



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL - DEC

Otimização topológica aplicada ao problema de  
maximização da frequência natural

Por:

Sheyla Maurício Maia

São Cristóvão, 2021.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL - DEC

## Otimização topológica aplicada ao problema de maximização da frequência natural

*Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.*

*Edição revisada após a banca.*

**Sheyla Maurício Maia**

**Orientador: Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa**

São Cristóvão, 2021.

## Agradecimentos

À Deus, por todas as graças em minha vida e por ter me concedido força, coragem e fé para chegar ao final de mais um ciclo.

À minha mãe Luzinete, por ter tornado tudo isso possível, pelo exemplo de garra e retidão, pelo amor e generosidade de sempre, e por todo amor e cuidado com meus dois filhos.

Aos meus filhos, Yasmin e Rafael, por serem tão amáveis e encherem meu coração de orgulho e gratidão.

Ao meu pai, que apesar das falhas, nunca deixou faltar o pão de cada dia e pelo exemplo de honestidade e trabalho.

Ao professor Jorge Carvalho Costa, agradeço pela confiança, dedicação e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos, Thalyson e Fabiano, sem os quais não seria possível a conclusão deste objetivo.

Aos colegas Débora, Luís Alberto, Vinícius, pelos descontraídos momentos de estudo e compartilhamento de ideias.

Ao meu amigo Gabriel, pelo carinho e apoio nos momentos de ansiedade e incertezas.

Aos colegas de profissão, pela parceria e estímulo, a citar: Marcela Dória, Ana Luzia, Fernanda Quaranta, Jeferson Menezes, José Custódio, Fátima Rocha, Carlos Rubens, Flávio Ferreira, Emanuel Dantas e Oswaldo Fortes.

Aos meus alunos, do Centro de Excelência Santos Dumont, pelo carinho e pela confiança.

Aos professores da graduação, a citar: Fernando Ferro, Ângela Costa, Débora de Gois, Denise de Gois, Nilma Andrade, Émerson Figueiredo e demais professores, pelos valiosos ensinamentos.

Às professoras, Nilma Andrade e Jamile Tavares, que compuseram a banca examinadora.

*“A vida não é sobre alcançar objetivos. É o processo que importa. É sobre quem nos tornamos pelo caminho. É sobre o que aprendemos e como reagimos quando a vida pede paciência. É sobre a evolução que conquistamos quando nos curamos e nos libertamos de tudo que nos machuca e aprisiona. A vida é muito mais do que estar sempre ocupado, produzindo e se alimentando da sensação de que só seremos importante pelo ter. É sobre se encontrar, se reconhecer, ser, se tornar e, eventualmente, como consequência, manifestar no plano material tudo aquilo que na alma já vibra abundantemente.”*

*(Wandy Luz)*

## Resumo

O desenvolvimento de ferramentas computacionais possibilitou o avanço da otimização topológica aplicada a sistemas mecânicos na engenharia. O método ajusta o melhor leiaute de uma estrutura, distribuindo otimamente o material em um domínio de projeto. A aplicação do modelo SIMP (Material Isotrópico Sólido com Penalização, na sigla original em inglês) permite obter um leiaute bem definido e, dessa forma, possível de ser fabricado, uma vez que penaliza densidades intermediárias eliminando-as do resultado final. O modelo ainda utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretização espacial e no decorrer das iterações são avaliadas a função objetivo e as restrições formuladas no problema de otimização. Por não depender da geometria inicial, a solução de um problema de otimização topológica pode ser representada com um alto grau de complexidade geométrica. A otimização topológica exige certo nível de refinamento da malha de elementos finitos, o que pode ocasionar sub-regiões do domínio com aparência de um tabuleiro de xadrez. Visando tornar as soluções livres dessa instabilidade do tabuleiro de xadrez e da dependência de malha, emprega-se o filtro de sensibilidade, normalmente aplicado nas variáveis de projeto ou nos gradientes. Portanto, este trabalho tem como objetivo o estudo de otimização topológica para o caso dinâmico, aplicada a estruturas bidimensionais, apresentando um código em Matlab que implementa a técnica de otimização topológica por distribuição de material isotrópico aplicado a sistemas mecânicos sujeitos a vibração livre. Como demonstração da eficiência do algoritmo são apresentados exemplos de aplicação de otimização de vigas com diferentes condições de contorno.

**Palavras-chave:** Otimização topológica; dinâmica; SIMP

## Abstract

The development of computational tools made possible the advancement of topology optimization applied to mechanical engineering systems. The method adjusts the best layout of a structure, optimally distributing the material in a design domain. The application of the SIMP method (Solid Isotropic Material with Penalization) allows for a well-defined layout, thus possible for fabrication as it penalizes intermediate densities, eliminating them from the final result. The model uses the Finite Element Method (FEM) for spatial discretization and to evaluate the objective function, the restraints and the sensitivities through the iterations. Since it doesn't depend on the initial representation, the solution to a topology optimization problem can be represented with a high degree of geometric complexity. The topology optimization demands a certain level of refinement for the FE mesh, what may incur in sub-regions resembling a checkerboard pattern. Aiming towards eliminating this checkerboard instability and mesh dependency, a filter is used, either on the design variables or the sensitivities. Thus, this work aims at studying topology optimization for dynamic analysis of two-dimensional structures, presenting a Matlab cod that implements the topology optimization technique by distributing isotropic material applied to mechanical systems subject to free vibrations. As a demonstration of the efficiency of this algorithm, some numerical simulations of beams subject to different boundary conditions are presented.

**Keywords:** Topology optimization; dynamics; SIMP

# Lista de Figuras

1.1	Fluxograma geral de otimização estrutural topológica . . . . .	13
2.1	Processos de otimização: (a) Otimização dimensional; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica de uma estrutura típica . . . . .	19
2.2	Otimização topológica: (a) Domínio de projeto e condições de contorno; (b) solução com padrão xadrez (sem filtro de sensibilidade); (c) solução implementando filtro de sensibilidade. . . . .	23
2.3	(a) Malha discretizada em 600 elementos; (b) Malha discretizada em 5400 elementos. . . . .	24
2.4	Fluxograma de Otimização Topológica . . . . .	26
3.1	Discretização de uma viga 2D utilizando o MEF em uma malha de $nely \times nelx$ elementos . . . . .	28
3.2	Elemento finito retangular de 4 pontos nodais e 8 <i>dof</i> 's . . . . .	29
3.3	Função de interpolação . . . . .	31
4.1	Filtro de independência de malha . . . . .	38
4.2	Implementação no código do filtro de independência de malha . . . . .	38
4.3	Implementação no código do critério de otimalidade . . . . .	42
5.1	Leiaute com densidades intermediárias para uma viga bi-engastada . . . . .	43
5.2	Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga bi-engastada . . . . .	44
5.3	Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga bi-engastada . . . . .	44
5.4	Leiaute com densidades intermediárias para uma viga bi-engastada . . . . .	45
5.5	Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga bi-engastada . . . . .	45

5.6	Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga bi-engastada . . . . .	45
5.7	Leiaute com densidades intermediárias para uma viga apoiada em dois nós opostos . . . . .	46
5.8	Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga apoiada em dois nós opostos . . . . .	46
5.9	Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga apoiada em dois nós opostos . . . . .	46

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Objetivos . . . . .	14
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	14
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Otimização Topológica Estrutural</b>	<b>15</b>
2.1	Histórico . . . . .	15
2.2	Formulação de um problema de otimização estrutural . . . . .	16
2.2.1	Representação matemática de um problema de otimização estrutural	17
2.2.2	Classificação dos problemas de otimização estrutural . . . . .	18
2.2.3	Classificação dos métodos de otimização topológica . . . . .	20
2.3	Modelo SIMP . . . . .	21
2.3.1	Instabilidades numéricas . . . . .	22
2.3.1.1	Tabuleiro de xadrez . . . . .	22
2.3.1.2	Dependência de malha . . . . .	24
2.3.1.3	Mínimos locais . . . . .	25
2.3.2	Estrutura do código de Otimização Topológica . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos (MEF)</b>	<b>27</b>
3.1	Discretização de uma viga utilizando o método dos elementos finitos (MEF)	27
3.1.1	Matriz de rigidez elementar . . . . .	29
3.1.2	Matriz de massa elementar . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Aplicação de otimização topológica na maximização da frequência natural</b>	<b>35</b>
4.1	Vibrações Livres Não-Amortecidas . . . . .	35

4.1.1	Problema de otimização topológica de minimização de flexibilidade utilizando o MEF e o SIMP . . . . .	36
4.1.1.1	Restrições . . . . .	37
4.1.1.2	Restrições de volume de material (volfrac) . . . . .	37
4.1.2	Técnicas de filtragem e análise de sensibilidade . . . . .	37
4.1.2.1	Filtros de independência de malha . . . . .	38
4.1.2.2	Análise de sensibilidade através do gradiente . . . . .	39
4.2	Análise de sensibilidade . . . . .	39
4.3	Método iterativo de otimização . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Resultados e discussões</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>47</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A otimização estrutural busca fornecer o leiaute ótimo de uma estrutura que proporcione o melhor desempenho mecânico, satisfazendo as restrições impostas pelo modelo e critérios de projeto. A implementação de algoritmos computacionais favorece a produtividade na elaboração desses projetos, pois fornece soluções otimizadas em um tempo satisfatório atenuando cálculos de verificação exaustivos.

A formação de grandes centros urbanos tem motivado soluções de engenharia no sentido da verticalização. A evolução das técnicas e ferramentas computacionais de análise e dimensionamento estruturais aliada aos avanços na área de ciência dos materiais e técnicas construtivas, tem tornado possível a construção de estruturas cada vez mais altas, esbeltas e, portanto, mais flexíveis. Essas estruturas são vulneráveis à ocorrência de vibrações excessivas causadas por carregamentos dinâmicos, tais como terremotos, ventos, ondas, tráfego intenso, ocupação humana, entre outras (BENEVELI, 2002).

Cada vez mais, há uma busca pela concepção de arranjos estruturais eficientes, capazes de suportar ações que lhes são impostas com deslocamentos admissíveis. Pesquisas apontam o emprego de esforços no desenvolvimento de dispositivos de controle estrutural, especialmente na mitigação da resposta das edificações em relação aos ventos, aos sismos e às vibrações induzidas pelo homem. O desempenho sísmico das estruturas tem sido melhorado através da inclusão de elementos estruturais que elevam a rigidez do sistema.

O problema de otimização estrutural topológica consiste em determinar a melhor distribuição de material dentro de um domínio especificado de projeto. Essa distribuição de material ótima depende de uma função objetivo a ser extremizada e das restrições de projeto impostas. As variáveis de projeto (densidade, características geométricas da

microestrutura, etc), relacionadas à distribuição de material, são atualizadas de acordo com a resposta mecânica que se espera da estrutura com base em parâmetros como flexibilidade, frequências naturais, tensão, etc. Em contrapartida, o domínio de projeto é mantido fixo, limitado pelos pontos de apoio. Os pontos de apoio e carregamento são definidos pelas condições de contorno. Em síntese, o problema é como distribuir o material no interior de um espaço de projeto pré-definido sob determinada condição de contorno, de modo a extremizar (minimizar ou maximizar) a função objetivo e atender às restrições do modelo.

