



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$

Luiz Ricardo Abreu Melo

Orientador: *Prof. Dr. Samuel da Cruz Canevari*

São Cristóvão
Março de 2020

Superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$

Luiz Ricardo Abreu Melo

Orientador: Prof. Dr. Samuel da Cruz Canevari

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado a Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
VERSÃO REVISADA

Assinatura do Orientador

São Cristóvão

Março de 2020

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Melo, Luiz Ricardo de abreu
M528s Superfícies isotérmicas em R^3 / Luiz Ricardo de Abreu Melo ;
orientador Samuel da Cruz Canevari. – São Cristóvão, 2020.
63 f.;il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2020.

1. Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Isometria
(Matemática). 4. Superfícies mínimas. I. Canevari, Samuel da
Cruz orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Superfícies Isotérmicas em R^3

por

Luiz Ricardo Abreu Melo

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Samuel Da Cruz Canevari - UFS
Orientador

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Daniel Da Silveira Guimarães - UFG
Segundo Examinador

São Cristóvão
04 de Março de 2020

Agradecimentos

Meus agradecimentos à todos que me ajudaram nesses anos.

Aos meus pais e irmãos, José Ricardo de Melo, Maria Das Graças Abreu, Victor Ricardo Abreu Melo e Íthalo Ricardo Abreu Melo, ao meu primo Yalle Henrique Abreu e minha cadela Maia por toda paciência e apoio.

Ao meu orientador, Professor Samuel da Cruz Canevari, por toda orientação e pelo companheirismo desde a primeira disciplina com ele até agora.

Aos meus amigos Júnior, Ian, Gabriel, Antônio, Fernando e Thiago que me ajudaram nesses dois anos. Aos professores que fizeram parte do mestrado, lecionando disciplinas importantes que me proporcionaram uma boa compreensão do que escrevo aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho obtemos um método de obtenção de novos exemplos de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$, aplicando a transformação de superfícies em $\mathbb{R}^3$, devida a Darboux e Bianchi, a uma classe de superfícies mínimas. Como consequência desse método, obtemos novos exemplos de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$, aplicando tal método ao catenóide.

Palavras-chaves: Superfícies Isotérmicas, Transformada de Ribaucour, Transformada de Darboux-Bianchi, Superfícies mínimas.

Abstract

In this work we obtain a method of obtaining new examples of isothermal surfaces in $\mathbb{R}^3$ by applying the surface transformation in $\mathbb{R}^3$, due to Darboux and Bianchi, to a class of minimum surfaces. As a consequence of this method, we obtain new examples of isothermal surfaces in $\mathbb{R}^3$, applying this method to the catenoid.

Keywords: Isothermal surfaces, Ribaucour transform, Darboux-Bianchi transform, Minimal surfaces.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$	3
1.2 Transformação de Ribaucour	7
2 Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$	9
2.1 A transformação de Ribaucour para superfícies mínimas.	9
2.2 Uma abordagem diferente	14
2.3 Exemplos: superfícies associadas à superfície de Enneper	34
3 Superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$	37
3.1 A transformação de Darboux-Bianchi	37
3.2 A Transformação de Darboux-Bianchi: uma abordagem diferente	43
3.3 Exemplos de Superfícies Isotérmicas associadas ao Catenoide	59
Referências Bibliográficas	62

Introdução

Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é *isotérmica* se em uma vizinhança de qualquer ponto não umbílico existe um sistema de coordenadas conforme cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura. São exemplos clássicos de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$, as superfícies com curvatura média constante, as quádricas e as superfícies cujas linhas de curvatura têm curvatura geodésica constante.

É um problema clássico, da teoria de superfícies em $\mathbb{R}^3$, a obtenção de novos exemplos de uma dada classe de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Uma ferramenta bem aplicada com esse propósito é a Transformação de Ribaucour utilizada, inicialmente, por Bianchi [8] para obter novos exemplos de superfícies com curvatura Gaussiana constante a partir de uma dada superfície com curvatura gaussiana constante, em termos de soluções de um sistema linear de EDP's. Classicamente, duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ estão relacionadas por uma transformação de Ribaucour quando existe um difeomorfismo entre elas preservando as linhas de curvatura tal que as retas normais em pontos correspondentes se interceptam em um ponto que está equidistante de ambos.

A teoria geométrica clássica de transformações de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$ foi desenvolvida, inicialmente, por Bianchi [9] e Darboux [20]. Eles, com auxílio de uma transformação de Ribaucour conforme e que reverte a orientação, denominada Transformação de Darboux-Bianchi, desenvolveram um método de gerar famílias de novas soluções de um sistema não linear de EDP's, associado a uma superfície isotérmica em $\mathbb{R}^3$, a partir de uma dada, em termos de soluções de um sistema linear cujas equações de compatibilidade são precisamente as equações do sistema original. Essas novas famílias de soluções geram, via Teorema Fundamental, novas superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$. Uma apresentação dessa teoria pode ser encontrada em [2].

Tais teorias geométricas de transformações foram estendidas por Dajczer e Tojeiro [5] para subvariedades holonômicas de formas espaciais pseudo-Riemannianas de dimensão

e codimensão arbitrárias, isto é, subvariedades com fibrado normal plano e que admitem um sistema de coordenadas principais global. Como consequência derivaram um método de obter novos exemplos de subvariedades de $\mathbb{R}^{2n-1}$ de dimensão n e com curvatura seccional constante, em termos de soluções de um sistema linear de EDP's.

O principal objetivo desse trabalho é obter novos exemplos de superfícies isotérmicas, com auxílio da teoria de transformações desenvolvida por Dajczer e Tojeiro. Inicialmente, obtemos um método de obter novas parametrizações de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$, a partir de uma dada, em termos de soluções de um sistema linear de EDP's. Posteriormente, integramos o sistema linear de EDP's para uma classe de superfícies mínimas, utilizando a técnica utilizada por Lemes e Tenenblat [3], e obtemos novos exemplos de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$.

Descrevemos a seguir o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e teoremas que serão utilizados ao longo de todo esse trabalho. Afim de tornar o texto mais conciso e limpo, omitimos as demonstrações dos teoremas dessa seção e apresentamos as referências em que elas podem ser encontradas.

No segundo capítulo, apresentamos a transformação de Ribaucour, descrita em [5] e obtemos um método de obter novas superfícies mínimas, a partir de uma dada em termos de soluções de um sistema linear em EDP's. Posteriormente, reproduzindo as técnicas de Lemes e Tenenblat [3], integramos o sistema linear de EDP's para uma classe de superfícies mínimas cujo fator de conformidade satisfaz uma condição adicional, possibilitando, desta maneira aplicar o método à Superfície de Enneper e reobter os exemplos de superfícies mínimas [3].

No terceiro e último capítulo, apresentamos os nossos principais resultados e cumprimos os objetivos traçados neste trabalhos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições e conceitos. Entre as definições estão as superfícies regulares, superfícies mínimas e superfícies isotérmicas e a transformada de Ribaucour. Tais definições serão úteis ao longo deste trabalho, as demonstrações ao longo deste capítulo foram, em sua maior parte, omitidas, no entanto, colocamos a referência onde o leitor poderá encontrá-las.

1.1 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados básicos sobre superfícies regulares no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que

1. $\mathbf{x}$ é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo. Como $\mathbf{x}$ é contínua pela condição 1, isto significa que $\mathbf{x}$ tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.

3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Observação 1.2. Uma superfície S é dita compacta se S vista como um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ é compacto, isto é, fechado e limitado.

Definição 1.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ é dito *isotérmico* se $\mathbf{x}$ é uma aplicação conforme.

O significado geométrico da definição acima é que ângulos (mas não necessariamente comprimentos) são preservados (ver [2]). A próxima proposição dá uma caracterização dos sistemas de coordenadas isotérmicos em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental (ver, por exemplo, Proposição 2.4 em [2]).

Proposição 1.4. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ é isotérmico se, e somente se, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$.*

As expressões da primeira e segunda formas fundamentais em coordenadas locais é particularmente útil para estudar as direções principais e as curvaturas principais. Por exemplo, uma condição necessária e suficiente para que curvas coordenadas de uma parametrização sejam linhas de curvatura é que $F = f = 0$. E isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.5. Um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ é dito principal se as curvas coordenadas são linhas de curvatura.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ um sistema de coordenadas principal em S e $\{X_1, X_2\}$ um referencial ortonormal principal dado por $v_1^{-1} \frac{\partial}{\partial u_1} = X_1$ e $v_2^{-1} \frac{\partial}{\partial u_2} = X_2$, em que v_i , $i = 1, 2$ são funções diferenciáveis que não se anulam em U . Defina $V_i \in C^\infty(U)$ por

$$-dN(X_i) = v_i^{-1} V_i X_i \quad (1.1)$$

em que dN é a diferencial da aplicação de Gauss. Sejam $v = (v_1, v_2)$ e $V = (V_1, V_2)$, denominamos (v, V) o par associado a $\mathbf{x}$. Observe que as curvaturas principais de S em $\mathbf{x}(U)$ são dadas por

$$k_1 = \frac{V_1}{v_1} \text{ e } k_2 = \frac{V_2}{v_2}$$

e os coeficientes das formas fundamentais são dados por

$$E = v_1^2, F = 0, G = v_2^2, e = v_1 V_1, f = 0, e g = v_2 V_2. \quad (1.2)$$

Sabemos que o conhecimento da primeira e segunda formas fundamentais determinam a superfície localmente, aliando a isso as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi em um sistema de coordenadas principais temos a seguinte proposição (Ver, por exemplo, Teorema 1.3 em [2]).

Proposição 1.6. *A tripla (v, h, V) , em que $h_{ij} = \frac{1}{v_i} \frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais*

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji} v_j, \\ \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + V_i V_j = 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji} V_j, \end{cases} \quad (1.3)$$

em que $1 \leq i \neq j \leq 2$.

Reciprocamente, se (v, h, V) é uma solução de (1.3) num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo no qual v_i não se anula para nenhum $1 \leq i \leq 2$, então existe um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$, o qual é um sistema de coordenadas principal na superfície regular que possui (v, V) como par associado.

Introduziremos agora a classe de superfícies que estudaremos ao longo deste trabalho. Sua origem está ligada ao problema de Christoffel [12], que buscava encontrar superfícies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$ para as quais existe uma outra superfície regular $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ e um difeomorfismo conforme $\Psi : S \rightarrow \tilde{S}$, o qual não é a composição de uma homotetia e uma translação, tal que os planos tangentes a S e $\tilde{S}$ em pontos correspondentes são paralelos. Uma apresentação dessa caracterização das superfícies isotérmicas pode ser encontrada em [2].

Definição 1.7. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é isotérmica se, no subconjunto aberto de S formado por pontos não umbílicos¹, a rede ortogonal determinada por suas linhas de curvaturas é isotérmica. Equivalentemente, S é isotérmica se, em uma vizinhança de qualquer ponto não umbílico, existe um sistema de coordenadas isotérmico cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura.

¹Pontos umbílicos são pontos em que as curvaturas principais são iguais.

A próxima classe de superfícies que estudaremos são as superfícies mínimas que foram estudadas por J.L.Lagrange(1736 - 1813) juntamente com L.Euler (1707-1783) em problemas envolvendo máximos e mínimos. Porém, o estudo sistemático dessas superfícies teve início apenas no século XIX com J.A.F.Plateau (1801-1883) que conduziu extensivas pesquisas com bolhas de sabão e o problema já conhecido por Euler e Lagrange foi determinado Problema de Plateau[13].

Definição 1.8. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é mínima se sua curvatura média é nula em todos os pontos.

A próxima proposição estabelece a relação entre superfícies isotérmicas e superfícies mínimas (Ver, por exemplo, Proposição 2.13 em [2]).

Proposição 1.9. *Toda superfície mínima é isotérmica*

Observação 1.10. Se S é uma superfície regular mínima então pela proposição anterior podemos admitir que S possui um sistema de coordenadas isotérmico principal $\mathbf{x}$ e suas formas fundamentais são dadas por

$$I = v^2(du_1^2 + du_2^2)$$

$$II = \ell(du_1^2 - du_2^2)$$

em que $v_1 = v_2 = v$ e $\ell = V_1 v$.

Veremos agora a uma definição que nos auxiliará a definir a completude em superfícies.

Definição 1.11. Uma curva divergente em S é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow S$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset S$ existe um $t_0 \in [0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$ (i.e, α "sai" de todo subconjunto compacto de S). O comprimento de uma curva divergente é definido como

$$\int_0^\infty |\alpha'(t)| dt. \tag{1.4}$$

A definição de completude que usaremos é a seguinte¹.

¹Ela é equivalente à condição de completude do ponto de vista topológico, de que toda sequência de Cauchy converge.

Definição 1.12. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ não compacta² é dita completa se o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

Essa definição de completude dada por R. Osserman em [16] é equivalente a dada por M.P.do Carmo em [6], na qual uma superfície regular conexa S é completa quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ de S , começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$. A demonstração desse fato pode ser encontrado em [15].

1.2 Transformação de Ribaucour

Nesta seção, baseada em [5], apresentaremos alguns fatos básicos sobre a transformação de Ribaucour que serão úteis na seção seguinte. Considere duas superfícies regulares orientáveis, S e $\tilde{S}$, em $\mathbb{R}^3$, $\{X_1, X_2\}$ um referencial ortonormal principal em S , e N e $\tilde{N}$ suas respectivas aplicações de Gauss.

Definição 1.13. Dizemos que $\tilde{S}$ está associada a S por uma transformação de Ribaucour em relação a $\{X_1, X_2\}$ se existe uma função diferenciável $r : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ e um difeomorfismo $\Psi : S \rightarrow \tilde{S}$ tais que

$$i) \quad p + r(p)N(p) = \Psi(p) + r(p)\tilde{N}(\Psi(p)), \text{ para todo } p \in S;$$

$$ii) \quad \Psi \text{ preserva linhas de curvaturas};$$

$$iii) \quad \text{Para todo } p \in S, r^{-1}(p) \text{ não é uma curvatura principal de } S \text{ em } p.$$

Observe que a condição (i) significa geometricamente que as retas normais a S e $\tilde{S}$ em p e $\Psi(p)$, respectivamente, se interceptam em um ponto cuja distância comum a p e $\Psi(p)$ é $r(p)$. A condição (iii) aparece por razões técnicas para garantir a integrabilidade do sistema (existência de solução).

Fixada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, o próximo teorema, provado por Dajczer e Tojeiro [5], determina todas as superfícies regulares $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ que são transformadas de Ribaucour de S .

²Uma superfície compacta é completa, aqui usamos a condição de completude do ponto de vista topológico, ver [6].

Teorema 1.14. *Sejam S uma superfície regular e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ com par associado (v, V) . Então $\tilde{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$, dada por,*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2\nu\varphi\mathcal{F}, \quad (1.5)$$

é um sistema de coordenadas principal na superfície $\tilde{S}$ associada a S pela transformação de Ribaucour, em que $\mathcal{F} = \sum_i \gamma_i X_i + \beta N$, $\nu^{-1} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle := \vartheta$ e $(\varphi, \gamma, \beta) := (\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ é uma solução do sistema linear de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i, \\ \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = h_{ji} \gamma_i, \text{ para } i \neq j, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = -V_i \gamma_i. \end{cases} \quad (1.6)$$

Reciprocamente, dada uma solução $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ de (1.6) defina

$$B_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \gamma_j h_{ji} - \beta V_i, \quad i \neq j, \quad (1.7)$$

e seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto tal que $\tilde{v}_i := v_i - 2\varphi\nu B_i \neq 0$ e $\tilde{\mathbf{x}}$ definida por (1.5), seja injetora. Então $\tilde{\mathbf{x}}$ define um sistema de coordenadas principal de uma transformada de $V = \mathbf{x}(U)$. Além disso, o par $(\tilde{v}, \tilde{V})$ associado a $\tilde{\mathbf{x}}$ é dado por:

$$\tilde{v}_i = v_i - 2\varphi\nu B_i \quad \text{e} \quad \tilde{V}_i = V_i + 2\nu\beta B_i \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$

O objetivo deste capítulo é encontrar de forma explícita exemplos de superfícies mínimas, para este fim utilizaremos a transformação de Ribaucour. Por conseguinte resolveremos um sistema de equações diferenciais para uma classe de superfícies mínimas.

