



Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Prática de Pesquisa II

Filipe Maximo dos Santos

**Construção de um modelo unidimensional do fluxo sanguíneo
em artérias**

São Cristóvão
Jan/2020

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Prática de Pesquisa II

Filipe Maximo dos Santos

**Construção de um modelo unidimensional do fluxo
sanguíneo em artérias**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Departamento de Matemática da Universi-
dade Federal de Sergipe como requisito parcial
para a obtenção do grau de Licenciado em Ma-
temática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo

São Cristóvão
Jan/2020

ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM MATEMÁTICA LICENCIATURA

Aos trinta e um dias do mês de janeiro de dois mil e vinte, às dezesseis horas, no(a) Sala de Reuniões do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, compareceu para defesa pública do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em MATEMÁTICA LICENCIATURA, requisito obrigatório para obtenção do título de Licenciado, o(a) aluno(a) **FILIPPE MAXIMO DOS SANTOS**, tendo como título do Trabalho de Conclusão de Curso "*Construção de um modelo unidimensional do fluxo sanguíneo em artérias.*" A banca examinadora foi constituída pelos professores Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo — Orientador, Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira — 1º Examinador e Prof. Dr. Gastão Florêncio Miranda Junior — 2º Examinador. Após apresentação e observações dos membros da banca examinadora, o trabalho foi considerado aprovado, com nota **9,0 (nove vírgula zero)** e segue assinada por mim, Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo, e pelos demais membros da banca examinadora.

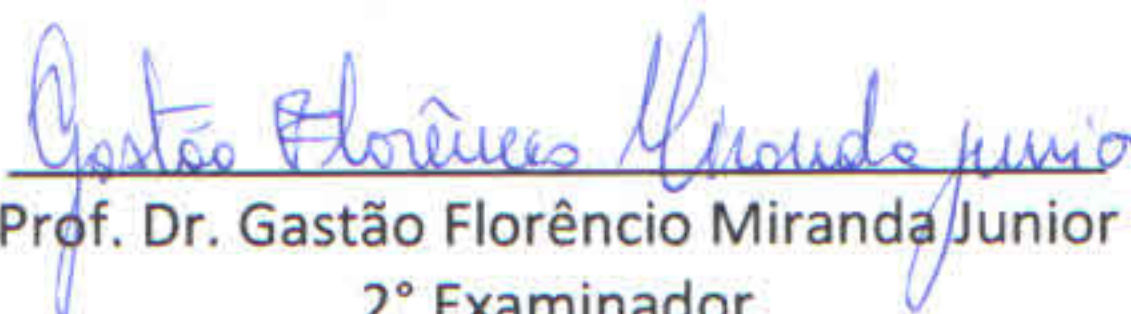
Membros da Banca Examinadora:



Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo
Orientador



Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira
1º Examinador



Prof. Dr. Gastão Florêncio Miranda Junior
2º Examinador

Agradecimentos

Gratidão!

Grato a Deus pelo dom da vida, (1 João 5:4);

A minha mãe Marlucia, por todo seu amor, sua luta e dedicação para que pudesse chegar até aqui. Aos meus irmãos Livia e Ítalo, por seus cuidados, carinho e apreço. Aos meus sobrinhos e sobrinhas.

A toda minha família: tios, tias, primos, primas, padrinho, madrinhas e avós de sangue e coração, por todo carinho, apoio e ajuda nesses anos, não somente na graduação, mas sim, em toda a minha trajetória até chegar aqui. Meu muito obrigado.

Aos colégios "Prézinho Maria do Carmo", C.E. Amiguinhos do ABC, Tia Aliner e o Colégio Diocesano de Propriá, por serem a minha base da educação, e ter tido a oportunidade de ter professores tão inspiradores em todas essas instituições. Ao CDP, a minha eterna gratidão por ter momentos tão bons e importantes, foram maravilhosos e intensos 7 anos nessa casa, onde fiz amigos que levo pra vida, em especial as minhas amigas: Ananda, Adrianany, Joana, Maiara, Nathália e Roberta.

Nesses quase cinco anos na UFS, tive o prazer de conhecer e me aproximar de muitas pessoas, seja por afinidade ou pelas barreiras dos curso que enfrentamos juntos, em especial aos amigos Aila, Alexsheevina, Barbára, Carol, Elaine, Evelyn, Felipe, Flávia, Geisa, João Marcos, Jocelmo, Juliana, Lara, Laura, Letícia, Lucas, Luciana, Marcela, Mariana, Maynara, Nailys, Nati, Narinha, Regina, Rejane, Robert, Thiago, Thyagão, Valdy, Valéria. E a todos que fazem parte dos grupos "Teoria dos Memes", "Do you speak english?", "Trouxas ou Mais", "Discutindo Fatos", "Fast-Food", "Hora do Frango".

Ao professor preceptor do RP/estágio Rone e aos alunos do CETB.

Aos professores do DMA/UFS que fizeram parta da minha formação, em especial a Denize e Will por todas oportunidades que tive na área de ensino e matemática pura, respectivamente; a Gastão e Adriano por além de contribuir com este trabalho participando da banca avaliadora, foram professores motivadores; a Ivanete por ser "boa" e acolhedora em sua sala e sua casa, por seus conselhos e ensinamentos, e por último e não menos importante agradeço a Paulo, foram seis disciplinas e mais o tcc, acho que no meu diploma deveria ter "com a habilitação em Paulo Rabelo (kkkk)" obrigado por ser mais que orientador, ser amigo. A todos vocês professores, meu muito obrigado, essa jornada não seria a mesma sem vocês, espero representar ao menos 1/3 para os meus o que vocês representam para mim.

Lute como um professor!

Obrigado!

É preciso se perder para se encontrar.
—AUTOR DESCONHECIDO

Resumo

Neste trabalho é apresentado o estudo e a construção de um modelo unidimensional para o fluxo sanguíneo num trecho de artéria baseado em Caiado, 2006 [2]. Considerando a importância do sistema cardiovascular para o ser humano e levando em consideração o fato que doenças cardiovasculares ocupam as primeiras posições no ranking das doenças que mais ocasionam mortes no mundo, pesquisadores de diversas áreas passaram a pesquisar e dedicam-se ao estudo da hemodinâmica, a fim de obter resultados que ajudem no avanço do tratamento dessas doenças, impulsionando uma melhoria na qualidade de vida da população. Como é um sistema vivo, muitos fatores influenciam no comportamento do sistema como a pressão, a velocidade, a geometria do vaso, a composição do sangue e as forças físicas que sob ele atuam, por isso sua modelagem é um tanto quanto complexa, neste sentido é viável a um modelo em uma dimensão, além do fato que seu custo computacional é menos oneroso que os demais e também serve de base para se obter parâmetros para modelos tridimensionais.

Palavras-chave: Sistema cardiovascular, Equações de Navier-Stokes, Modelo 1D.

Sumário

Introdução	1
1 Equações do movimento de um fluido	3
2 Movimento da parede	9
2.1 Geometria do vaso	10
2.2 Esforços desenvolvidos na parede	13
2.3 Equação do movimento da parede	17
3 Modelo Unidimensional do Escoamento do Sangue em Artérias	18
3.1 Derivação do Modelo	19
Considerações	27
Referências Bibliográficas	28
A Resultados auxiliares	29

Lista de Figuras

1	Circulação sanguínea.	1
1.1	Mapeamento lagrangeano.	3
1.2	(a) Tensões normais (b) Tensões de cisalhamento	5
1.3	Deformação de fluido.	6
1.4	Tensões normais e tangenciais na direção x sobre um elemento de fluido.	6
2.1	Vaso sanguíneo.	9
2.2	Seção de artéria com os principais parâmetros geométricos.	10
2.3	Configuração inicial e atual da artéria.	11
2.4	Elemento de superfície dS .	11
2.5	Seção axial.	14
2.6	Seção longitudinal.	15
3.1	Representação da seção longitudinal na porção $\mathcal{V}$.	20

Introdução

O **Sistema cardiovascular** tem como função básica levar material nutritivo e oxigênio as células do corpo e remover resíduos e substâncias tóxicas destas. Divido em: **sistema sanguíneo** que é composto por vasos condutores de sangue (artérias, veias e capilares) e coração; **sistema linfático** composto pelos vasos condutores de linfa (capilares linfáticos, vasos linfáticos e troncos linfáticos) e por órgãos linfóides; e os **órgãos hemopoéticos** representados pelos órgãos linfáticos primários (médula óssea vermelha).

É um sistema fechado que não se comunica com o exterior, e é composto por tubos, denominados de **vasos** e no seu interior circulam humores, denominado **sangue** e linfa, para que o sangue circule através dos vasos, há um órgão central, o **coração**, que funciona como uma bomba contrátil-propulsora, com peso entre 280 e 340g que pode pesar mais quando é exigido dele um esforço contínuo, como por exemplo atletas.

