



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANTONIO GUIMARÃES LEITE

**SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES, SISTEMAS DE REAÇÃO-DIFUSÃO
E O PRINCÍPIO DO MÁXIMO**

SÃO CRISTÓVÃO
2021

Antonio Guimarães Leite

**Semigrupos de operadores lineares, sistemas de
reação-difusão e o princípio do máximo**

Trabalho de conclusão de mestrado aprovado pelo corpo docente da Pós-Graduação do Curso de Matemática da Universidade Federal de Sergipe - UFS, *Campus* de São Cristóvão, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos

**SÃO CRISTÓVÃO
2021**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Leite, Antonio Guimarães
L533s Semigrupos de operadores lineares, sistemas de reação-difusão
e o princípio do máximo / Antonio Guimarães Leite ; orientador
Bruno Luis de Andrade Santos. – São Cristóvão, 2021.
141 f.; il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Operadores lineares. 3. Cauchy, Problemas
de. I. Santos, Bruno Luiz de Andrade orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Semigrupos de operadores lineares, sistemas de reação-difusão
e o princípio do máximo.**

por

Antonio Guimarães Leite

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Orientador

Profa. Dra. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Fabio Lima Santos - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Maio de 2021

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da minha vida.

À toda minha família. Em especial, aos meus pais e aos meus irmãos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Bruno Luís de Andrade, pelo apoio, amizade e auxílio durante a orientação deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Giovana Siracusa Gouveia, e ao Prof. Dr. Fábio Lima Santos, pela disponibilidade e preciosas sugestões.

Aos meus amigos e professores de pós-graduação, pelos momentos e experiências compartilhados nestes dois últimos anos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, vamos estudar a teoria de semigrupos de operadores lineares e aplicá-la em problemas não lineares do tipo

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial e $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é uma função Lipschitz contínua em relação a segunda variável em qualquer subconjunto limitado de X . Abordaremos problemas não lineares do tipo (0.0.1) e provaremos resultados relativos à regularidade e existência de solução. Não obstante, usaremos o princípio do máximo para encontrarmos estimativas para as soluções das várias equações diferenciais parciais de primeira ou segunda ordem e provarmos propriedades qualitativas das soluções.

Palavras-chave: Semigrupos de Operadores lineares, Problema Abstrato de Cauchy, Gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, Sistemas de reação-difusão.

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Operadores Lineares	1
1.2	Resultados de Análise Funcional e da Teoria da Medida	3
1.3	Funções à valores vetoriais de uma variável complexa	7
2	Teoria de Semigrupos	9
2.1	Semigrupos Uniformemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados .	9
2.2	Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados	19
2.3	O Teorema de Hille - Yosida	28
2.4	O Teorema de Lumer-Phillips	41
2.5	A Caracterização dos Geradores Infinitesimais de C_0 -semigrupos	49
2.6	C_0 -grupos de Operadores Lineares e Limitados	60
2.7	A Transformada Inversa de Laplace	64
3	O Problema Abstrato de Cauchy	101
3.1	O Problema de Valor Inicial Homogêneo	101
3.2	O Problema de Valor Inicial Não Homogêneo	111
3.3	Problema Não Linear	121
3.3.1	Alguns fatos básicos sobre Operadores Setoriais	122
3.3.2	Não Linearidades Definidas em X	123

3.3.3 Equação e Sistemas de reação-difusão	130
Referências Bibliográficas	140

Introdução

A teoria de semigrupos de operadores lineares foi consideravelmente impulsionada a partir de 1948 com a generalização do famoso Teorema de Hille-Yosida. A posterior participação de importantes pesquisadores assim como o avanço de outras áreas da matemática permitiram consolidar a teoria dando para ela autonomia e inúmeras aplicações em diversas áreas tanto da matemática aplicada como da pura. Hoje, a situação é caracterizada por muitas aplicações desta teoria, não somente em áreas tradicionais, como equações diferenciais parciais ou processos estocásticos, mas também é uma importante ferramenta para equações integro-diferenciais e equações diferenciais funcionais, na mecânica quântica ou na teoria do controle de dimensão infinita. A teoria dos semigrupos ainda é aplicado com bastante sucesso em equações concretas de dinâmica populacional e teoria do transporte, entre outros.

Estudamos a teoria de semigrupos de operadores lineares para aplicá-la em problemas não lineares do tipo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (0.0.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial e $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é uma função Lipschitz contínua em relação a segunda variável em qualquer subconjunto limitado de X . Inicialmente, abordamos a teoria básica de semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares, com ênfase nos teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips. Em seguida, abordamos a transformada inversa de Laplace e o problema abstrato de Cauchy. Posteriormente, estudamos problemas não lineares do tipo (0.0.2) e provamos resultados relativos à regularidade e existência de solução. Por fim, abordamos equações e sistemas de reação-difusão que são frequentemente encontrados como modelos matemáticos em Química, Física e Biologia.

Para fins de ilustração, sejam $d_1, d_2, \dots, d_m > 0$ e seja D a matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$. Um exemplo típico das aplicações é o problema

$$\begin{cases} u_t(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde a função $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e o dado inicial $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são dados. Esse tipo de problema é frequentemente encontrado como modelos matemáticos nas ciências aplicadas. A parte $D\Delta u(t, x)$ no sistema é chamada de parte de difusão, sendo os números d_i chamados de coeficientes de difusão e $f(t, x, u)$ é chamada de parte de reação.

Não obstante, usamos propriedades bem conhecidas das derivadas de primeira e segunda ordem de funções de valor real em pontos de máximos ou de mínimos relativos para encontrarmos estimativas para as soluções das várias equações diferenciais parciais de primeira ou segunda ordem que tratamos na Seção 4. Essas técnicas são chamadas de princípio de máximo, e também são utilizadas para provar propriedades qualitativas das soluções. Um dos problemas que aplicamos tais propriedades é dado pelo sistema

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + f(u(t, x)), & t > 0, x \in \bar{\Omega}; \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial(\Omega); \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde u é uma função com valores em $\mathbb{R}^m$, Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^2 , u_0 é uma função contínua se anulando em $\partial(\Omega)$ e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função localmente Lipschitz tal que

$$\langle y, f(y) \rangle \leq C(1 + |y|^2), \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Estruturamos o trabalho da seguinte maneira:

No *Capítulo 1*, enunciamos de forma introdutória alguns resultados básicos sobre operadores lineares em espaços de Banach, alguns resultados clássicos de Análise Funcional e da Teoria da Medida que podem ser encontrados em [2, Brezis] e em [9, Folland]. Além disso, abordamos alguns resultados complementares envolvendo funções à valores vetoriais de uma variável complexa e Operadores Setoriais que podem ser encontrados em [19, Stein] e [12, Lunardi], respectivamente.

No *Capítulo 2*, estudamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares contínuos imprescindíveis ao entendimento das técnicas de soluções de equações diferenciais. Grande parte da exposição estará concentrada na caracterização dos geradores de semigrupos lineares já que nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução. Para esta explanação, apresentamos o Teorema de Hille-Yosida, resultado que nos permite caracterizar o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , e o Teorema de Lumer-Phillips, que nos dá uma condição necessária e suficiente para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Ainda nessa seção, abordamos a caracterização geral de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de operadores lineares e limitados. Além disso, como algumas equações nos fornecem grupos de operadores lineares, realizamos uma abordagem sobre esse tema. Finalizando este capítulo, a seção 2.7 é dedicada ao problema de representar um semigrupo em termos de seu gerador infinitesimal. Usamos como base, as referências [5], [7], [10] e [15].

No *Capítulo 3*, apresentamos vários conceitos de solução para o problema abstrato de Cauchy. Introduzimos os conceitos de solução clássica, forte e branda e analisamos a relação entre estes tipos de soluções. Estudamos a existência e unicidade de solução para equações da forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, $f : [0, T) \rightarrow X$ uma função apropriada em um espaço de Banach X . O capítulo 3 é realizada em três seções. Na primeira seção, estudamos o problema (0.0.3) na sua forma homogênea, ou seja, quando $f \equiv 0$, estabelecendo o conceito de solução clássica e o relacionando com as propriedades de um gerador de um C_0 -semigrupo. A segunda seção é voltada para o estudo do problema (0.0.3) na sua forma não homogênea, tendo como um dos principais resultado a Fórmula da Variação das Constantes. A ferramenta principal que usaremos para tal estudo, é a Teoria de Semigrupos de operadores lineares. Para finalizar, na quarta seção, abordamos a existência local, singularidade, regularidade e a solução máxima definida para classe de problemas de valor inicial descritos por (0.0.2). Além disso, estudamos Equações e Sistemas de reação - difusão com a finalidade de utilizarmos técnicas associadas à teoria de semigrupos de operadores. As definições, exemplos e resultados exibidos nesta seção, seguem [5], [7] e [15].

Índice de notações

- $\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{R}$: conjunto dos números reais;
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_-$ denotam, respectivamente, o conjunto conjunto dos números naturais não-nulos, o conjunto dos números reais positivos, negativos, não-negativos e não-positivos;
- $\mathbb{R}^N$: espaço euclidiano N - dimensional, $N \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}^*(I)$: coleção de todas as funções generalizadas Riemann integráveis em um intervalo I .
- $X = (X, \|\cdot\|)$ denota um espaço de Banach com norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$;
- $\mathcal{L}(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é linear e limitada}\}$ é o espaço de Banach dos operadores em X com norma representada por $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$;
- X^* o espaço dual algébrico de X ;
- $x'(x) = \langle x, x' \rangle$, para cada $x \in X, x' \in X'$.

Para um operador $A : X \rightarrow Y$, temos as seguintes notações:

- $D(A)$ é o domínio do operador A , que é um subespaço de X ;
- $R(A)$ é a imagem do operador A , que é um subespaço de Y ;
- $\text{Ker}(A)$ é o núcleo do operador A , que é um subespaço de $D(A)$;
- $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y; x \in D(A)\}$ é o gráfico do operador A .
- Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$;
- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$.
- $\partial\Omega$ a fronteira de Ω , isto é, $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$;
- $u' = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$;
- $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$;

- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$ é o operador de derivação de ordem α ,

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$;

- $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;

- $C(I; X)$ o espaço das funções contínuas $u : I \rightarrow X$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$;
- $B(I; X)$ o espaço das funções limitadas, munidos com a norma do supremo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t)\|.$$

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p < \infty\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / D^\alpha u \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\}$, onde $D^\alpha u$ é derivada no sentido das distribuições;
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos de forma introdutória alguns resultados básicos sobre operadores lineares em espaços de Banach, alguns resultados clássicos de Análise Funcional e da Teoria da Medida que podem ser encontrados em [2, Brezis] e em [9, Folland]. Além disso, abordamos alguns resultados complementares envolvendo funções à valores vetoriais de uma variável complexa e Operadores Setoriais que podem ser encontrados em [19, Stein] e [12, Lunardi], respectivamente. É importante deixar claro que a prova de alguns Teoremas e Proposições serão ocultadas com a finalidade de deixar o texto sucinto, já que a aplicação dos mesmos é o que interessa para o desenvolvimento da dissertação.

1.1 Operadores Lineares

Seja X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$. Denotamos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço de Banach de operadores lineares limitados $T : X \rightarrow X$, munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in X: \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Ao longo do texto, iremos considerar $\|T\|$ ao invés de $\|T\|_{\mathcal{L}(X)}$. Do mesmo modo, se Y é um outro espaço de Banach, denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço de Banach de operadores lineares limitados de $T : X \rightarrow Y$, munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X: \|x\|=1} \|Tx\|_Y.$$

Definição 1.1.1. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é **limitado** se existe $c > 0$, tal que

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in D(A).$$

Caso contrário, A é um operador **ilimitado**, isto é, se existe uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que

$$\frac{\|Ax_n\|_Y}{\|x_n\|_X} \rightarrow \infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Lema 1.1.1. *Se $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) A é globalmente Lipschitz contínuo em $D(A)$, isto é,

$$\exists L > 0; \|Ax - Ay\|_Y \leq L\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in D(A);$$

(ii) A é uniformemente contínuo em $D(A)$;

(iii) A é contínuo em $D(A)$;

(iv) A é contínuo em $x_0 \in D(A)$;

(v) A é um operador linear limitado.

Prova: Ver [6, Proposição 1.4].

Definição 1.1.2. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é **fechado** se satisfaz uma das seguintes propriedades equivalentes.*

(i) O gráfico $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in D(A)\}$ é um subespaço fechado de $X \times Y$.

(ii) Se, para a sequência $\{x_n\} \in D(A)$ os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y \in Y$ existem, então $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Se $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é um operador fechado, munimos $D(A)$ com a norma do gráfico

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Lema 1.1.2. *(Lema de Dini) Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável a direita no intervalo $[a, b)$. Se $D^+\varphi$ é contínua em $[a, b)$, então φ é continuamente diferenciável em $[a, b)$.*

Prova: Ver [13, Lema 3.1.2].

1.2 Resultados de Análise Funcional e da Teoria da Medida

Teorema 1.2.1. (Banach-Steinhaus, Princípio da Limitação Uniforme) Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ uma família de operadores lineares limitados de X em Y . Suponha que

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} \|T_\lambda x\|_Y < +\infty \quad \forall x \in X.$$

Então,

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty,$$

isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_\lambda x\|_Y \leq C \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e para todo $\lambda \in \Gamma$.

Prova: Ver [2, Teorema 2.2].

Teorema 1.2.2. Seja $Y \subset X$ um subespaço vetorial tal que $\overline{Y} \neq X$. Então, existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in Y.$$

Prova: Ver [2, Corolário 1.8]

Teorema 1.2.3. (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Se o gráfico de T é fechado em $X \times Y$, então T é contínuo.

Prova: Ver [2, Teorema 2.9].

Teorema 1.2.4. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é,

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y) \quad 0 \leq k < 1.$$

Então existe um único ponto fixo p de F , isto é,

$$F(p) = p.$$

Prova: Ver [2, Teorema 5.7].

Teorema 1.2.5. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja Ω um conjunto e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{C}$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ com

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \quad x \in \Omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},$$

onde g é uma função integrável e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p \quad x \in \Omega$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Prova: Ver [1, Teorema 5.6].

Existe uma versão mais geral para o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que é a seguinte:

Teorema 1.2.6. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado) Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{C}$ com

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Suponha que existe uma sequência de funções integráveis (g_n) verificando

- $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } q.t.p \text{ em } \Omega.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n(x) dx = \int g(x) dx < +\infty .$

Então, f é integrável e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Prova: Ver [9, Exercício 20, pág.59]

Teorema 1.2.7. (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferenciável) Seja $\eta(\cdot)$ uma função de classe $C^1([0, T])$ não - negativa satisfazendo para quase todo t a desigualdade

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad (1.2.1)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ são funções integráveis, não-negativas em $[0, T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right],$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{em } [0, T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em } [0, T].$$

Prova: Multiplicando (1.2.1) por $e^{-\int_0^t \phi(r) dr}$, obtemos

$$\eta'(s)e^{-\int_0^s \phi(r) dr} - \phi(s)\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \leq e^{-\int_0^s \phi(r) dr}\psi(s),$$

isto é,

$$\frac{d}{ds} \left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \right) \leq e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \psi(s) \quad q.t.p \quad \text{em } [0, T].$$

Integrando em $[0, t]$, com $0 \leq t \leq T$, obtemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r) dr} \right) \Big|_0^t \leq \int_0^t \underbrace{e^{-\int_0^s \phi(r) dr}}_{\leq 1} ds \psi(s);$$

o que implica,

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r) dr} - \eta(0) \leq \int_0^t \psi(s) ds,$$

donde,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(r) dr} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right],$$

demonstrando a primeira parte da desigualdade de Gronwall. Agora, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{em } [0, T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

temos,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(r) dr} \eta(0) = 0;$$

logo,

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em } [0, T].$$

□

Teorema 1.2.8. (Desigualdade de Gronwall - Forma Integrável) Seja $\xi(t)$ uma função contínua, não negativa em $[0, T]$, satisfazendo para quase todo t a desigualdade integral

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2, \quad (1.2.2)$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então,

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}),$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$. Em particular, se

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds,$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$, então

$$\xi(t) = 0 \quad q.t.p \text{ em } [0, T].$$

Prova: Defina

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds.$$

Temos $\eta(\cdot)$ é não negativa e de classe C^1 , então pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\eta'(t) = \xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2 = C_1 \eta(t) + C_2,$$

isto é,

$$\eta'(t) = C_1 \eta(t) + C_2 \quad q.t.p \text{ em } [0, T].$$

Logo, pela Desigualdade de Gronwall (forma diferenciável) obtemos

$$\int_0^t \xi(s) ds \leq C_2 t e^{C_1 t},$$

multiplicando por C_1 e somando com C_2 a última desigualdade e usando (1.2.2) concluímos que

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}), \quad q.t.p \text{ em } [0, T].$$

A segunda parte é imediata. □

1.3 Funções à valores vetoriais de uma variável complexa

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$, $f : \Omega \rightarrow X$ uma função contínua e $\gamma = \{h(t); h : [a, b] \rightarrow \Omega\}$ uma curva de classe C^1 por partes. A integral de f ao longo de γ é definida por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(h(t)) h'(t) dt. \quad (1.3.1)$$

Consideremos Γ um subconjunto aberto $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função contínua. Como usual, denotamos por X' o espaço dual de X , consistindo de todos os operadores lineares de X em $\mathbb{C}$. Para cada $x \in X$, $x' \in X'$, fixamos $x'(x) = \langle x, x' \rangle$.

Definição 1.3.1. Dizemos que $f : \Omega \rightarrow X$ é **holomorfa** (ou **analítica**) em Ω se para cada $z_0 \in \Omega$ o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$$

existe em X . Dizemos que f é **fracamente holomorfa** se f é contínua em Ω e a função à valores complexos $z \rightarrow \langle f(z), x' \rangle$ é holomorfa em Ω , para todo $x' \in X'$

Claramente, uma função holomorfa é fracamente holomorfa. O teorema a seguir mostra que a recíproca também é verdade e iremos demonstrá-lo visando enunciar a Fórmula da Integral de Cauchy, já que a utilizaremos ao longo da dissertação.

Teorema 1.3.1. Seja $f : \Omega \rightarrow X$ uma função fracamente holomorfa. Então f é holomorfa.

Prova: Seja $\overline{B(z_0, r)}$ uma bola fechada contida Ω . Mostraremos que para todo $z \in B(z_0, r)$, vale a seguinte fórmula da integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.3.2)$$

Em primeiro lugar, observamos que o lado direito de (1.3.2) está bem definido, porque f é contínua. Sendo f fracamente holomorfa em Ω a função à valores complexos

$$z \rightarrow \langle f(z), x' \rangle \text{ é holomorfa em } \Omega, \text{ para todo } x' \in X',$$

e consequentemente,

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} d\xi = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, x' \right\rangle.$$

Sendo $x' \in X'$ arbitrário, obtemos (1.3.2). Podemos diferenciar com respeito a z sobre o sinal de integração, de forma que f é holomorfa e

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

para todo $z \in B(z_0, r)$ e $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 1.3.2. *Seja D um aberto conexo. Dizemos que D é simplesmente conexo se o interior de qualquer contorno contido em D , está contido em D .*

Teorema 1.3.2. (Teorema de Cauchy) *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$. Então, para toda curva fechada γ que possui seus pontos e seu interior pertencentes a D , temos*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Prova: Para cada $x' \in X'$, a função de valores complexos $z \rightarrow \langle f(z), x' \rangle$ é holomorfa em Ω e, portanto,

$$0 = \int_{\gamma} \langle f(z), x' \rangle dz = \left\langle \int_{\gamma} f(z)dz, x' \right\rangle.$$

□

Proposição 1.3.1. (Série de Newman) *Se $T \in L(X)$, então a série de potências*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k T^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

(chamada série de Newman de $(I - zT)^{-1}$) é convergente no disco $B(0, 1/r(T))$, onde

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Além disso, $|z| < 1/r(T)$ implica $F(z) = (I - zT)^{-1}$, e $|z| < 1/\|T\|$ implica

$$\|(I - zT)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |z| \|T\|}.$$

Prova: Ver [17, Proposição B.7]

Capítulo 2

Teoria de Semigrupos

2.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos de Operadores Lineares Limitados

Nesta seção, X é um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ representa o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X .

Definição 2.1.1. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se

1. $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 2.1.2. Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0 \quad (2.1.1)$$

Definição 2.1.3. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X e

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}. \quad (2.1.2)$$

O operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \text{ para todo } x \in D(A), \quad (2.1.3)$$

é chamado de **gerador infinitesimal** do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$

Esta seção é dedicada ao estudo de semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. A partir da definição, é claro que se $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0. \quad (2.1.4)$$

Com efeito, fazendo $s = t + h$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)(T(h) - I)\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)\| \|T(h) - I\| = 0. \end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{s \rightarrow t^+} \|T(s) - T(t)\| = 0,$$

o limite pela esquerda é análogo. Portanto, $\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0$, ou seja, $T(t)$ é contínuo em cada $t \geq 0$.

O próximo teorema nos dá uma relação entre um operador linear limitado e um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo. Mas para demonstrá-lo precisamos de alguns resultados os quais apresentamos a seguir.

Lema 2.1.1. *Seja A um operador linear limitado em X e considere os operadores*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.5)$$

Então, são válidas as seguintes afirmações sobre $T(t)$:

- (a) *Está bem definido;*
- (b) *É linear;*
- (c) *É limitado;*
- (d) *Satisfaz as condições 1 e 2 da Definição 2.1.1.*

Observe que os itens (a), (b), (c) e (d) garantem que a família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados para todo $t \geq 0$.

Prova:: Para provar o item (a), note que como $A \in \mathcal{L}(X)$ segue que

$$\frac{\|tA\|^n}{n!} \leq \frac{(|t\| \|A\|)^n}{n!},$$

como a série do membro direito da desigualdade acima converge, segue que a série do membro esquerdo também converge. Daí, a série

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

converge absolutamente e como $\mathcal{L}(X)$ é de Banach, a série acima é convergente para todo $t \geq 0$. Logo, $T(t)$ está bem definida.

Para provarmos o item (b), observemos que dados $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha x + \beta y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) (\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) x + \beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) y \\ &= \alpha T(t)x + \beta T(t)y. \end{aligned}$$

Logo, $T(t)$ é linear.

Para mostrarmos o item (c), notemos que

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (2.1.6)$$

Logo, $T(t)$ é limitado.

Finalmente, provaremos (d). Primeiramente, note que,

$$\bullet T(0) = e^{0A} = I + 0A + \frac{0^2 A^2}{2!} + \dots = I.$$

Logo, mostramos que vale (1). Para mostrarmos que vale (2), lembremos da fórmula de Cauchy para produto de séries;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad (2.1.7)$$

e do Binômio de Newton;

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) x^{n-k} y^k. \quad (2.1.8)$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\bullet T(t)T(s) = e^{At}e^{As} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(sA)^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \frac{(sA)^j}{j!} \\
&\stackrel{2.1.7}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(tA)^l}{l!} \frac{(sA)^{k-l}}{(k-l)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{t^l s^{k-l} A^k}{l!(k-l)!} \left(\frac{k!}{k!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \left(\frac{k!}{l!(k-l)!} \right) t^l s^{k-l} A^k \\
&\stackrel{2.1.8}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t+s)^k A^k \\
&= e^{A(t+s)} = T(t+s).
\end{aligned}$$

Logo, provamos o item (d) e consequentemente, concluímos a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.1.2. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X , então existe $\rho > 0$ tal que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} T(s) ds \right\| < 1$$

Prova: pela relação (2.1.4), $T(s)$ é contínuo em cada $s \geq 0$, assim a integral, no sentido de Riemann, $\int_0^t T(s) ds$, existe. Defina $\phi(t) = \int_0^t T(s) ds$, com $\phi : [0, +\infty) \rightarrow X$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $\frac{d\phi(t)}{dt} = T(t)$ e, portanto,

$$I = T(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(0+h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - I \right\| < \epsilon,$$

em particular, para $\epsilon = 1$ e $h = \rho > 0$, obtemos

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} T(t) dt \right\| < 1,$$

como queríamos. $\square$

Lema 2.1.3. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $\|A\| \leq 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.*

Prova : Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$S_n = \sum_{k=0}^n A^k.$$

Sabemos que

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para $p, q \in \mathbb{N}$, com $p \leq q$, obtemos

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=0}^q A^k \right\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q A^k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|A^k\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|A\|^k. \quad (2.1.9)$$

Agora, fazendo a mudança $i = k - p$, temos

$$\sum_{k=p+1}^q \|A\|^k = \sum_{i=1}^{q-p} \|A\|^i \|A\|^p. \quad (2.1.10)$$

De (2.1.9) e (2.1.10), adquirimos a seguinte desigualdade

$$\|S_p - S_q\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|A\|^k = \sum_{i=1}^{q-p} \|A\|^i \|A\|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|A\|^i \|A\|^p = \left(\frac{1}{1 - \|A\|} \|A\|^p \right),$$

pois, por hipótese, $\|A\| < 1$. Consequentemente, $\|S_p - S_q\| \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$, ou seja, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$. Portanto, $S_n \rightarrow S$, para algum $S \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, como A comuta com qualquer uma de suas potências, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} A^k = I + \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I + A \sum_{k=0}^n A^k = I + AS_n = I + S_n A,$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que

$$S = I + SA \Rightarrow I = S(I - A) = (I - A)S,$$

donde, $I - A$ é invertível. E mais

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}.$$

□

Teorema 2.1.1. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Prova: : Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X . pelo Lema 2.1.2, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt \right\| < 1.$$

Disso e pelo Lema 2.1.3, o operador

$$I - \left(I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt \right) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t) dt,$$

é invertível e, consequentemente, $\int_0^\rho T(t) dt$ também o é. Agora para todo $h > 0$ e $h < \rho$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(t) dt &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(t+h) dt - \int_0^\rho T(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(t) dt - \int_0^\rho T(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\int_0^{\rho+h} T(t) dt - \int_0^h T(t) dt \right) - \left(\int_0^{\rho+h} T(t) dt - \int_\rho^{\rho+h} T(t) dt \right) \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t) dt, \end{aligned}$$

donde,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t) dt \right) \left(\int_0^\rho T(t) dt \right)^{-1}.$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t) dt \right) \left(\int_0^\rho T(t) dt \right)^{-1} \right]. \quad (2.1.11)$$

Mostraremos mais adiante, no Teorema 2.2.2, que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds = T(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Daí, usando a afirmação acima em (2.1.11), obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(t) dt \right)^{-1},$$

que é, por definição, o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Portanto,

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(t) dt \right)^{-1}$$

é um operador linear limitado, já que $T(t) \in \mathcal{L}(X)$.

Reciprocamente, seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear limitado em X . Definimos o operador

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Mostraremos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo gerado por A . Para isso, notemos que pelo Lema 2.1.1, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados definidos em X . Resta provarmos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo em X . Para tanto, notemos que

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| = \|e^{tA} - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{n!} \right\| \\ &\leq \left\| tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} \right\| \\ &\leq \|tA\| \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!} \right\| \\ &\leq t\|A\| \|e^{tA}\| \\ &\leq t\|A\| e^{t\|A\|} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Logo, $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$. Concluimos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo.

Por fim, como para todo $t \geq 0$,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{1}{t} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) - I \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} = A \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right],$$

segue que,

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| = \left\| A \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right) - I \right] \right\| \leq \left\| A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \|A\| \|T(t) - I\|,$$

mas $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$. Assim

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \rightarrow \|A\| \cdot 0 = 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Em outras palavras, o operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X . $\square$

Veja que da Definição 2.1.3 é claro que um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tem um único gerador infinitesimal. Ainda, pelo Teorema 2.1.1, todo operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. O próximo resultado se refere a unicidade desse semigrupo.

Teorema 2.1.2. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos. Se*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = A = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h},$$

então, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Prova: Mostremos que dado $a > 0$, $T(t) = S(t)$ para todo $0 \leq t \leq a$. Seja $a > 0$ fixado. Como as funções $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por $f(t) = \|T(t)\|$ e $g(t) = \|S(t)\|$ são contínuas em $t \in \mathbb{R}_+$, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(t)\| \|S(s)\| \leq C, \quad \forall s, t \in [0, a].$$

Além disso, para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \|T(h) - S(h)\| &\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| + \left\| \frac{S(h) - I}{h} - A \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{aC}, \quad \forall h \in (0, \delta]. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Seja $0 \leq t \leq a$ e escolha $n \geq 1$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Então da propriedade de semigrupo e de

(2.1.12) segue que

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\
&\leq nC \frac{\epsilon}{aC} \frac{t}{n} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos que $T(t) = S(t)$ para $0 \leq t \leq a$. Para $s \geq a$, escreva $s = na + r$, onde $0 \leq r$ e $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, obtemos

$$T(s) = T(na + r) = T(na)T(r) = [T(a)]^n T(r) = [S(a)]^n S(r) = S(na + r) = S(s).$$

O que prova que $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$. □

Corolário 2.1.1. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X , então

- (a) Existe uma constante $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ para todo $t \geq 0$;
- (b) Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$;
- (c) O operador A de (b) é o gerador infinitesimal de $T(t)$;
- (d) A função $t \rightarrow T(t)$ é diferenciável em $t \geq 0$ na topologia uniforme de operadores e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Prova: (a) Como $T(t) = e^{tA}$, para cada $t \geq 0$, então

$$\|T(t)\| = e^{tA} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(tA)^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} \leq e^{tw},$$

já que $\|A\| \leq w$, para algum $w \geq 0$, pois $A \in \mathcal{L}(X)$.

(b) Por hipótese, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X , então pelo Teorema 2.1.1, o gerador infinitesimal A de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um operador linear limitado, o qual é único. Por esse mesmo teorema, sabemos que A também é o gerador infinitesimal de $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. Portanto, pelo Teorema 2.1.2, segue que $T(t) = e^{tA}$.

(c) De (b), segue que A é o gerador infinitesimal de e^{tA} e $T(t) = e^{tA}$. Portanto, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

(d) pelo item (c), A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, ou seja

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = A.$$

Como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $A \in \mathcal{L}(X)$ e $T(t)$ é derivável à direita no ponto 0,

$$\frac{d^+ T(0)}{dt} = A.$$

Ainda mais, para todo $h > 0$, temos

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} = T(t) \frac{(T(h) - I)}{h},$$

como o segundo membro da igualdade converge para $T(t)A$, resulta que T é derivável à direita em todo $t \geq 0$;

$$\frac{d^+ T(t)}{dt} = T(t)A.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{T(t-h) - T(t)}{-h} &= \frac{T(t-h) - T(t-h+h)}{-h} \\ &= \frac{T(t-h) - T(t-h)T(h)}{-h} \\ &= T(t-h) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right), \end{aligned}$$

como o segundo membro da igualdade converge para $T(t)A$, resulta que T é derivável à esquerda em todo $t \geq 0$;

$$\frac{d^- T(t)}{dt} = A.$$

Logo, $T(t)$ é diferenciável e

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)A = AT(t),$$

e a prova do Teorema está completa. □

2.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados

Nesta seção, introduzimos uma classe de semigrupos de operadores lineares, estritamente maiores do que a de semigrupos uniformemente contínuos, classe que se mostra muito útil no estudo de muitas equações diferenciais parciais. Ao longo desta seção, X será um espaço de Banach.

Definição 2.2.1. Um semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X é um semigrupo fortemente contínuo, ou um C_0 - semigrupo, se para todo $x \in X$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x \quad (2.2.1)$$

O teorema a seguir mostra que todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial.

Teorema 2.2.1. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo. Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{para } 0 \leq t < \infty \quad (2.2.2)$$

Prova: Com a continuidade forte do semigrupo em $t = 0$, mostremos que existem constantes $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T\| \leq M, \forall t \in [0, \eta],$$

em outras palavras, $\|T(t)\|$ é uniformemente limitada em $[0, \eta]$. De fato, suponhamos o caso contrário, ou seja, que existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \quad \text{e} \quad \|T(t_n)\| \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com isso, teríamos que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t_n)\| = \infty$ e assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme (ver Teorema 1.2.1), existiria $x \in X$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T(t_n)x\| = \infty$. Daí, o conjunto $\{\|T(t_n)\| : n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado, contrariando o fato de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ser um C_0 - semigrupo. Portanto, $\|T(t)\|$ é limitada em $[0, \eta]$, para algum $\eta > 0$, isto é, para algum $M \geq 0$, temos que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, \eta].$$

Desde que $T(0) = I$, então $M \geq 1$. Definimos, então

$$w = \frac{\ln M}{\eta} \geq 0. \quad (2.2.3)$$

Sabemos que dado qualquer $t \geq 0$, podemos escrevê-lo da forma $t = n\eta + \delta$, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$. Além disso, de 2.2.3, vem que

$$n = \frac{t - \delta}{\eta} < \frac{t}{\eta} \text{ e } e^{wt} = e^{t\eta^{-1}\ln M} = M^{\frac{t}{\eta}}$$

Daí, disso e usando a propriedade de semigrupo, concluimos que

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(n\eta)T(\delta)\| \\ &\leq \|T(n\eta)\|\|T(\delta)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^n\|T(\delta)\| \\ &= M^n M \\ &\leq M M^{\frac{t}{\eta}} \\ &= M e^{wt}, \end{aligned}$$

resumindo,

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

□

Corolário 2.2.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo. Então para cada x a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ dada por*

$$f(t) = T(t)x, \forall x \in X,$$

é uma função contínua.

Prova: Pelo Teorema 2.2.1, existem $M, w \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$ para todo $t \geq 0$. Daí, para $x \in X$, $t, h \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \|f(t+h) - f(t)\| &= \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\ &\leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{wt}\|T(h)x - x\|, \end{aligned}$$

como $\|T(h)x - x\| \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0^+$, pois $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo, segue que

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq M e^{wt}\|T(h)x - x\| \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Além disso, para $0 \leq h \leq t$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(t-h) - f(t)\| &= \|T(t-h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ &\leq M e^{wt}\|x - T(h)x\|. \end{aligned}$$

Novamente, pelo fato de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ser um C_0 - semigrupo, é verdade que

$$\|f(t) - f(t-h)\| \leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Portanto, f é contínua. $\square$

Teorema 2.2.2. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então, as seguintes propriedades são válidas*

(a) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

(b) Para todo $x \in X$ e $t \geq s \geq 0$, $\int_s^t T(\tau)x d\tau \in D(A)$ e

$$A \int_s^t T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

(c) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

(d) Para todo $x \in D(A)$ e $t \geq s \geq 0$,

$$T(t)x - T(s)x = A \int_s^t T(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau$$

Prova: (a) Defina $\phi(t) = \int_0^t T(s)ds$, onde $\phi : [0, +\infty) \rightarrow X$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $\frac{d\phi(t)}{dt} = T(t)$ e, portanto,

$$T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds.$$

(b) Sejam $x \in X$ e $h > 0$. Então

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_s^t T(\tau)x d\tau \right) &= \frac{1}{h} \int_s^t (T(\tau+h)x - T(\tau)x) d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau+h)x d\tau - \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_{s+h}^{t+h} T(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_s^{s+h} T(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $h \rightarrow 0^+$, segue por (a) que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_s^t T(\tau)x d\tau \right) = T(t)x - T(s)x.$$

Portanto, da definição de gerador infinitesimal obtemos $\int_s^t T(\tau)x d\tau \in D(A)$ e que $A \int_s^t T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x$.

(c) Sejam $x \in D(A)$ e $h > 0$. Então,

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = \frac{T(t+h) - T(t)}{h} x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax,$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Logo, $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Além disso, também concluímos que $\frac{d^+ T(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$. Vamos mostrar agora que $\frac{d^- T(t)x}{dt} = T(t)Ax$ para $t \geq 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) \right\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)\| \left\| \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) \right\| \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|. \end{aligned}$$

como ambos os termos do lado direito da desigualdade acima estão tendendo a zero, o primeiro porque $x \in D(A)$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$, e $\|T(t-h)\|$ é limitado quando $0 \leq h \leq t$ e o segundo é em virtude da continuidade de $T(t)$ em cada $t \geq 0$ (veja (2.1.4)). Portanto,

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall x \in D(A) \text{ e } t \geq 0.$$

(d) Sejam $x \in D(A)$ e $s, t \geq 0$. Por (a) e (c) temos que

$$\begin{aligned} T(t)x - T(s)x &= \int_s^t \frac{d}{dt} T(\tau)x d\tau \\ &= \int_s^t T(\tau)Ax d\tau \\ &= A \int_s^t T(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

□

No próximo resultado mostraremos duas propriedades básicas do gerador de um C_0 -semigrupo: a densidade do domínio e o fechamento do gráfico.

Corolário 2.2.2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então A é um operador linear fechado e $D(A)$ é denso em X .

Prova: Para $x \in X$ e $t > 0$ definimos $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds$. Pela parte (b) do Teorema 2.2.2 sabemos que $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$ e pelo item (a) do mesmo teorema

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = T(0)x = x,$$

ou seja, $x_t \rightarrow x$, quando $t \rightarrow 0$. Daí, $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $\overline{D(A)} \supset X$. Portanto, $\overline{D(A)} = X$, isto é, $D(A)$ é denso em X .