2.1 A transformação de Ribaucour para superfícies mínimas.

Nesta seção, encontraremos condições necessárias e suficientes para que transformação de Ribaucour associe duas superfícies mínimas. Este resultado permite obter exemplos de superfícies mínimas a partir de uma superfície mínima conhecida.

Proposição 2.1. *Seja S uma superfície mínima e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ com par associado (v, V) . Então, dado m uma constante real diferente de zero, o sistema linear de EDPs*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i \\ (ii) \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = h_{ji} \gamma_i, \quad i \neq j, \\ (iii) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = -\gamma_j h_{ji} - m \beta v_i + (m \varphi + \beta) V_i, \\ (iv) \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = -V_i \gamma_i \end{array} \right. \quad (2.1)$$

é completamente integrável e possui a integral primeira

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 + 2m\varphi\beta = C \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Demonstração: O sistema formado pelas equações (i), (ii) e (iv) é totalmente integrável pelo Teorema 1.14. Desta forma, precisamos mostrar apenas que

$$\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_j \partial u_i}, \quad i \neq j.$$

Derivando (ii) temos que

$$\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_{ij} \gamma_j \right) = \gamma_j \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + h_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = -\gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} - \gamma_j V_i V_j + h_{ij} h_{ji} \gamma_i.$$

Por outro lado, derivando (iii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_j \partial u_i} &= -\frac{\partial \gamma_j}{\partial u_j} h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(-m\beta v_i + (m\varphi + \beta) V_i \right) \\ &= -\left(-\gamma_i h_{ij} - m\beta v_j + (m\varphi + \beta) V_j \right) h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(-m\beta v_i + (m\varphi + \beta) V_i \right) \\ &= -\left(-\gamma_i h_{ij} - m\beta v_j + (m\varphi + \beta) V_j \right) h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} \\ &\quad - m v_i \frac{\partial \beta}{\partial u_j} - m\beta \frac{\partial v_i}{\partial u_j} + m V_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + m\varphi \frac{\partial V_i}{\partial u_j} + V_i \frac{\partial \beta}{\partial u_j} + \beta \frac{\partial V_i}{\partial u_j} \\ &= -\left(-\gamma_i h_{ij} - m\beta v_j + (m\varphi + \beta) V_j \right) h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} \\ &\quad + m v_i V_j \gamma_j - m\beta h_{ji} v_j + m V_i v_j \gamma_j + m\varphi h_{ji} V_j - V_i V_j \gamma_j + \beta h_{ji} V_j \\ &= -\left(-\gamma_i h_{ij} - m\beta v_j + (m\varphi + \beta) V_j \right) h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} - m\beta h_{ji} v_j + m\varphi h_{ji} V_j \\ &\quad - V_i V_j \gamma_j + \beta h_{ji} V_j \\ &= \gamma_i h_{ij} h_{ji} - \gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} - V_i V_j \gamma_j. \end{aligned}$$

Donde segue a integrabilidade do sistema [14].

Para a integral primeira, note que para $(i \neq j)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma_i^2 + \gamma_j^2 + \beta^2 + 2m\varphi\beta) &= 2\gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + 2\gamma_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial u_i} + 2m\varphi \frac{\partial \beta}{\partial u_i} + 2m\beta \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \\
 &= 2\gamma_i \left(-\gamma_j h_{ji} - m\beta v_i + (m\varphi + \beta)V_i \right) + 2\gamma_j h_{ji} \gamma_i - 2\beta V_i \gamma_i \\
 &\quad - 2m\varphi V_i \gamma_i + 2m\beta v_i \gamma_i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 + 2m\varphi\beta = C$, onde $C \in \mathbb{R}$ ■

O próximo teorema dá condições necessárias e suficientes para que a transformada de Ribaucour de uma superfície mínima seja mínima.

Teorema 2.2. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas principal de uma superfície regular mínima S , em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ com par associado (v, V) . Se a transformada de Ribaucour de $\mathbf{x}$ determinada pela solução $(\varphi, \gamma, \beta) := (\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ de (2.1) é mínima e as funções B_i , $i = 1, 2$, dadas por (1.7) são não nulas em todos os pontos de U , então $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ satisfaz*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 + 2m\varphi\beta = 0. \quad (2.3)$$

Reciprocamente, se $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ é uma solução de (2.1) satisfazendo (2.3) em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ como no Teorema 1.14, então a transformada de Ribaucour de $\mathbf{x}$ determinada por $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ é mínima.

Demonstração: Usando o fato que $\tilde{k}_i = \frac{\tilde{V}_i}{\tilde{v}_i}$ e que em uma superfície mínima a curvatura média é zero temos que $\tilde{\mathbf{x}}$ é mínima se, e somente se

$$\tilde{v}_2 \tilde{V}_1 + \tilde{v}_1 \tilde{V}_2 = 0 \quad (2.4)$$

que por (1.8) é equivalente a

$$\begin{aligned}
 0 &= (v_2 - 2\varphi\nu B_2)(V_1 + 2\nu\beta B_1) + (v_1 - 2\varphi\nu B_1)(V_2 + 2\nu\beta B_2) \\
 &= 2\nu B_1 v_2 \beta - 2\nu B_1 V_2 \varphi + 2\nu B_2 v_1 \beta - 2\nu B_2 V_1 \varphi - 8\nu^2 B_1 B_2 \varphi \beta \\
 &= B_1(v_2 \beta - V_2 \varphi) + B_2(v_1 \beta - V_1 \varphi) + 2\nu B_1 B_2(-2\varphi\beta).
 \end{aligned}$$

Faça

$$A_i = v_i\beta - V_i\varphi \quad e \quad \rho = -2\varphi\beta$$

Portanto, temos

$$0 = B_1A_2 + B_2A_1 + 2\nu B_1B_2\rho, \quad (2.5)$$

note que

$$B_i = -mA_i, \quad (2.6)$$

em que m é uma constante real diferente de zero. De fato,

$$\begin{aligned} B_i = -mA_i &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \gamma_j h_{ji} - \beta V_i &= -m(v_i\beta - V_i\varphi) \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} &= -\gamma_j h_{ji} - m\beta v_i + (m\varphi + \beta)V_i \end{aligned}$$

Então de (2.5) e (2.6) temos

$$-2m(1 - \nu\rho m)A_1A_2 = 0.$$

Como B_i nunca se anula e m é diferente de zero segue que $\nu^{-1} = m\rho = -2m\varphi\beta$. Logo

$$\nu^{-1} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 = -2m\varphi\beta^1$$

■

Do resultado anterior temos o seguinte Corolário que dá a expressão da parametrização da transformada de Ribaucour de $\mathbf{x}$ e suas respectivas formas fundamentais.

Corolário 2.3. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas isotérmico principal de uma superfície regular mínima S e (v, V) seu par associado. Se $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ é uma solução de (2.1) satisfazendo (2.3) em $U \subset \mathbb{R}^2$ como no Teorema 1.14, então a*

¹A recíproca é obtida usando as mesmas equações mas partindo de (2.3) e obtendo (2.4).

transformação de Ribaucour de $\mathbf{x}$ determinada por $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta)$ é dada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{1}{m\beta} (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N) \quad (2.7)$$

e suas respectivas formas fundamentais são dadas por

$$\tilde{I} = \left(\frac{\ell\varphi}{\beta v} \right)^2 (du_1^2 + du_2^2) \quad (2.8)$$

$$\tilde{II} = \ell(du_1^2 - du_2^2) \quad (2.9)$$

em que $v_1 = v_2 = v$ e $\ell = V_1 v$.

Demonstração: Temos que (2.7) decorre diretamente de (1.5) e (2.3). De fato, desta temos que $\nu^{-1} = -2m\varphi\beta$ e daquela temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - 2\nu\varphi (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N) \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{m\beta} (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N) \end{aligned}$$

Para encontrarmos as formas fundamentais de $\tilde{\mathbf{x}}$ usaremos (1.8), (2.6) e (2.3), daí

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= v_1 - 2\varphi\nu B_1 \\ &= v_1 + \frac{\varphi}{m\varphi\beta} B_1 \\ &= v_1 - \frac{1}{\beta} A_1 \\ &= v_1 - v_1 + \frac{V_1\varphi}{\beta} \\ &= \frac{V_1\varphi}{\beta} \\ &= \frac{\ell\varphi}{v\beta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analogamente $\tilde{v}_2 = -\frac{\ell\varphi}{v\beta}$. Como a transformação de Ribaucour preserva linhas de curvatura temos que $\tilde{F} = 0$ e $\tilde{f} = 0$, então segue (2.8). Para a segunda forma temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_i &= V_i + 2\nu\beta B_i \\
&= V_i - \frac{2\beta}{2m\varphi\beta}(-\gamma_j h_{ji} - m\beta v_i + (m\varphi + \beta)V_i + \gamma_j h_{ji} - \beta V_i) \\
&= \frac{\beta v}{\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo de (2.10) e (2.11) segue que $\tilde{V}_1 \tilde{v}_1 = \ell$, analogamente $\tilde{V}_2 \tilde{v}_2 = -\ell$, ou seja

$$\tilde{II} = \ell(du_1^2 - du_2^2)$$

■

Observação 2.4. Um fato interessante que será visto com mais ênfase no capítulo seguinte é que se pode mostrar que nossa transformação de Ribaucour para superfícies mínimas é conforme e reverte orientação. Para isso veja a equação (3.4) que dá uma condição necessária e suficiente e note que $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = 0$.

2.2 Uma abordagem diferente

Nesta seção baseada em [3] adaptaremos o sistema de equações (2.1) com a notação de formas diferenciais. Depois disso com ferramentas de análise complexa encontraremos um sistema de equações equivalente a este. Em seguida, iremos resolvê-lo quando o coeficiente de conformidade da superfície mínima satisfaz uma condição adicional.

Sejam $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal de direções principal e $\{\omega_1, \omega_2\}$ o referencial dual de $\{e_1, e_2\}$. Denotaremos por ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ as formas de conexão de e_i [18]. Como podemos supor sem perda que a superfície mínima é parametrizada por linhas de curvaturas, a primeira forma fundamental é dada por $I = \sum_i \omega_i^2$, em que $\omega_i = \psi du_i$ e ψ é uma função diferenciável real. As direções principais são dadas pelos campos de vetores $e_i = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial u_i}$. Então,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\psi^2} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial u_j} \omega_i + \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \omega_j \right) = \frac{1}{\psi} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial u_j} du_i + \frac{\partial \psi}{\partial u_i} du_j \right). \tag{2.12}$$

Agora podemos reescrever o sistema (2.1) na linguagem de formas diferenciais obtendo

$$d\varphi = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \omega_i, \quad (2.13)$$

$$d\beta = - \sum_{i=1}^2 \gamma_i k_i \omega_i \quad (2.14)$$

$$d\gamma_i(e_j) = \gamma_j \omega_{ij}(e_j), \quad i \neq j \quad (2.15)$$

$$d\gamma_1(e_1) = -m\beta + m\varphi k_1 + \beta k_1 - \gamma_2 \omega_{21}(e_1) \quad (2.16)$$

$$d\gamma_2(e_2) = -m\beta + m\varphi k_2 + \beta k_2 - \gamma_1 \omega_{12}(e_2) \quad (2.17)$$

Agora reescreveremos o sistema de equações acima utilizando a notação de análise complexa.

Proposição 2.5. Seja S uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos com uma parametrização isotérmica cuja as curvas coordenadas são linhas de curvaturas então o sistema (2.1) com a condição adicional (2.2) é equivalente ao sistema

$$d\varphi_z = \left(\frac{\ell(m\varphi + \beta)}{2} + 2\varphi_z \psi_z \psi^{-1} \right) dz - \frac{m\beta \psi^2}{2} d\bar{z} \quad (2.18)$$

$$d\varphi_{\bar{z}} = -\frac{m\beta \psi^2}{2} dz + \left(\frac{\ell(m\varphi + \beta)}{2} + 2\varphi_{\bar{z}} \psi_{\bar{z}} \psi^{-1} \right) d\bar{z} \quad (2.19)$$

$$d\varphi = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z} \quad (2.20)$$

$$d\beta = -\frac{\ell\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} dz - \frac{\ell\varphi_z}{\psi^2} d\bar{z} \quad (2.21)$$

onde $z = x + iy \in U \subset \mathbb{C}$ e as primeira e segunda forma de S são

$$I = \psi^2 dz d\bar{z} \quad e \quad II = \frac{\ell}{2} (dz^2 + d\bar{z}^2) \quad (2.22)$$

*Demonstração:*¹ Da observação 1.10 temos

$$I = \psi^2 (dx^2 + dy^2) = \psi^2 dz d\bar{z}$$

e

$$II = \ell(dx^2 - dy^2) = \frac{\ell}{2} (dz^2 + d\bar{z}^2).$$

¹A demonstração desse resultado está na tese [3]. Para uma melhor compreensão do trabalho, iremos expor tal demonstração.

Mas

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

então, podemos considerar

$$\omega_1 = \psi dx = \frac{\psi}{2}(dz + d\bar{z}), \quad (2.23)$$

$$\omega_2 = \psi dy = \frac{\psi}{2i}(dz - d\bar{z}) = -i\frac{\psi}{2}(dz - d\bar{z}). \quad (2.24)$$

Derivando as equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{1}{2}(\psi_z dz \wedge d\bar{z} + \psi_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz) \\ &= \frac{\psi_z - \psi_{\bar{z}}}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ d\omega_2 &= \frac{1}{2i}(-\psi_z dz \wedge d\bar{z} + \psi_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz) \\ &= -\frac{\psi_z + \psi_{\bar{z}}}{2i} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Por outro lado, as direções principais da superfície isotérmica são dadas por¹:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\ e_2 &= \frac{i}{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} dz(e_1) &= \frac{1}{\psi}, & dz(e_2) &= \frac{i}{\psi}, \\ d\bar{z}(e_1) &= \frac{1}{\psi}, & d\bar{z}(e_2) &= -\frac{i}{\psi}. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$dz \wedge d\bar{z}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} dz(e_1) & dz(e_2) \\ d\bar{z}(e_1) & d\bar{z}(e_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi^{-1} & i\psi^{-1} \\ \psi^{-1} & -i\psi^{-1} \end{vmatrix} = -2i\psi^{-2}.$$

¹Para mais detalhes sobre o operador diferencial de Wirtinger veja [17].