O sangue é um tecido fluido, formado por uma porção celular composta por glóbulos vermelhos ou eritrócitos, glóbulos brancos ou leucócitos e por plaquetas; que circula num meio líquido, o **plasma**, que é constituída por 92% de água, os 8% restantes são proteínas, sais e outros constituintes orgânicos em dissolução. As trocas entre o sangue e os tecidos ocorrem em extensas redes de vasos de calibre reduzido e de paredes muito fina, denominados por **capilares**.

A circulação sanguínea ocorre por meio de duas correntes sanguíneas que partem do coração ao mesmo tempo: a primeira, **circulação pulmonar** sai do ventrículo direito e se dirige aos capilares, onde há a troca de CO_2 por O_2 ; a segunda **circulação sistêmica** sai do ventrículo esquerdo pela artéria aorta e chega nos tecidos do organismo, onde existem extensas redes de vasos capilares onde se processam as trocas entre os tecidos e o sangue.

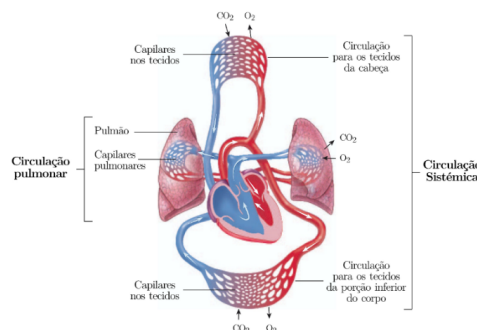


Figura 1 Circulação sanguínea.

Fonte: [2]

As artérias, definidas por Aristóteles em 350 a.C. como sendo tubos contendo ar (do grego *aer*, ar, e *terein* conter) artérias são vasos cilindróides, elásticos onde o sangue circula centrifugamente em relação ao coração. Podem ser classificadas em: artérias de grande, médio e pequeno calibre e arteríolas. As artérias possuem elasticidade a fim de manter o fluido sanguíneo constante

Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS) e a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS), doenças cardiovasculares estão no ranking de 2018 das doenças que mais matam no mundo, tendo a cardiopatia isquêmica e o acidente vascular cerebral (AVC) ocupando a primeira e a segunda posição, respectivamente, responsáveis por 15,2 milhões de óbitos em 2016, essas doenças estão no ranking das principais causas de morte global nos últimos 15 anos. Dessa forma, o conhecimento do sistema cardiovascular e sua mecânica tem se tornado uma necessidade.

A hemodinâmica, área da biomecânica que estuda a circulação do sangue, tem sido estudada desde 1742 por Euler, considerado o pai da hemodinâmica, mas nos últimos anos a comunidade científica, tem despertado o interesse em estudar problemas biológicos que podem ser modelados a partir de ferramentas matemáticas, físicas e computacionais, a fim de obter um avanço no tratamento de doenças: por exemplo, existem modelos matemáticos para a coagulação do sangue e para a modelagem do câncer no sangue (leucemia), e também como ferramentas computacionais é possível prever o comportamento da pressão sanguínea no procedimento de angioplastia ou o surgimento de aneurismas.

Nesse contexto, um modelo unidimensional é útil por ser menos oneroso computacionalmente e por trazer resultados bastante satisfatórios sobre as características do fluxo sanguíneo no nível de intervenções médicas específicas como os casos de estreitamento de um segmento de artéria pela colocação de um stent (pequena prótese que pode ser colocada no interior de uma artéria para evitar a obstrução dos vasos sanguíneos). Além disso, modelagem numérica, oferece uma alternativa para estudos experimentais de forma não invasiva e podem ser adaptados para simulação de propagação de ondas numa rede arterial (por impor condições de interface nos pontos de ramificação) ou para se obter condições de fronteira em modelos tridimensionais.

Nessa linha, o trabalho objetiva a construção de um modelo unidimensional do fluxo sanguíneo em um segmento de artéria baseado na dissertação de Caiado, 2006 [2], sendo dividido em três capítulos. No primeiro tratamos da definição de um fluido qualquer e da obtenção das equações que governam seu movimento, ditas Equações de Navier-Stokes; no segundo estudamos o deslocamento da parede do vaso sanguíneo construindo um modelo para este movimento; e finalizamos nosso trabalho considerando o fluxo sanguíneo em artérias, adaptando as Equações de Navier-Stokes para o sangue, levando em conta sua interação com a parede do vaso.

Equações do movimento de um fluido

Um **fluido** é qualquer substância que se deforma continuamente quando sujeito a uma tensão de cisalhamento, não importando quão pequena seja essa tensão. Chamamos de **tensão** τ a força F aplicada numa determinada região por sua área A , isto é $\tau = F/A$. Quando a força é tangencial à região, dizemos que a tensão é de **cisalhamento**, e se for perpendicular chamamos de **pressão**.

As equações serão deduzidas a partir de um **elemento de fluido** Ω que embora pequeno, contém um número suficiente de moléculas de forma que as propriedades macroscópicas do fluido, como a viscosidade, densidade, pressão e velocidade, não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais.

Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ o domínio ocupado pelo fluido num tempo inicial $t = 0$ e seja Ω_t a porção do espaço ocupado pelo fluido após um tempo t . A **velocidade** é a principal quantidade cinemática e é expressa por meio de um campo vetorial $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \xi)$ definida por

$$\mathbf{u}(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \xi)$$

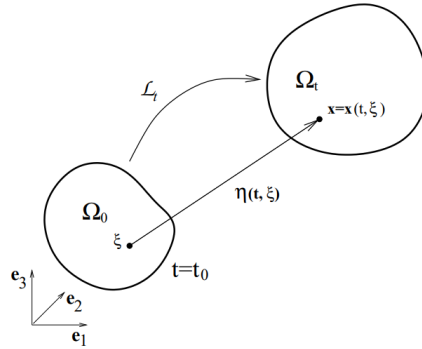


Figura 1.1 Mapeamento lagrangeano.

Fonte: [6]

Há dois modos distintos de descrever o escoamento de um fluido. O primeiro, chamado de descrição **lagrangeana**, acompanha a trajetória de cada partícula ao longo do tempo, calculando as grandezas de escoamento ao longo das posições por onde passa a partícula, isto é, ao longo da sua trajetória. Por exemplo, a variação da velocidade $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, X)$ da partícula ξ num

ponto X é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t, \xi),$$

onde $x(\xi, t)$ representa a posição da partícula no tempo. O segundo modo, é a visão **euleriana**, que calcula as grandezas a partir de pontos fixos do espaço, por onde passa o fluido ("pontos de monitoramento").

Notemos, que neste caso, a variação da velocidade depende do tempo, mas também da posição inicial ξ , de modo que agora esta variação é dada em termos da **derivada material**¹ Seja $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ derivável num ponto $x \in \Omega_t$. Então

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} f(t, \mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}(\xi, t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} (t, \mathbf{x}) \frac{\partial x_j}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} (t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla f \end{aligned}$$

Em particular, a derivada material do campo de velocidades $\mathbf{u}(t, \xi)$ é dado pelas derivadas materiais de suas componentes. Assim, se $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}), u_3(t, \mathbf{x}))$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \left(\frac{Du_1}{Dt}, \frac{Du_2}{Dt}, \frac{Du_3}{Dt} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1, \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2, \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \right) \\ &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla u_1, \mathbf{u} \cdot \nabla u_2, \mathbf{u} \cdot \nabla u_3) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

representa a **aceleração** do fluido na visão lagrangeana.

Para a derivação das equações básicas de escoamento de um fluido, nossa principal ferramenta é o Teorema de Transporte de Reynolds (A.0.4) que diz o seguinte:

Teorema 1.0.1. *Sejam $V_0 \subset \Omega_0$ e $V_t \subset \Omega_t$ sua imagem após um tempo t . Seja $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com respeito a ambos $\mathbf{x}$ e t . Então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) dV &= \int_{V_t} \left[\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right] dV \\ &= \int_{V_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u}) \right] dV. \end{aligned}$$

¹Também chamada de derivada substancial é uma derivada tomada ao longo de um caminho movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$, e é frequentemente utilizada em mecânica dos fluidos e mecânica clássica.

Nossa primeira equação, dita **equação de continuidade**, será consequência do **princípio de conservação de massa** que estabelece que a massa não é criada nem destruída durante o movimento.

Seja $\rho : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ a **densidade** do fluido, suposta estritamente positiva, de forma que sobre cada $V_t \subset \Omega_t$,

$$\int_{V_t} \rho(t, \mathbf{x}) dV = m(V_t)$$

é a massa material contida em V_t . Seguindo o princípio de conservação de massa e usando o Teorema (1.0.1) (A.0.4), temos que

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, \mathbf{x}) dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV.$$

Como V_t foi arbitrário, segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Esta é a **equação de continuidade**. Em particular, quando ρ é constante, obtemos que

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0.$$

e dizemos que o fluido é **incompressível**.

Agora, seguindo [6], o princípio de **conservação de momento linear** expressa a segunda lei de Newton que diz que a taxa de variação temporal do momento de uma partícula, $\frac{d}{dt}(m\mathbf{u})$, é igual a resultante das forças que agem sobre essa partícula.