Vejamos agora que A é um operador linear fechado. A linearidade de A é óbvia. Para provarmos que A é um operador fechado, consideremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$, $x, y \in X$, tais que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Da parte (d) do Teorema 2.2.2 segue que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (2.2.4)$$

Afirmamos que $T(t)Ax_n \rightarrow T(s)y$, quando $n \rightarrow \infty$. De fato, pelo Teorema 2.2.1, existem $M \geq 1$ e $w \geq 0$, tais que $\|T(s)\| \leq Me^{wt}$ para todo $s \in [0, t]$, logo, se $s \in [0, t]$, então

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq Me^{wt} \|Ax_n - y\|,$$

ou seja, $T(t)Ax_n \rightarrow T(s)y$ uniformemente em $[0, t]$ no limite $n \rightarrow \infty$. Então, tomando o limite em (2.2.4) e usando o que fizemos anteriormente, temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds,$$

daí, pelo item (a) do Teorema 2.2.2, concluímos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t T(s)y ds = T(0)y = y.$$

Logo, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Portanto, A é um operador linear fechado. $\square$

O próximo resultado nos garante a unicidade do semigrupo associado a um gerador infinitesimal para o caso de semigrupos fortemente contínuos

Teorema 2.2.3. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ e $B : D(B) \subset X \rightarrow X$, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$

Prova: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 2.2.2, a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ dada por $f(s) = T(t-s)S(s)x$, para todo $t > 0$ e $s \in [0, t]$, é diferenciável e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0, \end{aligned}$$

já que $A = B$. Consequentemente, a função f é constante, em particular, para $s = 0$ e $s = t$. Assim, obtemos

$$f(0) = T(t)x = S(t)x = f(t), \forall x \in D(A).$$

Mostraremos agora que a propriedade é válida para todo $x \in X$, para isso, usaremos o fato de $D(A)$ ser denso em X (veja Corolário 2.2.2). Com efeito, para $x \in X$, tomemos uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como $T(t)$ e $S(t)$ são limitados (contínuos), temos que $T(t)x_n \rightarrow T(t)x$ e $S(t)x_n \rightarrow S(t)x$, quando $n \rightarrow \infty$. Usando isto, e o fato que $T(t)x_n = S(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $T(t)x = S(t)x$. Portanto, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .*

Prova: Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ com suporte compacto em $(0, \infty)$. Para cada $x \in X$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, considere o elemento

$$x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)ds.$$

Para $h > 0$, suficientemente pequeno, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} x_\varphi &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x]ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s)T(s+h)xds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty \varphi(\xi - h)T(\xi)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(\xi - h)T(\xi)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(\xi - h)T(\xi)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s-h)T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s-h)T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [\varphi(s-h)T(s)x - \varphi(s)T(s)x]ds - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s-h)T(s)xds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{h} [\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)xds. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Observe que usamos o fato de $\varphi(s-h) = 0$ se $0 < s < h$, já que φ tem suporte compacto em $(0, \infty)$. Agora, note que o integrando do lado direito de 2.2.5 converge uniformemente em $[0, \infty)$ para $-\varphi'(s)T(s)x$, quando $h \rightarrow 0^+$. Logo, $x_\varphi \in D(A)$ e

$$Ax_\varphi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x_\varphi = - \int_0^\infty \varphi'(s)T(s)xds.$$

Desde que $\varphi \in \mathcal{D}$, então φ^n , a n -ésima derivada de φ , também pertence a $\mathcal{D}$ para $n = 1, 2, \dots$. Por indução, conclui-se que $x_\varphi \in D(A^n)$

$$A^n x_\varphi = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^n(s) T(s) x ds, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e consequentemente, $x_\varphi \in \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Agora, consideremos Y o subespaço vetorial gerado

por $\{x_\varphi; x \in X, \varphi \in \mathcal{D}\}$. Do que provamos até agora, segue-se que $Y \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$.

Para concluir a prova, mostraremos que Y é denso em X . Suponha que Y não é denso em X , então pelo Teorema 1.2.2, existe um funcional linear $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $x^*(x_\varphi) = 0$ para toda $x_\varphi \in Y$, logo

$$\int_0^\infty \varphi(s) x^*(T(s)x) ds = x^* \left(\int_0^\infty \varphi(s) T(s) x ds \right) = 0, \quad (2.2.6)$$

para todo $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}$, isto implica que para $x \in X$ a função contínua $s \mapsto x^*(T(s)x)$ é nula em $[0, \infty)$, caso contrário, teria sido possível escolher $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que o lado direito de (2.2.6) não fosse zero. Em particular, para $s = 0$, $x^*(x) = 0$. Isto vale para todo $x \in X$ e, portanto, $x^* = 0$, o que é uma contradição. Logo, Y é denso em X e consequentemente,

$\bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ é denso em X , como queríamos provar. $\square$

Definição 2.2.2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, definimos

$$D(A^2) = \{x \in D(A); Ax \in D(A)\},$$

e de forma geral, para $k \geq 2$

$$D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1}); Ax \in D(A^{k-1})\}.$$

Lema 2.2.1. Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. Se $x \in D(A^2)$, então

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2 \|A^2 x\| \|x\| \quad (2.2.7)$$

Prova: Para $x \in D(A^2)$ e $t \geq 0$ temos pelo Teorema 2.2.2 item (d) que

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2 x ds, \quad (2.2.8)$$

ou seja,

$$tAx = T(t)x - x - \int_0^t (t-s)T(s)A^2 x ds.$$

Da Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leq t^{-1}(\|T(t)x\| + \|x\|) + t^{-1} \int_0^t (t-s)\|T(s)A^2x\|ds \\ &\leq \frac{2M}{t}\|x\| + \frac{Mt}{2}\|A^2x\|,\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

já que $M \geq 1$ ($\|T(0)\| = 1$). Note que se $A^2x = 0$, então (2.2.9) implica que $Ax = 0$ e (2.2.7) é satisfeita. Se $A^2x \neq 0$, tomemos $t = 2\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{-\frac{1}{2}}$ em (2.2.9). Daí

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leq M\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{\frac{1}{2}} + M\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{\frac{1}{2}} \\ &= 2M\|x\|^{\frac{1}{2}}\|A^2x\|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|A^2x\| \|x\|.$$

□

Exemplo 2.2.1. Consideremos o espaço de Banach

$$X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é limitada e uniformemente contínua} \}$$

com a norma

$$\|f\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|_{\mathbb{R}} \quad \forall f \in X.$$

Para $f \in X$, definimos

$$(T(t)f)(s) = f(t+s), \quad \forall t \geq 0, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados satisfazendo $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$. E

$$(\sup |f'(s)|)^2 \leq 4(\sup |f''(s)|)(\sup |f(s)|)$$

Solução: Inicialmente, mostraremos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é uma família de operadores lineares limitados em X . Com efeito,

(i) T(t) é linear.

Sejam $f, g \in X$, $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$ quaisquer, assim

$$(T(t)(f+g))(s) = (f+g)(t+s) = f(t+s) + g(t+s) = (T(t)f)(s) + (T(t)g)(s).$$

(ii) $T(t)$ é limitada.

Para $f \in X$, temos

$$\|T(t)f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |T(t)f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t)| \leq \sup_{(x+t) \in \mathbb{R}} |f(x+t)| = \|f\|,$$

consequentemente, $T(t)$ é limitada e $\|T(t)\| \leq 1$ e, portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$.

(iii) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

- Dados quaisquer $f \in X$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(T(0)f)(s) = f(0+s) = f(s) \Rightarrow T(0) = I.$$

- Sejam $t, w \geq 0$, $f \in X$ e $s \in \mathbb{R}$ arbitrários. Assim

$$(T(t+w)f)(s) = f(t+w+s) = (T(t)f)(w+s) = T(t)(T(w)f)(s),$$

ou seja, $T(t+w) = T(t)T(w)$.

• Por último, $|(T(t)f)(x) - f(x)| = |f(x+t) - f(x)|$, como $|x+t-x| = |t|$ e sabendo que f é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x+t-x| = |t| < \delta$ implica que $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon$, ou seja, $|t| < \delta$ implica que $|(T(t)f)(x) - f(x)| < \epsilon$ e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (T(t)f)(x) = f(x).$$

De (i)-(iii) segue que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados, satisfazendo $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

A seguir, apresentaremos o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Vamos determinar o operador linear A e o seu domínio $D(A)$. Para isso, sejam $f \in D(A)$, $s \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ quaisquer, assim

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} f(s) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)f(s) - T(0)f(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} = f'(s).$$

Logo, $A(f(s)) = f'(s)$, para todo $f \in D(A)$, em que $D(A) = \{f \in X, f' \text{ existe e } f' \in X\}$. Ainda, A é linear em virtude da linearidade da derivada.

Finalmente, como $\|T(t)\| \leq 1$, segue pelo Corolário 2.2.1 que

$$(\sup |f'(s)|)^2 \leq 4(\sup |f''(s)|)(\sup |f(s)|).$$

2.3 O Teorema de Hille - Yosida

O Teorema de Hille-Yosida caracteriza operadores lineares que geram semigrupos com geradores não necessariamente limitados. Em outras palavras, este teorema nos fornece uma condição suficiente e necessária para que um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. A priori, definiremos alguns conceitos necessários para enunciá-lo e demonstrá-lo.

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Pelo Teorema 2.2.1 existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para $t \geq 0$. Disto, temos a seguinte definição

Definição 2.3.1. Um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de uniformemente limitado se $w = 0$, além disso, se $M = 1$, então ele é chamado de semigrupo de contrações.

Definição 2.3.2. Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos números complexos λ tais que $\lambda I - A$ é injetor, $R(\lambda I - A) = X$ e

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \subset X \rightarrow X$$

é limitado. Para $\lambda \in \rho(A)$, o operador $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é chamado de operador resolvente. O espectro do operador A é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definição 2.3.3. Seja A um operador linear com $\rho(A) \neq \emptyset$. Definimos para $\lambda \in \rho(A)$ a aproximação de Yosida por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Proposição 2.3.1. (Equação do Resolvente) Se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado, então

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \quad \forall \mu, \lambda \in \rho(A).$$

Prova: Para $\lambda \in \rho(A)$, tem-se

$$\begin{aligned} AR(\lambda : A) &= A(\lambda I - A)^{-1} \\ &= (A - \lambda I + \lambda I)(\lambda I - A)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I \\ &= \lambda R(\lambda : A) - I. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

De (2.3.1), segue que para $\lambda, \mu \in \rho(A)$ as seguintes identidades valem

$$R(\lambda : A) = R(\lambda : A)[\mu R(\mu : A) - AR(\mu : A)]$$

e

$$R(\mu : A) = R(\mu : A)[\lambda R(\lambda : A) - AR(\lambda : A)]$$

Subtraindo as equações, obtemos

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) - R(\lambda : A) &= R(\lambda : A)[\mu R(\mu : A) - AR(\mu : A)] \\ &\quad - R(\mu : A)[\lambda R(\lambda : A) - AR(\lambda : A)] \\ &= \mu R(\lambda : A)R(\mu : A) - AR(\lambda : A)R(\mu : A) \\ &\quad - \lambda R(\mu : A)R(\lambda : A) + AR(\lambda : A)R(\mu : A) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.2. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. O conjunto resolvente, $\rho(A)$, é aberto em $\mathbb{C}$, e para $\mu \in \rho(A)$ a identidade*

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu : A)^{n+1}$$

vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu : A)\|}$.

Prova: Seja $\mu \in \rho(A)$ e tomemos $\epsilon = \frac{1}{\|R(\mu : A)\|}$, pois $R(\mu : A) \neq 0$. Tomemos $\mu_0 \in B(\mu, \epsilon)$. Assim

$$\mu_0 I - A = \mu I - A + \mu_0 I - \mu I = [I - (\mu - \mu_0)R(\mu : A)](\mu I - A). \quad (2.3.2)$$

Como $|\mu_0 - \mu| < \epsilon = \frac{1}{\|R(\mu : A)\|}$, temos

$$\|(\mu - \mu_0)R(\mu : A)\| \leq |\mu - \mu_0| \|R(\mu : A)\| < 1.$$

Seja $G := (\mu - \mu_0)R(\mu : A)$. Temos $\|G\| < 1$, então pela Proposição(2.3.2), $(I - G)^{-1} = [I - (\mu - \mu_0)R(\mu : A)]^{-1}$ existe e

$$[I - (\mu - \mu_0)R(\mu : A)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^n R(\mu : A)^n.$$

Assim, de (2.3.2) temos que

$$(\mu_0 I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1}[I - (\mu - \mu_0)R(\mu : A)]^{-1} = R(\mu : A)(I - G)^{-1},$$

isto é, $(\mu_0 I - A)^{-1}$ existe e é contínua, então $\mu_0 \in \rho(A)$. Logo, $B(\mu, \epsilon) \subset \rho(A)$ e assim $\rho(A)$ é aberto.

Ainda,

$$\begin{aligned}
R(\mu_0 : A) &= (\mu_0 - A)^{-1} \\
&= R(\mu : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^n R(\mu : A)^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^n R(\mu : A)^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

A seguir, iremos enunciar o teorema de Hille Yosida, um dos mais importantes teoremas da teoria de C_0 -semigrupos. A priori, iremos demonstrar a "condição necessária" do teorema mencionado e em seguida enunciaremos e provaremos três lemas que irão nos auxiliar com a prova da "condição suficiente" do mesmo teorema.

Teorema 2.3.1. (Teorema de Hille - Yosida) *Um operador (ilimitado) A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

(a) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(b) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $(0, \infty)$ e para cada $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: (Necessidade). Se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, então A é fechado e $\overline{D(A)} = X$, pelo corolário 2.2.2. Logo, **(a)** é satisfeito. Agora, mostraremos **(b)**. Para $\lambda > 0$ e $x \in X$ seja

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.3.3)$$

Como para todo $x \in X$ a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ dada por $f(t) = T(t)x$, é contínua e uniformemente limitada, existe a integral imprópria de Riemann, que por sua vez define o

operador $R(\lambda)$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\|_X &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\|_X \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\|_X dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\|_X dt \\
&= \|x\|_X \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\
&= \|x\|_X \frac{1}{\lambda},
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é válida pelo fato de $T(t)$ ser limitada e a terceira porque $T(t)$ é uma contração, isto é, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. Daí,

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

isto é, $R(\lambda)$ é um operador linear limitado. Além disso, para $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t+h)x - T(t)x) dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(\tau-h)} T(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \int_0^\infty \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) e^{-\lambda t} T(t)x dt - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h}}{h} \right) \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - x \\
&= \lambda R(\lambda)x - x,
\end{aligned}$$

já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda(h+0)} - e^{\lambda 0}}{h} = (e^{\lambda t})' \big|_{t=0} = \lambda,$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h}}{h} \right) \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) x dt &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{h+0} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= x.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(\lambda) \in D(A)$ e

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I, \quad (2.3.4)$$

ou seja,

$$(\lambda - A)R(\lambda) = I. \quad (2.3.5)$$

Veja ainda que para $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} T(t+h)x}{h} dt - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} T(t)x}{h} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(e^{-\lambda t} T(t+h)x - e^{-\lambda t} T(t)x)}{h} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \frac{(T(h)x - x)}{h} dt.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
AR(\lambda)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T(h)x - x)}{h} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) Ax dt \\
&= R(\lambda)Ax.
\end{aligned}$$

Então, para todo $x \in D(A)$, temos que

$$\begin{aligned}
x = (\lambda - A)R(\lambda)x &= \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x \\
&= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\
&= R(\lambda)(\lambda I - A)x.
\end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Por conseguinte, de (2.3.5) e de (2.3.6), concluímos que $R(\lambda)$ é a inversa de $(\lambda I - A)$ para todo $\lambda > 0$, ou seja, $R(\lambda : A) = R(\lambda)$. Portanto, as condições (a) e (b) são necessárias.

Agora, para mostrarmos que as condições (a) e (b) são suficientes para que A seja um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, necessitamos de três lemas, os quais serão enunciados e provados a seguir.

Lema 2.3.1. *Seja A um operador que satisfaça as condições (a) e (b) do Teorema (2.3.1) e $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Prova: Primeiramente, suponhamos $x \in D(A)$, assim

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| = \|AR(\lambda : A)x\| = \|R(\lambda : A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$, onde a primeira igualdade é justificada por (2.3.4) e a segunda por (2.2.7), a desigualdade é devido à hipótese.

Seja agora $x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X , existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existem n_ϵ e $\delta(\epsilon)$ tais que $\|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $n \geq n_\epsilon$, e

$$\|\lambda R(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon}\| < \frac{\epsilon}{3}, \text{ para todo } \lambda > \delta(\epsilon),$$

daí, para $\lambda > \delta(\epsilon)$ temos que

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq \underbrace{\|\lambda R(\lambda : A)\|}_{\leq 1} \|x - x_{n_\epsilon}\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon}\| + \|x - x_{n_\epsilon}\| < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

□

Lema 2.3.2. *Seja A um operador que satisfaça as condições (a) e (b) do Teorema 2.3.1. Se A_λ é uma aproximação de Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Prova: Para $x \in D(A)$, pelo Lema 2.3.1 e pela definição de aproximação de Yosida

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

□

Lema 2.3.3. *Seja A um operador que satisfaça as condições (a) e (b) do Teorema 2.3.1. Se A_λ é uma aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$. Além disso, para cada $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, temos que*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Prova: Da definição da Aproximação de Yosida, temos que A_λ é um operador linear e limitado. Além disso, pelo Teorema 2.1.1, A_λ é um gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$. Temos também que

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)}\| = e^{-\lambda t} \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A))}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \leq 1,$$

onde usamos na primeira desigualdade a inequação (2.1.6). Isto prova que $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Portanto, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$. Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) x ds,$$

daí,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) x ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|. \end{aligned}$$

□

(Suficiência). Continuando a prova do Teorema 2.3.1. Seja $x \in D(A)$ $t \geq 0$, do Lema 2.3.3, segue que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t \|A_\lambda x - Ax\| + t \|Ax - A_\mu x\|. \quad (2.3.7)$$

De (2.3.7) e do Lema 2.3.2, segue para $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente em intervalos limitados, quando $\lambda \rightarrow \infty$. Como $D(A)$ é denso em X e cada $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, podemos afirmar que $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ é convergente para todo $x \in X$ e que a convergência é uniforme para t intervalos limitados. De fato, para $x \in X$, $t \in [0, a]$ e $a > 0$, existe $x_n \in D(A)$, tal que $x_n \rightarrow x$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tais que

$$\|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad \|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } \lambda, \mu > n_0.$$

Daí, para $\lambda, \mu > n_0$ e $t \in [0, a]$ obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \|e^{tA_\lambda}(x - x_n)\| + \|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\mu}x_n\| + \|e^{tA_\mu}x_n - e^{tA_\mu}x\| \\ &\leq 2\|x - x_n\| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

como ϵ é arbitrário, segue a veracidade da nossa afirmação.

Considerando o que acabamos de fazer, definimos a família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ por

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x; \quad x \in X. \quad (2.3.8)$$

É claro que $T(t)$ é um operador linear em X para todo $t \geq 0$. Além disso, usando o fato de que $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ ser de contração, vemos que

$$\|T(t)x\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x \right\| \leq \|x\|, \quad (2.3.9)$$

o que implica que $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Agora, vamos provar que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Com efeito,

Como, para cada $\lambda > 0$, $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo, temos

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{0A_\lambda})x = Ix = x,$$

logo, $T(0) = I$, para todo $x \in X$.

Agora, sejam $x \in X$, $s, t \geq 0$, então

$$T(s+t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(s+t)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x,$$

no entanto, da desigualdade

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x - T(s)T(t)x\| &= \|e^{sA_\lambda}(e^{tA_\lambda}x - T(t)x) + (e^{sA_\lambda} - T(s))T(t)x\| \\ &\leq \|e^{sA_\lambda}\| \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))T(t)x\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))T(t)x\|, \end{aligned}$$

segue facilmente que $e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x$ converge para $T(s)T(t)x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$. Logo, $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Assim, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz as propriedades de um semigrupo. Além disso, por (2.3.9), garantimos que é um semigrupo de contração em X . E mais, como $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente para $t \in [0, a]$, $a > 0$, obtemos que $T(\cdot)x$ é uma função contínua em $[0, a]$. Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contração em X .

Finalmente, mostremos que A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Sejam $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Observe inicialmente que da desigualdade

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\ &\leq \|e^{sA_\lambda}\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\|, \end{aligned}$$

segue que $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniformemente para s em intervalos limitados para $T(s)Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$. Agora, usando (2.3.9) e o item (d) do Teorema 2.2.2, temos que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \frac{1}{t} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds,$$

donde podemos concluir que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds, \quad x \in D(A). \quad (2.3.10)$$

Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e seja $x \in D(A)$, de (2.3.10), obtemos

$$B(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = Ax,$$

consequentemente, $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$. Assim, $B \supset A$. Note que B é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, e como vale (a) e (b), então $1 \in \rho(B)$. Por outro lado, assumimos que $1 \in \rho(A)$, por hipótese (item (b)). Desde que $B \supset A$, então $B|_{D(A)} = A$ e como $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, segue que

$$(I - B)D(B) = X = (I - A)D(A) = (I - B)D(A),$$

e assim

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A),$$

e portanto, $B = A$. □

Corolário 2.3.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \text{para todo } x \in X \quad (2.3.11)$$

Prova: Pela prova do Teorema de Hille-Yosida, sabemos que a família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dada por $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$ é um C_0 -semigrupo de contração e que A é seu gerador infinitesimal. Logo, pelo Teorema (2.1.2), segue que $S(t) = T(t)$. □

Corolário 2.3.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. O conjunto resolvente de A contém o semiplano aberto direito, isto é, $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e para cada λ*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}. \quad (2.3.12)$$

Prova: O operador $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ está bem definido para λ , tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Usando o mesmo argumento da prova da parte da necessidade do Teorema de Hille-Yosida, podemos mostrar que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, ou seja, $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. A desigualdade (2.3.12) é provada do seguinte modo

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|x\| dt \\ &= \|x\| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} dt \\ &= \|x\| \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}. \end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir mostra que o conjunto resolvente de um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo não necessariamente contém mais que um semiplano direito aberto.

Exemplo 2.3.1. *Seja X espaço de todas as funções limitadas, uniformemente contínuas em $[0, \infty)$. Defina*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s), \quad f \in X,$$

Para todo $t \geq 0$ e $s \geq 0$. pelo Exemplo 2.2.1, sabemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações em X . Seu gerador infinitesimal em X é dado por

$$D(A) = \{f \in X; f' \in X\}$$

e

$$(Af)(s) = f'(s), \quad \text{para todo } f \in D(A).$$

pelo Corolário 2.3.2, $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e para cada um desses λ a equação

$$(\lambda - A)\varphi_\lambda(s) = 0 \tag{2.3.13}$$

tem solução não trivial. De fato, para $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$, temos

$$(\lambda - A)\varphi_\lambda(s) = (\lambda - A)e^{\lambda s} = \lambda e^{\lambda s} - \lambda e^{\lambda s} = 0.$$

Agora, se $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, então $\varphi_\lambda(s)$ é limitada por 1 e uniformemente contínua, onde a limitação é em s e a uniformidade em λ . Ou seja, se $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, então $\varphi_\lambda(s) \in X$ é solução de (2.3.13) e portanto, o operador $(\lambda I - A)$ não é injetivo e consequentemente não é invertível. Logo, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq 0\} \subseteq \sigma(A)$, isto é, o semiplano fechado esquerdo está no espectro $\sigma(A)$ de A .

Observação 2.3.1. Dado um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, para $w \geq 0$ e $S(t) = e^{-wt}T(t)$. Afiramos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações. Com efeito,

- $S(0) = e^{-w \cdot 0}T(0) = I$;
- $S(t+s) = e^{-w(t+s)}T(t+s) = e^{-wt}e^{-ws}T(s)T(t) = e^{-wt}T(t)e^{-ws}T(s) = S(t)S(s)$;
- E para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} |S(t)x - x| &= |e^{-wt}T(t)x - x| \\ &= |e^{-wt}T(t) - e^{-wt}x + e^{-wt}x - x| \\ &\leq |e^{-wt}T(t) - e^{-wt}x| + |e^{-wt}x - x| \\ &= |e^{-wt}\|T(t)x - x| + |e^{-wt} - 1||x|. \end{aligned}$$

Daí, como $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |S(t)x - x| = \lim_{t \rightarrow 0^+} |e^{-wt}\|T(t)x - x| + |e^{-wt} - 1||x| = 0.$$

- $\|S(t)x\| = e^{-wt}\|T(t)x\| \leq e^{-wt}e^{wt} = 1$.

Portanto, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

Observação 2.3.2. Se A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então $S(t) = e^{-wt}e^{tA} = e^{(A-wI)t}$. Logo, $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Por outro lado, se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, então $e^{tA} = e^{-wt}T(t)$ e consequentemente, $T(t) = e^{tA}e^{wt} = e^{(A+wI)t}$, ou seja, $A + wI$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e que satisfaz $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, pois $\|T(t)\| = \|e^{tA}e^{wt}\| \leq e^{wt}\|e^{tA}\| \leq e^{wt}$.

Corolário 2.3.3. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ se, e somente se,

- (a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;
- (b) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda > w\}$ e para cada $\lambda > w$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Prova: (Necessidade) Defina $S(t) = e^{-wt}T(t)$, para todo $t \geq 0$. Pela Observação 2.3.1, temos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações. Além disso, pela Observação 2.3.2, $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Logo, aplicando o Teorema de Hille - Yosida no semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, temos que $A - wI$ satisfaz as condições (a) e (b) do mesmo teorema. Em particular, $\delta \in \rho(A - wI)$ para todo $\delta > 0$, o que implica que $[(\delta + w)I - A]^{-1}$

existe e é limitado para todo $\delta > 0$. Daí, segue que $\{\delta + w, \delta > 0\} \subset \rho(A)$. Mais ainda, da parte (b) do Teorema Hille Yosida, segue que

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda - w : A - wI)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}, \quad \lambda > w.$$

(Suficiência) Suponhamos que as condições (a) e (b) sejam válidas. Como $D(A) = D(A - wI)$ e $R(\lambda + w : A) = R(\lambda : A - wI)$ para todo $\lambda > 0$, segue que as condições (a) e (b) do teorema de Hille-Yosida são verificadas para $A - wI$ e consequentemente, $A - wI$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração que denotaremos por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Definimos agora $T(t) = e^{wt}S(t)$, para todo $t \geq 0$. Analogamente a Obervação 2.3.1, mostra-se que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Além disso, A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. De fato, se B é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $x \in D(B)$, então $T(t)x$ é diferenciável pela direita em $t = 0$, o que implica que $S(t) = e^{-wt}T(t)$ é diferenciável pela direita em $t = 0$ e que $x \in D(A - wI)$. Mais ainda, pelo Teorema 2.2.2 item (c) segue que

$$Bx = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} = (e^{wt}(A - w)S(t)x + we^{wt}S(t)x)|_{t=0} = Ax$$

Logo, $D(B) \subset D(A - wI)$ e que $Bx = Ax$ para todo $x \in D(B)$. Por outro lado, se $x \in D(A - wI)$ é óbvio que $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável pela direita em $t = 0$, o que implica que $D(A - wI) \subset D(B)$ e $Ax = Bx$ para todo $x \in D(A - wI)$. Dessa forma, $D(A - wI) = D(B)$ e para todo $x \in D(A - wI) = D(B)$, tem-se $B = A$. Portanto, A é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t) = e^{wt}S(t)$ que satisfaz $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, já que $\|S(t)\| \leq 1$. $\square$

A seguir, apresentaremos um resultado que é muitas vezes útil para provar que se um determinado operador A satisfaz a condição de suficiência do Teorema de Hille-Yosida, então este operador é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, mas antes temos a seguinte definição.

Definição 2.3.4. *Seja X um espaço de Banach e seja X^* seu dual. Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Se A é um operador linear em X , sua imagem numérica $S(A)$ é o conjunto*

$$S(A) = \{\langle x^*, Ax \rangle; x \in D(A), \|x\| = 1, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \langle x^*, x \rangle = 1\}.$$

Teorema 2.3.2. *Seja A um operador linear fechado com domínio denso $D(A)$ em X . Seja $S(A)$ a imagem numérica de A e seja Σ o complemento de $\overline{S(A)}$ em $\mathbb{C}$. Se $\lambda \in \Sigma$ então $\lambda I - A$ é injetiva e tem imagem fechada. Além disso, se Σ_0 é uma componente conexa de Σ satisfazendo $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, então o espectro de A está contido no complemento S_0 de Σ_0 e*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})} \quad (2.3.14)$$

Prova: Seja $\lambda \in \Sigma$. Se $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x \rangle = 1$, então

$$\begin{aligned} 0 < d(\lambda : \overline{S(A)}) &\leq |\lambda - \langle x^*, Ax \rangle| \\ &= |\langle x^*, \lambda x - Ax \rangle| \\ &\leq \|x^*\| \|\lambda x - Ax\| \\ &\leq \|\lambda x - Ax\|, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

e portanto $\lambda I - A$ é injetiva.

Mostraremos agora que $\lambda I - A$ tem imagem fechada. Com efeito, tomemos $d = d(\lambda : \overline{S(A)})$. Seja $\{y_n\} \subset \text{Im}(\lambda I - A)$ tal que $y_n \rightarrow y$ para $y \in X$. Iremos mostrar que $y \in \text{Im}(\lambda I - A)$. Para isto, tomemos $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(A)$ tal que $y_n = (\lambda I - A)x_n$. Então, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$0 < d \leq \left\| (\lambda I - A) \left(\frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|} \right) \right\|,$$

ou seja

$$0 < d \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\|.$$

Como $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$, temos que $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ também, isto é, $\{x_n\} \subset D(A)$ é de Cauchy. Então a sequência $\{(x_n, (\lambda I - A)x_n)\} \subset \text{Graf}(\lambda I - A)$ converge para (x, y) . Visto que o $\text{Graf}(\lambda I - A)$ é fechado, então $(x, y) \in \text{Graf}(\lambda I - A)$. Logo, $y = (\lambda I - A)x \in \text{Im}(\lambda I - A)$.

Além disso, $\lambda \in \rho(A)$, então existe $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Dáí, de (2.3.15), temos

$$d(\lambda, \overline{S(A)}) \leq \|\lambda x - Ax\| = \|R(\lambda : A)^{-1}\| = \|R(\lambda : A)\|^{-1}$$

Resta mostrar que se $\sum_0$ é uma componente de Σ que tem uma interseção não vazia com o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A então $\sigma(A) \subset S_0$. Para tanto, considere o conjunto $\rho(A) \cap \sum_0$. Sabemos que $\rho(A)$ é aberto em $\mathbb{C}$ e consequentemente, temos que $\rho(A) \cap \sum_0$ é aberto em $\sum_0$. Agora, mostraremos que $\rho(A) \cap \sum_0$ é fechado em $\sum_0$. Para isso, considere $\lambda_n \in \rho(A) \cap \sum_0$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \sum_0$. Dáí, para n suficientemente grande, temos

$$d(\lambda_n : \overline{S(A)}) > \frac{1}{2} d(\lambda : \overline{S(A)}) > 0;$$

e consequentemente, para n suficientemente grande,

$$|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n : \overline{S(A)})$$

Sabemos que a distância é contínua, assim para n grande, temos que $d(\lambda_n : \overline{S(A)}) \rightarrow d(\lambda : \overline{S(A)})$. Logo, por (2.3.15) e tomando n suficientemente grande, obtemos

$$|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n : \overline{S(A)}) \leq \|R(\lambda_n : A)\|^{-1}$$

segue que λ está na bola de raio $\|R(\lambda_n : A)\|^{-1}$ centrada em λ_n o que implica $\lambda \in \rho(A)$, pois $\rho(A)$ é um conjunto aberto e $\lambda_n \in \rho(A)$. Portanto, $\rho(A) \cap \sum_0$ é fechado em $\sum_0$. Como $\sum_0$ é uma componente conexa e $\rho(A) \cap \sum_0$ é um subconjunto aberto e fechado em $\sum_0$, segue que $\rho(A) \supset \rho(A) \cap \sum_0 = \sum_0$ ou $\rho(A) \cap \sum_0 = \emptyset$. Mas por hipótese, $\rho(A) \cap \sum_0 \neq \emptyset$, e portanto, $\rho(A) \supset \sum_0$, ou seja, $\sigma(A) \subset S_0$, e a prova está completa. $\square$

2.4 O Teorema de Lumer-Phillips

Na seção anterior, vimos que o Teorema de Hille-Yosida é uma caracterização do gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. Nesta seção, apresentaremos uma outra caracterização para geradores infinitesimais de um C_0 -semigrupo de contrações. Antes, porém, necessitamos de algumas definições e resultados preliminares que enunciaremos no que segue.

Definição 2.4.1. *O conjunto*

$$X^* = \{x^* : X \rightarrow \mathbb{K}\}$$

onde x^* é funcional linear, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é chamado de **espaço dual** de X . E, para todo $x^* \in X^*$, denotamos por

$$\langle x^*, x \rangle = \langle x, x^* \rangle, \forall x \in X,$$

a imagem de $x \in X$ por x^* .

Definição 2.4.2. *O conjunto*

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x \rangle = \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \forall x \in X, \quad (2.4.1)$$

é chamado de **conjunto dual** de X^* .

Pelo Teorema de Hahn-Banch [18, Teorema 4.3-2], segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 2.4.3. *Um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dito **dissipativo** se, para todo $x \in D(A)$, existe $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$*

O próximo Teorema nos dá caracterização de operadores lineares dissipativos.

Teorema 2.4.1. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Então A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in D(A), \quad \lambda > 0. \quad (2.4.2)$$

Prova: Seja A dissipativo, então dado qualquer $x \in D(A)$, existe $x^* \in F(x)$ tal que $Re(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\| \|x\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \\ &\geq Re(\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle) \\ &\geq Re(\langle \lambda x, x^* \rangle - \langle A(x), x^* \rangle) \\ &= Re(\lambda \langle x^*, x \rangle - \langle A(x), x^* \rangle). \end{aligned}$$

Como $x^* \in F(x)$, então $\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2$. Disso, do que fizemos anteriormente e de $Re(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$, segue que

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\| \|x\| &\geq Re(\lambda \|x\|^2 - \langle x^*, A(x) \rangle) \\ &= \lambda \|x\|^2 - Re(\langle x^*, A(x) \rangle) \\ &\geq \lambda \|x\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in D(A), \quad \lambda > 0.$$

Reciprocamente, suponha que $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$, tem-se $(\lambda I - A)x \in X$ e $F((\lambda I - A)x)$ está bem definida. Agora, para cada $\lambda > 0$, sejam

$$y_\lambda^* \in F((\lambda I - A)x) \quad e \quad z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}.$$

para todo $x \in D(A)$. Assim, $\|z_\lambda^*\| = 1$, e mais, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| &= \langle \lambda x - A(x), z_\lambda^* \rangle \\ &= \lambda Re\langle x, z_\lambda^* \rangle - Re\langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &\leq \lambda \|x\| - Re\langle Ax, z_\lambda^* \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Re(\langle Ax, z_\lambda^* \rangle) \leq 0. \tag{2.4.3}$$

Como $-Re(\langle A(x), z_\lambda^* \rangle) = Re(\langle A(x), -z_\lambda^* \rangle) \leq \|A(x)\| \|z_\lambda^*\| \leq \|A(x)\|$. Então

$$\lambda \|x\| \leq \lambda Re(\langle x, z_\lambda^* \rangle) + \|A(x)\|,$$

ou seja

$$Re(\langle x, z_\lambda^* \rangle) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|A(x)\|. \tag{2.4.4}$$

pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki [4, Teorema 3.36], a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca*, $z_\lambda^*, \lambda \rightarrow \infty$, tem um ponto limite $z^* \in X^*$ com $\|z^*\| \leq 1$. Por (2.4.3) e (2.4.4), temos

$$Re(\langle Ax, z^* \rangle) \leq 0 \text{ e } Re(\langle x, z^* \rangle) \geq \|x\|. \quad (2.4.5)$$

Mas $Re(\langle x, z^* \rangle) \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|$ e portanto, $\langle x, z^* \rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\|z^*$ temos

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x, \|x\|z^* \rangle = \|x\|^2,$$

e

$$0 \geq Re(\langle Ax, z^* \rangle) = Re\left\langle Ax, \frac{x^*}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|} Re\langle Ax, x^* \rangle.$$

Assim, $x^* \in F(x)$ e $Re(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$, ou seja, A é dissipativo. $\square$

Teorema 2.4.2. (Lumer-Phillips) *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear tal que $\overline{D(A)} = X$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras*

(i) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $X = R(\lambda_0 I - A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

(ii) *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso,*

$$Re(\langle A(x), x^* \rangle) \leq 0, \forall x \in D(A), \quad x^* \in F(x).$$

Prova: (i) Primeiramente, mostraremos que A é fechado. Com efeito, como, por hipótese, A é dissipativo, segue do Teorema 2.4.1, que

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in D(A), \quad \lambda > 0. \quad (2.4.6)$$

o que prova que $\{(\lambda I - A)\}_{\lambda > 0}$ é uma família de operadores injetivos. Por hipótese, temos que

$$R(\lambda_0 I - A) = X,$$

para algum $\lambda_0 > 0$. Assim, dado $y \in X$, existe $x \in X$ tal que $(\lambda_0 I - A)x = y$. Disso e tomando $\lambda = \lambda_0$ em (2.4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda_0 : A)y\| &= \|R(\lambda_0 : A)(\lambda_0 I - A)x\| \\ &= \|x\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0} \|\lambda_0 x - Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0} \|y\|, \end{aligned}$$

ou seja, $R(\lambda_0 : A) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear e limitado, e assim fechado. Logo, $\lambda_0 I - A$ é fechado e, portanto, A é fechado.

