UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Uma jornada aos anéis de Gorenstein

André Santana Dosea

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Cristóvão, 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Uma jornada aos anéis de Gorenstein

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

André Santana Dosea

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Dosea, André Santana
D722j Uma jornada aos aneis de Gorenstein / André Santana Dosea ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão, 2019.
180 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Anéis (Álgebra). 3. Homologia (Matemática). I. Ramos, Zaqueu Alves orient. II. Título.

CDU 5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma jornada aos anéis de Gorenstein

por

André Santana Dosea

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Fevereiro de 2019

”O que eu sou, eu sou em par. Não cheguei, não cheguei sozinho”. (Castanho - Lenine)

Agradecimentos

À Deus primeiramente, por me permitir trilhar este caminho de estudos com saúde e com o apoio das que pessoas que eu amo.

À meus pais, por todo amor (o maior do mundo) e compreensão durante as várias madrugadas de estudo. Certamente, são os maiores responsáveis por esta vitória.

À Jack, por cuidar tão bem de mim e ser responsável pela maioria dos meus almoços e jantares!

À minhas irmãs Docas e Zele, que sempre estiveram perto de mim e sei que sempre estarão. São minhas maiores inspirações!

Aos Paralamas e ao Lenine, por terem composto grande parte da trilha sonora da minha vida acadêmica até então.

À meus amigos do Módulo, que sempre estiveram comigo, mesmo estando longe. Em especial, Taís T-Rex, Gustavo, Lela, Flávia, Bolota, Renan, Jordan e Alberto.

Aos meus amigos da UFS, que compartilharam comigo momentos de estudo, regados a pizza e suco de maracujá. Em especial, aos meus parceiros Dato, Alixandre, Timóteo, Gabriel, Luquinhas Alikson, Rodrigão, Aélson, Thiagão, Guimarães e ao meu irmão de vida, Ginaldo Picareta. Este último, certamente o maior amigo que a UFS me deu!

Aos professores do departamento de Matemática da UFS. Em especial, à minha primeira orientadora, professora Giovanna, pelo incentivo aos meus estudos em Álgebra, ao professor Kalasas, pelas tardes inspiradoras de conversa em sua sala e ao professor Wilberclay, por toda amizade e incentivo desde antes da minha graduação.

Agradeço especialmente, ao meu orientador Zaqueu, desde o livro de álgebra dado a mim nos primeiros meses de graduação, até a fonte de inspiração que ele se tornou, sempre me ensinando com bastante paixão e entusiasmo pela matemática. Mesmo sendo vascaíno, é um amigo que a UFS me deu.

À minha denga, Daynara, por cuidar tão bem de mim, com tanto amor e estar sempre ao meu lado, me incentivando, sendo minha aluna, minha companheira (inclusive de pizzas) e meu amor para uma vida inteira. Te amo!

Por último, à minha filhota de três patas, Pietra. Uma anjinha que chegou nas nossas vidas e me abasteceu de amor!

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal fazer um estudo detalhado dos anéis de Gorenstein e seu papel na teoria de dualidade local. Iniciamos estudando alguns pré-requisitos como dimensão de krull de módulos, complexos de Koszul e anéis Cohen-Macaulay. Neste último tópico, estudamos com mais detalhe os anéis regulares e de interseção completa. Mostramos que todos estes anéis são Gorenstein. Caracterizamos os anéis de Gorenstein a partir do conceito de tipo de anel. Por fim, estudamos o módulo canônico, destacando seu papel na teoria de dualidade local sobre anéis Cohen-Macaulay máximos.

Palavras Chave: Anéis de Gorenstein, Homologia, Módulo Canônico.

Abstract

This work has as main goal to make a detailed study of Gorenstein rings and your role in local duality theory. At the beginning, some pre-requisites are studied like the Krull dimension of modules, Koszul Complexes and Cohen-Macaulay rings. Concerning to this last topic, we studied in more detail the regular rings and the complete intersection rings. We showed that all this rings are Gorenstein. Also, we present the characterization of Gorenstein rings in terms of the concept of type of a ring. Ultimately, we present the concept of canonical module, highlighting your role in Local Duality Theory over maximal Cohen-Macaulay modules.

Key Words: Gorenstein rings, Homology, Canonical module.

Sumário

1 Preliminares **15**

1.1 Sequências Regulares 15

1.2 Grade de um ideal e profundidade de um Módulo 19

1.3 O Teorema de Auslander-Buchsbaum 27

1.3.1 Resoluções Projetivas e módulo de Sizígias 27

1.3.2 Resoluções livres minimais e o Teorema de Auslander-Buchsbaum 29

1.4 O Teorema de Hilbert-Burch 33

1.4.1 O posto generalizado de um módulo 33

1.4.2 Ideais gerados por menores de uma matriz e o teorema de Hilbert-Burch . . 39

1.5 Dimensão de um Módulo 53

1.6 Álgebra Exterior e Complexo de Koszul 59

1.6.1 A Álgebra Exterior de um Módulo 59

1.6.2 Complexo de Koszul 63

2 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay **73**

2.1 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay 73

2.2 Anéis Regulares 82

2.2.1 Definição e propriedades. 82

2.2.2 O teorema das Sizígias de Hilbert e o teorema de Auslander-Buchsbaum-Nagata 92

2.3 Anéis de Interseção Completa 98

2.3.1 O invariante $\epsilon_1(A)$ 98

2.3.2 Ideais de interseção completa 104

3 Anéis de Gorenstein e teoria de dualidade **110**

3.1 Generalidades sobre módulos injetivos 110

3.2 Decomposição de módulos injetivos em módulos injetivos indecomponíveis 117

3.3 Anéis de Gorenstein 121

3.4 O módulo Canônico e Teoria de Dualidade 129

4 Apêndice 145

4.1 Módulos Projetivos 145

4.2 Módulos Injetivos 155

4.3 Homologia Algébrica 164

4.3.1 Noções gerais 164

4.3.2 O funtor Tor 169

4.3.3 O funtor Ext 176

Lista de símbolos

Símbolo	**Descrição**
$\mathrm{Im}(\varphi)$	imagem de um homomorfismo φ
$\ker \varphi$	núcleo de um homomorfismo φ
$Z_R(M)$	conjunto dos divisores de zero de um R-módulo M
$\mathrm{Ass}_R(M)$	conjunto dos primos associados de um A-módulo M
$\mathrm{Min}_R(M)$	conjunto dos primos associados mínimos de M
$\mathrm{Supp}_R\, M$	conjunto suporte de um R-módulo M
$\dim R$	dimensão de Krull do anel R
$\mathrm{Ann}\ M$	anulador de um módulo M
$\mu(M)$	número mínimo de geradores de um módulo M
ht I	altura de um ideal I
$I_t(\varphi)$	ideal gerado por todos os menores de ordem t da matriz φ
$\dim.\mathrm{proj}_R M$	dimensão projetiva de um R-módulo M
$\mathrm{grade}(I, M)$	grade de I em M
$\mathrm{depth}\, M$	profundidade de um R-módulo M
Soc M	Socle de um R-módulo M.

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é fazer um estudo detalhado dos anéis de Gorenstein bem como seu papel na teoria de dualidade local. Isto significa estudar todos os pré-requesitos necessários para se compreender a definição, exemplos e principais propriedades destes anéis. Assim, estudamos desde pré-requisitos homológicos como os funtores Tor e Ext, até objetos clássicos como o complexo de Koszul e os anéis Cohen-Macaulay, passando ainda por conceitos mais elementares como a dimensão de Krull e álgebra exterior de um módulo. Esta também é a razão do título deste trabalho. Uma jornada por todos estes tópicos até chegarmos nos anéis de Gorenstein, encerrando com algumas de suas contribuições à teoria de dualidade local. Utilizamos como referência principal, o livro [1] de Winfried Bruns e Jürgen Herzog. Outras referências de apoio fundamentais foram [2] e [4]. Como acontece na maioria dos tópicos mais avançados e/ou especializados, as referências para este tema são escassas. Por esta razão, um dos objetivos deste trabalho é apresentar o tema de forma clara e acessível aos estudantes que se interessem pelo mesmo.

No capítulo 1, fizemos um apanhado de vários conceitos e resultados que serão utilizados ao longo do texto. Começamos apresentando o conceito de sequência regular. Utilizando métodos homológicos, vimos que sob certas condições, toda sequência regular maximal contida num ideal I possui a mesma cardinalidade. Isto define o grade de I. Em particular, no caso local, definimos o conceito de profundidade de um módulo. Definimos ainda resoluções projetivas e dimensão projetiva de um módulo. No caso local, as resoluções livres minimais ganham destaque. Mostramos que todas possuem o mesmo comprimento e que este, também caracterizado homologicamente, coincide com a dimensão projetiva do módulo. Apresentamos o teorema de Auslander-Buchsbaum, o qual estabelece uma relação entre a profundidade e a dimensão projetiva de um módulo com a profundidade do anel base. Em seguida, definimos o posto generalizado de um módulo e o utilizamos no estudo dos ideais gerados por menores de uma matriz. Deste estudo resulta o teorema de Hilbert-Burch, o qual descreve, no ambiente noetheriano, a estrutura de ideais que possuem uma apresentação livre do tipo

$$0 \to R^n \to R^{n+1} \to I \to 0.$$

Em prol de tornar este trabalho mais autossuficiente, dedicamos uma seção sobre a dimensão de Krull de um módulo. Em particular, no caso noetheriano local, estendemos para módulos o conceito de sistema de parâmetros de um anel. Vimos que, assim como nos anéis, os sistemas de parâmetros controlam a dimensão de um módulo. Caracterizamos sequências que fazem parte de um sistema de parâmetros e deduzimos que este é o caso das sequências regulares. Este fato nos revela que a profundidade de um módulo não ultrapassa sua dimensão. Finalizamos o capítulo com uma breve discussão acerca da álgebra exterior de um módulo, necessária para introduzirmos o complexo de Koszul. Detalhamos algumas propriedades básicas deste complexo. Em especial, observamos que, no caso local, se o ideal maximal for gerado por uma sequência regular, então o complexo de Koszul associado é uma resolução livre minimal do corpo residual do anel.

No capítulo 2, estudamos os anéis e módulos Cohen-Macaulay. Apresentamos várias propriedades, as quais ilustram algumas vantagens de se trabalhar neste ambiente. Dentre tais propriedades, destacamos, por exemplo, que num anel Cohen-Macaulay, o grade e altura de um ideal são iguais. Mostramos que a propriedade de ser Cohen-Macaulay é estável por adjunção de indeterminadas e localização. Estudamos ainda dois tipos especiais de anéis Cohen-Macaulay: os anéis regulares e os anéis de interseção completa. Anéis regulares são caracterizados pela finitude de sua dimensão global. Este resultado é historicamente um dos primeiros de álgebra comutativa onde se fizeram presente os métodos homológicos. Os anéis de interseção completa, são frequentemente definidos como sendo o quociente de um anel regular local por um ideal gerado por uma sequência regular. No entanto, seguimos a abordagem apresentada em [4], onde estes anéis são definidos em termos de um invariante de um certo complexo de Koszul: o 1° desvio do anel, denotado por $\epsilon_1(A)$. Esta definição tem a vantagem de independer de sequências regulares. No caso em que o anel é da forma R/I, com R regular local, mostramos que ele é de interseção completa se, e somente se, I é gerado por uma sequência regular. Encerramos o capítulo observando que todo anel regular é de interseção completa e que a recíproca não é verdadeira.

No capítulo 3, estudamos os anéis de Gorenstein bem como seu papel na teoria de dualidade. Iniciamos o capítulo com vários resultados a respeito da dimensão injetiva de um módulo. Em particular, vimos que, no caso noetheriano local, quando tal dimensão é finita, esta coincide com a profundidade do anel base. Em seguida, mostramos que, no caso noetheriano, todo módulo se decompõe numa soma direta de módulos injetivos indecomponíveis e que tal decomposição é única num certo sentido. Apresentamos o conceito de anéis de Gorenstein e mostramos que tal conceito é estável por completamento e localização. Vimos que todo anel de interseção completa é Gorenstein mas que a recíproca não é verdadeira, a partir de um contra-exemplo. Tal contra-exemplo bem como outros dados neste capítulo se utilizam de uma importante caracterização dos anéis de Gorenstein: ser Cohen-Macaulay de tipo 1. O fecho injetivo do corpo residual de um anel R, denotado por E_R, possui um papel importante na demonstração desta caracterização, expresso no fato do funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E_R)$ ser dualizante na categoria dos módulos de comprimento finito.

Este último resultado abre caminho para o estudo da teoria de dualidade, que fizemos sobre anéis Cohen-Macaulay. Neste contexto, definimos o módulo canônico de um anel R, denotado por ω_R, e discutimos sua existência e unicidade. Vimos que um anel admite módulo canônico se, e só se, este for uma imagem homomórfica de um anel de Gorenstein. Vimos também que um anel é Gorenstein se, e somente se, este é isomorfo a seu módulo canônico. Finalizamos o capítulo mostrando que o funtor $\mathrm{Hom}_R(-\omega_R)$ é dualizante na categoria dos módulos Cohen-Macaulay máximos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, são abordados diversos tópicos que serão usados no restante do trabalho. Estabelecemos conceitos básicos como o grade de um ideal e a profundidade de um módulo. Trataremos também de teoremas clássicos como o teorema de Auslander-Buchsbaum e o teorema de Hilbert-Burch. A seção de dimensão de módulos é apresentada com o intuito de tornar este trabalho mais autossuficiente. Por fim, exploramos alguns resultados básicos associados ao complexo de Koszul.

1.1 Sequências Regulares

Seja M um R-módulo. Um elemento $r \in R$ é dito um divisor de zero de M se $rm = 0$ para algum $m \neq 0$ em M. O conjunto dos divisores de zero de M é denotado por $Z(M)$. Os elementos de R que não são divisores de zero de M são chamados elementos regulares de M, ou simplesmente, elementos M-regulares. Assim, um elemento $r \in R$ é M-regular se, e somente se, a multiplicação por r é um morfismo injetor em M.

Definição 1.1.1. Seja M um R-módulo. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ de elementos de R é dita M-*regular* ou M-sequência se valem as condições abaixo:

(a) x_i é um elemento $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$-regular, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

(b) $\mathbf{x}M \neq M$.

Toda sequência que satisfizer a condição (a) é dita M-*regular fraca*.

Exemplo 1.1.2. Seja $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Então, a sequência $X = X_1, \dots, X_n$ é R-regular.

Exemplo 1.1.3. Seja $R = k[X, Y, Z]$. Então, a sequência $\boldsymbol{\alpha} = X, Y(1 - X), Z(1 - X)$ é R-regular. De fato, começamos observando que X é um elemento regular de R, pois este é um domínio. Para checar a regularidade de $Y(1-X)$ sobre o R-módulo $R/(X)$, suponha que $f \in R$ é tal que

$$Y(1-X)f \in (X).$$

Devemos provar que $f \in (X)$. Ora, sendo (X) ideal primo de R, concluímos que $f \in (X)$. Por fim, para verificar a regularidade de $Z(1-X)$ sobre $R/(X, Y(1-X))$, suponha que $g \in R$ é tal que

$$Z(1-X)g \in (X, Y(1-X)).$$

Como $(X, Y(1-X)) = (X, Y)$ é ideal primo de R, segue que $g \in (X, Y(1-X))$.

Proposição 1.1.4. *Sejam* M *um* R*-módulo,* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *uma sequência em* R *e* N *um* R*-módulo plano. Se* $\mathbf{x}$ *é* M*-regular fraca, então* x *é* $(M \otimes N)$*-regular fraca. Além disso, se* $\varphi : R \to S$ *é um morfismo de anéis e* N *é um* S*-módulo que é* R*-plano com a multiplicação induzida por* φ*, então* $\varphi(\mathbf{x}) \subset S$ *é uma sequência* $(M \otimes N)$*-regular fraca.*

Prova. Denotando por φ_{x_1} a multiplicação por x_1 em M, temos por hipótese que φ_{x_1} é injetora. Logo, como N é plano, segue que $\varphi_{x_1} \otimes \mathrm{id}_N : M \otimes N \to M \otimes N$ é injetora. Uma vez que $\varphi_{x_1} \otimes \mathrm{id}_N$ é a multiplicação por x_1 em $M \otimes N$, concluímos que x_1 é um elemento $(M \otimes N)$-regular.

Analogamente, denotando por φ_{x_2} a multiplicação por x_2 em M/x_1M, temos que φ_{x_2} é injetiva. Mais uma vez, a planitude de N implica que

$$\varphi_{x_2} \otimes \mathrm{id}_N : (M/x_1M) \otimes N \to (M/x_1M) \otimes N$$

é injetora. Considere o isomorfismo canônico

$$f : (M/x_1M) \otimes N \to (M \otimes N)/x_1(M \otimes N), \quad \overline{m} \otimes n \mapsto \overline{m \otimes n}.$$

Sendo $\psi_{x_2} : (M \otimes N)/x_1(M \otimes N) \to (M \otimes N)/x_1(M \otimes N)$ a multiplicação por x_2, temos o diagrama comutativo abaixo :

$$\begin{tikzcd}
(M/x_1M) \otimes N \arrow[r, "\varphi_{x_2} \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "f"] & (M/x_1M) \otimes N \arrow[d, "f"] \\
(M \otimes N)/x_1(M \otimes N) \arrow[r, "\psi_{x_2}"] & (M \otimes N)/x_1(M \otimes N)
\end{tikzcd}$$

Logo, x_2 é $(M \otimes N)/x_1(M \otimes N)$-regular.

Procedendo indutivamente, concluímos que $\mathbf{x}$ é $(M \otimes N)$-regular fraca.

Para a segunda parte da proposição, note que dado $r \in R$, temos $rn = \varphi(r)n$. Assim, a ação de x em N equivale a ação de $\varphi(\mathbf{x})$ em N. Deste modo, pela estrutura de S-módulo concebida a

$M \otimes N$, o resultado é imediato. $\square$

Corolário 1.1.5. *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $\mathbf{x}$ uma sequência M-regular. Se $p \in \text{Supp } M$ é tal que $\mathbf{x} \subset p$, então $\mathbf{x}$ é M_p-regular.*

Prova. Sabemos que M_p é um R_p-módulo finitamente gerado e não-nulo. Ademais, também temos $M_p \simeq M \otimes R_p$. Sendo $\varphi : R \to R_p$ o mapa de localização e usando o fato de que R_p é um R-módulo plano, obtemos pela segunda parte da proposição anterior que $\varphi(\mathbf{x})$ é M_p-regular fraca. Pelo lema de Nakayama, $M_p \neq (pR_p)M_p$. Em particular, $M_p \neq \varphi(\mathbf{x})M_p$. Logo, $\varphi(\mathbf{x})$ é M_p-regular. $\square$

Proposição 1.1.6. *Sejam M um R-módulo e $\mathbf{x}$ uma sequência M-regular fraca. Dada uma sequência exata de R-módulos*

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

obtemos a sequência exata induzida

$$N_2/\mathbf{x}N_2 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} N_1/\mathbf{x}N_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} N_0/\mathbf{x}N_0 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_0} M/\mathbf{x}M \to 0.$$

Prova. Faremos indução no comprimento da sequência $\mathbf{x}$. Assim, começamos supondo que x é um elemento M-regular. Como $\_ \otimes (R/(x))$ é um funtor exato à direita, basta provarmos que $\text{Im } \tilde{\varphi}_2 = \ker \tilde{\varphi}_1$. A inclusão $\text{Im } \tilde{\varphi}_2 \subset \ker \tilde{\varphi}_1$ é imediata. Para a inclusão reversa, seja $\overline{n_1} \in \ker \tilde{\varphi}_1$. Assim, $\overline{\varphi_1(n_1)} = 0$ em N_0/xN_0. Logo, existe $n_0 \in N_0$ tal que $\varphi_1(n_1) = xn_0$. Por outro lado, como $\text{Im } \varphi_1 = \ker \varphi_0$, concluímos que $x\varphi_0(n_0) = 0$. Uma vez que x é M-regular, segue que $n_0 \in \ker \varphi_0 = \text{Im } \varphi_1$.

Assim, existe $\hat{n}_1 \in N_1$ tal que $n_0 = \varphi_1(\hat{n}_1)$. Consequentemente, obtemos $\varphi_1(n_1) = x\varphi_1(\hat{n}_1)$, donde $n_1 - x\hat{n}_1 \in \ker \varphi_1 = \text{Im } \varphi_2$. Sendo $n_2 \in N_2$ tal que $n_1 - x\hat{n}_1 = \varphi_2(n_2)$, concluímos finalmente que, em N_1/xN_1, vale

$$\overline{n_1} = \tilde{\varphi}_2(\overline{n_2}).$$

Isto prova que $\ker \tilde{\varphi}_1 \subset \text{Im } \tilde{\varphi}_2$.

Suponha o resultado válido para sequências regulares com $n-1$ elementos e seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência M-regular. Aplicando a hipótese indutiva à sequência M-regular $\overline{\mathbf{x}} = x_1, \ldots, x_{n-1}$, obtemos a sequência exata

$$N_2/\overline{\mathbf{x}}N_2 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} N_1/\overline{\mathbf{x}}N_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} N_0/\overline{\mathbf{x}}N_0 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_0} M/\overline{\mathbf{x}}M \to 0.$$

Por outro lado, sendo x_n elemento $M/\overline{\mathbf{x}}M$-regular, usando o isomorfismo

$$\frac{(N_i/\overline{\mathbf{x}}N_i)}{x_n(N_i/\overline{\mathbf{x}}N_i)} \simeq N_i/\mathbf{x}N_i$$

obtemos a sequência exata desejada. □

Corolário 1.1.7. *Sejam* R *um anel e*

$$\cdots \to N_i \xrightarrow{\varphi_i} N_{i-1} \to \cdots \to N_0 \to N_{-1} \to 0$$

um complexo exato de R*-módulos. Se* $\mathbf{x} \subset R$ *for uma sequência* N_i*-regular fraca para todo* i*, então o complexo induzido*

$$\cdots \to N_i/\mathbf{x}N_i \to N_{i-1}/\mathbf{x}N_{i-1} \to \cdots \to N_0/\mathbf{x}N_0 \to N_{-1}/\mathbf{x}N_{-1} \to 0$$

é exato.