Contudo,

$$\omega_{12}(e_1) = d\omega_1(e_1, e_2) = \frac{\psi_z - \psi_{\bar{z}}}{2} (-2i\psi^{-2}) = -i(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \quad (2.25)$$

$$\omega_{12}(e_2) = d\omega_2(e_1, e_2) = -\frac{\psi_z + \psi_{\bar{z}}}{2i} (-2i\psi^{-2}) = (\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \omega_{12}(e_1)\omega_1 + \omega_{12}(e_2)\omega_2 \\ &= \frac{-i(\psi_z - \psi_{\bar{z}})}{2}\psi^{-1}(dz + d\bar{z}) - \frac{i(\psi_z + \psi_{\bar{z}})}{2}\psi^{-1}(dz - d\bar{z}) \\ &= -i\psi_z\psi^{-1}dz + i\psi_{\bar{z}}\psi^{-1}d\bar{z}. \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de reescrever o sistema (2.13)- (2.17). Usando (2.23) e (2.24), segue de (2.13) que

$$\begin{aligned} d\varphi &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 \\ &= \frac{\gamma_1\psi}{2}(dz + d\bar{z}) - i\frac{\gamma_2\psi}{2}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2}dz + \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi}{2}d\bar{z}. \end{aligned}$$

Mas, $d\varphi = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}$, temos então que

$$\varphi_z = \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2} \quad e \quad \varphi_{\bar{z}} = \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi}{2}. \quad (2.27)$$

Segue de (2.14), (2.23) e (2.24) que

$$\begin{aligned} d\beta &= -\gamma_1 k_1 \omega_1 + \gamma_2 k_1 \omega_2 \\ &= -\frac{\gamma_1 k_1 \psi}{2}(dz + d\bar{z}) - i\frac{\gamma_2 k_1 \psi}{2}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{\psi}{2}(-\gamma_1 k_1 - i\gamma_2 k_1)dz + \frac{\psi}{2}(-\gamma_1 k_1 + i\gamma_2 k_1)d\bar{z} \\ &= -\varphi_{\bar{z}} k_1 dz - \varphi_z k_1 d\bar{z} \\ &= -\ell\psi^{-2}\varphi_{\bar{z}} dz - \ell\psi^{-2}\varphi_z d\bar{z}. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos por (2.15) que

$$d\gamma_i(e_j) = \gamma_j\omega_{ij}(e_j), \quad \text{para } i \neq j.$$

Utilizando (2.25) e (2.26), temos que:

$$\begin{aligned} d\gamma_1(e_2) &= \gamma_2\omega_{12}(e_2) \\ &= \gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(e_1) &= \gamma_1\omega_{21}(e_1) \\ &= i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Segue de (2.16) e (2.17) que

$$\begin{aligned} d\gamma_1(e_1) &= -m\beta + m\varphi k_1 + \beta k_1 - \gamma_2\omega_{21}(e_1), \\ &= -m\beta + m\varphi k_1 + \beta k_1 - i\psi^{-2}\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}}) \\ &= -m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - i\psi^{-2}\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(e_2) &= -m\beta + m\varphi k_2 + \beta k_2 - \gamma_1\omega_{12}(e_2), \\ &= -m\beta + m\varphi k_2 + \beta k_2 - \psi^{-2}\gamma_1(\psi_z + \psi_{\bar{z}}) \\ &= -m\beta - m\varphi\ell\psi^{-2} - \beta\ell\psi^{-2} - \psi^{-2}\gamma_1(\psi_z + \psi_{\bar{z}}). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Queremos encontrar $d\varphi_z$ e $d\varphi_{\bar{z}}$, em termos de dz e $d\bar{z}$. Para isso, vamos calcular $d\varphi_z(v_1)$, $d\varphi_z(v_2)$, $d\varphi_{\bar{z}}(v_1)$ e $d\varphi_{\bar{z}}(v_2)$, onde

$$v_1 = \psi^{-1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{e_1 - ie_2}{2} \quad e \quad v_2 = \psi^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e_1 + ie_2}{2}.$$

Como

$$\varphi_z = \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2}$$

segue que

$$d\varphi_z = \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)d\psi + \psi(d\gamma_1 - id\gamma_2)].$$

Aplicando em v_1 temos

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_1) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_1) - id\gamma_2(v_1))] \\ &= \psi_z\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{2}[(d\gamma_1(v_1) - id\gamma_2(v_1))]. \end{aligned}$$

Precisamos então calcular $d\gamma_1(v_1)$ e $d\gamma_2(v_1)$, mas

$$\begin{aligned} d\gamma_1(v_1) &= \frac{1}{2}[d\gamma_1(e_1) - id\gamma_1(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}[-m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - i\psi^{-2}\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}}) - i\gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}] \\ &= \frac{1}{2}[-m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - 2i\gamma_2\psi_z\psi^{-2}], \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(v_1) &= \frac{1}{2}[d\gamma_2(e_1) - id\gamma_2(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}[i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} + im\beta + im\varphi\ell\psi^{-2} + i\beta\ell\psi^{-2} + i\psi^{-2}\gamma_1(\psi_z - i\psi_{\bar{z}})] \\ &= \frac{i}{2}[m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} + 2\gamma_1\psi_z\psi^{-2}] \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde usamos de (2.28) a (2.31). Com isso, temos

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_1) &= \psi_z\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{4} \left[\left(-m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - 2i\gamma_2\psi_z\psi^{-2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\psi}{4} \left[\left(m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} + 2\gamma_1\psi_z\psi^{-2} \right) \right] \\ &= \psi_z\psi^{-2}\varphi_z + \frac{(m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-1}}{2} + \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.27) temos

$$d\varphi_z(v_1) = \frac{(m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-1}}{2} + 2\varphi_z\psi_z\psi^{-2}, \tag{2.34}$$

analogamente, temos

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_2) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_2) - id\gamma_2(v_2))] \\ &= \psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{2}[(d\gamma_1(v_2) - id\gamma_2(v_2))], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_1(v_2) &= \frac{1}{2}[d\gamma_1(e_1) + id\gamma_1(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}[-m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - i\psi^{-2}\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}}) + i\gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}] \\ &= \frac{1}{2}\left[-m\beta + (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} + 2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(v_2) &= \frac{1}{2}[d\gamma_2(e_1) + id\gamma_2(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} - im\beta - im\varphi\ell\psi^{-2} - i\beta\ell\psi^{-2} - i\psi^{-2}\gamma_1(\psi_z + i\psi_{\bar{z}})\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[-m\beta - (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} - 2\gamma_1\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_2) &= \psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{4}\left[(-m\beta + (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} + 2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}\psi^{-2})\right] \\ &\quad + \frac{\psi}{4}\left[-m\beta - (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} - 2\gamma_1\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\right] \\ &= \psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{4}\left[-2m\beta - 2(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\right] \\ &= -\frac{m\beta\psi}{2}. \end{aligned}$$

Mas $d\varphi_z = d\varphi_z(v_1)\psi dz + d\varphi_z(v_2)\psi d\bar{z}$. Logo

$$\begin{aligned} d\varphi_z &= \left[\frac{(m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-1}}{2} + 2\varphi_z\psi_z\psi^{-2}\right]\psi dz - \frac{m\beta\psi^2}{2}d\bar{z}, \\ &= \left(\frac{\ell(m\varphi + \beta)}{2} + 2\varphi_z\psi_z\psi^{-1}\right)dz - \frac{m\beta\psi^2}{2}d\bar{z}. \end{aligned}$$

De modo análogo de (2.27) temos que

$$\begin{aligned} d\varphi_{\bar{z}}(v_1) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_1) + id\gamma_2(v_1))] \\ &= \psi_z\psi^{-2}\varphi_{\bar{z}} + \frac{\psi}{2}[d\gamma_1(v_1) + id\gamma_2(v_1)], \\ d\varphi_{\bar{z}}(v_2) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_2) + id\gamma_2(v_2))] \\ &= \psi_{\bar{z}}\psi^{-2}\varphi_{\bar{z}} + \frac{\psi}{2}[d\gamma_1(v_2) + id\gamma_2(v_2)]. \end{aligned}$$

Segue de (2.32) a (2.37) que

$$\begin{aligned}
d\varphi_{\bar{z}}(v_1) &= \psi_z \psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} + \frac{\psi}{2} [(d\gamma_1(v_1) + id\gamma_2(v_1))] \\
&= \psi_z \psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} + \frac{\psi}{4} [-m\beta + m\varphi\ell\psi^{-2} + \beta\ell\psi^{-2} - 2i\gamma_2\psi_z\psi^{-2}] \\
&\quad + \frac{\psi}{4} [-m\beta - m\varphi\ell\psi^{-2} - \beta\ell\psi^{-2} - 2\gamma_1\psi_z\psi^{-2}] \\
&= \psi_z \psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} - \frac{m\beta\psi}{2} - \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi\psi_z\psi^{-2}}{2} \\
&= -\frac{m\beta\psi}{2}, \\
d\varphi_{\bar{z}}(v_2) &= \frac{1}{2} [(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_2) + id\gamma_2(v_2))] \\
&= \psi_{\bar{z}}\psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} + \frac{\psi}{4} [-m\beta + (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} + 2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}] \\
&\quad + \frac{\psi}{4} [m\beta + (m\varphi\ell + \beta\ell)\psi^{-2} + 2\gamma_1\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}] \\
&= \frac{\ell(m\varphi + \beta)\psi^{-1}}{2} + 2\varphi_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}}\psi^{-2}.
\end{aligned}$$

Como $d\varphi_{\bar{z}} = d\varphi_{\bar{z}}(v_1)\psi dz + d\varphi_{\bar{z}}(v_2)\psi d\bar{z}$. Logo

$$d\varphi_{\bar{z}} = -\frac{m\beta\psi^2}{2}dz + \left[\frac{\ell(m\varphi + \beta)}{2} + 2\varphi_{\bar{z}}\psi_{\bar{z}}\psi^{-1} \right] d\bar{z}.$$

■

Desse resultado originam-se dois corolários, o primeiro adapta a condição inicial (2.3) ao sistema reformulado e o segundo dá a expressão da parametrização ao novo sistema.

Corolário 2.6. A condição (2.3) pode ser expressa por

$$4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \beta^2 = -2m\varphi\beta \quad (2.38)$$

Demonstração: Segue de (2.27) que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2}, \quad (2.39)$$

portanto (2.3) se reduz a (2.38).

■

Observação 2.7. Segue do corolário anterior que

$$(4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \beta^2 + 2m\varphi\beta)(z_0) = 0. \quad (2.40)$$

para algum $z_0 \in U$ passa a ser a condição inicial do sistema de equações (2.18)-(2.21).

Corolário 2.8. Se S é uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos, orientável que tem uma parametrização $\mathbf{x}$ isotérmica por linhas curvatura, então a família $\tilde{\mathbf{x}}$ de isotérmicas associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Ribaucour é dada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{2\varphi_{\bar{z}}}{m\psi^2\beta}\mathbf{x}_z + \frac{2\varphi_z}{m\psi^2\beta}\mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m}N \quad (2.41)$$

Demonstração: Considere a parametrização $\mathbf{x}(x, y) = \mathbf{x}(z, \bar{z})$ onde $z = x + iy$. Pelo Corolário 2.3 segue que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{1}{m\beta}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \beta N) \quad (2.42)$$

Como $\mathbf{x}$ é parametrizada por linhas de curvatura, temos que $e_1 = \mathbf{x}_x\psi^{-1}$ e $e_2 = \mathbf{x}_y\psi^{-1}$ logo

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{\gamma_1 \mathbf{x}_x \psi^{-1}}{m\beta} + \frac{\gamma_2 \mathbf{x}_y \psi^{-1}}{m\beta} + \frac{1}{m}N$$

Considerando $\mathbf{x}$ como aplicação de $(z, \bar{z})$ temos que $\mathbf{x}_x = \mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}}$ e $\mathbf{x}_y = i(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}})$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \frac{\gamma_1 \psi^{-1}}{m\beta}(\mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}}) + \frac{i\gamma_2 \psi^{-1}}{m\beta}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}}) + \frac{1}{m}N \\ &= \mathbf{x} + \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi^{-1}}{m\beta}\mathbf{x}_z + \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi^{-1}}{m\beta}\mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m}N \\ &= \mathbf{x} + \frac{2\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2}}{m\beta}\mathbf{x}_z + \frac{2\varphi_z\psi^{-2}}{m\beta}\mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m}N \end{aligned}$$

■

Agora consideraremos uma classe especial de superfícies em $\mathbb{R}^3$ parametrizadas por coordenadas isotérmicas cujo fator de conformidade satisfaz uma condição adicional. E mostraremos que uma superfície mínima sob essas condições tem-se que $\ell = k_1\psi^2$ é uma constante real.

Proposição 2.9. Seja $\mathbf{x}(z, \bar{z})$ uma superfície parametrizada por coordenadas isotérmicas, isto é, $I = \psi^2 dz d\bar{z}$, e com curvatura gaussiana K . Se ψ satisfaz $\psi_{zz} = A^2\psi$, $A \in \mathbb{C}$ então $K\psi^4$ é uma constante real. Em particular se $\mathbf{x}(z, \bar{z})$ é mínima então $\ell = k_1\psi^2$ é

uma constante real.

Demonstração: Desde que $\mathbf{x}$ é uma parametrização ortogonal temos que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right)_x \right\} \\ &= -\frac{1}{2\psi^2} \left\{ \frac{\psi^2(\psi^2)_{yy} - (\psi^2)_y(\psi^2)_y}{\psi^4} + \frac{(\psi^2)_{xx}\psi^2 - (\psi^2)_x(\psi^2)_x}{\psi^4} \right\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^2}{\partial x} &= (\psi^2)_z + (\psi^2)_{\bar{z}} \\ \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial x^2} &= (\psi^2)_{zz} + 2(\psi^2)_{z\bar{z}} + (\psi^2)_{\bar{z}\bar{z}} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial y} &= i((\psi^2)_z - (\psi^2)_{\bar{z}}) \\ \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial y^2} &= -(\psi^2)_{zz} + 2(\psi^2)_{z\bar{z}} - (\psi^2)_{\bar{z}\bar{z}}. \end{aligned}$$

Então segue das equações acima que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\psi^2} \left\{ \frac{4(\psi^2)_{z\bar{z}}\psi^2 - 4(\psi^2)_z(\psi^2)_{\bar{z}}}{\psi^4} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\psi^2} \left\{ \frac{(8\psi_{\bar{z}}\psi_z + 8\psi\psi_{z\bar{z}})\psi^2 - 16\psi^2\psi_{\bar{z}}\psi_z}{\psi^4} \right\} \\ &= \frac{4\psi_{\bar{z}}\psi_z - 4\psi\psi_{z\bar{z}}}{\psi^4}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Suponha que ψ satisfaz $\psi_{zz} = A^2\psi$, $A \in \mathbb{C}$. Se $A \neq 0$, então

$$\psi = a_1 e^{Az + \bar{A}\bar{z}} + a_2 e^{-(Az + \bar{A}\bar{z})} + a_3 e^{Az - \bar{A}\bar{z}} + \bar{a}_3 e^{-(Az - \bar{A}\bar{z})} \tag{2.44}$$

onde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $a_3 \in \mathbb{C}$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \psi_{zz} &= \frac{\psi_{xx} - \psi_{yy} - 2i\psi_{xy}}{4} \\ \psi_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\psi_{xx} - \psi_{yy} + 2i\psi_{xy}}{4}, \end{aligned}$$

como ψ é real, segue das equações acima que $\psi_{zz} = \overline{\psi_{\bar{z}\bar{z}}}$ e portanto

$$\psi_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{A}^2\psi, \tag{2.45}$$

assumindo que $\psi_{zz} = A^2\psi$ temos

$$\psi = C(\bar{z})e^{Az} + D(\bar{z})e^{-Az}, \quad (2.46)$$

desta forma segue que

$$\psi_{\bar{z}\bar{z}} = C_{\bar{z}\bar{z}}e^{Az} + D_{\bar{z}\bar{z}}e^{-Az}.$$

Usando (2.45) temos

$$C_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{A}^2 C \quad e \quad D_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{A}^2 D,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C(\bar{z}) &= c_1 e^{\bar{A}\bar{z}} + c_2 e^{-\bar{A}\bar{z}}, \\ D(\bar{z}) &= d_1 e^{\bar{A}\bar{z}} + d_2 e^{-\bar{A}\bar{z}}, \end{aligned}$$

em que c_1, c_2, d_1 e $d_2 \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$\psi = c_1 e^{Az + \bar{A}\bar{z}} + c_2 e^{Az - \bar{A}\bar{z}} + d_1 e^{-Az + \bar{A}\bar{z}} + d_2 e^{-Az - \bar{A}\bar{z}}$$

e ainda por ψ ser real temos que $\psi = \bar{\psi}$, o que implica que $c_1 = \bar{c}_1, d_2 = \bar{d}_2$ e $c_2 = \bar{d}_1$ e concluimos que

$$\psi = a_1 e^{Az + \bar{A}\bar{z}} + a_2 e^{-Az - \bar{A}\bar{z}} + a_3 e^{Az - \bar{A}\bar{z}} + \overline{a_3} e^{-Az + \bar{A}\bar{z}}.$$

em que $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $a_3 \in \mathbb{C}$. Segue que

$$\psi_{z\bar{z}}\psi - \psi_{\bar{z}}\psi_z = 4|A|^2(a_1a_2 - |a_3|^2). \quad (2.47)$$

Nós concluimos de (2.43) e (2.47) que

$$K\psi^4 = -16|A|^2(a_1a_2 - |a_3|^2). \quad (2.48)$$

Similarmente, se $A = 0$ temos $\psi_{zz} = 0$ então

$$\psi = C(\bar{z})z + D(\bar{z}) \quad (2.49)$$

o que implica que

$$\psi_{zz} = C_{\bar{z}\bar{z}}z + D_{\bar{z}\bar{z}}$$

de (2.45) temos que $C_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ e $D_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, daí

$$\begin{aligned} C(\bar{z}) &= c_1\bar{z} + c_2, \\ D(\bar{z}) &= d_1\bar{z} + d_2, \end{aligned}$$

em que c_1, c_2, d_1 e $d_2 \in \mathbb{C}$ então

$$\psi = c_1z\bar{z} + c_2z + d_1\bar{z} + d_2,$$

como ψ é real segue que $\psi = \bar{\psi}$ por conseguinte $c_1 = \bar{c}_1, d_2 = \bar{d}_2$ e $c_2 = \bar{d}_1$ e temos

$$\psi = a_1z\bar{z} + a_3z + \bar{a}_3\bar{z} + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{C}. \quad (2.50)$$

Assim, $\psi_{z\bar{z}}\psi - \psi_{\bar{z}}\psi_z = -4(a_1a_2 - |a_3|^2)$. Ou seja,

$$K\psi^4 = -4(a_1a_2 - |a_3|^2).$$

■

No próximo teorema apresentaremos a solução para o sistema (2.18) – (2.21) quando o fator de conformidade da superfície mínima satisfaz a condição adicional vista acima. Esta solução ajudará a construir exemplos de superfícies mínimas.