Note que, se $R(\lambda I - A) = X$ para cada $\lambda > 0$, então $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e $\|R(\lambda I - A)\| \leq \lambda^{-1}$ por (2.4.6) (mostraremos, também, estas implicações). Segue-se então do teorema de Hille-Yosida que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X . Portanto, para concluir a prova do item (i), mostraremos que $R(\lambda I - A) = X$ para cada $\lambda > 0$. Com efeito, considere o conjunto

$$\Gamma = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - A) = X\}. \quad (2.4.7)$$

Seja $\lambda \in \Gamma$ qualquer. Por (2.4.6), $\lambda \in \rho(A)$. Como $\rho(A)$ é aberto, então existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\lambda, \mathbb{R}) \subset \rho(A)$ (em $B_\delta(\lambda, \mathbb{R})$ denota a bola aberta de centro $\lambda > 0$ e raio $\delta > 0$ em $\mathbb{R}$) e, consequentemente, $B_\delta(\lambda, \mathbb{R}) \cap \mathbb{R} \subset \Gamma$ e, assim Γ é aberto em $\mathbb{R}$. Provaremos, a seguir, que Γ é fechado em $(0, \infty)$.

Seja $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$, quando $n \rightarrow \infty$, assim, $R(\lambda_n I - A) = X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, para todo $y \in X$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, tal que

$$\lambda_n x_n - A(x_n) = y, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.4.8)$$

De (2.4.6), obtemos

$$\|y\| = \|\lambda_n x_n - A(x_n)\| \geq \lambda_n \|x_n\| \Rightarrow \|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $C > 0$, já que $\{\frac{1}{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Assim, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - (A(x_n) - A(x_m))\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \underbrace{(\lambda_m x_m - A(x_m))}_y - A(x_n)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - y - A(x_n)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - (y + A(x_n))\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n\| \\ &= |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\| \\ &\leq C |\lambda_m - \lambda_n|. \end{aligned}$$

Logo, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $D(A) \subset X$, assim, $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, para algum $x \in X$, pois X é um espaço de Banach. Disso e de (2.4.8), obtemos $A(x_n) \rightarrow \lambda x - y$, quando $n \rightarrow \infty$. Como A é fechado, $x \in D(A)$ e $\lambda x - A(x) = y$, segue que $y \in R(\lambda I - A)$, logo $X \subset R(\lambda I - A)$ e, portanto, $X = R(\lambda I - A)$, com $\lambda \in \Gamma$. Nesses termos, Γ é fechado em $(0, \infty)$ e como $\lambda_0 \in \Gamma$ temos que $\Gamma \neq \emptyset$ e portanto $\Gamma = (0, \infty)$.

Nesses termos,

$$R(\lambda I - A) = X, \quad \forall \lambda > 0 \Rightarrow (0, \infty) \subset \rho(A),$$

já que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe para todo $\lambda > 0$ e por (2.4.6), para todo $x \in X$, temos

$$\|R(\lambda : A)x\| = \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Portanto, a prova do item (i) está completa.

(ii) Temos, por hipótese, que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Então, pelo teorema de Hille-Yosida, tem-se $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e A é fechado então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, dados quaisquer $x \in D(A) \subset X$ e $x^* \in F(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle T(t)x - x, x^* \rangle) &= \operatorname{Re}(\langle T(t)x, x^* \rangle) - \operatorname{Re}(\langle x, x^* \rangle) \\ &\leq |\langle T(t)x, x^* \rangle| - \|x\|^2 \\ &\leq \|T(t)\| \|x\| \|x^*\| - \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Desta última desigualdade, obtemos

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.4.9)$$

Tomando-se o limite quando $t \rightarrow 0^+$, tendo em mente que $\frac{T(t)x - x}{t} \rightarrow Ax$ quando $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A), \quad x^* \in F(x).$$

E assim, provamos (ii) e a prova do teorema está completa. $\square$

Definição 2.4.4. *Sejam $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e $D(A^*) = \{x^* \in X^*; \text{ existe } y^* \in X^* \text{ que verifica } \langle x^*, Ax \rangle = \langle y^*, x \rangle, \text{ para todo } x \in D(A)\}$. É bem sabido que se $D(A)$ é denso em X , então, o y^* corresponde ao x^* é único, o que nos permite definir o operador adjunto A^* pondo-se $A^* : D(A^*) \subset X^* \rightarrow X^*$ tal que, $A^*(x^*) = y^*$.*

Corolário 2.4.1. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado tal que $\overline{D(A)} = X$. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

Prova: pelo item (i) do Teorema de Lumer-Phillips, é suficiente mostrar que $R(I - A) = X$, já que A é dissipativo e podemos tomar $\lambda_0 = 1$. Para isso, observamos em virtude da

hipótese de que A é dissipativo e fechado, temos que $R(I - A) \subset X$ é um subespaço fechado de X . Com efeito,

Sabemos que $y \in \overline{R(I - A)}$ se existe uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(I - A)$, tal que $y_n \rightarrow y$. Como $y_n \in R(I - A)$, existe $x_n \in X$ talque $y_n = (I - A)(x_n)$. Queremos mostrar que $y \in R(I - A)$, isto é, que existe $x \in X$ tal que $(I - A)(x) = y$.

Primeiro, perceba que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência Cauchy, pois como A é dissipativo, podemos aplicar (2.4.6) a seguir para $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|(I - A)(x_n - x_m)\| \\ &= \|(I - A)(x_n) - (I - A)(x_m)\| \\ &= \|y_n - y_m\| \end{aligned}$$

como $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será de Cauchy e consequentemente, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será de Cauchy pela desigualdade acima. Sendo X Banach, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, digamos $x_n \rightarrow x \in X$.

Agora, como A é fechado, segue que $(I - A)$ é fechado e portanto $\text{Graf}(I - A)$ é fechado. Sendo assim, $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\text{Graf}(I - A)$ que converge

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \text{Graf}(I - A),$$

na topologia usual do gráfico. Logo, $y = (I - A)(x)$, como queríamos. Logo, temos que $R(I - A) \subset X$ é um subespaço fechado de X .

Suponhamos, por um momento, que $R(I - A) \neq X$, ou seja, $X \subsetneq R(I - A)$. Assim, pelo [2, Corolário 1.8] existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que

$$\langle x^*, x - A(x) \rangle = 0, \forall x \in D(A)$$

o que implica,

$$\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, A(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, A(x) \rangle.$$

Logo, pela definição (2.4.4), segue que $x^* \in D(A^*)$ e

$$A^*(x^*) = x^* \Rightarrow x^* - A^*(x^*) = 0.$$

Como, por hipótese, A^* é dissipativo, pelo Teorema 2.4.1, obtemos

$$0 = \|(I - A^*)(x^*)\| \geq \|x^*\| \geq 0 \Rightarrow \|x^*\| = 0 \Rightarrow x^* = 0.$$

o que é uma contradição. Portanto, $R(I - A) = X$ e a prova do corolário está completa. $\square$

Concluiremos esta seção com algumas propriedades dos operadores dissipativos

Definição 2.4.5. Um operador linear A é chamado de fechável quando dada uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ com $x_n \rightarrow 0$ em $D(A)$, e a sequência $\{Ax_n\}$ também convergir em X , tivermos $\{Ax_n\} \rightarrow 0$.

Teorema 2.4.3. Seja A um operador dissipativo em X .

- (i) Se $R(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$, então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$;
- (ii) Se A é fechável, então $\bar{A}$, fecho de A , é também dissipativo;
- (iii) Se $\overline{D(A)} = X$, então A é fechável.

Prova: (i) A prova deste item segue da prova da parte (i) do Teorema de Lumer-Phillips.

(ii) Seja $x \in D(\bar{A})$, assim, $y = \bar{A}(x)$, para algum $y \in X$. Por definição de $\bar{A}$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $A(x_n) \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, como A é dissipativo, segue do Teorema 2.4.1 que $\|\lambda x_n - A(x_n)\| \geq \lambda \|x_n\|$ para todo $\lambda > 0$, e fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\|\lambda x - \bar{A}(x)\| \geq \lambda \|x\|, \text{ para todo } \lambda > 0. \quad (2.4.10)$$

Como (2.4.10) é válida para cada $x \in D(\bar{A})$, $\bar{A}$ é dissipativo pelo Teorema 2.4.1.

(iii) Suponhamos, por um momento, que A não é fechável, isto é, existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \rightarrow 0 \text{ e } A(x_n) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para algum $y \in X$, com $\|y\| = 1$. Como, por hipótese, A é dissipativo, para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$, segue

$$\begin{aligned} \left\| x + \frac{1}{t}x_n - tA\left(x + \frac{1}{t}x_n\right) \right\| &= \left\| t\left[\frac{1}{t}\left(x + \frac{1}{t}x_n\right) - A\left(x + \frac{1}{t}x_n\right)\right] \right\| \\ &\geq \frac{t}{t} \left\| x + \frac{1}{t}x_n \right\| \\ &= \left\| x + \frac{1}{t}x_n \right\| \end{aligned}$$

fazendo $n \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow 0$, obtemos $\|x - y\| \geq \|x\|$, para todo $x \in D(A)$. Por hipótese, $D(A)$ é denso em X , ou seja, existe uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $y_n \rightarrow y$ e satisfaz $\|y_n - y\| \geq \|y_n\|$. Como a norma é contínua, podemos fazer $n \rightarrow \infty$ obtendo, assim, $0 \geq \|y\| = 1$ o que é um absurdo. Portanto, A é fechável. $\square$

Teorema 2.4.4. Seja A dissipativo com $R(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$

Prova: Seja $x^* \in X^*$ de modo que $\langle x^*, x \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Mostraremos que $x^* = 0$. Já que $R(I - A) = X$ é suficiente mostrar que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$, que é equivale a $\langle x^*, A(x) \rangle = 0$ para cada $x \in D(A)$. Seja $x \in D(A)$, então pelo item (i) do Teorema 2.4.3, existe uma x_n tal que $x = x_n - (1 \setminus n)Ax_n$. Como $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$, $x_n \in D(A^2)$ e

$$Ax = Ax_n - (1 \setminus n)A^2x_n \text{ ou } Ax_n = (I - (1 \setminus n)A)^{-1}Ax.$$

Do Teorema 2.4.1 segue que $\|(I - (1 \setminus n)A)^{-1}\| \leq 1$ e portanto $\|Ax_n\| \leq \|Ax\|$. Além disso,

$$\|x_n - x\| \leq (1 \setminus n)\|Ax_n\| \leq (1 \setminus n)\|Ax\| \quad (2.4.11)$$

e portanto, $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\|Ax_n\| \leq C$ e X é reflexivo, então por [2, Teorema 3.18], existe uma subsequência Ax_{n_k} de Ax_n tal que $Ax_{n_k} \rightarrow y$ na topologia fraca. Como A é fechado (ver prova do Teorema de Lumer-Phillips, (i)) segue que $Ax = y$. finalmente, como $\langle x^*, z \rangle = 0$ para todo $z \in D(A)$, temos que

$$\langle x^*, Ax_{n_k} \rangle = n_k \langle x^*, x_{n_k} - x \rangle = 0 \quad (2.4.12)$$

fazendo $n_k \rightarrow \infty$ em (2.4.12), obtemos $\langle x^*, Ax \rangle = 0$. Isto vale para todo $x \in D(A)$ e portanto $x^* = 0$ e $\overline{D(A)} = X$. $\square$

O próximo exemplo mostra que o Teorema 2.4.4 não é verdadeiro para espaços de Banach em geral.

Exemplo 2.4.1. Seja $X = C([0, 1])$, isto é, o espaço das funções contínuas em $[0, 1]$ com a norma do supremo. Seja $D(A) = \{u : u \in C^1([0, 1]) \text{ e } u(0) = 0\}$ e $Au = -u'$ para $u \in D(A)$. Para cada $f \in X$ a equação $\lambda u - Au = f$ tem uma solução u dada por

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi. \quad (2.4.13)$$

para ver essa solução, basta aplicar o método do fator integrante na equação diferencial de primeira ordem $u' + \lambda u = f$.

Isso mostra que $R(\lambda I - A) = X$. Mostraremos que A é dissipativo. Com efeito, de (2.4.13) segue que

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} f(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^x |e^{\lambda(\xi-x)}| |f(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f\| \int_0^x e^{\lambda(\xi-x)} d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda} \|f\| (1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda|u(x)| \leq (1 - e^{-\lambda x})\|f\| \leq \|\lambda u - Au\| \quad (2.4.14)$$

tomando o supremo sobre $x \in [0, 1]$ no lado esquerdo de (2.4.14), obtemos que $\lambda\|u\| \leq \|\lambda u - Au\|$ e, portanto, A é dissipativo pelo Teorema 2.4.1. Mas $\overline{D(A)} = \{u : u \in X \text{ e } u(0) = 0\} \neq X = C([0, 1])$.

2.5 A Caracterização dos Geradores Infinitesimais de C_0 -semigrupos

Nas duas seções anteriores, apresentamos caracterizações diferentes de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contrações. Vimos no final da seção (2.3) que estas caracterizações produzem caracterizações de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Passaremos agora para a caracterização geral de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de operadores lineares e limitados. pelo Teorema 2.2.1, segue que para tal semigrupo existe uma constante real $M \geq 1$ e ω tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Usando argumentos semelhantes aos usados na seção (2.3), mostraremos que para caracterizar o gerador infinitesimal no caso geral, é suficiente caracterizar o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo uniformemente limitado. Isso será feito por renormalização do espaço de Banach X para que o C_0 -semigrupo uniformemente limitado torna-se, na nova norma, um C_0 -semigrupo de contrações e, em seguida, usando as caracterizações anteriormente provadas dos geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contrações.

Lema 2.5.1. *Seja A um operador linear para o qual $\rho(A) \supset (0, \infty)$. Se*

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq M, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots, \lambda > 0, \quad (2.5.1)$$

então existe uma norma $|\cdot|$ em X que é equivalente à norma original $\|\cdot\|$ em X e satisfaz

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in X. \quad (2.5.2)$$

e

$$|\lambda R(\lambda : A)x| \leq |x|, \text{ para todo } x \in X, \lambda > 0. \quad (2.5.3)$$

Prova: Sejam $\mu > 0$ e

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\lambda : A)^n x\|.$$

Por (2.5.1) temos para todo $x \in X$

$$\|x\| = \|\mu^0 R(\lambda : A)^0 x\| \leq \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\lambda : A)^n x\| = \|x\|_\mu \leq M\|x\|,$$

ou seja,

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|. \quad (2.5.4)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\mu R(\mu : A)x\|_\mu &= \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\lambda : A)^n \mu R(\lambda : A)x\| \\ &= \sup_{n \geq 0} \|\mu^{n+1} R(\lambda : A)^{n+1}x\| \\ &\leq \|x\|_\mu. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Afirmamos que

$$\|\lambda R(\lambda : A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad \forall x \in X, \quad \lambda \in (0, \mu]. \quad (2.5.6)$$

De fato, seja $x \in X$ qualquer. Se $y = R(\lambda : A)x$, então pela Proposição 2.3.1, obtemos

$$\begin{aligned} R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y) &= R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)R(\lambda : A)x) \\ &= R(\mu : A)x + (\mu - \lambda)R(\mu : A)R(\lambda : A)x \\ &= R(\mu : A)x + R(\lambda : A)x - R(\mu : A)x \\ &= R(\lambda : A)x, \end{aligned}$$

isto é, $y = R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y)$. Disto e de (2.5.5), segue que

$$\begin{aligned} \|y\|_\mu &= \|R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y)\|_\mu \\ &\leq \|R(\mu : A)x\|_\mu + |\mu - \lambda|\|R(\mu : A)y\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + (\mu - \lambda)\frac{1}{\mu}\|y\|_\mu \\ &= \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu. \end{aligned}$$

Donde concluímos,

$$\|y\|_\mu - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu \Rightarrow \lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

ou seja,

$$\lambda\|y\|_\mu = \|\lambda R(\lambda : A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad \forall x \in X \text{ e } 0 < \lambda \leq \mu,$$

como afirmamos. Usando (2.5.4) e (2.5.6) segue que

$$\|\lambda^n R(\lambda : A)^n\| \leq \|\lambda^n R(\lambda : A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad \text{para todo } 0 < \lambda \leq \mu. \quad (2.5.7)$$

Tomando o supremo quando $n \geq 0$ no lado direito de (2.5.7), segue que $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ para $0 < \lambda \leq \mu$. Finalmente, definimos $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$|x| = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\|_\mu, \quad \forall x \in X.$$

De (2.5.1), segue que

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\| \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\|_\mu \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} M\|x\|$$

ou seja,

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

e tomando $n = 1$ em (2.5.7) temos

$$\|\lambda R(\lambda : A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu,$$

fazendo $\mu \rightarrow \infty$ provamos (2.5.3).

Observação 2.5.1. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X e seja A o seu gerador infinitesimal. Se a norma em X é alterada para uma norma equivalente, então $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ permanece um C_0 -semigrupo em X com nova norma. O gerador infinitesimal não mudará, nem o fato de A ser fechado ou densamente definido, pois todas essas propriedades são topológicas e com isso independem da norma em X .*

Teorema 2.5.1. *Um operador linear A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ ($M > 1$) se, e somente se,*

(a) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(b) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $(0, \infty)$ e para cada $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots$$

Prova: Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq M$ ($M > 1$). Definimos $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|, \quad \forall x \in X. \quad (2.5.8)$$

Então

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad (2.5.9)$$

assim $|\cdot|$ é uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|$ em X . Além disso, para todo $x \in X$

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s \geq 0} \|T(s+t)x\| = |x|, \quad (2.5.10)$$

ou seja,

$$|T(t)x| \leq |x|.$$

Logo, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações em X com norma $|\cdot|$. Segue do Teorema de Hille-Yosida e das observações no início da sua prova que

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e $|R(\lambda : A)| \leq \frac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$.

Assim, por (2.5.9)

$$\|R(\lambda : A)^n x\| \leq |R(\lambda : A)^n x| \leq \frac{|x|}{\lambda^n} \leq \frac{M\|x\|}{\lambda^n},$$

ou seja,

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}.$$

Logo, as condições **(a)** e **(b)** são necessárias. Reciprocamente, se as condições **(a)** e **(b)** são satisfeitas, pelo Lema 2.5.1 existe uma norma $|\cdot|$ em X satisfazendo (2.5.2) e (2.5.3). Considere X com essa norma, pela Observação 2.5.1 A é um operador fechado, densamente definido com $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $|R(\lambda : A)| \leq \frac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$. Logo, pelo Teorema de Hille-Yosida, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X munido da norma $|\cdot|$. Retornando à norma original, pela Observação 2.5.1, temos ainda que A o gerador infinitesimal de $T(t)$ e

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|$$

ou seja,

$$\|T(t)\| \leq M.$$

Portanto, as condições **(a)** e **(b)** são suficientes. □

Agora, se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em X , pelo Teorema 2.2.1, existem $M \geq 1$ e $w \leq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Além disso, já vimos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se, $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Com essas condições feitas e o teorema anterior, temos o próximo resultado.

Teorema 2.5.2. *Um operador linear A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ se, e somente se,*

(a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(b) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o raio (ω, ∞) e para cada $\lambda > \omega$

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (2.5.11)$$

Prova: $\Rightarrow$) Consideremos o C_0 -semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Logo, $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$, $B : D(A) \subset X \rightarrow X$, dado $B = A - \omega I$, é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Portanto, pelo Teorema 2.5.1, $A = B + \omega I$ é fechado, $D(A) = D(B)$ é denso em X ,

$$(\omega, \infty) = (0, \infty) + \{\omega\} \subset \rho(B + \omega I) = \rho(A)$$

e

$$\|R(\lambda : A)^n\| = \|R(\lambda - \omega : B)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall \lambda > \omega, n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Leftarrow$) Definimos o operador $B = A - \omega I$. Como A é fechado e $D(A)$ é denso em X , então B é fechado e $D(B)$ é denso em X . Além disso, pelo

$$(0, \infty) \subset \rho(B) \text{ e } \|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}^*.$$

Portanto, pelo Teorema 2.5.1, B é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$ e algum $M \geq 1$. Consideremos o C_0 -semigrupo $\{T(t) = e^{\omega t}S(t)\}_{t \geq 0}$, então o seu gerador infinitesimal é o operador $A = B + \omega I$, disso, das propriedades do operador B e de $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, segue o resultado. $\square$

Observação 2.5.2. A condição que todo real λ , $\lambda > \omega$, está no conjunto resolvente de A junto com a estimativa (2.5.11) implica que todo complexo λ , satisfazendo $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, está no conjunto resolvente de A e para todo $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ temos

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots \quad (2.5.12)$$

Prova: Defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt.$$

desde que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $R(\lambda)$ está bem definido para todo λ , satisfazendo $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. De fato,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda - \omega t} \|T(t)x\| dt \\ &\leq M\|x\| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda - \omega t} dt \\ &\leq \frac{M\|x\|}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}. \end{aligned}$$

Usando argumentos análogos ao da prova do Teorema Hille - Yosida (ver Teorema 2.3.1) mostra-se que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$. Para provar (2.5.12), assumamos que $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} R(\lambda : A)x &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)x dt\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

Por indução, obtemos

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} R(\lambda : A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt\tag{2.5.14}$$

De fato, para

- $n = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R(\lambda : A)x = - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)x dt,$$

a igualdade é válida por (2.5.13).

Agora temos por hipótese de indução, a seguinte igualdade

- $n = k$,

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} R(\lambda : A)x = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

- $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1}}{\partial \lambda^{k+1}} R(\lambda : A)x &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} R(\lambda : A)x \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= (-1)^k \int_0^\infty (-1) t^{k+1} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-\lambda t} T(t)x dt\end{aligned}$$

Portanto, a identidade (2.5.14) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, pela Proposição 2.3.2, segue que, para todo $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ é analítica. Afirmamos que a aplicação

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda : A) \in \mathcal{L}(X)$$

é contínua, diferenciável e

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R(\lambda : A) = -R(\lambda : A)^2.$$

Além disso, por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} R(\lambda : A) = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}. \quad (2.5.15)$$

De fato, fixemos $\lambda_0 \in \rho(A)$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0 : A)\|}$. Daí, disso, da Equação do Resolvente, proposição 2.3.1, e da proposição 2.3.2, obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : A) - R(\lambda_0 : A)\| &= \|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda : A)R(\lambda_0 : A)\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda : A)\| \|R(\lambda_0 : A)\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0 : A)\| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|R(\lambda_0 : A)\|^{n+1} \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0 : A)\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0 : A)\|)^n \\ &\leq \frac{|\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda : A)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0 : A)\|}. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R(\lambda : A) - R(\lambda_0 : A)\| = 0$, e portanto, a aplicação

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda : A) \in \mathcal{L}(X)$$

é contínua. Agora, veja que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h : A) - R(\lambda_0 : A)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h : A)R(\lambda_0 : A)(\lambda_0 - (\lambda_0 + h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h : A)R(\lambda_0 : A)(-h)}{h} \\ &= -R(\lambda_0 : A)^2. \end{aligned}$$

Logo, a aplicação $R(\lambda : A)$ é diferenciável.

Passaremos agora à demonstração de (2.5.15). Para isso, usaremos o princípio de indução finita.

Para $n = 1$ acabamos de ver que a igualdade é verdadeira.

Vamos supor que (2.5.15) vale para $n = k$, ou seja, que a seguinte igualdade vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda : A) = (-1)^k k! R(\lambda : A)^{k+1}.$$

Agora, para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda : A) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda : A) \right) \\
&= \frac{d}{d\lambda} ((-1)^k k! R(\lambda : A)^{k+1}) \\
&= (-1)^k k! (k+1) R(\lambda : A)^k (-R(\lambda : A)^2) \\
&= (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda : A)^{k+2}.
\end{aligned}$$

Logo, (2.5.15) vale para $n \in \mathbb{N}$.

Comparando (2.5.14) e (2.5.15), temos

$$(-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

ou seja,

$$R(\lambda : A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : A)^n x\| &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-Re\lambda t} \|T(t)x\| dt. \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-Re\lambda t} M e^{\omega t} \|x\| dt. \\
&\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(Re\lambda - \omega)t} dt.
\end{aligned}$$

Fazendo $a = Re\lambda - \omega > 0$, segue

$$\|R(\lambda : A)^n x\| \leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-at} dt.$$

Usando o método de integração por partes onde $u = t^{n-1}$, ou seja, $du = (n-1)t^{n-2} e$ $dv = e^{-at} dt$, o que implica $v = -\frac{e^{-at}}{a}$. Usando esse método $n-1$ vezes obtemos

$$-\frac{t^{n-1} e^{-at}}{a} \Big|_0^\infty - \frac{(n-1)t^{n-2} e^{-at}}{a^2} \Big|_0^\infty - \dots - \frac{(n-1)!}{a^{n-1}} \int_0^\infty e^{-at} dt.$$

Todas as parcelas são claramente iguais a zero, exceto

$$-\frac{(n-1)!}{a^{n-1}} \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{(n-1)!}{a^{n-1}}$$

Isto prova que para $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ obtemos

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

como queríamos mostrar. $\square$

Concluimos esta seção com a extensão da representação da fórmula do Corolário 2.3.1 para o caso geral.

Teorema 2.5.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X . Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , isto é, $A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A)$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x. \quad (2.5.16)$$

Prova: Começamos com o caso que $\|T(t)\| \leq M$. Na prova do Teorema 2.5.1 exibimos uma norma $|\cdot|$ em X que é equivalente à norma $\|\cdot\|$ em X e consequentemente $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações. Usando o Corolário 2.3.1 segue que $|e^{tA_\lambda} x - T(t)x| \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$, para todo $x \in X$. Como as normas são equivalentes, vale (2.5.16) em todo X . Para o caso geral quando $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, onde $\omega \leq 0$, $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq M$, e pelo que acabamos de ver o resultado é válido. Para o caso que $\omega > 0$, temos que $\lambda \rightarrow \|e^{A_\lambda}\|$ é limitado para $\lambda > 2\omega$. De fato,

$$\begin{aligned} \|e^{A_\lambda}\| &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I)}\| \\ &= e^{-\lambda t} \|e^{\lambda^2 R(\lambda; A)t}\| \\ &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k \|R(\lambda : A)^k\|}{k!}, \end{aligned}$$

disso e do item (ii) do Teorema 2.5.2, temos

$$\begin{aligned} \|e^{A_\lambda}\| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}}{k!} \\ &= Me^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{(\lambda - \omega)}} \\ &= Me^{\left(\frac{\lambda \omega}{\lambda - \omega}\right)t}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lambda > 2\omega \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} > \omega \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} - \lambda > \omega - \lambda \Leftrightarrow \frac{-\lambda}{2} > \omega - \lambda \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} < \lambda - \omega \Leftrightarrow \frac{\lambda \omega}{\lambda - \omega} < \frac{\lambda \omega}{\frac{\lambda}{2}} = 2\omega.$$

e portanto,

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq Me^{2\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5.17)$$

Agora, considere o semigrupo uniformemente limitado $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, com seu gerador infinitesimal $A - \omega I$. Da primeira parte da prova do teorema, temos

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{t(A-\omega I)\lambda + \omega I}x, \quad \forall x \in X, \quad (2.5.18)$$

em que

$$(A - \omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda)$$

onde

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda)R(\lambda + \omega : A) \\ &= \omega[\omega R(\lambda + \omega : A) - 2AR(\lambda + \omega : A)]. \end{aligned}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (A - \omega I)_\lambda &= \lambda(A - \omega I)R(\lambda : A - \omega I) \\ &= \lambda(A - \omega I + \lambda I - \lambda I)(\lambda I + \omega I - A)^{-1} \\ &= (\lambda + \omega - \omega)(A - \omega I + \lambda I - \lambda I)(\lambda I + \omega I - A)^{-1} \end{aligned}$$

Tome $\alpha = \lambda + \omega$, assim

$$\begin{aligned} (A - \omega I)_\lambda &= (\alpha - \omega)(A - \alpha I + \lambda I)(\alpha I - A)^{-1} \\ &= \alpha(A - \alpha I + \lambda I)(\alpha I - A)^{-1} - \omega(A - \alpha I + \lambda I)(\alpha I - A)^{-1} \\ &= \alpha(A - \alpha I)(\alpha I - A)^{-1} + \alpha\lambda(\alpha I - A)^{-1} - \omega(A - \alpha I + \lambda I)(\alpha I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \alpha^2(\alpha I - A)^{-1} + \alpha\lambda(\alpha I - A)^{-1} - \omega(A - \alpha I + \lambda I)(\alpha I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \alpha^2(\alpha I - A)^{-1} + \alpha\lambda(\alpha I - A)^{-1} + \omega I - \omega\lambda(\alpha I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \alpha^2(\alpha I - A)^{-1} + \alpha\lambda(\alpha I - A)^{-1} + 2\omega I - \omega I - \omega\lambda(\alpha I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \omega I - (\omega^2 + 2\lambda\omega + \lambda^2)((\lambda + \omega)I - A)^{-1} \\ &\quad + (\omega\lambda + \lambda^2)((\lambda + \omega)I - A)^{-1} + 2\omega I - \omega\lambda((\lambda + \omega)I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \omega I - \omega(\omega + 2\lambda)((\lambda + \omega)I - A)^{-1} - \lambda^2((\lambda + \omega)I - A)^{-1} \\ &\quad + \lambda^2((\lambda + \omega)I - A)^{-1} + \omega\lambda((\lambda + \omega)I - A)^{-1} + 2\omega I - \omega\lambda((\lambda + \omega)I - A)^{-1} \\ &= A_{\lambda+\omega} - \omega I - \omega(\omega + 2\lambda)((\lambda + \omega)I - A)^{-1} + 2\omega. \end{aligned}$$

Assim,

$$(A - \omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda), \quad (2.5.19)$$

onde,

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda)((\lambda + \omega)I - A)^{-1} \\ &= \omega[2I - (\omega + 2\lambda)R(\lambda + \omega : A)] \\ &= \omega[2R(\lambda + \omega : A)(\lambda + \omega - A) - (\omega + 2\lambda)R(\lambda + \omega : A)] \\ &= \omega[2(\lambda + \omega - A) - (\omega + 2\lambda)]R(\lambda + \omega : A) \\ &= \omega[(\omega - 2A)]R(\lambda + \omega : A) \\ &= \omega[\omega R(\lambda + \omega : A) - 2AR(\lambda + \omega : A)]. \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)\| &\leq \omega(\|\omega R(\lambda + \omega : A)\| + 2\|AR(\lambda + \omega : A)\|) \\
&\leq \omega(\|\omega R(\lambda + \omega : A)\| + 2\|\lambda R(\lambda + \omega : A) - I\|) \\
&\leq \omega(\|\omega R(\lambda + \omega : A)\| + 2\|\lambda R(\lambda + \omega : A)\| + 2\|I\|) \\
&\leq \omega\left(\omega\frac{M}{\lambda + \omega - \omega} + 2\lambda\frac{M}{\lambda} + 2\right) \\
&= 2\omega + \left(\frac{\omega^2}{\lambda} + 2\omega\right)M,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|H(\lambda)\| \leq 2\omega + (2\omega^2 + \lambda^{-1}\omega^2)M$ e, para todo $x \in D(A)$, $\|H(\lambda)x\| \leq M\lambda^{-1}(\omega^2\|x\| + 2\omega\|A\|) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Portanto, $H(\lambda)x \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\|e^{tH(\lambda)}x - x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsH(\lambda)}x)ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}x ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}x\| ds \\
&= \|tH(\lambda)x\| \int_0^1 \|e^{tsH(\lambda)}x\| ds \\
&\leq t\|H(\lambda)x\| \int_0^1 e^{ts\|H(\lambda)\|} ds \\
&\leq t\|H(\lambda)x\| \int_0^1 e^{t\|H(\lambda)\|} ds \\
&\leq t\|H(\lambda)x\| e^{t\|H(\lambda)\|}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|e^{tH(\lambda)}x - x\| \leq t\|H(\lambda)x\| e^{t\|H(\lambda)\|}$$

temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tH(\lambda)}x = x, \quad \forall x \in X. \quad (2.5.20)$$

Finalmente, desde que $H(\lambda)$ e $A_{\lambda+\omega}$ para quaisquer $\lambda > 0$ e $\omega \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| &= \|e^{tA_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x - e^{tA_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x + e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| \\
&\leq \|e^{tA_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda}\| + \|e^{tH(\lambda-\omega)}x - x\|.
\end{aligned}$$

Quando $\lambda \rightarrow \infty$ a primeira parcela do lado direito tende a zero por (2.5.18) e a segunda tende a zero por (2.5.17) e (2.5.20). Portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA\lambda}x = T(t)x, \forall x \in X.$$

□

2.6 C_0 -grupos de Operadores Lineares e Limitados

Passaremos agora para a caracterização geral de geradores infinitesimais de C_0 -grupos de operadores lineares limitados. Além de semigrupos de operadores lineares, algumas equações nos fornecem grupos de operadores lineares. Um exemplo simples é quando o gerador infinitesimal do semigrupo é um operador A limitado, e vimos que neste caso temos de fato um grupo de operadores. Vamos estudar mais profundamente este conceito, e encontrar condições para que um operador linear não-limitado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ gere um grupo de operadores lineares.

Definição 2.6.1. *Uma família $\{T(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach X é um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados se*

- (i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade de X);
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $-\infty < t, s < \infty$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, para todo $x \in X$

Para o caso de grupos de operadores lineares também podemos definir o seu gerador infinitesimal, da seguinte maneira:

Definição 2.6.2. *O gerador infinitesimal A do grupo $\{T(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ é definido por*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (2.6.1)$$

quando o limite existe; o domínio de A é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais existe o limite (2.6.1).

Note que em (2.6.1) $t \rightarrow 0$ de ambos os lados e não apenas $t \rightarrow 0^+$ como no caso do gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo.

Seja $\{T(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados. Das definições acima, fica claro que para $t \geq 0$, $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados

com gerador infinitesimal A . Além disso, para $t \geq 0$, $S(t) = T(-t)$ é também um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados com gerador infinitesimal $-A$. Assim, se $T(t)$ é um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados em X , tanto A quanto $-A$ são geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos que são denotados por $T_+(t)$ e $T_-(t)$, respectivamente. Por outro lado, se A e $-A$ são os geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$, então veremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -grupo $T(t)$ dado por

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se } t \geq 0 \\ T_-(-t) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.6.1. *O operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados $\{T(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{|t|}$ se, somente se*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) Todo real λ , $|\lambda| > \omega$, está no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A e para cada λ

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.2)$$

Prova: A necessidade segue do fato de que ambos A e $-A$ são geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{|t|}$. Desde que A é o gerador infinitesimal de tal semigrupo, segue pelo Teorema 2.5.2 que A é fechado, $\overline{D(A)} = X$ e (2.6.2) é satisfeita para $\lambda > \omega$. Além disso, como $-A$ é também um gerador infinitesimal de tal C_0 -semigrupo e $R(\lambda : A) = -R(-\lambda : -A)$, pois

$$-R(-\lambda : A) = -\int_0^\infty e^{\lambda t} T(-t) x dt$$

fazendo $-t = v$, temos

$$-R(-\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda v} T(v) x dv = R(\lambda : A)$$

Segue que $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ e que (2.6.2) é satisfeita para $-\lambda < -\omega$ e, portanto, as condições (i) e (ii) são necessárias.

Se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, segue do Teorema 2.5.2 que A e $-A$ são geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$, respectivamente e que

$$\|T_\pm(t)\| \leq Me^{\omega t}. \quad (2.6.3)$$

pelo Teorema 2.5.3, $T_+(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x$ e $T_-(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-tA_\lambda} x$, onde A_λ são aproximações de Yosida de A e claramente $T_+(t)$ e $T_-(t)$ comutam.