Prova. Pela proposição anterior, temos que

$$N_2/\mathbf{x}N_2 \to N_1/\mathbf{x}N_1 \to N_0/\mathbf{x}N_0 \to N_{-1}/\mathbf{x}N_{-1}$$

é exata. Por outro lado, como $\mathbf{x}$ é N_0-regular, $\mathbf{x}$ é também $(\operatorname{Im}\varphi_1)$-regular. Assim, usando a proposição anterior à sequência

$$N_3 \to N_2 \to N_1 \to \operatorname{Im}\varphi_1 \to 0$$

obtemos a sequência exata induzida

$$N_3/\mathbf{x}N_3 \to N_2/\mathbf{x}N_2 \to N_1/\mathbf{x}N_1 \to \operatorname{Im}\varphi_1/\mathbf{x}\operatorname{Im}\varphi_1.$$

Iterando o argumento acima, obtemos o resultado desejado. □

A ordem dos termos de uma sequência regular, quando alterada, pode não mais produzir uma nova sequência regular. O exemplo abaixo ilustra este fenômeno.

Exemplo 1.1.8. Seja $R = k[X, Y, Z]$ e consideremos a sequência $\boldsymbol{\alpha} = X, Y(1-X), Z(1-X)$. Vimos no Exemplo 1.1.3 que α é R-regular. Por outro lado, a sequência $\boldsymbol{\beta} = Y(1-X), Z(1-X), X$, obtida de $\boldsymbol{\alpha}$ por reordenação de seus termos, não é uma R-sequência, uma vez que $Z(1-X)$ é divisor de zero em $R/(Y(1-X))$, já que $Z(1-X).Y \in (Y(1-X))$ e $Y \notin (Y(1-X))$.

O mau comportamento ilustrado no exemplo anterior desaparece sob certas hipóteses, como veremos no teorema a seguir. Antes, porém, é interessante observar que em uma R-sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$, temos sempre que x_1 é (R/x_2R)-regular. De fato, suponha que $y \in R$ é tal que $x_1y \in (x_2)$. Assim, podemos escrever $x_1y = x_2z$, para algum $h \in R$. Da regularidade de x_2 em

R/x_1R, concluímos que $z = x_1h$. Logo, $x_1y = x_1x_2h$, donde $y = x_2h$, pela regularidade de x_1 em R.

Proposição 1.1.9. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local,* M *um* R*-módulo finitamente gerado e* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *uma* M*-sequência. Então, toda permutação de* $\mathbf{x}$ *também é uma* M*-sequência.*

Prova. Faremos indução no comprimento n da sequência. O caso $n = 1$ é trivial. Suponha o resultado válido até $n - 1$. Uma vez que toda permutação é uma composição de transposições de elementos adjacentes, é suficiente mostrar que $x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n$ é M-regular, para cada $i = 1, \ldots, n-1$.

Suponha inicialmente $i > 1$. Assim, $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ é uma sequência $(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$-regular com no máximo $n - 1$ elementos. Por hipótese de indução, $x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n$ também é uma sequência $(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$-regular. Assim, $x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n$ é M-regular.

Para o caso $i = 1$, temos que analisar a regularidade da sequência $x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n$. Já observamos que x_1 é (M/x_2M)-regular. Portanto, basta provar que x_2 é M-regular. Para tal, denote por K o núcleo da multiplicação por x_2 em M. Queremos provar que $K = 0$. Dado $z \in K$, temos $x_2z = 0$. Logo, $z = x_1m$, para algum $m \in M$, já que x_2 é M/x_1M-regular. Daí, $x_1x_2m = 0$. Assim, $x_2m = 0$, ou seja, $m \in K$. Isto mostra que $K = x_1K$. Como $\mathbf{x}$ é M-regular, x_1 não é invertível, e portanto $x_1 \in \mathfrak{m}$. Logo, segue do lema de Nakayama que $K = 0$. $\square$

1.2 Grade de um ideal e profundidade de um Módulo

Sejam M um R-módulo e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma M-sequência. Observe que não se pode ter $x_2 \in (x_1)$. De fato, se este fosse o caso, então uma vez que $\mathbf{x}M \neq M$, poderíamos escolher um elemento $m \in M \setminus x_1M$ e para tal elemento teríamos a igualdade $x_2\overline{m} = 0$ em M/x_1M, contrariando a regularidade de $\mathbf{x}$. Iterando este raciocínio, concluímos que a sequência regular $\mathbf{x}$ induz a cadeia de ideais $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n)$ com todas as inclusões sendo próprias. Em particular, caso R seja noetheriano, não se pode estender uma sequência M-sequência indefinidamente.

Podemos colocar a discussão acima em termos mais precisos a partir da definição abaixo.

Definição 1.2.1. Seja M um R-módulo. Uma sequência M-regular $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é dita *maximal* se não existe $y \in R - \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $x_1, \ldots, x_n, y$ seja M-regular. Além disso, se I é ideal de R tal que $\mathbf{x} \subset I$, dizemos que $\mathbf{x}$ é uma M- *sequência maximal em* I se não houver $y \in I - \{x_1, \ldots, x_n\}$ com $x_1, \ldots, x_n, y$ sendo uma sequência M-regular.

Resulta da discussão acima que, se R for noetheriano, toda sequência M-regular se estende a uma sequência M-regular maximal.

Exemplo 1.2.2. Seja $R = k[X, Y, Z]$ e $I = (XY, XZ, YZ)$. Pode-se verificar que

$$I = (X, Y) \cap (X, Z) \cap (Y, Z) \tag{1.1}$$

é uma decomposição primária de I. Deste modo, sendo $M = R/I$, temos que

$$\operatorname{Ass} M = \{(X, Y), (X, Z), (Y, Z)\}.$$

Em particular, $X + Y + Z$ é um elemento M-regular. Agora considere o ideal $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$. Afirmamos que $X + Y + Z$ é uma M-sequência maximal em $\mathfrak{m}$. De fato, uma vez que

$$M/(X+Y+Z)M \simeq \frac{K[X, Y, Z]}{(XY, XZ, YZ, X+Y+Z)},$$

para qualquer $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/(X+Y+Z)M)$, deve-se ter $\mathfrak{p} \supset (X+Y+Z, XY, XZ, YZ)$. Consequentemente, da igualdade (1.1), concluímos que $\mathfrak{p}$ deve conter um dos seguintes ideais:

$$(X+Y+Z, X, Y) \text{ ou } (X+Y+Z, X, Z) \text{ ou } (X+Y+Z, Y, Z).$$

Ora, mas cada um destes ideais é igual a $\mathfrak{m}$. Desta forma, $\mathfrak{m}$ é o único primo associado do R-módulo $M/(X+Y+Z)M$. Em particular, todo elemento de $\mathfrak{m}$ é divisor de zero de $M/(X+Y+Z)M$, donde se conclui que $X + Y + Z$ é uma sequência M-regular maximal em $\mathfrak{m}$.

É natural nos perguntar se toda sequência M-regular maximal possui a mesma cardinalidade. O exemplo seguinte nos adverte que este não é o caso em geral.

Exemplo 1.2.3. Seja $R = k[\![X]\!][Y]$. Afirmamos que $\mathbf{x} = X, Y$ e $\mathbf{y} = 1 - XY$ são duas R-sequências maximais. A regularidade da primeira sequência segue do fato de R ser domínio e (X) ser ideal primo de R. Ademais, como

$$k[\![X]\!][Y](X, Y) \simeq k[\![X]\!]/(X) \simeq k,$$

concluímos que (X, Y) é ideal maximal de R e, portanto X, Y é R-sequência maximal. Quanto a segunda, como $1 - XY$ é um elemento regular em R, basta provar que $(1 - XY)$ é ideal maximal de R. Para isto, recorde que, em geral, dado um anel A e $h \in A$ não-nulo, o anel de frações A_h é isomorfo ao quociente $A[Y]/(1 - hY)$. Deste modo, temos no nosso caso o isomorfismo abaixo:

$$k[\![X]\!][Y]/(1 - XY) \simeq k[\![X]\!]_X$$

Uma vez que $k[\![X]\!]_X$ é o anel das séries de Laurent, o qual coincide (a menos de isomorfismo) com

$\mathrm{Frac}(k[\![X]\!])$, obtemos o resultado desejado.

O teorema seguinte é o primeiro passo na direção de mostrar que, sob boas condições, toda M-sequência maximal possui a mesma cardinalidade.

Teorema 1.2.4. *Considere* R*-módulos* M *e* N *e seja* $I = \mathrm{Ann}\, N$.

(i) *Se* I *contém um elemento* M*-regular, então* $\mathrm{Hom}_R(N, M) = 0$.

(ii) *Se* M, N *são finitamente gerados e* R *é noetheriano, então a igualdade* $\mathrm{Hom}_R(N, M) = 0$ *implica que* I *contém um elemento* M*-regular.*

Prova. (i) Seja $a \in I$ um elemento M-regular. Dado $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ e $n \in N$, temos:

$$0 = f(an) = af(n).$$

Logo, a regularidade de a implica que $f(n) = 0$, donde $f = 0$.

(ii) Suponha que I não contém elemento M-regular algum. Assim, $I \subset Z(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}\, M} p$. Uma vez que tal união é finita, segue do lema da esquiva que existe $p \in \mathrm{Ass}\, M$ tal que $I \subset p$. Assim, $p \in V(\mathrm{Ann}\, N)$. Sendo N finitamente gerado, $V(\mathrm{Ann}\, N) = \mathrm{Supp}\, N$, donde $p \in \mathrm{Supp}\, N$.

Uma vez que devemos mostrar que $\mathrm{Hom}_R(N, M) \neq 0$, o isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{R_p}(N_p, M_p) \simeq (\mathrm{Hom}_R(N, M))_p$$

reconduz nosso objetivo ao de provar que $\mathrm{Hom}_{R_p}(N_p, M_p) \neq 0$.

Como $pR_p \in \mathrm{Ass}_{R_p} M_p$, temos um morfismo injetor $f : R_p/pR_p \to M_p$. Denotemos o corpo residual R_p/pR_p por $\kappa(p)$. Pelo fato de que $p \in \mathrm{Supp}\ N$, concluímos a partir do lema de Nakayama que $N_p/(pR_p)N_p \neq 0$. Assim, $N_p/(pR_p)N_p \neq 0$ é um $\kappa(p)$-espaço vetorial não nulo de dimensão finita, digamos

$$N_p/(pR_p)N_p \simeq (\kappa(p))^n.$$

Compondo projeções, obtemos um morfismo sobrejetor $g : N_p \to \kappa(p)$, o que nos dá o morfismo não nulo $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{R_p}(N_p, M_p)$. □

Voltando a situação preliminar, reconsideremos M um R-módulo finitamente gerado com R anel noetheriano e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma M-sequência maximal num ideal $I \subset R$. Pelo item (i) do teorema anterior, concluímos que $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/(x_1, \ldots, x_j)M) = 0$, para $j = 1, \ldots, n-1$. O que ocorre com $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{x}M)$? Caso ele se anule, o item (ii) garante a existência de um elemento $x_{n+1} \in I$ com a propriedade de ser $(M/\mathbf{x}M)$-regular. Adicionando a condição $IM \neq M$, poderemos também garantir que $(x_1, \ldots, x_{n+1})M \neq M$, mas isto contraria a maximalidade de $\mathbf{x}$.

Vamos resumir esta discussão no corolário seguinte.

Corolário 1.2.5. *Sejam* M *um* R*-módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano* R*,* I *ideal de* R *com* $IM \neq M$ *e* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *uma* M*-sequência maximal em* I*. Então:*

$$n = \min\{i;\ \mathrm{Hom}_R\,(R/I, M/(x_1, \ldots, x_i)M) \neq 0\}.$$

Para estabelecer a invariância da cardinalidade de M-sequências maximais na situação do corolário anterior, devemos tentar "expressar"o R-módulo $\mathrm{Hom}_R\,(R/I, M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ exclusivamente em termos de I e M. Disto trata o teorema seguinte, na qual as ferramentas homológicas se põem em relevo.

Teorema 1.2.6. *Sejam* M, N R*-módulos e* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *uma* M*-sequência com* $\mathbf{x} \subset \mathrm{Ann}\, N$*. Então:*

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(N, M).$$

Prova. Façamos indução sobre n. O caso $n = 0$ é trivial. Suponha o resultado válido para $n - 1$. Assim, $\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M) \simeq \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M)$, com $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por outro lado, uma vez que x_n é um elemento $(M/\mathbf{x}'M)$-regular e pertence a $\mathrm{Ann}\, N$, temos $\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M) = 0$. Assim, $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M) = 0$.

Sendo x_1 elemento M-regular, obtemos a sequência exata curta

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot x_1} M \xrightarrow{\pi} M/x_1M \to 0$$

a qual induz a sequência exata.

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^{n-1}\,(N, M/x_1M) \to \mathrm{Ext}_R^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_R^n(N, M) \tag{1.2}$$

Afirmação 1: Basta provar que φ é a multiplicação por x_1.

Supondo que este é o caso, notemos que φ será a aplicação nula. De fato, tomando uma resolução injetiva deletada $I^\bullet$ de M, formamos o complexo:

$$\mathrm{Hom}_R(N, I^\bullet) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(N, I^0) \xrightarrow{f^0} \mathrm{Hom}_R(N, I^1) \xrightarrow{f^1} \cdots$$

Assim:

$$\mathrm{Ext}_R^n(N, M) = H^n(\mathrm{Hom}_R(N, I^\bullet)) = \ker f^n / \operatorname{Im} f^{n-1} \subset \mathrm{Hom}_R(N, I^n)/\operatorname{Im} f^{n-1}.$$

Logo, dado $\overline{T} \in \mathrm{Ext}_R^n(N, M)$, com $T \in \ker f^n \subset \mathrm{Hom}_R(N, I^n)$, concluímos que $\varphi(\overline{T}) = x_1\overline{T} = 0$ já que $x_1 \in \mathrm{Ann}\, N$.

A exatidão de (1.2) implica que $\mathrm{Ext}_R^{n-1}\,(N, M/x_1M) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(N, M)$.

Por hipótese de indução, como $x_2, \dots, x_n$ é uma (M/x_1M)-sequência, concluímos que

$$\operatorname{Ext}^1_R(N, M/x_1M) \simeq \operatorname{Hom}_R((M/x_1M)/(x_2,\dots,x_n)(M/x_1M)) \simeq \operatorname{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M).$$

Afirmação 2: φ é a multiplicação por x_1.

De fato, tomando uma resolução projetiva deletada $P_\bullet : \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ de N, obtemos os cocomplexos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(P_0, M) \arrow[r, ".x_1"] \arrow[d, "f^0"] & \operatorname{Hom}_R(P_0, M) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(P_1, M) \arrow[r, ".x_1"] \arrow[d, "f^1"] & \operatorname{Hom}_R(P_1, M) \arrow[d] \\
 & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Sendo φ o morfismo induzido entre as n-ésimas cohomologias dos cocomplexos acima, conclui-se que φ é a multiplicação por x_1. □

Teorema 1.2.7. *Sejam* R *um anel noetheriano,* M *um* R*-módulo finitamente gerado e* I *ideal de* R *satisfazendo* $M \neq IM$*. Se* $x = x_1, \dots, x_n$ *é uma* M*-sequência maximal em* I*, então :*

$$n = \min\left\{i; \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\right\}.$$

Em particular, todas as M*-sequências maximais em* I *possuem a mesma cardinalidade.*

Prova. Basta tomar $N = R/I$ no teorema anterior e usar Corolário 1.2.5. □

Definição 1.2.8. Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $I \subset R$ ideal cumprindo $IM \neq M$. Definimos

$$\operatorname{grade}(I, M) = \min\left\{i; \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\right\} = \text{comprimento comum das } M\text{-sequências maximais em } I.$$

No caso em que $(R, \mathfrak{m})$ é anel local, o valor $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M)$ é dito ser a *profundidade* de M, a qual será denotada por $\operatorname{depth} M$.

Encerramos a discussão do caso $IM \neq M$. Complementamos agora analisando o caso $IM = M$.

Proposição 1.2.9. *Seja* M *um* R*-módulo finitamente gerado com* R *noetheriano. Dado um ideal* $I \subset R$*, temos:*

$$IM = M \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) = 0, \textit{ para todo } i \geqslant 0.$$

Prova. Se $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$, para todo $i \geqslant 0$, então, em particular

$$0 = \operatorname{Ext}_R^0(R/I, M) = \operatorname{Hom}_R(R/I, M).$$

Assim, pelo item ii) do Teorema 1.2.4, I contém um elemento M-regular. Desta forma, se $I \neq IM$, teríamos, pelo Teorema 1.2.7,

$$\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0$$

para algum $i > 0$, o que é um absurdo.

Reciprocamente, supondo $IM = M$, temos $M/IM \simeq M \otimes R/I = 0$, o que implica que

$$\operatorname{Supp}(M \otimes R/I) = \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}(R/I) = \emptyset.$$

Uma vez que

$$\operatorname{Ext}_{R_p}^i\left((R/I)_p, M_p\right) \simeq \operatorname{Ext}_R^i(R/I, M)_p$$

segue que $\operatorname{Supp}\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \subset \operatorname{Supp}(R/I) \cap \operatorname{Supp} M = \emptyset$. Deste modo, $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$ para todo $i \geqslant 0$. $\square$

À luz da proposição acima, a convenção $\operatorname{grade}(I, M) = \infty$ quando $IM = M$ é consistente.

Exemplo 1.2.10. Seja $R = k[X, Y, Z]$ e $I = (XY, XZ, YZ)$. Vamos calcular $\operatorname{grade}(I, R)$. Inicialmente, note que XY é um elemento R-regular pois R é um domínio. Observe agora que

$$(XY) = (X) \cap (Y)$$

é uma decomposição primária do ideal (XY). Assim,

$$\operatorname{Ass}(R/(XY)) = (X) \cup (Y).$$

Em particular, $XZ + YZ \notin \operatorname{Ass}(R/(XY))$. Portanto, $\mathbf{x} = XY, XZ + YZ$ é uma sequência R-regular em I. Por fim, afirmamos que $\mathbf{x}$ é uma R-sequência maximal em I. Com efeito, seja

$$J = (XY, XZ + YZ).$$

Claramente $Y \notin J$. Além disso, $XY.Y \in J$, $XZ.Y \in J$ e

$$Y.YZ = Y(XZ + YZ) - XY.Z \in J.$$

Desta forma, dado um elemento $f \in I$, tem-se $f.Y \in J$, com $Y \notin J$. Em outras palavaras, todo elemento de I é um divisor de zero de

$$R/J = R/(XY, XZ + YZ).$$

Assim, **x** é uma R-sequencia maximal em I, donde $\operatorname{grade}(I, R) = 2$.

O próximo resultado coleta o comportamento do grade sob uma sequência exata de módulos.

Proposição 1.2.11. *Sejam R noetheriano, $I \subset R$ ideal e $0 \to U \to M \to N \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então:*

(a) $\operatorname{grade}(I, M) \geqslant \min\{\operatorname{grade}(I, U), \operatorname{grade}(I, N)\}$.

(b) $\operatorname{grade}(I, U) \geqslant \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, N) + 1\}$.

(c) $\operatorname{grade}(I, N) \geqslant \min\{\operatorname{grade}(I, U) - 1, \operatorname{grade}(I, M)\}$.

Prova. Consideremos a sequência exata longa

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, N) \to \operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, U) \to \operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, M) \to \operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, N) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(R/I, U) \to \cdots$$

(a) Se $\operatorname{grade}(I, M) = \infty$, não há o que fazer. Caso contrário, seja $i = \operatorname{grade}(I, M)$. Suponha que

$$\operatorname{grade}(I, M) < \min\{\operatorname{grade}(I, U), \operatorname{grade}(I, N)\}.$$

Em particular, $\operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, U) = 0$. Assim, da exatidão da sequência

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, M) \to \operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, N),$$

concluímos que $\operatorname{Ext}_R^{i}(R/I, N) \neq 0$, o que é um absurdo.

Os demais itens são provados de forma análoga. $\square$

Teorema 1.2.12. *Sejam R noetheriano, I, J ideais de R e M um R-módulo finitamente gerado. Então:*

(a) $\operatorname{grade}(I, M) = \inf\{\operatorname{depth} M_p, p \in V(I)\}$.

(b) $\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(\operatorname{rad} I, M)$.

(c) $\operatorname{grade}(I \cap J, M) = \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(J, M)\}$.

(d) *Se* $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ *é uma* M*-sequência em* I*, então*

$$\text{grade } (I/(\mathbf{x}), M/\mathbf{x}M) = \text{grade } (I, M/\mathbf{x}M) = \text{grade } (I, M) - n.$$

(e) *Se* N *for* R*-módulo finitamente gerado com* Supp $N = V(I)$*, então*

$$\text{grade } (I, M) = \inf\{i; \operatorname{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}.$$

Prova. (a) Suponha inicialmente que grade $(I, M) = \infty$. Neste caso, $M = IM$ e consequentemente Supp $M \cap V(I) = \emptyset$. Deste modo, $M_p = 0$, para todo $p \in V(I)$, o que implica em depth $M_p = \infty$ para todo $p \in V(I)$.

Suponha agora que grade $(I, M) < \infty$.

Afirmação 1: grade $(I, M) \leqslant \inf\{\text{depth } M_p, p \in V(I)\}$.

Ora, dado $p \in V(I)$, é evidente que grade $(I, M) \leqslant$ grade (p, M). Por outro lado, grade $(p, M) \leqslant$ depth M_p . Isto é evidente se $M_p = 0$. No caso em que $M_p \neq 0$, temos que $p \in$ Supp M e assim, dado uma M-sequência $\mathbf{x}$ em p, sua imagem em pR_p é uma M_p- sequência, conforme o Corolário 1.1.5. Isto justifica a desigualdade acima.

Afirmação 2: Existe $p \in V(I)$ tal que grade $(I, M) =$ depth M_p.

