac{EA}{\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2}} \right) u \quad (18)$$

$$u = (\sqrt{(X_e - X_b)^2 + (Y_e - Y_b)^2} - \sqrt{[(X_e + v_3) - (X_b + v_1)]^2 + [(Y_e + v_4) - (Y_b + v_2)]^2}) \quad (19)$$

Entre as equações utilizadas (equações (1), (5), (6), (7), (8), (9) e (14)), apenas a equação (5) envolve as propriedades do material da barra. As demais são essencialmente de caráter geométrico e são exatas no sentido de que são válidas para deslocamentos nodais arbitrariamente grandes. As equações apresentadas, em conjunto com as equações de equilíbrio (20) e (21) aplicadas aos nós, são necessárias e suficientes para estabelecer relações cargas-deslocamentos geometricamente não lineares para uma treliça completa.

$$+\rightarrow \sum Fx = 0 \quad (20)$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \quad (21)$$

2.1.2 Matriz de rigidez tangente de uma barra

Quando a configuração deslocada $\mathbf{d}$ (vetor com os deslocamentos nodais) de uma treliça é conhecida, as cargas nodais correspondentes $\mathbf{P}$ (vetor com cargas nodais) necessárias para manter a estrutura em equilíbrio nessa configuração podem ser determinadas pela aplicação

direta das relações força-deslocamento não lineares apresentadas no item acima. Porém, na maior parte das aplicações práticas, são as cargas nodais $\mathbf{P}$ que são especificadas e o objetivo da análise é determinar a configuração deslocada da estrutura, juntamente com as forças (reações e axiais) e tensões atuando na mesma. Então, é necessário resolver um sistema de equações não lineares simultâneas. Para a resolução do mesmo, utilizam-se técnicas computacionais iterativas que geralmente envolvem resolver formas linearizadas das relações carga-deslocamento da estrutura repetidamente com o intuito de se aproximar da solução não linear desconhecida. Assim, inicialmente, é necessário desenvolver uma forma linearizada das relações força-deslocamento para cada barra da treliça no sistema de coordenadas globais.

Tais relações força-deslocamento podem ser escritas em termos de diferenciais como:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{v} \quad (22)$$

Onde $\Delta \mathbf{F}$ e $\Delta \mathbf{v}$ são os incrementos de forças nodais da barra, $\mathbf{F}$, e de deslocamentos nodais da mesma, $\mathbf{v}$, no sistema de coordenadas globais, respectivamente, e

$$\mathbf{K}_t = \left[\frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right]; \text{ para } i, j = 1 \text{ a } 4 \quad (23)$$

$\mathbf{K}_t$ é a matriz de rigidez tangente de uma barra no sistema de coordenadas globais. A equação (23) pode ser expandida para:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1}{\partial v_2} & \frac{\partial F_1}{\partial v_3} & \frac{\partial F_1}{\partial v_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2}{\partial v_3} & \frac{\partial F_2}{\partial v_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial v_1} & \frac{\partial F_3}{\partial v_2} & \frac{\partial F_3}{\partial v_3} & \frac{\partial F_3}{\partial v_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial v_1} & \frac{\partial F_4}{\partial v_2} & \frac{\partial F_4}{\partial v_3} & \frac{\partial F_4}{\partial v_4} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Para determinar a forma explícita de $\mathbf{K}_t$, derivam-se as equações (10), (11), (12) e (13) parcialmente em relação às variáveis v_1 a v_4 . Derivando-se a expressão de F_1 parcialmente em relação a v_1 , obtém-se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1} = c_X \left(\frac{\partial Q}{\partial v_1} \right) + Q \left(\frac{\partial c_X}{\partial v_1} \right) \quad (25)$$

Para obter-se $\frac{\partial Q}{\partial v_1}$, substituem-se as equações (1) e (7) na equação (5) e deriva-se parcialmente a equação resultante em relação a v_1 . Assim,

$$\frac{\partial Q}{\partial v_1} = \left(\frac{EA}{L}\right) c_X \quad (26)$$

Semelhantemente, substituindo-se a equação (7) na equação (8) e derivando-se parcialmente a equação resultante em relação a v_1 , obtém-se:

$$\frac{\partial c_X}{\partial v_1} = -\frac{c_y^2}{L} \quad (27)$$

Assim,

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1} = \left(\frac{EA}{L}\right) c_X^2 - Q \frac{c_y^2}{L} \quad (28)$$

As demais derivadas parciais de F_i em relação a v_i podem ser obtidas de maneiras similares. A forma explícita da matriz de rigidez tangente global para uma barra de treliça é:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_y & -c_X^2 & -c_X c_y \\ c_X c_y & c_y^2 & -c_X c_y & -c_y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_y & c_X^2 & c_X c_y \\ -c_X c_y & -c_y^2 & c_X c_y & c_y^2 \end{bmatrix} + \frac{Q}{L} \begin{bmatrix} -c_y^2 & c_X c_y & c_y^2 & -c_X c_y \\ c_X c_y & -c_X^2 & -c_X c_y & c_X^2 \\ c_y^2 & -c_X c_y & -c_y^2 & c_X c_y \\ -c_X c_y & c_X^2 & c_X c_y & -c_X^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Observa-se que na configuração indeslocada de uma barra, em que $Q = 0$ e $\bar{\theta} = \theta$ (ângulo medido no sentido anti-horário da direção positiva do eixo X global à direção positiva do eixo x local da barra em seu estado indeslocado), a matriz de rigidez tangente é reduzida à matriz de rigidez global para uma barra de treliça utilizada em análises lineares. A equação (29) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_t = \left(\frac{EA}{L}\right) \mathbf{T}^T \mathbf{T} + Q \mathbf{g} \quad (30)$$

Em que $\mathbf{g}$ é a matriz geométrica, dada por:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -c_y^2 & c_x c_y & c_y^2 & -c_x c_y \\ c_x c_y & -c_x^2 & -c_x c_y & c_x^2 \\ c_y^2 & -c_x c_y & -c_y^2 & c_x c_y \\ -c_x c_y & c_x^2 & c_x c_y & -c_x^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

A linearização das relações força-deslocamento pode ser vista também como a expansão das mesmas em séries de Taylor, truncando-as no segundo termo (linear) das séries. Sejam as funções $f_i(\mathbf{v})$ correspondentes às relações força-deslocamento de uma barra de treliça, tais funções podem ser expandidas em torno de uma configuração $\mathbf{v}_0$ para a qual é $\mathbf{F}(\mathbf{v}_0)$ é conhecido. Assim, tem-se:

$$f_i(\mathbf{v}) \approx f_i(\mathbf{v}_0) + \nabla f_i(\mathbf{v}_0) \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)}{1!} \quad (32)$$

O que permite construir o seguinte modelo linear para o sistema de equações simultâneas:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{J}_F(\mathbf{v}_0)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \quad (33)$$

Em que:

$\mathbf{J}_F(\mathbf{v}_0)$ é a matriz jacobiana de $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ aplicada em $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ e

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{v}_0) = \mathbf{K}_t(\mathbf{v}_0).$$

Sabe-se que na configuração indeslocada $\mathbf{F}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}$, então, pode-se utilizá-la como ponto de partida para a utilização de técnicas computacionais iterativas para a resolução do sistema de equações não lineares.