A Figura 1.1 mostra as etapas de um procedimento típico de otimização topológica. Inicialmente, uma estimativa é feita para as variáveis de projeto que definem o domínio. O domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos e é limitado pelas condições de contorno (restrições de deslocamento) e regiões de aplicação dos carregamentos. Faz-se uma análise de elementos finitos para o cálculo dos deslocamentos. Em seguida, calcula-se as sensibilidades (gradientes) das variáveis de projeto e inicia-se o processo de otimização que irá ajustar a melhor distribuição de material no domínio, de forma a extremizar a função objetivo especificada e então o procedimento é finalizado. Caso contrário, o processo é reiniciado com a atualização das variáveis de projeto, utilizando o passo e a direção de descida do algoritmo de otimização.

Impulsionados pelo avanço das técnicas de processamento computacional, diversos métodos de otimização topológica (OT) têm sido desenvolvidos com o auxílio do método dos elementos finitos (MEF). Na implementação numérica, o domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos. Pode-se, então, determinar a distribuição ótima das propriedades do material ao longo do domínio, de forma que os pontos materiais deste domínio possam ser caracterizados pela presença ou ausência de material. Portanto, assim como a forma da estrutura, a conectividade dos elementos também muda durante o processo de otimização topológica.

A abordagem material do método de otimização de leiaute foi proposto inicialmente por Bendsoe e Kikuchi (1988), considerando uma equação constitutiva homogeneizada que depende somente da densidade relativa do material. De acordo com Bendsoe (1989), essa distribuição ótima de material consiste em um problema binário (do tipo 0/1) indicando a ausência ou a presença de material num domínio de projeto. Sendo assim, o problema de otimização de leiaute pode ser tratado como um problema discreto que indica a ausência

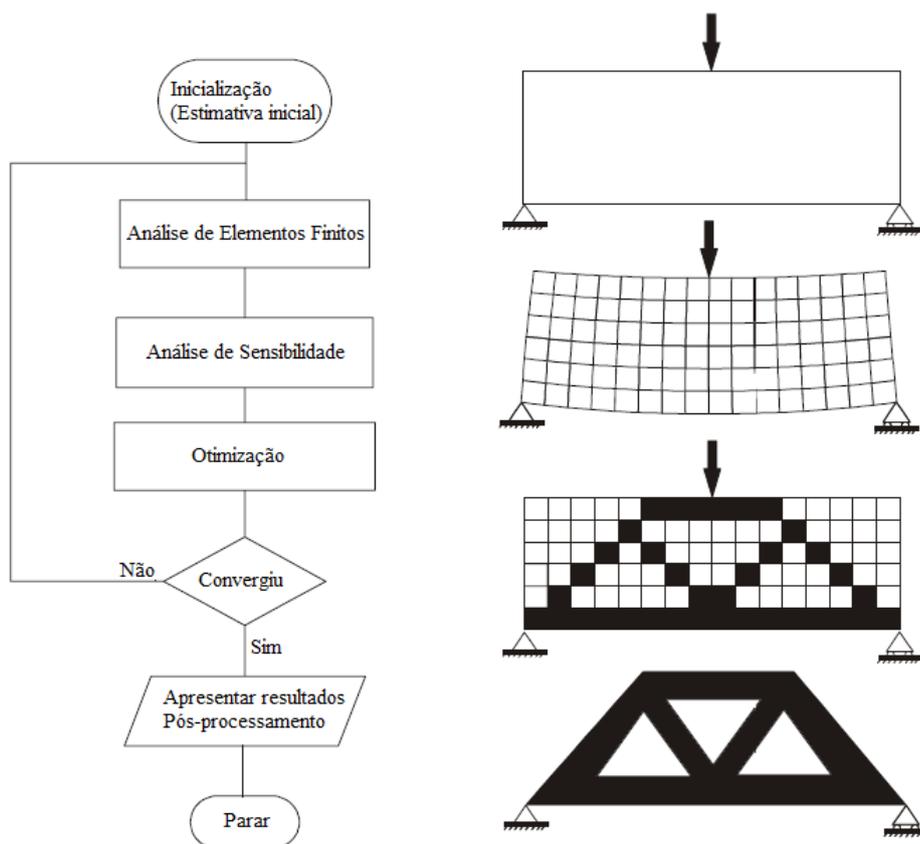


Figura 1.1: Fluxograma geral de otimização estrutural topológica  
 Fonte: Bahia (2005)

ou a presença de material. Entretanto, essa discretização do domínio torna a abordagem instável, conflito este contornado com o emprego de filtros no algoritmo.

Para estudar o método de otimização topológica aplicado na análise dinâmica da maximização da rigidez em elementos estruturais bidimensionais, foram utilizados como referência dois algoritmos, o código *topdynamicOC*, publicado no artigo científico intitulado "*Topology optimization of dynamic problems*" por MEIJBOOM (2003), e o código para problemas estáticos "*The Top99 line Matlab Code*", desenvolvido por SIGMUND (2001), um dos pioneiros neste assunto. O segundo usa o método dos elementos finitos em combinação com filtros de sensibilidade para ajustar uma solução ótima para a estrutura e encontra-se disponível em <https://www.topopt.mek.dtu.dk/Apps-and-software/A-99-line-topology-optimization-code-written-in-MATLAB>.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo implementar um algoritmo computacional de otimização topológica baseado na resposta dinâmica, por meio da ferramenta gráfica educacional MATLAB.

A formulação do modelo propõe a maximização da frequência natural crítica a fim de evitar o fenômeno de ressonância quando a estrutura estiver sujeita a baixas magnitudes de frequências de excitação.

Aplicando os conhecimentos introdutórios em elementos finitos isoparamétricos e otimização topológica, pretende-se adaptar o código para a resolução de problemas de maximização dos autovalores, associados às frequências naturais da estrutura, utilizando no algoritmo o modelo SIMP, critério de otimalidade e filtros de análise de processamento, visando obter resultados igualmente satisfatórios.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar a otimização topológica em estruturas com base no modelo dinâmico para diferentes condições de contorno;
- Validar a necessidade de filtros de sensibilidade;
- Analisar a influência dos parâmetros de entrada;
- Confrontar os leiautes finais de projeto obtidos após o processo iterativo com os presentes na literatura.

# Capítulo 2

## Otimização Topológica Estrutural

### 2.1 Histórico

A otimização estrutural é um tópico de interesse há mais de 100 anos. Um dos primeiros estudos refere-se a formulação de teoremas relativos ao design racional de estruturas por James Clerk Maxwell (1870), tendo ênfase na análise de pontes, estruturas de grande interesse na engenharia. Maxwell aplicou conceitos da teoria de elasticidade a problemas simples, a fim de estudar o risco de falha de uma ponte com a menor quantidade de material possível.

A ideia era, essencialmente, dado um carregamento atuando num domínio e os pontos onde esse domínio estaria apoiado (pontos de apoio da ponte, por exemplo), calcular o campo de tensões mecânicas principais usando teoria da elasticidade. As direções das tensões principais correspondem às direções onde não ocorrem tensões de cisalhamento, apenas tensões normais. Uma vez obtidas essas direções, Maxwell sugeriu de forma conceitual que a estrutura ótima, que utilizasse menos material, seria constituída de elementos de treliça alinhados com essas direções principais.

Essa solução veio mais tarde a ser reconhecida como a solução ótima, dado um carregamento único, para a estrutura com menor peso e máxima rigidez, reduzindo a quantidade de material necessária e, conseqüentemente, o custo associado à sua produção. Dessa forma, pode-se dizer que a otimização auxilia a evitar projetos com superdimensionamento.

Em 1904, Anthony Michell deu continuidade ao trabalho de Maxwell com suas estruturas que ainda hoje são referência na teoria moderna de otimização topológica. Ele

decidiu aplicar o método para o projeto de vários tipos de estruturas usando o critério de máxima rigidez com o menor volume de material. Michell projetou estruturas treliçadas nas quais buscava o menor peso observando as tensões nas barras para cada caso de carga. Seu princípio consiste em calcular o campo das principais isotensões. Para isso utiliza a teoria da elasticidade para o caso de uma força aplicada a um ponto de um domínio sujeita às restrições de deslocamento em outros pontos. Obtidas as linhas de isotensões principais, a ideia é alinhar as barras nas mesmas direções das tensões principais calculadas no domínio. Visto isso, a solução ótima seria onde os elementos estariam sujeitos apenas a tração e compressão, sem a existência de momento fletor.

Entretanto, os resultados obtidos por Michell foram considerados muito acadêmicos e sem aplicação prática, pois eram muito difíceis de serem construídos na época. Somente na década de 80, com a implementação de softwares baseados em otimização topológica, que se propõem a sintetizar a estrutura, os resultados de Michell passaram a ser reproduzidos.

Derivada das palavras gregas *topos*, “lugar” e *logos*, “estudo”, a otimização topológica é um método computacional de distribuição de material para a síntese de estruturas sem qualquer forma preestabelecida, concedendo ao método a liberdade para encontrar leiautes estruturais esbeltos e de alta confiabilidade.

Desde a otimização estrutural até as aplicações de mecânica estrutural, a otimização topológica (OT) tornou-se reconhecida como um campo de estudo após a publicação de Martin Philip Bendsoe e Noboru Kikuchi em 1988. Foi a partir dela que a aplicação sistemática do MEF e da programação matemática em problemas de otimização não-linear com restrições de desigualdade para projetos de estruturas de treliças e barras foi compreendida e viabilizada.

## **2.2 Formulação de um problema de otimização estrutural**

A otimização estrutural visa alcançar o melhor desempenho para uma estrutura ao mesmo tempo que todas as restrições impostas são satisfeitas. Semelhante a outros problemas de otimização, um problema de otimização estrutural pode ser definido pelo objetivo do problema descrito por uma função, um conjunto de restrições de projeto e as variáveis de projeto.

O problema de otimização estrutural pode ser formulado como maximizar (ou minimizar) a função objetivo sujeita às restrições. O objetivo é uma resposta escalar que direciona a otimização estrutural para a melhor configuração das variáveis independentes de projeto. As variáveis do projeto estrutural incluem pontos que definem características estruturais, parâmetros dimensionais e densidade do material em uma região estrutural (AREMU, 2013).

Um terceiro componente, as restrições, é usado para impor certos limites às variáveis de projeto. As restrições podem ser comportamentais ou geométricas (WANG, 2003). A seguir estão alguns exemplos de funções objetivo e restrições comportamentais:

- Volume ou peso da estrutura;
- Uma medida global de desempenho estrutural, como rigidez (ou flexibilidade), frequências naturais, cargas críticas de flambagem, etc.;
- Deslocamento máximo, tensão, deformação ou densidade de energia de deformação em toda a estrutura;
- Respostas locais da estrutura, como deslocamento, tensão ou deformação em um local específico na estrutura.