Há dois tipos de forças agindo sobre um fluido:

- **Forças de campo** que agem sobre a massa de um fluido como um todo (sobre cada ponto de um elemento de fluido). Um exemplo são as forças de gravidade e eletromagnéticas. Elas tem a forma $\int_{V_t} \rho \mathbf{f} dV$.
- **Forças de superfície** que agem apenas sobre a superfície do elemento de fluido. São devidas a pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior e as tensões viscosas normais e de cisalhamento, provocadas pelo atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento.

A **viscosidade** é a propriedade que traduz a resistência que um fluido oferece quando sujeito a tensões. As tensões viscosas normais tendem a esticar ou comprimir o elemento de fluido Fig. (1.2) (a), enquanto as de cisalhamento tendem a deformar o elemento Fig. (1.2) (b).

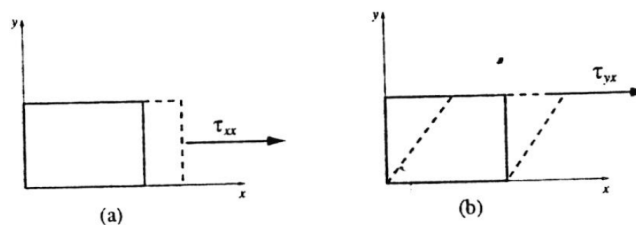


Figura 1.2 (a) Tensões normais (b) Tensões de cisalhamento

Fonte: [6]

Consideremos o escoamento **laminar** de um fluido, entre duas placas planas se separadas por uma distância Δy , isto é, supomos que o fluido se desloca em camadas muito finas (lâminas) deslizando uma sobre as outras. Ver Fig (1.3).

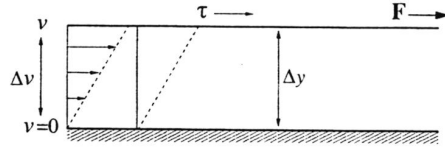


Figura 1.3 Deformação de fluido.

Fonte: [6]

Enquanto a placa inferior permanece em repouso a superior recebe uma força tangencial $\mathbf{F}$, de forma que esta se desloca com uma velocidade $\mathbf{v}$ e gera uma tensão de cisalhamento no fluido, deformando-o (ver figura). Para muitos fluidos, verifica-se que a tensão τ é proporcional a taxa de deformação $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ das lâminas de fluido

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv}{dy},$$

onde μ é o **coeficiente de viscosidade**. Fluidos que satisfazem essa propriedade são ditas fluidos **newtonianos**. A notação τ_{ij} significa que a tensão está agindo na direção j sobre a superfície perpendicular i . Pode-se provar que, para dimensões maiores,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.1)$$

ou seja, as deformações em ambas direções contribuem para o valor de τ_{ij} .

Tomaremos um elemento de fluido bidimensional, com área $(\Delta x), (\Delta y)$ e centrado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, para ilustrar a ação das forças superficiais na direção x . Ver figura (1.4).

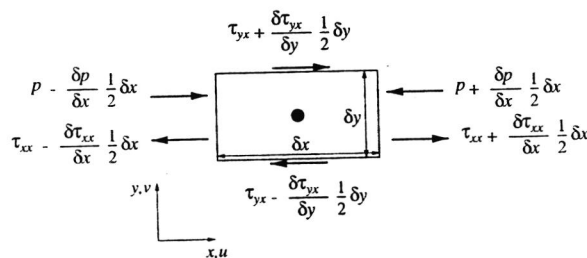


Figura 1.4 Tensões normais e tangenciais na direção x sobre um elemento de fluido.

Fonte: [6]

Uma vez que os campos P e τ variam suavemente, podemos expandi-lo em série de Taylor em torno dos pontos do centro $(\bar{x}, \bar{y})$. Assim,

$$\begin{aligned}
P\left(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}, y\right) &= P(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial P}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x), \\
P\left(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}, y\right) &= P(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial P}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x), \\
\tau_{xx}\left(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}, y\right) &= \tau_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x), \\
\tau_{xx}\left(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}, y\right) &= \tau_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x), \\
\tau_{yx}\left(x, \bar{y} + \frac{\Delta y}{2}\right) &= \tau_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta y}{2} + o(\Delta y), \\
\tau_{yx}\left(x, \bar{y} - \frac{\Delta y}{2}\right) &= \tau_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\Delta y}{2} + o(\Delta y).
\end{aligned}$$

Para obtermos as forças que agem sobre o elemento do fluido, basta multiplicarmos as tensões pelas respectivas áreas sobre as quais elas atuam e somar os resultados algebricamente. Portanto, a força resultante na direção x é dada por

$$F_x = \left(-\frac{\partial P \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x.$$

Aplicando a segunda lei de Newton na direção x , temos que

massa $\times$ aceleração = forças superficiais + forças de campo

$$\rho \Delta x \Delta y \times \frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) \Delta y \Delta x + \rho f_x \Delta x \Delta y,$$

donde, dividindo-se por Δx e Δy e aplicando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, obtemos

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x. \quad (1.2)$$

Analogamente, as forças superficiais na direção de y fornecem a equação

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y. \quad (1.3)$$

Logo, manipulando as equações (1.2) e (1.3) temos que

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\tau_{xx}, \tau_{yx}) + \rho f_x \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\tau_{xy}, \tau_{yy}) + \rho f_y.
\end{aligned}$$

Como $\text{div}(PI) = \nabla P$, segue da substituição de (1.1) nas equações acima que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(PI) + 2\mu \text{div} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \rho \mathbf{f},$$

onde o divergente é tomado em cada linha.

Portanto, o momento linear do elemento de fluido pode ser expresso por

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(T) + \rho \mathbf{f}, \quad (1.4)$$

com

$$T = PI + 2\mu D(\mathbf{u}), \quad (1.5)$$

e

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

Em componentes

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Finalmente de (1.4) e da definição de derivada material, obtemos que

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P - 2\mu \text{div}(D(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f} \quad (1.6)$$

Desde que ρ é constante e $\text{div}(\nabla \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$ e $\text{div}(D(\mathbf{u}^T)) = \nabla(\text{div}(\mathbf{u})) = 0$ (supondo um fluido incompressível), chegamos que

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mathcal{V} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.7)$$

onde $p = \frac{P}{\rho}$ é uma pressão escalar e $\mathcal{V} = \frac{\mu}{\rho}$ é dita a viscosidade do cinemática. Embora (1.7), junto com $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$, constituem as **equações de Navier-Stokes** padrão, em nosso trabalho utilizaremos as equações (1.6) ou (1.7), conforme a conveniência.

CAPÍTULO 2

Movimento da parede

O deslocamento do sangue nas grandes artérias é influenciado por seu comportamento elástico, esta é composta por muitas camadas de tecidos com características diferentes, em particular, destacamos três camadas:

- Camada adventícia: camada externa que suporta a estrutura física da artéria.
- Camada média: responsável pela elasticidade.
- Camada íntima: contato direto com o sangue.

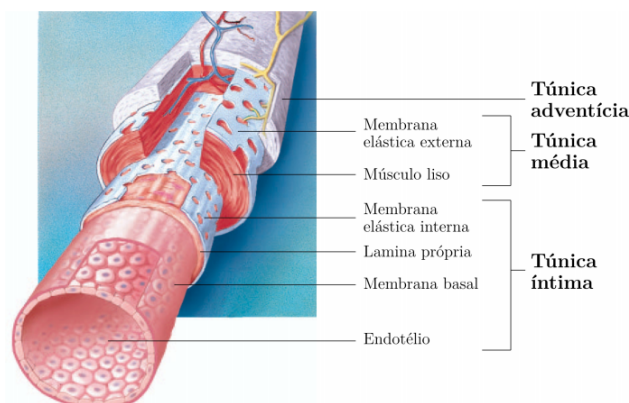


Figura 2.1 Vaso sanguíneo.

Fonte: [2]

Estudaremos o movimento da parede de uma seção de artéria onde não há ramificações. Para, isso, admite-se as seguintes hipóteses:

- H1 - A geometria da parede do vaso toma a forma de um cilindro circular, de forma que usaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) com os correspondentes unitários $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$, conforme figura (2.2)
- H2 - O deslocamento da parede do vaso ocorre no sentido radial $\mathbf{e}_r$.
- H3 - A espessura da parede do vaso é relativamente pequena que permite supor a parede como uma superfície sem espessura.
- H4 - As componentes das tensões ao longo da direção normal $\mathbf{n}$ são desprezadas.

- H5- A parede do vaso é incompressível, ou seja, o seu volume não muda no deslocamento.
- H6 -A parede do vaso tem seu comportamento elástico linear, de forma que os gradientes de deformação são relativamente pequenos.