2.1.3 Relações carga-deslocamento da estrutura

As relações geometricamente não lineares de carga-deslocamento de uma treliça são expressas na forma de equações de equilíbrio nodais:

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{d}) \quad (34)$$

Em que $\mathbf{P}$ é o vetor de carregamentos nodais externos, $\mathbf{d}$ o vetor de deslocamentos nodais globais e $\mathbf{f}$ é o vetor das forças nodais internas da estrutura, dado em função do vetor $\mathbf{d}$. O vetor $\mathbf{f}$ contém as resultantes das forças nodais internas nos locais e direções dos graus de

liberdade da estrutura. Ao analisar-se uma estrutura com a finalidade de descobrir sua configuração deslocada, causada por um carregamento externo específico, é necessário haver uma distinção entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{f}$, pois $\mathbf{P}$ é constante durante toda a análise e $\mathbf{f}$ varia à medida em que a configuração deslocada da estrutura é reavaliada iterativamente até que $\mathbf{f}$ fique suficientemente próximo a $\mathbf{P}$, satisfazendo as equações de equilíbrio nodais dentro de uma tolerância admitida.

A relação entre a variação de cargas e a variação de deslocamentos pode ser escrita em termos de diferenciais como:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{S}_t \Delta \mathbf{d} \quad (35)$$

Onde $\Delta \mathbf{P}$ e $\Delta \mathbf{d}$ são os incrementos de cargas externas na estrutura, $\mathbf{P}$, e de deslocamentos nodais da mesma, $\mathbf{d}$, no sistema de coordenadas globais, respectivamente, e

$$\mathbf{S}_t = \left[\frac{\partial F_i}{\partial d_j} \right]; \text{ para } i, j = 1 \text{ ao número de graus de liberdade} \quad (36)$$

$\mathbf{S}_t$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura no sistema de coordenadas globais de tamanho $n \times n$, com n igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Ela pode ser obtida através da soma das matrizes de rigidez tangente de cada barra que compõe a treliça nos graus de liberdade pertinentes.

2.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Para a solução de sistemas de equações não lineares neste trabalho, utilizou-se o método de Newton-Raphson. Segundo Ruggiero e Lopes (1996), esse é o método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não lineares. Além disso, de acordo com Kassimali (2012), a maior parte das técnicas comumente utilizadas para análise estrutural não linear são baseadas no método iterativo clássico de Newton-Raphson.

O objetivo da solução dos sistemas de equações não lineares apresentados neste trabalho é determinar a configuração deslocada de uma treliça sujeita a um carregamento externo conhecido, $\mathbf{P}$, através do cálculo de seus deslocamentos nodais, $\mathbf{d}$.

Como visto anteriormente neste trabalho, a matriz de rigidez tangente de uma estrutura em sua configuração indeslocada, $\mathbf{d}_0$, é equivalente à matriz de rigidez utilizada em análises lineares. Então, inicia-se o processo com uma análise linear da estrutura para determinar uma primeira configuração aproximada $\mathbf{d}_1$ a partir da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{S}_t(\mathbf{d}_0) \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (37)$$

Com:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} \text{ e}$$

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_1.$$

A configuração obtida, $\mathbf{d}_1$, é uma configuração aproximada, pois as equações de equilíbrio nodais (34) não estão necessariamente satisfeitas. Para corrigir a solução aproximada, calcula-se o vetor de forças nodais internas da estrutura, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{d}_1)$, correspondente à configuração $\mathbf{d}_1$ e subtrai-se o mesmo do vetor de carregamentos nodais externos, $\mathbf{P}$, para calcular o vetor de forças nodais não equilibradas, ou vetor de resíduos, $\Delta \mathbf{U}_1$.

$$\Delta \mathbf{U}_1 = \mathbf{P} - \mathbf{f}_1 \quad (38)$$

O vetor $\Delta \mathbf{U}_1$ passa a ser tratado como um incremento de carga e o vetor de correção dos deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{d}_1$ é obtido a partir da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\Delta \mathbf{U}_1 = \mathbf{S}_t(\mathbf{d}_1) \cdot \Delta \mathbf{d}_1 \quad (39)$$

Uma nova configuração aproximada $\mathbf{d}_2$ é então obtida somando-se o vetor de correção $\Delta \mathbf{d}_1$ ao vetor de deslocamentos da configuração anterior, $\mathbf{d}_1$.

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1 + \Delta \mathbf{d}_1 \quad (40)$$

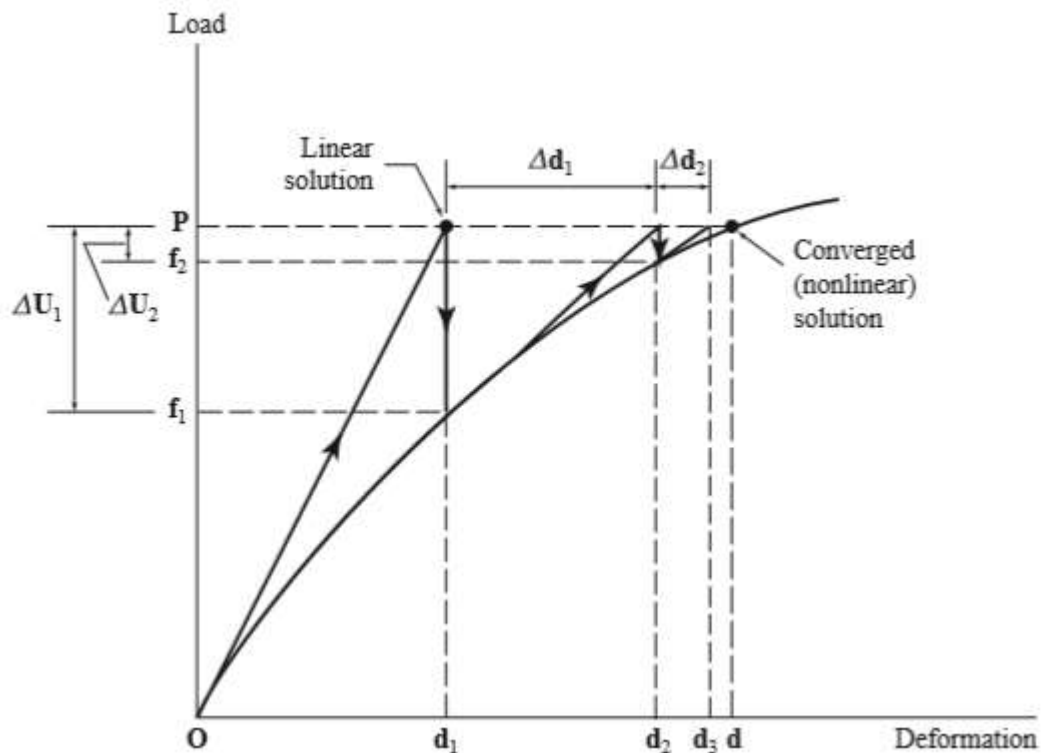
Continua-se com o mesmo procedimento para as iterações seguintes até obter-se um vetor de correção suficientemente pequeno. Para a i -ésima iteração, valem as seguintes equações:

$$\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{P} - \mathbf{f}_i \quad (41)$$

$$\Delta U_i = \mathbf{S}_t(\mathbf{d}_i) \cdot \Delta \mathbf{d}_i \quad (42)$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \Delta \mathbf{d}_i \quad (43)$$

Figura 5: Método de Newton-Raphson para uma estrutura com apenas um grau de liberdade livre.