As restrições geométricas podem ser limitações de fabricação, tamanhos máximos e mínimos de membros e restrições físicas. Embora muitos dos itens mencionados possam ser usados como objetivo ou restrição, em problemas de engenharia é comum ter um único objetivo, com a maioria das medidas de desempenho implementadas como restrições no problema de otimização.

### 2.2.1 Representação matemática de um problema de otimização estrutural

Um problema de otimização na forma geral pode ser definido como procurar pelo máximo (ou mínimo) valor da função  $f(x)$ , na qual  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  é o vetor de variáveis no espaço de soluções  $\mathbb{R}^n$ , e expresso por (HAFTKA e GÜRDAL, 1992):

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar: } f(x) \\ \text{Sujeito a: } &g_j(x) = 0 \quad j = 1 : M \\ &h_k(x) \geq 0 \quad k = 1 : N \end{aligned}$$

onde  $g(x)$  e  $h(x)$  são as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, com  $M$  sendo o número de restrições de igualdade e  $N$  o número de restrições de desigualdade. O problema de otimização é dito linear se tanto a função objetivo quanto as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. Se a função objetivo ou uma das restrições for uma função não-linear das variáveis de projeto, a otimização é dita não-linear.

Em geral, as variáveis de projeto  $x$  incluem características da estrutura, como número de membros, seções transversais ou material. A função objetivo  $f(x)$ , a depender do método adotado, consiste ou em uma avaliação do custo da estrutura (problema de minimização) ou do desempenho da mesma (rigidez, vida útil, etc.). As restrições, em problemas estruturais, incluem critérios como equilíbrio, deslocamentos máximos e restrições de fabricação, além de critérios específicos de cada metodologia, como fração de volume desejada ou densidade mínima do material.

## 2.2.2 Classificação dos problemas de otimização estrutural

Problemas de otimização estrutural podem ser classificados de acordo com as seguintes categorias tradicionais, baseados nas variáveis de projeto, e que diferem em grau de complexidade:

- **Otimização paramétrica:** Na otimização paramétrica, as variáveis de projeto são parâmetros que definem as características da estrutura. A forma mais comum de otimização paramétrica é a otimização dimensional ("*size optimization*"), ilustrada na Figura 2.1(a), que envolve encontrar as dimensões ótimas em um projeto, enquanto sua forma é fixa em todo o processo de otimização. Isso pode incluir a área da seção transversal, momento de inércia, espessura, comprimento e largura do projeto (AREMU, 2013). Um problema comum de otimização dimensional é a estrutura de treliça na qual as variáveis de projeto são as áreas de seção transversal das barras da treliça.
- **Otimização de forma ("*shape optimization*"):** Neste tipo de otimização estrutural, Figura 2.1(b), a forma do contorno muda durante o processo de otimização, no entanto, o número de membros na estrutura e a maneira como eles são conectados permanecem fixos. Este tipo de otimização exige maior sofisticação na implementação numérica em comparação à otimização dimensional. A primeira

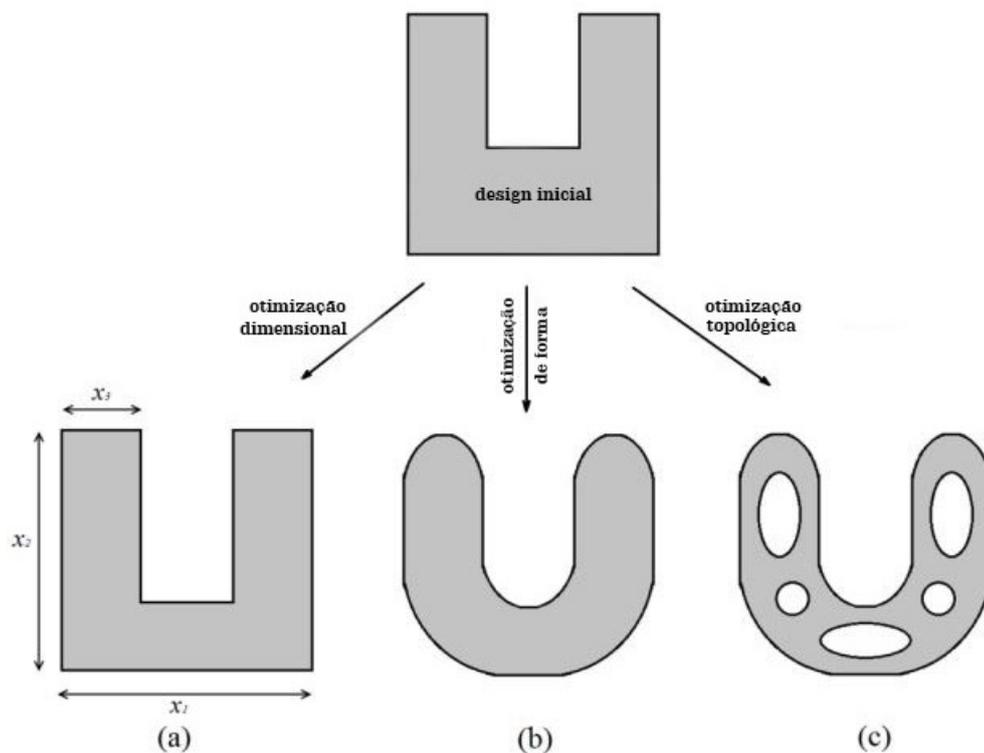


Figura 2.1: Processos de otimização: (a) Otimização dimensional; (b) Otimização de forma; (c) Otimização topológica de uma estrutura típica

Fonte: Brito (2018)

dificuldade é escolher variáveis de projeto adequadas para parametrizar as formas no espaço de projeto. Nessa abordagem, as variáveis de projeto são geralmente um conjunto de pontos na geometria que está sendo otimizada, e suas coordenadas cartesianas são iterativamente atualizadas até que um ótimo seja atingido.

- **Otimização de topologia:** Esse é o tipo de otimização estrutural, Figura 2.1(c), é menos restrito e mais desafiador, pois a distribuição de material dentro do domínio de projeto, incluindo a forma, o número e a localização dos "furos" e a conectividade do domínio de projeto pode mudar durante o processo de otimização. A otimização topológica é mais genérica do que a otimização de forma, pois permite uma distribuição de material mais acentuada no interior do domínio de projeto e a inclusão de novos "furos" no domínio. Deste modo, muda-se a conectividade do domínio e conseqüentemente a sua topologia. A otimização de forma não possibilita a inclusão de novos "furos" no domínio pois não altera a topologia da estrutura, apenas modifica o contorno.

### 2.2.3 Classificação dos métodos de otimização topológica

Três classificações diferentes serão apresentadas para métodos de otimização estrutural abordando a otimização de topologia de estruturas contínuas:

- **Métodos matemáticos e heurísticos**

Algumas abordagens de otimização de topologia têm uma rigorosa dedução matemática por trás delas, outros são mais intuitivos, baseados na observação, como os métodos heurísticos. Embora os métodos heurísticos tenham provado fornecer boas soluções, não há garantia de que uma solução sempre existirá implementando esses métodos.

- **Métodos baseados em gradientes e estocásticos**

Em geral, existem duas maneiras possíveis de encontrar o conjunto ideal de variáveis de projeto em um problema de otimização: uma usando uma abordagem baseada em gradiente e outra ao gerar valores aleatórios para as variáveis de projeto. Os métodos baseados em gradientes procuram o ótimo usando as derivadas da função objetivo e as restrições. Devido ao comportamento variacional, estes métodos são sensíveis à convergência para os ótimos locais. Por esta razão, pode ser benéfico o uso de métodos estocásticos de otimização de topologia, como o algoritmo genético, pois operam distribuindo variáveis aleatórias e aplicando a sobrevivência do mais forte. Porém, como o número de pontos a serem analisados depende fortemente do número de variáveis de projeto definidas nesses métodos, caso seja grande o número de variáveis, eles tornam-se computacionalmente custosos.

- **Métodos de distribuição de materiais e métodos de variação de contorno**

Os métodos de distribuição de material são aqueles que resolvem o problema de otimização estrutural distribuindo otimamente o material dentro do domínio de projeto e incluem o método de homogeneização, SIMP (solid isotropic material with penalization) e ESO (evolutionary structural optimization). Os métodos de distribuição de materiais são principalmente baseados em elementos, pois os algoritmos de otimização são integrados com a estrutura de elementos finitos do problema estrutural e os elementos, ou uma propriedade dos mesmos, são considerados como variáveis de projeto. Embora esse método forneça topologias

estruturalmente ótimas, uma desvantagem é obter uma geometria com contorno não suavizado pela representação por elementos finitos.

## 2.3 Modelo SIMP

O problema de Otimização Topológica (OT) pode ser definido como um problema de programação binária, onde “loops” iterativos de análises de elementos finitos, análises de sensibilidade e critérios de otimização são preenchidos para encontrar as porções ineficientes e, portanto, desnecessárias da estrutura. O termo "SIMP", que significa Material (ou Microestrutura) Isotrópico Sólido com Penalização, baseia sua representação topológica em discretizar o domínio de projeto em elementos (que posteriormente serão utilizados na análise como elementos finitos) e atribuir a cada um destes elementos uma variável que representa sua "densidade", a qual afetará o módulo de elasticidade efetivo daquele elemento. Para cada elemento, é atribuída uma densidade individual relativa, associada às propriedades físicas do material as quais são interpoladas entre 0 (vazio, ausência de material) e 1 (sólido). Ademais e são usados critérios de penalização para influenciar essa distribuição de material. Assim, a solução resultante pode ser representada não apenas com sólido e regiões vazias, mas com densidades intermediárias. Para um elemento,

$$E = \rho E_o,$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade efetivo para aquele elemento,  $\rho$  sua densidade e  $E_o$  o módulo de elasticidade do material sólido.

Para mover as densidades elementares intermediárias ( $0 < \rho < 1$ ) em direção a uma solução 0/1, uma abordagem de lei de potência é usada, penalizando as densidades intermediárias, como na equação:

$$\rho = x_e^p$$

onde  $p > 1$  é a potência de penalização e  $x_e$  é a variável de projeto associada à densidade do elemento  $e$ . Esta penalização é necessária já que densidades intermediárias geralmente não são fabricáveis. Logo, deseja-se respostas o mais próximo possível do nulo ou da unidade. Em análises dinâmicas, faz-se necessário também estimar a massa de um elemento como

$$M = \rho V_e = x_e^p V_e,$$

onde  $V_e$  é o volume de um elemento.

A otimização da topologia começa com uma suposição inicial da distribuição de densidade dentro do domínio de projeto. A seguir, um processo iterativo é utilizado para atualizar o valor das densidades a partir de uma análise de elementos finitos. Determina-se a função objetivo e sua sensibilidade às variáveis de projeto. Filtros podem ser aplicados para garantir a existência de soluções e evitar instabilidades numéricas, como o padrão xadrez.