Teorema 2.10. Seja $\psi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$\psi_{zz} = A^2\psi, \quad A \in \mathbb{C}. \quad (2.51)$$

Considere o sistema de equações (2.18) – (2.21) onde $\ell \neq 0$ e $m \neq 0$ são números reais e

seja

$$\eta = 2\sigma\sqrt{\frac{\ell m}{2} + A^2}, \quad \sigma = \pm 1 \quad (2.52)$$

Então $\varphi, \varphi_z, \varphi_{\bar{z}}$ e β são soluções do sistema (2.18) – (2.21) satisfazendo a condição inicial (2.40)

$$\varphi = -\frac{\psi F}{2m} \left[\frac{4}{\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right] \quad (2.53)$$

$$\varphi_z = \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right), \quad \varphi_{\bar{z}} = \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \quad e \quad \beta = \frac{F}{\psi} \quad (2.54)$$

Onde se $\eta \neq 0$, F é dado por

$$F(z, \bar{z}) = a_1 e^{\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_2 e^{-\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_3 e^{\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + \bar{a}_3 e^{-\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{C} \quad (2.55)$$

e se $\eta = 0$, F é dado por

$$F = a_1 z \bar{z} + a_3 z + \bar{a}_3 \bar{z} + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{C} \quad (2.56)$$

em que

$$a_1 a_2 - |a_3|^2 = 0. \quad (2.57)$$

Demonstração: De (2.21) nós temos

$$\begin{aligned} \beta_z &= -\ell \psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} \\ \beta_{zz} &= -\frac{\varphi_{\bar{z}z} \ell}{\psi^2} + \frac{2\psi_z}{\psi} \left(\frac{\ell \varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

portanto, segue de (2.19) que

$$\begin{aligned} \beta_{zz} &= \frac{\ell m \beta \psi^2}{2\psi^2} - \frac{2\psi_z}{\psi} \beta_z \\ &= \frac{\ell m}{2} \beta - \frac{2\psi_z}{\psi} \beta_z, \end{aligned} \quad (2.59)$$

analogamente, temos

$$\beta_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\ell m}{2} \beta - \frac{2\psi_{\bar{z}}}{\psi} \beta_{\bar{z}}.$$

Considerando $F = \psi\beta$, temos que

$$\begin{aligned} F_z &= \psi_z\beta + \psi\beta_z \\ F_{zz} &= \psi_{zz}\beta + 2\psi_z\beta_z + \psi\beta_{zz} \\ F_{zz} - \psi_{zz}\beta &= \psi\beta_{zz} + 2\psi_z\beta_z. \end{aligned}$$

Segue de (2.59) que

$$\psi\beta_{zz} + 2\psi_z\beta_z = \frac{\ell m \psi \beta}{2}$$

logo ,

$$F_{zz} - \psi_{zz}\beta = \frac{\ell m \psi \beta}{2} = \frac{\ell m F}{2},$$

portanto,

$$\begin{aligned} F_{zz} &= \frac{\ell m F}{2} + \frac{\psi_{zz}F}{\psi} \\ &= \left(\frac{\ell m}{2} + \frac{\psi_{zz}}{\psi} \right) F, \end{aligned}$$

analogamente,

$$F_{\bar{z}\bar{z}} = \left(\frac{\ell m}{2} + \frac{\psi_{\bar{z}\bar{z}}}{\psi} \right) F.$$

Mas, por (2.51) temos

$$\begin{aligned} F_{zz} &= \left(\frac{\ell m}{2} + A^2 \right) F \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \left(\frac{\ell m}{2} + \bar{A}^2 \right) F. \end{aligned}$$

Tomando

$$\eta = 2\sigma \sqrt{\frac{\ell m}{2} + A^2}$$

teremos

$$\begin{aligned} F_{zz} &= \frac{\eta^2}{4} F \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\bar{\eta}^2}{4} F. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema fazemos da mesma maneira que fizemos em (2.44) obtendo se $\eta \neq 0$

$$F(z, \bar{z}) = a_1 e^{\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_2 e^{-\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_3 e^{\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + \bar{a}_3 e^{-\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{C}$$

se $\eta = 0$ procedemos como em (2.50) e obtemos

$$F = a_1 z \bar{z} + a_3 z + \bar{a}_3 \bar{z} + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{C}.$$

Agora precisamos apenas encontra φ, φ_z , e $\varphi_{\bar{z}}$ em termos de F . Para isto, usamos a condição inicial (2.40) e o corolário 2.6, ou seja, sabemos que

$$\frac{4\varphi_z \varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \beta^2 = -2m\varphi\beta$$

ou ainda,

$$4\varphi_z \varphi_{\bar{z}} + F^2 = -2m\psi\varphi F. \quad (2.60)$$

Mas de (2.58) temos

$$\beta_z = -\frac{\ell \varphi_{\bar{z}}}{\psi^2},$$

segue que,

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}} &= -\frac{\psi^2 \beta_z}{\ell} = -\frac{\psi^2}{\ell} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{\psi} \right) \\ &= -\frac{\psi^2}{\ell} \left(\frac{F_z \psi - F \psi_z}{\psi^2} \right) \\ &= \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right). \end{aligned}$$

Analogamente de (2.21)

$$\beta_{\bar{z}} = -\frac{\ell \varphi_z}{\psi^2}$$

segue que

$$\begin{aligned}\varphi_z &= -\frac{\psi^2 \beta_{\bar{z}}}{\ell} = -\frac{\psi^2}{\ell} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{F}{\psi} \right) \\ &= -\frac{\psi^2}{\ell} \left(\frac{F_{\bar{z}} \psi - F \psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right) \\ &= \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right).\end{aligned}$$

Logo, demonstramos (2.54). De (2.60), temos

$$4\varphi_z \varphi_{\bar{z}} + F^2 = -2m\varphi\psi F$$

utilizando (2.54) ficamos com

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{2m\psi F} \left[\frac{4\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) + F^2 \right] \\ &= -\frac{\psi F}{2m} \left[\frac{4}{\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right].\end{aligned}$$

Da equação (2.20) temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_z$, assim por um lado de (2.53) temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \right] - \frac{F}{2m\psi} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \\ &\quad - \frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left[A^2 - \frac{\eta^2}{4} - \left(\frac{\psi_z}{\psi} + \frac{F_z}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \right] \\ &\quad - \frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} + \frac{F_z}{F} \right) \\ &= -\frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left(A^2 - \frac{\eta^2}{4} \right) - \frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{\ell^2}{4\psi^2} \right] \\ &= \frac{\psi F}{\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{\ell^2}{4\psi^2} \right],\end{aligned}$$

por outro lado φ_z é dado por (2.54), assim segue que

$$\frac{2\psi F}{m\ell^2} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{\ell^2}{4\psi^2} \right] = 0.$$

Como as funções ψ e F não se anulam, além disso $\left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right)$ não se anula num subconjunto

aberto, sendo $\ell \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{\ell^2}{4\psi^2} \\
&= \frac{\psi F (F_z \psi_{\bar{z}} + F \psi_{\bar{z}z} - F_{\bar{z}z}) - (F \psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}} \psi) (\psi_z F + \psi F_z)}{\psi^2 F^2} - \frac{\ell^2}{4\psi^2} \\
&= \psi F (F_z \psi_{\bar{z}} + F \psi_{\bar{z}z} - F_{\bar{z}z}) - F^2 \psi_z \psi_{\bar{z}} + F F_{\bar{z}} \psi \psi_z - F F_z \psi_{\bar{z}} \psi + \psi^2 F_z F_{\bar{z}} - \frac{\ell^2 F^2}{4} \\
&= F^2 \left(\psi \psi_{z\bar{z}} - \psi_z \psi_{\bar{z}} - \frac{\ell^2}{4} \right) - \psi^2 (F F_{\bar{z}z} - F_z F_{\bar{z}})
\end{aligned}$$

de (2.43) temos que $K\psi^2 = 4\psi_{\bar{z}}\psi_z - 4\psi\psi_{z\bar{z}}$, como ψ satisfaz (2.51) temos que $K\psi^2 = -\ell^2$, portanto

$$F F_{\bar{z}z} - F_z F_{\bar{z}} = 0$$

como $F_{zz} = \frac{\eta^2}{4}$ procedemos de forma análoga com que fizemos em (2.47) temos que para $\eta \neq 0$, $F F_{z\bar{z}} - F_z F_{\bar{z}} = |\eta|^2 (a_1 a_2 - |a_3|^2)$. Se $\eta = 0$ temos que $F F_{z\bar{z}} - F_z F_{\bar{z}} = -4(a_1 a_2 - |a_3|^2)$ e segue que

$$a_1 a_2 - |a_3|^2 = 0.$$

■

Observação 2.11. Considere F dada por (2.55), onde $\eta \neq 0$. Então F pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
F(z, \bar{z}) &= a_1 e^{\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_2 e^{-\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_3 e^{\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + \bar{a}_3 e^{-\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} \\
&= a_1 e^{\operatorname{Re} \eta z} + a_2 e^{-\operatorname{Re} \eta z} + a_3 e^{i \operatorname{Im} \eta z} + \bar{a}_3 e^{-i \operatorname{Im} \eta z} \\
&= (a_1 + a_2) \cosh \operatorname{Re} \eta z + (a_1 - a_2) \sinh(\operatorname{Re} \eta z) \\
&\quad + (a_3 + \bar{a}_3) \cosh(i \operatorname{Im} \eta z) + (a_3 - \bar{a}_3) \sinh(i \operatorname{Im} \eta z) \\
&= A_1 \cosh \operatorname{Re} \eta z + A_2 \sinh(\operatorname{Re} \eta z) \\
&\quad + A_3 \cosh(i \operatorname{Im} \eta z) - i A_4 \sinh(i \operatorname{Im} \eta z),
\end{aligned} \tag{2.61}$$

em que A_1, A_2, A_3 e $A_4 \in \mathbb{R}$

Do teorema anterior originam-se dois corolários, o primeiro apresenta de maneira

explícita as famílias de superfícies mínimas associadas por uma transformação de Ribaucour a uma outra superfície mínima dada desde que ela satisfaça o teorema anterior. O segundo corolário permite representar $F(z, \bar{z})$ dada por (2.61) de maneira mais simples.

Corolário 2.12. *Seja S uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, orientável, sem pontos umbílicos com uma parametrização isotérmica por linhas de curvatura $\mathbf{x}(z, \bar{z})$, com $I = \psi^2 dz d\bar{z}$. Suponha que ψ satisfaz (2.51), então*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \mathbf{x}_z + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N \quad (2.62)$$

é uma família de superfícies mínimas, localmente associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Ribaucour, onde ℓ e m são números reais não nulos e a função $F(z, \bar{z})$ é dada por (2.55) ou (2.56).

Demonstração: Segue do Corolário 2.8 que a superfície

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{2\varphi_{\bar{z}}}{m\psi^2\beta} \mathbf{x}_z + \frac{2\varphi_z}{m\psi^2\beta} \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N$$

está associada $\mathbf{x}$ por uma transformação de Ribaucour, onde m é uma constante real não nula, N é o vetor normal unitário de $\mathbf{x}$ e $\varphi_z, \varphi_{\bar{z}}, \beta$ são soluções do sistema (2.18) – (2.21). Porém, de (2.51) sabemos que $\psi_{zz} = A^2\psi$ e segue do Teorema 2.10 que

$$\varphi_z = \frac{F\psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\psi}{\ell}, \quad \varphi_{\bar{z}} = \frac{F\psi_z - F_z\psi}{\ell} \quad e \quad \beta = \frac{F}{\psi}$$

em que $F(z, \bar{z})$ é dado por (2.55) se $\eta \neq 0$ e é dado por (2.56) se $\eta = 0$. Logo, podemos escrever $\tilde{\mathbf{x}}$, da forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \frac{2(F\psi_z - F_z\psi)}{m\ell\psi^2\beta} \mathbf{x}_z + \frac{2(F\psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\psi)}{m\ell\psi^2\beta} \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N \\ &= \mathbf{x} + \frac{2(F\psi_z - F_z\psi)}{m\ell\psi F} \mathbf{x}_z + \frac{2(F\psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\psi)}{m\ell\psi F} \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N \\ &= \mathbf{x} + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \mathbf{x}_z + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.13. *Considere S uma superfície mínima satisfazendo o teorema anterior. Se $F(z, \bar{z})$ é a função dada por (2.61) com $\eta \neq 0$ então as constantes A_1, A_2, A_3 e A_4*

satisfazem a equação

$$-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = 0 \quad (2.63)$$

Além disso, se A_3, A_4 não se anulam simultaneamente, então F pode ser reescrita por

$$F(z, \bar{z}) = \lambda \cosh(\lambda \mu + \operatorname{Re} \eta z) + \operatorname{sen}(\tau + \operatorname{Im} \eta z) \quad (2.64)$$

em que $\mu, \tau \in \mathbb{R}, \lambda = \pm 1$.

Demonstração: Se S é uma superfície mínima satisfazendo o teorema anterior então $I = \psi^2 dz d\bar{z}$, $II = \frac{\ell}{2}(dz^2 + d\bar{z}^2)$ e existe A tal que $\psi_{zz} = A^2 \psi$. Além disso, F é dada por (2.61)

$$F(z, \bar{z}) = A_1 \cosh(\operatorname{Re} \eta z) + A_2 \sinh(\operatorname{Re} \eta z) + A_3 \cosh(i \operatorname{Im} \eta z) - i A_4 \sinh(i \operatorname{Im} \eta z).$$

Da Proposição 2.10 temos que $a_1 a_2 - |a_3|^2 = 0$ e da Observação 2.11

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1 + A_2}{2}, & a_2 &= \frac{A_1 - A_2}{2} \\ a_3 &= \frac{A_3 - i A_4}{2}, & \bar{a}_3 &= \frac{A_3 + i A_4}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, segue (2.63). Considere agora $B = \sqrt{A_3^2 + A_4^2}$, se A_3, A_4 não se anulam simultaneamente então B é diferente de zero e

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_2^2 &= A_3^2 + A_4^2 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{A_1}{B}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{B}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

logo, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda B \cosh \mu \\ A_2 &= B \sinh \mu \end{aligned}$$

para $\lambda = \pm 1$. Analogamente temos

$$\left(\frac{A_3}{B}\right)^2 + \left(\frac{A_4}{B}\right)^2 = 1.$$

Portanto, existe $\tau \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{aligned} A_3 &= B \operatorname{sen} \tau \\ A_4 &= B \cos \tau, \end{aligned}$$

então fazendo o uso de (2.61) temos que

$$\begin{aligned} F(z, \bar{z}) &= \lambda B \cosh \mu \cosh(\operatorname{Re} \eta z) + B \operatorname{senh} \mu \operatorname{senh}(\operatorname{Re} \eta z) \\ &\quad + B \operatorname{sen} \tau \cosh(i \operatorname{Im} \eta z) - i B \cos \tau \operatorname{senh}(i \operatorname{Im} \eta z) \\ &= \lambda B \cosh \mu \cosh(\operatorname{Re} \eta z) + B \operatorname{senh} \mu \operatorname{senh}(\operatorname{Re} \eta z) \\ &\quad + B \operatorname{sen} \tau \cos(\operatorname{Im} \eta z) + B \cos \tau \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \eta z) \\ &= \lambda B \cosh(\lambda \mu + \operatorname{Re} \eta z) + B \operatorname{sen}(\tau + \operatorname{Im} \eta z). \end{aligned}$$

Note que na parametrização $\tilde{\mathbf{x}}$, dada por (2.62), os únicos termos que dependem de F são os termos F_z/F e $F_{\bar{z}}/F$, mas eles não dependem de B então podemos considerar

$$F(z, \bar{z}) = \lambda \cosh(\lambda \mu + \operatorname{Re} \eta z) + \operatorname{sen}(\tau + \operatorname{Im} \eta z).$$

■

Observação 2.14. Note que se A_1, A_2, A_3 , e A_4 satisfazem (2.63) e $A_3 = A_4 = 0$, então

$$A_1 = \pm A_2 = \delta A_2$$

onde $\delta = \pm 1$. Segue de (2.61) que

$$\begin{aligned} F(z, \bar{z}) &= A_1 \left[\cosh(\operatorname{Re} \eta z) \pm \operatorname{senh}(\operatorname{Re} \eta z) \right] \\ &= A_1 e^{\pm \operatorname{Re} \eta z} \\ &= A_1 e^{\delta \operatorname{Re} \eta z}. \end{aligned}$$

2.3 Exemplos: superfícies associadas à superfície de Enneper

Nesta seção usaremos resultados das seções passadas para encontrar as transformadas de Ribaucour da superfície de Enneper. Tais resultados ainda se aplicam ao catenoide e ao helicoides como mostrado em [3].