Fonte: Kassimali, 2012.

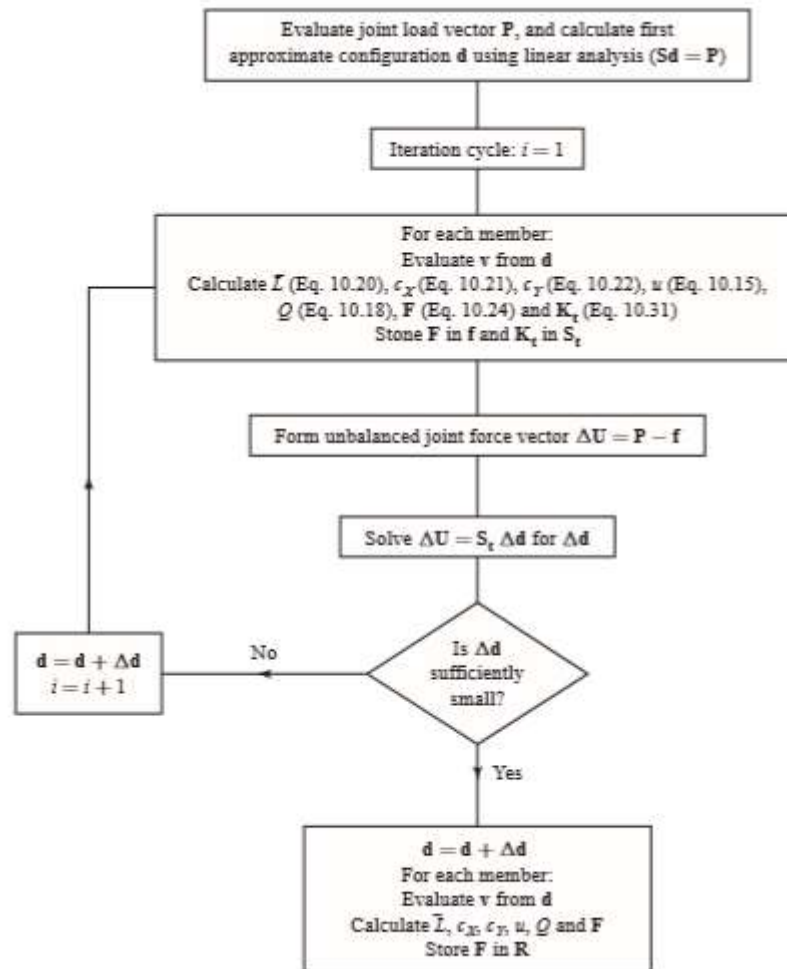
Diversos critérios podem ser utilizados para avaliar a convergência do processo iterativo. Neste trabalho, utilizou-se um critério baseado na comparação entre as variações de deslocamentos, $\Delta \mathbf{d}_i$, e os deslocamentos totais, $\mathbf{d}_i$, em cada iteração. Segundo Kassimali (2012), a utilização desse critério costuma trazer resultados razoavelmente precisos para estruturas que apresentam redução de rigidez quando submetidas a carregamentos maiores. Assim, para uma dada tolerância ϵ , admite-se que o processo iterativo convergiu quando a seguinte inequação é satisfeita:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{NDOF} (\Delta d_j)^2}{\sum_{j=1}^{NDOF} (d_j)^2}} \leq e \quad (44)$$

Onde NDOF é o número de graus de liberdade livres da estrutura.

O diagrama a seguir resume o processo descrito acima para a análise geometricamente não linear de treliças planas:

Figura 6: Diagrama com resumo do procedimento de análise



Fonte: Kassimali, 2012.

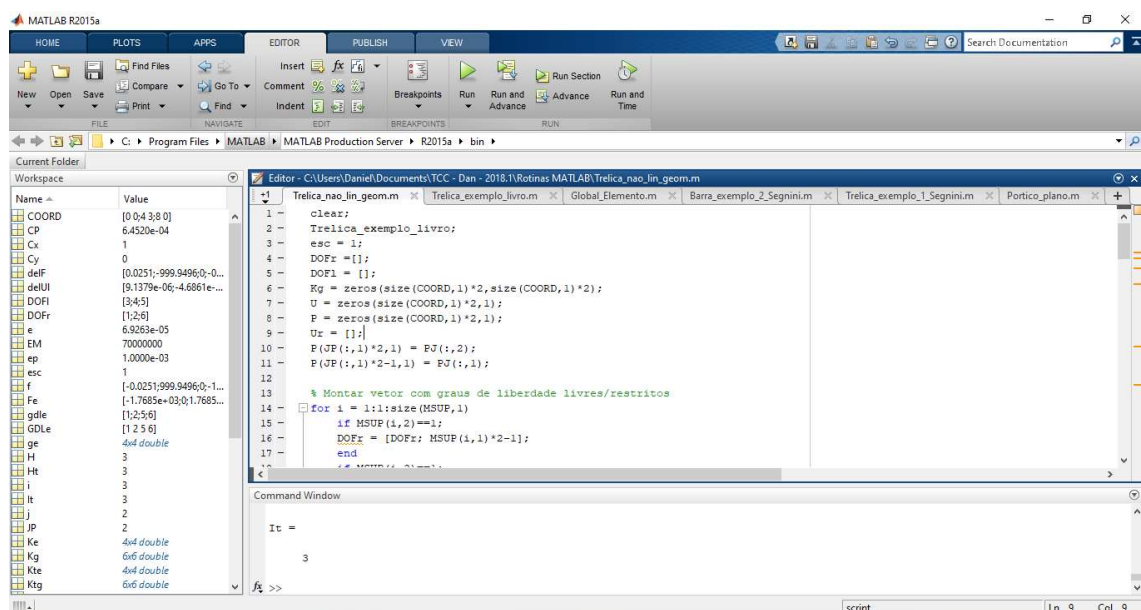
3 METODOLOGIA

Para aplicar o procedimento de análise descrito anteriormente, foi desenvolvido um código computacional na linguagem MATLAB com o auxílio do software MATLAB, cuja interface está mostrada na Figura 7.

O código trata do cálculo geometricamente não linear de treliças planas sujeitas a carregamentos concentrados nos nós. Para a análise, foi utilizado um processo incremental-iterativo, ou seja, foram implementados passos (ou incrementos) de carga para a obtenção de resultados mais expressivos sobre o comportamento das estruturas. Assim, para cada incremento de carga, o código utiliza o método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações não lineares e os resultados obtidos são utilizados no próximo incremento até que a carga final determinada seja alcançada.

O código tem como entrada um arquivo MATLAB (extensão .m) contendo as coordenadas dos nós, cargas aplicadas nos mesmos e as condições de apoio da treliça, além da conectividade (nós adjacentes), área da seção transversal e Módulo de Young de cada barra, o número desejado de passos de carga e a tolerância permitida (segundo o critério apresentado no Item 2.3) para a análise. O código fornece como saída os deslocamentos nodais e as reações de apoio da estrutura, além de elementos gráficos contendo desenhos da estrutura em suas configurações indeslocada e deslocada e os valores dos esforços axiais em cada barra.

Figura 7: Interface do software MATLAB



Fonte: elaborado pelo autor.