O SIMP usa apenas uma variável de projeto por elemento, facilitando sua implementação na prática, em comparação com outros tipos de microestrutura, e gera soluções mais claras por causa da abordagem da lei de potência.

### **2.3.1 Instabilidades numéricas**

Os métodos de otimização de topologia construídos através de algoritmos que utilizam uma abordagem numérica de resolução exigem um controle adequado das técnicas utilizadas, a fim de evitar ou contornar complicações que podem comprometer o resultado numérico da distribuição de material. Em 1998, Sigmund e Petersson (1998) já comentavam sobre as instabilidades numéricas como tabuleiro de xadrez e dependência de malha. Este é um tópico que ainda hoje desperta interesse e fomenta investigação científica.

#### **2.3.1.1 Tabuleiro de xadrez**

Uma instabilidade comum que ocorre em otimização topológica baseada em elementos, tais como SIMP, homogeneização, etc, é o padrão de tabuleiro de xadrez, isto é, a formação de elementos alternados sólidos e vazios na topologia de maneira similar a um tabuleiro de xadrez. A Figura 2.2 mostra soluções convergentes da otimização topológica de uma placa em balanço com e sem a implementação de um esquema de filtro de sensibilidade.

Diaz e Sigmund (1995) estudaram problemas, de elasticidade bidimensional, com o objetivo de minimizar a flexibilidade e com restrição de quantidade de material disponível. No estudo, eles comprovaram que a discretização com elementos finitos retangulares bilineares isoparamétricos de 4 nós conduzia a padrões de tabuleiro de xadrez. E ainda, comparando a rigidez da configuração do tabuleiro de xadrez com a distribuída

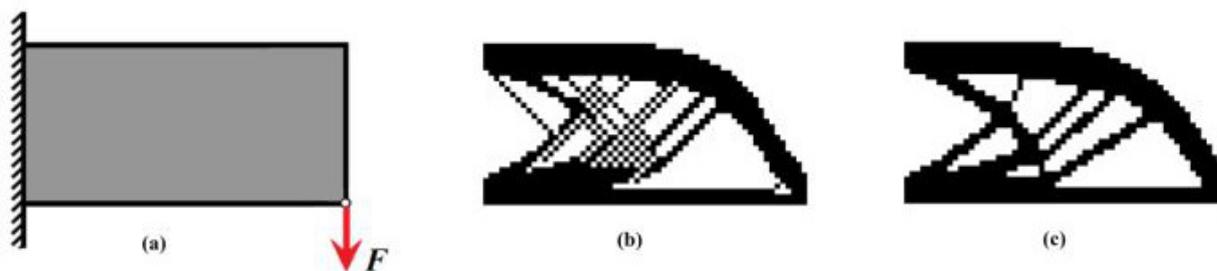


Figura 2.2: Otimização topológica: (a) Domínio de projeto e condições de contorno (b) solução com padrão xadrez (sem filtro de sensibilidade) (c) solução implementando filtro de sensibilidade.

Fonte: Aremu (2013)

uniformemente, descobriram que as estruturas com um padrão xadrez tinham valores artificialmente elevados de rigidez, não representando uma distribuição real de material. A instabilidade ocorre pois o elemento finito utilizado, o Q4, apresenta interpolação linear para o campo de deslocamentos sendo considerado elemento de baixa ordem para a análise de elementos finitos. Os autores ressaltam que a utilização de elementos com um maior número de graus de liberdade, como o elemento Q9, elimina a instabilidade numérica do tabuleiro de xadrez. Entretanto, o custo de processamento computacional aumenta razoavelmente, uma vez que a interpolação agora é dada por funções não-lineares, além de aumentar o número de graus de liberdade, o que aumenta a ordem do sistema de equações a ser resolvido.

Várias abordagens têm sido sugeridas para evitar a instabilidade do tabuleiro de xadrez, por exemplo, a aplicação de um operador como filtro, numa fase de pós-processamento para suavizar a configuração de tabuleiro de xadrez (BENDSOE; DIAZ e KIKUCHI, 1993), outro exemplo é o uso de elementos finitos de ordem superior desde que o expoente de penalização no método SIMP seja pequeno o suficiente (SIGMUND e PETERSSON, 1998), ou ainda, a aplicação da restrição dos gradientes locais na análise do comportamento variável do campo de densidades (BENDSOE e SIGMUND, 2003). Entretanto, a técnica mais difundida para evitar a instabilidade do tabuleiro de xadrez é o filtro de sensibilidade proposto por Sigmund (2001). Essa técnica consiste em calcular a derivada da função objetivo em relação à variável de projeto e aplicá-la na análise da sensibilidade, evitando variações bruscas para o campo de densidades e sem aumentar demasiadamente o custo de processamento computacional.

Uma extensão deste esquema também foi proposta para evitar a dependência de

malha. Neste, a sensibilidade de um elemento é modificada pela média ponderada das sensibilidades dos elementos em uma vizinhança fixa de raio mínimo  $r_{min}$ , conforme será explicada mais adiante.

### 2.3.1.2 Dependência de malha

Em otimização, a dependência de malha refere-se ao problema de obter soluções qualitativamente diferentes ao modificar a malha, como visto na Figura 2.3. Quando não são aplicadas técnicas que contornam essa instabilidade, à medida que a malha de elementos finitos é refinada, soluções mais detalhadas e qualitativamente diferentes são apresentadas, gerando diferentes soluções ótimas para o mesmo problema com duas malhas distintas, evidenciando assim a dependência de malha.



Figura 2.3: (a) Malha discretizada em 600 elementos; (b) Malha discretizada em 5400 elementos.

Fonte: Sigmund e Petersson (1998, p. 70)

Sigmund e Petersson (1998) dividem a dependência de malha em duas categorias: obtenção de soluções ótimas distintas com o mesmo valor da função objetivo como efeito das diferentes possibilidades de discretizações do domínio pelo método dos elementos finitos; e obtenção de topologias mais complexas à medida que a malha é refinada com o aumento de células vazias. O refinamento da malha visa obter maior nitidez e uma melhor definição dos contornos, no entanto, refinar uma malha em um problema de otimização topológica pode aumentar a sua complexidade (AREMU, 2013). Um tratamento para reduzir o espaço de modelos admissíveis e conseqüentemente ter um problema independente da malha é incluir no problema alguma restrição local ou global sobre a variação no espaço. Esta inclusão pode ser feita através da adição de restrições (de perímetro, dos gradientes locais, etc) de forma a reduzir o espaço de parâmetros, ou através da aplicação de filtros durante a implementação como o filtro de independência de malha.

### 2.3.1.3 Mínimos locais

Problemas de otimização não convexos caracterizam-se pela existência de muitos mínimos locais levando a diferentes soluções para o mesmo problema quando são utilizadas estimativas iniciais diversas para as variáveis e diferentes parâmetros dos algoritmos de otimização (BENDSOE e SIGMUND, 2003). Nesse caso, apenas é possível assegurar a convergência para pontos estacionários, que não necessariamente são mínimos globais, contrário ao que ocorre em problemas convexos, em que a prova de convergência dos algoritmos funciona (SIGMUND e PETERSSON, 1998). Independentemente da abordagem usada para otimização de topologia, as únicas formulações de otimização que produzem um design 0/1 são não-convexas e sujeitas a convergir para um ótimo local. No entanto, é comum usar um método de continuação para evitar mínimos locais, ver, por exemplo, Sigmund e Petersson (1998).

Neste trabalho, em relação aos mínimos locais, não foi adotado nenhum método de continuação, tendo em vista que resultados obtidos através da aplicação do filtro de sensibilidade juntamente com o modelo SIMP foram satisfatórios.

## 2.3.2 Estrutura do código de Otimização Topológica

A otimização da topologia começa com uma suposição inicial da distribuição de densidade dentro do domínio de projeto. Em seguida, uma análise de elementos finitos é realizada para avaliar a função objetivo e a sensibilidade. Um filtro é aplicado às sensibilidades para evitar instabilidades numéricas, como o padrão xadrez (SIGMUND, 2001). Elementos em cinza, com valores de densidade entre 0 e 1, devem ser evitados e portanto sua representação é penalizada, movendo as densidades intermediárias em direção a uma solução binária (material/vazio). A seguir, os valores das variáveis de projeto (densidades) são atualizados de acordo com as sensibilidades e de forma a obedecer às restrições. O processo é repetido até que se obtenha convergência. A Figura 2.4 apresenta o fluxograma do processo de otimização topológica.

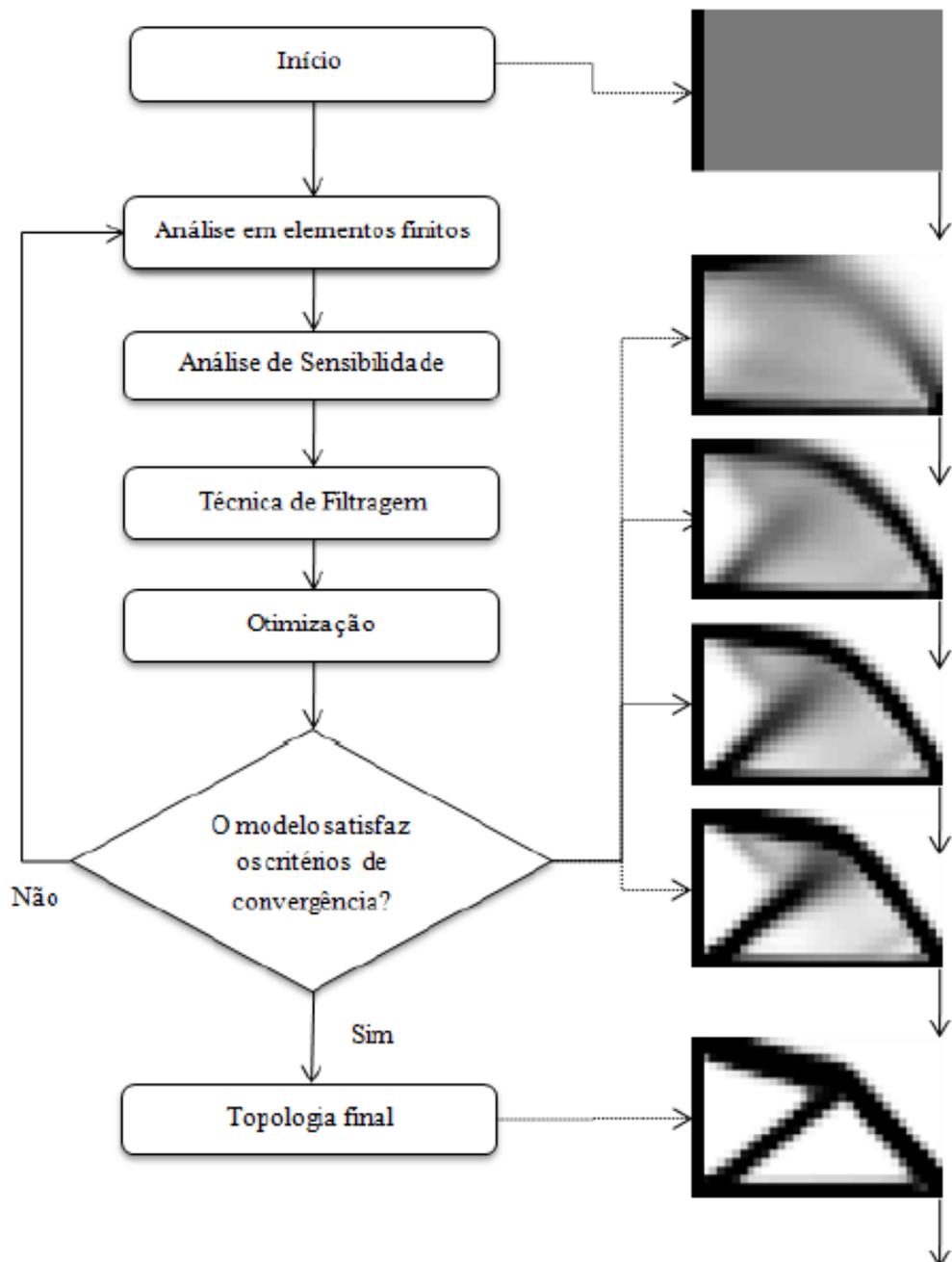


Figura 2.4: Fluxograma de Otimização Topológica  
 Fonte: Oliveira (2016)