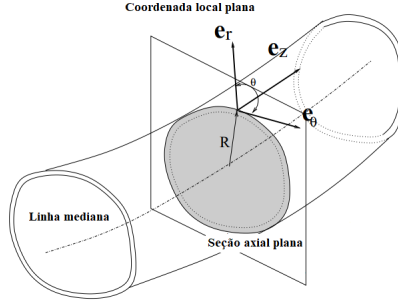


Figura 2.2 Seção de artéria com os principais parâmetros geométricos.
Fonte: [11]

2.1 Geometria do vaso

Para derivação do modelo matemático da parede da artéria é necessário levar em consideração a forma geométrica da parede. De acordo com a hipótese H1, onde admite que o vaso tem forma cilíndrica, é conveniente utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas. Considerando $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, com $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, os sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, θ, z) , ambas num cilindro de raio r , estão relacionados por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ z = z \end{cases}, \quad (2.1)$$

Pela hipótese H1, levando em consideração a estrutura cilíndrica da artéria, adota-se que a configuração inicial Γ_0^p correspondente a parede do vaso, é um cilindro com raio $r = R_0(z)$, isto é

$$\Gamma_0^p \{ (r, \theta, z) : r = R_0(z), \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L] \}.$$

sendo L o comprimento do elemento da artéria, o eixo longitudinal se encontra alinhado com a coordenada z e cada plano $z = \bar{z}$ constante define uma seção axial. Ver Fig. (2.3)

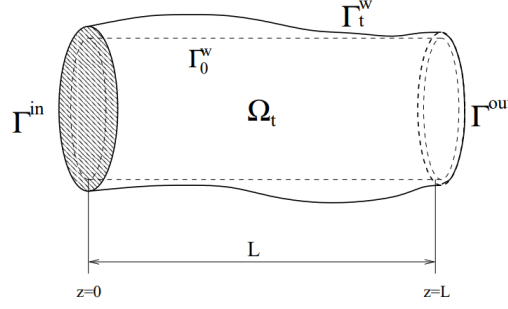


Figura 2.3 Configuração inicial e atual da artéria.
Fonte: [11]

Partindo da hipótese H2, o campo vetorial que descreve o deslocamento da parede do vaso sanguíneo, denotado por η , tem apenas a componente radial $\mathbf{e}_r$, descrita por

$$\eta = \eta \mathbf{e}_r = (R - R_0) \mathbf{e}_r$$

onde $R = R(\theta, z; t)$ é a função que descreve, para cada t , a coordenada radial $r = R(\theta, z; t)$ da superfície da parede. Assim, após o tempo t , ver Fig. (2.4)

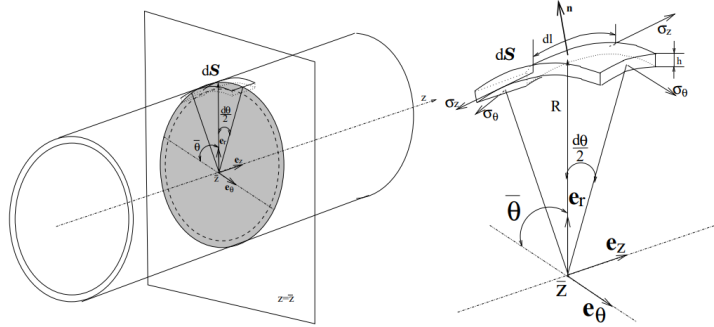


Figura 2.4 Elemento de superfície dS .
Fonte: [11]

A configuração atual da parede do vaso Γ_t^p é dada por

$$\Gamma_t^p \{ (r, \theta, z) : r = R(\theta, z, t), \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L] \}.$$

Para determinar as forças que agem sobre a parede do vaso, consideremos a configuração atual num dado tempo t e um ponto genérico sobre a superfície de coordenadas $r = R(\bar{\theta}, \bar{z}; \bar{t})$ com $\bar{z} \in (0, L)$ e $\bar{\theta} \in (0, 2\pi)$. Tomemos um elemento de superfície dS dado por

$$dS = \left\{ (\theta, z, t) : r = R(\theta, z, t), \theta \in \left[\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}, \bar{\theta} + \frac{d\theta}{2} \right], z \in \left[\bar{z} - \frac{dz}{2}, \bar{z} + \frac{dz}{2} \right] \right\}.$$

conforme Figura (2.4).

Por conveniência, serão deduzidas a seguir expressões que definem o vetor normal $\mathbf{n}$ ao elemento de superfície dS . Seja $F(r, \theta, z)$ a representação cartesiana da superfície do vaso

$$F(r, \theta, z) \equiv r - R(\theta, z) = 0. \quad (2.2)$$

O vetor normal unitário ao elemento de superfície dS é definido por

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

Em coordenadas cartesianas temos

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y + \frac{\partial F}{\partial z} e_z.$$

Segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \nabla F = & \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) e_x + \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) e_y + \\ & \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \right) e_z \end{aligned}$$

e pelas relações (2.1) encontramos que

$$\nabla F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) e_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) e_y + \frac{\partial F}{\partial z} e_z.$$

Usando mais uma vez (2.1) para expressar ∇F em coordenadas cilíndricas

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} e_r + \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} e_z \quad (2.3)$$

Por fim, de (2.2) temos que $\frac{\partial F}{\partial r} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{\partial R}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial R}{\partial z}$, de forma que substituindo essas igualdades em 2.3, obtemos

$$\nabla F = e_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} e_\theta - \frac{\partial R}{\partial z} e_z. \quad (2.4)$$

A norma de ∇F em coordenadas cilíndricas é então dada por

$$\|\nabla F\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2}, \quad (2.5)$$

e consequentemente, o vetor normal unitário será dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2}} \left(e_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} e_\theta - \frac{\partial R}{\partial z} e_z \right).$$

Para a componente radial do vetor $\mathbf{n}$, tem-se

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}} \left(\mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \mathbf{e}_r,$$

e como $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{e}_z$ são ortogonais entre si, resulta que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}} = \frac{1}{\|\nabla F\|}. \quad (2.6)$$

Definiremos a seguir algumas medidas da superfície: a área do elemento da superfície dS , chamada de $d\sigma$ e a dimensão linear de dS ao longo do eixo longitudinal dl levando em consideração que $d\sigma$ e dl estão em coordenadas cartesianas, transformemos $d\sigma$ para coordenadas cilíndricas $d\sigma_{(x,y,z)} = R d\sigma_{(r,\theta,z)}$ e projetando a superfície no plano $\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z$, temos

$$d\sigma_{(x,y,z)} = R d\sigma_{(r,\theta,z)} = \|\nabla F\| R d\theta dz, \quad (2.7)$$

Por meio de (2.6) e (2.7) temos

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma = \frac{1}{\|\nabla F\|} \cdot \|\nabla F\| R d\theta dz = R d\theta dz. \quad (2.8)$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $z = z$ do eixo longitudinal e fazendo a projeção sobre o eixo $\mathbf{e}_z$ que é feita através do comprimento de arco, obtém-se

$$dl_z = dl_z = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2} dz. \quad (2.9)$$

2.2 Esforços desenvolvidos na parede

A dedução do modelo do deslocamento da parede da artéria passa também por caracterizar as forças que atuam sobre ela (na verdade, são tensões, de modo que no balanço de forças devemos multiplicar pela área da região em que ela atua). A parede esta sujeita a diversos tipos de esforços que podem ser internos denotados por $\mathbf{f}_{int}$ ou externos $\mathbf{f}_{ext}$.

Os esforços externos são exercidos pelos tecidos adjacentes através de uma pressão constante p_{ext} exercida sob o elemento de área dS , e será expressa por

$$\mathbf{f}_{ext}^t = -p_{ext} \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

O fluido também exerce uma força sobre a parede do vaso, representada pelo tensor de Cauchy

$$\mathbf{T} = -PI + 2\mu D(\mathbf{u}),$$

conforme (1.5). Assim, os esforços exercidos pelo fluido em dS são descritos por

$$\mathbf{f}_{ext}^f = p\mathbf{n} - 2\mu D(u) \cdot \mathbf{n} \quad (2.11)$$

Como o deslocamento ocorre somente na direção radial (hipótese H2), temos que

$$\mathbf{f}_{ext} = (\mathbf{f}_{ext}^f + \mathbf{f}_{ext}^f) \cdot \mathbf{e}_r = ((p - p_{ext})\mathbf{n} - 2\mu D(u) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (2.12)$$

Os esforços internos são exercidos de acordo com a hipótese H4, segundo as direções circunferencial $\mathbf{e}_\theta$ e longitudinal $\mathbf{e}_z$, através das tensões σ_θ e σ_z , respectivamente. No primeiro caso, ver figura abaixo, as tensões circunferenciais $\sigma_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2})$ e $\sigma_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2})$ têm as direções dos vetores normais (ver fig. (2.5))

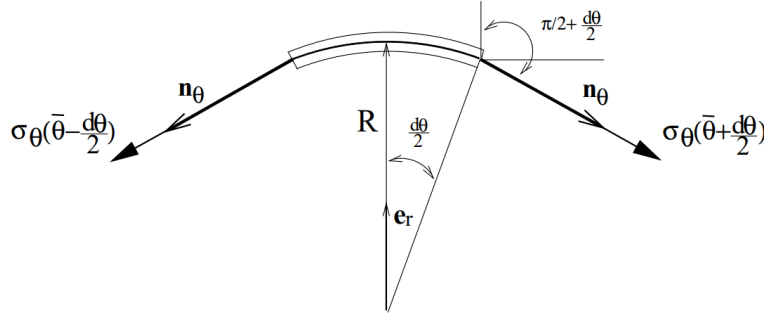


Figura 2.5 Seção axial.