Tome $\mathbf{x}$ uma M-sequência maximal em I. Assim,

$$I \subset Z\,(M/\mathbf{x}M) = \bigcup_{p \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)} p$$

donde $I \subset p$, para algum $p \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)$. Ora, uma vez que $p \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)$, segue que $p \in$ Supp M. Desta forma, denotando por $\mathbf{x}_p$ a imagem de $\mathbf{x}$ em pR_p, segue que $\mathbf{x}_p$ é uma M_p-sequência. Além disso, uma vez que $(M/\mathbf{x}M)_p \simeq M_p/\mathbf{x}_p M_p$ e pR_p é um primo associado de $(M/\mathbf{x}M)_p$, concluímos que $pR_p \subset Z\,(M_p/\mathbf{x}_p M_p)$. Assim, $\mathbf{x}_p$ é uma M_p- sequência maximal em pR_p, donde depth $M_p =$ grade (I, M).

(b) Segue do item (a) e do fato de que $V(I) = V(\operatorname{rad} I)$.

(c) Segue do item (a) e do fato de que $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(d) A ação de um elemento de I sobre $M/\mathbf{x}M$ é equivalente à ação de sua imagem em $I/(\mathbf{x})$ sobre $M/\mathbf{x}M$. Isto conclui a primeira igualdade. Para a segunda, basta estender $\mathbf{x}$ a uma M-sequência maximal em I, digamos $\mathbf{x}' = \mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_s$, e observar que $x_{n+1}, \dots, x_s$ é uma $M/\mathbf{x}M$-sequência maximal em I.

(e) Temos $V(I) = \text{Supp}\,(N) = V(\text{Ann}\,N)$, o que implica que $\text{rad}\,I = \text{rad}\,(\text{Ann}\,N)$. Logo, pelo item (b), obtemos:

$$\text{grade}\,(I, M) = \text{grade}\,(\text{Ann}\ N, M) = \inf\{i, \text{Ext}^i_R(N, M) \neq 0\}.$$

$\square$

1.3 O Teorema de Auslander-Buchsbaum

Nesta seção, estudaremos resoluções projetivas de um módulo e veremos, em particular, o conceito de dimensão projetiva. No caso noetheriano local, estudaremos uma resolução projetiva especial e veremos como ela controla a dimensão projetiva. Por fim, apresentaremos o teorema de Auslander-Buchsbaum, o qual estabelece uma relação entre a profundidade de um módulo e sua dimensão projetiva com a profundidade do próprio anel base.

1.3.1 Resoluções Projetivas e módulo de Sizígias

Definição 1.3.1. Seja M um R-módulo. Um complexo exato

$$P_\bullet : \cdots \to P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

onde cada P_i é um R-módulo projetivo é dito uma *resolução projetiva de* M. O módulo $M_i = \ker \varphi_{i-1}$ é um i-*ésimo módulo de sizígias de* M. Caso cada P_i seja livre, o complexo também é chamado de *resolução livre* de M.

A resolução projetiva é dita *finita* se existe $n \geqslant 0$ tal que $P_n \neq 0$ e $P_i = 0$ para todo $i > n$. Neste caso, n é o *comprimento* da resolução projetiva. O menor comprimento dentre as resoluções projetivas finitas de M é a *dimensão projetiva* de M, a qual denotamos por $\dim\text{proj}\, M$.

Equivalentemente, podemos pensar uma resolução projetiva de M como um complexo de módulos projetivos

$$P_\bullet : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to 0$$

onde $H_i(P_\bullet) = 0$, para $i > 0$ e $H_0(P_\bullet) = M$. Nestes termos, chamamos $P_\bullet$ de *resolução projetiva deletada* de M. No caso em que M não possui uma resolução projetiva finita, convencionamos que $\dim\text{proj}\, M = \infty$. Naturalmente, M é projetivo se, e somente se, $\dim\text{proj}\, M = 0$.

Todo módulo admite uma resolução projetiva. De fato, dado um R-módulo M, sendo $(m_i)_{i\in\lambda}$

um conjunto de geradores de M, podemos definir o morfismo de R-módulos

$$\varphi_0 : \bigoplus_{i\in\lambda} Re_i \to M, \quad e_i \mapsto m_i.$$

Fazendo o mesmo para $\ker \varphi_0$ e iterando o raciocínio, obteremos uma resolução livre, e portanto, projetiva, para M.

Tal construção é de particular importância no caso em que R é noetheriano e M é finitamente gerado. Vamos explicitá-la neste caso.

Seja $\{m_1, \dots, m_{n_0}\}$ um conjunto de geradores para M. O morfismo φ_0 conforme acima é dado por

$$\varphi_0 : R^{n_0} \to M \quad e_i \mapsto m_i.$$

Sendo $\ker \varphi_0$ submódulo finitamente gerado de R^{n_0}, podemos escrever

$$\ker \varphi_0 = Rg_1 + \cdots + Rg_{n_1}.$$

Pondo

$$\varphi_1 : R^{n_1} \to R^{n_0} \quad e_i \mapsto g_i,$$

temos $\operatorname{Im} \varphi_1 = \ker \varphi_0$, donde obtemos a sequência exata

$$R^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} R^{n_0} \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

a qual é chamada de uma *apresentação livre de* M.

O R-módulo

$$\ker \varphi_0 = \{(a_1, \dots, a_{n_0}) \in R^{n_0};\ a_0m_0 + \cdots + a_{n_0}m_{n_0} = 0\}$$

é dito módulo de sizígias de M em relação ao conjunto de geradores $\{m_1, \dots, m_{n_0}\}$, sendo cada um de seus elementos *uma sizígia de* M. A matriz de φ_1 em relação às bases canônicas de R^{n_0} e R^{n_1} é chamada *matriz de apresentação* (ou de *sizígias*) de M.

Exemplo 1.3.2. Sejam $R = K[X, Y, Z]$, $I = (XY, XZ, YZ)$ e $\varphi_0 : R^3 \to I$ como na discussão precedente. É imediato verificar que $(Z, -Y, 0)$ e $(0, Y, -X)$ são sizígias de I. Por outro lado, se (a_1, a_2, a_3) é uma sizígia de I, então $a_1XY + a_2XZ + a_3YZ = 0$. Em particular, $a_1XY \in (Z)$. Desta forma, $a_1 \in (Z)$. Analogamente, $a_2 \in (Y)$ e $a_3 \in (X)$. Escrevendo $a_1 = b_1Z$, $a_2 = b_2Y$ e $a_3 = b_3X$, obtemos a igualdade $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, donde se conclui que $(a_1, a_2, a_3) = b_1(Z, -Y, 0) - b_3(0, Y, -X)$. Assim, $\ker \varphi_0 = ((Z, -Y, 0), (0, Y, -X))$. Desta forma obtemos a apresentação livre de I

$$R^2 \xrightarrow{\varphi_1} R^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \to 0$$

onde a matriz de φ_1 nas bases canônicas é dada por

$$\begin{bmatrix} Z & 0 \\ -Y & Y \\ 0 & -X \end{bmatrix}$$

Por fim, note que se $(b_1, b_2) \in \ker \varphi_1$, então, em particular, devemos ter $b_1 Z = 0$ e $b_2(-X) = 0$. Logo, $(b_1, b_2) = (0, 0)$, o que mostra que φ_1 é injetor. Sendo assim, obtemos uma resolução livre finita de comprimento 1 para I

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi_1} R^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \to 0.$$

Em particular, $\dim \operatorname{proj} I \leqslant 1$.

1.3.2 Resoluções livres minimais e o Teorema de Auslander-Buchsbaum

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Fixado um gerador minimal $\{x_1, \ldots, x_{\beta_0}\}$ de M, considere o morfismo $\varphi_0 : R^{\beta_0} \to M$, onde $\varphi_0(e_i) = x_i$. Agora, sendo $\beta_1 = \mu(\ker \varphi_0)$, fixe um gerador minimal de $\ker \varphi_0$ e defina $\varphi_1 : R^{\beta_1} \to \ker \varphi_0$ de modo análogo ao caso anterior. Procedendo indutivamente, obtemos uma resolução livre para M

$$\cdots \to R^{\beta_i} \xrightarrow{\varphi_i} R^{\beta_{i-1}} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} R^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} R^{\beta_0} \to 0$$

com a propriedade de que $\mu(R^{\beta_i}) = \mu(\operatorname{Im} \varphi_i)$. Resoluções livres com esta propriedade são particularmente importantes para o cálculo da dimensão projetiva de M, como veremos nesta seção.

Definição 1.3.3. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Uma resolução livre de M

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \to 0$$

é dita *minimal* se $\mu(F_i) = \mu(\operatorname{Im} \varphi_i)$, para todo i.

Segue da discussão acima que uma resolução livre minimal sempre existe. O teorema seguinte nos fornece uma caracterização importante de tais resoluções.

Teorema 1.3.4. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado e considere uma resolução livre de M*

$$F_\bullet : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to 0.$$

São equivalentes:

(a) $F_.$ *é minimal.*

(b) $\varphi_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$, *para todo* i.

(c) $\mu(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k)$, *para todo* i.

Prova. (a)⇒(b) Por hipótese, $\dim_k F_i/\mathfrak{m}F_i = \dim_k \varphi_i(F_i)/\mathfrak{m}\varphi_i(F_i)$. Deste modo, o morfismo k-linear induzido

$$\tilde{\varphi}_i : F_i/\mathfrak{m}F_i \to \varphi_i(F_i)/\mathfrak{m}\varphi_i(F_i)$$

é um isomorfismo. Em particular, dado $x \in \ker \varphi_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1}$, temos $\tilde{\varphi}_i(\overline{x}) = 0$, donde $x \in \mathfrak{m}F_i$. Isto mostra que $\varphi_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$.

(b)⇒(a) Basta mostrar que o morfismo induzido $\tilde{\varphi}_i$ do item anterior é um isomorfismo. A sobrejetividade segue por construção. Para provar a injetividade, suponha que $\tilde{\varphi}_i(\overline{x}) = 0$. Assim, $\varphi_i(x) \in \mathfrak{m}\varphi_i(F_i)$. Escrevendo

$$\varphi_i(x) = \sum_{t=1}^{r} m_t \varphi_i(y_t), \text{ com } y_t \in F_i \text{ e } m_t \in \mathfrak{m},$$

concluímos que $x - \sum_{t=1}^{r} m_t(y_t) \in \ker \varphi_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1} \subset \mathfrak{m}F_i$, o que mostra que $\overline{x} = 0$.

(b)⇔(c) Uma vez que $F_\bullet$ é uma resolução projetiva de M, temos

$$\operatorname{Tor}_i^R(M, k) = \frac{\ker(\varphi_i \otimes k)}{\operatorname{Im}(\varphi_{i+1} \otimes k)}.$$

Consequentemente,

$$\dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k) = \dim_k \ker(\varphi_i \otimes k) - \dim_k \operatorname{Im}(\varphi_{i+1} \otimes k).$$

Sendo $\mu(F_i) = \dim_k(F_i \otimes k)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k) &\Leftrightarrow \dim_k \ker(\varphi_i \otimes k) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k) \\ &\Leftrightarrow \varphi_i \otimes k = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.5. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* M *um* R*-módulo finitamente gerado com* $\dim\operatorname{proj} M = n$. *Então, toda resolução livre minimal de* M *possui comprimento* n. *Em particular,* $\dim\operatorname{proj} M = \sup\{i; \operatorname{Tor}_i^R(M, k) \neq 0\}$.

Prova. Seja $P_\bullet : 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$ uma resolução projetiva de M com comprimento n. Dada uma resolução livre minimal $F_\bullet$ de M, aplicando a definição do funtor Tor a partir da resolução projetiva $P_\bullet$ e usando o teorema anterior, concluímos que

$$\mu(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k) = 0,$$

para todo $i \geqslant n + 1$. Deste modo, o comprimento de $F_\bullet$ é no máximo n. Por definição de dimensão projetiva, segue que este comprimento é exatamente n. Em particular, $F_n \neq 0$, donde $\mu(F_n) = \dim_k \operatorname{Tor}_n^R(M, k) \neq 0$. Isto conclui a demonstração. □

Pelo corolário anterior, concluímos ainda que M possui dimensão projetiva infinita se, e somente se, M admite uma resolução livre minimal infinita. Assim, as resoluções livres minimais são suficientes para o cálculo da dimensão projetiva de módulos finitamente gerados no caso local.

Concluímos esta seção revelando a relação entre a profundidade e a dimensão projetiva de um módulo, no caso em que a última é finita. Disto trata o teorema de Auslander-Buchsbaum.

Lema 1.3.6. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *anel noetheriano local e* M *um* R*-módulo finitamente gerado. Se* $\mathbf{x} \in \mathfrak{m}$ *for uma sequência* R*-regular e* M*-regular, então:*

$$\dim\operatorname{proj} M = \dim\operatorname{proj}_{R/(\mathbf{x})} M/\mathbf{x}M.$$

Prova. Considere $F_\bullet$ uma resolução livre minimal de M. Uma vez que $\mathbf{x}$ é R-regular e cada F_i é R-módulo livre, concluímos que $\mathbf{x}$ é F_i-regular, para todo i. Assim, pelo Corolário 1.1.7, segue que o complexo $F_\bullet \otimes R/(\mathbf{x})$ é exato. Sendo tal complexo também uma resolução livre minimal para $M/\mathbf{x}M$ como $R/(\mathbf{x})$-módulo, o resultado segue. □

Teorema 1.3.7 (Teorema de Auslander-Buchsbaum)**.** *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* M *um* R*-módulo finitamente gerado. Se* $\dim\operatorname{proj} M < \infty$*, então:*

$$\dim\operatorname{proj} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R.$$

Prova. Faremos indução sobre $\operatorname{depth} R$. Começamos supondo que $\operatorname{depth}\ R = 0$. Neste caso,

$$\mathfrak{m} \subset Z(R) = \bigcup_{p \in \operatorname{Ass} R} p.$$

Segue que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$. Consequentemente, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$, para algum $x \neq 0$ em R.

Tome uma resolução livre minimal $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ de M com comprimento n. Se $n > 0$, então $F_n \simeq \varphi_n(F_n) \subset \mathfrak{m}F_{n-1}$ e portanto $xF_n \subset x\mathfrak{m}F_{n-1} = 0$. Assim, sendo F_n livre, resulta que $F_n = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $n = \dim\operatorname{proj} M = 0$. Sendo assim, M é livre e desta forma, $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R = 0$, provando a igualdade para este caso.

Suponha agora $\operatorname{depth} R = n > 0$. Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $\operatorname{depth} M > 0$

Neste caso, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass} R$ e $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass} M$. Afirmamos que existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que é M-regular e R-regular. De fato, do contrário teríamos $\mathfrak{m} \subset Z(R) \cup Z(M)$. Por outro lado

$$Z(R) \cup Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R \text{ ou } \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}.$$

Daí, $\mathfrak{m}$ estaria contido em algum primo associado de M ou R, o que contraria as hipóteses de que $\operatorname{depth} M > 0$ e $\operatorname{depth} R > 0$.

Uma vez escolhido $x \in \mathfrak{m} - [Z(R) \cup Z(M)]$, o Lema 1.3.6 nos garante que

$$\dim\operatorname{proj}_{R/(x)} M/xM = \dim\operatorname{proj}\ M.$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.2.12,

$$\operatorname{depth}_{R/(x)} R/(x) = \operatorname{depth} R - 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{depth}_{R/(x)} M/xM = \operatorname{depth} M - 1.$$

Logo, por hipótese indutiva,

$$\operatorname{depth}_{R/(x)} M/xM + \dim\operatorname{proj}_{R/(x)} M/xM = \operatorname{depth}_{R/(x)} R/(x),$$

donde segue a igualdade desejada.

Caso 2: $\operatorname{depth} M = 0$:

Truncando uma resolução livre minimal $F_\bullet$ na primeira sizígia de M, obtemos a sequência exata

$$0 \to M_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

Assim, $\dim\operatorname{proj} M_1 = \dim\operatorname{proj} M - 1$. Por outro, da Proposição 1.2.11, obtemos as seguintes desigualdades:

(i) $\operatorname{depth} M_1 \geqslant \min\{\operatorname{depth} F_1, \operatorname{depth} M + 1\} = 1$.

(ii) $0 = \operatorname{depth} M \geqslant \min\{\operatorname{depth} M_1 - 1, \operatorname{depth} F_0\} = \operatorname{depth} M_1 - 1$.

Logo, $\operatorname{depth} M_1 = 1$. Deste modo, o resultado segue do caso 1. $\square$

Exemplo 1.3.8. Considere o anel noetheriano local $R = k[\![X,Y]\!]/(X^2, XY)$ e seja $M = R/(X)$. Afirmamos que $\dim\operatorname{proj}_R M = \infty$. De fato, se fosse $\dim\operatorname{proj}_R M < \infty$, teríamos pelo teorema de Auslander-Buchsbaum:

$$\dim\operatorname{proj}_R M + \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth} R.$$

Pelo Exemplo 2.1.4, segue que $\operatorname{depth} R = 0$. Logo, devemos ter $\operatorname{depth}_R M = 0$. No entanto, sendo $\operatorname{Ass}(M) = \{(X)\}$, concluímos que Y é elemento M-regular. Logo, $\operatorname{depth}_R M \geqslant 1$. Desta forma, devemos ter $\dim\operatorname{proj}_R M = \infty$.

1.4 O Teorema de Hilbert-Burch

1.4.1 O posto generalizado de um módulo

Seja R um anel e $S = R - Z(R)$. É imediato verificar que S é um conjunto multiplicativo. O anel $S^{-1}R$ é o *anel total de frações de* R e o denotaremos por Q. Note que, se R for um domínio, então Q é o corpo de frações de R. Vamos usar o anel total de frações de R para dar uma definição de posto de um R-módulo, generalizando o caso dos módulos livres.

Definição 1.4.1. Sejam R um anel, $Q = S^{-1}R$ o anel total de frações de R e M um R-módulo.

(a) M possui posto r se $S^{-1}M$ for um Q-módulo livre de posto r. O posto de M será denotado por $\operatorname{rank} M$.

(b) M é *livre de torção* se o mapa de localização $\varphi : M \to S^{-1}M$ for injetivo.

(c) M é um *módulo de torção* se $S^{-1}M = 0$.

Sob anéis noetherianos, há uma conexão entre módulos livres e módulos que possuem posto. Disto tratá a próxima proposição. Antes, porém, precisaremos dos lemas seguintes.

Lema 1.4.2. *Sejam* R *um anel,* M *um* R*-módulo,* $p_1, \ldots, p_m$ *ideais primos de* R *e* $x_1, \ldots, x_n \in M$. *Seja* $N = \sum_{i=1}^n Rx_i$. *Se* $N_{p_j} \not\subset p_j M_{p_j}$*, para* $j = 1, \ldots, m$*, então existem* $a_2, \ldots, a_n \in R$ *tais que* $y = x_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_i \notin p_j M_{p_j}$*, para* $j = 1, \ldots, m$.

Prova. Faremos indução sobre m. No caso em que $m = 1$, temos $N_{p_1} \not\subset p_1 M_{p_1}$. Como $N_p = \sum_{j=1}^n R_p x_j$, segue que $x_j \notin p_1 M_{p_1}$ para algum j. Se $x_1 \notin p_1 M_{p_1}$, basta tomar $y = x_1$. Por outro lado, se $x_1 \in p_1 M_{p_1}$, então $x_j \notin p_1 M_{p_1}$, para algum $j > 1$. Assim, basta tomar $y = x_1 + x_j$.

No caso geral, iniciamos observando que, por hipótese indutiva, existem $a'_2, \dots, a'_n \in R$ tais que $x'_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{n} a'_i x_i \notin p_j M_{p_j}$, para $j = 2, \dots, m$. Naturalmente, se $x'_1 \notin p_m M_{p_m}$, basta tomar $y = x'_1$. Suponha agora que $x'_1 \in p_m M_{p_m}$. A menos de reordenação podemos supor que p_m é um elemento minimal do conjunto $\{p_1, \dots, p_m\}$. Em particular, $\bigcap_{j=1}^{m-1} p_j \not\subset p_m$. Deste modo, podemos escolher $r \in \bigcap_{j=1}^{m-1} p_j$ com $r \notin p_m$. Para cada $i = 2, \dots, n$, defina $x'_i = r x_i$ e seja $N' = \sum_{i=1}^{n} R x'_i$. Naturalmente temos $N'_{p_m} \subset N_{p_m}$.

Por outro lado, note que $r x_1 = r x'_1 - \sum_{i=2}^{n} a'_i x'_i \in N'$. Logo, dado

$$n' = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right) / s \in N_{p_m},$$

temos

$$n' = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x'_i \right) / rs \in N'_{p_m}.$$

Assim, $N_{p_m} = N'_{p_m}$. Além disso, como $r \in \bigcap_{j=1}^{m-1} p_j$, segue que $x'_1 + x'_i \notin p_j M_{p_j}$, para $i = 2, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m-1$.

Por fim, existe $i_0 \in \{2, \dots, n\}$ tal que $x'_1 + x'_{i_0} \notin p_m M_{p_m}$. De fato, do contrário, teríamos $x'_i \in p_m M_{p_m}$ para todo i. Desta forma, $N_{p_m} = N'_{p_m} \subset p_m M_{p_m}$, o que é uma contradição. Portanto, tomando $y = x'_1 + x'_{i_0}$, temos que $y \notin p_j M_{p_j}$, para $j = 1, \dots, m$. □

Note que, quando $M = R$ e, portanto, $N = I$ é um ideal de R, a condição "$N_{p_j} \not\subset p_j M_{p_j}$"é equivalente a "$I \not\subset p_j$". Assim, podemos pensar no Lema 1.4.2 como uma generalização do lema da esquiva.