# Capítulo 3

## Método dos Elementos Finitos (MEF)

### 3.1 Discretização de uma viga utilizando o método dos elementos finitos (MEF)

O MEF é um método numérico, utilizado para a discretização de meios contínuos. Segundo Soriano (2009), ele vem sendo amplamente utilizado na discretização de problemas de Mecânica do Contínuo e mais especificamente de Mecânica dos Sólidos Deformáveis, uma vez que ele possibilita a modelagem de estruturas com geometrias diversas, carregamentos e condições de contorno gerais. Conforme afirma Akin (2005), na engenharia moderna é muito difícil encontrar um projeto que não necessite de algum tipo de cálculo que envolva o MEF.

A ideia do MEF é encontrar a solução de um problema complicado através da substituição desse problema por um mais simples (RAO, 2005). Aproxima-se a solução de um modelo contínuo pela solução de um modelo discreto, isto é, parte-se de um problema de valor de contorno e inicial, cujo comportamento é descrito por um sistema de equações diferenciais, e substitui-se esse sistema por um sistema de equações algébricas, que permite descrever o comportamento aproximado da estrutura, simplificando consideravelmente a solução. Segundo Cook *et al.* (2002), para o desenvolvimento do MEF é necessário seguir alguns procedimentos:

1. Dividir a estrutura em elementos finitos, gerando a malha;
2. Formular as propriedades de cada elemento finito (EF);
3. Realizar a montagem das matrizes e vetores globais da estrutura;

4. Aplicar os carregamentos prescritos;
5. Especificar os deslocamentos nodais prescritos;
6. Resolver simultaneamente as equações algébricas lineares para determinar os deslocamentos nodais;
7. Calcular as deformações e tensões do elemento.

A Figura 3.1 mostra a discretização de uma viga utilizando o MEF. À esquerda, a representação de uma viga bi-apoiada no domínio bidimensional  $\Omega$ , com condição geométrica e mecânica de contorno definidas, descrevendo o problema contínuo, e à direita, tem-se o problema discretizado em uma malha de 6 subdomínios finitos quadrilaterais bilineares, interligados por pontos nodais localizados nos vértices dos elementos. Ainda para o caso discreto é interessante observar que, somente em alguns pontos nodais são atribuídas as condições geométrica e mecânica de contorno.

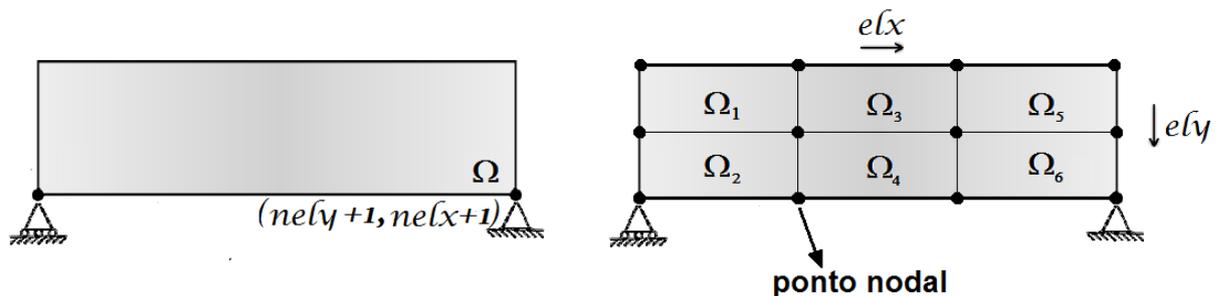


Figura 3.1: Discretização de uma viga 2D utilizando o MEF em uma malha de  $nel\gamma \times nelx$  elementos

Fonte: Autora (2021)

O elemento finito empregado na discretização, relativo a um sistema de coordenadas cartesianas  $(x; y)$ , tem origem no seu centróide e quatro pontos nodais posicionados em seus vértices numerados de 1 a 4 no sentido horário, conforme ilustrado na Figura 3.2. Cada ponto nodal possui coordenadas  $(x; y)$ , as quais referem-se a um sistema de coordenadas locais do elemento e a deslocamentos nodais  $u_{2k-1}$  e  $u_{2k}$ , nas direções dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. Logo, cada EF possui 8 graus de liberdade (GDL's ou *dof's*).

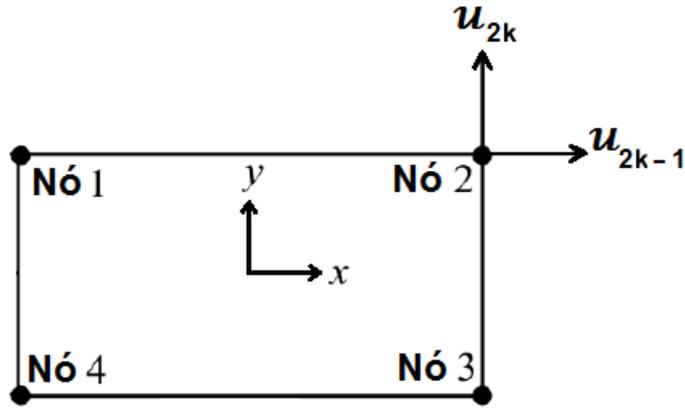


Figura 3.2: Elemento finito retangular de 4 pontos nodais e 8 *dof*'s  
 Fonte: Adaptada de Chiesa (2016)

### 3.1.1 Matriz de rigidez elementar

Admite-se que o sólido apresenta a propriedade de isotropia, isto é, as propriedades elásticas são as mesmas, independente da direção (TIMOSHEKO; GOODIER, 1951). Em decorrência da Lei de Hooke, que descreve na mecânica de meios contínuos as relações entre tensões e deformações de um material elástico, como também, do efeito de Poisson, a matriz de rigidez ( $8 \times 8$ ), do elemento quadrilátero, obtida analiticamente e implementada no código de OT de Sigmund (2000), é expressa na forma matricial pela equação:

$$K_e = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot k$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material sólido linear e homogêneo,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $K_e$  é válida para um elemento de dimensões unitárias.  $k$  é uma matriz definida por:

$$k = \begin{pmatrix} k(1) & k(2) & k(3) & k(4) & k(5) & k(6) & k(7) & k(8) \\ k(2) & k(1) & k(8) & k(7) & k(6) & k(5) & k(4) & k(3) \\ k(3) & k(8) & k(1) & k(6) & k(7) & k(4) & k(5) & k(2) \\ k(4) & k(7) & k(6) & k(1) & k(8) & k(3) & k(2) & k(5) \\ k(5) & k(6) & k(7) & k(8) & k(1) & k(2) & k(3) & k(4) \\ k(6) & k(5) & k(4) & k(3) & k(2) & k(1) & k(8) & k(7) \\ k(7) & k(4) & k(5) & k(2) & k(3) & k(8) & k(1) & k(6) \\ k(8) & k(3) & k(2) & k(5) & k(4) & k(7) & k(6) & k(1) \end{pmatrix}$$

cujos coeficientes são obtidos através das equações empíricas:

$$\begin{aligned}
 k(1) &= \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & k(2) &= \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} \\
 k(3) &= -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & k(4) &= -\frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8} \\
 k(5) &= -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & k(6) &= -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} \\
 k(7) &= \frac{\nu}{6} & k(8) &= \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8}
 \end{aligned}$$

Como a matriz auxiliar  $k$  deve ser obrigatoriamente definida positiva (possui todos os autovalores maiores do que zero), tem-se as seguintes propriedades para os coeficientes elásticos  $E$  e  $\nu$ :

$$\begin{aligned}
 E &> 0 \\
 -1 &< \nu < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Neste trabalho adotaremos  $\nu = 0.3$  e  $E = 1$ .

### 3.1.2 Matriz de massa elementar

O tipo de elemento finito adotado na aplicação de otimização topológica é o isoparamétrico de quatro nós, portanto parte-se desse mesmo elemento para a construção da matriz de massa elementar.

A ideia básica do MEF é a obtenção de uma solução aproximada para o problema contínuo e sua formulação parte do princípio de que o vetor do campo de deslocamentos, para cada EF, é dado em função dos deslocamentos nodais  $u_{2k}$  e  $u_{2k-1}$  e das funções de interpolação local  $N_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , de modo que:

$$u(x, y) = N_j U_e$$

onde  $N$  é a a matriz linha das funções de interpolação e  $U$  é o vetor de deslocamentos nodais do EF. As funções de forma, ou de interpolação, satisfazem a propriedade da função delta de Kronecker, ou seja, cada função de interpolação  $N_j$  aplicada ao  $k$ -ésimo ponto nodal assume valor unitário nele próprio e se anula nos demais pontos nodais (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; AKIN, 2005).