Exemplo 2.15. Considere a superfície de Enneper em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\mathbf{x}(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy, -y - x^2y + \frac{y^3}{3}, x^2 - y^2 \right).$$

Observe que tal superfície é mínima ver [6], além disso o fator de conformidade e a segunda forma fundamental são respectivamente $\psi = x^2 + y^2 + 1 = z\bar{z} + 1$ e $II = -2(dx^2 - dy^2)$. Escrevendo $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(-iz)$, podemos reescrever a parametrização $\mathbf{x}(x, y) = \mathbf{x}(z, \bar{z})$ como

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \left(z - \frac{z^3}{3}, iz + i\frac{z^3}{3}, z^2 \right) \quad (2.65)$$

então $\tilde{\mathbf{x}}(z, \bar{z})$ está localmente associada a $\mathbf{x}(z, \bar{z})$ por uma transformação de Ribaucour se e somente se, esta é a própria superfície de Enneper ou pertence à família a 3 parâmetros de superfícies mínimas dadas por

$$\tilde{\mathbf{x}}(z, \bar{z}) = \mathbf{x}(z, \bar{z}) - \frac{1}{m} \left(\frac{\bar{z}}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \mathbf{x}_z(z, \bar{z}) - \frac{1}{m} \left(\frac{z}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}}(z, \bar{z}) + \frac{1}{m} N(z, \bar{z})$$

onde m é uma constante real não nula, $\psi = 1 + z\bar{z}$ e

$$F(z, \bar{z}) = \lambda \cosh(\lambda\mu + 2\sigma \operatorname{Re} \sqrt{m}z) + \operatorname{sen}(\tau + 2\sigma \operatorname{Im} \sqrt{m}z)$$

com $\mu, \tau \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \sigma = \pm 1$.

De fato, temos que $\psi_{zz} = 0$ e $\ell = -2$. Logo podemos aplicar o Corolário 2.12 e obter

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \mathbf{x}_z + \frac{2}{m\ell} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N \\ &= \mathbf{x} - \frac{1}{m} \left(\frac{\bar{z}}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) \mathbf{x}_z - \frac{1}{m} \left(\frac{z}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} + \frac{1}{m} N \end{aligned}$$

um família de superfícies mínimas localmente associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Ribaucour com $F(z, \bar{z})$ dado por (2.55) com $\eta = 2\sigma\sqrt{\ell m/2 + A^2}$ temos que

$$\eta = 2\sigma\sqrt{-m}. \quad (2.66)$$

Pelo Corolário 2.13 se A_3 e A_4 não se anulam simultaneamente então existe $\mu, \tau \in \mathbb{R}$ tais que

$$F(z, \bar{z}) = \lambda \cosh(\lambda\mu + 2\sigma \operatorname{Re} \sqrt{-m}z) + \operatorname{sen}(\tau + 2\sigma \operatorname{Im} \sqrt{-m}z),$$

em que $\lambda = \pm 1$.

Se A_3 e A_4 são zero então a superfície associada a $\mathbf{x}$ é a própria superfície de Enneper. De fato, do Corolário 2.3 as formas fundamentais de $\tilde{\mathbf{x}}$ são dadas por

$$\tilde{I} = \tilde{\psi}^2 dz d\bar{z} \quad \text{e} \quad \tilde{II} = \frac{\ell}{2}(dz^2 + d\bar{z}^2)$$

em que

$$\tilde{\psi} = \left| \frac{\ell\varphi}{\beta\psi} \right|.$$

Portanto, precisamos mostrar que $\tilde{\psi} = \psi(\omega(z))$, onde $\omega(z)$ é um movimento rígido. No entanto, de (2.54) temos que $\tilde{\psi} = \left| \frac{\ell\varphi}{F} \right|$ e de (2.53) ficamos com

$$\tilde{\psi} = \left| \frac{\ell\varphi}{F} \right| = \left| \frac{\ell\psi}{2m} \right| \left| \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \frac{F_z}{F} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right|. \quad (2.67)$$

Como A_1, A_2, A_3 e A_4 satisfazem a equação (2.63) com $A_3 = A_4 = 0$ segue de (2.66) e da Observação 2.14 que

$$F(z, \bar{z}) = A_1 e^{2\xi \operatorname{Re} \sqrt{-m}z}, \quad (2.68)$$

em que $\xi = \pm 1$. Note que seja η um número complexo então $\eta = a + ib$, portanto

$$\frac{\partial \operatorname{Re}[\eta z]}{\partial z} = \frac{\partial \operatorname{Re}[(a + ib)(x + iy)]}{\partial z} = \frac{\partial(ax - by)}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial(a(z + \bar{z}) + ib(z - \bar{z}))}{\partial z} = \frac{\eta}{2} \quad (2.69)$$

Logo, $F_z = \xi\sqrt{-m}F$, considerando ainda $z = x + iy$ temos que se $m < 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= -\frac{\psi}{m} \left| \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \xi\sqrt{-m} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} - \xi\sqrt{-m} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= -\frac{\psi}{m} \left| \left(\frac{z}{\psi} - \xi\sqrt{-m} \right) \left(\frac{\bar{z}}{\psi} - \xi\sqrt{-m} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= -\frac{\psi}{m} \left| \left(\frac{x^2 + y^2 - 2\psi\xi\sqrt{-m}x}{\psi^2} \right) - m + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= -\frac{1}{m} \left| \frac{\psi - 1}{\psi} - 2\xi\sqrt{-m}x - m\psi + \frac{1}{\psi} \right| \\
&= \left| \psi + \frac{2\xi\sqrt{-m}x}{m} - \frac{1}{m} \right| \\
&= \left| 1 + x^2 + y^2 - \frac{2\xi}{\sqrt{-m}}x - \frac{1}{m} \right| \\
&= \left| 1 + \left(x - \frac{\xi}{\sqrt{-m}} \right)^2 + y^2 \right| \\
&= \left| \psi \left(x - \frac{\xi}{\sqrt{-m}}, y \right) \right| \\
&= \psi \left(x - \frac{\xi}{\sqrt{-m}}, y \right).
\end{aligned}$$

Se $m > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \frac{\psi}{|m|} \left| \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - i\xi\sqrt{m} \right) \left(\frac{\psi_z}{\psi} + x\xi\sqrt{m} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= \frac{\psi}{m} \left| \left(\frac{z}{\psi} - i\xi\sqrt{m} \right) \left(\frac{\bar{z}}{\psi} + i\xi\sqrt{m} \right) + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= \frac{\psi}{m} \left| \frac{1}{\psi^2} |z - i\psi\xi\sqrt{m}|^2 + \frac{1}{\psi^2} \right| \\
&= \frac{1}{m} \left| \frac{1}{\psi} |x + i(y - \psi\xi\sqrt{m})|^2 + \frac{1}{\psi} \right| \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{x^2 + (y - \psi\xi\sqrt{m})^2}{\psi} + \frac{1}{\psi} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{x^2 + y^2 - 2y\psi\xi\sqrt{m} + m\psi^2}{\psi} + \frac{1}{\psi} \right) \\
&= \frac{1}{m} + \psi - \frac{2y\xi}{\sqrt{m}} \\
&= 1 + x^2 + \left(y - \frac{\xi}{\sqrt{m}} \right)^2 \\
&= \psi \left(x, y - \frac{\xi}{\sqrt{m}} \right).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$

O objetivo principal deste capítulo é a obtenção de novos exemplos de superfícies isotérmicas em $\mathbb{R}^3$, utilizando a transformação de Ribaucour, através da integração de um sistema de EDPs para uma classe de superfícies mínimas.

3.1 A transformação de Darboux-Bianchi

Nesta seção encontraremos condições necessárias e suficientes para que a transformação de Ribaucour associe duas superfícies isotérmicas. Esta é uma generalização da clássica transformação de Bäcklund para superfícies isotérmicas que foi originalmente estabelecida por Darboux [20] e subsequentemente discutida em detalhes por Bianchi [9]. Este resultado permite obter exemplos de superfícies isotérmicas a partir de uma superfície isotérmica conhecida.

Definição 3.1. Uma aplicação $\Psi : S \rightarrow \tilde{S}$ entre superfícies regulares orientadas S e $\tilde{S}$ é uma *transformação de Darboux-Bianchi* se Ψ é uma transformação de Ribaucour conforme que reverte orientação¹.

Ao longo desta seção mostraremos que a transformação de Darboux-Bianchi fica inteiramente determinada pela solução do sistema de equações diferenciais apresentado na próxima proposição.

Proposição 3.2. Seja S uma superfície isotérmica e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo $U \subset S$ com par associado

¹A hipótese de inverter orientação é crucial para a existência de soluções (garante a integrabilidade do sistema de EDP's a seguir).

(v, V) . Então dado $m \in \mathbb{R}$, o sistema linear de EDP's²

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v \gamma_i \\ (ii) \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = h_{ji} \gamma_i, \quad i \neq j, \\ (iii) \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = -\gamma_2 h_{21} + m(v\rho + v^{-1}\varphi) + \beta V_1 \\ (iv) \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = -\gamma_1 h_{12} + m(v\rho - v^{-1}\varphi) + \beta V_2 \\ (v) \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = -V_i \gamma_i \\ (vi) \frac{\partial \rho}{\partial u_1} = v^{-1} \gamma_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u_2} = -v^{-1} \gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

é completamente integrável e possui a integral primeira

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho = C \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Demonstração: O sistema formado pelas equações (i), (ii) e (v) é totalmente integrável pelo Teorema 1.14. A única diferença é que neste caso em que a superfície é isotérmica, então, podemos usar $v_1 = v_2 = v$. Desta forma, precisamos mostrar apenas que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_2 \partial u_1} \quad e \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_j \partial u_i}, \quad i \neq j.$$

Segue de (vi) e (ii) que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1} (-v^{-1} \gamma_2) = h_{12} v^{-1} \gamma_2 - v^{-1} h_{21} \gamma_1,$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_2} (v^{-1} \gamma_1) = -h_{21} v^{-1} \gamma_1 + v^{-1} h_{12} \gamma_2.$$

De (ii) temos que para $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_{ij} \gamma_j \right) = \gamma_j \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + h_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = -\gamma_j \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \gamma_i h_{ij} h_{ji} - \gamma_j V_i V_j.$$

²Nos trabalhos de Darboux e Bianchi se usou e^ϑ ao invés de v para o fator de conformidade.

Por outro lado de (iii) temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u_2 \partial u_1} &= -\left(-\gamma_1 h_{12} + m(v\rho - v^{-1}\varphi) + \beta V_2\right)h_{21} - \gamma_2 \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} \\ &\quad + m(h_{21}v\rho - \gamma_2 - v^{-1}h_{21}\varphi + \gamma_2) - V_1 V_2 \gamma_2 + \beta h_{21} V_2 \\ &= -\gamma_2 \frac{\partial h_{21}}{\partial u_2} + \gamma_1 h_{12} h_{21} - \gamma_2 V_1 V_2\end{aligned}$$

e de (iv) temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial u_1 \partial u_2} &= -\left(-\gamma_2 h_{21} + m(v\rho + v^{-1}\varphi) + \beta V_1\right)h_{12} - \gamma_1 \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} \\ &\quad + m(h_{12}v\rho + \gamma_1 + v^{-1}h_{12}\varphi - \gamma_1) - V_1 V_2 \gamma_1 + \beta h_{12} V_1 \\ &= -\gamma_1 \frac{\partial h_{12}}{\partial u_1} + \gamma_2 h_{21} h_{12} - \gamma_1 V_1 V_2.\end{aligned}$$

Donde segue a integrabilidade do sistema [14]. Para a integral primeira, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho) &= 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + 2\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial u_1} - 2m\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u_1} - 2m\rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ &= 2\gamma_1(-\gamma_2 h_{21} + m(v\rho + v^{-1}\varphi) + \beta V_1) + 2\gamma_2 h_{21} \gamma_1 \\ &\quad - 2\beta V_1 \gamma_1 - 2m\varphi v^{-1} \gamma_1 - 2m\rho v \gamma_1 \\ &= 0,\end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho) &= 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} + 2\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial u_2} - 2m\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u_2} - 2m\rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ &= 2\gamma_1 h_{12} \gamma_2 + 2\gamma_2(-\gamma_1 h_{12} + m(v\rho - v^{-1}\varphi) + \beta V_2) \\ &\quad - 2\beta V_2 \gamma_2 + 2m\varphi v^{-1} \gamma_2 - 2m\rho v \gamma_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho = C$, onde $C \in \mathbb{R}$. ■

Observação 3.3. Aqui B_1, B_2 são dados por

$$\begin{cases} (i) B_1 = m(v\rho + v^{-1}\varphi) \\ (ii) B_2 = m(v\rho - v^{-1}\varphi) \end{cases}$$

em que fizemos o uso de (1.7) e das equações (iii) e (iv) do sistema (3.1), respectivamente.

No próximo teorema mostraremos que a transformação de Darboux-Bianchi é inteiramente determinada pela solução do sistema (3.1).

Teorema 3.4. *Seja S uma superfície isotérmica e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas principal em um aberto simplesmente conexo $U \subset S$ com par associado (v, V) . Se $\Psi : \mathbf{x}(U) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(U)$ a transformada de Ribaucour de $\mathbf{x}$ determinada pela solução $(\varphi, \gamma, \beta, \rho) := (\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ de (3.1) é conforme e reverte orientação e as funções B_i , $i = 1, 2$, dadas por (1.7) são não nulas em todos os pontos de U , então $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ satisfaz*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 - 2m\varphi\rho = 0. \quad (3.3)$$

Reciprocamente, se $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ é uma solução de (3.1) satisfazendo (3.3) em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ como no Teorema 1.14, então a transformação de Ribaucour de $\mathbf{x}$ em $\tilde{\mathbf{x}}$ determinada por $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ é conforme e reverte orientação.

Demonstração: Temos que $\Psi : \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ é conforme se, e somente se, $\exists \lambda : U \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\langle d\Psi(X_i), d\Psi(X_j) \rangle = \lambda^2 \langle X_i, X_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Aplicando respectivamente nos vetores da base e notando que $\langle d\Psi(X_1), d\Psi(X_2) \rangle = 0$, pois Ψ preserva linhas de curvatura, que são ortogonais entre si, e que $d\Psi(X_i) = d\Psi\left(\frac{\mathbf{x}_{u_i}}{v}\right) = \frac{1}{v}d\Psi(\mathbf{x}_{u_i}) = \frac{1}{v}\tilde{\mathbf{x}}_{u_i} = \frac{\tilde{v}_i}{v}\tilde{X}_i$, obtemos que

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{v}_1^2}{v^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\tilde{v}_2^2}{v^2}$$

que é equivalente a

$$\tilde{v}_1 = \pm \tilde{v}_2.$$

Mas Ψ reverte orientação se, e somente se, o determinante da matriz jacobiana de Ψ

$$\det(d\Psi) = \begin{vmatrix} \tilde{v}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{v}_2 \end{vmatrix}$$

é negativo. Logo $\tilde{v}_1\tilde{v}_2 < 0$ e portanto Ψ ser conforme e reverter orientação é equivalente a

$$0 = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2. \quad (3.4)$$

Por (2.3), isto é,

$$0 = v - 2\varphi\nu B_1 + v - 2\varphi\nu B_2$$

que por (3.3) é

$$\begin{aligned} 0 &= 2v - 2\varphi\nu(mv\rho + m\varphi v^{-1}) - 2\varphi\nu(mv\rho - m\varphi v^{-1}) \\ &= 1 - 2m\varphi\nu\rho \\ &= \nu^{-1} - 2m\varphi\rho. \end{aligned}$$

■

Deste teorema obtemos o seguinte corolário que dá a expressão da parametrização da transformada de Darboux-Bianchi de $\mathbf{x}$ e suas respectivas formas fundamentais.