Lema 1.4.3. *Sejam R um anel semi-local e M um R-módulo projetivo e finitamente gerado. Então, M é livre de posto r se, e somente se as localizações $M_\mathfrak{m}$ são $R_\mathfrak{m}$-módulos livres de posto r, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Prova. Se M é livre de posto r, suas localizações também são livres de posto r, pois localização comuta com soma direta. Provaremos a recíproca por indução em r. O caso $r = 0$ é trivial. Suponha $r > 0$. Pelo Lema 1.4.2, existe $x \in M$ com $x \notin \mathfrak{m} M_\mathfrak{m}$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Assim, a imagem de x em $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m} M_\mathfrak{m}$ é diferente de zero, o que implica que x faz parte de uma base do $k(\mathfrak{m})$-espaço vetorial $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m} M_\mathfrak{m}$. Assim, pelo lema de Nakayama, x faz parte de um gerador minimal de $M_\mathfrak{m}$. Como $M_\mathfrak{m}$ é livre (Conforme Exemplo 4.1.10 e Observação 4.1.5) , tal gerador faz parte de uma base de $M_\mathfrak{m}$. Desta forma

$$M_\mathfrak{m}/R_\mathfrak{m} x \simeq (M/Rx)_\mathfrak{m}$$

é um $R_\mathfrak{m}$-módulo livre de posto $r - 1$. Como isto é verdade para todo ideal maximal de R, segue da hipótese indutiva que M/Rx é R-módulo livre (em particular, projetivo) de posto $r-1$. Consequentemente, pelo item iii) do Teorema 4.1.8, a sequência exata

$$0 \to Rx \to M \to M/Rx \to 0$$

cinde e, portanto, $M \simeq Rx \oplus M/Rx$. Por fim, o morfismo sobrejetor natural $\varphi : R \to Rx$ é um isomorfismo. De fato, como x faz parte de uma base de $M_{\mathfrak{m}}$, $\varphi_{\mathfrak{m}} : R_{\mathfrak{m}} \to (Rx)_{\mathfrak{m}}$ é um isomorfismo, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$. Logo, φ é um isomorfismo e assim, Rx é um R-módulo livre de posto 1. Desta forma, M é um R-módulo livre de posto r. $\square$

Lema 1.4.4. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e $\varphi : F \to G$ um morfismo de R-módulos finitamente gerados. Suponha que F é livre e seja M um R-módulo de modo que $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$. Suponha que $\varphi \otimes M$ é injetivo. Então:*

(a) *$\varphi \otimes k$ é injetivo.*

(b) *Se G for livre, então φ é injetivo e $\varphi(F)$ é um somando direto livre de G.*

Prova. (a) Como $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$, existe um morfismo injetor $i : k \to M$. Assim, um vez que F é livre, ele é um módulo plano e, portanto, $F \otimes i$ também é um morfismo injetor. Por outro lado, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F \otimes k \arrow[r, "F\otimes i"] \arrow[d, "\varphi\otimes k"] & F \otimes M \arrow[d, "\varphi\otimes M"] \\ G \otimes k \arrow[r] & G \otimes M \end{tikzcd}$$

Assim, se $\varphi \otimes M$ for injetivo, $\varphi \otimes k$ será injetivo também.

(b) Pelo item (a), sabemos que $\varphi \otimes k : F/\mathfrak{m}F \to G/\mathfrak{m}G$ é um morfismo k-linear injetivo. Assim, sendo $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$ uma base do k-espaço vetorial $F/\mathfrak{m}F$, $\{\overline{\varphi(e_1)}, \ldots, \overline{\varphi(e_n)}\}$ é um conjunto linearmente independente de $G/\mathfrak{m}G$, o qual podemos completar a uma base

$$\{\overline{\varphi(e_1)}, \ldots, \overline{\varphi(e_n)}, \overline{z_{n+1}}, \ldots, \overline{z_m}\}.$$

Pelo lema de Nakayama, como F e G são livres, resulta que

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{e} \quad \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n), z_{n+1}, \ldots, z_m\}$$

são bases de F e G, respectivamente. Daí segue que φ é injetivo e que $G = \varphi(F) \oplus H$, onde $H = \sum_{j=n+1}^{m} Rz_j$. $\square$

Proposição 1.4.5. *Sejam* R *um anel noetheriano e* M *um* R *módulo com uma apresentação finita*

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to M \to 0$$

São equivalentes:

(a) M *tem posto* r.

(b) *Para todo ideal primo* $p \in \operatorname{Ass} R$*,* M_p *é um* R_p*-módulo livre de posto* r.

(c) $\operatorname{rank} \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rank} F_0 - r$.

Prova. (a) ⇒(b) Fixe $p \in \operatorname{Ass} R$ e sejam $S = R - Z(R)$ e $T = R - p$. Assim, $S \subset T$. Logo, sendo $T' = TR_S$, temos:

$$M_p = M_T \simeq (M_S)_{T'}$$

e $R_p \simeq (R_S)_{T'}$. Assim, como M_S é um R_S módulo livre de posto r, M_p é um R_p-módulo livre de posto r.

(b)⇒(a) Seja Q o anel total de frações de R. Note inicialmente que Q é um anel semi-local. De fato, os ideais maximais de $Q(R)$ correspondem aos elementos maximais do conjunto dos ideais primos disjuntos de $S = R - Z(R)$. Assim, os ideais maximais de $Q(R)$ correspondem aos elementos maximais de $\operatorname{Ass} R$.

Além disso, observe que $S^{-1}M$ é um Q-módulo projetivo. Com efeito, dado um ideal primo q de Q, temos $q = S^{-1}p$, para algum ideal primo $p \subset Z(R)$. Em particular, pelo lema da esquiva, existe $p_1 \in \operatorname{Ass} R$ tal que $p \subset p_1$. Logo,

$$(S^{-1}M)_q \simeq M_p \simeq (M_{p_1})_{pR_{p_1}}$$

é livre de posto r. Pela Proposição 4.1.11, concluímos que $S^{-1}M$ é um Q-módulo projetivo. Por outro lado, como cada localização de $S^{-1}M$ sobre um ideal maximal de Q é isomorfa ao módulo M_p, para algum elemento maximal p de $\operatorname{Ass} R$, segue do Lema 1.4.3 que $S^{-1}M$ é livre de posto r, ou seja, que M possui posto r.

(b)⇔ (c) Pela equivalência entre os itens a) e b), segue que o item c) é equivalente a dizer que $(\operatorname{Im} \varphi)_p$ é um R_p-módulo livre de posto igual a $\operatorname{rank} F_0 - r$, para todo $p \in \operatorname{Ass} R$. Sendo assim, considere a sequência exata

$$0 \to (\operatorname{Im} \varphi)_p \to (F_0)_p \to M_p \to 0.$$

Se M_p é livre de posto r, então, pelo Exemplo 4.1.10, $(\mathrm{Im}\,\varphi)_p$ é um R_p-módulo livre e vale

$$\operatorname{rank}(\mathrm{Im}\,\varphi)_p = \operatorname{rank} F_0 - r.$$

Por fim, se supomos agora que $(\mathrm{Im}\,\varphi)_p$ é livre de posto igual a $\operatorname{rank} F_0 - r$, então, como $pR_p \in \operatorname{Ass} R_p$, segue do Lema 1.4.4 que $(\mathrm{Im}\,\varphi)_p$ é um somando direto livre de $(F_0)_p$. Escrevendo $(\mathrm{Im}\,\varphi)_p \oplus E = (F_0)_p$, deduzimos que E é um R_p-módulo livre de posto r. Logo, o resultado segue do isomorfismo

$$M_p \simeq (F_0)_p/(\mathrm{Im}\,\varphi)_p \simeq E.$$

□

Abordaremos agora a existência do posto de um módulo a partir de sequências exatas. Veremos ainda que o posto é aditivo em sequências exatas.

Proposição 1.4.6. *Seja R um anel noetheriano e $0 \to U \to M \to N \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Se dois destes módulos tiverem posto, então o terceiro também terá e valerá*

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} U + \operatorname{rank} N.$$

Prova. Suponha inicialmente que R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e que $\operatorname{depth} R = 0$. Note que, neste contexto, o conjunto $S = R - Z(R)$ é disjunto de $\mathfrak{m}$. Assim, S é formado por elementos invertíveis de R. Deste modo, o anel total de frações $Q(R)$ é isomorfo a R. Portanto, um R-módulo possui posto se, e somente se, ele é livre.

Com isto em mente, suponha inicialmente que U e N são livres. Então, como N é projetivo, temos $M = U \oplus N$, o que mostra que M é livre. Analogamente, se M e N forem livres, também deduzimos que $M = U \oplus N$. Neste caso, U é projetivo e, portanto, é livre, já que R é local. Por outro lado, se U e M forem livres, então, uma vez que $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$ ($\operatorname{depth} R = 0$), segue do Lema 1.4.4 que U é um somando direto de M. Escrevendo $U \oplus E = M$, deduzimos que E é livre (por ser projetivo). Daí, $N \simeq M/U \simeq E$ é livre.

Para o caso geral, suponha que dois dentre os módulos U, M e N são livres. Para cada $p \in \operatorname{Ass} R$, considere a sequência exata

$$0 \to U_p \to M_p \to N_p \to 0.$$

Como $pR_p \in \operatorname{Ass} R_p$, $\operatorname{depth} R_p = 0$. Logo, o resultado segue do caso discutido inicialmente juntamente com a proposição anterior. □

Corolário 1.4.7. *Seja* R *um anel noetheriano e* M *um* R*-módulo com uma resolução livre finita*

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to M \to 0.$$

Então, M *possui posto e* $\operatorname{rank} M = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \operatorname{rank} F_j$.

Prova. Faremos indução sobre s. O caso $s = 0$ é trivial. Suponha agora $s > 0$ e considere a sequência exata

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \to \operatorname{Coker} \varphi_2 \to 0.$$

Por hipótese indutiva, $\operatorname{Coker} \varphi_2$ possui posto e

$$\operatorname{rank} \operatorname{Coker} \varphi_2 = \operatorname{rank} F_1 - \operatorname{rank} F_2 + \cdots + (-1)^{s-1} \operatorname{rank} F_s.$$

Por outro lado, pela proposição anterior, a exatidão da sequência

$$0 \to \operatorname{Coker} \varphi_2 \to F_0 \to M \to 0$$

implica que M possui posto e

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} F_0 - \operatorname{rank} \operatorname{Coker} \varphi_2 = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \operatorname{rank} F_j.$$

□

Corolário 1.4.8. *Se* R *é um anel noetheriano e* $I \neq 0$ *é um ideal de* R *que admite uma resolução livre finita, então* I *contém um elemento regular.*

Prova. Pelo corolário anterior, I possui posto. Assim, da sequência exata

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

concluímos que R/I também possui posto e

$$1 = \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} I + \operatorname{rank} R/I.$$

Se $\operatorname{rank} I = 0$, então $S^{-1}I = 0$. Em particular, para cada $i \in I$, haveria $s \in S$ tal que $s.i = 0$. Como $S = R - Z(R)$, teríamos $I = 0$, o que é um absurdo. Logo, $\operatorname{rank} I = 1$ e, assim, $\operatorname{rank} R/I = 0$. Em particular, R/I é anulado por um elemento regular. Logo, tal elemento pertence a I. □

1.4.2 Ideais gerados por menores de uma matriz e o teorema de Hilbert-Burch

Seja A uma matriz $m \times n$ com entradas num anel R. Para cada $0 < t \leqslant \min(m,n)$, definimos $I_t(A)$ como sendo *o ideal gerado pelos menores de* A *de ordem* t. Se $t \leqslant 0$, pomos $I_t(A) = R$ e se $t > \min(m,n)$, definimos $I_t(A) = 0$. Dado um morfismo $\varphi : F \to G$ de R-módulos livres de posto finito, definimos $I_t(\varphi)$ como sendo $I_t(A)$, onde A é uma matriz que represente φ em bases escolhidas de F e G.

Antes de mais nada, vamos provar que $I_t(\varphi)$ está bem definido, ou seja, não depende da escolha de bases de F e G. Como uma mudança de bases se traduz num produto à esquerda e à direita por matrizes invertíveis, devemos provar que, se $A \in M_{m\times n}(R)$, $P \in M_{n\times n}(R)$ e $Q \in M_{m\times m}(R)$, com P e Q invertíveis, então

$$I_t(A) = I_t(QAP),$$

para todo $0 < t \leqslant \min(m,n)$. Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $P = (p_{rs})_{n\times n}$. Temos:

$$AP = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}p_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}p_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}p_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}p_{kn} \end{bmatrix}$$

Fixe $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant m$ e $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n$ e considere a seguinte submatriz de AP de ordem t:

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{i_1k}p_{kj_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_1k}p_{kj_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i_tk}p_{kj_1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_tk}p_{kj_t} \end{bmatrix}$$

Note que, para cada $r \in \{1,\ldots,t\}$, a r-ésima coluna de B pode ser escrita assim:

$$\sum_{k=1}^{n} p_{kj_r} \begin{bmatrix} a_{i_1k} \\ \vdots \\ a_{i_tk} \end{bmatrix}.$$

Logo, como o determinante de uma matriz é uma função multilinear de suas colunas, concluímos que

$$\det B = \sum_{k_1,\ldots,k_t=1}^{n} p_{k_1j_1}\cdot\cdots\cdot p_{k_tj_t}\det\begin{bmatrix} a_{i_1k_1} & \cdots & a_{i_tk_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_tk_1} & \cdots & a_{i_tk_t}\end{bmatrix}$$

A menos de permutação de colunas, cada matriz presente na soma acima é uma submatriz de ordem t da matriz A. Ora, mas permutações de colunas no máximo alteram o sinal do determinante de uma matriz. Logo, $\det B \in I_t(A)$. Como $\det B$ é um gerador típico de $I_t(AP)$, segue que $I_t(AP) \subset I_t(A)$.

Analogamente, procedendo por análise de linhas em vez de colunas, podemos garantir que $I_t(QA) \subset I_t(A)$. Desta forma, $I_t(QAP) \subset I_t(AP) \subset I_t(A)$. Por outro lado, escrevendo $A = Q^{-1}\cdot(QAP)\cdot P^{-1}$, concluímos que $I_t(A) \subset I_t(QAP)$. Assim, está provado que $I_t(A) = I_t(QAP)$.

Seja V um k-espaço vetorial de dimensão finita e

$$V_1 \xrightarrow{\varphi} V_0 \to V \to 0$$

uma presentação finita de V. Como o posto de uma matriz corresponde a ordem máxima de um menor não-nulo, temos as seguintes condições equivalentes:

(a) $I_t(\varphi) = k$.

(b) $\operatorname{Im}\varphi$ contém um subespaço de dimensão t.

(c) $\dim V \leqslant \dim V_0 - t$.

Assim, a não nulidade do ideal $I_t(\varphi)$ permite estimar a dimensão V. O próximo resultado generaliza estas equivalências para o caso local.

Proposição 1.4.9. *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel local e*

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to M \to 0$$

uma apresentação finita de um R*-módulo* M*. São equivalentes:*

(a) $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{m}$.

(b) $\operatorname{Im}\varphi$ *contém um somando direto (livre) de* F_0 *com posto* t.

(c) $\mu(M) \leqslant \operatorname{rank} F_0 - t$.

Prova. Sabemos que estas condições são equivalentes se R for um corpo. Assim, considerando a sequência exata de k-espaços vetoriais

$$F_1/\mathfrak{m}F_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} F_0/\mathfrak{m}F_0 \to M/\mathfrak{m}M \to 0$$

devemos provar os seguintes itens:

(A) Vale o item (a) se, e somente se, $I_t(\tilde{\varphi}) = k$.

(B) Vale o item (b) se, e somente se, Im $\tilde{\varphi}$ contém um subespaço de dimensão t.

(C) $\mu(M) = \dim_k M/\mathfrak{m}M$ e rank $F_0 =$ rank $F_0/\mathfrak{m}F_0$.

O item (A) segue do fato de que $I_t(\tilde{\varphi}) = I_t(\varphi)(\mod \mathfrak{m})$. O item (C) é imediato. Provemos o item $B)$.

Se vale (b), então existem $w_1, \ldots, w_t$ linearmente independentes em Im φ tais que $G = \sum_{i=1}^{t} Rw_i$ é um somando direto livre de F_0. Assim, podemos escrever $G \oplus L = F_0$. Afirmamos que $\{\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_t}\}$ é um conjunto linearmente independente no k-espaço vetorial $F_0/\mathfrak{m}F_0$. Com efeito, se

$$\sum_{i=1}^{t} \overline{\alpha_i}\overline{w_i} = 0,$$

então $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i w_i \in \mathfrak{m}F_0$. Assim existem $\delta_1, \ldots, \delta_t \in \mathfrak{m}$ e $y \in \mathfrak{m}L$ tais que

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{t} \delta_i w_i + y.$$

Daí,

$$\sum_{i=1}^{t} (\alpha_i - \delta_i) w_i \in G \cap L = \{0\}.$$

Segue que $\alpha_i \in \mathfrak{m}$, para $i = 1, \ldots, t$. Isto mostra que Im $\tilde{\varphi}$ contém um subespaço de dimensão t.

Reciprocamente, se Im $\tilde{\varphi}$ contém um subespaço de dimensão t, então existem $w_1, \ldots, w_t \in F_1$, tais que $\{\overline{\varphi(w_1)}, \ldots, \overline{\varphi(w_t)}\}$ é um conjunto linearmente independente em $F_0/\mathfrak{m}F_0$. Podemos completar tal conjunto de modo a obter uma base $\{\overline{\varphi(w_1)}, \ldots, \overline{\varphi(w_t)}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_k}\}$ de $F_0/\mathfrak{m}F_0$. Como F_0 é livre, segue do lema de Nakayama que o conjunto $\{\varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_t), z_1, \ldots, z_k\}$ é uma base de F_0. Em particular

$$F_0 = G \oplus L,$$

onde $G = \sum_{i=1}^{t} R\varphi(w_i)$ e $L = \sum_{j=1}^{k} Rz_j$, provando assim que $\operatorname{Im}\varphi$ contém um somando direto livre de F_0 com posto t. $\square$

Corolário 1.4.10. *Seja R um anel, M um R-módulo com uma apresentação livre finita*

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to M \to 0$$

e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R. As seguintes condições são equivalentes:

(a) $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{p}$.

(b) $(\operatorname{Im}\varphi)_{\mathfrak{p}}$ *contém um somando direto* (*livre*) *de* $(F_0)_{\mathfrak{p}}$ *com posto* t.

(c) $\mu(M_{\mathfrak{p}}) \leqslant \operatorname{rank} F_0 - t$.

Prova. Temos a apresentação livre finita de $M_{\mathfrak{p}}$:

$$(F_1)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} (F_0)_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

Como $I_t(\varphi_{\mathfrak{p}}) = (I_t(\varphi))_{\mathfrak{p}}$ e $(\operatorname{Im}\varphi)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Im}\varphi_{\mathfrak{p}}$, o resultado segue imediatamente da proposição anterior. $\square$

Proposição 1.4.11. *Com a mesma notação do corolário anterior, temos as seguintes condições equivalentes:*

(a) $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{p}$ *e* $I_{t+1}(\varphi)_{\mathfrak{p}} = 0$.

(b) $(\operatorname{Im}\varphi)_{\mathfrak{p}}$ *é um somando direto livre de* $(F_0)_{\mathfrak{p}}$ *com posto* t.

(c) $M_{\mathfrak{p}}$ *é livre e* $\operatorname{rank} M_{\mathfrak{p}} = \operatorname{rank} F_0 - t$.

Prova. Procedendo de forma análoga à demonstração do corolário anterior, basta demonstrar esta proposição no caso local. Explicitamente, basta mostrar que, se $(R, \mathfrak{m})$ é local, então são equivalentes:

(A) $I_t(\varphi) \not\subset \mathfrak{m}$ e $I_{t+1}(\varphi) = 0$.

(B) $\operatorname{Im}\varphi$ é um somando direto livre de F_0 com posto t.

(C) M é livre e $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} F_0 - t$.

Começamos provando a equivalência entre os itens (B) e (C). Se vale (B), então existe um R-módulo E tal que

$$\operatorname{Im}\varphi \oplus E = F_0.$$

Em particular, E é livre e $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank} F_0 - t$. Logo, a implicação segue dos isomorfismos

$$E \simeq F_0/\operatorname{Im}\varphi \simeq M.$$

Inversamente, se vale (C), seja $\{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base de M, onde $r = \operatorname{rank} F_0 - t$. Sendo $\psi : F_0 \to M$ o morfismo presente na sequência exata do enunciado, considere $u_1, \ldots, u_r \in F_0$ tais que $w_i = \psi(u_i)$, para $i = 1, \ldots, r$. Segue que

$$F_0 = \ker\psi \oplus N,$$

onde $N = \sum_{i=1}^{r} Ru_i$. Como $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$, concluímos que $\operatorname{Im}\varphi$ é livre de posto t.

Iremos agora mostrar a equivalência entre os itens (A) e (B). Suponha que vale (A). Assim, $I_t(\varphi) = R$. Em particular, a matriz de φ possui uma submatriz invertível de ordem t. Portanto, a menos de mudança de base, podemos supor que φ possui a seguinte representação matricial:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} M & X \\ \hline Y & Z \end{array}\right]_{m\times n},$$

onde M é uma matriz invertível de ordem t. Seja $X' = -M^{-1}X$ e considere a matriz invertível

$$P = \left[\begin{array}{c|c} M^{-1} & X' \\ \hline O & I_{(n-t)\times(n-t)} \end{array}\right].$$

Deste modo,

$$AP = \left[\begin{array}{c|c} I_{t\times t} & 0 \\ \hline W & W' \end{array}\right]$$

Por outro lado, sendo

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} I_{t\times t} & 0 \\ \hline -W & I_{(m-t)\times(m-t)} \end{array}\right],$$

temos:

$$QAP = \left[\begin{array}{c|c} I_{t\times t} & 0 \\ \hline 0 & W' \end{array}\right].$$

Como P e Q são matrizes invertíveis, QAP é uma representação matricial de φ em certas bases α e β de F_1 e F_0, respectivamente.

Afirmamos que $W' = 0$. De fato, se W' possuir um elemento w' não nulo, então, a menos de reordenação dos elementos das bases α e β, podemos supor que w' ocupa a $(t+1)$-ésima linha e a $(t+1)$-ésima coluna de QAP. Consequentemente, o menor de ordem $t+1$ da matriz QAP obtido selecionando as primeiras $(t+1)$ linhas e $(t+1)$ colunas é igual a w', o que contradiz a hipótese de que $I_{t+1}(\varphi) = 0$. Logo, $W' = 0$. Desta forma, sendo $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m\}$, concluímos que $\operatorname{Im}\varphi = \bigoplus_{i=1}^{t} R\tilde{u}_i$ e

$$F_0 = \operatorname{Im}\varphi \oplus N,$$

onde $N = \bigoplus_{i=t+1}^{m} \tilde{u}_i$. Isto mostra que (A) implica (B).