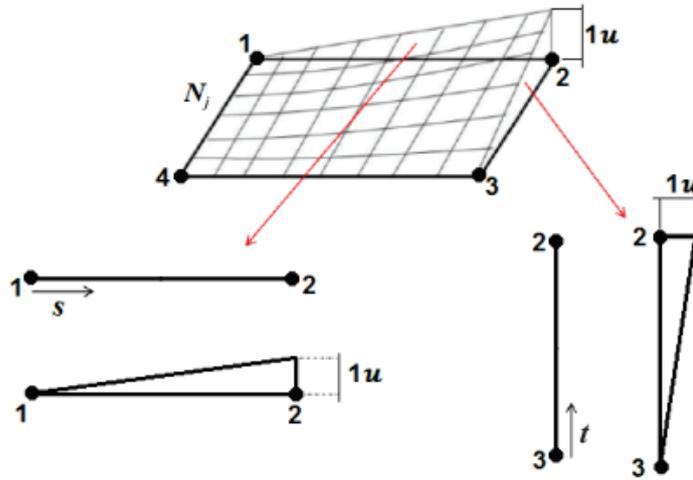


Figura 3.3: Função de interpolação  
 Fonte: Adaptada de Soriano (2009)

Segundo Kim e Sankar (2008), as funções de forma, ou de interpolação, do elemento quadrilátero isoparamétrico, mostradas na Figura 3.3, podem ser definidas por:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) & N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)
 \end{aligned}$$

Observe que as funções de interpolação acima são produtos de polinômios lineares unidimensionais, o que segundo Cook *et al.* (2002) caracteriza a bilinearidade do elemento sendo possível verificar que são lineares no contorno do elemento e quadráticas no interior, Figura 3.3.

Assim, o vetor posição  $\vec{u}(x, y)$  de qualquer ponto no interior do elemento é determinado em função das correspondentes componentes horizontal e vertical da posição de cada nó do elemento:

$$\vec{u}_x(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{u}_y(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

onde os vetores  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  representam a posição, na direção horizontal e vertical respectivamente, de um ponto interno ao elemento e  $x_i$  e  $y_j$ , para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , as coordenadas de cada nó do elemento finito.

A matriz de massa elementar é definida pela equação (NASCIMENTO, 2005):

$$M_{ij}^e = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i^* N_j^* |J| \, ds dt$$

e, ainda,

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}$$

onde  $|J|$  representa o Jacobiano e  $N^*$  é dado por:

$$N^* = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainda de acordo com Nascimento (2005), admitindo-se as seguintes restrições para o elemento quadrilátero de 4 nós:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 & y_1 &= y_2 \\ x_2 &= x_3 & y_4 &= y_3 \\ x_2 &= x_1 + d & y_4 &= y_1 + a \end{aligned}$$

onde  $a$  e  $d$  são parâmetros que limitam as dimensões do elemento de malha. Segue, por substituição do Jacobiano e das funções de forma da definição da matriz de massa, que:

$$\begin{aligned}
M_{11}^e &= \frac{ad}{9}\rho & M_{35}^e &= M_{53}^e = \frac{ad}{18}\rho \\
M_{13}^e &= M_{31}^e = \frac{ad}{18}\rho & M_{37}^e &= M_{73}^e = \frac{ad}{36}\rho \\
M_{15}^e &= M_{51}^e = \frac{ad}{36}\rho & M_{55}^e &= \frac{ad}{9}\rho \\
M_{17}^e &= M_{71}^e = \frac{ad}{18}\rho & M_{57}^e &= M_{75}^e = \frac{ad}{18}\rho \\
M_{33}^e &= \frac{ad}{9}\rho & M_{77}^e &= \frac{ad}{9}\rho
\end{aligned}$$

Atribue-se aos demais elementos da matriz o valor nulo. Segundo Meijboom (2003), define-se por matriz de massa elementar consistente, a matriz  $M_C^e$  representada a seguir:

$$M_C^e = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

onde  $n$  é o número de elementos usados na discretização. A matriz  $M_C^e$  é dita consistente por ser obtida a partir da funções de forma interpoladoras. Uma forma aproximada para descrever a massa de um elemento é dividir igualmente esta massa entre os 4 nós, sem levar em consideração os termos cruzados. Para tal, é utilizada uma matriz de massa diagonal, dita agrupada (*lumped*), dada por

$$M_L^e = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \cdot I_8.$$

onde  $I_8$  é a matriz identidade de ordem 8 e  $n$  corresponde ao número de elementos da malha ( $n_{elx} \times n_{ely}$ ).

Durante a implementação do código, observa-se que o uso de uma matriz de massa formada por uma combinação linear da matriz consistente com a matriz agrupada impede variações bruscas da densidade do elemento  $x_e$  na medida que a matriz de massa é atualizada e, portanto, aumenta a sensibilidade da variável de projeto à matriz de rigidez

em concordância com o objetivo proposto neste estudo. Portanto, a matriz de massa do elemento pode ser obtida conforme a seguinte equação:

$$M^e = \beta M_c^e + (1 - \beta) M_l^e$$

# Capítulo 4

## Aplicação de otimização topológica na maximização da frequência natural

### 4.1 Vibrações Livres Não-Amortecidas

Uma das aplicações da OT é a minimização ou maximização de autovalores para vibrações livres. Problemas de autovalor desempenham um papel fundamental na análise dinâmica estrutural e estão diretamente relacionados com as frequências naturais de vibração de um elemento estrutural. As frequências naturais de vibração são muito importantes, pois representam características dinâmicas como a capacidade de absorver vibrações (BELBLIDIA e BULMAN, 2001). Além disso, estruturas com alta frequência natural tendem a ser razoavelmente rígidas para todo tipo de carregamento. Portanto, maximizar um determinado autovalor é equivalente a maximizar a frequência de vibração relacionada a ele, em Hertz ( $Hz$ ), ou a frequência angular, em ciclos. A equação diferencial que modela um sistema de vibração livre sem amortecimento é:

$$F = M\ddot{U} + KU = 0$$

onde  $M$  e  $K$  são respectivamente as matrizes de massa e rigidez globais. Admitindo uma solução da forma  $U = ue^{\omega ti}$ , onde  $u$  é o vetor do modo de vibração, e substituindo a derivada de segunda ordem  $\ddot{U} = (-\omega^2)ue^{\omega ti}$  na equação de equilíbrio obtem-se:

$$M(-\omega^2)ue^{\omega ti} + Kue^{\omega ti} = 0$$

Rearranjando os termos da equação de equilíbrio dinâmico e aproveitando que  $e^{\omega t_i} \neq 0$ , chegamos a

$$(K - \lambda M)u = 0.$$

A equação acima representa um problema de autovalores, ou valores próprios. A solução tem a forma de pares  $(\lambda_i, u_i)$  onde  $\lambda_i$  é um autovalor (representante do quadrado de uma frequência natural de vibração) e  $u_i$  é o autovetor associado, que representa o modo de vibração. De forma geral, existe um número de pares de autovetor e autovalor igual ao número de graus de liberdade do problema.

O problema de otimização é maximizar a menor frequência de vibração, representada por seu quadrado  $\lambda_1 = \omega_1^2$ . Em algumas análises, emprega-se também a segunda menor frequência de vibração.

#### 4.1.1 Problema de otimização topológica de minimização de flexibilidade utilizando o MEF e o SIMP

O problema de otimização topológica utilizando a abordagem do MEF e o método SIMP, onde o objetivo é minimizar a flexibilidade dinâmica  $W(x)$ , isto é, maximizar o menor autovalor  $\lambda_1$ , sujeito a uma fração de volume final  $V(x)$ , pode ser declarado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar: } W(x) = \lambda_1$$

$$\text{Sujeito a: } (k_i - \lambda_i m_i)u_i = 0$$

$$k_i = u_i^T K u_i$$

$$m_i = u_i^T M u_i$$

$$\frac{V(x)}{V_0} \geq V_f$$

$$0 < x_{min} \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, n$$

onde  $k_i$  e  $m_i$  são escalares globais que medem a energia de deformação interna e energia cinética associadas a cada modo de vibração,  $x_e$  é o vetor de densidade de projeto (atualizado a cada iteração),  $V_0$  e  $V_f$  denotam, nessa ordem, o volume do domínio de projeto e a fração de volume prescrita (definida no código como dado de entrada em

"volfrac"),  $n$  é o número de elementos da malha ( $n = nelx \times nely$ ) e  $x_{min}$  é uma densidade relativa mínima não nula, geralmente usada para os elementos vazios para evitar a singularidade.

#### 4.1.1.1 Restrições

As matrizes globais  $K$  e  $M$ , respectivamente de rigidez e massa, podem ser definidas por:

$$K = \sum_{e=1}^n (x_e)^p K_e$$

$$M = \sum_{e=1}^n (x_e) M_e$$

onde  $K_e$  e  $M_e$  são respectivamente as matrizes de rigidez e de massa do elemento e  $p > 1$  um fator de penalidade empregado como solução das densidades intermediárias.

A forma mais eficiente de contornar as soluções em escala de cinza é utilizar técnicas que penalizam as densidades intermediárias, como o modelo SIMP, que relaciona a densidade do elemento com a propriedade de rigidez do material através de uma função de interpolação penalizadora.

#### 4.1.1.2 Restrições de volume de material (volfrac)

A única restrição ativa para o problema com relação ao volume e sua correspondente sensibilidade são:

$$V = \sum_{e=1}^n x_e V_e \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dx_e} = V_e$$

### 4.1.2 Técnicas de filtragem e análise de sensibilidade

Sigmund e Petersson (1998) mostram que vários métodos podem ser utilizados a fim de garantir a independência da malha e diminuir a instabilidade de tabuleiro de xadrez, contudo, cada método apresenta seus prós e contras, de forma que, para cada problema, deve-se avaliar qual é a melhor alternativa. Dentre estes métodos estão as técnicas de filtragem e a análise de sensibilidade.

### 4.1.2.1 Filtros de independência de malha

Este filtro proposto por Sigmund (1994) modifica a sensibilidade de projeto em relação à densidade de um elemento específico baseado em uma média ponderada da sensibilidade dos elementos em uma vizinhança fixa.

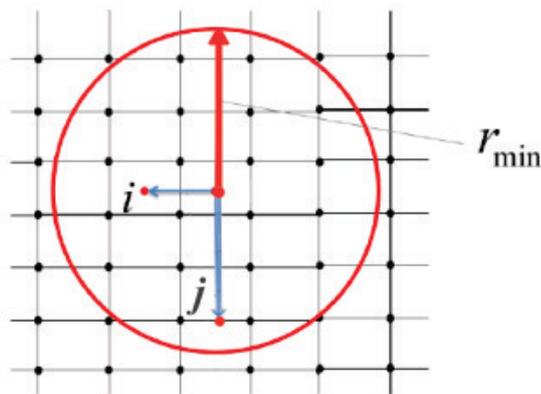


Figura 4.1: Filtro de independência de malha

Fonte: Adaptada de Chiesa (2016)

A vantagem desse filtro é não impor restrições extras ao problema de OT, portanto, gera pouco custo computacional e é muito simples de implementar, comparado a outras abordagens. A Figura 4.2 mostra a implementação do filtro de independência de malha no código de OT:

```
129 %%%%%%%%% MESH-INDEPENDENCY FILTER %%%%%%%%%
130 function [duoutn]=check(nelx,nely,rmin,x,duout)
131     duoutn=zeros(nely,nelx);
132     for i = 1:nelx
133         for j = 1:nely
134             sum=0.0;
135             for k = max(i-floor(rmin),1):min(i+floor(rmin),nelx) % index in x-dir (grid)
136                 for l = max(j-floor(rmin),1):min(j+floor(rmin),nely) % index in y-dir (grid)
137                     fac = rmin-sqrt((i-k)^2+(j-l)^2); % factor to multiply x with
138                     sum = sum+max(0,fac);
139                     duoutn(j,i) = duoutn(j,i) + max(0,fac)*x(1,k)*duout(1,k);
140                 end
141             end
142             duoutn(j,i) = duoutn(j,i)/(x(j,i)*sum);
143         end
144     end
```

Figura 4.2: Implementação no código do filtro de independência de malha

Fonte: Meijboom (2003)

#### 4.1.2.2 Análise de sensibilidade através do gradiente

A análise de sensibilidade através do gradiente consiste no cálculo da derivada da função objetivo ou de restrição em relação às variáveis de projeto. Este método é empregado visando impedir variações bruscas da variável de projeto de domínio, garantindo o fechamento do espaço solução. A prova da existência, a convergência de elementos finitos e a implementação de um esquema introduzindo restrição de gradiente local foi feita por Sigmund e Petersson (1998). A prova da convergência implica que instabilidades de tabuleiro e outras anomalias tornar-se-ão fracas ou serão eliminadas, nesta fase de pós-processamento. A desvantagem deste método, porém, é o seu alto custo computacional, visto que a imposição de novas restrições ao problema de otimização acrescenta variáveis ao modelo.