Se $W(t) := T_+(t)T_-(t)$, então $W(t)$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados para $t \geq 0$. Para $x \in D(A) = D(-A)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{W(t)x - x}{t} &= \frac{T_+(t)T_-(t)x - T_-(t)x + T_-(t)x - x}{t} \\ &= T_-(t) \frac{T_+(t)x - x}{t} + \frac{T_-(t)x - x}{t} \rightarrow IAx - Ax = 0, \text{ quando } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, para $x \in D(A)$ temos $W(t)x = x$. Como $D(A)$ é denso em X e $W(t)$ é limitado, temos que $W(t) = I$ ou $T_-(t) = (T_+(t))^{-1}$. Definindo

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se } t \geq 0 \\ T_-(-t) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

obtemos um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$. Portanto, as condições (i) e (ii) são suficientes. $\square$

Lema 2.6.1. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados, e A seu gerador infinitesimal. Se para cada $t > 0$, $T(t)^{-1}$ existe e é um operador limitado, então $S(t) = T(t)^{-1}$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados e tem como gerador infinitesimal o operador $-A$. Além disso, se*

$$U(t) = \begin{cases} T(t) & \text{se } t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} & \text{se } t \leq 0, \end{cases}$$

então $\{U(t)\}_{-\infty \leq t \leq \infty}$ é um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados.

Prova: As propriedades de semigrupos para $S(t)$ são óbvias:

- $S(0) = I$;
- $S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1} = S(s)S(t)$;
- Para provar a continuidade forte de $S(t)$, note que para $s > 0$ a imagem de $T(s)$ é todo X . Sejam $x \in X$ e $s > 1$, existe $y \in X$, tal que $T(s)y = x$ para $t < 1$, temos

$$\|T(t)^{-1}x - x\| = \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\| = \|T(s-t)y - T(s)y\| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0$. Portanto, $S(t)$ é uniformemente contínuo.

Finalmente, para $x \in D(A)$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x - T(t)x}{t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \\ &= -Ax, \end{aligned}$$

ou seja, $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)^{-1}\}_{t \geq 0}$. Agora, vamos mostrar que $\{U(t)\}_{-\infty \leq t \leq \infty}$ é um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados e assim concluiremos a prova. Com efeito, sabemos que A é gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, e $-A$ é o gerador infinitesimal de $\{T_-(t)\}_{t \geq 0}$ e $T(-t)^{-1}$, para $t < 0$, logo $T_-(t) = T(-t)^{-1}$, para $t < 0$, portanto, $\{U(t)\}_{-\infty \leq t \leq \infty}$ é um C_0 -grupo de operadores lineares e limitados. $\square$

Teorema 2.6.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados. Se $0 \in \rho(T(t_0))$ para algum $t_0 > 0$ então $0 \in \rho(T(t))$ para todo $t > 0$ e $T(t)$ pode ser estendido a um C_0 -grupo.*

Prova: Se $0 \in \rho(T(t))$ para todo $t > 0$, então, por definição, $(T(t))^{-1}$ existe e é limitado para todo $t > 0$. Logo, pelo Lema 2.6.1 podemos estender $T(t)$ a um C_0 -grupo. Assim, tendo em vista essa análise, basta mostrarmos que $0 \in \rho(T(t))$ para todo $t > 0$. Para isto, como, por hipótese, $0 \in \rho(T(t_0))$, $T(t_0)^n = T(nt_0)$ é injetiva para todo $n \geq 1$. Seja $T(t)x = 0$, escolha n tal que $nt_0 > t$. Daí,

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t + t)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0,$$

o que implica que $x = 0$. Logo, $T(t)$ é injetiva, para todo $t > 0$. Agora, mostraremos que $R(T(t)) = X$, para todo $t > 0$. Para $t \leq t_0$, $R(T(t)) \supset R(T(t_0))$, pela propriedade de semigrupos. Para $t > t_0$, seja $t = kt_0 + t_1$ com $0 \leq t_1 \leq t_0$. Daí,

$$T(t) = T(kt_0 + t_1) = T(kt_0)T(t_1) = T(t_0)^k T(t_1),$$

ou seja, concluímos que $R(T(t)) = X$. Portanto, $T(t)$ é injetiva e $R(T(t)) = X$ para todo $t > 0$ e pelo Teorema do Gráfico Fechado, $0 \in \rho(T(t))$, para todo $t > 0$. $\square$

Teorema 2.6.3. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares e limitados. Se para algum $s_0 > 0$, $T(s_0) - I$ é compacto então $T(t)$ é invertível para todo $t > 0$ e $T(t)$ pode ser estendido a um C_0 -grupo.*

Prova: Tendo em vista o Teorema 2.6.2, é suficiente provar que $T(s_0)$ é invertível. Se $T(s_0)$ é não invertível, então $0 \in \sigma(T(s_0))$, mas por hipótese $T(s_0) - I$ é compacto e assim, 0 é um autovalor de $T(s_0)$ com multiplicidade finita. Pois se 0 tem multiplicidade infinita então o $N(T(s_0))$ tem dimensão infinita. Mas $T(s_0) - I$ é compacto, isto é, dado uma sequência $x_n \in N(T(s_0))$ limitada, existe uma x_{n_k} tal que $(T(s_0) - I)(x_{n_k})$ é convergente, ou seja, $I(x_{n_k})$ é convergente e concluímos que o operador I é compacto, o que é um absurdo. Agora, seja $x \neq 0$ tal que $T(s_0)x = 0$. Fazendo $s_1 = \frac{s_0}{2}$, temos $T(s_1)T(s_1)x = T(s_0)x = 0$, e 0 é ainda um autovalor de $T(s_1)$. Por indução, definimos a sequência $\{s_n\}$ tal que 0 é um autovalor de $T(s_n)$. Se $N(T(t))$ é o núcleo de $T(t)$, então $N(T(s)) \subset N(T(t))$, para $s \leq t$. Seja $Q_n = N(T(s_n)) \cap \{x \in X; \|x\| = 1\}$. Note que Q_n é uma sequência de subconjuntos não vazios de X . Uma vez que $N(T(s_0))$ tem dimensão finita, Q_0 é compacto e consequentemente $\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n \neq \emptyset$. Se $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$, então

$$\|T(s_n)x - x\| = \|x\| = 1, \text{ para todo } s_n \quad (2.6.4)$$

Mas $s_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo (2.6.4) contradiz a continuidade forte de $T(t)$. Isso mostra que $T(s_0)$ é invertível. $\square$

2.7 A Transformada Inversa de Laplace

Um dos problemas fundamentais na teoria dos semigrupos de operadores lineares é a relação entre o semigrupo e seu gerador infinitesimal. Dado um semigrupo $T(t)$ obtém-se seu gerador infinitesimal, por definição, como

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ para } x \in D(A).$$

Uma maneira diferente de obter A , ou melhor, o resolvente de A , é pela Observação 2.5.2. Lá nós mostramos que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ então

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \text{ para } x \in X, \operatorname{Re}(\lambda) > w. \quad (2.7.1)$$

Do ponto de vista das aplicações às equações diferenciais parciais, é mais interessante obter $T(t)$ de seu gerador infinitesimal. A razão para isso é que para $x \in D(A)$, $T(t)x$ é a solução do problema do valor inicial

$$\frac{du}{dt} - Au = 0, \quad u(0) = x.$$

Esta seção é dedicada ao problema de representar $T(t)$ em termos de seu gerador infinitesimal. Uma maneira de fazer isso já foi exibida no Teorema 2.5.3. Aqui, usaremos um método diferente. Se $T(t)$ satisfaz $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, então o resolvente de A satisfaz (2.7.1), isto é, o resolvente de A é a transformada de Laplace do semigrupo. Portanto, esperamos obter o semigrupo $T(t)$ do resolvente de A invertendo a Transformada de Laplace. Começamos com algumas preliminares.

Lema 2.7.1. *Sejam B um operador linear limitado e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma > \|B\|$, então*

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \quad (2.7.2)$$

onde a integral é calculada ao longo do segmento de reta $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$. Além disto, a convergência da integral é uniforme em qualquer intervalo limitado com relação a t .

Prova: Como $\gamma > \|B\|$, escolha r tal que $\gamma > r > \|B\|$ e seja C_r um círculo de raio r centrado na origem (veja figura 1). Se $\lambda \neq 0$ e $|\lambda| > r$, então $\left| \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{r}$. Daí, pela

Proposição 1.3.1[série de Neumann, onde estamos considerando $z = \frac{1}{\lambda}$ e $T = B$], temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^j B^j = \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1}, \quad (2.7.3)$$

multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $(\lambda)^{-1}$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda^{-j} B^j = (\lambda I - B)^{-1} \text{ para } |\lambda| > r,$$

ou seja,

$$R(\lambda : B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{\lambda^{j+1}}, \text{ para } |\lambda| > r. \quad (2.7.4)$$

Como $|\lambda| > r > \|B\|$, então, pela Proposição 1.3.1[série de Neumann], obtemos

$$\left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|} \|B\|},$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \lambda^{-1} \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\| &\leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|} \|B\|} \\ &\leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{r} \|B\|} \\ &= |\lambda|^{-1} C, \text{ para todo } |\lambda| > r > \|B\|. \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Em outras palavras, para todo $|\lambda| > r > \|B\|$, temos que

$$\|R(\lambda : B)\| \leq C |\lambda|^{-1}. \quad (2.7.5)$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (2.7.4) por $(\frac{1}{2\pi i})e^{\lambda t}$ e integrando sobre C_r , obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda,$$

observe que a troca da integral com o somatório (no lado direito da igualdade acima) é válida pelo fato de (2.7.5) garantir a convergência uniforme da série (2.7.4). Assim, pela fórmula dos coeficientes da série de Taylor, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda = \frac{t^j}{j!}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j t^j}{j!} \\ &= e^{tB}, \end{aligned}$$

reescrivendo,

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda. \quad (2.7.6)$$

Visto que fora de C_r o integrando de (2.7.6) é analítico e $\|R(\lambda : B)\| \leq C|\lambda|^{-1}$, podemos mudar o caminho de integração de C_r para a reta $Re(z) = \gamma$, usando o Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2). De fato, considere a região Ω exterior à C_r e interior à curva C^1 por partes Λ_k dada por

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^4 \Lambda_k^l$$

onde,

$$\begin{aligned} \Lambda_k^1 &= \{\lambda; \lambda = \gamma + is, -k \leq s \leq k\}, \\ \Lambda_k^2 &= \{\lambda; \lambda = s - ik, -k \leq s \leq \gamma\}, \\ \Lambda_k^3 &= \{\lambda; \lambda = -k + is, -k \leq s \leq k\}, \\ \Lambda_k^4 &= \{\lambda; \lambda = s + ik, -k \leq s \leq \gamma\}, \end{aligned}$$

sendo a curva, orientada no sentido anti-horário (Veja figura 2.1).

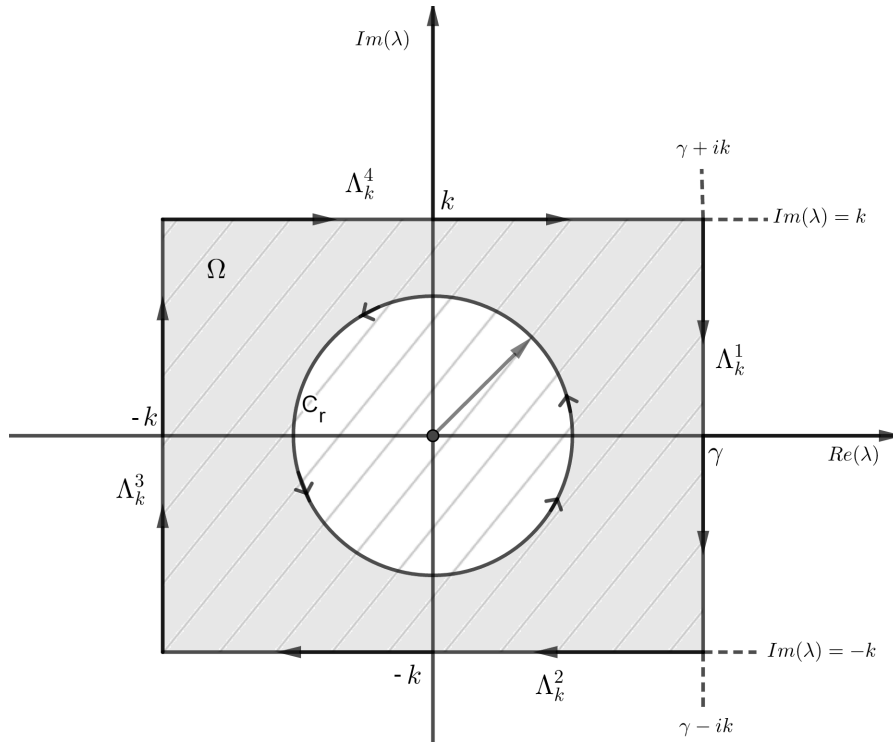


Figura 2.1: A região Ω

Já que o integrando em (2.7.6) é analítico em Ω , então pelo Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2), podemos trocar o caminho de integração C_r por Λ_k

$$\int_{\Lambda_k} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \quad (2.7.7)$$

Denotemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \quad (2.7.8)$$

Observe que se mostrarmos a veracidade de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = 0, \quad \forall j = 2, 3, 4. \quad (2.7.9)$$

garantimos (2.7.2), pois passando o limite em (2.7.7) com $k \rightarrow \infty$ e utilizando (2.7.8) e (2.7.9), teremos

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda.$$

Assim, provaremos (2.7.9). Com efeito, vimos em (1.3.1) como determinar a integral de uma função contínua definida sobre um aberto de $\mathbb{C}$ ao longo de uma curva de classe C^1 por partes. Daí, usando este fato e a informação $|e^{\lambda t}| \leq e^{Re(\lambda)t}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_k^3} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \right\| &\leq \int_{-k}^k e^{Re\lambda t} \|R(\lambda : B)\| ds \\ &\leq \int_{-k}^k e^{-kt} \frac{C}{|\lambda|} ds \\ &\leq \int_{-k}^k e^{-kt} \frac{C}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\ &\leq C e^{-kt} \int_{-k}^k \frac{1}{k} ds \\ &= 2C e^{-kt} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Logo, mostramos a veracidade de (2.7.9) para a curva Λ_k^3 .

Para a curva Λ_k^4 e Λ_k^2 iremos abordar uma análise diferente. Note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \right\| &\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{Re\lambda t} \|R(\lambda : B)\| ds \\ &\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{st} \frac{C}{|\lambda|} ds \\ &\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{st} \frac{C}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Fixando $P > 0$ e $-k < -P$, temos

$$C \int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds = C \int_{-k}^{-P} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds + C \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds,$$

escolhendo $P > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{st} < \frac{\epsilon}{C}, \text{ para todo } s \in [-k, -P], \quad (2.7.11)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} C \int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds &\leq C \frac{\epsilon}{C} \int_{-k}^{-P} \frac{ds}{\sqrt{k^2 + s^2}} + C \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\ &\leq \epsilon \int_{-k}^{-P} \frac{ds}{k} + C \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{k} (-P + k) + C \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\ &\leq \epsilon + C \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds. \end{aligned}$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, fixamos $P > 0$ tal que (2.7.11) ocorra; conseqüentemente

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left(C \int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \right) &\leq \epsilon + C \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_{-P}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\ &\leq \epsilon + C \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{e^{\gamma t}}{k} (\gamma + P) \right) \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

pelarbitrariedade de $\epsilon > 0$, segue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left(C \int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \right) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(C \int_{-k}^{\gamma} \frac{e^{st}}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \right) = 0. \quad (2.7.12)$$

Por conseguinte, fazendo $k \rightarrow \infty$ em (2.7.10) e usando (2.7.12), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \rightarrow 0, \quad (2.7.13)$$

como queríamos. Analogamente, para Λ_k^2 , garantimos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^2} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \rightarrow 0,$$

como queríamos provar. □

Lema 2.7.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > \omega \geq 0$, e seja*

$$A_\mu = \mu AR(\mu : A) = \mu^2 R(\mu : A) - \mu I \quad (2.7.14)$$

a aproximação de Yosida de A . Então, para $Re\lambda > \frac{\omega\mu}{\mu-\omega}$, temos

$$R(\lambda : A_\mu) = (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda} : A\right) \quad (2.7.15)$$

e

$$\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq M \left(Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu - \omega} \right)^{-1}. \quad (2.7.16)$$

Para $Re\lambda > \epsilon + \frac{\omega\mu}{\mu-\omega}$ e $\mu > 2\omega$, existe uma constante C dependendo somente de M e ϵ tal que para todo $x \in D(A)$

$$\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq \frac{C}{|\lambda|} (\|x\| + \|Ax\|). \quad (2.7.17)$$

Prova: Primeiramente, vamos provar (2.7.15). Com efeito,

$$\begin{aligned} R(\lambda : A_\mu) &= (\lambda - A_\mu)^{-1} \\ &= (\lambda - \mu AR(\mu : A))^{-1} \\ &= (\lambda - \mu A(\mu I - A)^{-1})^{-1} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} [(\mu + \lambda)(\lambda - \mu A(\mu I - A)^{-1})^{-1}] \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} \{(\mu + \lambda)[(\lambda(\mu I - A) - \mu A)(\mu I - A)^{-1}]^{-1}\} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} \{(\mu + \lambda)(\mu I - A)[(\lambda(\mu I - A) - \mu A)]^{-1}\} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} \{(\mu I - A)(\mu + \lambda)[(\lambda(\mu I - A) - \mu A)]^{-1}\} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} \left\{ (\mu I - A)(\mu + \lambda)(\mu + \lambda)^{-1} \left[\frac{\lambda\mu I}{(\lambda + \mu)} - A \right]^{-1} \right\} \\ &= (\mu + \lambda)^{-1} (\mu I + A) R\left(\frac{\lambda\mu I}{(\lambda + \mu)} : A\right). \end{aligned}$$

Agora, vamos provar (2.7.16). Para isto, note que A_μ é o gerador infinitesimal de e^{tA_μ} e por (2.5.17)

$$\|e^{tA_\mu}\| \leq M \exp \left[t \left(\frac{\omega\mu}{\mu + \omega} \right) \right].$$

Logo, pelo Teorema 2.5.2 segue que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu + \omega}}.$$

Finalmente, vamos provar (2.7.17). Dado $Re\lambda > \epsilon + \frac{\omega\mu}{\mu-\omega}$, segue de (2.7.16) que $\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq M\epsilon^{-1}$. Note que, se $x \in D(A)$ e $\mu > 2\omega$, então

$$\begin{aligned}\|A_\mu x\| &= \|\mu R(\mu : A)Ax\| \\ &= \mu \|R(\mu : A)\| \|Ax\| \\ &\leq \mu \frac{M}{\mu - \omega} \|Ax\| \\ &\leq 2M \|Ax\|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|R(\lambda : A_\mu)x\| &= \left\| \frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda : A_\mu)A_\mu x}{\lambda} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\|x\| + \frac{2M^2}{\epsilon} \|Ax\| \right) \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} (\|x\| + \|Ax\|).\end{aligned}$$

□

Lema 2.7.3. *Seja A nas condições do Lema 2.7.2, $\lambda = \gamma + i\eta$, onde $\gamma > \omega + \epsilon$ fixado. Para todo $x \in X$, temos*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R(\lambda : A_\mu)x = R(\lambda : A)x \quad (2.7.18)$$

e para todo $Y > 0$, o limite é uniforme em η para $|\eta| < Y$.

Prova: Seja $v = \frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}$. De (2.7.15), para μ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A) &= (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R(v : A) - R(\lambda : A) \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}[(\mu I - A)R(v : A) - (\lambda + \mu)R(\lambda : A)] \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R(v : A)[I - (\mu I - A)^{-1}(v - A)(\mu + \lambda)(\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R(v : A)[(\lambda I - A)(\mu I - A) \\ &\quad - (\lambda + \mu)(vI - A)]R(\mu : A)R(\lambda : A) \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R(v : A)[\lambda\mu I - \lambda A - \mu A + A^2 \\ &\quad - \lambda\mu I + \lambda A + \mu A]R(\mu : A)R(\lambda : A) \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A)R(v : A)A^2R(\mu : A)R(\lambda : A) \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}A^2R(\mu : A)(\mu I - A)R(v : A)R(\lambda : A) \\ &= (\lambda + \mu)^{-1}A^2R(v : A)R(\lambda : A).\end{aligned}$$

Para $\gamma > \omega + \epsilon$ implica que $\gamma - \omega > \epsilon$. pelo Teorema 2.5.2 $\|R(\lambda : A)\| \leq M\epsilon^{-1}$. Dado $Y > 0$, podemos encontrar um μ_0 dependendo de Y e γ tal que se $\lambda = \gamma + i\eta$, $|\eta| \leq Y$ e

$\mu > \mu_0$, então $Re \frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda} > \omega + \frac{\epsilon}{2}$. Então, para $\mu > \mu_0$ temos $\|R(v : A)\| \leq 2M\epsilon^{-1}$. Portanto, se $x \in D(A^2)$ e $\mu > \mu_0$, temos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda : A_\mu)x - R(\lambda : A)x\| &\leq \frac{1}{|\mu + \omega|} \|R(v : A)\| \|R(\lambda : A)\| \|A^2x\| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \frac{2M^2}{\epsilon^2} \|A^2x\| \end{aligned}$$

e (2.7.18) é verificada para $x \in D(A^2)$. Como $D(A^2)$ é denso em X (ver Teorema 2.2.4), do Lema 2.7.2, $\|R(\lambda : A_\mu)\|$ é uniformemente limitado para $Re(\lambda) > \omega + \epsilon$ desde que $\mu > \omega + \frac{\omega^2}{\epsilon}$ e pelo Teorema 2.5.2 o mesmo é válido para $\|R(\lambda : A)\|$, (2.7.18) é válida para todo $x \in X$.

Teorema 2.7.1. *Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ e $\gamma > \max(0, w)$. Se $x \in D(A)$, então*

$$\int_0^t T(s)x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.7.19)$$

e a integral no lado direito converge uniformemente em intervalos limitados com relação a t .

Prova: Seja $\mu > 0$ fixado e seja $\delta > \|A_\mu\|$. Defina

$$\rho_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)x d\lambda. \quad (2.7.20)$$

Integrando ambos os lados de (2.7.20) de 0 a t e trocando a ordem de integração encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho_k(s) ds &= \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu)x d\lambda ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} R(\lambda : A_\mu)x \left(\int_0^t e^{\lambda s} ds \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} R(\lambda : A_\mu)x \left[\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right] d\lambda, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^t \rho_k(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu)x \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} R(\lambda : A_\mu)x \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.7.21)$$

Afirmamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\delta-ik}^{\delta+ik} R(\lambda : A_\mu)x \frac{d\lambda}{\lambda} = 0. \quad (2.7.22)$$

Com efeito,

Considere Γ_k um caminho composto do segmento vertical

$$\Gamma_k^{(1)} = \{\delta + i\eta; -k \leq \eta \leq k\}$$

e do semicírculo

$$\Gamma_k^{(2)} = \left\{ \delta + ke^{i\varphi} = \delta + k\cos(\varphi) + i\sin(\varphi); \frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

como na Figura 2.2.

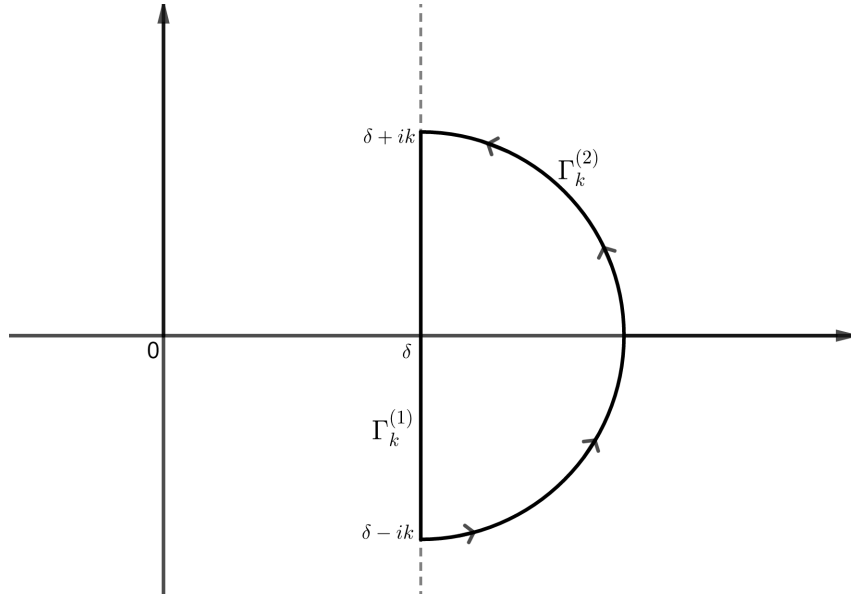


Figura 2.2: Caminho Γ_k

Assim, integrando $\lambda^{-1}R(\lambda : A_\mu)$ no caminho por partes Γ_k e usando o Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2), temos que

$$\int_{\Gamma_k} \lambda^{-1}R(\lambda : A_\mu)x = 0,$$

o que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_k^{(1)}} \lambda^{-1}R(\lambda : A_\mu)x d\lambda + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_k^{(2)}} \lambda^{-1}R(\lambda : A_\mu)x d\lambda = 0 \quad (2.7.23)$$

Além disso, se $\lambda \in \Gamma_k^{(2)}$, então

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{(\delta + k\cos(\varphi))^2 + k^2\sin^2(\varphi)} \\ &= \sqrt{\delta^2 + 2\delta k\cos(\varphi) + k^2} \\ &= k\sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos(\varphi)}{k} + 1}, \end{aligned}$$

Logo, sendo $\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq C_\mu |\lambda|^{-1}$, para $|\lambda| \geq \delta$, uma vez que A_μ é um operador limitado, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma_{k(2)}} \lambda^{-1} R(\lambda : A_\mu) x d\lambda \right\| &\leq \int_{\Gamma_{k(2)}} \left\| \frac{R(\lambda : A_\mu)}{\lambda} \right\| \|x\| d\lambda \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_\mu |\lambda|^{-1}}{|\lambda|} \|x\| d\varphi \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_\mu \left(k \sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta \cos(\varphi)}{k} + 1} \right)^{-1}}{k \sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta \cos(\varphi)}{k} + 1}} \|x\| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{k} C_\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \|x\| \frac{1}{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta \cos(\varphi)}{k} + 1} d\varphi \\
&\leq \frac{1}{k} \pi C_\mu \|x\|, \quad (k \approx \infty);
\end{aligned}$$

onde utilizamos na última desigualdade o fato de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta \cos(\varphi)}{k} + 1} = 1.$$

Assim, para $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{\Gamma_{k(2)}} \frac{R(\lambda : A_\mu)}{\lambda} x d\lambda \rightarrow 0. \quad (2.7.24)$$

Daí, utilizando (2.7.23) e (2.7.24) segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} = 0,$$

como tínhamos afirmado. Agora, utilizaremos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.5) para mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \rho_k(s) ds = \int_0^t e^{sA_\mu} ds. \quad (2.7.25)$$

Para isto, definimos $h_k(s) := \|\rho(s) - e^{sA_\mu}\|$. Daí, note que

- (i) $\{h_k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis em $[0, t]$, pois, é uma sequência de funções contínuas;
- (ii) $h_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, pois $R(\mu : A)$ e I são lineares e limitados. A_μ é um operador linear e limitado, donde, pelo Lema 2.7.1, $\rho_k(s) \rightarrow e^{sA_\mu} x$, quando $k \rightarrow \infty$;

(iii) $|h_k(s)| \leq g(s)$ e $\int_0^t g(s)ds < \infty$. Com efeito, pela desigualdade triangular,

$$|h_k(s)| \leq \|\rho_k(s)\| + \|e^s A_\mu\| \quad (2.7.26)$$

Considere,

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \{\lambda; \lambda = m - ik, -k \leq m \leq \delta\} \\ \Upsilon_2 &= \{\lambda; \lambda = -k - im, -k \leq m \leq k\} \\ \Upsilon_3 &= \{\lambda; \lambda = m + ik, -k \leq m \leq \delta\} \end{aligned}$$

e o círculo C_r de raio r e centro na origem (veja Figura 2.3).

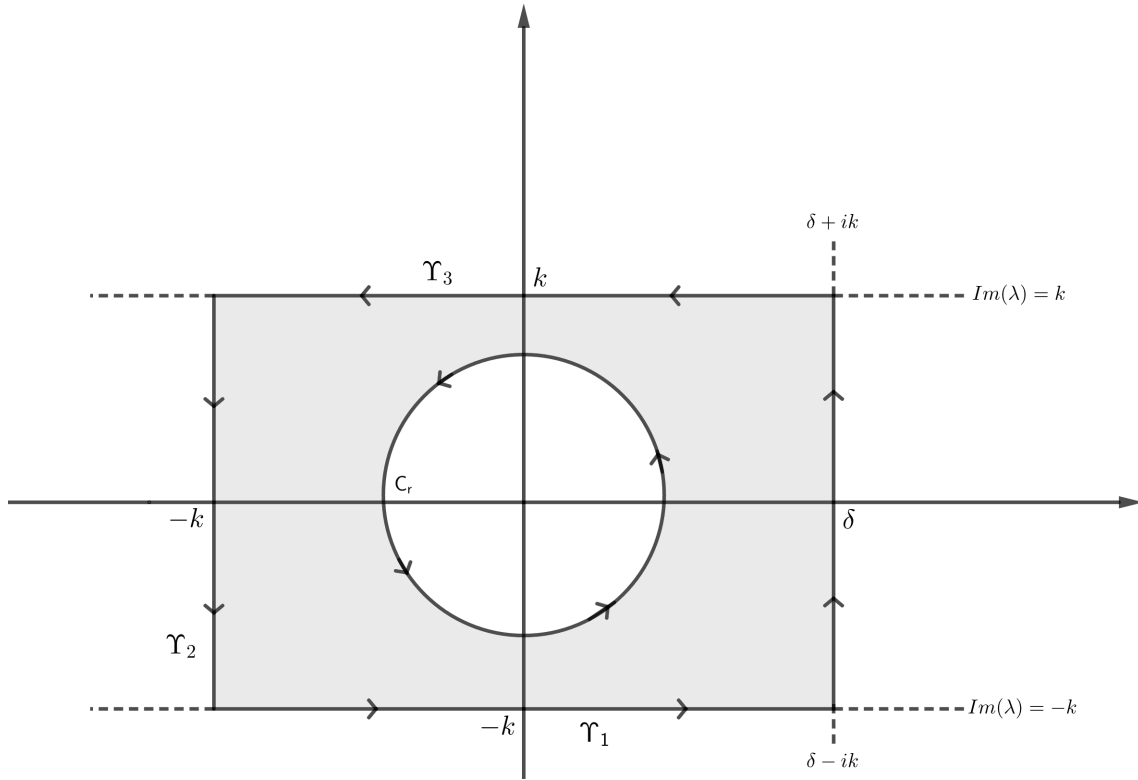


Figura 2.3: $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ e C_r .

Segue do Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2), que

$$\int_{\Upsilon_i} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda$$

ou seja,

$$\int_{\delta - ik}^{\delta + ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda - \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda, \quad i = 1, 2, 3.$$

Logo, para $i = 1, 2, 3$,

$$\left\| \int_{\delta-ik}^{\delta-ik} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \leq \left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| + \left\| \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \quad (2.7.27)$$

Além disso, utilizando ideias semelhantes como na prova do Lema 2.7.1, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| &\leq \int_{-k}^k e^{-ks} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\ &\leq C e^{-ks} \int_{-k}^k \frac{ds}{k} \\ &= 2C e^{-ks}. \end{aligned}$$

isto é,

$$\left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \leq 2C = C_1. \quad (2.7.28)$$

Agora, sobre Υ_3 , temos que

$$\left\| \int_{\Upsilon_3} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \leq \int_{-k}^{\delta} e^{ms} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm$$

Fixando $P > 0$ e $-k < -P$ segue que

$$C \int_{-k}^{-P} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm + C \int_{-P}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm$$

Escolhendo $P > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{ms} < \frac{\epsilon}{C}, \quad \forall m \in [-k, P]$$

obtemos

$$\begin{aligned} C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm &\leq C \frac{\epsilon}{C} \int_{-k}^{-P} \frac{dm}{\sqrt{k^2 + m^2}} + C \int_{-P}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\ &\leq \epsilon \int_{-k}^{-P} \frac{dm}{k} + C \int_{-P}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\ &\leq \epsilon + C \int_{-P}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm &\leq \epsilon + C \int_{-P}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\ &\leq \underbrace{\epsilon + C \left[\frac{e^{m\delta}}{k} (\delta + P) \right]}_{C_2}, \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \int_{\Gamma_3} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \leq C_2. \quad (2.7.29)$$

Analogamente, obtemos

$$\left\| \int_{\Gamma_1} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| \leq C_2. \quad (2.7.30)$$

Agora, vamos analisar sobre o círculo C_r . Para isso, note que A_μ é um operador linear limitado, então, pela prova do Lema 2.7.1 e da Equação 2.7.6, segue

$$\left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) d\lambda \right\| = \|2\pi i e^{tA_\mu}\| \leq 2\pi e^{|t| \|A_\mu\|} = C_3 \quad (2.7.31)$$

Daí, utilizando (2.7.27), (2.7.28), (2.7.29), (2.7.30), seque que

$$\|\rho_k(s)\| = \frac{1}{2\pi i} \left\| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda s} R(\lambda : A_\mu) x d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} (C_1 + C_2 + C_2 + C_3) = C_4. \quad (2.7.32)$$

Com relação a $\|e^{sA_\mu}\|$ temos

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\mu}\| &= \|e^{s(\mu^2 R(\mu:AI) - \mu I)}\| \\ &= e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:AI)}\| \\ &= e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \|R(\mu : A)^n\|}{n!} \end{aligned}$$

pelo Teorema 2.5.2, obtemos para $\mu > \omega$,

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\mu}\| &\leq e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \|R(\mu : A)^n\|}{n!} \\ &\leq e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \frac{M}{(\mu-\omega)^n}}{n!} \\ &= M e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n}{(\mu-\omega)^n n!} \\ &= M e^{-st} e^{\frac{\mu^2 s}{(\mu-\omega)}} \\ &= M e^{(\frac{\omega\mu}{\mu-\omega})s} \\ &\leq M e^{2\omega s} = C_5. \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

Logo, substituindo (2.7.32) e (2.7.33) em (2.7.26), obtemos

$$|h_k(s)| \leq C_4 + C_5 = g(s),$$

e

$$\int_0^t g(s)ds < \infty$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.5), garantimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t h_k(s)ds = \int_0^t \left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(s) \right) ds = 0$$

o que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \rho_k(s)ds = \int_0^t e^{sA_\mu} ds.$$

como tínhamos afirmado em (2.7.25).

Daí, fazendo $k \rightarrow \infty$ em (2.7.21) e usando (2.7.22) e (2.7.25), obtemos

$$\int_0^t e^{sA_\mu} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (2.7.34)$$

Se $\gamma > \max(\omega, 0)$, então pelo Lema 2.7.2 existe $\mu_0 > 0$ tal que $\mu > \mu_0$, $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma\} \in \rho(A_\mu)$ e para $x \in D(A)$

$$\|R(\lambda : A_\mu)\| \leq \frac{C}{|\lambda|} (\|x\| + \|Ax\|).$$

onde C depende somente de M e γ . Para $\mu \geq \mu_0$, podemos trocar a curva de integração do lado direito de (2.7.34) de $\operatorname{Re} \lambda = \delta$ para $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$ para obter

$$\int_0^t e^{sA_\mu} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (2.7.35)$$

Para justificar essa troca de curva de integração, considere a região Θ delimitada pela curva

$$\Upsilon_k = \bigcup_{l=1}^4 \Upsilon_k^l$$

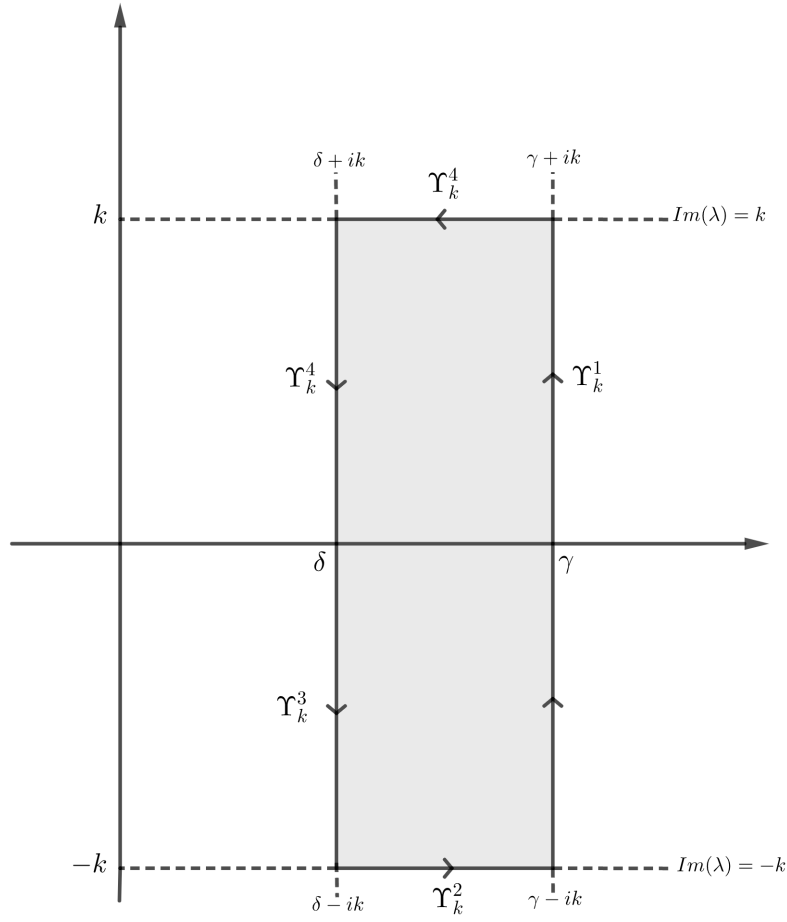


Figura 2.4: Curva Λ_k

onde

$$\begin{aligned}\Upsilon_k^1 &= \{\lambda; \lambda = \gamma + i\eta, -k \leq \eta \leq k\}, \\ \Upsilon_k^2 &= \{\lambda; \lambda = \eta - ik, \delta \leq \eta \leq \gamma\}, \\ \Upsilon_k^3 &= \{\lambda; \lambda = \delta + i\eta, -k \leq \eta \leq k\}, \\ \Upsilon_k^4 &= \{\lambda; \lambda = \eta + ik, \delta \leq \eta \leq \gamma\}.\end{aligned}$$

como pode ser visto na Figura 2.4.