Por fim, se vale (B), então procedendo de forma análoga à demonstração da implicação (B)$\Rightarrow$(A), concluímos que φ pode ser representada pela matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{t\times t} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, $I_t(\varphi) = R$ e $I_{t+1}(\varphi) = 0$. $\square$

Como vimos nos resultados anteriores, os ideais gerados por menores de matrizes são uma ferramenta de estudo de módulos via ideais. O próximo resultado ilustra essa filosofia em relação a propriedade de um módulo ser projetivo.

Proposição 1.4.12. *Seja R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado com uma apresentação livre finita*

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to M \to 0.$$

As seguintes condições são equivalentes:

(a) $I_r(\varphi) = R$ *e* $I_{r+1}(\varphi) = 0$.

(b) M *é projetivo e* $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} F_0 - r$.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b): Por hipótese, $I_r(\varphi) \not\subset p$ e $I_{r+1}(\varphi)_p = 0$, para todo $p \in \operatorname{Spec}(R)$. Logo, pela Proposição 1.4.11, M_p é livre de posto igual a $\operatorname{rank} F_0 - r$. Logo, M é projetivo conforme a Proposição 4.1.11 e possui posto igual a $\operatorname{rank} F_0 - r$, conforme a Proposição 1.4.5.

(b)$\Rightarrow$(a): Seja $p \in \operatorname{Ass} R$. Como $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} F_0 - r$, resulta da Proposição 1.4.5 que M_p é livre de posto igual a $\operatorname{rank} F_0 - r$. Logo, segue da Proposição 1.4.11 que $I_r(\varphi) \not\subset p$ e $I_{r+1}(\varphi)_p = 0$. Por um lado, isto garante que $I_{r+1}(\varphi) = 0$. Por outro lado, uma vez que todo ideal primo de R contém um primo associado de R, segue que $I_r(\varphi) \not\subset q$, para todo $q \in \operatorname{Spec}(R)$. Isto mostra que $I_r(\varphi) = R$. $\square$

Além da nulidade, o grade dos ideais $I_r(\varphi)$ também revelam propriedades a respeito de φ.

Proposição 1.4.13. *Seja* R *um anel noetheriano e* $\varphi : F \to G$ *um morfismo de* R*-módulos livres de posto finito. Então* $\operatorname{rank} \operatorname{Im} \varphi = r$ *se, e somente se,* $\operatorname{grade} I_r(\varphi) \geqslant 1$ *e* $I_{r+1}(\varphi) = 0$.

Prova. Suponha inicialmente que $\operatorname{rank} \operatorname{Im} \varphi = r$. Pela Proposição 1.4.5, $(\operatorname{Im} \varphi)_p$ é um R_p-módulo livre de posto r, para todo $p \in \operatorname{Ass} R$. Assim, a partir da sequência exata

$$0 \to (\operatorname{Im} \varphi)_p \to (F_0)_p \to (\operatorname{Coker} \varphi)_p \to 0$$

juntamente com a demonstração da Proposição 1.4.6 (caso local com profundidade zero), deduzimos que $(\operatorname{Coker} \varphi)_p$ é um R_p-módulo livre. Por esta mesma proposição, também concluímos que

$$\operatorname{rank}(\operatorname{Coker} \varphi)_p = \operatorname{rank}(F_0)_p - \operatorname{rank}(\operatorname{Im} \varphi)_p = \operatorname{rank} F_0 - r.$$

Assim, segue da Proposição 1.4.11 que $I_r(\varphi) \not\subset p$ e $(I_{r+1}(\varphi))_p = 0$, para todo $p \in \operatorname{Ass} R$. Portanto, pelo lema da esquiva, $I_r(\varphi) \not\subset Z(R)$, o que prova que $\operatorname{grade} I_r(\varphi) \geqslant 1$. Por outro lado, pensando $I_{r+1}(\varphi)$ com um R-módulo, se $q \in \operatorname{Ass}_R I_{r+1}(\varphi)$, então $q \in \operatorname{Ass} R$. Assim, $(I_{r+1}(\varphi))_q = 0$, o que é um absurdo visto que $\operatorname{Ass}_R I_{r+1}(\varphi) \subset \operatorname{Supp}(I_{r+1}(\varphi))$. Logo, $\operatorname{Ass}_R I_{r+1}(\varphi) = \emptyset$, donde $I_{r+1}(\varphi) = 0$.

Reciprocamente, se $\operatorname{grade} I_r(\varphi) \geqslant 1$ então $I_r(\varphi) \not\subset p$, para cada $p \in \operatorname{Ass} R$. Além disso, a hipótese $I_{r+1}(\varphi) = 0$ nos garante que $I_{r+1}(\varphi)_p = 0$, para todo $p \in \operatorname{Ass} R$. Desta forma, o resultado segue imediatamente das Proposições 1.4.11 e 1.4.5. □

Definição 1.4.14. Seja R um anel. Um complexo de R-módulos

$$G_\bullet : \cdots \to G_m \xrightarrow{\varphi_m} G_{m-1} \to \cdots \to G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_0 \to 0$$

é dito *acíclico* se $H^i(G_\bullet) = 0$, para todo $i > 0$. Se, além disso, $\varphi_{i+1}(G_i)$ for um somando direto de G_{i-1}, para todo $i > 0$, o complexo é dito *split acíclico.*

Ao definir complexos acíclicos, estamos apenas enfraquecendo a exatidão do complexo em sua homologia de grau 0. Curiosamente isto equivale a certas estimativas no grade dos ideais $I_r(\varphi_i)$. É o que veremos no teorema de Buchsbaum-Eisenbud. A próxima proposição é o primeiro passo nesta direção.

Observação 1.4.15. Se

$$F_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to 0$$

é um complexo acíclico, então Im φ_i possui posto e este vale

$$r_i = \sum_{j=i}^{s} (-1)^{j-i} \operatorname{rank} F_j.$$

Podemos provar isto por indução descendente sobre i: O resultado é imediato se $i = s$. Supondo agora $i < s$. Por hipótese indutiva, Im φ_{i+1} possui posto r_{i+1}. Assim, segue da sequência exata

$$0 \to \operatorname{Im} \varphi_{i+1} \to F_i \to \operatorname{Im} \varphi_i \to 0$$

que Im φ_i possui posto e

$$\operatorname{rank} \operatorname{Im} \varphi_i = \operatorname{rank} F_i - r_{i+1} = r_i.$$

Proposição 1.4.16. *Sejam* R *um anel,*

$$F_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to 0$$

um complexo de R*-módulos livres de posto finito e* $\mathfrak{p}$ *um ideal primo de* R*. Denote* $r_i = \sum_{j=i}^{s} (-1)^{j-i} \operatorname{rank} F_j$*.*

As seguintes condições são equivalentes:

(a) $F \otimes R_\mathfrak{p}$ *é split acíclico.*

(b) $I_{r_i}(\varphi_i) \not\subset \mathfrak{p}$*, para* $i = 1, \dots, s$.

Prova. Procedendo de forma análoga à Proposição 1.4.11, vemos que é suficiente provar esta proposição para o caso em que $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local.

(a)$\Rightarrow$ (b) Se $F_\bullet$ é split acíclico, então o complexo

$$F_\bullet \otimes R/\mathfrak{m} : 0 \to \tilde{F}_s \xrightarrow{\tilde{\varphi}_s} \tilde{F}_{s-1} \to \cdots \to \tilde{F}_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} \tilde{F}_0 \to 0$$

também é split acíclico. Em particular, para cada $i > 0$, o complexo

$$F_\bullet \otimes R/\mathfrak{m} : 0 \to \tilde{F}_s \xrightarrow{\tilde{\varphi}_s} \tilde{F}_{s-1} \to \cdots \to \tilde{F}_i \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} \tilde{F}_{i-1} \to \operatorname{Coker} \tilde{\varphi}_i \to 0$$

é split acíclico. Pelo Corolário 1.4.7, segue que

$$\dim_k \operatorname{Coker} \tilde{\varphi}_i = \dim_k \tilde{F}_{i-1} - \dim_k \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i = \dim_k \tilde{F}_{i-1} - \dim_k \tilde{F}_i + \cdots + (-1)^{s-i-1} \dim_k \tilde{F}_s.$$

Logo,

$$\dim_k \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i = \sum_{j=i}^{s} (-1)^{j-i} \dim_k \tilde{F}_j.$$

Portanto, $I_{r_i}(\tilde{\varphi}_i) \neq 0$, ou, equivalentemente, $I_{r_i}(\varphi_i) \not\subset \mathfrak{m}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Faremos indução sobre s. Se $s = 1$ então $I_{r_1}(\varphi_1) \not\subset \mathfrak{m}$, onde $r_1 = \operatorname{rank} F_1$. Naturalmente, $I_{r_1+1}(\varphi_1) = 0$. Logo, pela demonstração da Proposição 1.4.11 (caso local), $\varphi_1(F_1)$ é um somando direto livre de F_0 com posto r_1. Desta forma, $\varphi_1 : F_1 \to \varphi_1(F_1)$ é um morfismo sobrejetor de módulos livres de mesmo posto finito. Pelo lema de Nakayama, φ_1 é injetivo.

Suponha agora $s > 0$. Por hipótese indutiva, o complexo

$$F'_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to 0$$

é split acíclico. Assim, resta provar que $\operatorname{Im}\varphi_2 = \ker\varphi_1$ e que $\operatorname{Im}\varphi_1$ é um somando direto de F_0. Inicialmente, como $I_{r_1}(\varphi_1) \not\subset \mathfrak{m}$, segue do Corolário 1.4.10, que $\operatorname{Im}\varphi_1$ contém um somando direto livre U de F_0 com posto r_1, digamos

$$U \oplus U' = F_0.$$

Por outro lado, aplicando o Corolário 1.4.7 ao complexo $F'_\bullet$, concluímos que $\operatorname{rank}\operatorname{Coker}\varphi_2 = r_1$. Como $\operatorname{Im}\varphi_2 \subset \ker\varphi_1$, temos um morfismo sobrejetor $f : \operatorname{Coker}\varphi_2 \to F_1/\ker\varphi_1 \simeq \operatorname{Im}\varphi_1$. Além disso, a decomposição $F_0 = U \oplus U'$, induz o morfismo sobrejetor $\pi : \operatorname{Im}\varphi_1 \to U$. Desta forma, $\pi \circ f$ é um morfismo sobrejetor de R-módulos livres de mesmo posto finito e, portanto, é um isomorfismo. Consequentemente, π é um isomorfismo. o que implica que $\operatorname{Im}\varphi_1 = U$. Logo, $\operatorname{Im}\varphi_1$ é um somando direto livre de F_0 com posto r_1. Daí, f é um isomorfismo, donde $\operatorname{Im}\varphi_2 = \ker\varphi_1$. $\square$

Teorema 1.4.17 (Critério de Buchsbaum-Eisenbud)**.** *Sejam* R *um anel noetheriano e*

$$F_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to 0$$

um complexo de R*-módulos livres de posto finito. Denote* $r_i = \sum_{j=i}^{s} (-1)^{j-i} \operatorname{rank} F_j$*. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $F_\bullet$ *é acíclico.*

(b) $\operatorname{grade} I_{r_i}(\varphi_i) \geqslant i$*, para* $i = 1, .., s$.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b): Faremos indução sobre s. Se $s = 1$, então φ_1 é injetor e assim, $F_1 \simeq \operatorname{Im}\varphi_1$. Em particular, $\operatorname{rank}\operatorname{Im}\varphi_1 = r_1$. Logo, segue da Proposição 1.4.13 que $\operatorname{grade} I_{r_1}(\varphi_1) \geqslant 1$.

Suponha agora $s > 0$. Sendo $F_\bullet$ acíclico, $\operatorname{rank}\operatorname{Im}\varphi_i = r_i$, para $i = 1, \ldots, s$, conforme a Observação 1.4.15. Logo, $\operatorname{grade} I_{r_i}(\varphi_i) \geqslant 1$. Em particular, existe um elemento R-regular

$x \in \bigcap_{i=1}^{s} I_{r_i}(\varphi_i)$. Se x for invertível, o resultado está provado. Suponha que x não é invertível. Como F_i é livre, x é F_i-regular. Portanto, sendo

$$F'_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to 0$$

um complexo acíclico, segue do Corolário 1.1.7 que o complexo

$$F'_\bullet \otimes R/(x) : 0 \to \overline{F_s} \xrightarrow{\overline{\varphi_s}} \overline{F}_{s-1} \to \cdots \to \overline{F_2} \to \overline{F_1} \to 0$$

é acíclico. Ademais, $I_{r_i}(\overline{\varphi_i}) = \overline{I_{r_i}(\varphi_i)}$. Por outro lado, por hipótese indutiva, grade $I_{r_i}\overline{(\varphi_i)} \geqslant i-1$, para $i = 2, \ldots, s$ (Pois cada $\overline{F_i}$ seria o "novo F_{i-1}" bem como cada $\overline{\varphi}_i$ seria o "novo φ_{i-1}"). Portanto, grade $I_{r_i}(\varphi_i) \geqslant i$.

(b)⇒(a) Novamente, faremos indução sobre s. Se $s = 1$, devemos provar que φ_1 é injetor. Por hipótese, grade $I_{r_1}(\varphi_1) \geqslant 1$, onde $r_1 = \operatorname{rank} F_1$. Naturalmente, $I_{r_1+1}(\varphi_1) = 0$. Logo, $\operatorname{rank} \operatorname{Im} \varphi_1 = r_1$, conforme Proposição 1.4.13. Por outro lado, $I_{r_1}(\varphi_1) \not\subset p$, para cada $p \in \operatorname{Ass} R$. Daí, para cada $p \in \operatorname{Ass} R$, $(\operatorname{Im} \varphi_1)_p$ é um somando direto livre de $(F_0)_p$ com posto r_1, conforme a Proposição 1.4.11. Segue que $(\varphi_1)_p : (F_1)_p \to (\operatorname{Im} \varphi_1)_p$ é um morfismo sobrejetor de módulos livres de mesmo posto finito e, portanto, é injetivo. Isto implica que

$$(\ker \varphi_1)_p = \ker (\varphi_1)_p = 0,$$

para todo $p \in \operatorname{Ass} R$. Como $\operatorname{Ass}_R \ker (\varphi_1)_p \subset \operatorname{Ass}_R F_1 = \operatorname{Ass} R$ e $\operatorname{Ass}_R \ker \varphi_1 \subset \operatorname{Supp} \ker \varphi_1$, segue que $\operatorname{Ass}_R \ker \varphi_1 = \emptyset$, ou seja, $\ker \varphi_1 = 0$.

Suponha agora $s > 0$. Por hipótese indutiva, o complexo

$$F'_\bullet : 0 \to F_s \xrightarrow{\varphi_s} F_{s-1} \to \cdots \to F_2 \to F_1 \to 0$$

é acíclico. Assim, resta provar que $\operatorname{Im} \varphi_2 = \ker \varphi_1$. Seja $M_i = \operatorname{Coker} \varphi_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, s$ ($\varphi_{s+1} = 0$).

Afirmação: depth $(M_i)_p \geqslant \min\{i, \operatorname{depth} R_p\}$, para cada ideal primo p de R.

Provaremos esta afirmação por indução descendente sobre i. Se $i = s$, então

$$\operatorname{depth} (M_s)_p = \operatorname{depth} (F_s)_p = \operatorname{depth} R_p.$$

Se $i < s$, então, por hipótese indutiva,

$$\operatorname{depth} (M_{i+1})_p \geqslant \min\{i + 1, \operatorname{depth} R_p\}.$$

No caso em que depth $R_p \geqslant i+1$, devemos ter depth $(M_{i+1})_p \geqslant i+1$. Assim, aplicando o item c) da Proposição 1.2.11 à sequência exata

$$0 \to (M_{i+1})_p \to (F_i)_p \to (M_i)_p \to 0$$

obtemos:

$$\text{depth}\,(M_i)_p \geqslant \min\{\text{depth}\,(M_{i+1})_p - 1, \text{depth}\,(F_i)_p\},$$

donde depth $(M_i)_p \geqslant i$.

Por outro lado, se depth $R_p < i+1$, então $I_{r_{i+1}}(\varphi_{i+1}) \not\subset p$, pois do contrário, $(I_{r_{i+1}}(\varphi_{i+1}))_p \subset pR_p$ e assim, teríamos

$$i+1 \leqslant \text{grade}\, I_{r_{i+1}}(\varphi_{i+1}) \leqslant \text{grade}\, I_{r_{i+1}}(\varphi_{i+1})_p \leqslant \text{depth}\, R_p.$$

Além disso, sendo $F'_\bullet$ acíclico, rank $\text{Im}(\varphi_{i+1}) = r_{i+1}$ e, portanto, $I_{r_{i+1}+1}(\varphi_{i+1}) = 0$. Aplicando a Proposição 1.4.11 à sequência exata

$$0 \to (F_{i+1})_p \to (F_i)_p \to (M_i)_p \to 0$$

deduzimos que $(M_i)_p$ é livre. Sendo assim, depth $(M_i)_p =$ depth R_p, o que prova a afirmação.

Vamos agora provar que $\text{Im}\,\varphi_2 = \ker\varphi_1$. Isto é equivalente a provar que o morfismo $\varphi'_1 : M_1 \to F_0$, induzido por φ_1, é injetivo. Seja $N = \ker\varphi'_1$. Para provar que $N = 0$, iremos mostrar que $\text{Ass}\, N = \emptyset$. Dado um ideal primo p de R, se depth $R_p \geqslant 1$, então pela afirmação acima, depth $(M_1)_p \geqslant 1$. Portanto $p \notin \text{Ass}\, M_1$ e, em particular, $p \notin \text{Ass}\, N$. Por outro lado, se depth $R_p = 0$, então $I_{r_i}(\varphi_i) \not\subset p$, para cada $i = 1, \cdots, s$ pois do contrário, $(I_{r_i}(\varphi_i))_p \subset pR_p$ para algum i, e assim, para tal valor de i, teríamos

$$\text{grade}\, I_{r_i}(\varphi_i) \leqslant \text{grade}\,(I_{r_i}(\varphi_i))_p = 0,$$

o que contraria a hipótese do item b). Logo, segue da proposição anterior que $F_\bullet \otimes R_p$ é acíclico. Como localização é um funtor exato, resulta que $N_p = H^1(F_\bullet \otimes R_p) = 0$. Uma vez que $\text{Ass}\, N \subset \text{Supp}\, N$, concluímos que $p \notin \text{Ass}\, N$. Logo, está provado que $\text{Ass}\, N = \emptyset$, ou seja, que $N = 0$. □

Recordemos que, dado um anel noetheriano R e um ideal I de R, o grade de I em R é dado pela expressão

$$\text{grade}\, I = \min\{i; \text{Ext}^i_R(R/I, R) \neq 0\}.$$

Em particular, como $\text{Ext}^i_R(R/I, R) = 0$, para $i > \dim\text{proj}\, R/I$, temos que grade $I \leqslant \dim\text{proj}\, R/I$. Ideais para os quais vale a igualdade recebem um nome especial.

Definição 1.4.18. *Seja* R *um anel noetheriano e* I *um ideal de* R*. Dizemos que* I *é um ideal perfeito se* $\operatorname{grade} I = \dim\operatorname{proj} R/I$.

Exemplo 1.4.19. Seja $R = k[X, Y, Z]$ e $I = (XY, XZ, YZ)$. Afirmamos que I é um ideal perfeito. Para isto, note inicialmente que $\{XY, (X + Y)Z\} \subset I$ é uma R-sequência. De fato, como R é um domínio, XY é um elemento R-regular. Além disso, uma vez que

$$(XY) = (X) \cap (Y)$$

é uma decomposição primária do ideal (XY), concluímos que $\operatorname{Ass} R/(XY) = \{(X), (Y)\}$. Desta forma, como $(X+Y)Z \notin (X) \cup (Y)$, segue que $(X+Y)Z$ é um elemento $R/(XY)$-regular. Isto mostra que $\operatorname{grade}(I, R) \geqslant 2$. Por outro lado, vimos no Exemplo 1.3.2 que $\dim\operatorname{proj} I \leqslant 1$. Consequentemente, pelo Corolário 4.1.15 segue que $\dim\operatorname{proj} R/I \leqslant 2$. Desta forma, temos as desigualdades

$$2 \leqslant \operatorname{grade}(I, R) \leqslant \dim\operatorname{proj} R/I \leqslant 2,$$

donde obtemos $\operatorname{grade}(I, R) = \dim\operatorname{proj} R/I = 2$.

Teorema 1.4.20 (Hilbert-Burch)**.** *Sejam* R *um anel noetheriano e* I *um ideal com uma resolução livre*

$$F_\bullet : 0 \to R^n \xrightarrow{\varphi} R^{n+1} \xrightarrow{\pi} I \to 0.$$

Então, existe um elemento R*-regular* a *tal que* $I = aI_n(\varphi)$*. Se* I *for projetivo, então* $I = (a)$*. Se* $\dim\operatorname{proj} I = 1$*, então* $I_n(\varphi)$ *é um ideal perfeito de grade 2.*

Reciprocamente, se $\varphi : R^n \to R^{n+1}$ *é um morfismo* R*-linear e* $\operatorname{grade} I_n(\varphi) \geqslant 2$*, então existe uma resolução livre de* $I = I_n(\varphi)$ *como* $F_\bullet$.