Para validação da implementação, vários exemplos de treliças foram numericamente testados e os resultados foram comparados com resultados disponíveis na bibliografia. Além disso, no exemplo 4 (último exemplo), os resultados foram comparados com os resultados de uma análise geometricamente linear. Como parâmetro de comparação, foram analisados os deslocamentos nodais da estrutura e as forças normais desenvolvidas em cada barra.

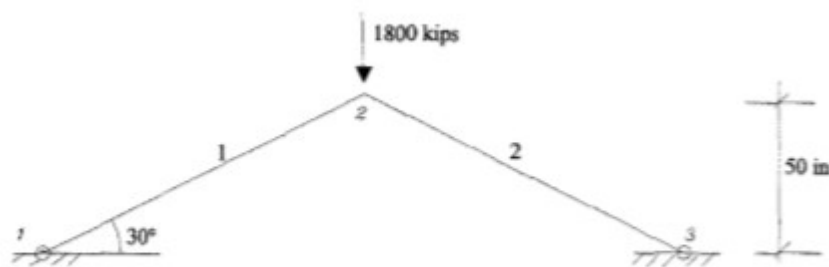
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste Item são apresentados alguns exemplos de treliças analisadas com a formulação geometricamente não linear. Estes exemplos foram encontrados na literatura referente ao assunto e utilizados para comparação com os resultados obtidos no presente trabalho através do código computacional desenvolvido. Assim, procurou-se a validação do código.

4.1 EXEMPLO 1 - TRELIÇA DE DUAS BARRAS

Este exemplo consiste em uma treliça plana com apenas duas barras iguais formando um ângulo de 30° com a horizontal. Tais barras são constituídas por um material elástico linear com módulo de Young de 30000 ksi (206,84 GPa) e possuem área de seção transversal de 1 in² ($6,4516 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$). A estrutura é sujeita a uma carga concentrada vertical para baixo de 1800 kips (8.006,8 kN) em seu nó intermediário. A Figura 8 a seguir representa um desenho esquemático da treliça em questão.

Figura 8: Exemplo 1 – Desenho esquemático



Fonte: Segnini, 2000.

Para a análise, foram utilizados nove passos de carga e uma tolerância $e=0,001$. O exemplo foi analisado por Segnini (2000) e para comparação de resultados, foi elaborada a Tabela 1 a seguir. As unidades de medidas utilizadas não estão de acordo com o Sistema Internacional, porém foram mantidas pois foram as unidades utilizadas por Segnini (2000) e o código desenvolvido neste trabalho funciona para qualquer sistema coerente de unidades.

Tabela 1: Exemplo 1 - Comparação de resultados

Passo de carga	Força no nó 2 (kips)	Deslocamento vertical do nó 2 (in)	
		Sales	Segnini
1	200	-1,376	-1,376
2	400	-2,850	-2,850
3	600	-4,448	-4,448
4	800	-6,207	-6,207
5	1000	-8,191	-8,190
6	1200	-10,515	-10,514
7	1400	-13,451	-13,450
8	1600	-18,145	-18,141
9	1800	-109,859	-109,858

Fonte: elaborado pelo autor.

Como pode ser verificado, os resultados obtidos para cada incremento de carga apenas diferiram levemente dos resultados obtidos por Segnini (2000) na terceira casa decimal.

Além disso, percebe-se uma grande diferença de deslocamentos entre o oitavo e o nono passos de carga. Isso ocorre devido ao efeito “snap-through” sofrido pela estrutura. Segundo Galishnikova, Dunaiski e Pahl (2009), se uma estrutura pode se deslocar de uma configuração “A” para uma configuração “B” sem que haja diferença no carregamento, a configuração “A” é chamada configuração singular da estrutura. O equilíbrio em “A” é instável se um deslocamento finito leva a uma redução na carga aplicada. A instabilidade pode ocorrer devido a não linearidades geométricas e físicas (do material). Se a singularidade em “A” é devida a não linearidade geométrica, o determinante da matriz de rigidez tangente (já com as condições de contorno impostas) na configuração “A” é nulo, ou seja, a matriz não é invertível. Se existe um caminho único para a continuação da análise a partir da configuração “A”, a instabilidade é chamada de “snap-through”. Se existe mais de um caminho possível, a singularidade é chamada de bifurcação.

Para a treliça em questão (formada por 2 barras idênticas), Kassimali (2012) desenvolveu as seguintes equações para o cálculo do deslocamento vertical para baixo crítico (que levaria à instabilidade) do nó intermediário e para o cálculo da carga externa aplicada necessária para manter a treliça em equilíbrio em uma configuração determinada:

$$\delta_{cr} = L \left[\sin \theta - \cos \theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \right] \quad (45)$$

$$P = 2EA \left[\sin \theta - \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L} \right) \sin \theta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L} \right) \sin \theta}} \right] \quad (46)$$

Onde:

P é carga vertical de cima para baixo aplicada no nó intermediário;

θ é o menor ângulo entre uma barra e a horizontal;

E é o Módulo de Young do material constituinte da barra;

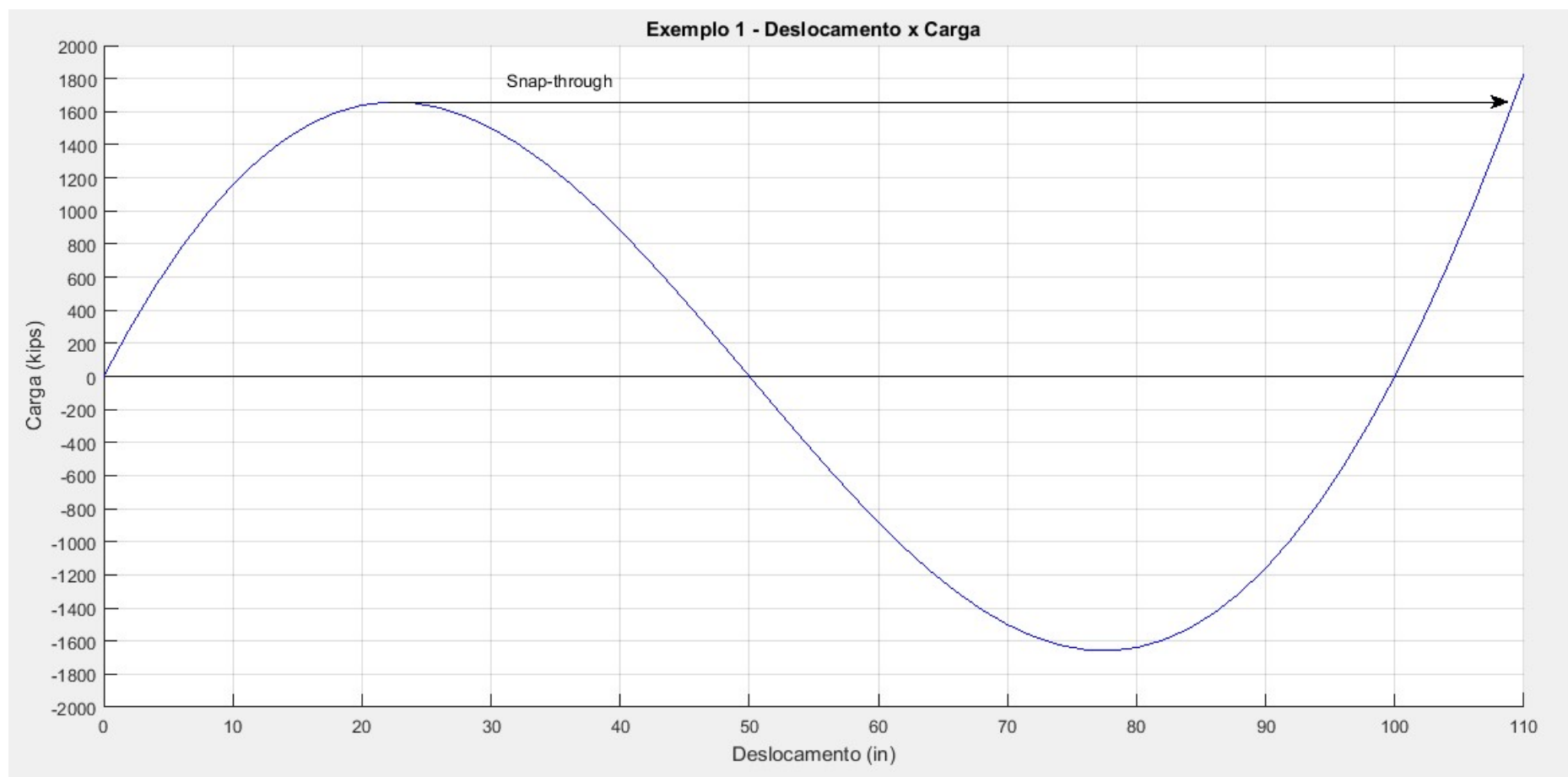
A é a área da seção transversal da barra;