Corolário 3.5. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas isotérmico principal de uma superfície regular isotérmica S e (v, V) seu par associado. Se $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ é uma solução de (3.1) satisfazendo (3.3) em $U \subset \mathbb{R}^2$ como no Teorema 1.14, então a transformação de Darboux-Bianchi de $\mathbf{x}$ determinada por $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ é dada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{m\rho} (\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N) \quad (3.5)$$

e suas respectivas formas fundamentais são dadas por

$$\tilde{I} = \left(\frac{\varphi}{\rho v} \right)^2 (du_1^2 + du_2^2) \quad (3.6)$$

$$\tilde{II} = - \left(k_1 \frac{\varphi}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} + \frac{\beta\varphi}{\rho^2 v^2} \right) du_1^2 + \left(k_2 \frac{\varphi}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta\varphi}{\rho^2 v^2} \right) du_2^2 \quad (3.7)$$

Demonstração: Temos que (3.5) decorre diretamente de (1.5) e (3.3). De fato, desta temos

¹A recíproca é obtida usando as mesmas equações mas partindo de (3.3) e obtendo (3.4).

que $\nu^{-1} = 2m\varphi\rho$ e daquela temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - 2\nu\varphi(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N) \\ &= \mathbf{x} - \frac{1}{m\rho}(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \beta N).\end{aligned}$$

Para encontrarmos as formas fundamentais de $\tilde{\mathbf{x}}$ note que

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= v_1 - 2\nu\varphi B_1 \\ &= v - \frac{1}{m\rho}B_1 \\ &= v - \frac{1}{m\rho}(m(v\rho + v^{-1}\varphi)) \\ &= -\frac{\varphi}{\rho v}\end{aligned}$$

analogamente, $\tilde{v}_2 = \varphi(\rho v)^{-1}$. Como a transformação de Ribaucour preserva linhas de curvatura temos que $\tilde{F} = 0$ e $\tilde{f} = 0$, portanto, segue (3.6). Para a segunda forma fundamental de $\tilde{\mathbf{x}}$ temos que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= V_1 + 2\nu\beta B_1 \\ &= V_1 + \frac{\beta B_1}{m\varphi\rho} \\ &= V_1 + \frac{v\beta}{\varphi} + \frac{v^{-1}\beta}{\rho}\end{aligned}$$

assim,

$$\tilde{V}_1\tilde{v}_1 = -\left(k_1\frac{\varphi}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} + \frac{\beta\varphi}{\rho^2 v^2}\right)$$

analogamente

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 &= V_2 + 2\nu\beta B_2 \\ &= V_2 + \frac{\beta B_2}{m\varphi\rho} \\ &= V_2 + \frac{v\beta}{\varphi} - \frac{v^{-1}\beta}{\rho}\end{aligned}$$

portanto,

$$\tilde{V}_2 \tilde{v}_2 = \left(k_2 \frac{\varphi}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta \varphi}{\rho^2 v^2} \right),$$

daí, segue (3.7) ■

A próxima proposição estabelece condições necessárias e suficientes para as quais a transformada de Darboux-Bianchi de uma superfície mínima seja uma superfície mínima.

Proposição 3.6. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ um sistema de coordenadas isotérmico principal de uma superfície regular mínima S e (v, V) seu par associado. Então a transformada de Darboux-Bianchi de $\mathbf{x}$ determinada por $(\varphi, \gamma_1, \gamma_2, \beta, \rho)$ é uma superfície mínima se, e somente se*

$$V_1 v = -\frac{\beta}{\rho} \quad (3.8)$$

Demonstração: $\tilde{\mathbf{x}}$ é mínima se, e somente se, $0 = \tilde{v}_2 \tilde{V}_1 + \tilde{v}_1 \tilde{V}_2$, donde segue (3.8), utilizando que $\tilde{v}_2 = -\tilde{v}_1$ e as expressões de $\tilde{V}_i$, $i = 1, 2$ junto com o fato que $V_1 = -V_2$. ■

3.2 A Transformação de Darboux-Bianchi: uma abordagem diferente

Nesta seção adaptamos o sistema de equações (3.1) encontrando um sistema de equações equivalente. Em seguida, iremos resolvê-lo quando o coeficiente de conformidade da superfície satisfaz uma condição adicional e superfície isotérmica é mínima.

De maneira análoga fizemos com o sistema (2.1) na Seção 2.2 reescrevemos o sistema (3.1) usando a linguagem de formas diferenciais, obtendo

$$d\varphi = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \omega_i, \quad (3.9)$$

$$d\beta = - \sum_{i=1}^2 \gamma_i k_i \omega_i \quad (3.10)$$

$$d\rho = \psi^{-2}(\gamma_1 \omega_1 - \gamma_2 \omega_2) \quad (3.11)$$

$$d\gamma_i(e_j) = \gamma_j \omega_{ij}(e_j), \quad i \neq j \quad (3.12)$$

$$d\gamma_1(e_1) = m\psi^{-1}(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi) + \beta k_1 - \gamma_2 \omega_{21}(e_1) \quad (3.13)$$

$$d\gamma_2(e_2) = m\psi^{-1}(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi) + \beta k_2 - \gamma_1 \omega_{12}(e_2) \quad (3.14)$$

Agora reescreveremos o sistema de equações acima utilizando análise complexa.

Teorema 3.7. Seja S uma superfície isotérmica em $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos, parametrizada por linhas de curvaturas, então o sistema (3.9)-(3.14) com a condição inicial

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta^2 = 2m\varphi\rho \quad (3.15)$$

é equivalente ao sistema:

$$d\varphi = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}, \quad (3.16)$$

$$d\beta = -\frac{1}{2}(\varphi_z(k_1 + k_2) + \varphi_{\bar{z}}(k_1 - k_2))dz - \frac{1}{2}(\varphi_z(k_1 - k_2) + \varphi_{\bar{z}}(k_1 + k_2))d\bar{z} \quad (3.17)$$

$$d\rho = \psi^{-2}\varphi_{\bar{z}}dz + \psi^{-2}\varphi_z d\bar{z}, \quad (3.18)$$

$$d\varphi_z = \left[\frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4} + \frac{2\psi_z\varphi_z}{\psi^2} \right] \psi dz + \left[\frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4} \right] \psi d\bar{z} \quad (3.19)$$

$$d\varphi_{\bar{z}} = \left[\frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4} \right] \psi dz + \left[\frac{2\psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4} \right] \psi d\bar{z} \quad (3.20)$$

onde $z = x + iy \in U \subset \mathbb{C}$ e as formas quadráticas de S são dadas por

$$I = \psi^2 dz d\bar{z} \quad e \quad II = \psi^2(k_1 dx^2 + k_2 dy^2).$$

Demonstração: Temos que

$$I = \psi^2(dx^2 + dy^2) = \psi^2 dz d\bar{z}.$$

Mas

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

então, podemos considerar

$$\omega_1 = \psi dx = \frac{\psi}{2}(dz + d\bar{z}), \quad (3.21)$$

$$\omega_2 = \psi dy = \frac{\psi}{2i}(dz - d\bar{z}) = -i\frac{\psi}{2}(dz - d\bar{z}). \quad (3.22)$$

Derivando as equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= \frac{1}{2}(\psi_z dz \wedge d\bar{z} + \psi_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz) \\
 &= \frac{\psi_z - \psi_{\bar{z}}}{2} dz \wedge d\bar{z} \\
 d\omega_2 &= \frac{1}{2i}(-\psi_z dz \wedge d\bar{z} + \psi_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz) \\
 &= -\frac{\psi_z + \psi_{\bar{z}}}{2i} dz \wedge d\bar{z}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, as direções principais da superfície isotérmica são dadas por:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \\
 e_2 &= \frac{i}{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 dz(e_1) &= \frac{1}{\psi}, & dz(e_2) &= \frac{i}{\psi}, \\
 d\bar{z}(e_1) &= \frac{1}{\psi}, & d\bar{z}(e_2) &= -\frac{i}{\psi}
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$dz \wedge d\bar{z}(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} dz(e_1) & dz(e_2) \\ d\bar{z}(e_1) & d\bar{z}(e_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi^{-1} & i\psi^{-1} \\ \psi^{-1} & -i\psi^{-1} \end{vmatrix} = -2i\psi^{-2}.$$

Contudo,

$$\omega_{12}(e_1) = d\omega_1(e_1, e_2) = \frac{\psi_z - \psi_{\bar{z}}}{2} (-2i\psi^{-2}) = -i(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \quad (3.23)$$

$$\omega_{12}(e_2) = d\omega_2(e_1, e_2) = -\frac{\psi_z + \psi_{\bar{z}}}{2i} (-2i\psi^{-2}) = (\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned}
 \omega_{12} &= \omega_{12}(e_1)\omega_1 + \omega_{12}(e_2)\omega_2 \\
 &= \frac{-i(\psi_z - \psi_{\bar{z}})}{2} \psi^{-1}(dz + d\bar{z}) - \frac{i(\psi_z + \psi_{\bar{z}})}{2} \psi^{-1}(dz - d\bar{z}) \\
 &= -i\psi_z \psi^{-1} dz + i\psi_{\bar{z}} \psi^{-1} d\bar{z}.
 \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de reescrever o sistema (3.9)- (3.14). Usando (3.21) e (3.22), segue de (3.9) que

$$\begin{aligned} d\varphi &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 \\ &= \frac{\gamma_1\psi}{2}(dz + d\bar{z}) - i\frac{\gamma_2\psi}{2}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2}dz + \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi}{2}d\bar{z} \end{aligned}$$

mas, $d\varphi = \varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z}$, temos então que

$$\varphi_z = \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2} \quad e \quad \varphi_{\bar{z}} = \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi}{2}. \quad (3.25)$$

Segue de (3.10), (3.11)(3.21) e (3.22) que

$$\begin{aligned} d\beta &= -\gamma_1 k_1 \omega_1 - \gamma_2 k_2 \omega_2 \\ &= -\frac{\gamma_1 k_1 \psi}{2}(dz + d\bar{z}) + i\frac{\gamma_2 k_2 \psi}{2}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{\psi}{2}(-\gamma_1 k_1 + i\gamma_2 k_2)dz - \frac{\psi}{2}(\gamma_1 k_1 + i\gamma_2 k_2)d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}(-(\varphi_z + \varphi_{\bar{z}})k_1 + (\varphi_{\bar{z}} - \varphi_z)k_2)dz - \frac{1}{2}((\varphi_z + \varphi_{\bar{z}})k_1 + (\varphi_{\bar{z}} - \varphi_z)k_2)d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2}(\varphi_z(k_1 + k_2) + \varphi_{\bar{z}}(k_1 - k_2))dz - \frac{1}{2}(\varphi_z(k_1 - k_2) + \varphi_{\bar{z}}(k_1 + k_2))d\bar{z}, \\ d\rho &= \psi^{-2}(\gamma_1\omega_1 - \gamma_2\omega_2) \\ &= \psi^{-2}\gamma_1\frac{\psi}{2}(dz + d\bar{z}) + i\psi^{-2}\gamma_2\frac{\psi}{2}(dz - d\bar{z}) \\ &= \psi^{-2}\varphi_{\bar{z}}dz + \psi^{-2}\varphi_z d\bar{z}. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos por (3.12) que

$$d\gamma_i(e_j) = \gamma_j\omega_{ij}(e_j), \quad \text{para } i \neq j.$$

Utilizando (3.23) e (3.24), temos que:

$$\begin{aligned} d\gamma_1(e_2) &= \gamma_2\omega_{12}(e_2) \\ &= \gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(e_1) &= \gamma_1\omega_{21}(e_1) \\ &= i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Segue de (3.13) e (3.14) que

$$\begin{aligned} d\gamma_1(e_1) &= m\psi^{-1}(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi) + \beta k_1 - \gamma_2\omega_{21}(e_1) \\ &= m\psi^{-1}(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi) + \beta k_1 - i\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(e_2) &= m\psi^{-1}(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi) + \beta k_2 - \gamma_1\omega_{12}(e_2) \\ &= m\psi^{-1}(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi) + \beta k_2 - \gamma_1(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Queremos encontrar $d\varphi_z$ e $d\varphi_{\bar{z}}$, em termos de dz e $d\bar{z}$. Para isso, vamos calcular $d\varphi_z(v_1)$, $d\varphi_z(v_2)$, $d\varphi_{\bar{z}}(v_1)$ e $d\varphi_{\bar{z}}(v_2)$, onde

$$v_1 = \psi^{-1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{e_1 - ie_2}{2} \quad e \quad v_2 = \psi^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e_1 + ie_2}{2}.$$

Como

$$\varphi_z = \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi}{2}$$

segue que

$$d\varphi_z = \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)d\psi + \psi(d\gamma_1 - id\gamma_2)].$$

Aplicando em v_1 temos

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_1) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_1) - id\gamma_2(v_1))] \\ &= \psi_z\psi^{-2}\varphi_z + \frac{\psi}{2}[(d\gamma_1(v_1) - id\gamma_2(v_1))]. \end{aligned}$$

Precisamos então calcular $d\gamma_1(v_1)$ e $d\gamma_2(v_1)$, mas

$$\begin{aligned} d\gamma_1(v_1) &= \frac{1}{2}[d\gamma_1(e_1) - id\gamma_1(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}[m\psi^{-1}(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi) + \beta k_1 - i\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} - i\gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 - \frac{2i\gamma_2\psi_z}{\psi^2}\right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(v_1) &= \frac{1}{2}[d\gamma_2(e_1) - id\gamma_2(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} - i\left(m\psi^{-1}(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi) + \beta k_2 - \gamma_1(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}\right)\right] \\ &= -\frac{i}{2}\left[\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_z}{\psi^2}\right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_1) &= \frac{\psi_z\varphi_z}{\psi} + \frac{\psi}{4}\left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 - \frac{2i\gamma_2\psi_z}{\psi^2} - \left(\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_z}{\psi^2}\right)\right] \\ &= \frac{\psi_z\varphi_z}{\psi^2} + \frac{\psi}{4}\left[\frac{2m\varphi}{\psi^2} + \beta(k_1 - k_2) + \frac{2(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_z}{\psi^2}\right] \\ &= \frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4} + \frac{2\psi_z\varphi_z}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} d\varphi_z(v_2) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_2) - id\gamma_2(v_2))] \\ &= \frac{\psi_{\bar{z}}\varphi_z}{\psi^2} + \frac{\psi}{2}[(d\gamma_1(v_2) - id\gamma_2(v_2))], \\ d\gamma_1(v_2) &= \frac{1}{2}[d\gamma_1(e_1) + id\gamma_1(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[m\psi^{-1}(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi) + \beta k_1 - i\gamma_2(\psi_z - \psi_{\bar{z}})\psi^{-2} + \frac{i\gamma_2(\psi_z + \psi_{\bar{z}})}{\psi^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 + \frac{2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}}{\psi^2}\right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2(v_2) &= \frac{1}{2}[d\gamma_2(e_1) + id\gamma_2(e_2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{i\gamma_1(\psi_z - \psi_{\bar{z}})}{\psi^2} + i\left(m\psi^{-1}(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi) + \beta k_2 - \gamma_1(\psi_z + \psi_{\bar{z}})\psi^{-2}\right)\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_{\bar{z}}}{\psi^2}\right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 d\varphi_z(v_2) &= \frac{\psi_{\bar{z}}\varphi_z}{\psi^2} + \frac{\psi}{4} \left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 + \frac{2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \left(\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\psi_{\bar{z}}\varphi_z}{\psi^2} + \frac{\psi}{4} \left[2m\rho + \beta(k_1 + k_2) - \frac{2(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right] \\
 &= \frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4}
 \end{aligned}$$

Mas $d\varphi_z = d\varphi_z(v_1)\psi dz + d\varphi_z(v_2)\psi d\bar{z}$. Logo

$$d\varphi_z = \left[\frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4} + \frac{2\psi_z\varphi_z}{\psi^2} \right] \psi dz + \left[\frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4} \right] \psi d\bar{z}$$

De modo análogo de (3.25) temos que

$$\begin{aligned}
 d\varphi_{\bar{z}}(v_1) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_1) + id\gamma_2(v_1))] \\
 &= \psi_z\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \frac{\psi}{2}[d\gamma_1(v_1) + id\gamma_2(v_1)] \\
 d\varphi_{\bar{z}}(v_2) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_z\psi^{-1} + \psi(d\gamma_1(v_2) + id\gamma_2(v_2))] \\
 &= \psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \frac{\psi}{2}[d\gamma_1(v_2) + id\gamma_2(v_2)]
 \end{aligned}$$

segue de (3.30) a 3.33) que

$$\begin{aligned}
 d\varphi_{\bar{z}}(v_1) &= \psi_z\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \frac{\psi}{4} \left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 - \frac{2i\gamma_2\psi_z}{\psi^2} + \left(\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_z}{\psi^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\psi_z\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \frac{\psi}{4} \left[2m\rho + \beta(k_1 + k_2) - \frac{2(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_z}{\psi^2} \right] \\
 &= \frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4}, \\
 d\varphi_{\bar{z}}(v_2) &= \psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \frac{\psi}{4} \left[\frac{m(\psi\rho + \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_1 + \frac{2i\gamma_2\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} - \left(\frac{m(\psi\rho - \psi^{-1}\varphi)}{\psi} + \beta k_2 - \frac{2\gamma_1\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right) \right] \\
 &= \psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2} + \frac{\psi}{4} \left[\frac{2m\varphi}{\psi^2} + \beta(k_1 - k_2) + \frac{2(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right] \\
 &= \frac{2\psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4}.
 \end{aligned}$$

Como $d\varphi_{\bar{z}} = d\varphi_{\bar{z}}(v_1)\psi dz + d\varphi_{\bar{z}}(v_2)\psi d\bar{z}$, temos

$$d\varphi_{\bar{z}} = \left[\frac{m\rho\psi}{2} + \frac{\beta\psi(k_1 + k_2)}{4} \right] \psi dz + \left[\frac{2\psi_{\bar{z}}\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \frac{m\varphi}{2\psi} + \frac{\beta\psi(k_1 - k_2)}{4} \right] \psi d\bar{z}.$$

■

Do teorema anterior originam-se dois corolários, o primeiro adapta a condição inicial (3.15) ao sistema reformulado e o segundo da a expressão da parametrização ao novo sistema.