Prova. Começamos provando a recíproca. Seja $U = (a_{ij})_{(n+1)\times n}$ a matriz de φ em relação às bases canônicas de R^n e R^{n+1}. Denotemos por δ_i o menor obtido de U por exclusão de sua i-ésima linha. Considere o morfismo de R-módulos

$$\hat{\pi} : R^{n+1} \to R, \quad e_i \mapsto (-1)^i \delta_i.$$

Note que $\operatorname{Im} \hat{\pi} = I_n(\varphi)$, ou equivalentemente, $I_1(\hat{\pi}) = I_n(\varphi)$. Assim, se provarmos que $\operatorname{Im} \varphi \subset \ker \hat{\pi}$, teremos o complexo

$$0 \to R^n \xrightarrow{\varphi} R^{n+1} \xrightarrow{\hat{\pi}} R \to 0$$

o qual será acíclico pelo critério de Buchsbaum-Eisenbud, garantindo assim, a exatidão do complexo

$$0 \to R^n \xrightarrow{\varphi} R^{n+1} \xrightarrow{\hat{\pi}} I_n(\varphi) \to 0.$$

Para provar que $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\hat{\pi}$, consideremos, para cada $j = 1, \dots, n$, a matriz

$$U_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n+1\ n} & \cdots & a_{n+1\ j} & a_{n+1\ j} & \cdots & a_{n+1\ n} \end{bmatrix}$$

obtida de U por repetição de sua j-ésima coluna. Por ter colunas repetidas, $\det U_j = 0$. Assim, calculando $\det U_j$ a partir da expansão de Laplace por sua j-ésima coluna, temos a igualdade

$$0 = (-1)^{j+1}a_{1j}\delta_1 + \cdots + (-1)^{n+j+1}a_{n+1\ j}\delta_{n+1} = (-1)^j\hat{\pi}(\varphi(e_j)),$$

o que prova que $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\hat{\pi}$.

Provemos agora a primeira parte do enunciado. Suponha então que $F_\bullet$ é uma resolução livre de I. Em particular, pelo critério de Buchsbaum-Eisenbud, $\operatorname{grade} I_n(\varphi) \geqslant 2$. Pela primeira parte desta demonstração, isto implica que

$$0 \to R^n \xrightarrow{\varphi} R^{n+1} \xrightarrow{\hat{\pi}} I_n(\varphi) \to 0$$

é uma resolução livre de $I_n(\varphi)$. Consequentemente, $I \simeq \operatorname{Coker}\varphi \simeq I_n(\varphi)$, como R-módulos. O isomorfismo $I \simeq I_n(\varphi)$ induz um morfismo injetor $\beta : I_n(\varphi) \to R$ com $\operatorname{Im}\beta = I$.

Afirmamos que existe $a \in R$, tal que β é a multiplicação por a. De fato, a sequência exata

$$0 \to I_n(\varphi) \to R \to R/I_n(\varphi) \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(R/I_n(\varphi), R) \to \operatorname{Hom}_R(R, R) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Hom}_R(I_n(\varphi), R) \to \operatorname{Ext}^1_R(R/I_n(\varphi), R) \to \cdots$$

onde, identificando $\operatorname{Hom}_R(R, R)$ com R, temos

$$\psi : R \to \operatorname{Hom}_R(I_n(\varphi), R), \quad a \mapsto \psi_a(i) = ia.$$

Por outro lado, como $\operatorname{grade} I_n(\varphi) \geqslant 2$, segue da definição de grade que $\operatorname{Ext}^1_R(R/I_n(\varphi), R) = 0$. Logo, ψ é sobrejetor e, em particular, β é a multiplicação por algum elemento $a \in R$, donde $I = aI_n(\psi)$. Resulta agora do Corolário 1.4.8 que a é R-regular.

Se I for projetivo, então $I_n(\varphi) = R$, conforme a Proposição 1.4.12. Portanto, $I = (a)$. Por fim, se $\dim\operatorname{proj} I = 1$, então pelo Corolário 1.4.10 juntamente com o fato de que $\dim\operatorname{proj} I =$

$\dim\operatorname{proj} I_n(\varphi)$, temos:

$$\dim\operatorname{proj} R/I_n(\varphi) = \dim\operatorname{proj} R/I = 2.$$

Como $\operatorname{grade} I_n(\varphi) \geqslant 2$, concluímos que $\operatorname{grade} I_n(\varphi) = 2$, ou seja, $I_n(\varphi)$ é um ideal perfeito. $\square$

Exemplo 1.4.21. Seja $R = k[X, Y, Z]$ e $I = (X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2Y)$. Vamos utilizar o teorema de Hilbert-Burch para provar que I é um ideal perfeito de altura 2. Inicialmente, note que $I = I_2(\varphi)$, onde $\varphi : R^2 \to R^3$ é o mapa R-linear cuja matriz nas bases canônicas é dada por

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & X^2 \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

Uma vez que $\{X^3 - YZ, Y^2 - XZ\}$ é uma sequência R-regular em I, segue que

$$\operatorname{grade} I = \operatorname{grade} I_2(\varphi) \geqslant 2.$$

Assim, pela segunda parte do Teorema de Hilbert-Burch, I admite uma resolução livre do tipo

$$F_\bullet : 0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi} R^3 \xrightarrow{\pi} I \to 0.$$

Observe agora que I não é R-módulo projetivo. De fato, se este fosse o caso, então I seria livre, conforme o Teorema de Quillen-Suslin. Isto implica que I é principal e, portanto, $\operatorname{ht} I = 1$. No entanto, como veremos no Corolário 1.5.16 da próxima seção,

$$\operatorname{grade} I \leqslant \operatorname{ht} I.$$

Isto nos leva a uma contradição. Desta forma, $\dim\operatorname{proj} I = 1$. Logo, segue da primeira parte do Teorema de Hilbert-Burch que $I = I_2(\varphi)$ é um ideal perfeito de altura 2.

O exemplo anterior ilustra a estrutura dos ideais perfeitos de grade 2 em um anel de polinômios com coeficientes num corpo k. Enunciamos tal resultado estrutural a seguir, englobando também o caso local.

Corolário 1.4.22. *Sejam* R *um anel noetheriano local ou um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo* k *e* I *um ideal próprio de* R *com* $\operatorname{grade}(I, R) = 2$. *Então, as seguintes condições são equivalentes:*

i) I *é um ideal perfeito.*

ii) I *é gerado pelos menores maximais de uma matriz* $(n+1) \times n$ *com entradas em* R.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que I é perfeito. Assim, $\dim \operatorname{proj}_R R/I = 2$. Logo, pelo Corolário 4.1.15, $\dim \operatorname{proj}_R I = 1$. Note que todo módulo projetivo finitamente gerado sobre R é livre. No caso em que R é local, isto segue do Exemplo 4.1.10. Se R for igual a $k[X_1, \ldots, X_n]$, isto decorre do teorema de Quillen-Suslin. De todo modo, podemos garantir a existência de uma resolução livre

$$0 \to R^n \xrightarrow{\varphi} R^m \to I \to 0\,.$$

Consequentemente, $\operatorname{rank} I = m - n$. Por outro lado, como $\operatorname{ht} I = \operatorname{grade} I = 2$, I contém um elemento regular. Assim, $S^{-1}I = S^{-1}R$, onde $S = R - Z(R)$. Isto mostra que $\operatorname{rank} I = 1$. Desta forma, $m = n + 1$. Portanto, pelo teorema de Hilbert-Burch, $I = aI_n(\varphi)$, para algum $a \neq 0$ em R. Por fim, observe que a é invertível. De fato, se este não fosse o caso, teríamos $\operatorname{ht}(a) = 1$, donde $\operatorname{ht} I \leqslant 1$, o que é um absurdo. Portanto, a é invertível e $I = I_n(\varphi)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sendo $\operatorname{grade}(I, R) = 2$, segue do teorema de Hilbert-Burch que $\dim \operatorname{proj}_R I \leqslant 1$. Além disso, se I fosse projetivo, concluiríamos por este mesmo teorema que $I = (a)$, para algum $a \neq 0$ em R. Sendo I ideal próprio, a não é invertível, donde teríamos $\operatorname{ht} I \leqslant 1$, contrariando a hipótese. Portanto, $\dim \operatorname{proj}_R I = 1$, o que implica que $\dim \operatorname{proj}_R R/I = 2$, ou seja, que I é um ideal perfeito. □

1.5 Dimensão de um Módulo

Nesta seção, estudaremos o conceito de dimensão de um módulo. Veremos, no caso local, a definição de sistema de parâmetros, a qual é análoga ao que se tem em anéis noetherianos locais. Mostraremos uma caracterização de um sistema de parâmetros que revelará a natureza de sua construção. Em particular, provaremos que toda sequência regular faz parte de um sistema de parâmetros, obtendo assim uma desigualdade entre a profundidade e a dimensão de um módulo.

Iniciamos a seção relembrando alguns resultados sobre anéis noetherianos locais.

Teorema 1.5.1 (Teorema do Ideal de Krull)**.** *Sejam R um anel noetheriano e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ ideal de R. Se p é um ideal primo minimal sobre I, então $\operatorname{ht} p \leqslant d$.*

Demonstração. Ver [2], Proposição 10.2. □

Segue imediatamente deste teorema que todo ideal num anel noetheriano possui altura finita. Em particular, todo anel noetheriano local possui dimensão finita. O teorema do ideal de Krull admite uma recíproca nos termos abaixo.

Teorema 1.5.2. *Se R é um anel noetheriano e p é um ideal primo de altura n, então ele é primo minimal sobre algum ideal de R gerado por n elementos.*

Demonstração. Ver [2], Corolário 10.5. □

Combinando estes dois teoremas podemos dar uma caracterização da dimensão de um anel noetheriano local que será útil nesta seção.

Teorema 1.5.3. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local. Então:*

$$\dim R = \min\{d; \textit{existem } x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m} \textit{ tais que} \operatorname{rad}(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}\}.$$

Prova. Se $\operatorname{rad}(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}$ é um primo minimal sobre $(x_1, \ldots, x_d)$, donde $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim R \leqslant d$ pelo teorema do ideal de Krull.

Por outro lado, sendo agora $d = \dim R$, uma vez que $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = d$, $\mathfrak{m}$ é primo minimal sobre algum ideal $(x_1, \ldots, x_d)$. Resulta daí que $\operatorname{rad}(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}$, o que encerra a demonstração. □

O teorema anterior motiva as definições abaixo.

Definição 1.5.4. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Uma sequência de elementos $x_1, \ldots, x_d$ tal que $\operatorname{rad}(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}$, com d menor possível é dita um *sistema de parâmetros* de R. Mais geralmente, um ideal $q \subset \mathfrak{m}$ que cumpra $\operatorname{rad} q = \mathfrak{m}$ é dito um *ideal parâmetro* de R.

Segue da discussão acima que todo sistema de parâmetros possui cardinalidade igual a $\dim R$. Adicionalmente, também podemos concluir que $\dim R$ é o menor valor de d para o qual há um ideal parâmetro de R gerado por d elementos. Note ainda que a condição de q ser um ideal parâmetro de R é equivalente a dizer que $\dim R/q = 0$.

Exemplo 1.5.5. Seja $R = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$ e $\mathfrak{m} = (\overline{X} + 1, Y)$ ideal maximal de R. Temos $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = 1$, donde $\dim R_{\mathfrak{m}} = 1$. Uma vez que $\mathfrak{m}^2 \subset I = (\overline{X} + 1)$, concluímos que $\operatorname{rad} I = \mathfrak{m}$. Consequentemente, $\operatorname{rad} IR_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$. Isto mostra que a imagem de $\overline{X} + 1$ em $R_{\mathfrak{m}}$ é um sistema de parâmetros para este anel.

Veremos agora o conceito de dimensão de um módulo e como, no caso local, a natureza deste conceito se assemelha aos resultados discutidos acima.

Definição 1.5.6. Seja M um R-módulo. A *dimensão de Krull* de M é o maior comprimento das cadeias de ideais primos em $\operatorname{Supp} M$ e a denotamos por $\dim M$.

No caso em que M é finitamente gerado, a igualdade $V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M$ implica que $\dim M = \dim R/\operatorname{Ann} M$. Em particular, se R for noetheriano local e M for finitamente gerado e não nulo, então $\dim M < \infty$. Este é o caso que discutiremos nesta seção.

Observação 1.5.7. No caso $M = R/I$, é reconfortante notar que a dimensão de M como R-módulo coincide com a dimensão de Krull do anel R/I, uma vez que $\operatorname{Ann} M = I$.

A noção de ideal parâmetro pode ser naturalmente estendida para módulos, conforme a definição a seguir.

Definição 1.5.8. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado e não nulo. Um ideal $q \subset \mathfrak{m}$ é dito *ideal parâmetro* de M se $\dim M/qM = 0$.

Segue imediatamente da definição acima que q é ideal parâmetro de M se, e somente se, $\mathfrak{m} = \operatorname{rad}(\operatorname{Ann} M/qM)$.

Observação 1.5.9. Se M for finitamente gerado, então $\operatorname{rad}(\operatorname{Ann} M/qM) = \operatorname{rad}(q + \operatorname{Ann} M)$. (Ver [2], Proposição 10.8).

Vejamos agora que a relação entre a dimensão de M e seus ideais parâmetros é análoga ao caso dos anéis.

Teorema 1.5.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado não nulo. Temos que:*

(a) q *é ideal parâmetro de M se, e somente se,* $(q + \operatorname{Ann} M)/\operatorname{Ann} M$ *é ideal parâmetro de* $R/\operatorname{Ann} M$.

(b) $\dim M = \min\{d;$ *existe ideal parâmetro de M gerado por d elementos*$\}$.

Prova. (a) Temos as equivalências abaixo:

$$\begin{aligned}
q \text{ é ideal parâmetro de } M \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{m} = \operatorname{rad}\,(\operatorname{Ann} M/qM)\,. \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{m} = \operatorname{rad}(q + \operatorname{Ann} M). \\
&\Leftrightarrow \quad \dim R/(q + \operatorname{Ann} M) = 0. \\
&\Leftrightarrow \quad \dim[R/\operatorname{Ann} M]/[(q + \operatorname{Ann} M)/\operatorname{Ann} M] = 0. \\
&\Leftrightarrow \quad (q + \operatorname{Ann} M)/\operatorname{Ann} M \text{ é ideal parâmetro de } R/\operatorname{Ann} M.
\end{aligned}$$

(b) Segue imediatamente do item (a). □

O teorema acima sugere uma forma natural de definir um sistema de parâmetros para M análoga ao que foi feito para anéis.

Definição 1.5.11. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Uma sequência $x_1, \dots, x_d \subset \mathfrak{m}$ é um *sistema de parâmetros de* M se

$$\dim M/(x_1, \dots, x_d)M = 0, \text{ com } d \text{ menor possível.}$$

Segue que todo sistema de parâmetros tem $\dim M$ elementos.

Veremos agora como sequências regulares afetam a dimensão de um módulo e sua relação com sistemas de parâmetros.

No restante desta seção, M será sempre um R-módulo finitamente gerado não-nulo com $(R, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local.

Lema 1.5.12. *Dado* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$*, temos*

$$\dim M/\mathbf{x}M \geqslant \dim M - n.$$

Prova. Tome $a_1, \ldots, a_r$ um sistema de parâmetros de $M/\mathbf{x}M$. Assim,

$$[M/\mathbf{x}M]/[(a_1, \ldots, a_r)(M/\mathbf{x}M)] \simeq M/(a_1, \ldots, a_r, \mathbf{x})M$$

é um R-módulo de dimensão zero. Consequentemente, $\dim M \leqslant r + n = \dim M/\mathbf{x}M + n$. □

A desigualdade acima desaparece sob imposição de regularidade.

Lema 1.5.13. *Se* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$ *é uma* M*-sequência, então* $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n$.

Prova. Uma vez que

$$(M/x'M)/x_n(M/\mathbf{x}'M) \simeq M/\mathbf{x}M,$$

onde $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$, é suficiente demonstrar o lema para $n = 1$.

Assim, seja $x \in \mathfrak{m}$ um elemento M-regular e vejamos que $\dim M/xM = \dim M - 1$. Seja $r = \dim M/xM$. Pelo lema anterior, temos $r \geqslant \dim M - 1$. Por outro lado, como $\operatorname{Supp}(M/xM) \subset \operatorname{Supp} M$, concluímos que $r \leqslant \dim M$. Assim, $r = \dim M - 1$ ou $r = \dim M$.

Se $r = \dim M$, então, tomando uma cadeia maximal

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$$

de primos em $\operatorname{Supp}(M/xM)$, concluímos que $\mathfrak{p}_0$ é primo minimal de $\operatorname{Supp} M$ (pois o contrário implicaria na existência de uma cadeia de primos em $\operatorname{Supp}(M)$ com comprimento maior que $r = \dim M$), sendo portanto, um primo minimal de $\operatorname{Ass} M$. Deste modo, uma vez que é x elemento M-regular, concluímos que $x \notin \mathfrak{p}_0$. Por outro lado, como $x \in \operatorname{Ann}(M/xM)$ e $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Supp}(M/xM) = V(\operatorname{Ann}(M/xM))$, segue que $x \in \mathfrak{p}_0$, obtendo assim uma contradição. □

Na demonstração do teorema anterior, pode-se notar que $\dim R/\mathfrak{p}_0 = \dim M$. Deste modo, a igualdade $\dim M/x_1M = \dim M - 1$ valerá se exigirmos de x_1 apenas a condição

$$x_1 \notin \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \\ \dim R/\mathfrak{p} = \dim M}} \mathfrak{p}.$$

Analogamente, se tomarmos $x_2 \in \mathfrak{m}$ cumprindo a condição

$$x_2 \notin \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/x_1M) \\ \dim R/\mathfrak{p} = \dim M/x_1M}} \mathfrak{p},$$

teremos $\dim(M/(x_1, x_2)M) = \dim M - 2$. Tal raciocínio pode ser pensado como uma "receita"para rebaixar sucessivamente a dimensão de M, sempre desviando-se dos primos do suporte "na dimensão do módulo".

Observe ainda que se iterarmos o raciocínio acima, obteremos após $\dim M$ etapas, uma sequência $x = x_1, \ldots, x_{\dim M}$ cumprindo $\dim M/xM = 0$, ou seja, um sistema de parâmetros de M.

Em particular, isto mostra que toda sequência M-regular está contida num sistema de parâmetros de M. Isto é parte do teorema seguinte.

Teorema 1.5.14. *Seja* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$. *São equivalentes:*

(a) $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - r$.

(b) $x_j \notin \mathfrak{p}$, *para cada* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M)$ *com* $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M$, *para todo* $j = 1, \ldots, r$.

(c) $\mathbf{x}$ *faz parte de um sistema de parâmetros de* M.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b) Iniciamos com a seguinte afirmação:

Afirmação 1: $\dim(M/(x_1, \ldots, x_j)M) = \dim(M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M) - 1$, para $j = 1, \ldots, r$.

De fato, pelo Lema 1.5.12, temos:

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M) \geqslant \dim M - r + 1 = \dim(M/(x_1, \ldots, x_r)M) - 1.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.5.13 :

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_r)M) \geqslant \dim(M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M) - 1.$$

Assim:

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_r)M) = \dim(M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M) - 1.$$

Iterando o raciocínio acima obtemos o resultado desejado.

Afirmação 2: Dado $a \in \mathfrak{m}$, se $\dim(M/aM) = \dim M - 1$, então $a \notin \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ com $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$.

De fato, suponha que $a \in \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p}$ como no enunciado. Uma vez que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/aM)$, segue que $\dim M - 1 = \dim M/aM \geqslant \dim M$, o que é um absurdo.

O resultado agora segue imediatamente destas duas afirmações.

(b)⇒(c) Segue da discussão prévia a este teorema.

(c)⇒(a) Por hipótese, existe um sistema de parâmetros de M da forma

$$y = x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{\dim M}.$$

Assim, o módulo

$$M/(x_1, \ldots, x_{\dim M})M \simeq (M/(x_1, \ldots, x_r)M)/(x_{r+1}, \ldots, x_{\dim M})(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$$

tem dimensão 0. Deste modo, um sistema de parâmetros para $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ terá no máximo $\dim M - r$ elementos. Assim

$$\dim M/(x_1, \ldots, x_r)M \leqslant \dim M - r$$

A desigualdade oposta segue do Lema 1.5.12. □

Como já havíamos observado, toda sequência M-regular está contida num sistema de parâmetros de M. Em particular, concluímos que

$$\operatorname{depth} M \leqslant \dim M. \tag{1.3}$$

Por outro lado, note que $\dim M$ coincide com $\dim R/\mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. O resultado abaixo pode, portanto, ser lido como uma generalização da desigualdade (1.3).

Proposição 1.5.15. *Para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$*, vale*

$$\operatorname{depth} M \leqslant \dim R/\mathfrak{p}.$$

Prova. Faremos indução sobre $\dim R/\mathfrak{p}$. Se $\dim R/\mathfrak{p} = 0$, então $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, donde $\operatorname{depth} M = 0$.

Suponha agora $\dim R/\mathfrak{p} \geqslant 1$. Se $\operatorname{depth} M = 0$, o resultado é evidente. Se $\operatorname{depth} M > 0$, tome um elemento M-regular $a \in \mathfrak{m}$. Pelo teorema da interseção de Krull,

$$\bigcap_{r \geqslant 0} a^r M = 0.$$

Assim, escrevendo $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$, para um certo $x \in M$ não-nulo, temos que $x \in a^{m-1}M \setminus a^m M$, para algum $m > 0$.

Defina $I = \mathfrak{a}^m M : (x)$. Naturalmente, $\mathfrak{p} \subset I$. Além disso, uma vez que $I \subset Z(M/\mathfrak{a}^m M)$, segue que $I \subset \mathfrak{q}$ para algum $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M/\mathfrak{a}^m M)$. Deste modo, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Observe que tal inclusão é estrita pois $\mathfrak{a}^m \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$. Consequentemente $\dim R/\mathfrak{q} \leqslant \dim R/\mathfrak{p} - 1$. Por fim, usando a hipótese de indução juntamente com o Lema 1.5.13, obtemos:

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth}\ (M/\mathfrak{a}^m M) + 1 \leqslant \dim R/\mathfrak{q} + 1 \leqslant \dim R/\mathfrak{p},$$

como queríamos demonstrar. □

Podemos ainda usar a desigualdade (1.3) para estabelecer uma importante relação entre o grade e a altura de um ideal.

Corolário 1.5.16. *Sejam R um anel noetheriano e $I \subset R$ ideal. Então:*

$$\operatorname{grade}(I, R) \leqslant \operatorname{ht} I.$$

Prova. Basta lembrar que

$$\operatorname{grade}(I, R) = \inf\{\operatorname{depth} R_\mathfrak{p}\ ;\ \mathfrak{p} \in V(I)\} \quad \text{e} \quad \operatorname{ht} I = \inf\{\dim R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

□

1.6 Álgebra Exterior e Complexo de Koszul

Nesta seção, construiremos a Álgebra Exterior de um módulo e destacaremos suas principais propriedades. Em seguida, estudaremos o complexo de Koszul de uma sequência de elementos num anel R e veremos como suas propriedades homológicas se relacionam com a regularidade de tal sequência.