Sendo, $\phi_\mu(\lambda) = \lambda^{-1}e^{\lambda t}R(\lambda : A_\mu)x$ é analítica em Θ , pelo Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2), temos que

$$\int_{\Upsilon_k^1} \phi_\mu(\lambda) d\lambda + \int_{\Upsilon_k^2} \phi_\mu(\lambda) d\lambda + \int_{\Upsilon_k^3} \phi_\mu(\lambda) d\lambda + \int_{\Upsilon_k^4} \phi_\mu(\lambda) d\lambda = 0 \quad (2.7.36)$$

e

$$\int_{\delta}^{\gamma} e^{\eta t} \frac{d\eta}{\eta^2 + k^2} \leq \frac{e^{\eta t}}{k^2} (\delta - \gamma) \rightarrow 0, \quad (k \approx \infty);$$

onde mostra-se (utilizando técnicas anteriores) que

$$\int_{\Upsilon_k^j} \phi_{\mu}(\lambda) d\lambda \rightarrow 0, \quad (k \approx \infty), \text{ para } j = 2, 4. \quad (2.7.37)$$

Usando (2.7.36) e (2.7.37), segue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_{\mu}) x \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_{\mu}) x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

e, portanto, (2.7.35) é verificada. Agora, mostraremos que vale a seguinte igualdade

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_{\mu}} x ds = \int_0^t T(t) x ds. \quad (2.7.38)$$

Para isso, defina $g_{\mu}(s) := \|e^{sA_{\mu}} x - T(s)x\|$. Note que

- (i) $\{g_{\mu}\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, pois $g_{\mu}(\cdot)$ é uma sequência de funções contínuas;
- (ii) $e^{sA_{\mu}} x \rightarrow T(s)x$, quando $\mu \rightarrow \infty$ (pelo Corolário 2.3.1) ;
- (iii) $|g_{\mu}| \leq k$.

Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.5), temos (2.7.38). Agora, mostraremos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_{\mu}) x \frac{d\lambda}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

quando $\mu \rightarrow \infty$. Defina

$$f_{\mu}(\lambda) = \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \|(R(\lambda : A_{\mu}) - R(\lambda : A))x\|, \quad (2.7.39)$$

onde temos

- (i) $\{f_{\mu}\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, pois $f_{\mu}(\cdot)$ é contínua;
- (ii) $f_{\mu}(\lambda) \rightarrow 0$, quando $\mu \rightarrow \infty$ (pelo Lema 2.7.3);

(iii) f_μ é dominada por uma função integrável. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f_\mu| &\leq \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} [\|(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A))x\|] \\ &\leq 2C(\|x\| + \|Ax\|) \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2} \equiv g(\lambda), \quad (\mu \approx \infty); \end{aligned}$$

e, considerando $C_7 = 2C(\|x\| + \|Ax\|)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g(\lambda) d\lambda &= \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7 \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2} \\ &= C_7 e^{\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\gamma^2 + \eta^2} \\ &= C_7 e^{\gamma t} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \frac{d\eta}{\gamma^2 + \eta^2} \\ &= C_7 e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \frac{d\eta}{1 + (\frac{\eta}{\gamma})^2} \\ &= C_7 e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\frac{k}{\gamma}}^{\frac{k}{\gamma}} \frac{dz}{1 + z^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g(\lambda) d\lambda &= C_7 e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma} \lim_{k \rightarrow \infty} [\arctan(k \setminus \gamma) - \arctan(-k \setminus \gamma)] \\ &= C_7 e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma} [(\pi \setminus 2) - (-\pi \setminus 2)] \\ &= C_7 e^{\gamma t} \frac{1}{\gamma} \pi < \infty, \end{aligned}$$

para todo t em intervalos limitados. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.5),

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \|(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A))x\| d\lambda = 0,$$

o que implica

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} [(R(\lambda : A_\mu) - R(\lambda : A))x] d\lambda = 0,$$

daí,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

quando $\mu \rightarrow \infty$. Usando (2.7.38) e (2.7.35), segue que

$$\int_0^t T(t)x ds = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\mu} x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

como queríamos provar. $\square$

Corolário 2.7.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Seja $\gamma > \max(0, \omega)$. Se $x \in D(A^2)$, então*

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (2.7.40)$$

e para todo $\delta > 0$, a integral converge uniformemente para $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$.

Prova: Sabemos que se $x \in D(A^2)$, então $Ax \in D(A)$, por definição. Utilizando o Teorema 2.7.1 para Ax , segue do item (d) do Teorema 2.2.2 a seguinte igualdade

$$T(t)x - x = \int_0^t T(t)Ax ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)Ax \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Pela identidade do resolvente $R(\lambda : A)Ax = \lambda R(\lambda : A)x - x$, obtemos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)Ax \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda R(\lambda : A)x - x) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \left(R(\lambda : A)x - \frac{x}{\lambda} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

isto é

$$T(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda. \quad (2.7.41)$$

Mostraremos agora que para $t > 0$ a igualdade a seguir é verdadeira

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda = x.$$

Com efeito, considerando C_r e Λ_k como no Lema 2.7.1, mostramos que

$$\int_{\Lambda_k} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda = 2\pi i e^{0t} = 2\pi i; \quad (2.7.42)$$

onde a penúltima igualdade é válida pela fórmula da integral de Cauchy (veja 1.3.2) para a função $f = e^{\lambda t}$. Dessa forma, aplicando o limite em (2.7.42), obtemos

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$

Daí,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda = x. \quad (2.7.43)$$

como afirmamos. E (2.7.42) converge uniformemente em t para $t \in [\delta, 1 \setminus \delta]$. Portanto, substituindo o que acabamos de mostrar em (2.7.43), obtemos

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

□

Corolário 2.7.2. *Se A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$. Seja $\gamma > \max(0, \omega)$. Para cada $x \in X$, temos*

$$\int_0^t (t-s)T(s)x ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \quad (2.7.44)$$

e a convergência é uniforme em t para intervalos limitados.

Prova: Integrando (2.7.19) de 0 a t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)T(s)x ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda s} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^t \left(e^{\lambda s} ds \right) R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left(e^{\lambda t} - 1 \right) R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(\lambda : A) x \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 0,$$

Já provamos isso no Lema 2.7.1. Portanto, (2.7.44) vale para todo $x \in D(A)$. O lado direito de (2.7.44) converge na topologia uniforme para um operador e portanto define um operador linear. Desde que $D(A)$ é denso em X , (2.7.44) vale para todo $x \in X$.

Concluimos esta seção com uma importante condição de suficiência, mas não necessária, para um operador A ser o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Em contraste com os Teoremas (2.5.1) e (2.5.2), a condição do Teorema 2.7.2, que apresentaremos a seguir, muitas vezes são mais fáceis de verificar para exemplos. Mas para apresentarmos este Teorema, precisamos de alguns resultados.

Seja A um operador densamente definido de um espaço de Banach X satisfazendo as seguintes condições onde $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{\delta} := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup 0 \subset \rho(A) \quad (2.7.45)$$

e para cada $0 < \alpha < \delta$ existem $0 < \delta' < \delta$ e $M_{\delta'} \geq 1$ tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M_{\delta'}}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \sum_{\delta'}, \quad \lambda \neq 0. \quad (2.7.46)$$

As condições (2.7.45) e (2.7.46) são condições para que um operador A ser o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Iremos justificar esta afirmação, mas antes precisamos de alguns resultados auxiliares que passamos a considerar.

Para cada $r > 0$, definimos a família de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dada por

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{t\mu} R(\mu : t) d\mu, & \text{se } t > 0 \\ I, & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (2.7.47)$$

onde $\gamma(r, \delta') = \gamma_1(r, \delta') \cup \gamma_2(r, \delta') \cup \gamma_3(r, \delta')$ é a curva C_1 por partes definida por

$$\begin{cases} \gamma_1(r, \delta') &= \{\rho e^{i[(\pi \setminus 2) + \delta']}; \rho \in [r, \infty]\}, \\ \gamma_2(r, \delta') &= \{r e^{i\beta}; (-\pi \setminus 2) - \delta' \leq \beta \leq (\pi \setminus 2) + \delta'\} \\ \gamma_3(r, \delta') &= \{\rho e^{-i[(\pi \setminus 2) + \delta']}; \rho \in [r, \infty]\}, \end{cases} \quad (2.7.48)$$

é orientada no sentido anti-horário, como na figura 2.5.

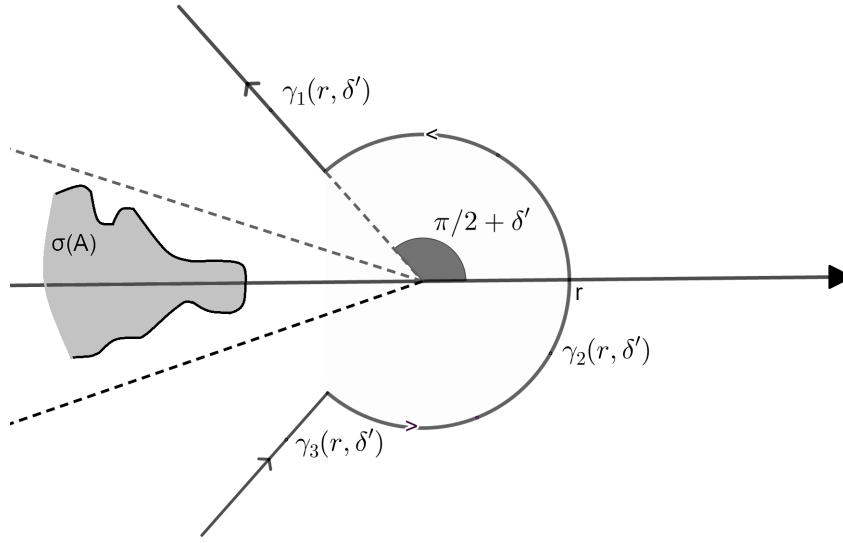


Figura 2.5: Curva $\gamma(r, \delta')$

Lema 2.7.4. *Se A verifica (2.7.45) e (2.7.46), então o operador $S(t)$ está bem definido e é independente de $r > 0$ e de $0 < \delta' < \delta$.*

Prova: Seja $t > 0$. Estudemos, inicialmente, a convergência da integral em (2.7.47) sobre a curva $\gamma(r', m')$ onde $r' = \frac{1}{t}$, $m' = \delta - \alpha$, $0 < \alpha < \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Se $\mu \in \gamma_1(r', m')$ então $\mu = \rho e^{i(\theta - \alpha)}$, com $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta$ e $\rho \in [r', \infty)$. Consideremos $\eta_\alpha = \arg \mu$ ($\eta_\alpha = \theta - \alpha$). Definindo $f(\mu) = e^{t\mu} R(\mu : A)$ e fazendo

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\eta_\alpha) = \phi(\rho) \Rightarrow \phi'(\rho) = \cos(\eta_\alpha) \\ y &= \rho \sin(\eta_\alpha) = \xi(\rho) \Rightarrow \xi'(\rho) = \sin(\eta_\alpha). \end{aligned}$$

Temos, por (2.7.46),

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_1(r', m')} e^{t\mu} R(\mu : A) x d\mu \right\| &\leq \int_{r'}^{\infty} \|f(\phi(\rho) + i\xi(\rho))[\phi'(\rho) + i\xi'(\rho)]\| \|x\| d\rho \\ &= \int_{r'}^{\infty} \|e^{t\rho e^{i\eta_\alpha}} R(\rho e^{i\eta_\alpha} : A) e^{i\eta_\alpha}\| \|x\| d\rho \\ &\leq \int_{r'}^{\infty} |e^{t\rho e^{i\eta_\alpha}}| \frac{M_{m'}}{|\rho e^{i\eta_\alpha}|} |e^{i\eta_\alpha}| \|x\| d\rho \\ &\leq \int_{r'}^{\infty} e^{t\rho \cos(\eta_\alpha)} \frac{M_{m'}}{\rho} \|x\| d\rho. \end{aligned} \tag{2.7.49}$$

Sendo, $\pi/2 < \eta_\alpha < 3\pi/2$, existe uma constante positiva C tal que $\cos(\eta_\alpha) \leq -C$. Logo,

$$\int_{r'}^{\infty} \frac{e^{-t\rho C}}{\rho} d\rho \leq \frac{1}{r'} \int_{r'}^{\infty} e^{-t\rho C} d\rho = \frac{1}{r' C t} e^{-tr' C}. \tag{2.7.50}$$

Segue de (2.7.49) e de (2.7.50),

$$\left\| \int_{\gamma_1(r', m')} e^{t\mu} R(\mu : A) x d\mu \right\| \leq M_{m'} \|x\| \int_{r'}^{\infty} \frac{e^{-t\rho C}}{\rho} d\rho \leq C_1, \quad (2.7.51)$$

onde $C_1 = M_{m'} \|x\| \frac{1}{r' C t} e^{-tr' C}$, para $t > 0$.

Analogamente, para $\mu \in \gamma_3(r', m')$ se $x \neq 0$, obtemos

$$\left\| \int_{\gamma_3(r', m')} e^{t\mu} R(\mu : A) x d\mu \right\| \leq C_2, \text{ para } t > 0. \quad (2.7.52)$$

Para o caso em que $\mu \in \gamma_2(r', m')$, observamos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_2(r', m')} e^{t\mu} R(\mu : A) x d\mu \right\| &\leq M_{m'} \int_0^{2\pi} |e^{tr' e^{i\beta}}| \frac{1}{|r' e^{i\beta}|} |ir' e^{i\beta}| \|x\| d\beta \\ &\leq M_{m'} \int_0^{2\pi} |e^{tr' \cos(\beta)}| \|x\| d\beta \\ &\leq M_{m'} 2\pi e^{tr'}. \end{aligned} \quad (2.7.53)$$

Assim, de (2.7.51), (2.7.52) e (2.7.53) a integral definida em (2.7.47) converge em $\mathcal{L}(X)$, para cada $t > 0$.

No que segue mostraremos a independência da curva. Sejam $r, r', \delta', m' > 0$ e considere D_ρ a região delimitada pelas curvas $\Gamma, R_\rho, \Lambda, S_\rho$, dadas por

$$\Gamma = \Gamma(\rho, r, \delta') = \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_j(\rho, r, \delta'),$$

onde,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\rho, r, \delta') &= \{s e^{i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\}, \\ \Gamma_2(\rho, r, \delta') &= \{r e^{i\nu; -\pi/2 - \delta'}; -\pi/2 - \delta' \leq \nu \leq \pi/2 + \delta'\} \\ \Gamma_3(\rho, r, \delta') &= \{s e^{-i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\}. \end{aligned}$$

$$\Lambda = \Lambda(\rho, r', m') = \bigcup_{j=1}^3 \Lambda_j(\rho, r', \delta'),$$

em que,

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\rho, r', m') &= \{s e^{i(\pi/2 + m')}; s \in [r', \rho]\}, \\ \Lambda_2(\rho, r', m') &= \{r' e^{i\nu; -\pi/2 - m'}; -\pi/2 - m' \leq \nu \leq \pi/2 + m'\} \\ \Lambda_3(\rho, r', m') &= \{s e^{-i(\pi/2 + m')}; s \in [r', \rho]\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_\rho &= \{\rho e^{i\eta_\beta}; \eta_\beta \in (\pi/2 + m', \pi/2 + \delta')\}, \\
S_\rho &= \{\rho e^{i\eta_\omega}; \eta_\omega \in (-\pi/2 + \delta', -\pi/2 + m')\}.
\end{aligned}$$

A fronteira D_ρ é orientada no sentido anti-horário, como na figura 2.6.

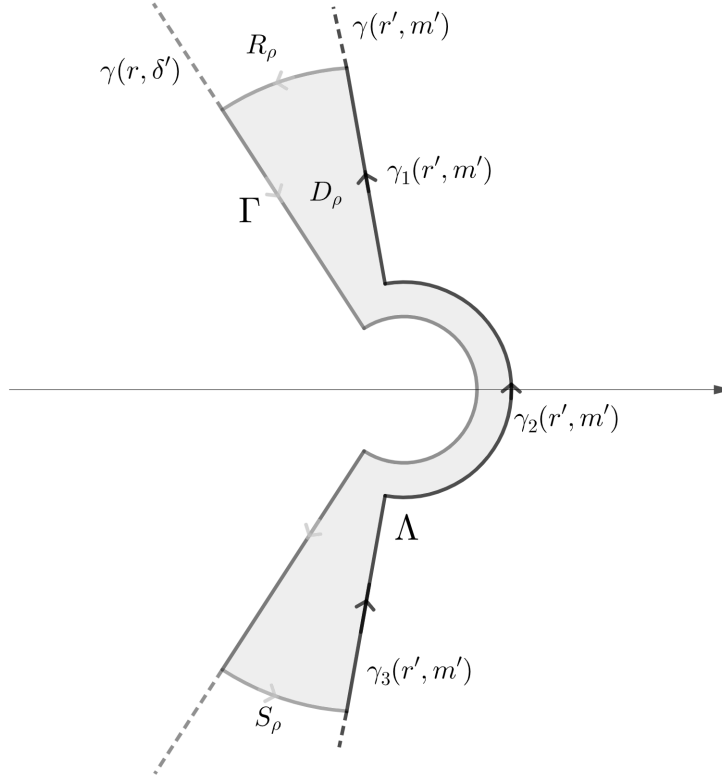


Figura 2.6: Curva $\gamma(r, \delta')$

Da analiticidade da função $\lambda \mapsto e^{t\lambda}R(\lambda : A)$ em $\sum_{\delta'}$ (veja Proposição 2.3.2) e do Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2) resulta que

$$\int_{\partial D_\rho} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{\Lambda} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{R_\rho} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \int_{S_\rho} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = 0 \quad (2.7.54)$$

Além disso, as integrais sobre os dois arcos R_ρ, S_ρ tendem a zero quando $\rho \rightarrow \infty$; pois, se $\lambda \in R_\rho$ temos $\lambda = \rho e^{i\eta_\beta}$ com $-K_0 \leq \cos \eta_\beta \leq -K$, onde K_0 e K são constantes positivas. Neste caso,

$$\left\| \int_{R_\rho} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \right\| \leq M_{\delta'} \int_{\pi/2+m'}^{\pi/2+\delta'} e^{-\rho t K} d\eta_\beta = K_1 e^{-\rho t K} d\eta_\beta \rightarrow 0, \text{ quando } \rho \rightarrow \infty.$$

com $K_1 = M_{\delta'}(\delta' - m')$. Se $\lambda \in S_\rho$, o cálculo é análogo. Portanto, passando o limite em (2.7.54) quando $\rho \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\int_{\gamma(r', m')} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda$$

o que conclui a prova do Lema. $\square$

Lema 2.7.5. *Suponha que A verifica (2.7.45) e (2.7.46). Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é a família de operadores definida em (2.7.47), então as seguintes propriedades são verificadas*

- (i) *O operador $S(t)$ é linear e limitado em X . Além disso, existe uma constante $C > 0$ independente de t , tal que $\|S(t)\| \leq C$;*
- (ii) *$S(0) = I$;*
- (iii) *$S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$;*
- (iv) *Para cada $x \in X$, $S(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$.*

Prova: Mostraremos cada item de forma separada.

(i) A linearidade segue da linearidade de $R(\mu : A)$ e da linearidade da integral. A continuidade segue diretamente de (2.7.51), (2.7.52) e (2.7.53) e do fato que para $t > 0$,

$$\|S(t)x\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \left\| \int_{\gamma_i(r', m')} e^{t\mu} R(\mu : A) d\mu \right\| \leq \widehat{C}(t) \|x\|.$$

Agora, mostraremos a limitação uniforme. Se $t > 0$, de (2.7.47),

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{t\mu} R(\mu : A) d\mu, \quad (2.7.55)$$

fazendo a mudança de variáveis $\xi = \mu t$, em (2.7.55) e usando o Lema 2.7.5, temos

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t}. \quad (2.7.56)$$

Seja $\xi \in \gamma_1(r, \delta')$ e considere $\eta = \arg \xi$. Definindo $f(\xi) = e^\xi R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{1}{t}$ e fazendo

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\eta) = \phi(\rho) \Rightarrow \phi'(\rho) = \cos(\eta), \\ y &= \rho \sin(\eta) = \psi(\rho) \Rightarrow \psi'(\rho) = \sin(\eta), \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_1(r, \delta')} e^\xi R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t} \right\| &\leq \int_r^\infty \|f(\phi(\rho) - i\psi(\rho))[\phi'(\rho) + i\psi'(\rho)]\| d\rho \\ &\leq \int_r^\infty \left\| e^{\rho e^{i\eta}} R\left(\frac{\rho e^{i\eta}}{t} : A\right) \frac{e^{i\eta}}{t} \right\| d\rho \\ &\leq \int_r^\infty |e^{\rho e^{i\eta}}| \frac{M\delta' |e^{i\eta}|}{|\rho e^{i\eta}| t} d\rho \\ &\leq M\delta' \int_r^\infty e^{\rho \cos(\eta)} \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

Sendo, $\pi/2 < \eta_\alpha < 3\pi/2$, existe uma constante positiva C tal que $\cos(\eta) \leq -C$. Logo,

$$M\delta' \int_r^\infty e^{\rho \cos(\eta)} \frac{d\rho}{\rho} \leq \frac{M\delta'}{r} \int_r^\infty e^{-\rho C} d\rho = \frac{M\delta'}{rC} e^{-rC}.$$

Assim,

$$\left\| \int_{\gamma_1(r, \delta')} e^\xi R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq M\delta' \int_r^\infty e^{\rho \cos(\eta)} \frac{d\rho}{\rho} \leq \frac{M\delta'}{rC} e^{-rC} := C_2 \quad (2.7.57)$$

Note que C_2 não depende de t .

Analogamente, se $\xi \in \gamma_3(r, \delta')$, obtemos,

$$\left\| \int_{\gamma_3(r, \delta')} e^\xi R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq C_2. \quad (2.7.58)$$

Agora, se $\xi \in \gamma_2(r, \delta')$, então $\xi = re^{iv}$ e usando a parametrização

$$\begin{aligned} x &= r \cos(v) = \phi(v) \Rightarrow \phi'(v) = -r \sin(v), \\ y &= r \sin(v) = \psi(v) \Rightarrow \psi'(v) = r \cos(v) \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_2(r, \delta')} e^\xi R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t} \right\| dv &\leq \int_{-\delta' - \frac{\pi}{2}}^{\delta' + \frac{\pi}{2}} \left\| e^{re^{iv}} R\left(\frac{re^{iv}}{t} : A\right) i r e^{iv} \frac{1}{t} \right\| dv \\ &\leq \int_{-\delta' - \frac{\pi}{2}}^{\delta' + \frac{\pi}{2}} |e^{re^{iv}}| \frac{M\delta' |i r e^{iv}|}{|r e^{iv}| t} dv \\ &\leq M\delta' \int_{-\delta' - \frac{\pi}{2}}^{\delta' + \frac{\pi}{2}} e^{r \cos(v)} dv \leq C_3, \end{aligned} \quad (2.7.59)$$

onde C_3 independe de t . Assim, de (2.7.57), (2.7.58) e de (2.7.59),

$$\|S(t)\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \left\| \int_{\gamma_i} e^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t} : A\right) \frac{d\xi}{t} \right\| \leq C_4, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(ii) É imediata da definição.

(iii) Sejam t_1 e $t_2 > 0$, $\gamma(r, \delta')$, $\gamma(r+c, \delta')$, $c > 0$, curvas de classe C^1 por partes definidas como (2.7.48). Para $u \in \gamma(r, \delta')$, $\lambda \in \gamma(r+c, \delta')$ definamos $f(\mu) = \frac{e^{\mu t_1}}{\lambda - \mu}$ e $g(\lambda) = e^{\lambda t_2}$. Consideremos as regiões Ξ e Θ , delimitadas, respectivamente, por $\Gamma \cup \Lambda_r$ e $\Upsilon \cup \Lambda_{r+c}$, com

$$\Gamma = \Gamma(r, \delta') = \bigcup_{l=1}^3 \Gamma_l(r, \delta'),$$

$$\begin{cases} \Gamma_1(r, \delta') &= \{se^{i[(\pi \setminus 2) + \delta']} : s \in [r, \rho]\}, \\ \Gamma_2(r, \delta') &= \{re^{i\beta} : (-\pi \setminus 2) - \delta' \leq \beta \leq (\pi \setminus 2) + \delta'\} \\ \Gamma_3(r, \delta') &= \{se^{-i[(\pi \setminus 2) + \delta']} : s \in [r, \rho]\}, \end{cases}$$

$$\Lambda_r = \left\{ re^{i\eta} : \eta \in \left(\frac{\pi}{2} + \delta', \frac{3\pi}{2} - \delta' \right) \right\},$$

$$\Upsilon = \Upsilon(r+c, \delta') = \bigcup_{l=1}^3 \Gamma_l(r+c, \delta')$$

$$\begin{cases} \Upsilon_1(r+c, \delta') &= \{se^{i[(\pi \setminus 2) + \delta']} : s \in [r+c, \rho]\}, \\ \Upsilon_2(r+c, \delta') &= \{re^{i\beta} : (-\pi \setminus 2) - \delta' \leq \beta \leq (\pi \setminus 2) + \delta'\} \\ \Upsilon_3(r+c, \delta') &= \{se^{-i[(\pi \setminus 2) + \delta']} : s \in [r+c, \rho]\}, \end{cases}$$

$$\Lambda_{r+c} = \left\{ (r+c)e^{i\theta} : \theta \in \left(\frac{\pi}{2} + \delta', \frac{3\pi}{2} - \delta' \right) \right\},$$

como nas Figuras 2.7 e 2.8.

Claramente, a função $f(\cdot)$ é analítica em Ξ e $g(\cdot)$ é analítica em Θ . Assim, pelo Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2),

$$\int_{\partial\Xi} f(\mu) d\mu = 0,$$

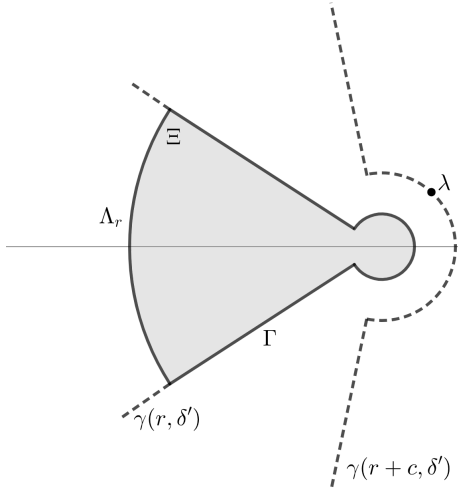


Figura 2.7: A região Ξ .

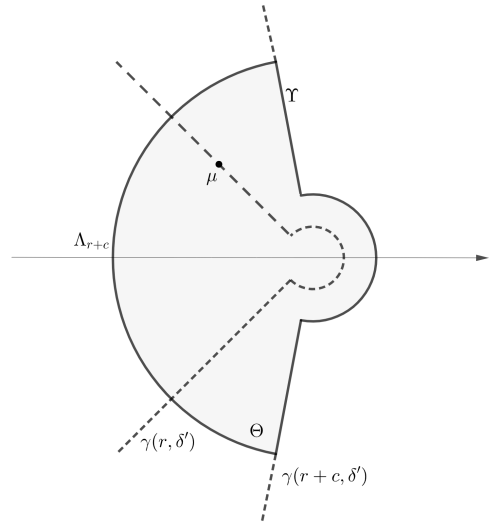


Figura 2.8: A região Θ .

ou seja

$$\int_{\Gamma} f(\mu) d\mu + \int_{\Lambda_r} f(\mu) d\mu = 0. \quad (2.7.60)$$

Sendo $|\mu - \lambda| \leq |\mu| - |\lambda| = r - |\lambda| > 0$ para $r \rightarrow \infty$; donde,

$$\frac{r}{r - |\lambda|} = \frac{1}{1 - \frac{|\lambda|}{r}} \rightarrow 1; (r \approx \infty). \quad (2.7.61)$$

Logo, existe $M > 0$ tal que $\frac{r}{r - |\lambda|} \leq M$, para r suficientemente grande e, portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_r} f(\mu) d\mu \right\| &\leq \int_{\frac{\pi}{2} + \delta'}^{\frac{3\pi}{2} - \delta'} \frac{|e^{t_1 r e^{i\eta}}|}{r - |\lambda|} r d\eta \\ &\leq M \int_{\frac{\pi}{2} + \delta'}^{\frac{3\pi}{2} - \delta'} e^{t_1 r \cos(\eta)} r - |\lambda| d\eta \\ &\leq M e^{-r t_1 k} 2(\pi/2 - \delta_r) \rightarrow 0; (r \approx \infty). \end{aligned}$$

onde $k = -k_0$; $k_0 = \max(\cos(\eta))$; $\eta \in [\frac{\pi}{2} + \delta', \frac{3\pi}{2} - \delta']$.

Logo,

$$\int_{\Lambda_r} f(\mu) d\mu \rightarrow 0; (r \approx \infty). \quad (2.7.62)$$

De (2.7.47), (2.7.60), (2.7.62) deduzimos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{\mu t_1}}{\lambda - \mu} d\mu = 0, \quad \lambda \in \gamma(r + c, \delta'). \quad (2.7.63)$$

Também, pela Fórmula da Integral de Cauchy (ver igualdade 1.3.2), obtemos

$$\int_{\Upsilon} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda + \int_{\Lambda_{r+c}} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi e^{\mu t_2}. \quad (2.7.64)$$

Usando o mesmo raciocínio para provar (2.7.62), temos

$$\int_{\Lambda_{r+c}} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi e^{\mu t_2} = 0; \quad (r \approx \infty).$$

Assim,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r+c, \delta')} \frac{e^{\lambda t_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = e^{\mu t_2}, \quad \text{para todo } \mu \in \gamma(r, \delta'). \quad (2.7.65)$$

Por outro lado,

$$S(t_1)S(t_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu t_1} R(\mu : A) + \int_{\gamma(r+c, \delta')} e^{\lambda t_2} R(\mu : A) d\lambda d\mu.$$

Usando a seguinte Identidade do Resolvente (ver Proposição 2.3.1)

$$R(\mu : A)R(\lambda : A) = \frac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu},$$

segue que

$$\begin{aligned} S(t_1)S(t_2) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\gamma(r, \delta')} \int_{\gamma(r+c, \delta')} e^{\mu t_1} e^{\mu t_2} \frac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu t_1} R(\mu : A) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r+c, \delta')} \frac{e^{\lambda t_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r+c, \delta')} e^{\lambda t_2} R(\mu : A) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{\lambda t_1}}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Assim, de (2.7.63) e (2.7.65) e da última identidade deduzimos que

$$S(t_1)S(t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu(t_1+t_2)} R(\mu : A) d\mu = S(t_1 + t_2),$$

o que prova o item (iii).

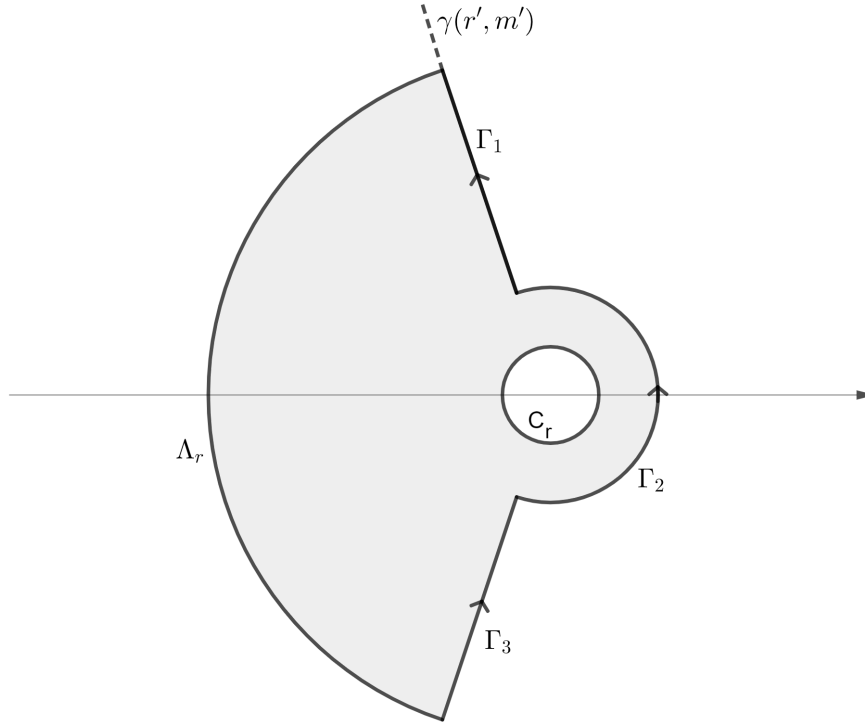


Figura 2.9: Curva Γ e o círculo C_r

(iv) Seja $x \in D(A)$. Da representação de $S(t)$ com

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{t\mu} R(\mu : A)x - x.$$

Considerando, $\Omega = \Gamma \cup \Lambda_r$ e C_r o círculo de raio r centrado na origem (Ver Figura 2.9).

Pelo Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2),

$$\int_{\Omega} \frac{e^{\mu t}}{\mu} d\mu = \int_{C_r} \frac{e^{\mu t}}{\mu - 0} d\mu = 2\pi i e^{0t},$$

onde a última igualdade é válida pela fórmula da Integral de Cauchy (ver igualdade 1.3.2). Assim,

$$\int_{\Omega} \frac{e^{\mu t}}{\mu} d\mu = 2\pi i;$$

e, portanto, seguindo raciocínio análogo ao item anterior, concluímos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{\mu t}}{\mu} d\mu = 1. \quad (2.7.66)$$

Usando a identidade do resolvente, $R(\mu : A)Ax = \mu R(\mu : A)x - x$, obtemos

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu t} \left(R(\mu : A) - \frac{1}{\mu} \right) x d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{\mu t}}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu. \end{aligned} \quad (2.7.67)$$

Vamos mostrar que para cada $x \in X$, temos que $S(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Seja $x \in D(A)$. Então, de (2.7.67) temos

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{\mu t}}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu.$$

Vamos estimar a igualdade acima. Desejamos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para $\{f_t(\mu)\}_{t \geq 0}$, onde $f_t = \frac{e^{\mu t}}{\mu} R(\mu : A) Ax$. Para isso, verifiquemos as hipóteses do Teorema mencionado.

Note que

$$\begin{aligned} \|f_t(\mu)\| &= \left\| \frac{e^{t\mu}}{\mu} R(\mu : A) Ax \right\| \\ &\leq \frac{|e^{t\mu}|}{|\mu|} \|R(\mu : A)\| \|Ax\| \\ &\leq \frac{e^{t \operatorname{Re}(\mu)}}{|\mu|^2} M_{\delta'} \|Ax\| \end{aligned} \quad (2.7.68)$$

Afirmção : Existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $e^{t \operatorname{Re}(\mu)} \leq e^t + 1$, para todo $t \in (0, \bar{\delta})$. De fato, considere $\operatorname{Re}(\mu) = a \in \mathbb{R}$ ($t \geq 0$) e consideremos dois casos:

- (i) Se $a \leq 1$, então $ta \leq t$ e assim, $e^{ta} \leq e^t \leq e^t + 1$, como queríamos.
- (ii) Se $a > 1$, defina $f(t) = (1 + e^t) - e^{at}$. Sabemos, de análise na reta, que se $f(x_0) > 0$ e f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Logo, para a f definida, tomando $x_0 = 0$, temos que existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $f(t) > 0$, para todo $t \in (0, \bar{\delta})$. Isto é, para todo $t \in (0, \bar{\delta})$, temos que $e^{ta} \leq e^t + 1$.

então,

$$\frac{e^{t \operatorname{Re}(\mu)}}{|\mu|^2} M_{\delta'} \|Ax\| \leq \frac{e^t + 1}{|\mu|^2} M_{\delta'} \|Ax\| \leq \frac{e^{\bar{\delta}} + 1}{|\mu|^2} M_{\delta'} \|Ax\| = \frac{K}{|\mu|^2} := g(\mu), \quad (2.7.69)$$

em que a constante K é dada por $(e^{\bar{\delta}} + 1) M_{\delta'} \|Ax\|$. De (2.7.68) e (2.7.69) temos que a sequência de funções $\{f_t(\mu)\}_{t \geq 0}$ é dominada (para todo $t > 0$) pela função $g(\mu)$ definida.