L é o comprimento da barra.

Aplicando-se as equações (45) e (46) ao exemplo em questão, obtém-se $\delta_{cr} \cong 22,526 \text{ in}$ e $P_{cr} \cong 1659,03 \text{ kips}$. Além disso, a Figura 9 apresenta um gráfico de deslocamento por carga aplicada para a treliça do exemplo que permite um melhor entendimento do efeito “snap-through”.

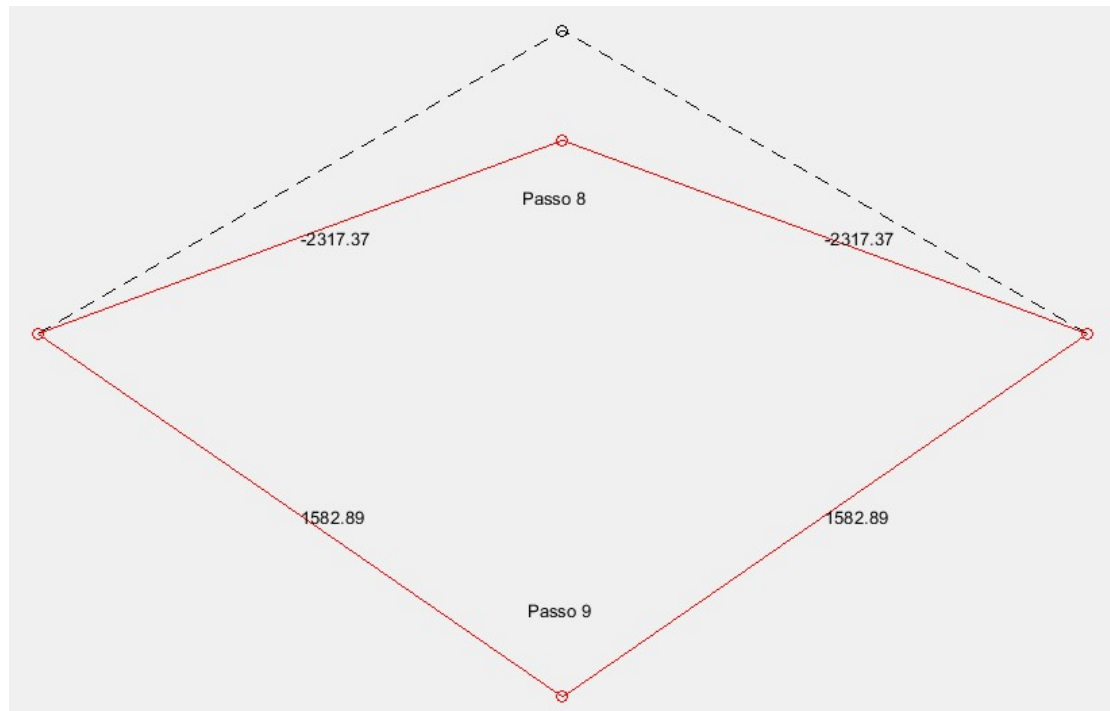
A Figura 10 representa as configurações indeslocada e deslocadas para os passos de carga 8 (1600 kips) e 9 (1800 kips) do exemplo em questão, incluindo os esforços axiais (em kips) em cada barra. Percebe-se que as barras que antes estavam comprimidas ficam tracionadas após o “snap-through”.

Figura 9: Exemplo 1 – Gráfico de deslocamento por carga aplicada



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 10: Exemplo 1 – Configurações indeslocada e deslocadas para passos de carga 8 e 9



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 9 apresenta a representação da Eq (46). Supondo-se um ensaio com controle de deslocamentos, a treliça apresenta diminuição da capacidade de carga após o ponto crítico, chegando a ser necessária a inversão do sentido do carregamento para manter o equilíbrio.

A simulação aqui descrita é feita com carregamento prescrito e monotônico. Assim, qualquer carga que ultrapasse a carga crítica (1659,03 kips) só encontrará solução com as barras da treliça abaixo da horizontal, haja vista o salto referido na Figura 9 como snap-trough.

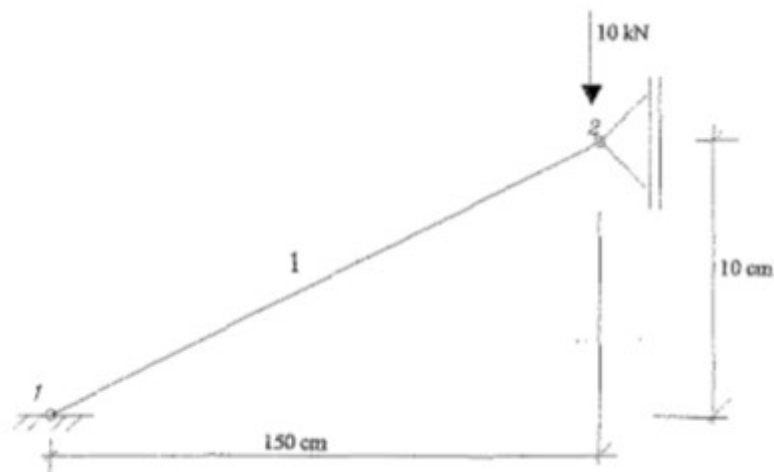
Vale salientar que no processo incremental-iterativo, a solução obtida para o passo de carga anterior é utilizada como tentativa inicial para o passo de carga seguinte. Como a solução para o passo de carga 8 está muito longe da solução para o passo seguinte, esse incremento precisou de 8 iterações para ser resolvido enquanto os demais passos de carga foram resolvidos com 4 iterações ou menos.