Fonte: [11]

unitários $n_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2})$ e $n_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2})$, respectivamente, os quais perfazem ângulos de $(\frac{\pi}{2} + \frac{d\theta}{2})$ e $-(\frac{\pi}{2} + \frac{d\theta}{2})$ respectivamente, onde $\bar{\theta}$ é um ângulo fixo. Assim, os esforços internos segundo a componente radial satisfaz:

Como considera-se que o deslocamento da parede segundo a direção radial dos esforços internos ($\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{int}^\theta + \mathbf{f}_{int}^z$) logo, a componente radial dos esforços internos é dada por

$$\mathbf{f}_{int} = (\mathbf{f}_{int}^\theta + \mathbf{f}_{int}^z) \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.13)$$

$\mathbf{f}_{int}^\theta$ e $\mathbf{f}_{int}^z$ são os esforços circunferenciais e longitudinais, respectivamente, a caracterização destes esforços será feita separadamente, pois considera-se duas seções da parede do vaso, uma axial e outra longitudinal.

$$\begin{aligned} f_{int}^\theta &= \left[\sigma_\theta \left(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2} \right) + \sigma_\theta \left(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \sigma_\theta \left[\mathbf{n}_\theta \left(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{n}_\theta \left(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2} \right) \cdot \mathbf{e}_r \right] \\ &= \sigma_\theta \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\theta}{2} \right) + \cos \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2} \right) \right] \\ &= -2\sigma_\theta \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

onde supomos que a tensão circunferencial é proporcional ao alongamento circunferencial η e é descrita por

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0}. \quad (2.14)$$

sendo E é o módulo de Young e ζ é a razão de Poisson (Apêndice).

Do Teorema de Taylor (A.0.6) para $\sin(x)$, sabemos que $\sin(x) = x + R(x, \xi)$, onde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x, \xi)}{x} = 0.$$

Então

$$f_{int}^\theta = -\sigma_\theta d\theta + o(d\theta), \quad (2.15)$$

onde $o(d\theta)$ é um infinitesimal de $d\theta$. Substituindo (2.14) em (2.15) temos a expressão para a componente radial dos esforços circunferenciais na forma

$$f_{int}^\theta = -\frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0} d\theta + o(d\theta) \quad (2.16)$$

Análises experimentais e fisiológicas mostram que a parede do vaso também está sob tensão longitudinal, uma vez que quando uma artéria é extraída do corpo, esta reduz seu comprimento. Vamos assumir que a tensão longitudinal é expressa por

$$\sigma_z = \pm \sigma_z \tau,$$

onde τ é o vetor tangente unitário à curva $r = R(\bar{\theta}, z, t)$ e seu módulo σ_z é constante.

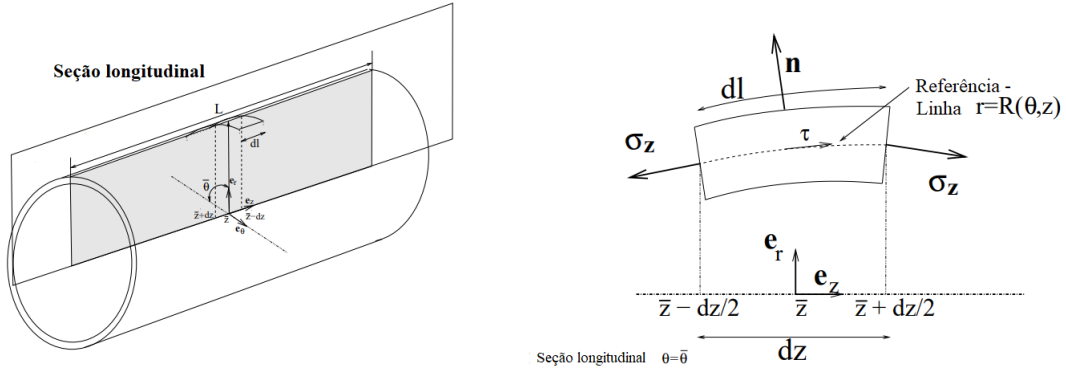


Figura 2.6 Seção longitudinal.

Fonte: [11]

Dessa forma, na direção radial,

$$f_{int}^z = \left[\sigma_z \left(\bar{z} + \frac{dz}{2} \right) + \sigma_z \left(\bar{z} - \frac{dz}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.17)$$

$$= \sigma_z \left[\tau \left(\bar{z} + \frac{dz}{2} \right) - \tau \left(\bar{z} - \frac{dz}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.18)$$

Aplicando o Teorema de Taylor (A.0.6) em cada componente da função vetorial $\tau(s)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \tau\left(\bar{z} + \frac{dz}{2}\right) &= \left(x\left(\bar{z} + \frac{dz}{2}\right), y\left(\bar{z} + \frac{dz}{2}\right)\right) \\
 &= \left(x(\bar{z}) + \frac{dx}{dl}(\bar{z})\frac{dz}{2} + R_1\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right), y(\bar{z}) + \frac{dy}{dl}(\bar{z})\frac{dz}{2} + R_2\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right)\right) \\
 \tau\left(\bar{z} - \frac{dz}{2}\right) &= \left(x\left(\bar{z} - \frac{dz}{2}\right), y\left(\bar{z} - \frac{dz}{2}\right)\right) \\
 &= \left(x(\bar{z}) - \frac{dx}{dl}(\bar{z})\frac{dz}{2} - R_3\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right), y(\bar{z}) - \frac{dy}{dl}(\bar{z})\frac{dz}{2} - R_4\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right)\right) \\
 \Rightarrow \tau\left(\bar{z} + \frac{dz}{2}\right) - \tau\left(\bar{z} - \frac{dz}{2}\right) &= \left(\frac{dx}{dl}(\bar{z})dz + R_5\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right), \frac{dy}{dl}(\bar{z})dz + R_6\left(\bar{z}, \frac{dz}{2}\right)\right) \quad (2.19) \\
 &= \frac{d\tau}{dl}dz + o(dl)
 \end{aligned}$$

onde $o(dl)$ é um infinitesimal de dl . Logo,

$$f_{int}^z = \sigma_z \left[\frac{d\tau}{dl}dz + o(dz) \right] \cdot \mathbf{e}_r. \quad (2.20)$$

Desde que o vetor normal unitário à curva é definido por

$$\mathbf{n}(s) = \frac{d\tau}{dl} / \left\| \frac{d\tau}{dl} \right\|$$

e sua curvatura por

$$k(s) = \left\| \frac{d\tau}{dl} \right\|,$$

temos que

$$f_{int}^z = \sigma_z k \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r dl + o(dl) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (2.21)$$

Agora, usando (2.6), (2.15) e o fato que a curvatura de uma curva plana é dada por

$$k = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.22)$$

na expressão anterior, obtemos que

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{d\tau}{dl} \cdot \mathbf{e}_r dl + o(dl) \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.23)$$

$$= \sigma_z k \frac{1}{\|\nabla F\|} dl + o(dl) \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.24)$$

$$= \sigma_z k \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dz + o(dz) \quad (2.25)$$

O termo $\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2$ torna o modelo não-linear, porém, uma vez que $\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 < \frac{\partial R}{\partial z}$ o mesmo pode ser desprezado. Levando em consideração que $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$ obtemos uma expressão linear para a componente radial dos esforços longitudinais

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz + o(dz). \quad (2.26)$$

Assim, a componente radial dos esforços internos será expressa por

$$\mathbf{f}_{int} = (\mathbf{f}_{int}^\theta + \mathbf{f}_{int}^z) = -\frac{E}{1-\zeta^2} \frac{\eta}{R_0} d\theta + o(d\theta) + \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz + o(dz).$$

2.3 Equação do movimento da parede

A massa do elemento dS da parede do vaso sob consideração é

$$\text{densidade} \times \text{volume} = \bar{\rho} h R d\theta dl = \bar{\rho} h_0 R_0 d\theta dl,$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade da parede. A segunda igualdade deve-se a hipótese de incompressibilidade. Do balanceamento de forças temos que