1.6.1 A Álgebra Exterior de um Módulo

Seja M um R-módulo. A partir de M, definimos os seguintes R-módulos:

$$T^0(M) := R,\ T^1(M) := M \text{ e } T^i(M) = M \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{i} M.$$

Tomando a soma direta de tais módulos, formamos o R-módulo

$$T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M).$$

Podemos dar a $T(M)$ uma estrutura natural de R-álgebra. Para isto, basta definir o produto de elementos homogêneos conforme abaixo

$$\begin{array}{rccc} . : & T^i(M) \times T^j(M) & \to & T^{i+j}(M) \\ & (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i, y_1 \otimes \cdots y_j) & \longmapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes \cdots y_j \end{array}$$

e usar a distributividade no caso geral. A R-álgebra (não comutativa em geral) $T(M)$ assim construída é chamada de *álgebra tensorial de* M.

Teorema 1.6.1 (Propriedade Universal da Álgebra Tensorial)**.** *Seja* M *um* R*-módulo. Se* S *é uma* R*-álgebra juntamente com um morfismo de* R*-módulos* $\varphi : M \to S$*, então existe um único morfismo* $\psi : T(M) \to S$ *de* R*-álgebras que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S \\ T(M) \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

Além disso, se B *é uma* R*-álgebra juntamente com um morfismo de* R*-módulos* $f : M \to B$ *satisfazendo a propriedade acima, então existe um único isomorfismo de* R*-álgebras* $g : T(M) \to B$ *tal que* $g(m) = f(m)$*, para todo* $m \in M$.

Demonstração. Ver [8], Seção 11.5, Teorema 31. □

Seja J o ideal bilateral de $T(M)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x$, $x \in M$. A álgebra quociente

$$T(M)/J$$

é denominada *álgebra exterior de* M e denotada por $\bigwedge M$. Uma vez que J é ideal homogêneo, $\bigwedge M$ é uma álgebra graduada. Sua k-ésima componente homogênea é dita ser a *k-ésima potência exterior de* M e é denotada por $\bigwedge^k M$. Explicitamente, temos:

$$\bigwedge^k M = T(M)/T^k(M) \cap J.$$

Em particular, como I é gerado por elementos homogêneos de grau 2, obtemos

$$\bigwedge^0 M = R \text{ e } \bigwedge^1 M = M.$$

Denotaremos a imagem de um elemento da forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ em $\bigwedge M$ por $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$.

O teorema a seguir coleta as propriedades básicas da álgebra exterior.

Teorema 1.6.2. *Seja* M *um* R*-módulo. Então:*

(i) *A k-ésima potência exterior $\bigwedge^k M$ é o quociente de $T^k(M)$ por seu submódulo N gerado pelos elementos da forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$, onde $x_i = x_j$, para algum par de índices $i \neq j$. Em particular, $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = 0$, sempre que $x_i = x_j$, para algum par de índices $i \neq j$.*

(ii) (***Propriedade Universal da k-ésima potência exterior***) *Se $\varphi : M^k \to N$ for um morfismo multilinear alternando de R-módulos, então existe um único morfismo de R-módulos $\psi : \bigwedge^k M \to N$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] & N \\ \bigwedge^k M \arrow[ur, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

onde $i(x_1, ..., x_k) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$. Além disso, se P é um R-módulo juntamente com um morfismo multilinear alternado $f : M^k \to P$ satisfazendo a propriedade acima, então $P \simeq \bigwedge^k M$.

(iii) (***Propriedade Universal da Álgebra Exterior***) *Se E é uma R-álgebra juntamente com um morfismo de R-módulos $\varphi : M \to E$, tal que $\varphi(x)^2 = 0$, para todo $x \in M$, então existe um único morfismo de R-álgebras $\psi : \bigwedge M \to E$ de modo que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] & E \\ \bigwedge M \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver [8], Seção 11.5, Teorema 36 e ver [1], Seção 1.6. □

Exemplo 1.6.3. Seja E um R-módulo livre de posto n com base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e seja k um inteiro positivo. A k-ésima potência exterior $\bigwedge^k E$ é gerada como R-módulo pelos elementos da forma $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, onde $1 \leqslant i_j \leqslant n$. Em particular, se $k > n$, temos $\bigwedge^k E = 0$. No caso em que $k \leqslant n$, como uma permutação nos índices $i_1, \ldots, i_k$ no máximo altera o sinal de $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, segue que $\bigwedge^k E$ é gerado pelos elementos da forma

$$e_J = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

onde $J = i_1 < \cdots < i_k$ percorre todas as sequências crescentes de k elementos em $I_n = \{1, \ldots, n\}$. Afirmamos que tal conjunto de geradores é uma base do R-módulo $\bigwedge^k E$. Para ver isto, considere uma combinação linear nula

$$\sum_J \alpha_J e_J = 0, \tag{1.4}$$

onde J varia no conjunto das sequências crescentes de k elementos em I_n. Fixe um $\tilde{J} = j_1 < \cdots < j_k$ particular. Defina o morfismo de R-módulos $f : E^k \to R$, pondo

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \begin{cases} 0, \text{ se } \{i_1, \ldots, i_k\} \neq \tilde{J}. \\ 1, \text{ se } \{i_1, \ldots, i_k\} = \tilde{J}. \end{cases}$$

Agora considere $F = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \sigma f$, onde ϵ_σ denota o sinal da permutação σ e

$$\sigma f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) := f(e_{\sigma(i_1)}, \cdots, e_{\sigma(i_k)}).$$

Dada uma permutação $\rho \in S_n$, temos:

$$\rho F = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \rho\sigma f = \epsilon_\rho \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\rho\sigma} \rho\sigma f = \epsilon_\rho F.$$

Deste modo, F é uma forma multilinear alternada. Assim, pela propriedade universal da potência exterior, F se estende a um morfismo de R-módulos $\hat{F} : \wedge^k E \to R$.

Note que

$$\hat{F}(e_I) = \begin{cases} 0, \text{ se } I \neq \tilde{J} \text{ como conjunto.} \\ \epsilon_\sigma, \text{ se } I = \sigma\tilde{J}, \text{ para algum } \sigma \in S_n. \end{cases}$$

Por fim, aplicando $\hat{F}$ em (1.4), obtemos $\alpha_{\tilde{J}} = 0$. Como $\tilde{J}$ foi tomado arbitrariamente, segue que o conjunto de geradores dado é uma base para $\wedge^k E$. Em particular, o posto de $\wedge^k E$ é igual a $\binom{n}{k}$.

Encerramos esta subseção com uma breve discussão sobre o produto tensorial de duas álgebras exteriores de módulos.

Considere R-módulos M_1 e M_2. Temos:

$$\begin{aligned} (\wedge M_1) \otimes (\wedge M_1) &= \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \wedge^k M_1 \right) \otimes \left(\bigoplus_{r=1}^{\infty} \wedge^r M_2 \right) \\ &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n, \end{aligned}$$

onde $T_n = \bigoplus_{p+q=n} \wedge^p M_1 \otimes \wedge^q M_2$. Em particular, $T_0 = R$ e $T_1 = M_1 \otimes M_2$. Podemos tornar $(\wedge M_1) \otimes (\wedge M_1)$ uma R-álgebra definindo a multiplicação como se segue: Dados tensores elementares

$$x = m_1 \otimes m_2 \in (\wedge^r M_1) \otimes (\wedge^s M_2) \text{ e } y = m_1{}' \otimes m_2{}' \in (\wedge^{r'} M_1) \otimes (\wedge^{s'} M_2),$$

definimos:

$$x.y := (-1)^{sr'}(m_1 \wedge m_1') \otimes (m_2 \wedge m_2') \in \wedge^{r+r'} M_1 \otimes \wedge^{s+s'} M_2.$$

Por distributividade, estendemos esta definição para o produto de dois elementos quaisquer em $(\wedge M_1) \otimes (\wedge M_1)$. Com esta multiplicação, o produto tensorial $(\wedge M_1) \otimes (\wedge M_2)$ torna-se uma R-álgebra graduada.

O resultado abaixo mostra que o produto tensorial de álgebras exteriores é também uma álgebra exterior.

Proposição 1.6.4. *Sejam M_1 e M_2 R-módulos. Então:*

$$\wedge(M_1 \oplus M_2) \simeq (\wedge M_1) \otimes (\wedge M_2),$$

isomorfismo de R-álgebras graduadas.

Prova. O morfismo inclusão $\varphi : M_1 \oplus M_2 \to (\wedge M_1) \otimes (\wedge M_2)$ cumpre a condição $\varphi^2(x) = 0$, para todo $x \in M_1 \oplus M_2$. Logo, pela propriedade universal da álgebra exterior, φ se estende ao morfismo

$$\overline{\varphi} : \wedge(M_1 \otimes M_2) \to \wedge M_1 \otimes \wedge M_2, \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_r).$$

Por outro lado, sendo

$$\psi_1 : \wedge M_1 \to \wedge(M_1 \oplus M_2), \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto (x_1, 0) \wedge \cdots \wedge (x_r, 0)$$

e

$$\psi_2 : \wedge M_2 \to \wedge(M_1 \oplus M_2), \quad y_1 \wedge \cdots \wedge y_r \mapsto (0, y_1) \wedge \cdots \wedge (0, y_r),$$

defina

$$\psi : (\wedge M_1) \otimes (\wedge M_2) \to \wedge(M_1 \oplus M_2), \quad x \otimes y \mapsto \psi_1(x) \wedge \psi_2(y).$$

Por fim, pode-se verificar que $\psi = \overline{\varphi}^{-1}$. $\square$

1.6.2 Complexo de Koszul

Sejam L um R-módulo e $f : L \to R$ uma forma linear em L. O mapa n-linear alternado

$$f^{(n)} : L^n \to \wedge^{n-1} L, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} f(x_r) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_r} \wedge \cdots \wedge x_n$$

induz, pela propriedade universal da potência exterior, o morfismo

$$\mathrm{d}f^{(n)} : \bigwedge^n L \to \bigwedge^{n-1} L, \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} f(x_r) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_r} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Observe que $\mathrm{d}f^{(n)} \circ \mathrm{d}f^{(n+1)} = 0$. De fato, note inicialmente que $\mathrm{d}f^{(n)} \circ \mathrm{d}f^{(n+1)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1})$ é uma soma de parcelas do tipo

$$\pm f(x_i) f(x_j) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

onde $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Para um par (i,j) fixado, tais parcelas advém da soma

$$\mathrm{d}f^{(n)}((-1)^{i-1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n) + \mathrm{d}f^{(n)}((-1)^{j-1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n).$$

Logo, a soma destas parcelas é

$$(-1)^{i+j-3} f(x_i) f(x_j) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n +$$

$$+ (-1)^{i+j-2} f(x_i) f(x_j) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n = 0.$$

Desta forma, obtemos o complexo

$$K_\bullet(f) : \cdots \to \bigwedge^n L \xrightarrow{\mathrm{d}f^{(n)}} \bigwedge^{n-1} L \to \cdots \to L \xrightarrow{f} R \to 0,$$

o qual é dito ser o *complexo de Koszul de* f.

A partir desta definição, veremos o conceito de complexo de Koszul de uma sequência de elementos de R. Neste contexto, será importante compreender que tal complexo independe da ordem dos termos da sequência. A proposição abaixo, embora técnica, será a ferramenta necessária para compreensão desta propriedade.

Proposição 1.6.5. *Sejam* $f_1 : L_1 \to R$ *e* $f_2 : L_2 \to R$ *formas lineares. Se* $f : L_1 \oplus L_2 \to R$ *é a forma linear dada por*

$$f(x,y) = f_1(x) + f_2(y),$$

então

$$K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2) \simeq K_\bullet(f).$$

Prova. Por definição de produto tensorial de complexos, temos:

$$K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2) : \cdots \to \bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p L_1 \otimes \bigwedge^q L_2 \to \bigoplus_{p+q=n-1} \bigwedge^p L_1 \otimes \bigwedge^q L_2 \to \cdots .$$

Por outro lado, pela Proposição (1.6.4), o isomorfismo graduado

$$\bigwedge L_1 \otimes \bigwedge L_2 \simeq \bigwedge (L_1 \oplus L_2)$$

induz isomorfismos

$$\bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p L_1 \otimes \bigwedge^q L_2 \simeq \bigwedge^n (L_1 \oplus L_2).$$

Logo, o resultado segue da comutatividade do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{lccccccc}
K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2): & \cdots \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p L_1 \otimes \bigwedge^q L_2 & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n-1} \bigwedge^p L_1 \otimes \bigwedge^q L_2 & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \\
K_\bullet(f): & \cdots \longrightarrow & \bigwedge^n (L_1 \oplus L_2) & \longrightarrow & \bigwedge^{n-1} (L_1 \oplus L_2) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

□

Definição 1.6.6. Sejam R um anel, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em R e $L = R^n$. O *complexo de Koszul* da sequência $\mathbf{x}$ é o complexo do Koszul $K_\bullet(f)$, onde f é a forma linear em L tal que $f(e_i) = x_i$. Tal complexo será denotado por $K_\bullet(x)$. Além disso, dado um R-módulo M, definimos o *complexo de Koszul de* $\mathbf{x}$ *com coeficientes em* M como sendo o complexo

$$K_\bullet(\mathbf{x}, M) := K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes M.$$

Explicitamente, temos

$$K_\bullet(\mathbf{x}) : 0 \to \bigwedge^n R^n \xrightarrow{df^{(n)}} \bigwedge^{n-1} R^n \to \cdots \to R^n \xrightarrow{f} R \to 0,$$

onde

$$df^{(t)} : \bigwedge^t R^n \to \bigwedge^{t-1} R^n, \quad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \mapsto \sum_{r=1}^{t} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_{i_t}.$$

Denotaremos a i-ésima homologia dos complexos $K_\bullet(\mathbf{x})$ e $K_\bullet(\mathbf{x}, M)$ por $H_i(\mathbf{x})$ e $H_i(\mathbf{x}, M)$, respectivamente.

Dada uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ em R, considere as formas lineares

$$f : R^n \to R, \quad e_i \mapsto x_i,$$

$$f_1 : R^{n-1} \to R, \quad e_i \longmapsto x_i$$

e

$$f_2 : R \to R, \quad 1_R \mapsto x_n.$$

Segue da Proposição (1.6.5) que

$$K_\bullet(\mathbf{x}) \simeq K_\bullet(x_1, \cdots, x_{n-1}) \otimes K_\bullet(x_n).$$

Procedendo indutivamente, temos

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) \simeq K_\bullet(x_1) \otimes \cdots \otimes K_\bullet(x_n).$$

Em particular, uma vez que o produto tensorial de complexos é comutativo, segue que o complexo de Koszul de uma sequência independe da ordem dos termos da sequência.

Observação 1.6.7. Sendo $I = (x_1, \ldots, x_n)$ e f como na definição 1.6.6, temos que o núcleo de f é precisamente o módulo de sizígias do ideal I. Deste modo, a imagem de $df^{(2)}$ é um conjunto de sizígias de I. Por outro lado, uma maneira simples de obter sizígias para I consiste em escolher um par (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant n$ para obter o elemento $(0, \ldots, \underbrace{-x_j}_{i}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j}, \ldots, 0)$. Observe, por outro lado, que

$$(0, \ldots, \underbrace{-x_j}_{i}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j}, \ldots, 0) = x_i e_j - x_j e_i = df^{(2)}(e_i \wedge e_j).$$

Assim, a imagem de $df^{(2)}$ é gerada por estas "sizígias naturais"de I.

Exemplo 1.6.8. Para um elemento $x \in R$, o complexo de Koszul consiste apenas na multiplicação por x:

$$K_\bullet(x) : 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0.$$

Naturalmente, $H_1(x) = 0$ se, e somente se, x é elemento regular. Desta forma, a regularidade de x se relaciona com a homologia do complexo de Koszul.

Exemplo 1.6.9. Seja $\mathbf{x} = x, y$ em R. Assim, o complexo de Koszul de $\mathbf{x}$ consiste em

$$K_\bullet(\mathbf{x}) : 0 \to R \xrightarrow{df^{(2)}} R^2 \xrightarrow{df^{(1)}} R \to 0,$$

onde

$$df^{(2)} : R \to R^2, \ a \longmapsto (-ay, ax)$$

e

$$df^{(1)} : R^2 \to R, \ (b, c) \longmapsto bx + cy.$$

Suponha que $\mathbf{x}$ seja uma sequência regular. Em particular, $H_0(K_\bullet(\mathbf{x})) = R/(x, y) \neq 0$ e

$$H_2(K_\bullet(\mathbf{x})) = \ker df^{(2)} = 0.$$

Por outro lado,

$$H_1(K_\bullet(\mathbf{x})) = \ker df^{(1)} / \operatorname{Im} df^{(2)}.$$

Afirmamos que $H_2(K_\bullet(\mathbf{x})) = 0$. Com efeito, note inicialmente que isto equivale a mostrar que, dados $\alpha, \beta \in R$ tais que $\alpha x + \beta y = 0$, tem-se que $(\alpha, \beta) \in R(-y, x)$ em R^2. Ora, pela regularidade de $\mathbf{x}$, a igualdade

$$\alpha x + \beta y = 0$$

implica que $\beta = \lambda x$, para algum $\lambda \in R$. Sendo x um elemento regular, concluímos que

$$\alpha = -\lambda y.$$

Logo, $(\alpha, \beta) = \lambda(-y, x) \in R(-y, x)$, como queríamos.

Relacionar a regularidade de uma sequência com as homologias de seu complexo de Koszul é o objetivo central desta seção. Em particular, os exemplos anteriores são casos particulares do Teorema 1.6.13, como veremos. Descrever as homologias de tal complexo não é uma tarefa fácil em geral. Porém, as homologias nas extremidades deste complexo são particularmente simples.

Proposição 1.6.10. *Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência em R e M é um R-módulo, então:*

$$H_0(x, M) \simeq M/\mathbf{x}M \quad e \quad H_n(\mathbf{x}, M) \simeq \{z \in M;\ x_i z = 0, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Prova. Seja

$$K_\bullet(\mathbf{x}, M) : 0 \to \wedge^n R^n \otimes M \xrightarrow{df^{(n)}} \wedge^{n-1} R^n \otimes M \to \cdots \to R^n \otimes M \xrightarrow{f} R \otimes M \to 0.$$

Identificando $R^n \otimes M \simeq M^n$ e $R \otimes M \simeq M$, temos

$$f : M^n \to M, \quad (m_1, \cdots, m_n) \mapsto x_1 m_1 + \cdots + x_n m_n,$$

donde segue que $H_0(x, M) \simeq M/xM$. Analogamente, a partir das identificações $\wedge^n R^n \otimes M \simeq M$ e $\wedge^{n-1} R^n \otimes M \simeq R^n \otimes M \simeq M^n$, temos

$$\begin{array}{rccc} df^{(n)} : & M & \to & M^n \\ & m & \longmapsto & (x_1 m, -x_2 m, \cdots, (-1)^{n-1} x_n m) \end{array}.$$

Logo, $H_n(\mathbf{x}, M) = \ker df^{(n)} \simeq \{z \in M;\ x_i z = 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$. $\square$

Para o próximo teorema, dado um complexo de R-módulos $C_\bullet$ e x um elemento de R, denotaremos o produto tensorial $C_\bullet \otimes K_\bullet(x)$ por $C_\bullet(x)$.

Teorema 1.6.11. *Seja* $(C_\bullet, \delta_\bullet)$ *um complexo de* R*-módulos e* $x \in R$*. Denote por* ${C_\bullet}'$ *o complexo tal que* ${C_{n+1}}' = C_n$*. Temos uma sequência exata de complexos*

$$0 \to C_\bullet \to C_\bullet(x) \to {C_\bullet}' \to 0,$$

a qual induz a sequência exata longa das homologias

$$\cdots \to H_p(C_\bullet) \to H_p(C_\bullet(x)) \to H_{p-1}(C_\bullet) \xrightarrow{(-1)^{p-1}x} H_{p-1}(C_\bullet) \to \cdots .$$

Além disso, vale

$$xH_p(C_\bullet(x)) = 0, \text{ para todo } p.$$

Prova. Seja

$$K_\bullet(x) : 0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R \to 0.$$

Assim, pela definição de produto tensorial de complexos, obtemos

$$C_\bullet(x) = C_\bullet \otimes K_\bullet(x) : \cdots \to C_n \oplus C_{n-1} \xrightarrow{\psi_n} C_{n-1} \oplus C_{n-2} \to \cdots$$

onde

$$\psi_n : C_n \oplus C_{n-1} \to C_{n-1} \oplus C_{n-2}, \quad c_n + c_{n-1} \mapsto \delta_n(c_n) + (-1)^{n-1} x c_{n-1}.$$

Logo, a sequência exata de complexos segue da comutatividade do diagrama abaixo, a qual é de verificação simples:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & C_{n+1} \oplus C_n \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r] & C_n \oplus C_{n-1} \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Resta provar a igualdade anunciada. Seja $\overline{c_p + c_{p-1}} \in H_p(C_\bullet(x)) = \dfrac{\ker \psi_p}{\operatorname{Im} \psi_{p+1}}$. Uma vez que $c_p + c_{p-1} \in \ker \psi_p$, temos

$$\delta_p(c_p) + \delta_{p-1}(c_{p-1}) + (-1)^{p-1} x c_{p-1} = 0 \in C_{p-1} \oplus C_{p-2}.$$

Em particular, obtemos:

$$\begin{cases} \delta_{p-1}(c_{p-1}) = 0. \\ \delta_p(c_p) + (-1)^{p-1} x c_{p-1} = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $x(c_p + c_{p-1}) = \psi_{p+1}((-1)^p c_p)$. De fato:

$$\psi_{p+1}((-1)^p c_p) = \delta_p((-1)^p c_p) + (-1)^{2p} x c_p = x(c_p + c_{p-1}).$$

□

Corolário 1.6.12. *Se* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *é uma sequência de elementos de* R *e* M *é um* R*-módulo, então:*

$$\mathbf{x} H_p(\mathbf{x}, M) = 0.$$

Prova. No caso em que $n = 1$, temos $K_\bullet(x_1, M) = K_\bullet(x_1) \otimes M$. Logo, basta tomar $C = M$ no teorema anterior. Agora, seja $n > 0$ e fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$. Uma vez que

$$K_\bullet(x, M) = K_\bullet(x_i) \otimes K_\bullet(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n, M),$$

segue que $K_\bullet(\mathbf{x}, M) = C_\bullet(x_i)$, onde $C_\bullet = K_\bullet(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n, M)$. Logo, novamente pelo teorema anterior, obtemos:

$$x_i H_p(\mathbf{x}, M) = 0.$$

donde segue o resultado. □

Podemos agora relacionar a regularidade de uma sequência com as homologias de seu complexo de Koszul.