4.2 EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE UMA BARRA

Este exemplo consiste em uma treliça plana formada por uma única barra constituída por um material elástico linear com módulo de Young $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ e com área de seção transversal $A=6,526 \text{ cm}^2$. A estrutura é sujeita a uma carga concentrada vertical para baixo $P=10 \text{ kN}$ no nó 2. Para a análise foram utilizados dez passos de carga e uma tolerância $e=0,001$.

A Figura 11 abaixo representa um desenho esquemático da treliça em questão. Este exemplo foi analisado por Segnini (2000). Na Tabela 2 estão apresentados os resultados obtidos utilizando o código elaborado pelo autor deste trabalho e os resultados obtidos por Segnini (2000).

Figura 11: Exemplo 2 – Desenho esquemático



Fonte: Segnini, 2000.

Tabela 2: Exemplo 2 - Comparação de resultados

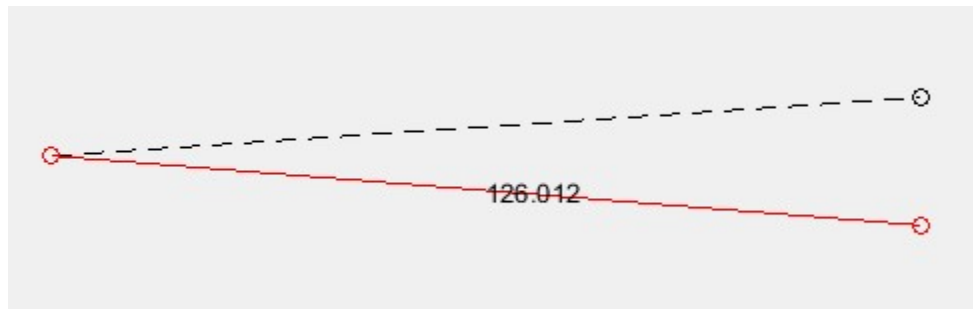
Passo de carga	Força no nó 2 (kN)	Deslocamento vertical do nó 2 (cm)	
		Sales	Segnini
1	1	-0,264	-0,264
2	2	-0,553	-0,553
3	3	-0,872	-0,872
4	4	-1,234	-1,234
5	5	-1,658	-1,658
6	6	-2,187	-2,187
7	7	-2,957	-2,957
8	8	-21,619	-2,902
9	9	-21,783	-21,783
10	10	-21,941	-21,941

Fonte: elaborado pelo autor.

Neste exemplo, observou-se que o oitavo passo de carga precisava de mais do que 25 iterações para convergir dentro da tolerância determinada (0,001) devido à grande diferença de deslocamento entre os sétimo e oitavo passos (ocorrência do efeito “snap-through”). Então, a efeito de estudo, removeu-se o limite do número de iterações de cada passo de carga. Como resultado, pôde-se observar que o oitavo passo de carga necessitou de 134 iterações para convergir dentro da tolerância determinada enquanto os demais passos necessitaram de 4 ou menos iterações. Além disso, exceto para o oitavo incremento de carga, os resultados foram idênticos. Porém, ao analisar-se a estrutura limitando o número de iterações a 25, os resultados obtidos foram todos idênticos aos de Segnini (2000), apesar de não haver convergência no oitavo passo de carga. Além disso, nos resultados de Segnini (2000), houve redução no deslocamento, em módulo, entre o sétimo e oitavo passos de carga, o que não condiz com o comportamento esperado para a estrutura em questão.

A Figura 12 a seguir apresenta as configurações indeslocada e deslocada com a carga total (10 kN) aplicada, incluindo os esforços axiais na barra em kN. O valor obtido para o esforço axial foi de 126,012 kN, idêntico ao valor obtido por Segnini (2000) de 126,01 kN.

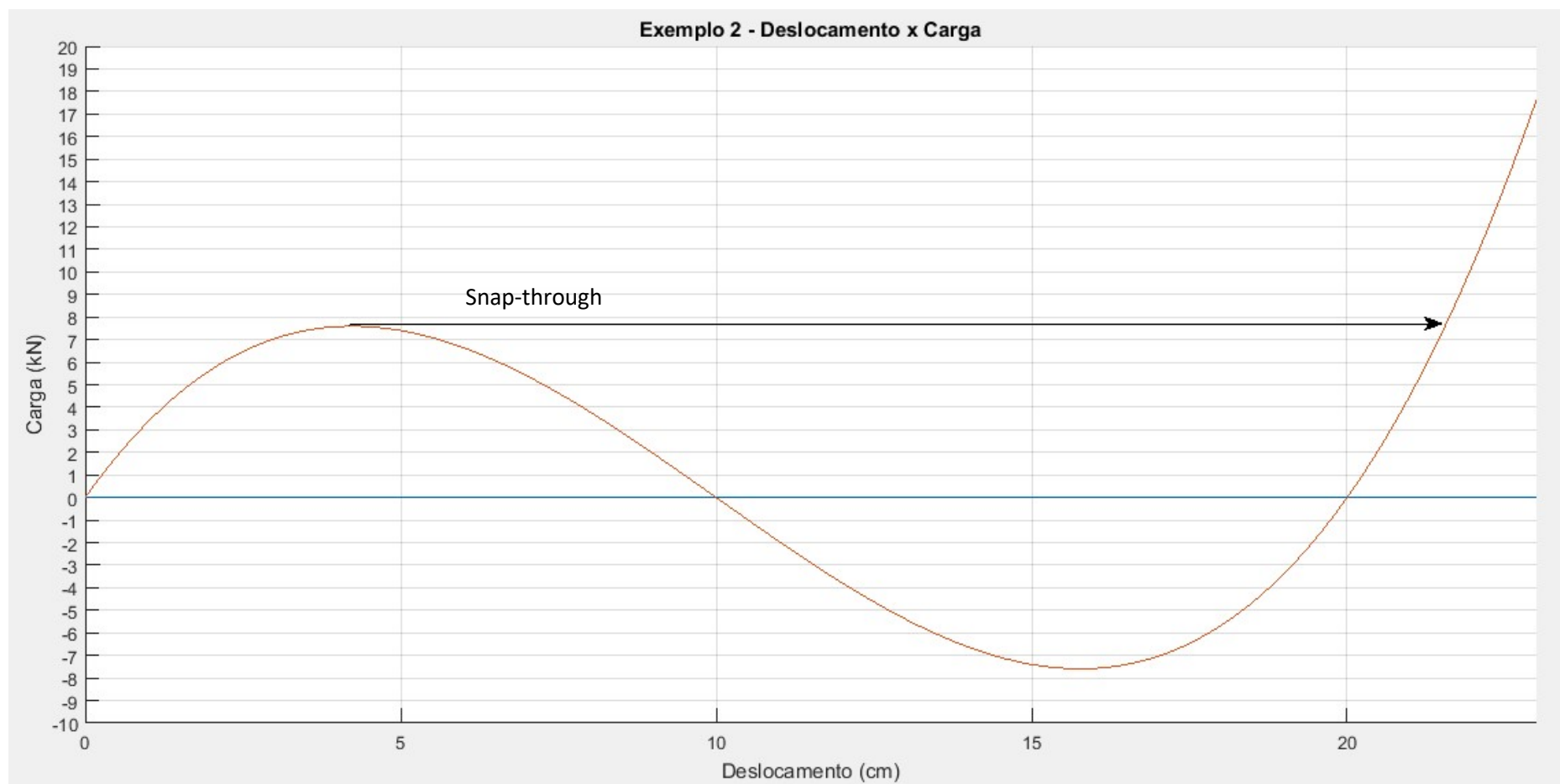
Figura 12: Exemplo 2 – Configurações indeslocada e deslocada final



Fonte: elaborado pelo autor.