Mostremos agora que $g(\mu)$ é integrável sobre $\gamma(r, \gamma')$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(r, \delta')} g(\mu) d\mu &= \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{K}{|\mu|^2} d\mu \\
&= K \left(\int_{\gamma_1(r, \delta')} \frac{1}{|\mu|^2} d\mu + \int_{\gamma_2(r, \delta')} \frac{1}{|\mu|^2} d\mu + \int_{\gamma_3(r, \delta')} \frac{1}{|\mu|^2} d\mu \right) \\
&= K \left(e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_r^\rho \frac{1}{s^2} ds + \frac{i}{r} \int_{-\frac{\pi}{2} - \delta'}^{\frac{\pi}{2} + \delta'} e^{i\beta} d\beta + e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_r^\rho \frac{1}{s^2} ds \right) \\
&= K \left(e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')} - e^{i(-\frac{\pi}{2} - \delta')} \right) + e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} \right) \right) \\
&= K \left[\left(\frac{1}{r} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \right) + \left(\frac{1}{r} e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \right) - \left(\frac{1}{r} e^{i(-\frac{\pi}{2} - \delta')} \right) + \left(\frac{1}{r} e^{i(\frac{\pi}{2} + \delta')} \right) \right].
\end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(\mu) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\mu t}}{\mu} R(\mu : A)Ax = \frac{1}{\mu} R(\mu : A)Ax.$$

Assim, satisfeitas todas as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema 1.2.5), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{e^{t\mu}}{\mu} R(\mu : A)Ax d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{t\mu}}{\mu} R(\mu : A)Ax d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A)Ax d\mu. \tag{2.7.70}
\end{aligned}$$

Resta mostrar que a integral dada em (2.7.70) tende a zero. Afim de utilizarmos o Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2), considere a curva fechada $\Gamma(\rho, r, \delta') = \Upsilon(\rho, r, \delta') \cup \Lambda(\rho, \delta')$, com $\Upsilon(\rho, r, \delta')$ e $\Lambda(\rho, \delta')$ curvas de classe C^1 por partes descritas na forma

$$\Lambda(\rho, \delta') = \left\{ \rho e^{i\beta}; -\frac{\pi}{2} - \delta' \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} + \delta' \right\},$$

$$\Upsilon(\rho, r, \delta') = \bigcup_{l=1}^3 \Upsilon_l(\rho, r, \delta'),$$

onde

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1(\rho, r, \delta') &= \{s e^{i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\}; \\
\Upsilon_2(\rho, r, \delta') &= \{r e^{i\beta}; -\pi/2 - \delta' \leq \beta \leq \pi/2 + \delta'\}; \\
\Upsilon_3(\rho, r, \delta') &= \{s e^{-i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\},
\end{aligned}$$

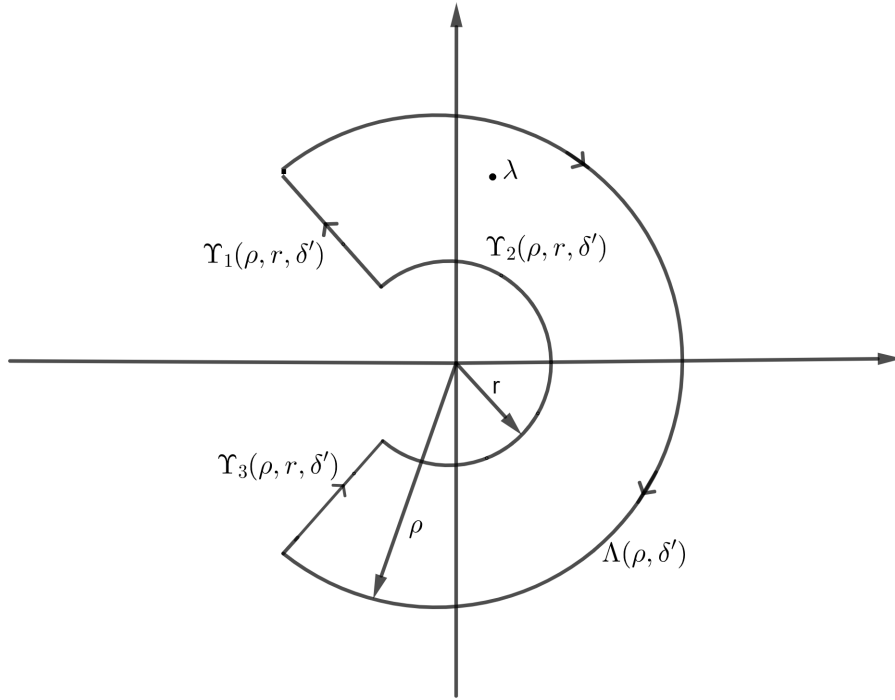


Figura 2.10: Curva $\Gamma(\rho, r, \delta')$

conforme Figura 2.10.

Segue daí que $\frac{1}{\mu}R(\mu : A)Ax$ é análitica em toda região demitida por $\Upsilon(\rho, r, \delta') \cup \Delta(\rho, \delta')$. Assim, pelo Teorema de Cauchy (ver Teorema 1.3.2),

$$\int_{\Upsilon(\rho, r, \delta') \cup \Delta(\rho, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu = 0,$$

isto é,

$$\int_{\Upsilon(\rho, r, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu + \int_{\Delta(\rho, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu = 0. \quad (2.7.71)$$

Afirmamos que

$$\int_{\Delta(\rho, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) Ax d\mu = 0. \quad (2.7.72)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda(\rho, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) A x d\mu \right\| &= \left\| \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{1}{\rho e^{-i\beta}} R(\rho e^{-i\beta} : A) A x (-i \rho e^{-i\beta}) d\beta \right\| \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{1}{\rho e^{-i\beta}} \frac{M_{\delta'}}{|\rho e^{-i\beta}|} \|A x\| | -i \rho e^{-i\beta} | d\beta \\
&\leq \frac{M_{\delta'} \|A x\|}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} d\beta \\
&= \frac{M_{\delta'} \|A x\|}{\rho} (\phi + 2\delta') \\
&= \frac{1}{\rho} C
\end{aligned}$$

em que a última expressão tende a zero quando $\rho \rightarrow \infty$, provando a afirmação.

De (2.7.70), (2.7.71) e (2.7.72)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Upsilon(\rho, r, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) A x d\mu + \int_{\Lambda(\rho, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) A x d\mu \right] \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{1}{\mu} R(\mu : A) A x d\mu \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x - x
\end{aligned}$$

Até aqui mostramos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x - x = 0$, para todo $x \in D(A)$. Para concluir a demonstração, basta verificar tal afirmação para todo $x \in X$.

Considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então, pelo que acabamos de provar,

$$S(t_n)x \rightarrow S(0)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\|S(t_n)x - x\| < \epsilon, \quad \forall x \in D(A). \quad (2.7.73)$$

Além disso, pelo item **(i)** desde Lema, vem que

$$\|S(t_n)\| \leq C. \quad (2.7.74)$$

Assim, para o mesmo $\epsilon > 0$ dado $y \in X$, como $D(A)$ é denso em X , garantimos a existência de $y_0 \in D(A)$ tal que

$$\|y - y_0\| < \epsilon. \quad (2.7.75)$$

Dessa forma, de (2.7.73), (2.7.74) e de (2.7.76) segue que

$$\begin{aligned}
\|S(t_n)y - y\| &= \|S(t_n)y - S(t_n)y_0 + S(t_n)y_0 - y_0 + y_0 - y\| \\
&\leq \|S(t_n)y - S(t_n)y_0\| + \|S(t_n)y_0 - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&\leq \|S(t_n)\| \|y - y_0\| + \|S(t_n)y_0 - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&\leq C \cdot \epsilon + \epsilon + \epsilon \\
&= (C + 2)\epsilon,
\end{aligned}$$

o que encerra a prova. $\square$

Teorema 2.7.2. *Suponha que A verifica (2.7.45) e (2.7.46) Então A é um gerador de um C_0 -semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$ para alguma constante C . Além disso,*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \quad (2.7.76)$$

onde $\gamma(r, \delta')$ definida como em (2.7.48).

Prova: Seja

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu t} R(\mu : A) d\mu. \quad (2.7.77)$$

Novamente, vamos considerar a curva fechada $\Gamma(\rho, r, \delta') = \Upsilon(\rho, r, \delta') \cup \Lambda(\rho, \delta')$, com $\Upsilon(\rho, r, \delta')$ e $\Lambda(\rho, \delta')$ curvas de classe C^1 por partes descritas na forma

$$\Lambda(\rho, \delta') = \left\{ \rho e^{i\beta}; -\frac{\pi}{2} - \delta' \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} + \delta' \right\},$$

$$\Upsilon(\rho, r, \delta') = \bigcup_{l=1}^3 \Upsilon_l(\rho, r, \delta'),$$

onde

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1(\rho, r, \delta') &= \{s e^{i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\}; \\
\Upsilon_2(\rho, r, \delta') &= \{r e^{i\beta}; -\pi/2 - \delta' \leq \beta \leq \pi/2 + \delta'\}; \\
\Upsilon_3(\rho, r, \delta') &= \{s e^{-i(\pi/2 + \delta')}; s \in [r, \rho]\},
\end{aligned}$$

como na Figura 10 (vista anteriormente).

Pela Fórmula da Integral de Cauchy (ver igualdade 1.3.2),

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)} d\mu,$$

ou seja,

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon(\rho, r, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda(\rho, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)} d\mu. \quad (2.7.78)$$

Ao longo da curva $\Lambda(\rho, \delta')$ sendo, $|\mu - \lambda| \geq |\mu| - |\lambda| = \rho - |\lambda| > 0$ para $\rho \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda(\rho, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)} d\mu \right\| &= \left\| \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{R(\rho e^{i\beta} : A)}{(\rho e^{i\beta} - \lambda)} \rho i e^{i\beta} d\beta \right\| \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{|\rho e^{i\beta} - \lambda| |\rho e^{i\beta}|} |\rho i e^{i\beta}| d\beta \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{|\rho e^{i\beta}| - |\lambda|} d\beta \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{|\rho| - |\lambda|} d\beta \\ &\leq \frac{M_{\delta'}}{(\rho - |\lambda|)} \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} d\beta \\ &\leq \frac{M_{\delta'}}{(\rho - |\lambda|)} 2\left(\frac{\pi}{2} + \delta'\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\rho \rightarrow \infty$; donde, passando o limite com $\rho \rightarrow \infty$ em (2.7.78) obtemos

$$R(\lambda : A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{(\mu - \lambda)} d\mu. \quad (2.7.79)$$

Por outro lado, da representação de $U(t)$ e do Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\mu t} R(\mu : A) d\mu \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} R(\mu : A) \left(\int_0^\infty e^{(\mu - \lambda)t} dt \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda} d\mu. \end{aligned} \quad (2.7.80)$$

De (2.7.79) e (2.7.80),

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt \quad (2.7.81)$$

Do Lema 2.7.5, $U(t)$ é um C_0 -semigrupo tal que

$$\|U(t)\| \leq C. \quad t > 0;$$

Na Observação (2.5.2), tomando $\omega = 0$ mostra-se que $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{(\operatorname{Re}\lambda)^n}$, logo, pelo Teorema 2.5.2, A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$. Resta-nos provar (2.7.76). Seja $x \in D(A^2)$. pelo Corolário 2.7.1, segue que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.7.82)$$

Agora, considere o caminho

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^4 \Lambda_k^l,$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_k^1 &= \{\lambda; \lambda = \gamma + is, -k \leq s \leq k\}, \\ \Lambda_k^2 &= \{\lambda; \lambda = s - ik, -k \leq s \leq \gamma\}, \end{aligned}$$

$$\Lambda_k^3 = \bigcup_{i=1}^3 \Upsilon_i(k, r, \delta'),$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(k, r, \delta') &= \{se^{i(\pi/2+\delta')}; s \in [k, \rho]\}; \\ \Upsilon_2(k, r, \delta') &= \{re^{i\beta}; -\pi/2 - \delta' \leq \beta \leq \pi/2 + \delta'\}; \\ \Upsilon_3(k, r, \delta') &= \{se^{-i(\pi/2+\delta')}; s \in [k, \rho]\}, \end{aligned}$$

e

$$\Lambda_k^4 = \{\lambda; \lambda = s + ik, -k \leq s \leq \gamma\},$$

orientado no sentido anti-horário (Veja Figura 2.11).

Denotamos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A),$$

de modo análogo ao que fizemos para obter (2.7.13), temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \rightarrow 0 \quad (k \approx \infty), \quad j = 2, 4.$$

Dessa forma, podemos trocar o caminho de integração em (2.7.82) para $\gamma(r, \delta')$ e, portanto,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \delta')} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = U(t)x. \quad (2.7.83)$$

para todo $x \in D(A^2)$. Sendo $D(A^2)$ denso em X , segue que (2.7.83) vale para todo $x \in X$, o que conclui a demonstração. $\square$

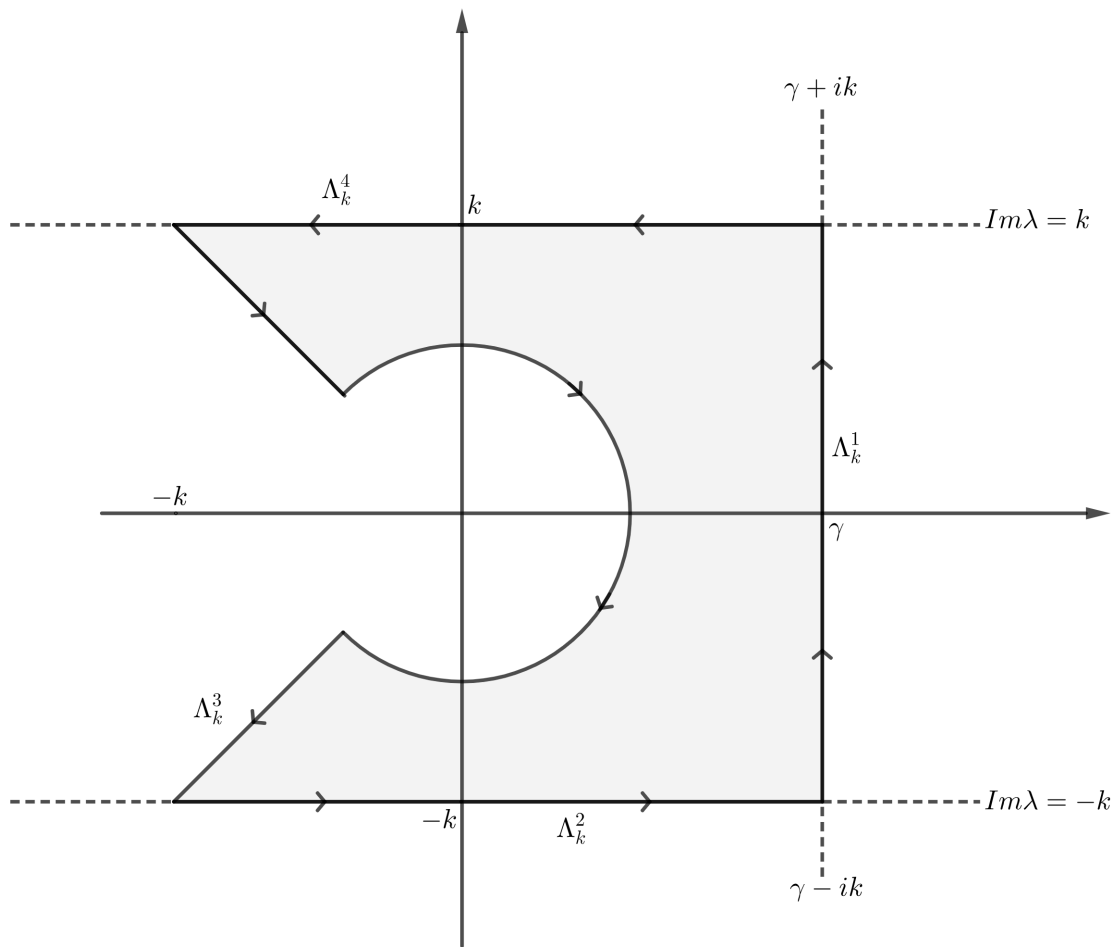


Figura 2.11: Caminho Λ_k

Capítulo 3

O Problema Abstrato de Cauchy

Nessa seção, apresentamos vários conceitos de solução para o problema abstrato de Cauchy. Nomeadamente, introduzimos os conceitos de solução clássica, forte e branda e analisamos a relação entre estes tipos de soluções.

3.1 O Problema de Valor Inicial Homogêneo

Seja X um espaço de Banach e seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear de X . Dado $x \in X$, o problema abstrato de Cauchy para A com dados iniciais em X consiste em encontrar uma solução $u(t)$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

A definição a seguir esclarece com outras palavras o que entendemos por solução de (3.1.1)

Definição 3.1.1. Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é uma solução clássica de (3.1.1) se u é contínua para todo $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u satisfaz (3.1.1).

Note que uma vez que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u é contínua em $t = 0$, (3.1.1) não pode ter solução clássica para $x \notin \overline{D(A)}$.

Proposição 3.1.1. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então para todo $x \in D(A)$,

$$u(t) = T(t)x$$

é a única solução clássica de (3.1.1)

Prova: Sendo A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, mostramos no Corolário 2.2.1 que

$$T(t)x \in C([0, \infty); X),$$

provamos, também, no Teorema 2.2.2 que para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$$

e, como

$$u(0) = T(0)x = Ix = x,$$

segue que $u(t) = T(t)x$ verifica (3.1.1) e $u \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(A))$. Logo, $u(t) = T(t)x$ é solução clássica para o problema de valor inicial (3.1.1). Agora, provaremos a unicidade da solução. Para isso, suponha que v seja outra solução e escolha t e s em $[0, \infty)$ de modo que $t \leq s$, então

$$\frac{d}{ds}[T(t-s)v(s)] = T(t-s)Av(s) - AT(t-s)v(s) = T(t-s)Av(s) - T(t-s)Av(s) = 0.$$

Logo, $T(t-s)v(s)$ não depende de s . Tomamos assim, $s = 0$ e $s = t$ a fim de obtermos

$$T(t-0)v(0) = T(t-t)v(t),$$

ou seja, $v(t) = T(0)v(0) = T(t)x$, como queríamos provar. $\square$

O ponto importante é que as soluções (clássicas) existem se (e, pela definição de $D(A)$, somente se) o valor inicial x pertencer a $D(A)$. Porém, modificando ligeiramente o conceito de "solução" e requerendo diferenciabilidade apenas para $t > 0$, obtemos tais soluções para cada $x \in X$ assim que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é imediatamente diferenciável. Isso já sugere que diferentes conceitos de "soluções" podem ser úteis. O mais importante renuncia à diferenciabilidade e substitui a equação diferencial por uma equação integral.

Definição 3.1.2. Uma função contínua $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é chamada de solução **branda** de (3.1.1) se $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$u(t) = A \int_0^t u(s)ds + x.$$

Lema 3.1.1. Seja $u(t)$ uma função contínua com valores em $[0, T]$. Se

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s)ds \right\| \leq M \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (3.1.2)$$

então $u(t) \equiv 0$ em $[0, T]$.

Prova: Seja x^* em X^* e defina

$$\varphi(t) = \langle x^*, u(t) \rangle = x^*(u(t)).$$

então $\varphi(t)$ é claramente contínua em $[0, T]$, já que x^* é contínua em X e $u(t)$ tem valores em $[0, T]$. E mais, para $n = 1, 2, \dots$, temos que

$$\left| \int_0^T e^{ns} \varphi(s) ds \right| = \left| \int_0^T e^{ns} \langle x^*, u(t) \rangle ds \right| = \left| \langle x^*, \int_0^T e^{ns} u(t) ds \rangle \right| \leq \|x^*\| M = M_1 \quad (3.1.3)$$

Mostraremos que (3.1.3) implica que $\varphi(t) \equiv 0$ em $[0, T]$ e já que $x^* \in X^*$ é arbitrário, segue que $u(t) \equiv 0$ em $[0, T]$. Com efeito,

Sabendo que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \exp\{-e^{n\tau}\}.$$

Note que a série acima converge uniformemente em τ em intervalos limitados. Portanto

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) ds \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{nk(t-T)} \left| \int_0^T e^{kns} \varphi(s) ds \right| \\ &\leq M_1 (\exp\{e^{n(t-T)}\} - 1). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Para $t < T$ o lado direito de (3.1.4) tende para zero quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, temos

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) ds = \int_0^T (1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds. \quad (3.1.5)$$

Agora, observe que para $T - t > 0$ fixo, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T (1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds &= \int_0^{T-t} (1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds \\ &+ \int_{T-t}^T (1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado (ver Teorema 1.2.6), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds = \int_{T-t}^T \varphi(s) ds. \quad (3.1.6)$$

Observe que utilizamos o Teorema da Convergência Dominada Generalizado, pois $(1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s)$ converge pontualmente para $\varphi(s)X_{[T-t,T]}$, porque se $t - T + s \leq 0$, então

$$(1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

por outro lado, se $t - T + s \geq 0$, então

$$(1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s) \rightarrow \varphi(s), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Também temos que $(1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s)$ é uma sequência de funções mensuráveis, pois é uma sequência de funções contínuas. Sobre a dominação da sequência, note que a sequência $(1 - \exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s)$ é dominada por ela mesmo, já que é uma sequência de funções integráveis e que convergem para $\varphi(s)$.

Portanto, de (3.1.5) e (3.1.6) concluímos que para $0 \leq t < T$, $\int_{T-t}^T \varphi(s)ds = 0$ o que implica que $\varphi(s) \equiv 0$ em $[0, T]$. $\square$

Teorema 3.1.1. *Seja A um operador linear densamente definido. Se $R(\lambda : A)$ existe para todo $\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \geq \lambda_0$ e*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \lambda^{-1} \log \|R(\lambda : A)\| \leq 0 \quad (3.1.7)$$

então, o problema de valor inicial (3.1.1) tem no máximo uma solução para cada $x \in X$.

Prova: Primeiramente, note que $u(t)$ é solução de (3.1.1) se, e somente se, $v(t) = e^{zt}u(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) = (A + zI)v(t), & t > 0 \\ v(0) = x, \end{cases}$$

De fato, se $u(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases}$$

então, $v(0) = e^{z0}u(0) = Ix = x$, e

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(e^{zt}u(t)) = ze^{zt}u(t) + e^{zt}Au(t) = (A + zI)e^{zt}u(t) = (A + zI)v(t).$$

Reciprocamente, seja $v(t) = e^{zt}u(t)$, então $u(t) = e^{-zt}v(t)$. Daí, $u(0) = e^{-z0}v(0) = Ix = x$, e

$$\frac{du}{dt}(t) = -ze^{-zt}v(t) + e^{-zt}(A + zI)v(t) = Ae^{-zt}v(t) = Au(t).$$

Assim, podemos transladar A por um múltiplo constante da identidade e assumindo que $R(\lambda : A)$ existe para todo λ real; $\lambda \geq 0$ e que (3.1.7) é satisfeita.

Sejam $u_1(t)$ e $u_2(t)$ soluções de (3.1.1), então $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ também é solução satisfazendo $u(0) = 0$. Nós provaremos que $u \equiv 0$ o que implica que $u_1 = u_2$ e a unicidade estará provada. Para este fim, considere a função $t \rightarrow R(\lambda : A)u(t)$ para $\lambda > 0$. Como $u(t)$ é solução de (3.1.1), segue que u é contínua para todo $t \geq 0$ o que implica que a função $e^{\lambda t}u(t)$ é contínua para todo $t \geq 0$. Assim, a integral abaixo está bem definida

$$\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau.$$

Porém, tomando $w = u(\tau)$ e $dv = e^{-\lambda\tau}d\tau$ implica que $dw = Au(\tau)d\tau$ e $v = -\lambda^{-1}e^{-\lambda\tau}$. Aplicando a integração por partes e usando o fato de $u(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau &= -\lambda^{-1}(u(\tau)e^{-\lambda\tau})\Big|_0^t - \int_0^t -\lambda^{-1}e^{-\lambda\tau}Au(\tau)d\tau \\ &= -\lambda^{-1}u(t)e^{-\lambda t} + \lambda^{-1}A \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u(t)e^{-\lambda t} &= A \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau - \lambda \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau \\ &= -(\lambda I - A) \int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando a igualdade por $e^{\lambda t}$ e em seguida aplicando $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A)$, obtemos

$$R(\lambda : A)u(t) = - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \quad (3.1.8)$$

Da suposição (3.1.7) segue que para cada $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda : A)\| = 0 \quad (3.1.9)$$

Agora, multiplicando (3.1.8) por $e^{-\sigma\lambda}$ para $\sigma > 0$ e depois aplicando a norma, segue que

$$\begin{aligned} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda : A)\| \|u(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau + \int_{t-\sigma}^t e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Porém, note que se $t - \sigma - \tau < 0$ implica que $e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Portanto, usando (3.1.9), obtemos

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda : A)\| \|u(t)\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau \right\|$$

ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} u(\tau) d\tau = 0.$$

pelo Lema 3.1.1 concluímos que $u(\tau) \equiv 0$ para $0 \leq \tau \leq t - \sigma$. Como t e τ são arbitrários, $u(t) \equiv 0$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Do Teorema 3.1.1 segue-se que para obter a unicidade das soluções do problema de valor inicial (3.1.1) não é necessário assumir que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo ou, equivalentemente, que para algum $\omega \in \mathbb{R}$, $\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\|(\lambda - \omega)^n R(\lambda : A)^n\| \leq M$ para $\lambda > \omega$, muito menos do que isso é suficiente para a unicidade.

Também para obter a existência de soluções de (3.1.1) para alguns subconjuntos densos D de valores iniciais, não é necessário assumir que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Dependendo do conjunto D de valores iniciais, os resultados de existência podem ser obtidos sob suposição mais fracas. Entretanto, para obter a existência e unicidade para todo $x \in D(A)$ bem como diferenciabilidade da solução em $(0, \infty)$, deve-se assumir que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Este é o conteúdo do nosso próximo teorema.

Lema 3.1.2. *Seja A um operador fechado. Para cada $x \in D(A)$, seja $\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|$. Então, $\|\cdot\|_G$ é uma norma em $D(A)$ e $(D(A), \|\cdot\|_G)$ é um espaço de Banach. A norma $\|\cdot\|_G$ é conhecida como norma do gráfico.*

Prova: A demonstração de que $\|\cdot\|_G$ é uma norma segue do fato de $(\|\cdot\|)$ ser norma. Mostraremos então que $(D(A), \|\cdot\|_G)$ é um espaço de Banach. Para isso, considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(D(A), \|\cdot\|_G)$ onde $\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|$. Então,

$$\|x_n - x_m\|_G \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Dai,

$$\|x_n - x_m\|_G = (\|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\|) \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Logo, $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ e $\|Ax_n - Ax_m\| \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$. Como X é Banach, temos que existem $x, y \in X$, tais que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$. Entretanto, como $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ e $G(A)$ é fechado, vem que $(x, y) \in G(A)$, ou seja, $y = Ax$. Assim, $x_n \rightarrow x$ em $(D(A), \|\cdot\|_G)$. $\square$

Teorema 3.1.2. *Seja A um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X tal que $\rho(A)$ é não vazio. O problema de valor inicial (3.1.1) tem uma solução única $u(t)$, que é continuamente diferenciável em $[0, \infty)$, para cada valor inicial $x \in D(A)$ se, e somente se, A for o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$.*

Prova: Suponhamos a princípio que A é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo. pela Proposição 3.1.1, temos que $u(t) = T(t)x$ é a única solução clássica de (3.1.1).

Reciprocamente, se (3.1.1) tem uma solução única continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ para cada valor inicial $x \in D(A)$, então veremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Para verificarmos este fato, assumimos que para cada $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (3.1.1) tem uma solução única continuamente diferenciável em $[0, \infty)$ que denotamos por $u(t; x)$.

Para $x \in D(A)$, definimos a norma do gráfico por $\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|$. Uma vez que $\rho(A) \neq \emptyset$ A é fechado e portanto $D(A)$ munido com a norma do gráfico é um espaço de Banach (ver Lema 3.1.2) que denotaremos por $[D(A)]$. Seja o espaço de Banach $X_{t_0} = C^1([0, t_0]; [D(A)])$ com a norma $\|u\|_{X_{t_0}} = \sup_{t \in [0, t_0]} (\|u(t)\| + \|Au(t)\|)$. Consideremos a aplicação $S : [D(A)] \rightarrow X_{t_0}$ definida por $S(x) = u(t; x)$ para $0 \leq t \leq t_0$, onde $u(t, x)$ é a única solução de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t; x) = Au(t; x), & t > 0 \\ u(0, x) = x, \end{cases}$$

pela linearidade do problema de Cauchy acima e unicidade da solução, concluímos que S é um operador linear definido em todo o espaço $D(A)$. Afirmamos que S é um operador fechado. De fato, sejam $x_n \rightarrow x$ em $[D(A)]$ e $S(x_n) \rightarrow v$ em X_{t_0} . Como $u_t(t; x) = Au(t; x)$, segue que

$$\int_0^t Au(\tau; x_n) d\tau = \int_0^t u_\tau(\tau; x_n) d\tau = u(t; x_n) - u(0; x_n) = u(t; x_n) - x_n,$$

ou seja,

$$u(t; x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau; x_n) d\tau. \quad (3.1.10)$$

Note que $u(t; x_n) = S(x_n) \rightarrow v(t)$. Como A é fechado, segue que $Au(\tau; x_n) \rightarrow Au(\tau; x)$. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.1.10), obtemos

$$v(t) = x + \int_0^t Av(\tau) d\tau.$$

E como $v(t)$ também é solução de (3.1.1), segue pela unicidade que $v(t) = u(t; x)$, o que implica que S é fechado. Portanto, pelo teorema do gráfico fechado (1.2.3), S é limitada, e

$$\sup_{t \in [0, t_0]} \|u(t; x)\|_G \leq C \|x\|_G. \quad (3.1.11)$$

Agora, definimos a aplicação $T(t) : [D(A)] \rightarrow [D(A)]$ por $T(t)x = u(t; x)$, onde $u(t; x)$ é a única solução de (3.1.1). Observe que $T(t)x$ é um semigrupo, pois

$$T(0)x = u(0; x) = x \Rightarrow T(0) = I \text{ (operador identidade),}$$

e, considerando $t, s \in [0, \infty)$, temos

$$T(t)T(s)(x) = T(s)(T(t)x) = T(s)(u(t; x)) = u(s; u(t; x)).$$

Por outro lado, também temos que $T(t + s, x) = u(t + s; x)$. Daí, como $u(t; x)$ é a única solução de (3.1.1), segue que $T(t + s, x) = T(t)T(s)(x)$. De (3.1.11) segue para $0 \leq t \leq t_0$, $T(t)$ é uniformemente limitada. Isso implica (ver, por exemplo, prova do Teorema 2.2.1 que $T(t)$ pode ser estendido por,

$$T(t)x = T(t - nt_0)T(t_0)^n x$$

para $nt_0 \leq t < (n + 1)t_0$ para um semigrupo em $[D(A)]$ satisfazendo

$$|T(t)x|_G \leq Me^{\omega t}|x|_G$$

A seguir, mostraremos que

$$T(t)Ay = AT(t)y \text{ para } y \in D(A^2). \quad (3.1.12)$$

Defina

$$v(t) := y + \int_0^t u(s; Ay)ds \quad (3.1.13)$$

temos

$$\begin{aligned} v'(t) = u(t; Ay) &= Ay + \int_0^t \frac{d}{ds} u(s; Ay)ds \\ &= A \left(y + \int_0^t u(s; Ay)ds \right) \\ &= Av(t). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Como $v(0) = y$ segue pela unicidade da solução de (3.1.1), $v(t) = u(t; y)$ e, portanto, $Au(t; y) = v'(t) = u(t; Ay)$ que é o mesmo (3.1.12).

Agora, como $D(A)$ é denso em X e pela nossa suposição $\rho(A) \neq \emptyset$ também $D(A^2)$ é denso em X . Seja $\lambda_0 \in \rho(A)$; fixo, e seja $y \in D(A^2)$. se $x = (\lambda_0 I - A)y$ então, por (3.1.12), $T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y$ e portanto,

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq C|T(t)y|_G \leq C_1 e^{\omega t}|y|_G. \quad (3.1.15)$$

Mas,

$$|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq C_2 \|x\|$$

o que implica que

$$\|T(t)x\| \leq C_3 e^{\omega t} \|x\|. \quad (3.1.16)$$

Portanto, $T(t)$ pode ser estendido para todo o X de forma única por continuidade, já que é um operador limitado definido em um subespaço denso. Após essa extensão, $T(t)$ torna-se um C_0 -semigrupo em X . Para completar a prova, temos que mostrar que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Para isso, denote $A_1 : D(A_1) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $T(t)$. Se $x \in D(A)$, então, pela definição de $T(t)$ temos que $T(t)x = u(t, x)$ e, portanto, por nossas suposições

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \quad \text{para } t \geq 0.$$

o que implica que, em particular, que $(d/dt)T(t)x|_{t=0} = Ax$ e portanto $D(A) \subset D(A_1)$ e, consequentemente, $A_1|_{D(A)} = A$.

Seja $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ e seja $y \in D(A^2)$. Segue de (3.1.12) e de $A_1|_{D(A)} = A$ que

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1y. \quad (3.1.17)$$

Integrando (3.1.17) de 0 à ∞ e utilizando (2.3.3) (ver demonstração do Teorema de Hille-Yosida), obtemos

$$AR(\lambda : A_1)y = R(\lambda : A_1)A_1y. \quad (3.1.18)$$

Mas $A_1R(\lambda : A_1)y = R(\lambda : A_1)A_1y$. Com efeito,

$$A_1R(\lambda : A_1)y = A_1[(\lambda I - A)^{-1}y] = [\lambda I - (\lambda I - A_1)][(\lambda I - A_1)^{-1}y] = (\lambda I - A_1)^{-1}\lambda y - y$$

Por outro lado,

$$R(\lambda : A_1)A_1y = (\lambda I - A)^{-1}[\lambda y - (\lambda y - A_1y)] = (\lambda I - A_1)^{-1}\lambda y - y.$$

Portanto, usando o que acabamos de provar em (3.1.18), temos que $AR(\lambda : A_1)y = A_1R(\lambda : A_1)y$ para cada $y \in D(A^2)$. Uma vez que $A_1R(\lambda : A_1)y$ são uniformemente limitado, A é fechado e $D(A^2)$ é denso em X , segue que $AR(\lambda : A_1)y = A_1R(\lambda : A_1)y$ para cada $y \in X$. O que implica que $D(A) \supset \operatorname{Im}(R(\lambda : A_1)) = D(A_1)$ e $A \supset A_1$. Portanto, $A = A_1$ e assim provamos o teorema. $\square$

O próximo Teorema descreve uma situação na qual o problema de valor inicial (3.1.1) tem uma solução única para cada $x \in X$, mas antes vamos enunciar e provar alguns resultados que irão compor a demonstração do Teorema 3.1.4.

Definição 3.1.3. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X . O semigrupo $T(t)$ é chamado **diferenciável** para $t > t_0$ se para cada $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. $T(t)$ é chamado de **diferenciável** se for diferenciável para $t > 0$.*

Teorema 3.1.3. *Sejam $T(t)$ um C_0 -semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são válidas*

(a) Para $t > t_0$, temos que $T(t) : X \rightarrow D(A)$, $T'(t) = AT(t)$ e $T'(t)$ é um operador linear limitado.

(b) Para $t > t_0$, a função $t \rightarrow T(t)$ é contínua na topologia uniforme de operadores.

Prova: (a) Por hipótese, $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$ e todo $x \in X$. Portanto, $T(t)x \in D(A)$ e $T'(t) = AT(t)$, para todo $x \in X$ e $t > t_0$. Agora, como A é fechado e $T(t)$ é limitado, $AT(t)$ é fechado. Para $t > 0$, $AT(t)$ está bem definido em todo X , e portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado (ver Teorema 1.2.3) é um operador linear limitado.

(b) Se $t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ e $\|T(s)\| \leq M$ sobre $[0, t_1 + 1]$. Para $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \|T(t_2)x - T(t_1)x\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} T(s)x ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|T(s - t_1)\| \|AT(t_1)x\| ds \\ &\leq (t_2 - t_1)M \|AT(t_1)x\|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|T(t_2) - T(t_1)\| \leq (t_2 - t_1)M \|AT(t_1)\|,$$

o que implica na continuidade de $T(t)$ para $t > t_0$ na topologia uniforme de operadores.

Teorema 3.1.4. Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável então, para cada $x \in X$, o problema de valor inicial (3.1.1) tem uma solução única.