$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a} = f_{int}^\theta \Sigma_\theta + f_{int}^z \Sigma_z + f_{ext} \Sigma_\Omega,$$

onde

$$\Sigma_z = h_0 dz, \Sigma_\theta = h_0 R_0 d\theta \text{ e } \Sigma_r = \|\nabla F\| R d\theta dz \quad (2.9)$$

representam as áreas da fronteira ∂V

ou seja, sendo $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ a aceleração da parede e usando (2.7) e (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \bar{\rho} R_0 h_0 d\theta dz \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = & -\frac{E h_0}{R_0(1-\zeta^2)} \eta d\theta dz + o(d\theta) + \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dz h_0 R_0 d\theta + o(dz) + \\ & + [(p - p_{ext}) - 2\mu(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\|] R d\theta dz. \end{aligned}$$

Dividindo-se a equação por $d\theta dz$ e aplicando o limite quando $d\theta \rightarrow 0$ e $dz \rightarrow 0$, obtém-se que

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} R_0 h_0 + \frac{E h_0}{R_0(1-\zeta^2)} \eta - \sigma_z h_0 R_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (p - p_{ext}) R - 2\mu(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\| R.$$

Portanto, concluímos que o movimento da parede satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + b\eta = c, \quad (2.27)$$

$$\text{onde, } a = \frac{\sigma_z}{\bar{\rho}}, b = \frac{E h_0}{\bar{\rho} R_0^2 (1-\zeta^2)} \text{ e } c = \frac{R}{\bar{\rho} R_0 h_0} [(p - p_{ext}) - 2\mu(D(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\|]$$

Modelo Unidimensional do Escoamento do Sangue em Artérias

Neste capítulo construiremos um modelo unidimensional para descrever o fluxo sanguíneo num trecho de artéria onde não há ramificação e é considerada sua interação com o deslocamento da parede do vaso.

Do ponto de vista microscópico, biologicamente o sangue é composto por plasma, hemácia, leucócitos e plaquetas, ou seja, diversas substâncias vivas, mas por outro lado, do ponto de vista da Mecânica dos Fluídos, o sangue pode ser descrito como um meio contínuo devido ao fato de se deformar quando submetido a qualquer tensão, por isso é considerado um fluido. Além disso, em vasos longos, podemos desconsiderar as diversas moléculas em suspensão no sangue e considerá-lo isotrópico.

A elevada proporção de água no plasma permite classificar o sangue como um fluido newtoniano e seu escoamento segue o regime laminar.

A derivação do modelo matemático do escoamento do sangue em artérias pode ser feita a partir das Equações de Navier-Stokes (1.1) que modelam um fluxo newtoniano e incompressível qualquer, e de sua interação com o deslocamento da parede, cujo modelo é dado pela equação (1.1). Para tal, consideraremos que a estrutura cilíndrica do vaso permanece durante o movimento de modo que o raio do vaso R depende apenas de z e t , e o deslocamento se dá apenas na direção radial $\eta = \eta \mathbf{e}_r$. Assim, a parede do vaso que faz fronteira com o domínio Ω_t ocupado pelo fluido será descrita por

$$\Gamma_t^p = \{(r, \theta, t) : r = R(z, t), \theta \in [0, 2\pi) \text{ e } (0, L)\},$$

onde

$$R(z, t) = \eta(z, t) + R_0(z, t_0). \quad (3.1)$$

Seja $S = S(z, t)$ a seção axial com área dada em coordenadas cilíndricas por

$$A(z, t) = \int_s r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\theta = \pi R^2 = \pi [\eta(z, t) + R_0(z)]^2 \quad (3.2)$$

Assumiremos também que as componentes da velocidade ortogonais ao eixo z são muito pequenas quando comparadas com a componente u_z e que sua expressão em coordenadas cilíndricas toma a forma

$$u_z(r, z, t) = \bar{u}(r, z, t) \phi \left(\frac{r}{R(z)} \right), \quad (3.3)$$

onde $\bar{u}$ é a velocidade média em cada seção axial e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um perfil de velocidade. A velocidade média $\bar{u}$ é então dada por

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_S u_z d\sigma, \quad (3.4)$$

onde $d\sigma$ é um elemento infinitesimal de S . De (3.3) segue que

$$A = \int_S \phi d\sigma.$$

Uma de nossas variáveis de trabalho será o fluxo médio, definido por

$$Q = \int_S u_z d\sigma = A\bar{u}. \quad (3.5)$$

Como assumimos uma velocidade média em cada seção, será necessário corrigir os efeitos locais da velocidade na equação do movimento. Para o caso unidirecional de um fluido homogêneo, introduz-se um coeficiente de correção do fluido α definido por

$$\alpha A \bar{u}^2 = \int_S u_z^2 d\sigma, \quad (3.6)$$

que, em nosso caso, tomaremos constante.

3.1 Derivação do Modelo

Considerando as hipóteses anteriores as equações de Navier-Stokes ao longo do eixo z podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \text{div}(u_z \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \mathcal{V} \Delta u_z = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (3.8)$$

com $z \in (0, L)$ e $t \in (0, T)$, e sobre a parede do vaso a velocidade do fluido na parede é igual a velocidade da parede, isto é, em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ a velocidade é dada por

$$\mathbf{u} = \frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}.$$

Seja $\mathcal{V}$ uma porção de Ω_t entre $z = z^* - \frac{dz}{2}$ e $z = z^* + \frac{dz}{2}$, com $z^* \in (0, L)$ e $dz > 0$ suficientemente pequeno tal que $z^* - \frac{dz}{2} > 0$ e $z^* + \frac{dz}{2} < L$. A fronteira desta seção será denotada por $\partial\mathcal{V} = \Gamma_{\mathcal{V}}^p \cup \Gamma_{\mathcal{V}}^f$, onde $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é a fronteira que coincide com a parede do vaso sanguíneo, e $\Gamma_{\mathcal{V}}^f$ corresponde as fronteiras fictícias da entrada e saída do domínio $\mathcal{V}$. Além disso, consideraremos que a fronteira $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é impermeável ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$).

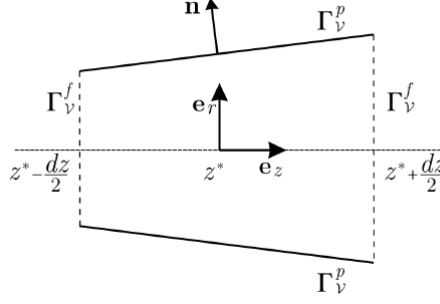


Figura 3.1 Representação da seção longitudinal na porção $\mathcal{V}$.

Fonte: [2]

Obteremos nosso modelo por integrar as equações (3.7) e (3.8) sobre $\mathcal{V}$ e tomar o limite quando $dz \rightarrow 0$. Antes, porém, demonstraremos um resultado preliminar que é fundamental para a integração dessas equações.

Lema 3.1.1. *Seja $f : \mathcal{V} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função axisimétrica com valor na parede Γ_V^p dado por f_p . Denotando por $\bar{f}$ e $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$ os valores médios da função f e da variação de $\bar{f}$ com relação ao tempo respectivamente, segue-se que*

$$\frac{\partial(\bar{f}A)}{\partial A} = A \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + 2\pi R \dot{\eta} f_p. \quad (3.9)$$

Demonstração. Pelo Teorema do Transporte de Reynolds (A.0.4) (1.0.1) e o uso na sequência do Teorema da Divergência (A.0.1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{v}) \right) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da fronteira de $\mathcal{V}$, $\partial\mathcal{V}$ e é dada por

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \dot{\eta} & \text{em } \Gamma_V^p \\ 0 & \text{em } \Gamma_V^f \end{cases}. \quad (3.11)$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais (A.0.5) temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} [\bar{f}(\bar{z})|\mathcal{V}|], \quad (3.12)$$

onde, $\bar{z} \in \left(z^* - \frac{dz}{2}, z^* + \frac{dz}{2} \right)$ e $|\mathcal{V}|$ é o volume.

Para dz suficientemente pequeno podemos considerar $\mathcal{V}$ um cilindro de área axial $A(z^*)$. Além disso, pelo Teorema de Taylor (A.0.6) temos que $\bar{f}(\bar{z}) = \bar{f}(z^*) + o(dz)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} &= \frac{d}{dt} \left[A(z^*) \left(z^* - \frac{dz}{2}, z^* + \frac{dz}{2} \right) (\bar{f}(z^*) + o(dz)) \right] \\ &= \frac{d}{dt} [A(z^*) \bar{f}(z^*) dz + o(dz)]. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} = A(z^*) \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(z^*) dz + o(dz) \quad (3.13)$$

Levando em conta que $\eta = \eta e_r$ e (3.11) e o terceiro termo de (3.10) torna-se

$$\int_{\partial \mathcal{V}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} f \dot{\eta} e_r \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (3.14)$$

Por (3.14) e o Teorema do Valor Médio para integrais temos (A.0.5) que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} f \dot{\eta} e_r \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} f \dot{\eta} R d\theta dz \\ &= f_p(z^*) \dot{\eta}(z^*) R(z^*) \int_0^{2\pi} \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} dz d\theta \\ &= 2\pi f_p(z^*) \dot{\eta} R(z^*) dz + o(dz) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo (3.12), (3.13) e (3.15) em (3.10) obtem-se

$$\frac{d}{dt} [A(z^*) \bar{f}(z^*) dz + o(dz)] = A(z^*) \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(z^*) dz + 2\pi f_p(z^*) R(z^*) \dot{\eta}(z^*) dz + o(dz). \quad (3.16)$$

Dividindo (3.16) por dz e passando o limite quando $dz \rightarrow 0$ resulta em

$$\frac{\partial(fA)}{\partial t} = A \frac{\partial f}{\partial t} + 2\pi f_p R \dot{\eta}.$$

□

Começaremos a dedução de nosso modelo integrando a equação (3.8). Denotemos por S^- e S^+ as fronteiras fictícias de entrada e saída da porção $\mathcal{V}$, de forma que $\Gamma_{\mathcal{V}}^f = S^- \cup S^+$, e sejam também $-e_z$ e e_z os vetores normais a estas superfícies respectivamente.