Além disso, a Figura 13 apresenta um gráfico de deslocamento do único grau de liberdade livre da estrutura por carga aplicada para a treliça do exemplo, elaborado a partir da equação (17). Observa-se que o efeito “snap-through” ocorreu entre as cargas aplicadas de 7 e 8 kN, ou seja, no oitavo passo de carga, o que difere dos resultados encontrados por Segnini (2000), porém está de acordo com os resultados encontrados pelo autor deste trabalho.

Figura 13: Exemplo 2 – Gráfico de deslocamento por carga aplicada

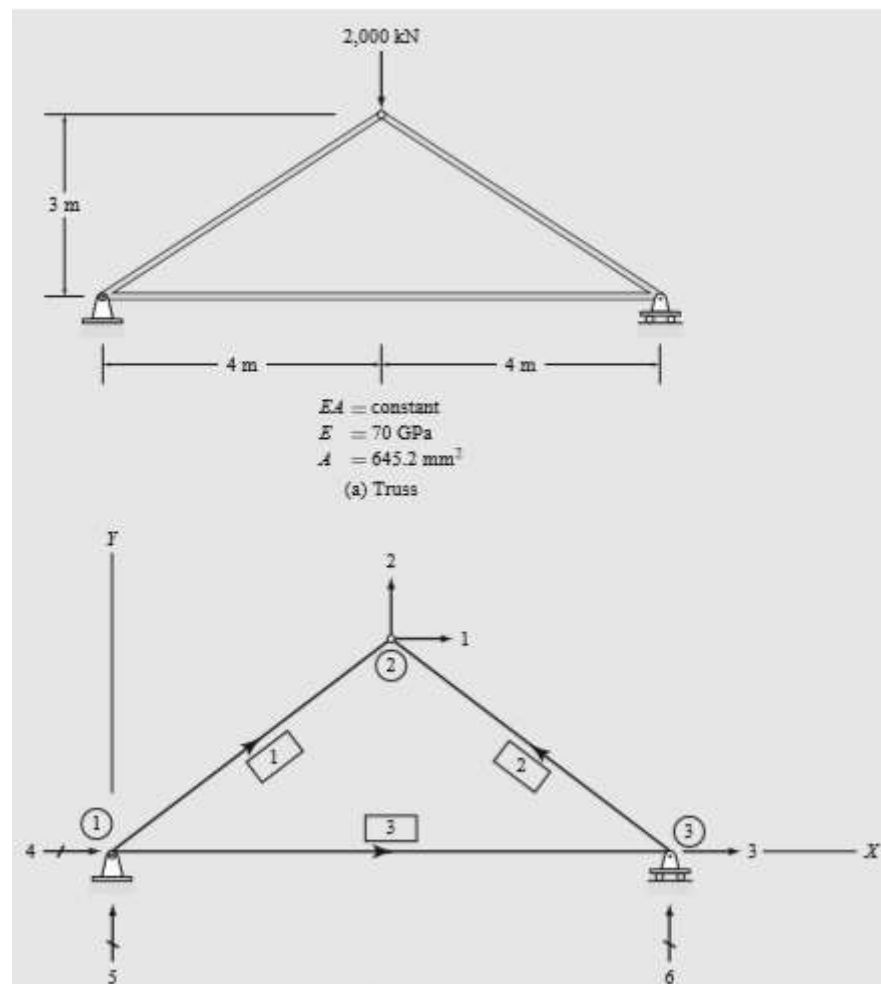


Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 EXEMPLO 3 - TRELIÇA DE TRÊS BARRAS

Este exemplo consiste em uma treliça plana formada por três barras. Tais barras são constituídas por um material elástico linear com módulo de Young $E=70$ GPa e possuem área de seção transversal $A=645,2$ mm². A estrutura é sujeita a uma carga concentrada vertical para baixo de 2000 kN no nó 2. A Figura 14 abaixo apresenta um desenho esquemático e o modelo analítico da treliça em questão.

Figura 14: Exemplo 3 – Desenho esquemático e modelo analítico



Fonte: Kassimali, 2012.

Para a análise, foram utilizados dez passos de carga e uma tolerância $e=0,001$. O exemplo foi analisado por Kassimali (2012) e para comparação de resultados, foi elaborada a

Tabela 3 a seguir contendo os deslocamentos finais em cada grau de liberdade livre. Observa-se que os resultados encontrados foram idênticos.

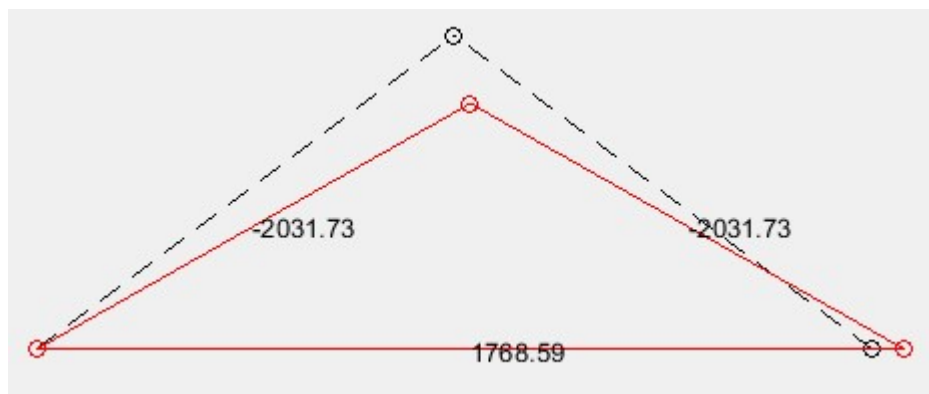
Tabela 3: Exemplo 3 - Comparação de resultados

Grau de liberdade	Deslocamento (m)	
	Sales	Kassimali
1	0,15664	0,15664
2	-0,64975	-0,64975
3	0,31327	0,31327

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 15 a seguir apresenta as configurações indeslocada e deslocada com a carga total (2000 kN) aplicada, incluindo os esforços axiais nas barras, em kN. Os valores obtidos para os esforços axiais foram idênticos aos obtidos por Kassimali (2012).

Figura 15: Exemplo 3 – Configurações indeslocada e deslocada final



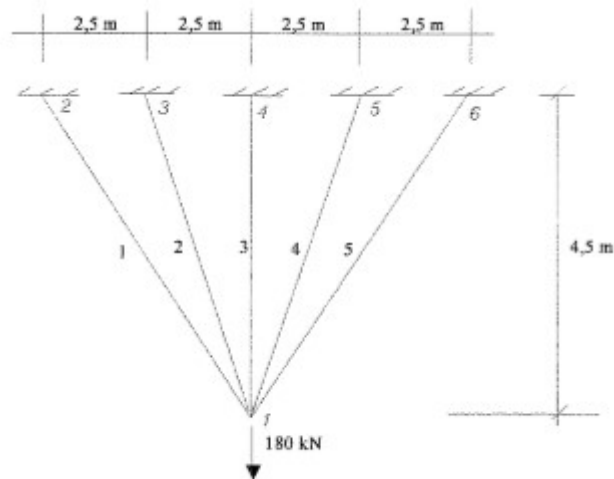
Fonte: elaborado pelo autor.