## 4.2 Análise de sensibilidade

O processo de otimização requer o cálculo da derivada da função objetivo  $W$  com relação às variáveis de projeto  $x_e$ . A obtenção dessas derivadas (ou sensibilidades) chama-se análise de sensibilidade. No problema dinâmico, inicia-se com a equação de equilíbrio dinâmico explicitada para o primeiro modo e frequência de vibração.

$$(K - \lambda_1 M)u_1 = 0$$

Derivando-se implicitamente em relação à densidade  $x_e$  de um elemento, obtém-se

$$\left( \frac{dK}{dx_e} - \frac{d\lambda_1}{dx_e} M - \lambda_1 \frac{dM}{dx_e} \right) u_1 + (K - \lambda_1 M) \frac{u_1}{dx_e} = 0.$$

Pré-multiplicando todos os termos por  $u_1^T$ , chega-se a

$$u_1^T \left( \frac{dK}{dx_e} - \frac{d\lambda_1}{dx_e} M - \lambda_1 \frac{dM}{dx_e} \right) u_1 + u_1^T (K - \lambda_1 M) \frac{u_1}{dx_e} = 0.$$

Devido à simetria das matrizes de rigidez e massa, e devido à equação de equilíbrio dinâmico, o segundo termo da última equação se anula. A sensibilidade desejada é obtida ao isolar-se o termo  $\frac{d\lambda_1}{dx_e}$ .

$$\frac{d\lambda_1}{dx_e} = \frac{u_1^T \left( \frac{dK}{dx_e} + \lambda_1 \frac{dM}{dx_e} \right) u_1}{u_1^T M u_1}$$

No cálculo da sensibilidade acima, fazem-se necessárias as derivadas das matrizes de rigidez e massa em relação à densidade de um elemento. Ambas podem ser obtidas a partir da discretização por elementos finitos. Para a rigidez, toma-se a derivada de

$$K = \sum_e K_e = \sum_e x_e^p K_o$$

$$\frac{dK}{dx_e} = p x_e^{p-1} K_o.$$

De forma similar, para a massa,

$$M = \sum_e x_e M_o, \quad \frac{dM}{dx_e} = M_o.$$

Então, a sensibilidade da função objetivo em relação a uma das variáveis de projeto pode ser calculada por

$$s_e = \frac{d\lambda_1}{dx_e} = \frac{u_{1,e}^T (p x_e^{p-1} K_o + \lambda_1 M_o) u_{1,e}}{u_1^T M u_1},$$

onde  $u_{1,e}$  são os deslocamentos do primeiro modo de vibração correspondentes ao elemento em questão, obtidos a partir da resolução do sistema das equações de equilíbrio. A restrição implícita  $KU = F$  é utilizada para calcular o vetor de deslocamentos nodais  $e$ , por isso, não está explícita no código.

### 4.3 Método iterativo de otimização

Posto o problema de otimização, sua solução inicia com a formulação Lagrangeana a fim de associar as restrições, especificamente a restrição de volume máximo, à função objetivo (ARORA, 2016). Para otimização topológica de problemas dinâmicos, tomando um multiplicador de Lagrange  $\eta$ , o funcional Lagrangeano pode ser expresso por

$$L(x, \eta) = \lambda_1(x) - \eta (V(x) - V_f),$$

e a condição de estacionariedade é

$$\frac{dL(x, \eta)}{dx_e} = 0; \quad \frac{dL(x, \eta)}{d\eta} = 0.$$

A segunda condição expressa a restrição de volume e a primeira leva a

$$\frac{dL(x,\eta)}{dx} = \frac{d\lambda_1}{dx_e}(x) - \frac{d\eta}{dx_e}(V(x) - V_f) - \eta \left( \frac{dV(x)}{dx_e} \right) = 0.$$

O ponto ótimo  $x_e^*$ , que reúne as densidades mínimas, pode estar na fronteira (igualdade da restrição de volume) ou no domínio (com o volume estritamente menor que a restrição). Para o segundo caso,

$$V(x) < V_f; \quad \eta = 0; \quad \frac{d\lambda_1}{dx_e} = 0;$$

e, para o primeiro,

$$V(x) = V_f; \quad \eta > 0; \quad \frac{d\lambda_1}{dx_e}(x) - \eta V_e = 0.$$

A derivada que aparece na equação anterior reflete a sensibilidade da função objetivo, expressa na seção anterior. As variáveis de projeto podem, então, ser atualizadas usando um esquema baseado no critério de otimalidade (MEIJBOOM, 2003):

$$x_{k+1}^e = B_k^e x_k^e,$$

onde

$$B_k^e = \frac{s_e(x_k)}{\eta V_e}.$$

Para limitar a variação de  $x_e$  em uma iteração, as novas densidades serão limitadas por um valor  $m$  tal que  $(x_k - m) < x_{k+1} < (x_k + m)$ , além precisar permanecer entre uma densidade mínima e a unitária  $x_{min} < x_{k+1} < 1$ .

Também para suavizar a evolução dos valores das variáveis, o coeficiente  $B_k^e$  é amortecido ao ser elevado a um potência  $\mu$ . Então, a evolução da variável de projeto é descrita por

$$x_{k+1}^e = \begin{cases} x_{nova}^e = B_k^e x_k^e \\ \max(x_{min}, x_k^e - m, x_{nova}^e) \\ \min(x_{max}, x_k^e + m, x_{nova}^e) \end{cases}$$

Tendo em mente que as novas densidades precisam manter a restrição de volume e dependem do multiplicador de Lagrange  $\eta$ , este pode ser determinado a partir da restrição de volume

$$V(x_{k+1}) - V_f = 0$$

pelo método da bissecção.

O algoritmo de bissecção é inicializado com valores arbitrários para os limites superior e inferior dos multiplicadores de Lagrange. O intervalo que limita o multiplicador de Lagrange é dividido ao meio sucessivamente até que esteja dentro do critério de convergência, Figura 4.3.

```

116      %%%%%%%%%%% OPTIMALITY CRITERIA UPDATE %%%%%%%%%%%
117      function [xnew]=OC(nelx,nely,x,volfrac,dw)
118      -   l1 = 0; l2 = 100000; move = 0.2;
119      -   while (l2-l1 > 1e-4)
120      -       lmid = 0.5*(l2+l1);
121      -       xnew = max(0.001,max(x-move,min(1.,min(x+move,x.*sqrt(max(0,-dw)./lmid)))));
122      -       if sum(sum(xnew)) - volfrac*nelx*nely > 0;
123      -           l1 = lmid;
124      -       else
125      -           l2 = lmid;
126      -       end
127      -   end

```

Figura 4.3: Implementação no código do critério de otimalidade

Fonte: Meijboom (2003)

# Capítulo 5

## Resultados e discussões

A função objetivo a ser otimizada maximiza os autovalores do modelo, a partir do seu valor crítico, associados às frequências naturais do sistema. O método do critério de otimalidade (*Optimality Criteria* - OC) foi utilizado para garantir a convergência da solução obtida através da implementação do algoritmo de otimização. A seguir serão apresentados os exemplos numéricos de aplicação da teoria desenvolvida.

**Exemplo 1:** Foi modelada uma viga bi-engastada, discretizada numa malha de 38 por 18 elementos. Maximizou-se sua primeira frequência natural, sujeita a uma fração de volume e penalidade respectivamente iguais a  $V_f = 0,5$  e  $p = 4$ . A Figura 5.1 apresenta o resultado sem a fase de pós-processamento, após 50 iterações, e a Figura 5.2 apresenta o resultado otimizado após a aplicação do filtro de independência de malha e análise de sensibilidades. A Figura 5.3 apresenta o histórico de convergência da frequência natural crítica estimada a cada iteração de acordo com as densidades atualizadas dos elementos da malha discretizada e associada ao primeiro autovalor.



Figura 5.1: Leiaute com densidades intermediárias para uma viga bi-engastada  
Fonte: Código top\_dynamic1OC, 2003.

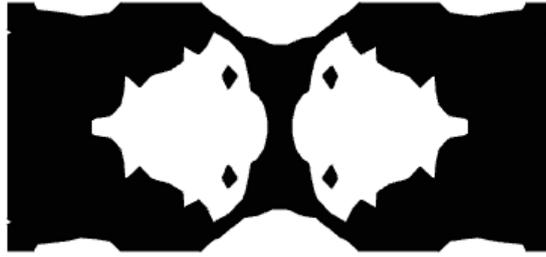


Figura 5.2: Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga bi-engastada  
Fonte: Código top\_dynamic1OC, 2003.

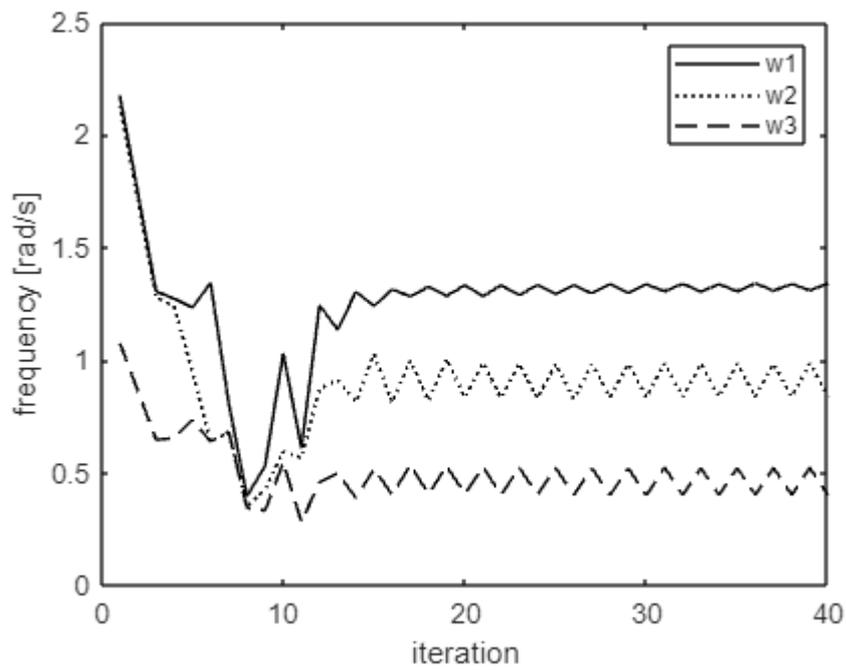


Figura 5.3: Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga bi-engastada

Fonte: Código top\_dynamic1OC, 2003.