Prova: Como A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, então pelo Teorema 2.2.1, temos que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ e pelo Teorema de Hille-Yosida segue que $\|R(\lambda : A)\| \leq M/\lambda$ e A é um operador linear desamente definido. Logo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \lambda^{-1} \log(\|R(\lambda : A)\|) \leq 0$$

Assim, posso usar o Teorema 3.1.1 para garantir a unicidade . pelo teorema Hille-Yosida garantimos também que $\rho(A) \neq \emptyset$ para $x \in D(A)$ e assim utilizando o Teorema 3.1.2 garantimos a existência para $x \in D(A)$. Se $x \in X$, então pela diferenciabilidade de $T(t)x$ e pelo Teorema 3.1.3 segue que

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x \text{ para } t > 0$$

e $AT(t)x$ é Lipschitz contínua para $t > 0$. Portanto, $T(t)x$ é solução de (3.1.1). $\square$

3.2 O Problema de Valor Inicial Não Homogêneo

Estudaremos o problema de valor inicial não homogêneo. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $f : [0, T) \rightarrow X$ uma função apropriada em um espaço de Banach X e consideremos o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Para o problema de Cauchy abstrato não homogêneo (3.2.1) introduzimos também duas noções de solução e apresentaremos algumas relações entre elas.

Definição 3.2.1. Dizemos que uma função $u : [0, T) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (3.2.1) em $[0, T)$ se u é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $t \in (0, T)$ e u satisfaz (3.2.1)

Lema 3.2.1. Se $f \in L^1(0, T; X)$, então o problema de valor inicial (3.2.1) tem no máximo uma solução clássica. Mais ainda, se existir uma solução clássica, então a solução é dada por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.2.2)$$

Prova: Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ e seja $u(\cdot)$ uma solução clássica de (3.2.1). Então a função $g(s) = T(t-s)u(s)$ com valores em X é diferenciável para $s \in (0, T)$ e

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Como $f \in L^1(0, T; X)$, a função $s \rightarrow T(t-s)f(s)$ é integrável sobre $[0, t]$. Logo, integrando a igualdade acima entre 0 e t , obtemos que

$$g(t) - g(0) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

ou ainda,

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (3.2.3)$$

A unicidade de $u(\cdot)$ é uma consequência direta da representação (3.2.3). E portanto, concluímos a prova. $\square$

Se $f \in L^1(0, T; X)$, o lado direito de (3.2.3) define uma função contínua em $[0, T]$. Logo, de maneira natural, podemos considerar (3.2.3) como uma solução branda (3.2.1) mesmo se ela não for diferenciável e não satisfizer estritamente a equação no sentido da Definição 3.2.1. Considerando isto, introduzimos a seguinte definição

Definição 3.2.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; x)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

*é chamada de **solução branda** do problema de valor inicial (3.2.1) em $[0, T]$.*

A definição da solução branda do problema de valor inicial (3.2.1) coincide quando $f \equiv 0$ com a definição $T(t)x$ como a solução branda da equação homogênea correspondente. E, portanto, claro que nem toda solução branda de (3.2.1) é de fato uma solução clássica, mesmo no caso em que $f \equiv 0$.

Agora, estamos interessados em impor ainda mais condições em f de forma que para $x \in D(A)$, a solução branda se torne uma solução clássica e, assim, provando, nessas condições, a existência de solução (3.2.1) para $x \in D(A)$.

Começamos mostrando que a continuidade de f , em geral, não é suficiente para garantir a existência de soluções de (3.2.1) para $x \in D(A)$. De fato, seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ e seja $x \in X$ tal que $T(t)x \notin D(A)$ para qualquer $t \geq 0$. Seja

$$f(s) = T(s)x \notin D(A); \quad x \in X$$

então $f(s)$ é contínua para $s \geq 0$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + T(t)x, & t > 0 \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Afirmamos que (3.2.4) não tem solução embora $u(0) = 0 \in D(A)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t T(t-s)T(s)ds \\ &= \int_0^t T(t)x ds \\ &= tT(t)x \end{aligned}$$

é uma solução branda de (3.2.4), mas $tT(t)x$ não é diferenciável para $t > 0$ e, portanto, não pode ser a solução de (3.2.4). Assim, para que uma solução branda seja uma solução clássica é necessário que A ou f satisfaçam condições adicionais, conforme veremos a seguir.

Teorema 3.2.1. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$, seja $f \in L^1(0, T; X)$ contínua em $(0, T]$ e seja*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.2.5)$$

o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução clássica $u(\cdot)$ em $[0, T)$ para cada $x \in D(A)$ se uma das condições é satisfeita;

- (i) $v(t)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$.
- (ii) $v(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e $Av(t)$ é contínua em $(0, T)$.

Mais ainda, se (3.2.1) tem uma solução clássica, então v satisfaz ambos (i) e (ii).

Prova: Suponhamos primeiro que (3.2.4) tem uma solução clássica $u(\cdot)$ para $x \in D(A)$. Do Lema 3.2.1 e (3.2.5) podemos escrever

$$v(t) = u(t) - T(t)x.$$

Sendo, por definição, u contínua para $t \geq 0$, $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e u continuamente diferenciável para $t > 0$. Também, pelo fato de $x \in D(A)$ resulta, em virtude do item (c) do Teorema 2.2.2, que $T(t)x \in D(A)$, para todo $t > 0$, e além disso,

$$v'(t) = u'(t) + T(t)Ax$$

que é contínua para $t > 0$. Logo, v é continuamente diferenciável e (i) está provado. Além disso, novamente, como $x \in D(A)$, temos que $T(t)x \in D(A)$ para $t \geq 0$ e então $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ para $0 < t < T$. Logo

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$$

que é contínua em $(0, T)$, como queríamos para provar que v satisfaz a condição (ii).

Suponha agora que a condição (i) é verificada. Observe inicialmente que para $t \in (0, T)$, e $h > 0$ tal que $t+h \in (0, T)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} v(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Afirmamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t). \quad (3.2.7)$$

Com efeito,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - f(t) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)f(s) - f(t)\| ds,$$

mas, para h suficientemente pequeno, temos que $(t+h-s)$ tende para 0 e assim

$$\begin{aligned} \|T(t+h-s)f(s) - f(t)\| &\leq \|T(t+h-s)f(s) - T(t+h-s)f(t)\| + \|T(t+h-s)f(t) - f(t)\| \\ &\leq \|T(t+h-s)\| \|f(s) - f(t)\| + \|T(t+h-s)f(t) - f(t)\| \\ &< 2\epsilon, \end{aligned}$$

já que $f(\cdot)$ é contínua e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo. Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - f(t) \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)f(s) - f(t)\| ds \\ &< \frac{1}{h} \int_t^{t+h} 2\epsilon ds \\ &= 2\epsilon, \end{aligned}$$

para ϵ suficientemente pequeno, temos o que afirmamos. Como $v(\cdot)$ é diferenciável em $(0, T)$ segue de (3.2.6) que

$$v(t) \in D(A) \text{ e } Av(t) = v'(t) - f(t) \text{ para } t \in (0, T). \quad (3.2.8)$$

Isto, juntamente com o fato de $v(0) = 0$, implica que $u(t) = T(t)x + v(t)$ é solução clássica de (3.2.1).

Suponhamos agora que a condição **(ii)** é satisfeita. De (3.2.6) obtemos

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{T(h) - I}{h} v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$$

Como $v(t) \in D(A)$ então

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} v(t) = Av(t). \quad (3.2.9)$$

Logo, de (3.2.7), (3.2.8) e (3.2.9) resulta que v é diderenciável pela direita para $0 < t < T$ e

$$\frac{d^+}{dt} v(t) = Av(t) + f(t).$$

pela continuidade de Av e f em $(0, T)$, por hipótese, vem que $\frac{d^+}{dt} v(t)$ é contínua em $(0, T)$. Daí, pelo Lema de Dini (veja Lema1.1.2) segue que v é continuamente diferenciável em $(0, T)$ e portanto, do item **(i)** resulta que o problema (3.2.1) tem uma solução clássica para todo $x \in D(A)$ que é dada por $u(t) = T(t)x + v(t)$. $\square$

Corolário 3.2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Se $f(s)$ é continuamente diferenciável em $[0, T]$, então o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução clássica para todo $x \in D(A)$.*

Prova: Seja $v(\cdot)$ a função definida em (3.2.5), ou seja

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds,$$

Se $t \in (0, T)$ e $h > 0$ são tais que $t+h \in (0, T)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)f(t-s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t+h-s)ds + \int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)f(t-s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s)ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s)ds \\ &= \int_0^t T(s) \left[\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \right] ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s)ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)(f(t+h-s) - f(t-s))ds \\ &= \int_0^t T(s) \left[\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \right] ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f(t-s)ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f'(\gamma)ds \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

onde $\gamma \in (t-s, t-s+h)$, pelo Teorema do Valor Médio, pois $f(t+h-s) - f(t-s) = f'(\gamma)h$, para algum $\gamma \in (t-s, t-s+h)$. Utilizando o fato de $f(\cdot)$ ser continuamente diferenciável em $(0, T)$ e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ser um semigrupo, mostra-se (analogamente como mostramos (3.2.7)) que o termo direito de (3.2.10) converge para

$$\int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0)$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Concluimos que $\frac{d^+}{dt}v(t)$ existe em $[0, T]$ e que

$$\frac{d^+}{dt}v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds.$$

Mais ainda, $\frac{d^+}{dt}v(t)$ é contínua em $[0, T]$. Daí, segue que $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$. Logo, v satisfaz a condição (i) do Teorema 3.2.1 e assim o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução clássica. $\square$

Lema 3.2.2. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. Se $f : [0, T] \rightarrow X$ é tal que $f([0, T]) \subset D(A)$ e $Af \in L^1([0, T], X)$, então*

$$A \int_0^T f(s)ds = \int_0^T Af(s)ds$$

Prova: Seja $P = \{s_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ uma partição do intervalo $[0, T]$ e definamos

$$S(f, P) = \sum_{s_i \in P} f(\xi_i), \quad \xi_i \in [s_i, s_{i+1}].$$

Como $D(A)$ é um subespaço vetorial, temos que $S(f, P) \in D(A)$, para toda partição P . Além disso, $S(f, P) \rightarrow \int_0^T f(s)ds$, quando $\Delta P \rightarrow 0$ e como $AS(f, P) = S(Af, P)$, temos que $AS(f, P) \rightarrow \int_0^T Af(s)ds$, quando $\Delta P \rightarrow 0$. Usando agora que A é fechado, segue que $\int_0^T f(s)ds \in D(A)$ e que $A \int_0^T f(s)ds = \int_0^T Af(s)ds$, como queríamos mostrar. $\square$

Corolário 3.2.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Seja $f \in L^1(0, T; X)$ contínua em $(0, T)$. Se $f(s) \in D(A)$ para $0 < s < T$ e $Af(s) \in L^1(0, T; X)$ então para $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução clássica em $[0, T)$.*

Prova: Seja $v(\cdot)$ a função definida em (3.2.5). Do fato que $f(s) \in D(A)$, vem do Teorema 2.2.2, que $T(t-s)f(s) \in D(A)$ e $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$. Como $Af(s) \in L^1(0, T; X)$, segue que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ é integrável. Além disso, como A é fechado, segue do Lema 3.2.2

$$\int_0^t T(t-s)Af(s)ds = \int_0^t AT(t-s)f(s)ds = A \int_0^t T(t-s)f(s)ds = Av(t).$$

ou seja, $v(t) \in D(A)$ para $0 < t \leq T$ e $Av(\cdot)$ é contínua em $(0, T)$. Portanto, $v(\cdot)$ verifica a condição (ii) do Teorema 3.2.1, o que mostra que existe uma solução clássica para (3.2.1). $\square$

Como consequência dos resultados anteriores e da densidade de $D(A)$ em X , temos o seguinte resultado

Teorema 3.2.2. *Sejam $f \in L^1(0, T; X)$ e $x \in X$. Se $u(\cdot)$ é solução branda de (3.2.1) em $[0, T]$, então para $T' < T$, $u(\cdot)$ é o limite uniforme em $[0, T']$ de soluções clássicas de (3.2.1).*

Prova: Sejam $x \in X$ e M, ω constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \in [0, T]$. Sejam $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C^1([0, T]; X)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^1([0, T]; X)$ [C^∞ é denso em $L^p(1 \leq p < \infty)$] (veja Proposição 8.17, [9]). Do Corolário 3.2.1 sabemos que, para cada $n \geq 1$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) &= Au_n(t) + f_n(t), \\ u_n(0) &= x_n, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

tem uma solução clássica $u_n(\cdot)$, a qual é dada por

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por outro lado, se $u(\cdot)$ é uma solução branda de (3.2.1), então

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Disto, para $0 \leq t \leq T$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &= \|T(t)x_n - T(t)x + \int_0^t T(t-s)[f_n(s) - f(s)]ds\| \\ &\leq \|T(t)x_n - T(t)x\| + \int_0^t \|T(t-s)[f_n(s) - f(s)]\|ds \\ &\leq Me^{\omega t}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{w(t-s)}\|f_n(s) - f(s)\|ds \\ &\leq Me^{\omega T}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{wT}\|f_n(s) - f(s)\|ds \\ &\leq Me^{\omega T}\left(\|x_n - x\| + \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|ds\right) \end{aligned}$$

Donde, a partir das nossas hipóteses concluimos facilmente que $u_n \rightarrow u$. □

Concluimos esta seção com algumas observações sobre outra noção de solução do problema de valor inicial (3.2.1), nomeadamente a solução forte.

Definição 3.2.3. Uma função u é uma **solução forte** de (3.2.1), se $u(\cdot)$ é diferenciável q.t.p em $[0, T]$; $u' \in L^1(0, T; X)$; $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ q.t.p em $[0, T]$.

Note que se $A \equiv 0$ e $f \in L^1(0, T; X)$ o problema de valor inicial (3.2.1) não possui, em geral, solução clássica a menos que f seja contínua. Contudo, terá sempre uma solução forte dada por

$$u(t) = x + \int_0^t f(s)ds. \tag{3.2.12}$$

Oberve que se u é uma solução forte de (3.2.1) e $f \in L^1(0, T; X)$, então u é dada por (3.2.2) e portanto é uma solução branda de (3.2.1) (a partir da demonstração do Lema 3.2.1 mostramos isto facilmente). Por outro lado, Como feito no caso clássico, uma questão natural é determinar quando uma solução branda de (3.2.1) é uma solução forte.

Teorema 3.2.3. Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ e consideremos $f \in L^1(0, T; X)$. Tomando

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2.13}$$

o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução forte $u(\cdot)$ em $[0, T]$ para cada $x \in D(A)$ se uma das condições é satisfeita;

(i) $v(t)$ é diferenciável q.t.p sobre $[0, T]$ e $v'(\cdot) \in L^1(0, T; X)$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ q.t.p sobre $[0, T]$ e $Av(t) \in L^1(0, T; X)$.

Mais ainda, se (3.2.1) tem uma solução forte, então v satisfaz ambos (i) e (ii).

Prova: Primeiramente, observe que (i) e (ii) são equivalentes. De fato,

(i) $\Rightarrow$ (ii) Note que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) v(t) &= \frac{1}{h} T(h) \int_0^t T(t-s) f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) f(s) ds \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) f(s) ds \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) f(s) ds \right] - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds \\
 &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds.
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

observe que a primeira igualdade é possível pois $T(t-s)f(s) \in L^1(0, T; X)$ e $T(h)$ é limitada em X . Assim,

$$\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds.$$

Agora, como v é diferenciável q.t.p, o limite, quando $h \rightarrow 0^+$, do primeiro termo à direita existe q.t.p. Já o segundo termo também tem limite $f(t)$ q.t.p quando $h \rightarrow 0^+$. Assim, quando $h \rightarrow 0^+$ temos que

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds \Rightarrow v'(t) - f(t) \text{ q.t.p em } [0, T].$$

Portanto,

$$v(t) \in D(A) \text{ e } Av(t) = v'(t) - f(t) \in L^1(0, T; X).$$

o que prova (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Como $v(t) \in D(A)$, então existe

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) v(t) = Av(t).$$

Agora, por (3.2.14), temos que

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds.$$

Logo, quando $h \rightarrow 0^+$,

$$\frac{d^+}{dt} v(t) = Av(t) + f(t).$$

Considerando $h < 0$ e substituindo h por $-h$ em (3.2.14), segue que

$$\frac{d^-}{dt} v(t) = Av(t) - f(t).$$

Ou seja, $v(t)$ é diferenciável q.t.p em $[0, T]$ e

$$v'(t) = Av(t) + f(t) \in L^1(0, T; X).$$

O que conclui a equivalência entre (i) e (ii). Agora, vamos provar o Teorema. Suponha que (i) ocorra (e, consequentemente, (ii)). Como $u(t) = T(t)x + v(t)$ é diferenciável q.t.p em $[0, T]$, já que $v(t)$ é diferenciável q.t.p e $T(t)x$ é diferenciável, pois $x \in D(A)$. E mais,

$$\frac{d}{dt} u(t) = T(t)x + v'(t) \in L^1(0, T; X). \quad (3.2.15)$$

Por fim, para mostrar que u satisfaz o problema (3.2.1), basta seguir os mesmos argumentos utilizados no Teorema 3.2.1.

Reciprocamente, se (3.2.1) possui solução forte u , então

$$u(t) = T(t)x + v(t)$$

donde segue que v é diferenciável q.t.p, visto que u e $T(\cdot)Ax$ o são. Além disso, como $T(\cdot)Ax, u'(t) \in L^1$ e $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$, temos que $v'(t) \in L^1(0, T; X)$. O que prova (i) (consequentemente (ii)) e o teorema está provado. $\square$

Como consequência do Teorema 3.2.3 temos

Corolário 3.2.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Se f é diferenciável q.t.p em $[0, T]$ e $f' \in L^1(0, T; X)$ então para cada $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (3.2.1) possui uma única solução forte em $[0, T]$.*

Prova: Considere

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) ds = \int_0^t T(s) f(t-s) ds,$$

então, a partir de 3.2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \int_0^t T(s) \left[\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \right] ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) f(t-s) ds \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) (f(t+h-s) - f(t-s)) ds \end{aligned}$$

Logo, v é diferenciável q.t.p e

$$\frac{d^+}{dt} v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds.$$

Como $f(0) \in X$, o operador $S(\cdot)f(0) \in L^1(0, T; X)$. Note também que

$$\varphi(t) = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds = \int_0^t T(t-s)f'(s)ds,$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\varphi(t)\|dt &= \int_0^T \int_0^t \|T(t-s)f'(s)\|dsdt \\ &\leq \int_0^T \int_0^t \|T(t-s)\| \|f'(s)\|dsdt \\ &\leq \int_0^T \int_0^t M e^{t\omega} \|f'(s)\|dsdt \\ &\leq \int_0^T \int_0^T M e^{t\omega} \|f'(s)\|dsdt \\ &\leq M e^{T\omega} \int_0^T \|f'(s)\|dsdt \end{aligned}$$

assim, $\int_0^T T(t-s)f'(s)ds \in L^1(0, T; X)$. Portanto, pelo Teorema 3.2.3, segue que o problema de valor inicial (3.2.1) tem uma solução forte $u(\cdot)$ em $[0, T)$ e ela é única, pois caso contrário, se $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ são soluções fortes então, em particular, também são soluções brandas e pelo Lema 3.2.1 são iguais. $\square$

Com o intuito de anunciarmos mais um corolário do Teorema 3.2.3, faremos a seguir uma definição e alguns comentários.

Definição 3.2.4. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é contínua no sentido de Holder para $t \geq 0$ se

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L(t-s)^k, \quad 0 \leq s \leq t,$$

onde L e k são constantes com $0 \leq k \leq 1$. Quando $k = 1$ dizemos que f é Lipschitz contínua.

Observação 3.2.1. Em geral, a continuidade Lipschitz de f sobre $[0, T]$ não é suficiente para assegurar a existência de uma solução forte de (3.2.1) para $x \in D(A)$. Contudo, se X é reflexivo e f é Lipschitz contínua sobre $[0, T]$, então, por resultados clássicos, f é diferenciável q.t.p e $f' \in L^1(0, T; X)$.

Diante das informações acima, o corolário 3.2.3 implica em

Corolário 3.2.4. Seja X um espaço de Banach reflexivo e consideremos A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ sobre X . Se f é Lipschitz contínua sobre $[0, T]$ então para todo $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (3.2.1) possui uma única solução forte sobre $[0, T]$ dada por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Prova: Como X é um espaço de Banach reflexivo e f é Lipschitz contínua sobre $[0, T]$, então pela Observação 3.2.1 segue que f é diferenciável q.t.p e $f' \in L^1(0, T; X)$. Portanto, pelo Corolário 3.2.3, segue que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds,$$

é diferenciável q.t.p em $[0, T]$ e

$$\frac{d^+}{dt}v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds = g(t).$$

Como $f(0) \in X$ e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, segue que $T(t)f(0)$ é limitado, digamos por N e utilizando a ideia da prova do Corolário 3.2.3, obtemos

$$\begin{aligned} \|g(t)\| &\leq \|T(t)f(0)\| + \int_0^t \|T(s)f'(t-s)\|ds \\ &\leq N + Me^{T\omega} \int_0^T \|f'(s)\|ds \\ &\leq C \end{aligned}$$

Assim, $g(t)$ é contínua e consequentemente, v é continuamente diferenciável em $(0, T)$. Portanto, pelo Teorema 3.2.1 segue o que queríamos. $\square$

3.3 Problema Não Linear

Nesta seção, temos como objetivo garantir a existência local, singularidade, regularidade e a solução máxima definida para classe de problemas de valor inicial descritos em (3.3.1). Além disso, mais adiante, iremos abordar sobre sistemas de reação - difusão.

3.3.1 Alguns fatos básicos sobre Operadores Setoriais

Iremos introduzir alguns resultados complementares que utilizaremos no decorrer desta seção. Para maiores detalhes ver [12] e [5]

Definição 3.3.1. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é setorial se existem constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $M > 0$ tais que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\theta, \omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}, \\ \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \lambda \in S_{\theta, \omega}. \end{cases}$$

Lembramos que se Y é um espaço de Banach arbitrário e $a < b \in \mathbb{R}$, então $B([a, b]; Y)$ e $C([a, b]; Y)$ são espaços de Banach munidos com a norma do supremo $\|f\|_{\infty} = \sup_{a \leq s \leq b} \|f(s)\|_Y$.

Além disso, definimos $C^{\alpha}([a, b]; Y)$ como um espaço de Banach de todas as funções α -Holder contínuas de $[a, b]$ para Y , munido com a norma

$$\|f\|_{C^{\alpha}([a, b]; Y)} = \|f\|_{\infty} + [f]_{C^{\alpha}([a, b]; Y)},$$

onde $[f]_{C^{\alpha}([a, b]; Y)} = \sup_{a \leq s \leq b} \|f(t) - f(s)\|_Y / (t - s)^{\alpha}$.

Proposição 3.3.1. Dado $x \in X$, a função $t \mapsto e^{tA}x$ pertence a $C^{\alpha}([0, 1]; X)$ se, e somente se, x pertence a $D_A(\alpha, \infty)$. Nesse caso, $t \mapsto e^{tA}x$ pertence a $C^{\alpha}([0, T]; X)$ para cada $T > 0$.

Prova: Ver [12, Corolário 3.1.3].

Proposição 3.3.2. Seja $A : D(A) \rightarrow X$ um operador setorial, e seja $0 < \alpha < 1$, $a < b \in \mathbb{R}$. Se u pertence a $C^{1+\alpha}([a, b]; X) \cap C^{\alpha}([a, b]; D(A))$ então u' é limitada em $[a, b]$ com valores em $D(A)$.

Prova: Ver [12, Página 61].

Proposição 3.3.3. Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^1 , e seja $x_0 \in \partial\Omega$ um ponto de máximo relativo para uma função C^1 $v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Se a derivada normal de v se anula em x_0 então todas as derivadas parciais de v se anulam em x_0 . Além disso, se $\partial\Omega$ e v são C^2 , segue que $\Delta v(x_0) \leq 0$.

Prova: Ver [5, Página 145]

3.3.2 Não Linearidades Definidas em X

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + F(t, u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial e $F : [0, T] \times X \rightarrow X$. Ao longo desta subseção devemos assumir que F é contínua, e que para cada $R > 0$, existe $L > 0$ tal que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad t \in [0, T]; \quad x, y \in B(0, R). \quad (3.3.2)$$

Isto significa que F é Lipschitz contínua em relação a x em qualquer subconjunto limitado em X , com a constante de Lipschitz independente de t .

Como no caso de problemas lineares, dizemos que uma função u definida em um intervalo $I = [0, \tau)$ ou $I = [0, \tau]$, com $\tau \leq T$, é uma *solução estrita* do problema (3.3.1) em I , se é *contínua* com valores em $D(A)$ e diferenciável com valores em X no intervalo I , e satisfaz (3.3.1). Dizemos que é uma *solução clássica* se é contínua com valores em $D(A)$ e diferenciável com valores em X no intervalo $I \setminus \{0\}$, é contínua em I com valores em X , e satisfaz (3.3.1). Dizemos que é uma *solução branda* se é contínua com valores em $I \setminus \{0\}$ e satisfaz

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, u(s))ds, \quad t \in I \quad (3.3.3)$$

Por conveniência de notação, ao longo desta seção, definimos

$$M_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \quad (3.3.4)$$

Existência local, singularidade, regularidade

Teorema 3.3.1. *As seguintes afirmações são válidas*

- (i) Se $u, v \in C_b([a, b]; X)$ são soluções brandas para algum $a \in (0, T]$, então $u = v$.
- (ii) Para cada $\bar{u} \in X$, existe $r, \delta > 0$, $k > 0$ tal que para $\|u_0 - \bar{u}\| \leq r$ problema (3.3.1) tem uma solução branda $u = u(\cdot; u_0) \in C_b((0, \delta]; X)$. A função u pertence a $C([0, \delta]; X)$ se, e somente se, $u_0 \in \overline{D(A)}$.

Além disso, para cada $u_0, u_1 \in B(\bar{u}, r)$ temos

$$\|u(t; u_0) - u(t; u_1)\| \leq K\|u_0 - u_1\|, \quad 0 \leq t \leq \delta \quad (3.3.5)$$

Observação 3.3.1. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Denotamos $C(I; X)$ o espaço vetorial das funções contínuas $u : I \rightarrow X$; por $B(I; X)$ o espaço das funções limitadas, munido com a norma do supremo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t)\|$$

Também definimos o conjunto

$$C_b(I; X) = C(I; X) \cap B(I; X)$$

Prova de (i). Sejam $u, v \in C_b([a, b]; X)$ soluções brandas de (3.3.1), e consideremos $\omega = u - v$. Por (3.3.3), a função ω satisfaz

$$\omega(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (F(s, u(s)) - F(s, v(s))) ds, \quad 0 \leq t < a.$$

Usando (3.3.2) e (3.3.4) com $R = \max \left\{ \sup_{0 < t \leq a} \|u(t)\|, \sup_{0 < t \leq a} \|v(t)\| \right\}$, obtemos

$$\|\omega(t)\| \leq LM_0 \int_0^t \|\omega(s)\| ds.$$

pela Desigualdade de Gronwall na Forma Integrável (Teorema 1.2.8) segue que $\omega \equiv 0$ em $[0, a]$.

Prova de (ii): Fixe $R > 0$ tal que $R \geq 8M_0\|\bar{u}\|$, de modo que se $\|u_0 - \bar{u}\| \leq r = R/(8M_0)$, temos que

$$\|e^{tA}u_0\| \leq \|e^{tA}\| \|u_0\| = \|e^{tA}\| \|u_0 - \bar{u} + \bar{u}\| \leq \|e^{tA}\| (\|u_0 - \bar{u}\| + \|\bar{u}\|).$$

Daí, de (3.3.4) e das informações acima, obtemos

$$\sup_{0 < t \leq a} \|e^{tA}u_0\| \leq R/4$$

Além disso, seja $L > 0$ tal que

$$\|F(t, v) - F(t, w)\| \leq L\|v - w\|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad v, w \in B(0, R).$$

Procuramos uma solução fraca pertencente ao espaço métrico

$$Y = \{u \in C_b((0, \delta]; X) : \|u(t)\| \leq R \quad \forall t \in (0, \delta]\},$$

onde $\delta \in (0, T]$ deve ser escolhido corretamente. Y é a bola fechada com centro em 0 e raio R no espaço $C_b((0, \delta]; X)$, e para cada $v \in Y$ a função $t \rightarrow F(t, v(t))$ pertence a

$C_b((0, \delta])$. De fato, $t \rightarrow F(t, v(t))$ é naturalmente contínua, já que é a composição de funções contínuas. Por outro lado, para $t \in (0, \delta]$ e s fixo, temos

$$\begin{aligned}\|F(t, v(t))\| &= \|F(t, v(t)) - F(t, v(s)) + F(t, v(s))\| \\ &\leq \|F(t, v(t)) - F(t, v(s))\| + \|F(t, v(s))\| \\ &\leq L\|v(t) - v(s)\| + \|F(t, v(s))\| \\ &\leq LM + \|F(t, v(s))\|,\end{aligned}$$

note que $A = [0, t] \times v(s)$ é compacto, assim F é limitada em A . Como $(0, \delta) \times v(s) \subset A$, temos que $\|F(t, v(s))\| \leq \sup_{0 < t \leq T} \|F(t, v(s))\|$. Portanto, $t \rightarrow F(t, v(t))$ é limitada e consequentemente pertence a $C_b((0, \delta])$. Definimos o operador Γ em Y , por meio de

$$\Gamma(v)(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, v(s))ds, \quad 0 \leq t \leq \delta. \quad (3.3.6)$$

Claramente, a função $v \in Y$ é uma solução branda de (3.3.1) em $[0, \delta]$ se e somente se é um ponto fixo de Γ .

Queremos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver Teorema 1.2.4). Para isto devemos mostrar que Γ é uma contração e mapeia Y em si mesma, desde que δ seja suficientemente pequeno.

Sejam $v_1, v_2 \in Y$. Temos

$$\begin{aligned}\|\Gamma(v_1) - \Gamma(v_2)\|_{C_b((0, \delta]; X)} &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|_{C_b((0, \delta]; X)} \|F(s, v_1(s)) - F(s, v_2(s))\|_{C_b((0, \delta]; X)} ds \\ &\leq \delta M_0 \|F(\cdot, v_1(\cdot)) - F(\cdot, v_2(\cdot))\|_{C_b((0, \delta]; X)} \\ &\leq \delta M_0 L \|v_1 - v_2\|_{C_b((0, \delta]; X)}.\end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Portanto, se

$$\delta \leq \delta_0 = (2M_0L)^{-1},$$

então

$$\|\Gamma(v_1) - \Gamma(v_2)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \leq (1/2) \|v_1 - v_2\|_{C_b((0, \delta]; X)},$$

isto é, Γ é uma contração com constante $(1/2)$ em Y . Além disso, se $\delta \leq \delta_0$, para cada $v \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma(v)\|_{C_b((0, \delta]; X)} &\leq \|\Gamma(v) - \Gamma(0)\|_{C_b((0, \delta]; X)} + \|\Gamma(0)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \\ &\leq \|v\|/2 + \|e^{\cdot A}u_0\|_{C_b((0, \delta]; X)} + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|_{C_b((0, \delta]; X)} \|F(s, 0)\|_{C_b((0, \delta]; X)} ds \\ &\leq R/2 + R/4 + M_0\delta \|F(\cdot, 0)\|_{C_b((0, \delta]; X)}.\end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Portanto, se $\delta \leq \delta_0$ é tal que

$$M_0 \delta \|F(\cdot, 0)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \leq R/4,$$

então

$$\|\Gamma(v)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \leq R.$$

Logo, Γ mapeia Y em si mesmo, de modo que ele tenha um único ponto fixo pelo Teorema da Contração.

Em relação a continuidade de u até $t = 0$, observamos que a função $t \mapsto u(t) - e^{tA}u_0$ pertence a $C([0, \delta]; X)$, enquanto a aplicação $t \mapsto e^{tA}u_0$ pertence a $C([0, \delta]; X)$ se e somente se $u_0 \in \overline{D(A)}$ (ver [12, Proposição 1.3.6]). Portanto, $u \in C([0, \delta]; X)$ se e somente se $u_0 \in \overline{D(A)}$.

Agora, vamos provar a afirmação sobre a dependência dos dados iniciais (3.3.5). Sejam $u_0, u_1 \in B(\bar{u}, r)$. Como Γ é uma contração com constante $1/2$ em Y e ambos $u(\cdot; u_0), u(\cdot; u_1)$ pertencem a Y , temos que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot; u_0) - u(\cdot; u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} &\leq \|e^{\cdot A}(u_0 - u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \\ &\quad + \int_0^\cdot \|e^{(\cdot-s)A}\|_{C_b((0, \delta]; X)} \|F(s, u(s; u_0)) - F(s, u(s; u_1))\|_{C_b((0, \delta]; X)} ds \\ &\leq \|e^{\cdot A}(u_0 - u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} + \delta M_0 L \|u(\cdot; u_0) - u(\cdot; u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \\ &\leq \|e^{\cdot A}(u_0 - u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} + (1/2) \|u(\cdot; u_0) - u(\cdot; u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(\cdot; u_0) - u(\cdot; u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \leq 2 \|e^{\cdot A}(u_0 - u_1)\|_{C_b((0, \delta]; X)} \leq 2M_0 \|u_0 - u_1\|,$$

então (3.3.5) está provada, com $K = 2M_0$. Consequentemente, o teorema está provado. $\square$

A solução máxima definida

Agora, podemos construir uma solução maximamente definida como segue. Considere o conjunto

$$\begin{cases} \tau(u_0) &= \sup\{a > 0 : \text{problema (3.3.1) tem uma solução } u_a \text{ em } [0, a]\}, \\ u(0) &= u_a(t), \text{ se } t \leq a. \end{cases}$$

Relembrando pelo teorema(3.3.1), u é bem definida no intervalo

$$I(u_0) := \cup\{[0, a]; \text{ problema (3.3.1) tem uma solução branda } u_a \text{ em } [0, a]\},$$

e nós temos $\tau(u_0) = \sup I(u_0)$

Vamos agora provar os resultados relativos à regularidade e existência na grande parte da solução.

Proposição 3.3.4. *Suponha que existe $\theta \in (0, 1)$ de modo que para cada $R > 0$, temos*

$$\|F(t, x) - F(s, x)\| \leq C(R)(t - s)^\theta, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \|x\| \leq R. \quad (3.3.9)$$

Então, para cada $u_0 \in X$, $u \in C^\theta([\epsilon, \tau(u_0) - \epsilon]; D(A)) \cap C^{1+\theta}([\epsilon, \tau(u_0) - \epsilon]; X)$. Além disso, as seguintes afirmações são verificadas.

(i) *Se $u_0 \in \overline{D(A)}$ então u é uma solução clássica de (3.3.1).*

(ii) *Se $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 + F(0, u_0) \in \overline{D(A)}$ então u é uma solução estrita de (3.3.1).*

Prova: Seja $a < \tau(u_0)$ e $0 < \epsilon < a$. Uma vez que $t \mapsto F(t, u(t))$ pertence a $C_b((0, a]; X)$, então a função $v(t) := \int_0^t e^{(t-s)A} F(s, u(s)) ds$ pertence a $C^\theta([0, a]; X)$, para todo θ (veja [12, Proposição 4.1.5]). Além disso, $t \mapsto e^{tA} u_0$ pertence a $C^\infty([\epsilon, a]; X)$. Resumindo, descobrimos que u pertence a $C^\theta([\epsilon, a]; X)$. As suposições (3.3.2) e (3.3.9) implicam que a função $t \mapsto F(t, u(t))$ pertence a $C^\theta([\epsilon, a]; X)$, tal que $\theta \in (0, 1)$. Com efeito; como u pertence a $C^\theta([\epsilon, a]; X)$, então u , em particular, é limitada. Assim, escolhemos R grande o suficiente para que qualquer valor de u esteja na bola $B(0, R)$. Daí

$$\|F(t, u(t)) - F(s, u(s))\| \leq \|F(t, u(t)) - F(s, u(t))\| + \|F(s, u(t)) - F(s, u(s))\|.$$

Note que, por (3.3.9), temos

$$\|F(t, u(t)) - F(s, u(t))\| \leq C(t - s)^\theta,$$

e por (3.3.2)

$$\|F(s, u(t)) - F(s, u(s))\| \leq L\|u(t) - u(s)\| \leq L\overline{C}(t - s)^\theta.$$

Assim, a partir dessas duas análises, concluímos

$$\|F(t, u(t)) - F(s, u(s))\| \leq C(t - s)^\theta + L\overline{C}(t - s)^\theta \leq K(t - s)^\theta,$$

onde $K = C + L\overline{C}$. Portanto, $t \mapsto F(t, u(t))$ pertence a $C^\theta([\epsilon, a]; X)$.