Corolário 3.8. A condição (3.15) pode ser agora expressa por

$$\frac{4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \beta^2 = 2m\varphi\rho \quad (3.34)$$

Demonstração: Segue de (3.25) que

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} \quad (3.35)$$

portanto (3.15) se reduz a (3.34). ■

Observação 3.9. Segue do corolário anterior que

$$\left(\frac{4\varphi_z\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \beta^2 - 2m\varphi\rho \right)(z_o) = 0 \quad \text{para algum } z_o \in U \quad (3.36)$$

passa a ser a condição inicial do sistema (3.9)-(3.14).

Corolário 3.10. Se S é uma superfície isotérmica de $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos, orientável que tem uma parametrização $\mathbf{x}$, então a família $\tilde{\mathbf{x}}$ isotérmicas associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Darboux-Bianchi é dada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{2\varphi_{\bar{z}}}{m\rho\psi^2}\mathbf{x}_z - \frac{2\varphi_z}{m\rho\psi^2}\mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{\beta}{m\rho}N \quad (3.37)$$

Demonstração: Considere a parametrização $\mathbf{x}(x, y) = \mathbf{x}(z, \bar{z})$, onde $z = x + iy$. Pelo Corolário 3.5 segue que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{m\rho}(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \beta N), \quad (3.38)$$

como $\mathbf{x}$ é parametrizada por linhas de curvatura, temos que $e_1 = \mathbf{x}_x\psi^{-1}$ e $e_2 = \mathbf{x}_y\psi^{-1}$, logo

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{\gamma_1\mathbf{x}_x\psi^{-1}}{m\rho} - \frac{\gamma_2\mathbf{x}_y\psi^{-1}}{m\rho} - \frac{\beta}{m\rho}N.$$

Considerando $\mathbf{x}$ como aplicação de $(z, \bar{z})$ temos que $\mathbf{x}_x = \mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}}$, $\mathbf{x}_y = i(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}})$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \frac{\gamma_1 \psi^{-1}}{m\rho}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}}) - \frac{i\gamma_2 \psi^{-1}}{m\rho}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}}) - \frac{\beta}{m\rho}N \\ &= \mathbf{x} - \frac{(\gamma_1 + i\gamma_2)\psi^{-1}}{m\rho}\mathbf{x}_z - \frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)\psi^{-1}}{m\rho}\mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{\beta}{m\rho}N \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\varphi_{\bar{z}}\psi^{-2}}{m\rho}\mathbf{x}_z - \frac{2\varphi_z\psi^{-2}}{m\rho}\mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{\beta}{m\rho}N.\end{aligned}$$

■

A fim de tornar este capítulo independente do anterior, enunciaremos novamente a proposição seguinte para a demonstração do principal resultado desta seção.

Proposição 3.11. Seja S uma superfície regular cuja primeira forma fundamental é dada por $I = \psi^2 dzd\bar{z}$ e com curvaturas principais k_1 e k_2 , satisfazendo $k_1 = -k_2$. Se ψ satisfaz $\psi_{zz} = A^2\psi$, $A \in \mathbb{C}$, então $\ell = k_1\psi^2$ é uma constante real.

Demonstração: Ver Proposição 2.9. ■

No próximo teorema, integramos o sistema (3.16) - (3.20), satisfazendo a condição inicial (3.36), para uma classe de superfícies mínimas.

Teorema 3.12. Seja $\psi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável tal que

$$\psi_{zz} = A^2\psi, \quad A \in \mathbb{C}. \quad (3.39)$$

Suponha que S seja uma superfície mínima e considere o sistema de equações (3.16) - (3.20) onde $m \neq 0$ e $\ell \neq 0$ são números reais e seja

$$\eta = 2\sigma\sqrt{\frac{m}{2} + A^2}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.40)$$

Então

$$\varphi = \frac{\psi F}{2m} \left[4 \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + \left(\frac{\alpha}{F} - \frac{\ell}{\psi} \right)^2 \right] \quad (3.41)$$

$$\varphi_{\bar{z}} = \psi F \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right), \quad \varphi_z = \psi F \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right), \quad (3.42)$$

$$\rho = \frac{F}{\psi} \quad e \quad \beta = -\ell\rho + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

em que, se $\eta \neq 0$, F é dado por

$$F(z, \bar{z}) = a_1 e^{\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_2 e^{-\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_3 e^{\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + \bar{a}_3 e^{-\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{C} \quad (3.44)$$

satisfazendo

$$|\eta|^2(a_1 a_2 - |a_3|^2) + \frac{\alpha^2}{4} = 0 \quad (3.45)$$

e, se $\eta = 0$, F é dado por

$$F = a_1 z \bar{z} + a_3 z + \bar{a}_3 \bar{z} + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{C}, \quad (3.46)$$

satisfazendo

$$\frac{\alpha^2}{4} - 4a_1 a_2 + 4|a_3|^2 = 0 \quad (3.47)$$

são soluções do sistema (3.16) - (3.20) satisfazendo a condição inicial (3.36).

Demonstração: De (3.18) temos

$$\begin{aligned} \rho_z &= \psi^{-2} \varphi_{\bar{z}} \\ \rho_{zz} &= \frac{\varphi_{\bar{z}z}}{\psi^2} - \frac{2\psi_z}{\psi} \left(\frac{\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

portanto, segue de (3.19) que

$$\begin{aligned} \rho_{zz} &= \frac{m\rho}{2} + \frac{\beta(k_1 + k_2)}{4} - \frac{2\psi_z}{\psi} \rho_z \\ &= \frac{m\rho}{2} - \frac{2\psi_z}{\psi} \rho_z \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que na última passagem usamos o fato que S é mínima. Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{z}} &= \frac{\varphi_z}{\psi^2} \\ \rho_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\varphi_{\bar{z}z}}{\psi^2} - \frac{2\psi_{\bar{z}}}{\psi} \left(\frac{\varphi_z}{\psi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

e por (3.19)

$$\begin{aligned}\rho_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{m\rho}{2} + \frac{\beta(k_1 + k_2)}{4} - \frac{2\psi_{\bar{z}}}{\psi}\rho_{\bar{z}} \\ &= \frac{m\rho}{2} - \frac{2\psi_{\bar{z}}}{\psi}\rho_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

Considerando $F = \psi\rho$, temos que

$$\begin{aligned}F_z &= \psi_z\rho + \psi\rho_z \\ F_{zz} &= \psi_{zz}\rho + 2\psi_z\rho_z + \psi\rho_{zz} \\ F_{zz} - \psi_{zz}\rho &= \psi\rho_{zz} + 2\psi_z\rho_z.\end{aligned}$$

Segue de (3.49) que

$$F_{zz} - \psi_{zz}\rho = \frac{mF}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F_{zz} &= \frac{mF}{2} + \frac{\psi_{zz}F}{\psi} \\ &= \left(\frac{m}{2} + \frac{\psi_{zz}}{\psi}\right)F \\ &= \left(\frac{m}{2} + \frac{\psi_{zz}}{\psi}\right)F,\end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}F_{\bar{z}} &= \psi_{\bar{z}}\rho + \psi\rho_{\bar{z}} \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \psi_{\bar{z}\bar{z}}\rho + 2\psi_{\bar{z}}\rho_{\bar{z}} + \psi\rho_{\bar{z}\bar{z}}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}F_{\bar{z}\bar{z}} - \psi_{\bar{z}\bar{z}}\rho &= \frac{mF}{2} \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \left(\frac{m}{2} + \frac{\psi_{\bar{z}\bar{z}}}{\psi}\right)F\end{aligned}$$

mas, $\psi_{zz} = A^2\psi$, então

$$\begin{aligned} F_{zz} &= \left(\frac{m}{2} + A^2\right)F \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \left(\frac{m}{2} + \bar{A}^2\right)F. \end{aligned}$$

Tomando

$$\eta = 2\sigma\sqrt{\frac{m}{2} + A^2}$$

em que $\sigma = \pm 1$, teremos

$$\begin{aligned} F_{zz} &= \frac{\eta^2}{4}F \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\bar{\eta}^2}{4}F. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema procedemos de maneira análoga a demonstração da Proposição 2.9 obtendo se $\eta \neq 0$

$$F(z, \bar{z}) = a_1 e^{\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_2 e^{-\frac{\eta z + \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + a_3 e^{\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}} + \bar{a}_3 e^{-\frac{\eta z - \bar{\eta} \bar{z}}{2}}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{C}$$

e se $\eta = 0$ obtemos

$$F = a_1 z \bar{z} + a_3 z + \bar{a}_3 \bar{z} + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{C}.$$

De S é mínima, da Proposição 3.11 e das equações (3.17) e (3.18) temos que

$$\begin{aligned} d\beta &= -k_1 \varphi_{\bar{z}} dz - k_1 \varphi_z d\bar{z} \\ &= -\ell \left(\frac{\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} dz + \frac{\varphi_z}{\psi^2} d\bar{z} \right) \\ &= -\ell d\rho \end{aligned}$$

em que $\ell = k_1 \psi^2$ é uma constante real. O que implica que $\beta = -\ell \rho + \alpha$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Pois β é real. Agora precisamos apenas encontrar φ, φ_z , e $\varphi_{\bar{z}}$ em termos de F . Mas de (3.48) temos

$$\rho_z = \frac{\varphi_{\bar{z}}}{\psi^2},$$

segue que,

$$\begin{aligned}\varphi_{\bar{z}} &= \psi^2 \rho_z = \psi^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{\psi} \right) \\ &= \psi^2 \left(\frac{F_z \psi - F \psi_z}{\psi^2} \right) \\ &= \psi F \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right)\end{aligned}$$

analogamente de (3.50)

$$\rho_{\bar{z}} = \frac{\varphi_z}{\psi^2}$$

segue que

$$\begin{aligned}\varphi_z &= \psi^2 \rho_{\bar{z}} = \psi^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{F}{\psi} \right) \\ &= \psi^2 \left(\frac{F_{\bar{z}} \psi - F \psi_{\bar{z}}}{\psi^2} \right) \\ &= \psi F \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right),\end{aligned}$$

logo, demonstramos (3.42). Usamos a integral primeira (3.34) ou seja,

$$\frac{4\varphi_z \varphi_{\bar{z}}}{\psi^2} + \beta^2 = 2m\varphi\rho$$

ou ainda,

$$4\varphi_z \varphi_{\bar{z}} + (-\ell\rho + \alpha)^2 \psi^2 = 2m\psi\varphi F. \quad (3.51)$$

fazendo o uso de (3.42) ficamos com

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2m\psi F} \left[4\psi^2 F^2 \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + (-\ell F + \alpha\psi)^2 \right] \\ &= \frac{\psi F}{2m} \left[4 \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + \left(-\frac{\ell}{\psi} + \frac{\alpha}{F} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Agora faremos o uso de (3.16) tomando a derivada de (3.42) com respeito a z^1 temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_z &= \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \right] + \frac{\psi F}{2m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{\ell^2}{\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \\
&\quad + \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \left[\frac{\eta^2}{4} - A^2 - \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{F_z}{F} + \frac{\psi_z}{\psi} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left(\frac{F_z}{F} + \frac{\psi_z}{\psi} \right) \\
&= \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \left(\frac{\eta^2}{4} - A^2 \right) + \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\ell^2}{\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \right] \\
&= \psi F \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + \frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\ell^2}{\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

por outro lado φ_z é dado por (3.42), assim segue que

$$\frac{2\psi F}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\ell^2}{\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \right] = 0.$$

Como as funções ψ e F não se anulam, além disso $\left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right)$ não se anula num subconjunto aberto temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} - \frac{F_{\bar{z}}}{F} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\ell\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \\
&= \frac{\psi F (F_z \psi_{\bar{z}} + F \psi_{\bar{z}z} - F_{\bar{z}z} \psi - F_{\bar{z}} \psi_z) - (F \psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}} \psi) (\psi_z F + \psi F_z)}{\psi^2 F^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\ell\psi^2} - \frac{\alpha^2}{F^2} \right) \\
&= \psi F (F_z \psi_{\bar{z}} + F \psi_{\bar{z}z} - F_{\bar{z}z} \psi - F_{\bar{z}} \psi_z) - (F \psi_{\bar{z}} - F_{\bar{z}} \psi) (\psi_z F + \psi F_z) - \frac{1}{4} (F^2 \ell^2 - \alpha^2 \psi^2) \\
&= F^2 \left(\psi \psi_{z\bar{z}} - \psi_z \psi_{\bar{z}} - \frac{\ell^2}{4} \right) - \psi^2 \left(F F_{\bar{z}z} - F_z F_{\bar{z}} - \frac{\alpha^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

de (2.43) temos que $K\psi^4 = 4\psi_{\bar{z}}\psi_z - 4\psi\psi_{z\bar{z}}$, como ψ satisfaz (3.39) temos que $K\psi^4 = -\ell^2$ e de forma análoga temos que para $\eta \neq 0$, $FF_{z\bar{z}} - F_z F_{\bar{z}} = |\eta|^2(a_1 a_2 - |a_3|^2)$ segue que

$$|\eta|^2(a_1 a_2 - |a_3|^2) - \frac{\alpha^2}{4} = 0$$

para $\eta = 0$, $FF_{z\bar{z}} - F_z F_{\bar{z}} = -4(a_1 a_2 - |a_3|^2)$ e segue que

$$4|a_3|^2 - 4a_1 a_2 - \frac{\alpha^2}{4} = 0$$

¹Derivar com respeito a $\bar{z}$ produz os mesmos resultados e é análogo.