4.4 EXEMPLO 4 - TRELIÇA DE CINCO BARRAS

Este exemplo consiste em uma treliça plana formada por cinco barras. Tais barras são constituídas por um material elástico linear com módulo de Young $E=20$ GPa e possuem área

de seção transversal $A=0,001 \text{ m}^2$. A estrutura é sujeita a uma carga concentrada vertical para baixo $P=180 \text{ kN}$ nó 1. A Figura 16 a seguir apresenta um desenho esquemático da treliça.

Figura 16: Exemplo 4 – Desenho esquemático



Fonte: Segnini, 2000.

Para a análise, foram utilizados dez passos de carga e uma tolerância “e” de 0,001. O exemplo foi analisado por Segnini (2000). Nas tabelas a seguir estão apresentados os resultados obtidos utilizando o código elaborado pelo autor deste trabalho e os resultados obtidos por Segnini (2000) através de seu programa e do uso do programa Ansys. Na Tabela 4 estão apresentados os resultados de deslocamentos verticais do nó 1 e na Tabela 5 estão apresentados os resultados de forças axiais nas barras.

Tabela 4: Exemplo 4 - Comparação de resultados - Deslocamentos

Passo de carga	Força no nó 1 (kN)	Deslocamento vertical do nó 1 (m)		
		Sales	Segnini	Ansys
1	18	-0,001380	-0,001380	-0,001352
2	36	-0,002760	-0,002760	-0,002732
3	54	-0,004139	-0,004139	-0,004111
4	72	-0,005518	-0,005518	-0,005490
5	90	-0,006897	-0,006897	-0,006869
6	108	-0,008275	-0,008275	-0,008248
7	126	-0,009653	-0,009653	-0,009626
8	144	-0,011031	-0,011031	-0,011004
9	162	-0,012409	-0,012409	-0,012382
10	180	-0,013786	-0,013786	-0,013760

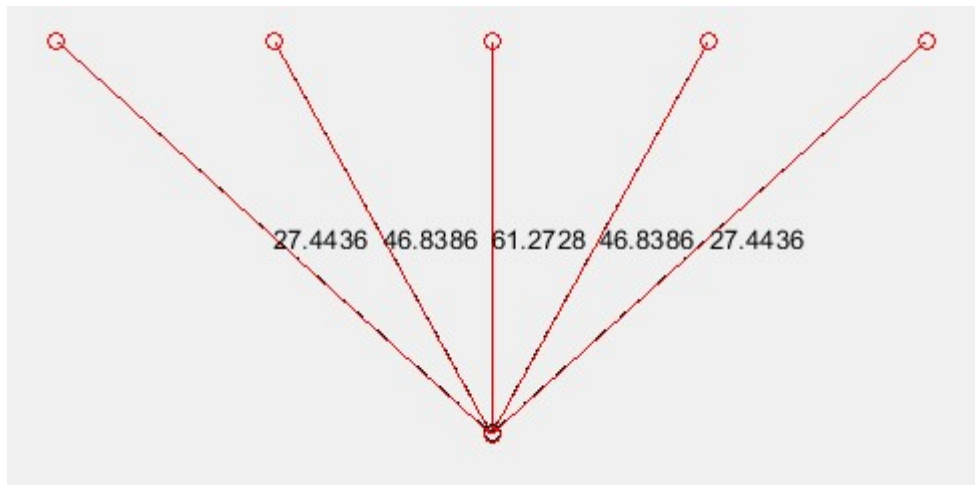
Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 5: Exemplo 4 - Comparação de resultados – Forças axiais

Elemento	Força Axial (kN)		
	Sales	Segnini	Ansys
1	27,4436	27,4436	27,4780
2	46,8386	46,8386	46,8330
3	61,2728	61,2728	61,2380
4	46,8386	46,8386	46,8330
5	27,4436	27,4436	27,4770

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que os valores obtidos no presente trabalho e por Segnini (2000) foram idênticos e próximos aos valores obtidos com o uso do programa Ansys. A Figura 17 a seguir apresenta as configurações indesejada e deslocada com a carga total (180 kN) aplicada, incluindo os esforços axiais na barra em kN. Observa-se que os deslocamentos foram pequenos em relação à dimensão da estrutura.

Figura 17: Exemplo 4 – Configurações indeslocada e deslocada final

Fonte: elaborado pelo autor.

Realizou-se, então, uma análise linear da estrutura para efeito de comparação de resultados através de uma pequena modificação no código elaborado pelo autor. O deslocamento vertical obtido no nó 1 foi de -0,013800 m, próximo ao encontrado nas análises geometricamente não lineares. Isso mostra a validade da simplificação por linearização para casos de pequenos deslocamentos. Além disso, as forças axiais nas barras obtidas na análise linear foram também próximas às obtidas na análise não linear, como pode ser visto na Tabela 6 abaixo.

Tabela 6: Exemplo 4 - Comparação de resultados com análise linear – Forças axiais

Elemento	Força Axial (kN)			
	Sales	Segnini	Ansys	Linear
1	27,4436	27,4436	27,4780	27,4481
2	46,8386	46,8386	46,8330	46,8690
3	61,2728	61,2728	61,2380	61,3347
4	46,8386	46,8386	46,8330	46,8690
5	27,4436	27,4436	27,4770	27,4481

Fonte: elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÕES

Com base na comparação entre os resultados obtidos através do código desenvolvido pelo autor e os resultados encontrados na bibliografia, concluiu-se que o código gerou resultados satisfatórios quanto aos deslocamentos nodais e forças axiais nas barras. Como pôde ser observado, não houve diferenças expressivas entre os resultados em nenhum caso examinado, exceto no oitavo passo de carga do exemplo 2, como já discutido.

Foi possível perceber a ocorrência do efeito de instabilidade conhecido como “snap-through” nos exemplos 1 e 2 e observar a influência da instabilidade sobre o número de iterações necessárias para a convergência da análise dentro do limite determinado. Concluiu-se também, a partir do exemplo 4, que a simplificação por linearização da análise apresentou resultados satisfatórios para o caso de pequenos deslocamentos.

Sugere-se, para futuros estudos, a utilização e comparação de diferentes métodos para solução de sistemas de equações não lineares como o método incremental, o método de Newton-Raphson modificado e o método de comprimento de arco para análise geometricamente não linear de treliças. Sugere-se também a realização de um estudo mais aprofundado sobre análise de estabilidade e singularidades e o desenvolvimento e aplicação de uma formulação geometricamente exata para treliças tridimensionais.

.

REFERÊNCIAS

- COOK, R. D.; MALKUS, D. S; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3^a ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- GALISHNIKOVA, V.; DUNAISKI, P.; PAHL, P. J. **Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames**. 1^a ed. Stellenbosch: SUN MeDIA, 2009.
- HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8^a ed. São Paulo: Pearson, 2013.
- KASSIMALI, A. **Matrix Analysis of Structures**. 2^a ed. Stamford: Cengage Learning, 2012.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas – Conceitos e Métodos Básicos**. 2^a ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MATLAB R2015a, MATHWORKS, 2015.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2^a ed. São Paulo: Pearson, 1996.
- SEGNINI, S. C. A. **Estudo Comparativo de Formulações para a Análise Não-Linear Geométrica de Treliças**. 2000. 129 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.