**Exemplo 2:** Neste exemplo, foi modelada uma viga similar ao Exemplo 1, discretizada numa malha de 40 por 10 elementos. Maximizou-se sua segunda frequência natural, sujeita a uma fração de volume e penalidade respectivamente iguais a  $V_f = 0,5$  e  $p = 3$ . A Figura 5.4 apresenta o resultado sem a aplicação do filtro de independência de malha e análise de sensibilidade, após 30 iterações, e a Figura 5.5 apresenta o resultado otimizado após a fase de pós-processamento. O histórico de convergência da frequência natural crítica para uma viga bi-engastada, ajustada a cada iteração, e maximizando o segundo autovalor, encontra-se na Figura 5.6.

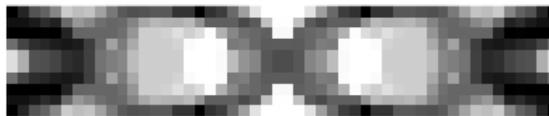


Figura 5.4: Leiaute com densidades intermediárias para uma viga bi-engastada  
Fonte: Código top\_dynamic2OC, 2003.



Figura 5.5: Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga bi-engastada  
Fonte: Código top\_dynamic2OC, 2003.

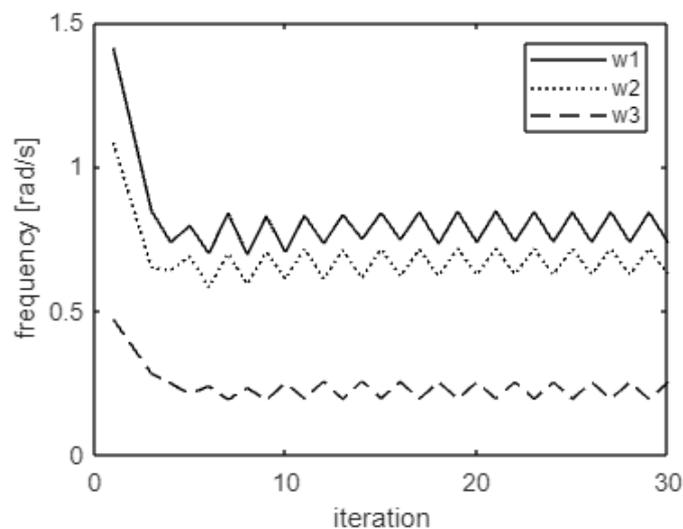


Figura 5.6: Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga bi-engastada

Fonte: Código top\_dynamic2OC, 2003.

**Exemplo 3:** Foi modelada uma viga apoiada em dois nós opostos, discretizada numa malha de 80 por 20 elementos. Maximizou-se sua primeira frequência natural, sujeita a uma fração de volume e penalidade respectivamente iguais a  $V_f = 0,5$  e  $p = 3$ . Como nos demais exemplos, a Figura 5.7 apresenta o resultado sem o emprego do filtro e análises de sensibilidade após 30 iterações. A Figura 5.8 apresenta o resultado otimizado após a fase de pós-processamento. A Figura 5.9 apresenta o histórico de convergência da frequência natural crítica para uma viga apoiada em dois nós opostos.



Figura 5.7: Leiaute com densidades intermediárias para uma viga apoiada em dois nós opostos

Fonte: Código top\_dynamic3OC, 2003.



Figura 5.8: Leiaute otimizado pós-processamento para uma viga apoiada em dois nós opostos

Fonte: Código top\_dynamic3OC, 2003.

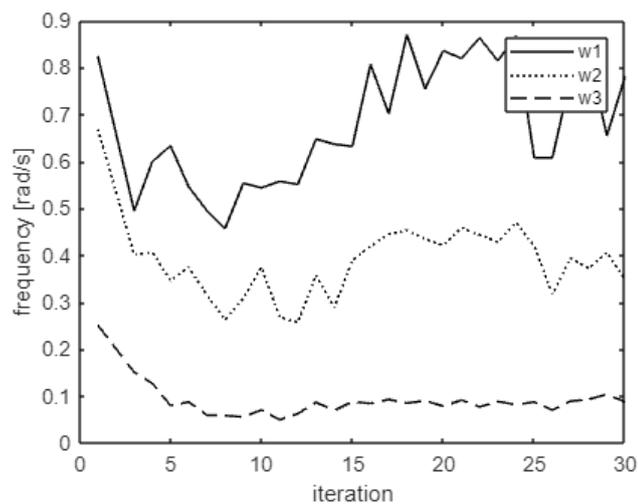


Figura 5.9: Gráfico da frequência natural crítica a cada iteração para uma viga apoiada em dois nós opostos

Fonte: Código top\_dynamic3OC, 2003.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho, o método de otimização topológica foi formulado com base na resposta dinâmica da estrutura bidimensional submetida a restrições de volume, maximizando a frequência natural ou fundamental, evitando a possibilidade de ressonância quando a viga estiver sujeita a baixas amplitudes de vibração ou de excitação. As formulações propostas mostraram-se eficazes e os exemplos analisados, similares aos encontrados na literatura, contribuindo assim para a validação do modelo.

Durante a implementação computacional observou-se a ocorrência de instabilidades nas topologias resultantes. Os filtros de sensibilidade, proposto por Sigmund, e o filtro de independência de malha presente no código justificaram seu uso ao eliminar as instabilidades de tabuleiro e de dependência de malha.

No primeiro exemplo a topologia obtida foi semelhante a uma estrutura com dois furos (ausência de material), o que indica uma aplicação útil caso, por exemplo, pretenda-se obter o leiaute de uma viga com furos para a passagem de tubulação. No segundo exemplo, observou-se que o algoritmo forneceu um leiaute nítido, dessa forma, favorecendo a fabricação do elemento estrutural. No terceiro exemplo verificou-se que o leiaute final da obtido é bastante similar a uma barra submetida à vibração.

Portanto, fica claro que o algoritmo é eficaz na resolução de problemas de otimização topológica através da análise dinâmica de estruturas bidimensionais, apresentando resultados satisfatórios da disposição do material ao longo do domínio de projeto e fornecendo leiautes bem definidos. Por fim, sugere-se que em trabalhos futuros o código seja adaptado para o caso de estruturas tridimensionais ou empregar outros tipos de filtros, reduzindo o tempo e o custo de processamento na convergência da função objetivo.

# Divulgação

Os principais conceitos e resultados descritos neste trabalho foram apresentados no XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE-2021) e 3rd Pan American Congress on Computational Mechanics (PANACM 2021) por Maia et al (2021).

# Referências Bibliográficas

- [1] AKIN, J. E. *Finite Element Analysis with Error Estimators. An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students.* Oxford. 2005.
- [2] AREMU, A.. *Topology optimization for additive manufacture.* Loughborough University. 2013.
- [3] ARORA, J. S.. *Introduction to Optimum Design.* Elsevier. 2016.
- [4] BENEVELI, S. M. A.. *Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios..* Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2002.
- [5] BAHIA, Miguel Tobias. *Otimização topológica aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis.* Florianópolis, 2005.
- [6] BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite Elements: An Introduction* New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1981.
- [7] BELBLIDIA, F.; BULMAN, S. *Constrained Adaptive Topology Optimization for Vibrating Shell Structures.* Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001.
- [8] BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N.. *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method,* 1988.
- [9] BENDSOE, M. P.. *Optimal shape design as a material distribution problem..* Mathematical Institute, The Technical University of Denmark, 1989.
- [10] BENDSOE, M. P.; DIAZ, A.; KIKUCHI, N.. *O. Topology and Generalized Layout Optimization of Structures. Topology Design of Structures.* 1993.

- [11] BENDSOE, M. P. et al. *Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, VOL. 38, 1995.
- [12] BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O.. *O. Topology optimization: Theory, Methods and Applications*. 2003.
- [13] BRITO, Thalyson Issac de Jesus. *Otimização topológica em Estruturas Bidimensionais*. Universidade Federal de Sergipe. Aracaju, 2018.
- [14] CHIESA, Daniela Dalla. *Otimização topológica aplicada em um braço robótico flexível*. Pelotas, 2016.
- [15] COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* EUA: John Wiley e Sons, Inc. 2002.
- [16] DIAZ, A; SIGMUND, O.. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural optimization*, 10(1). 1995.
- [17] HAFTKA, Raphael T., GÜRDAL, Zafer *Elements of Structural Optimization* Springer Netherlands. 1992.
- [18] KIM, N.; SANKAR, B. *Introduction to Finite Element Analysis and design* Ed. Livros Técnicos e Científicos. 2008.
- [19] MAIA, Sheyla M., BRITO, Thalyson I. J., COSTA, Jorge C.. *A SIMP-based algorithm to maximize natural frequencies in two-dimensional structures*. Proceedings of the XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and 3rd Pan American Congress on Computational Mechanics. ABMEC-IACM. Rio de Janeiro, Brazil, 2021.
- [20] MAXWELL, J. C.. *On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force*. Royal Society of Edinburgh. 1870.
- [21] MEIJBOOM, Marion. *Topology optimization of dynamic problems*. Eindhoven University of Technology. 2003.
- [22] MICHELL, A. G. M.. *The limits of Economy of Material in Framed Structures*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904.

- [23] NASCIMENTO, H. L. da S. *Método de Otimização Topológica em Estruturas Contínuas Bidimensionais*. Univerdidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2019.
- [24] OLIVEIRA, Fernando dos Santos *Otimização topológica de dissipadores metálicos aplicados ao controle de vibrações em estruturas*. Brasília, 2016.
- [25] RAO, S. S. *The Finite Element Method in Engineering*. EUA: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005.
- [26] SIGMUND, Ole. *Design of Material Structures using Topology Optimization*. Technical University of Denmark. Lyngby, 1994.
- [27] SIGMUND, Ole; PETERSON, J.. *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Berlin, 1998.
- [28] SIGMUND, Ole. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. 2000.
- [29] SIGMUND, Ole. *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. 2001.
- [30] SORIANO, H. L. *Elementos finitos - Formulação e Aplicaç]ao na Estática e Dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2009.
- [31] WANG, S. Y.. *A study on microstructures of homogenization for topology optimization*. Victoria University. 2003.