Agora, mostraremos que u satisfaz

$$u(t) = e^{(t-\epsilon)A} u(\epsilon) + \int_\epsilon^t e^{(t-s)A} F(s, u(s)) ds \quad \epsilon \leq t \leq a. \quad (3.3.10)$$

De fato; fixemos $t \in [\epsilon, a]$ e notemos que $t \mapsto e^{A(t-\epsilon)} u(s)$ é uma função contínua em $[\epsilon, a]$ e diferenciável em (ϵ, a) . Assim, para $s \in (\epsilon, a)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(e^{A(t-\epsilon)} u(s)) &= e^{A(t-\epsilon)} \frac{du(s)}{ds} + A e^{A(t-\epsilon)} u(s) \\ &= e^{A(t-\epsilon)} \left(\frac{du(s)}{ds} + A u(s) \right) \\ &= e^{A(t-\epsilon)} f(s, u(s)), \end{aligned}$$

disto e do fato da função $s \mapsto f(s, u(s))$ ser contínua em $[\epsilon, a]$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^t e^{A(t-s)} f(s, u(s)) ds &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon-n}^{t-n} \frac{d}{ds} (e^{A(t-\epsilon)} u(s)) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} [e^{nA} u(t-n) - e^{A(t-\epsilon+n)} u(\epsilon-n)] \\ &= u(t) - e^{(t-\epsilon)A} u(\epsilon), \end{aligned}$$

o que mostra (3.3.10).

Uma vez que u satisfaz 3.3.10 nós temos $u \in C^\theta([2\epsilon, a]; D(A)) \cap C^{1+\theta}([2\epsilon, a]; X)$ para cada $\epsilon \in (0, a/2)$, e

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t)); \quad \epsilon < t \leq a.$$

Como a e ϵ são arbitrários, então $u \in C^\theta([\epsilon, \tau(u_0) - \epsilon]; D(A)) \cap C^{1+\theta}([\epsilon, \tau(u_0) - \epsilon]; X)$ para cada $\epsilon \in (0, \tau(u_0)/2)$. Finalmente, se $u_0 \in \overline{D(A)}$, então $t \mapsto e^{tA} u_0$ é contínua até 0. Portanto, a afirmação (i) segue.

Agora provaremos (ii). Sabemos que a função v definida acima é θ -Hölder contínua até $t = 0$ com valores em X . Já que $u_0 \in D(A) \subset D_A(0, \infty)$, então pela Proposição (3.3.1) a função $t \mapsto e^{tA} u_0$ é θ -Hölder contínua até $t = 0$, também. Portanto, u é θ -Hölder contínua até $t = 0$ com valores em X , de modo que $t \mapsto F(t, u(t))$ é θ -Hölder contínua em $[0, a]$ com valores em X . O [12, Teorema 4.1.7] nos diz que para $0 < \alpha < 1$, $f \in C^\alpha([0, T]; X)$, $x \in X$, e u satisfazendo a fórmula da variação das constantes, temos que u pertence a $C^\alpha([\epsilon, T]; D(A)) \cap C^{1+\alpha}([\epsilon, T]; X)$, para cada $\epsilon \in (0, T)$ e se $x \in D(A)$ e $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$, então u é uma solução branda do problema de Cauchy não homogêneo. Portanto, a afirmação (ii) segue agora do teorema mencionado. $\square$

Proposição 3.3.5. *Seja u_0 tal que $I(u_0) \neq [0, T]$. Então $t \mapsto \|u(t)\|$ é ilimitada em $I(u_0)$.*

Prova: Assuma por contradição que u é limitada em $I(u_0)$ e defina $\tau = \tau(u_0)$. Então $t \mapsto F(t; u(t; u_0))$ é limitada e contínua com valores em X no intervalo $(0, \tau)$. Uma vez que u satisfaz a fórmula da variação das constantes (3.3.3), ela pode ser estendida continuamente até $t = \tau$ de modo que a extensão seja Hölder contínua em cada intervalo $[\epsilon, \tau]$, com $0 < \epsilon < \tau$. De fato, $t \mapsto e^{tA} u_0$ é bem definida e analítica em todo o intervalo $(0, +\infty)$, e $u - e^{tA} u_0$ pertence a $C^\alpha([0, \tau]; X)$ para cada $\alpha \in (0, 1)$.

pelo Teorema 3.3.1, o problema

$$\begin{cases} v'(t) &= Av(t) + F(t, v(t)), & t \geq \tau \\ v(\tau) &= u(\tau), \end{cases}$$

tem uma única solução branda $v \in C([\tau, \tau + \delta]; X)$ para algum $\delta > 0$. Note que v é contínua até $t = \tau$ porque $u(\tau) \in D(A)$.

A função w definida por

$$\begin{cases} w(t) = u(t), & \text{se } 0 \leq t < \tau \\ w(t) = v(t), & \text{se } \tau \leq t \leq \tau + \delta, \end{cases}$$

é uma solução branda de (3.3.1) em $[0, \tau + \delta]$. De fato; se $t \in [0, \tau)$ então

$$\begin{aligned} w(t) = u(t) &= e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, u(s))ds \\ &= e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, w(s))ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $t \in [\tau, \tau + \delta]$ então

$$\begin{aligned} w(t) = v(t) &= e^{(t-\tau)A}u_\tau + \int_\tau^t e^{(t-s)A}F(s, v(s))ds \\ &= e^{(t-\tau)A} \left[e^{\tau A}u_0 + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}F(s, u(s))ds \right] + \int_\tau^t e^{(t-s)A}F(s, v(s))ds \\ &= e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, w(s))ds. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição com a definição de τ , pois conseguimos uma solução branda de (3.3.1) que supera a solução maximal τ . $\square$

Note que a prova da Proposição 3.3.5 mostra também que se $I(u_0) \neq [0, \tau]$, então $\tau(u_0) = \sup I(u_0) \notin I(u_0)$.

Proposição 3.3.6. *Assuma que existe $C > 0$ de modo que*

$$\|F(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|) \quad x \in X, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.11)$$

Seja $u : I(u_0) \rightarrow X$ uma solução branda em (3.3.1). Então u é limitada em $I(u_0)$ com valores em X . Consequentemente, $I(u_0) = [0, T]$.

Prova: Como $u : I(u_0) \rightarrow X$ é uma solução branda de (3.3.1) temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s, u(s))ds \right\| \\ &= \|e^{tA}u_0 + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \|F(s, u(s))\|ds \\ &= M_0\|u_0\| + M_0C \int_0^t (1 + \|u(s)\|)ds \\ &= M_0\|u_0\| + M_0C \left(T + \int_0^t \|u(s)\|ds \right) \\ &= (M_0\|u_0\| + M_0CT) + (M_0C) \int_0^t \|u(s)\|ds \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall na Forma Integrável (veja Teorema 1.2.8) para a função de valores reais $t \mapsto \|u(t)\|$, obtemos

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq (M_0\|u_0\| + M_0CT)\exp\left(M_0C \int_0^t ds\right) \\ &= (M_0\|u_0\| + M_0CT)\exp(M_0Ct),\end{aligned}$$

para $t \in I(u_0)$. Portanto, temos o que queríamos. $\square$

Observe que (3.3.11) é satisfeita se F for globalmente Lipschitz contínua em relação a x , com a constante de Lipschitz independente de t .

3.3.3 Equação e Sistemas de reação-difusão

Sistemas de reação-difusão têm sido largamente estudados em diferentes contextos e através de diferentes métodos, motivados pela constante aparição em modelos de interação em contextos químicos, biológicos e ainda em fenômenos ecológicos. Diversas ferramentas são empregadas na literatura para o estudo de sistemas de equações de reação-difusão. Alguns envolvem aspectos da teoria dos operadores, outras envolvem noções como princípios de comparação e, ainda, há aquelas dedicadas ao emprego dos métodos de computação numérica. Utilizaremos aqui técnicas associadas à teoria de semigrupos de operadores.

Vamos considerar um sistema diferencial em $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Seja $d_1, d_2, \dots, d_m > 0$ e seja D a matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t(t, x) = D\Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3.12)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_m)$ é desconhecido, a função regular $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e o limitado e contínuo $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são dados.

É importante destacar que $u(t, x)$ representa a densidade ou concentração de alguma substância ou população, no tempo $t \geq 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^n$. Δ denota o laplaciano de u com respeito à variável espacial x . A parte $D\Delta u$ no sistema é chamada de *parte de difusão*, os números d_i são chamados de *coeficientes de difusão*, $f(t, x, u)$ é chamado de *parte de reação*.

Considere o conjunto

$$X = C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m).$$

O operador linear A definido por

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \quad p \geq 1 : u, \Delta u \in X\}, \\ A : D(A) \rightarrow X, \quad Au = D\Delta u, \end{cases}$$

é setorial em X e

$$\overline{D(A)} = B \cup C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m).$$

Assumimos que f é contínua, e que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que para cada $R > 0$ há $K = K(R) > 0$ tal que

$$|f(t, x, u) - f(s, x, v)|_{\mathbb{R}^m} \leq K(t - s)^\theta + |u - v|_{\mathbb{R}^m}, \quad (3.3.13)$$

para $0 \leq s < t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^m$, $|u|_{\mathbb{R}^m}, |v|_{\mathbb{R}^m} \leq R$. Além disso, assumimos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n} f(t, x, 0) < +\infty, \quad (3.3.14)$$

de modo que para cada $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ e $t \in [0, T]$ a composição está em $C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. De fato; denotemos $g(\cdot) = f(t, \cdot, \phi(\cdot))$. Como $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, então, em particular, ϕ é contínua e portanto $g(\cdot)$ é contínua, já que é uma composição de funções contínuas. Agora, fixemos s . Por (3.3.13), (3.3.14) e pelo fato de ϕ ser limitada, temos

$$\begin{aligned} |g(x)|_{\mathbb{R}^m} = |f(t, x, \phi(x))|_{\mathbb{R}^m} &\leq |f(t, x, \phi(x)) - f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} + |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq K((t - s)^\theta + |\phi(x)|_{\mathbb{R}^m}) + \sup |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq 3\bar{K}, \end{aligned}$$

onde $\bar{K} = \max \{K(t - s)^\theta, K \sup |\phi(x)|_{\mathbb{R}^m}, \sup |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m}\}$. Consequentemente, $f(t, \cdot, \phi(\cdot)) \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Então, podemos aplicar os resultados gerais da subseção (3.1).

Proposição 3.3.7. *Sob as premissas acima, para cada $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ existem um intervalo máximo $I(u_0)$ e uma solução única u para (3.3.12) em $I(u_0) \times \mathbb{R}^n$, tal que $u \in C(I(u_0) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $u_t, D_i u$, e Δu são limitadas e contínuas no intervalo $[\epsilon, \tau(u_0) - \epsilon]$ para cada $\epsilon \in (0, \tau(u_0)/2)$, onde $\tau(u_0) = \sup I(u_0)$.*

Prova: Fixando

$$F(t, \phi)(x) = f(t, x, \phi(x)), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n, \phi \in X,$$

a função $F : [0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua e satisfaz (3.3.2) e (3.3.9). De fato, fixemos qualquer $\phi_1, \phi_2 \in B(0, R) \subset X$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|\phi_1(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq R, |\phi_2(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq R$, de modo que para $0 \leq s \leq t \leq T$ obtemos de (3.3.13)

$$\begin{aligned} |F(t, \phi_1)(x) - F(s, \phi_2)(x)| &= |f(t, x, \phi_1)(x) - f(s, x, \phi_2)(x)| \\ &\leq K((t - s)^\theta + |\phi_1(x) - \phi_2(x)|_{\mathbb{R}^m}), \end{aligned}$$

o que implica

$$\|F(t, \phi_1) - F(s, \phi_2)\|_\infty \leq K((t - s)^\theta + \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty).$$

O Teorema 3.3.1 de existência local e unicidade implica que existe uma única solução branda $t \mapsto u(t) \in C_b((0, \delta]; X)$ de (3.3.1), que pode ser estendida a um intervalo de tempo máximo $I(u_0)$.

pela Proposição 3.3.4, u, u', Au são contínuas em $(0, \tau(u_0))$ com valores em X (na verdade, eles são Hölder contínuas em cada subintervalos compacto). Então a função $(t, x) \mapsto u(t, x) := u(t)(x)$ é limitada e contínua em $[0, a] \times \mathbb{R}^n$ para cada $a \in I(u_0)$ e é continuamente diferenciável em relação a t em $I(u_0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Como $D(A)$ está continuamente mergulhado em $C_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, segue-se que todas as derivadas espaciais de primeira ordem $D_i u$ são contínuas em $(0, \tau(u_0)) \times \mathbb{R}^m$ também. As derivadas espaciais de segunda ordem $D_{ij} u(t, \cdot)$ estão em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, Δu é contínua em $I(u_0) \times \mathbb{R}^n$, e u satisfaz (3.3.1). $\square$

Com relação à existência global, a Proposição 3.3.5 implica que se u é limitada em $I(u_0) \times \mathbb{R}^n$ então $I(u_0) = [0, T]$.

Uma condição suficiente para u ser limitada é dada pela Proposição 3.3.6:

$$|f(t, x, u)|_{\mathbb{R}^m} \leq C(1 + |u|_{\mathbb{R}^m}), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (3.3.15)$$

Na verdade, neste caso, a função não linear

$$F : [0, T] \times X \rightarrow X, \quad F(t, \phi)(x) = f(t, x, \phi(x))$$

satisfaz (3.3.11) para

$$\|F(t, \phi)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(t, x, \phi(x))|_{\mathbb{R}^m} \leq C(1 + \|\phi\|_\infty).$$

A estimativa (3.3.15) é satisfeita se (3.3.13) for válida com uma constante independente de R . Com efeito;

$$\begin{aligned} |f(t, x, u)|_{\mathbb{R}^m} &= |f(t, x, u) - f(s, x, 0) + f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq |f(t, x, u) - f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} + |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq K((t-s)^\theta + |u|_{\mathbb{R}^m} + \sup |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m}) \\ &\leq K|u|_{\mathbb{R}^m} + KT^\theta + \sup |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq K|u|_{\mathbb{R}^m} + \bar{C} \\ &\leq \bar{K}(1 + |u|_{\mathbb{R}^m}), \end{aligned}$$

onde $\bar{K} = \max\{K, \bar{C}\}$, tal que $\bar{C} := KT^\theta + \sup |f(s, x, 0)|_{\mathbb{R}^m}$. E mais, $\bar{K}$ não depende de R , já que K não depende.

Resultados semelhantes são válidos para sistema de reação-difusão em $[0, T] \times \bar{\Omega}$, onde Ω é um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^2 .

O caso mais simples é uma única equação,

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), & t > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

com condição de contorno de Dirichlet,

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.3.17)$$

ou condição de contorno de Neumann,

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.3.18)$$

Aqui $f : [0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função regular satisfazendo (3.3.13); $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz a condição de compatibilidade (o dado de bordo tem que ser compatível com a solução) $u_0(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$, no caso da condição de contorno de Dirichlet. Tal condição é necessária para ter u contínua até $t = 0$.

Novamente, colocamos o nosso problema no espaço $X = C(\bar{\Omega})$. Como a realização do Laplaciano em $C(\bar{\Omega})$ com condições homogêneas de Dirichlet é um operador setorial, então o problema (3.3.16) tem uma solução clássica em um intervalo de tempo máximo. Argumentando como antes, vemos que se houver $C > 0$ tal que

$$|f(t, x, u)| \leq C(1 + |u|) \quad t \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega} \quad u \in \mathbb{R}$$

então, para cada dado inicial u_0 , a solução existe globalmente. Mas essa suposição é bastante restrita e não é satisfeita em muitos modelos matemáticos. Na próxima subsubseção, veremos uma suposição mais geral que produz a existência global.

Nesta seção, até agora, escolhemos trabalhar com funções de valor real apenas, porque na maioria dos modelos matemáticos o desconhecido u tem valor real. Mas poderíamos substituir $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ por $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ e $C(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$ também sem qualquer modificação nas provas, obtendo os mesmos resultados no caso de dados de valor complexo. Ao contrário, os resultados da próxima subsubseção são válidos para funções de valor real.

O princípio máximo

Usando as propriedades bem conhecidas das derivadas de primeira e segunda ordem de funções de valor real em pontos de máximos ou de mínimos relativos, é possível encontrar estimativas nas soluções para várias equações diferenciais parciais de primeira ou segunda ordem. Essas técnicas são chamadas de *princípios máximos*.

Para começar, damos uma condição suficiente para a solução de (3.3.16) - (3.3.17) ou (3.3.16) - (3.3.18) ser limitada (e portanto, existir globalmente).

Proposição 3.3.8. *Seja Ω um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^2 , e seja $f : [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo*

$$|f(t, x, u) - f(s, x, v)| \leq K((t - s)^\theta + |u - v|),$$

para qualquer $0 \leq s < t \leq T$, qualquer $x \in \overline{\Omega}$, qualquer $u, v \in \mathbb{R}$ tal que $|u|, |v| \leq R$ e para alguma constante positiva $K = K(R)$. Assuma além disso que

$$uf(t, x, u) \leq C(1 + u^2); \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.3.19)$$

para algum $C \geq 0$. Então, para cada dado inicial u_0 , a solução para (3.3.16) - (3.3.17) ou (3.3.16) - (3.3.18) satisfaz

$$\sup_{t \in I(u_0), x \in \overline{\Omega}} |u(t, x)| < +\infty.$$

Se $C = 0$ em (3.3.19), então

$$\sup_{t \in I(u_0), x \in \overline{\Omega}} |u(t, x)| = \|u_0\|_\infty.$$

Prova: Fixe $\lambda > C$, $a < \tau(u_0)$ e o conjunto

$$v(t, x) = u(t, x)e^{-\lambda t}, \quad 0 \leq t \leq a, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

A função v satisfaz

$$\begin{aligned} v_t(t, x) &= u_t(t, x)e^{-\lambda t} - \lambda u(t, x)e^{-\lambda t} \\ &= (\Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)))e^{-\lambda t} - \lambda u(t, x)e^{-\lambda t} \\ &= \Delta(u(t, x)e^{-\lambda t}) + f(t, x, u(t, x))e^{-\lambda t} - \lambda u(t, x)e^{-\lambda t} \\ &= \Delta v(t, x) + f(t, x, e^{\lambda t}v(t, x))e^{-\lambda t} - \lambda v(t, x), \quad 0 < t \leq a, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

e satisfaz a mesma condição de contorno que u , e $v(0, \cdot) = u_0$. Como v é contínua, então existe (t_0, x_0) tal que $v(t_0, x_0) = \pm \|v\|_{C([0, a] \times \overline{\Omega})}$. (t_0, x_0) é um ponto de máximo positivo ou de mínimo negativo para v . Assuma por um instante que (t_0, x_0) é um ponto de máximo. Se $t_0 = 0$ segue que $v(0, x_0) = u_0(x_0)$ e conseqüentemente $\|v\|_\infty = \|u_0\|_\infty$. Se $t_0 > 0$ e $x_0 \in \Omega$, temos por (3.3.20)

$$v_t(t_0, x_0) = \Delta v(t_0, x_0) + f(t_0, x_0, e^{\lambda t_0}v(t_0, x_0))e^{-\lambda t_0} - \lambda v(t_0, x_0).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $v(t_0, x_0) = \|v\|_\infty$, obtemos

$$v_t(t_0, x_0)\|v\|_\infty = \Delta v(t_0, x_0)\|v\|_\infty + \|v\|_\infty f(t_0, x_0, e^{\lambda t_0}v(t_0, x_0))e^{-\lambda t_0} - \lambda \|v\|_\infty^2. \quad (3.3.21)$$

Mas $v_t(t_0, x_0) \geq 0$, $\Delta v(t_0, x_0) \leq 0$ e

$$e^{\lambda t}vf(t, x, e^{\lambda t}v) = uf(t, x, u) \leq C(1 + u^2) = C(1 + (e^{\lambda t}v)^2),$$

ou seja,

$$vf(t, x, e^{\lambda t}v) \leq e^{-\lambda t}C(1 + |e^{\lambda t}|^2|v|^2).$$

Daí, usando as informações acima em (3.3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \|v\|_\infty^2 &\leq C(1 + |e^{\lambda t_0}v(t_0, x_0)|^2)e^{-2\lambda t_0} \\ &\leq C(1 + e^{2\lambda t_0}\|v\|_\infty^2)e^{-2\lambda t_0} \\ &\leq C(e^{-2\lambda t_0} + \|v\|_\infty^2), \end{aligned}$$

isto é,

$$\|v\|_\infty^2 \leq \frac{C}{\lambda - C}.$$

Vamos considerar o caso $t_0 > 0$, $x_0 \in \partial\Omega$. Se u satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet, então $v(t_0, x_0) = 0$. Se u satisfaz a condição de fronteira de Neumann, temos que $D_i v(t_0, x_0) = 0$ para cada i , $\Delta v(t_0, x_0) \leq 0$ (Veja Proposição 3.3.3), e continuaremos como no caso $x_0 \in \Omega$.

Se (t_0, x_0) é um ponto de mínimo, a prova é semelhante. Portanto, temos

$$\|v\|_\infty \leq \max\{\|u_0\|_\infty; \sqrt{C/(\lambda - C)}\}, \quad (3.3.22)$$

de modo que

$$\|u\|_\infty \leq e^{\lambda T} \max\{\|u_0\|_\infty; \sqrt{C/(\lambda - C)}\},$$

e a primeira afirmação está provada.

Se $C = 0$, para cada $\lambda > 0$ obtemos

$$\|u\|_\infty \leq e^{\lambda T} \|u_0\|_\infty.$$

Daí, fazendo $\lambda \rightarrow 0$ acima, obtemos $\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$. Por outro lado, como $u(0, x) = u_0(x)$, ou seja, u_0 é a restrição de u em $t = 0$, temos que $\|u_0\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. Portanto, $\|u\|_\infty = \|u_0\|_\infty$, como queríamos mostrar. $\square$

Um resultado semelhante é válido se Ω for substituído por todo o espaço $\mathbb{R}^N$, mas a prova deve ser adaptada ao caso de domínio não compacto. De fato, se uma função v é limitada e contínua em $[0, a] \times \mathbb{R}^N$, ela pode não ter pontos máximo ou mínimo, em geral. Declaramos esse resultado, sem uma prova, na seguinte proposição.

Proposição 3.3.9. *Se $f : [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as suposições da Proposição 3.3.8 com Ω substituído por $\mathbb{R}^N$. Considere o problema (3.3.12) com $m = 1, d = 1$. Então, para cada dado inicial limitado e contínuo u_0 , a solução para (3.3.12) satisfaz*

$$\sup_{t \in I(u_0), x \in \mathbb{R}^N} |u(t, x)| < +\infty.$$

Se $C = 0$ em (3.3.19), então

$$\sup_{t \in I(u_0), x \in \mathbb{R}^N} |u(t, x)| = \|u\|_\infty.$$

Notemos que (3.3.15) é uma condição de crescimento no infinito, enquanto (3.3.19) é uma condição algébrica e não é uma condição de crescimento. Por exemplo, é satisfeito por $f(t, x, u) = \lambda u - u^{2k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O sinal $-$ é importante: Por exemplo, no problema

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + |u|^{1+\epsilon}, & t > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = \bar{u}, & x \in \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (3.3.23)$$

com $\epsilon > 0$ e com o dado inicial $\bar{u}$, a solução independe de x e coincide com a solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \xi'(t) = |\xi(t)|^{1+\epsilon}, & t > 0, \\ \xi(0) = \bar{u}. \end{cases} \quad (3.3.24)$$

que explode em um tempo finito se $\bar{u} > 0$.

Na prova das Proposições (3.3.8) e (3.3.8) usamos uma das propriedades da função $\phi \in D(A)$, onde A é a realização do Laplaciano em $C_b(\mathbb{R}^N)$ ou é a realização do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet ou de Neumann em $C(\overline{\Omega})$: se $x \in \Omega$ (e também se $x \in \partial\Omega$ no caso das condições de fronteira de Neumann) é um ponto de máximo relativo para ϕ , então $\Delta\phi(x) \leq 0$. Embora isso seja óbvio se $\phi \in C^2(\Omega)$, tem que ser provado se ϕ não é duas vezes diferenciável pontualmente. Fornecemos uma prova apenas para o caso de pontos interiores.

Lema 3.3.1. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, e $\phi : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Assuma que $\phi \in W^{2,p}(B(x_0, r))$ para cada $p \in [1, +\infty)$, que $\Delta\phi$ é contínua, e que x_0 é um ponto de máximo (respectivamente, ponto de mínimo) para ϕ . Então $\Delta\phi(x_0) \leq 0$ (respectivamente, $\Delta\phi(x_0) \geq 0$).*

Prova: Assuma que x_0 é um ponto de máximo. Possivelmente, substituindo ϕ por $\phi + c$, podemos assumir que $\phi(x) \geq 0$ para $|x - x_0| \leq r$. Seja $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com suporte contido em $B(x_0, r)$, de modo que $0 \leq \theta(x) \leq 1$ para cada x , $\theta(x_0) > \theta(x)$ para $x \neq x_0$, e $\Delta\theta(x_0) = 0$. Defina,

$$\bar{\phi} = \begin{cases} \phi(x)\theta(x), & x \in B(x_0, r), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B(x_0, r). \end{cases} \quad (3.3.25)$$

E $\bar{\phi}(x_0)$ é o máximo de $\bar{\phi}$, e só é obtido em $x = x_0$. Além disso, $\bar{\phi}$ e $\Delta\bar{\phi}$ são contínuas em todo o $\mathbb{R}^N$ e se anulam fora de $B(x_0, r)$, de modo que existe uma sequência $(\bar{\phi}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_b^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\bar{\phi}_n \rightarrow \bar{\phi}$, $\Delta\bar{\phi}_n \rightarrow \Delta\bar{\phi}$ uniformemente e cada $\bar{\phi}_n$ tem suporte contido na bola $B(x_0, 2r)$. Por exemplo, podemos tomar

$$\bar{\phi}_n = \eta T(1/n)\bar{\phi},$$

onde o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é definido pela fórmula de Gauss - Weierstrass

$$\begin{cases} (T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy; & t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ (T(0)f)(x) = f(x), \end{cases}$$

e η é uma função suave com suporte contido em $B(x_0, 2r)$ e igual a 1 em $B(x_0, r)$. Como x_0 é o único ponto de máximo de $\bar{\phi}$, então existe uma sequência $(x_n) \subset B(x_0, 2r)$ convergindo para x_0 quando $n \rightarrow \infty$ tal que x_n é um ponto de máximo de $\bar{\phi}_n$, para cada n . Uma vez que $\bar{\phi}_n$ é duas vezes continuamente diferenciável, temos que $\Delta\bar{\phi}_n(x_n) \leq 0$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$ temos que $\Delta\bar{\phi}(x_0) \leq 0$.

Se x_0 é um ponto de mínimo a prova é análoga. □

O princípio do máximo pode ser usado em alguns sistemas. Por exemplo, vamos considerar o caso de uma única equação, onde é conveniente fixar $a \in (0, \tau(u_0))$ e introduzir uma função $v : [0, a] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v(t, x) = u(t, x)e^{-\lambda t}$ com $\lambda > C$, que satisfaz

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \Delta v(t, x) + f(e^{\lambda t} v(t, x))e^{-\lambda t} - \lambda v(t, x), & t > 0, x \in \bar{\Omega} \\ v(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ v(0, x) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

aqui o desconhecido u é uma função avaliada por $\mathbb{R}^m$, Ω é um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^2 , $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua localmente Lipchitz tal que

$$\langle y, f(y) \rangle \leq C(1 + |y|^2), \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.3.26)$$

e u_0 é uma função contínua que se anula em $\partial\Omega$.

Em vez de $|v|$ é melhor trabalhar com $\phi(t, x) = |v(t, x)|^2 = \sum_{i=1}^m v_i(t, x)^2$, que é mais regular. Observamos que

$$\phi_t = 2\langle v_t, v \rangle, \quad D_j \phi = 2\langle D_j v, v \rangle, \quad \Delta \phi = 2 \sum_{i=1}^m |D v_i|^2 + 2\langle v, \Delta v \rangle.$$

Se $(t_0, x_0) \in (0, a] \times \omega$ é um ponto máximo positivo para ϕ (isto, para $|v|$) temos que $\phi_t(t_0, x_0) \geq 0$, $\Delta \phi(t_0, x_0) \leq 0$ e portanto, $\langle v(t_0, x_0), \Delta v(t_0, x_0) \rangle \leq 0$. Escrevendo o sistema

diferencial em (t_0, x_0) e tomando o produto interno com $v(t_0, x_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v_t(t_0, x_0), v(t_0, x_0) \rangle \\ &= \langle \Delta v(t_0, x_0), v(t_0, x_0) \rangle + \langle f(e^{\lambda t_0} v(t_0, x_0)), v(t_0, x_0) e^{-\lambda t} \rangle - \lambda |v(t_0, x_0)|^2 \\ &\leq C(1 + |v(t_0, x_0)|^2) - \lambda |v(t_0, x_0)|^2 \end{aligned}$$

ou seja, $\|v\|_\infty^2 \leq C/(\lambda - C)$. Portanto, $\|v\|_\infty \leq \max\{\|u_0\|, \sqrt{C/(\lambda - C)}\}$, e consequentemente, $\|u\|_\infty \leq e^{\lambda T} \max\{\|u_0\|, \sqrt{C/(\lambda - C)}\}$, o mesmo resultado que no caso escalar. Portanto, u existe globalmente.

O princípio do máximo também é usado para provar propriedades qualitativas das soluções, por exemplo, para provar que as soluções são não negativas para dados iniciais não negativos, ou não positivos para dados iniciais não positivos.

Considere, por exemplo, a equação do calor com a condição de contorno de Dirichlet em um conjunto aberto limitado regular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x), & t > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

com u_0 em $\partial\Omega$ e $u_0(x) \geq 0$ para cada $x \in \overline{\Omega}$. Para mostrar que $u(t, x) \geq 0$ para cada (t, x) , consideremos a função $v(t, x) := e^{-t}u(t, x)$ que satisfaz a mesma condição de contorno que u , $v(0, x) = u_0(x)$ e $v_t(t, x) = \Delta v(t, x) - v(t, x)$. Se v tem um mínimo negativo em (t_0, x_0) , então $t_0 > 0$, $x_0 \in \Omega$ e portanto $v_t(t_0, x_0) \leq 0$, $\Delta v(t_0, x_0) \geq 0$, contrariando a equação em (t_0, x_0) .

Situações mais gerais, mesmo em problemas não lineares, podem ser tratadas com o seguinte resultado da comparação.

Proposição 3.3.10. *Seja $\omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado, seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e sejam $u, v \in C([0, a] \times \overline{\Omega}) \cap ((0, a] \times \Omega)$ tal que, para cada $t \in (0, a]$, $u(t, \cdot), v(t, \cdot) \in W^{2,p}(\Omega)$ para cada $p < +\infty$ e $\Delta u(t, \cdot), \Delta v(t, \cdot) \in C(\Omega)$.*

Assuma que $u_t \geq \Delta u + f(u)$, $v_t \leq \Delta v + f(v)$ em $(0, a] \times \Omega$, que $u(0, x) \geq v(0, x)$ para $x \in \overline{\Omega}$ e que $u(t, x) \leq v(t, x)$ para $(t, x) \in (0, a] \times \partial\Omega$. então, $u(t, x) \geq v(t, x)$ em $[0, a] \times \overline{\Omega}$.

Prova: A função $w = u - v$ tem as mesmas propriedades de regularidades que u, v e satisfaz

$$w_t(t, x) \geq \Delta w(t, x) + f(u(t, x)) - f(v(t, x)) = \Delta w(t, x) + h(t, x)w(t, x)$$

em $(0, a] \times \Omega$, onde $h(t, x) = \int_0^1 f'(v(t, x) + \xi(u(t, x) - v(t, x))) d\xi$ é uma função limitada. Seja $\lambda > \|h\|_\infty$ e o conjunto $z(t, x) := e^{-\lambda t}w(t, x)$. Então, $z_t \geq \Delta z + (h - \lambda)z$ em $(0, a] \times \Omega$,

$z(0, x) \geq 0$ para qualquer $x \in \overline{\Omega}$, $z(t, x) \geq 0$ para qualquer $t > 0$, $x \in \partial\Omega$ de modo que, se z tem um mínimo negativo em (t_0, x_0) , então $t_0 > 0$, $x_0 \in \Omega$ e portanto, $z_t(t_0, x_0)$, $\Delta z(t_0, x_0) \geq 0$. Logo, temos uma contradição com a desigualdade diferencial satisfeita por z em (t_0, x_0) . Portanto, $z \geq 0$ em todos os lugares, isto é, $u \leq v$. $\square$

Finalmente, vejamos um sistema da teoria da combustão. Aqui, u e v são uma concentração e uma temperatura, respectivamente, normalizado e redimensionada. Os números $\mathcal{L}$, ϵ , q são parâmetros positivos, $\mathcal{L}\epsilon$ é chamado de número de Lewis. Ω é um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^2 . O sistema é

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(t, x) &= \mathcal{L}\epsilon\Delta u(t, x) - \epsilon u(t, x)f(v(t, x)), & t > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ v_t(t, x) &= \Delta v(t, x) + qu(t, x)f(v(t, x)), & t > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial n}u(t, x) &= 0, \quad v(t, x) = 1, & t > 0 \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), & x \in \overline{\Omega}, \end{array} \right. \quad (3.3.27)$$

f é uma função de Arrhenius

$$f(v) = e^{-h/v},$$

com $h > 0$. Os dados iniciais u_0 e v_0 são funções contínuas não negativas, com $v_0 \equiv 1$ em $\partial\Omega$. Substituindo as incógnitas (u, v) por $(u, v - 1)$, o problema (3.3.27) se reduz a um problema com condições de contorno homogêneo, que resolvemos localmente usando as técnicas acima.

As soluções fisicamente significativas são tais que $u, v \geq 0$. Usando o princípio do máximo, podemos provar que, para dados iniciais não negativos, obtemos soluções não negativas.

Vamos considerar u : se, por contradição, existe um $a > 0$ tal que a restrição de u a $[0, a] \times \overline{\Omega}$ tem um mínimo negativo, digamos em (t_0, x_0) temos que $t_0 > 0$, $x_0 \in \Omega$ e

$$0 \geq u_t(t_0, x_0) = \mathcal{L}\epsilon\Delta u(t_0, x_0) - \epsilon u(t_0, x_0)f(v(t_0, x_0)),$$

contradição. Portanto, u não pode ter valores negativos.

Para estudar o sinal de v é novamente conveniente introduzir a função $z(t, x) = e^{-\lambda t}v(t, x)$ com $\lambda > 0$. Se houver $a > 0$ tal que a restrição de z a $[0, a] \times \overline{\Omega}$ tem um mínimo negativo, digamos em (t_0, x_0) temos que $t_0 > 0$ e $x_0 \in \Omega$ e

$$0 \geq z_t(t_0, x_0) = \Delta z(t_0, x_0) - \lambda z(t_0, x_0) + qu(t_0, x_0) + f(z(t_0, x_0)e^{\lambda t_0})e^{-\lambda t_0} > 0,$$

contradição. Portanto, v não pode ter valores negativos.

Bibliografia

- [1] BARTLE, R. G.; *The Elements of Integration*. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [2] BREZIS, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer: Rio de Janeiro, 2011.
- [3] CARLA, F. F. S.; *Existência de Soluções para algumas Equações de evolução via Teoria de semigrupo analítico*. 2007. 209f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba.
- [4] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS, V. N. C.; *Introdução à Análise Funcional*. Maringá: Eduem, 2011.
- [5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS, V. N. C.; *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações*. Livro texto - Universidade Estadual de Maringá. 2016. 423f. Maringá.
- [6] CZAJA, R. M. *Differential Equations with Sectorial Operator*. [SI]: Wydawnictwo Uniwersytetu Slakigo, 2002.
- [7] ENGEL, K. J; NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.
- [8] EVANS, L. C.; *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, vol 19, 2.ed, U.S.A., 1949.
- [9] FOLLAND, G. B.; *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, 2.ed, New York, 1999.
- [10] GOLDSTEIN, J.A; *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [11] LIMA, E. L.; *Curso de análise vol 2* 11.ed, Rio de Janeiro:IMPA,2012.
- [12] LORENZI, L.; LUNARDI, A.; METAFUNE, G.; PALLARA, D. *Analytic Semigroups and Reaction- Diffusion Problems*. Internet Seminar 2004–2005.
- [13] NOLASCO, A. C; *Análise Funcional II*. Notas de Aula. São Carlos, 2012.

- [14] PAO, C.-V.; *Nonlinear parabolic and elliptic*, Plenum Press, 1992.
- [15] PAZY, A.; *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.
- [16] ROTHE, F.; *Global Solutions of Reaction - Diffusion Systems*, Lect. Notes in Math. 1072, Springer Verlag, Berlin (1983).
- [17] SILVA, F. C. F. *Existência de solução para algumas equações de evolução via teoria de semigrupo analítico*. Dissertação de Mestrado, CCT-UFCG, 2007.
- [18] KREYSZIG, E.; *Introducttory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley, 1978.
- [19] STEIN, E. M.; Shakarchi, R.; *Complex Analysis*. New Jersey: Princeton Lectures in Analysis, 2013.