Aplicando o Teorema da Divergência (A.0.1), e levando em consideração que a velocidade em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é dada por $\dot{\eta}$ temos

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{u}) d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^f} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{S^-} \mathbf{u} \cdot (-e_z) d\sigma + \int_{S^+} \mathbf{u} \cdot (e_z) d\sigma + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (3.17)$$

onde usaremos o fato que a parede $\mathbf{u} = \dot{\eta} = \dot{\eta} \mathbf{e}_r$. como as fronteiras são permeáveis, as duas primeiras parcelas na expressão acima representa a variação de entrada e saída nas fronteiras S^- e S^+

$$\Delta Q = \int_{S^+} u_z d\sigma - \int_{S^-} u_z d\sigma.$$

Por outro lado, fazendo $f = 1$ em (3.15) obtemos a expressão

$$\int_{\Gamma_V^p} \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\pi \dot{\eta}(z^*) R(z^*) dz + o(dz) \quad (3.18)$$

e por meio do Lema (3.1.1) segue que

$$\frac{\partial A}{\partial t}(z^*) = 2\pi \dot{\eta}(z^*) R(z^*). \quad (3.19)$$

Assim, substituindo (3.19) em (3.18) e o resultado substituindo em (3.17), dividindo a expressão obtida por dz e aplicando o limite quando $dz \rightarrow 0$, obtemos uma nova expressão para a equação de continuidade

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.20)$$

Usaremos a mesma estratégia para a equação do momento (3.7) integraremos cada parcela sobre $\mathcal{V}$ e consideraremos o limite quando dz tende a zero.

No primeiro termo, pelo Teorema do Transporte de Reynolds (A.0.4) e do Teorema da Divergência (A.0.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_z d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \text{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \int_{\mathcal{V}} \text{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma^p} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\zeta + \int_{\Gamma^f} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\zeta = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

pois $u_z = 0$ na parede do vaso e $\mathbf{v} = 0$ na parede fictícia por (3.11).

Utilizando a expressão (3.12) reescrevemos (3.21) da seguinte forma

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_z d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} [A(z^*) \bar{u}(z^*) dz + o(dz)] \quad (3.22)$$

Como $Q = A\bar{u}$,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z}(z^*) dz + o(dz). \quad (3.23)$$

Agora, integrando o segundo termo de (3.7) temos

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}} u_z \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{S^-} u_z \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{e}_z) d\sigma + \int_{S^+} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z d\sigma + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (3.24)$$

e como dito anteriormente, $u_z = 0$ na parede do vaso e $\mathbf{v} = 0$ na parede fictícia, por (3.11), de forma que a integral na última parcela é nula.

Assim, utilizando o Teorema do Valor Médio (A.0.5) e considerando também o fator de correção do fluxo médio dado em (3.6) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} &= - \int_{S^-} u_z^2 d\sigma + \int_{S^+} u_z^2 d\sigma \\ &= -\alpha A \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) \bar{u}^2 \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) + \alpha A \left(z^* + \frac{dz}{2} \right) \bar{u}^2 \left(z^* + \frac{dz}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= \alpha \frac{\partial A \bar{u}^2}{\partial z} (z^*) dz + o(dz) \quad (3.26)$$

onde mais uma vez fizemos uso do Teorema de Taylor (A.0.6) para a função $A \bar{u}^2$.

Para a terceira componente da equação (3.7), com p é constante em cada seção axial por hipótese, segue do Teorema da Divergência (A.0.1) que

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = - \int_{S^-} p d\sigma + \int_{S^+} p d\sigma + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} p n_z d\sigma, \quad (3.27)$$

pois as componentes dos vetores normais a S^- e S^+ são -1 e 1 respectivamente e n_z é a terceira componente do vetor normal a parede do vaso $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$. Assim,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = A \left(z^* + \frac{dz}{2} \right) p \left(z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) p \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} p n_z d\sigma, \quad (3.28)$$

Escrevendo $n_z = (0, 0, 1) \cdot \mathbf{n}$ temos que

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(0, 0, 1) d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}} (0, 0, 1) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial\mathcal{V}} n_z d\sigma = \int_{\Gamma^p} n_z d\sigma + \int_{\Gamma^f} n_z d\sigma \quad (3.29)$$

donde

$$\int_{\Gamma^p} n_z d\sigma = - \int_{\Gamma^f} n_z d\sigma$$

Levando em consideração que a pressão toma um valor médio no intervalo considerado, tomemos $p(z) = p(z^*) + o(dz)$, de forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} p n_z d\sigma &= p(z^*) \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} n_z d\sigma + o(dz) \\ &= -p(z^*) \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^f} n_z d\sigma + o(dz) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$= -p(z^*) \left[A \left(z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) \right] + o(dz) \quad (3.31)$$

substituindo (3.30) em (3.28) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = & A\left(z^* + \frac{dz}{2}\right) p\left(z^* + \frac{dz}{2}\right) - A\left(z^* - \frac{dz}{2}\right) p\left(z^* - \frac{dz}{2}\right) \\ & - p(z^*) \left[A\left(z^* + \frac{dz}{2}\right) - A\left(z^* - \frac{dz}{2}\right) \right] + o(dz), \end{aligned} \quad (3.32)$$

e, pelo Teorema de Taylor (A.0.6) segue-se que

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = \frac{\partial(Ap)}{\partial z}(z^*)dz - p(z^*)\frac{\partial A}{\partial z}(z^*)dz + o(dz).$$

Aplicando regra do produto para derivada temos

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = A \frac{\partial p}{\partial z}(z^*)dz + o(dz). \quad (3.33)$$

Por fim, consideremos o último termo da equação (3.7). Uma vez que $\Delta u_z = \text{div}(\nabla u_z)$, segue do Teorema da Divergência (A.0.1) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} &= \int_{\partial\mathcal{V}} \text{div}(\nabla u_z) = \int_{\partial\mathcal{V}} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\zeta \\ &= \int_{S^-} \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_{S^-} \frac{\partial u_z}{\partial z} dS + \int_{S^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} dS + \int_{\Gamma^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (3.34)$$

$-\mathbf{e}_z$ e $\mathbf{e}_z$ são os vetores normais as superfícies S^- e S^+ respectivamente.

A fim de obtermos uma maior simplificação do modelo, supõe-se que a variação da velocidade do fluido ao longo do eixo longitudinal z é relativamente pequena quando comparada com outros termos da equação. Assim, considera-se apenas a última integral de (3.34), de forma que

$$\int_{\Gamma_V^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma_V^p} (n_r \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r + n_z \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_z) d\sigma, \quad (3.35)$$

onde decompos $\mathbf{n}$ seguindo as direções $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_z$.