■

Observação 3.13. Considere F dado por (3.44) com $\alpha = 0$, então podemos reescrever F como

$$F(x, y) = \begin{cases} 2\sigma\sqrt{a_1a_2}\cosh(\operatorname{Re}\eta z + \mu) + 2|a_3|\sin(\operatorname{Im}\eta z + \nu) & \text{se } a_1a_2 > 0 \\ 2\sigma\sqrt{-a_1a_2}\sinh(\operatorname{Re}\eta z + \mu) + 2|a_3|\sin(\operatorname{Im}\eta z + \nu) & \text{se } a_1a_2 < 0 \\ a_1e^{\operatorname{Re}\eta z} + 2|a_3|\sin(\operatorname{Im}\eta z + \nu), & \text{se } a_2 = 0 \\ a_2e^{-\operatorname{Re}\eta z} + 2|a_3|\sin(\operatorname{Im}\eta z + \nu) & \text{se } a_1 = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

em que $z = x + iy$, $\operatorname{Re}\eta z = (\operatorname{Re}\eta)x - (\operatorname{Im}\eta)y$, $\operatorname{Im}\eta z = (\operatorname{Re}\eta)y + (\operatorname{Im}\eta)x$. Se F é dado por (3.46) então podemos reescrever F como

$$\begin{aligned} F(x, y) &= a_1z\bar{z} + a_3z + \bar{a}_3\bar{z} + a_2 \\ &= a_2 + 2\operatorname{Re}a_3x - 2\operatorname{Im}a_3y + a_1(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

O próximo resultado, que é a união de resultados anteriores, apresenta de maneira explícita as famílias de superfícies isotérmicas associadas por uma transformação de Darboux-Bianchi a uma superfície mínima que satisfaz o Corolário anterior.

Teorema 3.14. Seja S uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, orientável, sem pontos umbílicos com uma parametrização isotérmica por linhas de curvatura $\mathbf{x}(z, \bar{z})$, com $I = \psi^2 dzd\bar{z}$. Suponha que ψ satisfaz (3.39), então

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{2}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \mathbf{x}_z - \frac{2}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha\psi}{F} - \ell \right) N \quad (3.54)$$

é uma família de superfícies isotérmicas, localmente associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Darboux-Bianchi, onde ℓ e m são números reais não nulos e a função $F(z, \bar{z})$ é dada por (3.44) ou (3.46).

Demonstração: Segue do Corolário 3.10 que a superfície

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{2\varphi_{\bar{z}}}{m\rho\psi^2} \mathbf{x}_z - \frac{2\varphi_z}{m\rho\psi^2} \mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{\beta}{m\rho} N$$

está associada a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Darboux-Bianchi, onde m é uma constante real não nula, N é o vetor normal unitário de $\mathbf{x}$ e $\varphi_z, \varphi_{\bar{z}}, \beta, \rho$ são soluções do sistema

(3.16) – (3.20). Porém, de (3.39) sabemos que $\psi_{zz} = A^2\psi$ e segue do Teorema 3.12 que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \frac{2F}{m\psi\rho} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \mathbf{x}_z - \frac{2F}{m\psi\rho} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{-\ell\rho + \alpha}{m\rho} N \\ &= \mathbf{x} - \frac{2}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \mathbf{x}_z - \frac{2}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha\psi}{F} - \ell \right) N.\end{aligned}$$

■

O corolário seguinte dá a expressão da transformação de Darboux-Bianchi de $\mathbf{x}$ em função de variáveis reais.

Corolário 3.15. Seja S uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$, orientável, sem pontos umbílicos com uma parametrização isotérmica por linhas de curvatura $\mathbf{x}(x, y)$, com $I = \psi^2 dz d\bar{z}$. Suponha que ψ satisfaz (3.39) com η dado por (3.40) então

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{m} \left(\frac{F_x}{F} - \frac{\psi_x}{\psi} \right) \mathbf{x}_x + \frac{1}{m} \left(\frac{F_y}{F} - \frac{\psi_y}{\psi} \right) \mathbf{x}_y - \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha\psi}{F} - \ell \right) N \quad (3.55)$$

é uma família de superfícies isotérmicas, localmente associadas a $\mathbf{x}$ por uma transformação de Darboux-Bianchi, em que $F(x, y)^1$ é dado por (3.44) se $\eta \neq 0$ ou (3.53) caso contrário.

Demonstração: Como F, ψ são reais temos que $F_z = \overline{F_{\bar{z}}}$ e $\psi_z = \overline{\psi_{\bar{z}}}$ e segue que

$$\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} = \overline{\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi}}$$

fazendo $\xi = -\frac{2}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right)$ e $J = -\frac{1}{m} \left(\frac{\alpha\psi}{F} - \ell \right)$ e de (3.54) temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \frac{2}{m} \left(\frac{F_z}{F} - \frac{\psi_z}{\psi} \right) \mathbf{x}_z - \frac{2}{m} \left(\frac{F_{\bar{z}}}{F} - \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi} \right) \mathbf{x}_{\bar{z}} - \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha\psi}{F} - \ell \right) N \\ &= \mathbf{x} + \xi \mathbf{x}_z + \bar{\xi} \mathbf{x}_{\bar{z}} + JN \\ &= \mathbf{x} + (\operatorname{Re} \xi) \mathbf{x}_x + (\operatorname{Im} \xi) \mathbf{x}_y + JN\end{aligned}$$

e percebendo que

$$\operatorname{Re} \xi = -\frac{1}{m} \left(\frac{F_x}{F} - \frac{\psi_x}{\psi} \right) \quad e \quad \operatorname{Im} \xi = \frac{1}{m} \left(\frac{F_y}{F} - \frac{\psi_y}{\psi} \right).$$

■

¹Estamos considerando $z = x + iy$.

3.3 Exemplos de Superfícies Isotérmicas associadas ao Catenoide

Nesta seção obteremos um exemplo de superfície isotérmica localmente associada ao catenoide utilizando o Corolário 3.15, tal método ainda se aplica ao helicóide e a superfície de Enneper.

Exemplo 3.16. Considere o catenoide parametrizado por

$$\mathbf{x}(x, y) = \left(-\cos x \cosh y, -\sin x \cosh y, -y \right)$$

em que $x \in (0, 2\pi)$ e $y \in (0, \infty)$ segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_x &= (\sin x \cosh y, -\cos x \cosh y, 0), & \mathbf{x}_{xx} &= (\cos x \cosh y, \sin x \cosh y, 0) \\ \mathbf{x}_y &= (-\cos x \sinh y, -\sin x \sinh y, -1), & \mathbf{x}_{yy} &= (-\cos x \cosh y, -\sin x \cosh y, 0) \\ N &= \frac{1}{\cosh y} (\cos x, \sin x, -\sinh y), & \mathbf{x}_{xy} &= (\sin x \sinh y, -\cos x \sinh y, 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle = \cosh^2 y, & e &= \langle \mathbf{x}_{xx}, N \rangle = 1, \\ F &= \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = 0, & f &= \langle \mathbf{x}_{xy}, N \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_y \rangle = \cosh^2 y, & g &= \langle \mathbf{x}_{yy}, N \rangle = -1. \end{aligned}$$

Logo o fator de conformidade e a segunda forma fundamental são dados respectivamente por $\psi = \cosh y = \cosh \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$ e $II = (dx^2 - dy^2)$. Dessa forma temos que $\psi_{zz} = \left(\frac{-i}{2} \right)^2 \psi$ e $\ell = 1$. Portanto, podemos aplicar o Corolário 3.15 com $\eta = \sigma \sqrt{2m-1}$ e $F(x, y)$ dado em (3.44) satisfazendo o Teorema 3.12 com $a_1 = a_2 = m = \eta = 1$, $\alpha = 2$ e $a_3 = 0$ e, por

consequente $F = 2 \cosh(x)$, segue que $F = 2 \cosh x$, $F_x = 2 \sinh x$, $F_y = 0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} = & \begin{pmatrix} -\cos x \cosh y \\ -\sin x \cosh y \\ -y \end{pmatrix} - \tanh x \begin{pmatrix} \sin x \cosh y \\ -\cos x \cosh y \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \tanh y \begin{pmatrix} \cos x \sinh y \\ \sin x \sinh y \\ 1 \end{pmatrix} + (\operatorname{sech} y - \operatorname{sech} x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ -\sinh y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que $x \in (0, 2\pi)$ e $y \in (0, \infty)$. Verificaremos que $\tilde{\mathbf{x}}$ é, de fato, isotérmica, para isso, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_x &= \begin{pmatrix} \operatorname{sech} x \sin x (1 - \cosh y \operatorname{sech} x) + \cos x \tanh x (-\cosh y + \operatorname{sech} x) \\ \cos x \operatorname{sech} x (-1 + \cosh y \operatorname{sech} x) + (-\cosh y + \operatorname{sech} x) \sin(x) \tanh x \\ -\operatorname{sech} x \sinh y \tanh x \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{x}}_y &= \begin{pmatrix} -\sin x \sinh y \tanh x \\ \cos x \sinh y \tanh x \\ \cosh y \operatorname{sech} x - 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{yx} = \begin{pmatrix} -\sinh y (\operatorname{sech}^2 x \sin x + \cos x \tanh x) \\ \sinh y (\cos x \operatorname{sech}^2 x - \sin x \tanh x) \\ -\cosh y \operatorname{sech} x \tanh x \end{pmatrix} \\ \tilde{N} &= \begin{pmatrix} \cos x \operatorname{sech}^3 x \cosh^2 y - 2 \cos x \operatorname{sech}^2 x \cosh y + \sin x \tanh x \cosh y \\ + \cos x \tanh^2 x \operatorname{sech} x \sinh^2 y - \sin x \tanh x \operatorname{sech} x \cosh^2 y \\ + \sin x \tanh x \operatorname{sech}^2 x \cosh y + \cos x \operatorname{sech} x - \sin x \tanh x \operatorname{sech} x \\ \sin x \operatorname{sech}^3 x \cosh^2 y - \cos x \tanh x \cosh y - 2 \sin(x) \operatorname{sech}^2(x) \cosh y \\ + \cos x \tanh x \operatorname{sech} x \cosh^2 y - \cos x \tanh(x) \operatorname{sech}^2 x \cosh y \\ + \sin x \tanh^2 x \operatorname{sech} x \sinh^2 y + \sin x \operatorname{sech} x + \cos x \tanh x \operatorname{sech} x \\ \tanh^2 x \sinh y (\operatorname{sech} x - \cosh y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

isso dá $E = G = (\cosh y - \operatorname{sech} x)^2$ e $F = f = 0$ e portanto $\tilde{\mathbf{x}}$ é isotérmica. Note que o fator de conformidade é consistente com o previsto pelo Corolário 3.5 com auxílio do Teorema 3.12 que fornece o fator de conformidade de $\tilde{\mathbf{x}}$ dado por

$$\tilde{\psi} = \left| \frac{\varphi}{\rho\psi} \right| = |\cosh y - \operatorname{sech} x|. \quad (3.56)$$

Além disso, pela Proposição 3.6, $\tilde{\mathbf{x}}$ é mínima se e somente se $\ell = -\frac{\beta}{\rho}$ isto é,

$$1 = -\frac{-\rho + \alpha}{\rho}$$

que é equivalente a $\alpha = 0$. Dessa forma $\tilde{\mathbf{x}}$ expressa acima não é mínima. Uma superfície mínima pode ser obtida considerando $\eta = m = a_1 = 1$ e $a_2 = a_3 = 0$ em (3.52). As figuras abaixo mostram exemplos das superfícies associadas ao catenoide pela transformação de Darboux-Bianchi. A primeira mostra uma superfície isotérmica não mínima e a segunda mostra uma superfície mínima.

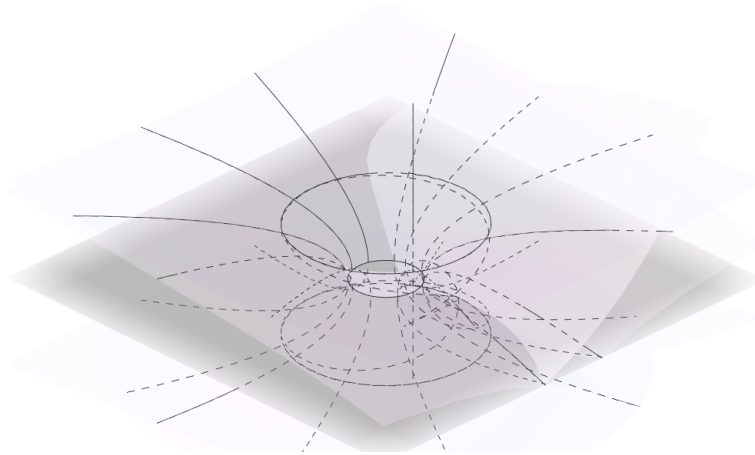


Figura 3.1: superfície isotérmica associada ao catenoide com $\alpha = 2$

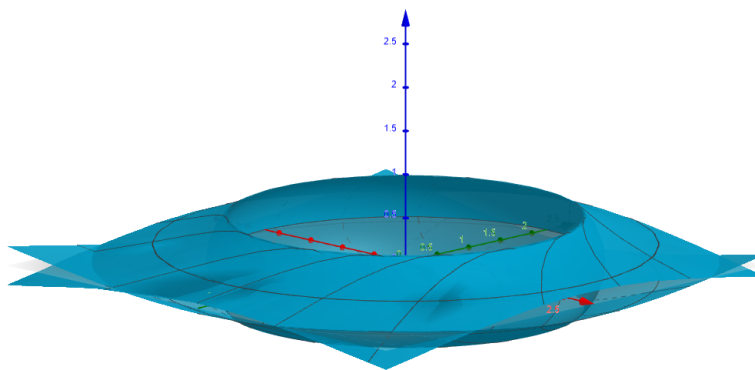


Figura 3.2: superfície mínima associada ao catenoide

Referências Bibliográficas

- [1] A.V. Corro, W. Ferreira and K. Tenenblat. *On Ribaucour transformation for hypersurfaces*. Mat. Comtemp. 17 (1999), 137 - 160.
- [2] S. C. Canevari. *Transformação de Darboux Bianchi para superfícies Isotérmicas em $\mathbb{R}^3$* . Dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática. DM-UFSCar. São Carlos, 2004.
- [3] M. V. Lemes and K. Tenenblat. *On Ribaucour transformation and minimal surfaces*. Mat. Comtemp. 29 (2005), 13 - 40.
- [4] Spiegel, M. (1974). THEORY AND PROBLEMS OF Complex Variables with an introduction to CONFORMAL MAPPING and its applications. McGraw Hill Book Company.
- [5] M. Dajczer and R. Tojeiro, An extension of the classical Ribaucour transformation, Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), no. 1, 211–232. MR1901374
- [6] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976. MR0394451
- [7] B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York, 1966. MR0203595
- [8] Bianchi, L. Lezioni di Geometria Differenziale. Nicola Zanichelli (ed.), Bologna, 1927.
- [9] L. Bianchi, Ricerche sulle superficie isoterme and sulla deformazione delle quadriche, Annali di Matematica. Se., III 11 (1905) 93-157
- [10] J. Cieřliński, The Darboux-Bianchi transformation for isothermic surfaces. Classical results versus the soliton approach, Differential Geom. Appl. **7** (1997), no. 1, 1–28. MR1441914

- [11] F. E. Burstall and U. Hertrich-Jeromin, The Ribaucour transformation in Lie sphere geometry, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), no. 5, 503–520. MR2254053
- [12] E. B. Christoffel, Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen, *J. Reine Angew. Math.* **67** (1867), 218–228. MR1579370
- [13] H. B. Lawson, Jr., *Lectures on minimal submanifolds. Vol. I*, Monografias de Matemática, 14, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977. MR0527121
- [14] S. Mardare, On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry, *J. Math. Pures Appl. (9)* **84** (2005), no. 12, 1659–1692. MR2180386
- [15] Emma Carberry and Kai Fung and David Glasser and Michael Nagle and Nizam Ordulu, *Lecture Notes on Minimal Surfaces*, 2005.
- [16] Osserman, Robert. A survey of minimal surfaces. Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne 1969 iv+159 pp. (1 plate). MR0256278
- [17] R. Hunger, "An Introduction to Complex Differentials and Complex Differentiability," Tech. Rep. TUM-LNS-TR-07-106, Technische Universität München, October 2007.
- [18] O método do referencial móvel, do Carmo, M.P., <https://books.google.com.br/books?id=RMJVHQAACAAJ>, 1976, Instituto de Mathemática Pura e Aplicado
- [19] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, 2, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. MR1976398
- [20] Darboux, Gaston. Sur les surfaces isothermiques. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3, Volume 16 (1899) , pp. 491-508. doi : 10.24033/asens.473.http://www.numdam.org/item/ASENS_1899_3_16__491_0/
- [21] <https://www.geogebra.org/3d?lang=en>