Como $n_z \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_z$ é da mesma ordem da grandeza que o termo $\frac{\partial u_z}{\partial z}$, pode ser desprezada, que resulta em

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_V^p} n_r \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r d\sigma \quad (3.36)$$

Calculamos ∇u_z através de (2.6):

$$\begin{aligned}\nabla u_z &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \phi(z) + \bar{u} \phi'(z) \left(\frac{1}{R(z)} \right), \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \phi + \bar{u} \phi'(z) \left(\frac{-rR'(z)}{R^2(z)} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\bar{u}}{R(z)} \phi'(z), -\frac{\bar{u}rR'(z)}{R^2(z)} \phi'(z) \right) \\ &= \frac{\bar{u}}{R(z)} \phi'(z) \left(1, \frac{-rR'(z)}{R(z)} \right)\end{aligned}$$

e como na parede do vaso, $r = R(z)$, temos $\phi'(z) = \phi'(1)$ e

$$\nabla u_z = \frac{\bar{u}}{R(z)} \phi'(1) \left(-R'(z) \right) \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.36)

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = \int_{\Gamma^p} n_r \frac{\bar{u}}{R(z)} \phi'(1) (1, -R'(z)) \cdot \mathbf{e}_r d\sigma$$

Por (2.9) temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \nabla u_z d\mathcal{V} &= \phi'(1) \int_{\Gamma^p} \bar{u} d\theta dz \\ &= \phi'(1) \int_{z^* + \frac{dz}{2}}^{z^* - \frac{dz}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{u} d\theta dz \\ &= 2\pi \phi'(1) \int_{z^* + \frac{dz}{2}}^{z^* - \frac{dz}{2}} \bar{u} dz \\ &= 2\pi \phi'(1) \bar{u}(z^*) dz.\end{aligned} \quad (3.38)$$

A partir da substituição de (3.22), (3.24), (3.32) e (3.37) em (3.7), temos a equação final do movimento, com ρ e $\mathcal{V}$ constantes

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(z^*) dz + \alpha \frac{\partial(A\bar{u}^2)}{\partial z}(z^*) dz + A \frac{\partial p}{\partial z}(z^*) + \mathcal{V} \Phi'(1) \bar{u}(z^*) 2\pi dz = 0.$$

Dividindo por dz e tomando o limite quando $dz \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial A\bar{u}^2}{\partial z} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \phi'(1) \bar{u} 2\pi \mathcal{V} = 0$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial A\bar{u}^2}{\partial z} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + K\bar{u} = 0, \quad (3.39)$$

onde, $K = -2\pi\phi'(1)\mathcal{V}$ é o parâmetro de fricção que depende do perfil de velocidades escolhido. Com α constante e $\bar{u} = \frac{Q}{A}$ temos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + K \frac{Q}{A} = 0. \quad (3.40)$$

Assim, a partir de (3.19) e (3.40) temos o sistema

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + K \frac{Q}{A} = 0 \quad (3.42)$$

que descreve o escoamento unidimensionais do sangue nas grandes artérias, onde A , Q e p são as incógnitas desse problema.

Como o número incógnitas de desconhecidas excede o número de equações, uma alternativa comum para o sistema é proporcionar uma relação algébrica entra a pressão e p e a área do vaso A .

Por exemplo,

$$p = p_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}),$$

com $\beta = \frac{\sqrt{\pi}h_0E}{(1-\nu^2)A_0}$, onde h_0 e $A_0 = A_0(x)$ denotando a espessura do vaso e a área seccional, respectivamente, $E(x)$ sendo o módulo de Young, p_{ext} a pressão externa e ν a razão de Poisson.

Considerações

Com objetivo deste trabalho alcançado, que foi a construção de um modelo unidimensional baseado em [2], pudemos comprovar o quão difícil e complexo é a modelagem do fluxo sanguíneo em artérias, mesmo fazendo algumas simplificações nas condições biológicas, porém não é impossível. Ressaltamos a importância e utilidade da modelagem unidimensional por seu custo computacional ser menor e também servir de base para o testes e obtenção de parâmetros para modelos em dimensões maiores.

Não foi objetivo deste trabalho a simulação computacional, contudo deixamos como planos futuros a implementação deste modelo. E a motivação para outros alunos da graduação seguirem na área ou área afim.

Referências Bibliográficas

- [1] BISTAFA, S. R. **Euler, Father of Hemodynamics**. Advances in Historical Studies, 7, p. 97-111. University of São Paulo, São Paulo, 2018.
- [2] CAIADO, D. V. **Modelação matemática do sistema cardiovascular**. Dissertação de mestrado. Mestrado Integrado em Engenharia Biológica, Portugal, 2006.
- [3] DANGELO, J. G. **Anatomia Humana: Sistêmica e Segmentar**. 3 ed. Atheneu, 2011.
- [4] FASANO, A.; SEQUEIRA, A. **Hemomath: The mathematics of blood**. Springer, 2017.
- [5] FORMAGGIA, L.; QUARTERONI, A.; VENEZIAN, A. **Cardiovascular mathematics: modeling and simulation of the circulatory system**. Springer, 2009.
- [6] FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: EdUsp, 2012.
- [7] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 1**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- [8] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [9] LORENZI, T. F. **Manual de Hematologia: Propedêutica e Clínica**. 4. ed. São Paulo: Guanabara Koogan, 2006.
- [10] MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M.J. **Elementary Classical Analysis** 2. ed. EUA: Freeman, 1993.
- [11] QUARTERONI, A.; FORMAGGIA, L. **Mathematical Modelling and Numerical Simulations of the Cardiovascular System**. em Modelling of living systems, Handbook of Numerical Analysis Series 12, p. 3-127. Amsterdã: Elsevier, 2004.
- [12] OPAS/BRASIL. **10 principais causas de morte no mundo** atualizado em maio de 2018. Disponível em: <https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_content&view=article&id=5638:10-principais-causas-de-morte-no-mundo&Itemid=0> Acesso em: 20 jan 2020.

Resultados auxiliares

Coletamos aqui os principais resultados matemáticos utilizados na dedução do modelo pretendido. Começamos com três teoremas vistos em geral num curso de Cálculo III. O primeiro estabelece uma relação entre uma integral da derivada de uma função sobre uma região tridimensional e a integral da função sobre a fronteira dessa região.

Teorema A.0.1. (Teorema da divergência)

Seja $V \in \mathbb{R}^n$ uma região fechada, limitada e regular em $\mathbb{R}^3$ com fronteira ∂V , e seja u um campo vetorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém V e ∂V . Então,

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{u}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\zeta,$$

onde $\mathbf{n}$ é a função vetor normal unitário apontado para fora de V .

Demonstração. Ver [8] □

O segundo teorema nos informa as integrais de uma função f após uma mudança de variável. Joga papel fundamental o Jacobiano da função realiza a mudança de variável.

Teorema A.0.2. (Teorema Mudança de Variável)

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e seja $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetiva de classe C^1 . Suponha que a matriz Jacobiana $J_\phi(x) \neq 0$ e $\det(J_\phi(x))$ é limitado para todo $x \in A$. Se $\phi(A) = V$ e $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então tal é $(f \circ \phi)\det(J_\phi)$ sobre A e

$$\int_V f dV = \int_A (f \circ \phi)\det(J_\phi) d\xi$$

onde dV e $d\xi$ são elementos de volume em V e A , respectivamente.

Demonstração. Ver [10] □

Já o terceiro resultado estabelece que a variação no tempo do Jacobiano de um fluxo f é proporcional ao divergente do campo de velocidades u .

Lema A.0.3. Seja $f : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ continuamente diferenciável e seja u o campo de velocidades desse fluxo. Então

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}(\mathbf{u}),$$

onde $J = \det(Jf)$.

Com base nesses resultados provamos um resultado fundamental em dinâmica de fluidos. Considere o fluxo $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ tal que $\varphi(\xi) = x(\xi, t)$, onde $x(\xi, t)$ é o vetor posição em Ω_t num determinado tempo t .

Teorema A.0.4. (Teorema do transporte de Reynolds)

Considere $V_0 \in \Omega_0$ e $V_t \in \Omega_t$ a imagem sob as aplicações $\mathcal{M}_t$. Seja $f : \Omega_t \times I \Rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável relativamente a x e t . Então,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, dx = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) \right) dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema (A.0.2) obtem-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, dx = \frac{d}{dt} \int_{V_0} (f \circ g) J \, d\xi,$$

onde $\hat{f} = (f \circ g)(\xi, t)$ e J é o Jacobiano da mudança de variáveis. Como V_0 não depende de t , pode-se fazer

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} (f \circ g) J \, d\xi = \int_{V_0} \frac{d}{dt} ((f \circ g) J) \, d\xi.$$

Aplicando a regra do produto para derivadas e com base no Lema (A.0.3), obtém-se

$$\int_{V_0} \frac{d}{dt} ((f \circ g) J) \, d\xi = \int_{V_0} \left(\frac{d(f \circ g)}{dt} J + (f \circ g) \frac{dJ}{dt} \right) d\xi = \left(\frac{d(f \circ g)}{dt} J + (f \circ g) \operatorname{div} \mathbf{u} \right) J d\xi. \quad (\text{A.1})$$

Através do Teorema (A.0.2), tem-se a seguinte relação:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial t} J \, d\xi = \int_{V_t} \frac{df}{dt} dx. \quad (\text{A.2})$$

Usando (A.1) em (A.2), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{V_t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) \right) dx. \end{aligned}$$

□

Na sequência, enunciaremos o Teorema do Valor Médio para Integrais e o Teorema de Taylor, bastantes utilizados em nossas aproximações para a dedução de nosso modelo

Teorema A.0.5. (Teorema do valor médio para integrais)

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e A tem volume e é conexo e compacto, então existe um $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f(x) \, dx = f(x_0)v(A),$$

onde $v(A)$ é o volume de A .

Demonstração. Ver [7] □

Teorema A.0.6. (Fórmula de Taylor com o resto de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n-1} , n vezes derivável no intervalo aberto (a, b) . Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Pondo $b = a + h$, isto equivale a dizer que existe θ , com $0 < \theta < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(h)^{n-1} + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}(h)^n.$$

Demonstração. Ver [7] □