Teorema 1.6.13. *Sejam* M *um* R*-módulo e* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *uma* M*-sequência. Então:*

$$H_p(\mathbf{x}, M) = 0, \textit{ para todo } p > 0.$$

Reciprocamente, suponha válida a condição abaixo.

(i) $(R, \mathfrak{m})$ *é noetheriano local, com* $\mathbf{x} \subset \mathfrak{m}$ *e* M *é finitamente gerado.*

Neste caso, se $H_1(\mathbf{x}, M) = 0$*, então* $\mathbf{x}$ *é uma* M*-sequência.*

Prova. Faremos indução sobre n. O caso $n = 1$ é trivial pois, neste caso, $K_\bullet(x, M)$ é apenas a multiplicação por x. Supomos agora $n > 1$. Fazendo $C_\bullet = K_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}, M)$ no Teorema 1.6.11, obtemos a sequência exata abaixo:

$$H_p(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) \to H_p(x, M) \to H_{p-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) \xrightarrow{(-1)^{p-1} x_n} H_{p-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, M). \tag{1.5}$$

Por hipótese indutiva, $H_p(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) = 0$. Além disso, caso $p > 1$, também temos por hipótese indutiva que

$$H_{p-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) = 0,$$

donde segue que $H_p(x, M) = 0$. No caso $p = 1$, obtemos por (1.5):

$$0 \to H_1(x, M) \to H_0(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) \xrightarrow{x_n} H_0(x_1, \ldots, x_{n-1}, M). \tag{1.6}$$

Uma vez que

$$H_0(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) = \frac{M}{(x_1, \ldots, x_{n-1})M},$$

o resultado segue da exatidão da sequência (1.6) juntamente com a regularidade de x_n em

$$M/(x_1, \ldots, x_{n-1})M.$$

Agora suponha válida a condição $i)$. Mais uma vez, faremos indução em n para mostrar a regularidade da sequência $x = x_, \ldots, x_n$. Como na primeira parte desta demonstração, o caso $n = 1$ é imediato. Suponha então $n > 1$. Fazendo $C_\bullet = K_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}, M)$ e $p = 2$ no Teorema 1.6.11, obtemos a sequência exata

$$H_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) \xrightarrow{-x_n} H_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) \to H_1(x, M).$$

Como $H_1(x, M) = 0$, concluímos que

$$H_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) = (-x_n)H_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, M).$$

Logo, pelo lema de Nakayama, segue que $H_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, M) = 0$. Por hipótese de indução, a sequência $\tilde{x} = x_1, \ldots, x_{n-1}$ é M-regular. Por fim, segue de (1.6) que x_n é $M/(x_1, \ldots, x_n)M$-regular. □

Corolário 1.6.14. *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *anel noetheriano local. Se* $\mathfrak{m}$ *é gerado por uma sequência regular* $x = x_1, \ldots, x_n$*, então o complexo de Koszul* $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ *induz uma resolução livre minimal de* k*.*

Prova. De fato, pelo teorema anterior, o complexo

$$K_\bullet(x) : 0 \to \wedge^n R^n \xrightarrow{df^{(n)}} \wedge^{n-1} R^n \to \cdots \to R^n \xrightarrow{f} R \to 0,$$

é tal que $H_i(K_\bullet(x)) = 0$, para todo $i > 0$. Por outro lado, sendo $\operatorname{Im} f = \mathfrak{m}$, obtemos a resolução

livre
$$0 \to \bigwedge^n R^n \xrightarrow{df^{(n)}} \bigwedge^{n-1} R^n \to \cdots \to R^n \xrightarrow{f} R \to k \to 0.$$

O fato de tal resolução ser minimal decorre imediatamente da definição da diferencial df. $\square$

O resultado a seguir estabelece de forma precisa como o complexo de Koszul influencia no cálculo do grade de um ideal.

Teorema 1.6.15. *Seja* R *um anel noetheriano,* $I = (y_1, \ldots, y_n)$ *um ideal de* R *e* M *um* R*-módulo finitamente gerado com* $M \neq IM$*. Se* $q = \max\{i;\ H_i(y, M) \neq 0\}$*, então*

$$\text{grade}\,(I, M) = n - q.$$

Prova. Seja $x = x_1, \ldots, x_s$ uma M-sequência maximal em I. Façamos indução em s. No caso em que $s = 0$, temos grade$\,(I, M) = 0$, de modo que $I \subset Z(M)$. Consequentemente, $I \subset p$, para algum $p \in \operatorname{Ass} M$. Escrevendo $p = \operatorname{Ann}(z)$ para um certo $z \in M$ não-nulo, concluímos que $y_i z = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, pela Proposição 1.6.10, concluímos que $H_n(y, M) \neq 0$. Logo, $q = n$ e o resultado está provado neste caso.

Suponha agora $s > 0$. Denote $M_1 = M/x_1M$ e considere a sequência exata

$$0 \to M \xrightarrow{x_1} M \to M_1 \to 0.$$

Uma vez que cada termo do complexo $K_\bullet(y, M)$ é plano (por ser livre), obtemos a sequência exata de complexos
$$0 \to K_\bullet(y, M) \to K_\bullet(y, M) \to K_\bullet(y, M_1) \to 0.$$

a qual induz a sequência longa das homologias

$$\cdots \to H_i(y, M) \xrightarrow{y_1} H_i(y, M) \to H_i(y, M_1) \to H_{i-1}(y, M) \xrightarrow{y_1} H_{i-1}(y, M) \to \cdots$$

Pelo Corolário 1.6.12,
$$y_1 H_i(y, M) = y_1 H_{i-1}(y, M) = 0.$$

Consequentemente, para cada i, temos a sequência exata

$$0 \to H_i(y, M) \to H_i(y, M_1) \to H_{i-1}(y, M) \to 0. \tag{1.7}$$

para cada i. Por outro lado, pela definição de q, devemos ter $H_q(y, M) \neq 0$ e $H_{q+1}(y, M) = 0$. Logo, fazendo $i = q + 1$ em (1.7), obtemos $H_{q+1}(y, M_1) \neq 0$. Substituindo i sucessivamente por $q + 1, q + 2$, etc, obtemos $H_i(y, M_1) = 0$, para todo $i > q + 1$. Deste modo, uma vez que

$x_2, \ldots, x_s$ é uma M_1-sequência maximal em I, segue da hipótese indutiva que

$$s - 1 = n - (q + 1),$$

donde $s = n - q$. $\square$

Corolário 1.6.16. *Sejam* M *um* R*-módulo finitamente gerado com* $(R, \mathfrak{m})$ *anel noetheriano local e* $I = (y_1, \ldots, y_n) \subset \mathfrak{m}$ *um ideal de* R *com* $IM \neq M$*. Denote* $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$*. São equivalentes:*

(a) $\mathbf{y}$ *é uma* M*-sequência.*

(b) $\operatorname{grade}(I, M) = n$.

(c) $H_1(\mathbf{y}, M) = 0$.

Prova. (a)⇒(b) Segue da definição de grade de um ideal.

(b)⇒(c) Se $\operatorname{grade}(I, M) = n$, então $q = 0$ no enunciado do teorema anterior. Assim, $H_1(\mathbf{y}, M) = 0$.

(c)⇒(a) Segue do Teorema 1.6.13. $\square$

Os dois resultados precedentes mostram que, no caso local, uma sequência estará tão próxima de ser regular quanto seu complexo de Koszul estará próximo de ser exato.

Exemplo 1.6.17. Sejam $R = k[X, Y]_{(X,Y)}/(Y^2 - X^3)$ e $\mathbf{x} = X, Y$. Note que $\overline{(-X^2, Y)}$ é uma sizígia do ideal (X, Y) de R. Além disso, $\overline{(-X^2, Y)} \notin R(-Y, X)$. Assim, $H_1(k_\bullet(\mathbf{x})) \neq 0$. É imediato que $H_2(k_\bullet(\mathbf{x})) = 0$. Logo, com a notação do Teorema 1.6.15, $q = 1$, donde $\operatorname{depth} R = 1$.

Capítulo 2

Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Neste capítulo, apresentamos os conceitos de anel e módulo Cohen-Macaulay e deduzimos suas principais propriedades que justificam as vantagens de se trabalhar nestes ambientes. Dedicamos duas seções a anéis Cohen-Macaulay especiais: Anéis regulares e anéis de interseção completa. Na seção de anéis regulares, apresentamos o teorema clássico de Auslander-Buchsbaum-Serre. Os anéis de interseção completa são caracterizados a partir de um invariante associado ao complexo de Koszul.

2.1 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Definição 2.1.1. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é um R-*módulo Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth} M = \dim M$. No caso em que R não é local, M é dito um R-módulo Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ for um $R_{\mathfrak{m}}$- módulo Cohen Macaulay, para cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$. Um anel noetheriano R é um *anel Cohen-Macaulay* se for um R-módulo Cohen-Macaulay.

Convencionando que o módulo nulo é Cohen-Macaulay, podemos dizer que M é Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ for $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Macaulay, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Dado um anel noetheriano R, o Teorema 1.2.12 estabelece que

$$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}} = \operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R),$$

para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in R$. Assim, a condição de R ser Cohen-Macaulay é equivalente a exigir que $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Esta simples observação já é uma primeiro indício das vantagens de se trabalhar num anel Cohen-Macaulay.

Exemplo 2.1.2. Todo corpo é um anel Cohen-Macaulay. Mais geralmente, todo anel artiniano é

Cohen-Macaulay. O anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros também é anel Cohen-Macaulay uma vez que todo ideal maximal de $\mathbb{Z}$ tem grade e altura iguais a 1.

Exemplo 2.1.3. Mais geralmente, todo anel reduzido de dimensão 1 é Cohen-Macaulay. De fato, seja R um tal anel. Dado um ideal maximal $\mathfrak{m}$, como $\dim R = 1$ e $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) \leqslant \operatorname{ht}\mathfrak{m} \leqslant 1$, segue que $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) \leqslant 1$. Se for $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) = 1$, então teremos também $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = 1$. Caso seja $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) = 0$, $\mathfrak{m}$ será formado por divisores de zero de R, ou seja, estará contido na união de seus primos associados, os quais são todos minimais, já que R é reduzido.

Logo, pelo lema da esquiva, $\mathfrak{m}$ seria um primo minimal de R, tendo, portanto, $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = 0$. Assim, R é Cohen-Macaulay.

Exemplo 2.1.4. O anel $R = K[X, Y]/(X^2, XY)$ não é Cohen-Macaulay. Para ver isto, considere o ideal maximal $\mathfrak{m} = \overline{(X, Y)}$. Temos que $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = 1$. Por outro lado, dado $f = a\overline{X} + b\overline{Y} \in \mathfrak{m}$, temos $f\overline{X} = 0$. Isto mostra que todo elemento de $\mathfrak{m}$ é divisor de zero em R e, portanto

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) = 0.$$

Assim, R não é Cohen-Macaulay.

O teorema a seguir coleta algumas boas propriedades válidas no ambiente Cohen-Macaulay.

Teorema 2.1.5. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel noetheriano local e M um R-módulo Cohen-Macaulay não-nulo. Então:*

(a) $\dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{depth} M$*, para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$*. Em particular,* M *não possui primos imersos.*

(b) $\operatorname{grade}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$*, para todo ideal* $I \subset \mathfrak{m}$*.*

(c) $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *é uma* M*-sequência se, e somente se,* $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n$*.*

(d) $\mathbf{x}$ *é uma* M*-sequência se, e somente se,* $\mathbf{x}$ *faz parte de um sistema de parâmetros de* M*.*

Prova. (a) Pela Proposição 1.5.15, já temos $\operatorname{depth} M \leqslant \dim R/\mathfrak{p}$. Além disso, por definição de $\dim M$, vale a desigualdade $\dim R/\mathfrak{p} \leqslant \dim M$. Uma vez que $\dim M = \operatorname{depth} M$, a igualdade está provada.

(b) Façamos indução sobre $\operatorname{grade}(I, M)$. Se $\operatorname{grade}(I, M) = 0$, então, $I \subset \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Deste modo, pelo item anterior é suficiente mostrar que $\dim M/IM = \dim R/\mathfrak{p}$. Ora, como $\operatorname{Supp}(M/IM) \subset \operatorname{Supp} M$, concluímos que $\dim M/IM \leqslant \dim M = \dim R/\mathfrak{p}$. Por outro lado, uma vez que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ e $I \subset \mathfrak{p}$, segue do Lema de Nakayama que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/IM)$, donde $\dim M/IM \geqslant \dim R/\mathfrak{p}$.

Suponha agora $\operatorname{grade}(I, M) > 0$. Assim, podemos tomar $x \in I$ elemento M-regular. Uma vez que

$$\operatorname{depth} M/xM = \operatorname{depth} M - 1 \quad \text{e} \quad \dim M/xM = \dim M - 1$$

concluímos que M/xM é Cohen-Macaulay. Logo, por hipótese indutiva, obtemos

$$\operatorname{grade}(I, M/xM) = \dim M/xM - \dim(M/xM)/I(M/xM) = \dim M/xM - \dim M/IM.$$

Por fim, como $\operatorname{grade}(I, M/xM) = \operatorname{grade}(I, M) - 1$, o resultado está provado.

(c) Pelo Corolário 1.6.16, $\mathbf{x}$ é uma M-sequência se, e somente se, $\operatorname{grade}(I, M) = n$, onde $I = (\mathbf{x})$. Logo, basta aplicar o item anterior.

(d) Segue do item anterior juntamente com o Teorema 1.5.14. $\square$

Exemplo 2.1.6. Seja $R = k[X, Y, Z]_{(X,Y,Z)}/(XY, XZ)_{(X,Y,Z)}$. Note que, sendo $\mathbf{m}$ o ideal maximal de R, temos

$$\mathbf{m}^2 = (X^2, Y^2, Z^2, XY, XZ, YZ)_{(X,Y,Z)} = (X^2, Y^2, Z^2, YZ)_{(X,Y,Z)}.$$

Uma vez que, em R, valem as igualdades

$$X(X + Y) = X^2 \text{ e } Y(X + Y) = Y^2,$$

concluímos que $\mathbf{m}^2 \subset (X + Y, Z)$. Além disso, sendo $\dim R = 2$, podemos afirmar que $\{X + Y, Z\}$ é um sistema de parâmetros para R. Por outro lado, Z é um divisor de zero em R, tendo em vista que

$$\operatorname{Ass} R = (X)_{(X,Y,Z)} \cup (Y, Z)_{(X,Y,Z)},$$

ou, mais diretamente, observando que $XZ = 0$ em R. Logo, segue do item $d)$ do Teorema 2.1.5 que R não é Cohen-Macaulay.

Veremos a seguir algumas operações para as quais a propriedade de ser Cohen-Macaulay é estável. Isto nos dará uma fonte maior de exemplos de anéis Cohen-Macaulay.

Teorema 2.1.7. *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo Cohen-Macaulay.*

(a) *Suponha que $\mathbf{x}$ é uma M-sequência. Então $M/\mathbf{x}M$ é R-módulo Cohen-Macaulay. A recíproca vale no caso R local.*

(b) *M_p é R_p-módulo Cohen-Macaulay para todo $p \in \operatorname{Spec} R$. Além disso, se $M_p \neq 0$, então*

$$\operatorname{depth} M_p = \operatorname{grade}(p, M).$$

(c) *Se* R *for local, então*

$$\dim M_{\mathfrak{p}} + \dim \frac{M}{\mathfrak{p}M} = \dim M.$$

Prova. (a) Se R for local, então basta mostrar que $\operatorname{depth} M/\mathbf{x}M = \dim M/\mathbf{x}M$, o que segue diretamente das igualdades

$$\begin{cases} \dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n \\ \\ \operatorname{depth} M/\mathbf{x}M = \operatorname{depth} M - n \end{cases} \tag{2.1}$$

Por outro lado, se R não for local, tome $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$, ideal maximal de R. Uma vez que

$$(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}} \simeq M_{\mathfrak{m}}/\overline{\mathbf{x}}M_{\mathfrak{m}},$$

onde $\overline{\mathbf{x}}$ é a imagem de $\mathbf{x}$ em $R_{\mathfrak{m}}$, segue do caso local que $(M/\mathbf{x}M)_{\mathfrak{m}}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Macaulay. Assim, $M/\mathbf{x}M$ é R-módulo Cohen-Macaulay. A validade da recíproca no caso local é consequência imediata das igualdades (2.1).

(b) Vamos provar o resultado inicialmente para o caso em que R é local. O resultado é trivial se $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} M$. Assim, seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. Pelo Teorema 1.2.12, item (a), obtemos $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) \leqslant \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}}$. Deste modo, obtemos as desigualdades:

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) \leqslant \operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} \leqslant \dim M_{\mathfrak{p}}.$$

Assim, basta mostrar que $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) = \dim M_{\mathfrak{p}}$, o será provado fazendo indução em $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M)$. Analisemos primeiramente o caso em que $\operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) = 0$. Neste caso, temos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, para algum $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$. Pelo Teorema 2.1.5, $\mathfrak{q}$ é um elemento minimal de $\operatorname{Ass} M$. Deste modo, como $\operatorname{Supp} M$ e $\operatorname{Ass} M$ possuem os mesmos elementos minimais, concluímos que $\mathfrak{p}$ é primo minimal em $\operatorname{Ass} M$. Desta forma, pela igualdade

$$\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q}'R_{\mathfrak{p}}; \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p} \quad \text{e} \quad \mathfrak{q}' \in \operatorname{Ass} M\}.$$

segue que $\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$. Consequentemente

$$\operatorname{rad}(\operatorname{Ann} M_{\mathfrak{p}}) = \bigcap_{\mathfrak{q}' \in Min(\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}})} \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

donde segue que

$$\dim M_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}}/\operatorname{Ann} M_{\mathfrak{p}} = 0.$$

Assuma agora que grade $(\mathfrak{p}, M) > 0$. Neste caso, podemos escolher $x \in \mathfrak{p}$ elemento M-regular. Sendo $M' = M/xM$, temos que M' é R-módulo Cohen-Macaulay pelo item (a). Além disso,

$$\begin{cases} \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M') = \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, M) - 1. \\ \\ \dim M'_{\mathfrak{p}} = \dim M_{\mathfrak{p}} - 1. \end{cases}$$

Logo, por hipótese indutiva, grade $(\mathfrak{p}, M') = \dim M'_{\mathfrak{p}}$, donde grade $(\mathfrak{p}, M) = \dim M_{\mathfrak{p}}$.

Nos resta agora provar o caso geral sem a hipótese de que R é local. Tomemos então $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Nosso objetivo é provar que $M_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$-módulo Cohen Macaulay. Fixe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ com $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Uma vez que $R_{\mathfrak{p}} \simeq (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}}$, temos:

$$\begin{aligned} (M_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}} &\simeq M_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}} \\ &\simeq (M \otimes_R R_{\mathfrak{m}}) \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}} \\ &\simeq M \otimes_R [R_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}}] \\ &\simeq M \otimes_R (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}} \\ &\simeq M \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq M_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Sendo M um R-módulo Cohen-Macaulay, $M_{\mathbf{m}}$ é $R_{\mathbf{m}}$-Cohen-Macaulay. Pelo caso local feito anteriormente juntamente com os isomorfismos acima, concluímos que $M_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay.

(c) A igualdade segue diretamente do item (b) deste teorema juntamente com o item (b) do Teorema 2.1.5. □

Observação 2.1.8. Mais geralmente, se M é um R-módulo Cohen-Macaulay e $S \subset R$ é um subconjunto multiplicativo qualquer, então M_S é R_S-módulo Cohen-Macaulay. A ideia é reduzir este caso geral ao que foi feito no Teorema 2.1.7: Dado um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R_S, sabemos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_S$ para algum ideal primo $\mathfrak{p}$ de R com $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Logo $(R_S)_{\mathfrak{m}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$ e $(M_S)_{\mathfrak{m}} \simeq M_{\mathfrak{p}}$. Assim, M_S é R_S-módulo Cohen-Macaulay pois $M_{\mathfrak{p}}$ é $R_{\mathfrak{p}}$-módulo Cohen-Macaulay.

Corolário 2.1.9. *Seja* R *um anel Cohen-Macaulay. Então*

$$\operatorname{grade} I = \operatorname{ht} I,$$

para todo ideal $I \subset R$. *Além disso, se* R *for local, também vale*

$$\operatorname{ht} I + \dim R/I = \dim R,$$

para todo ideal $I \subset R$.

Prova. Uma vez que

$$\text{grade}\, I = \inf\{\text{depth}\, R_p, p \in V(I)\} \quad \text{e} \quad \text{ht}\, I = \inf\{\dim R_p, p \in V(I)\},$$

a primeira igualdade segue. A segunda igualdade segue imediatamente do item b) do Teorema 2.1.5. □

Teorema 2.1.10. *Seja* R *um anel noetheriano. Então,* $R[X]$ *é anel Cohen-Macaulay se, e somente se,* R *é Cohen-Macaulay.*

Prova. Se $R[X]$ for Cohen-Macaulay, então $R \simeq R[X]/(X)$ é Cohen-Macaulay pelo item (a) do Teorema 2.1.7. Suponha agora que R é Cohen-Macaulay e seja $\mathfrak{m}$ ideal maximal de $R[X]$. Devemos provar que $\text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]) = \text{ht}\,\mathfrak{m}$. Para isto, considere a contração $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap R$ de $\mathfrak{m}$ em R.

Digamos que $\text{ht}\,\mathfrak{p} = n$. Como $\mathfrak{p}R[X] \neq \mathfrak{m}$, concluímos que $\text{ht}\,\mathfrak{m} = n + 1$ (Ver [6], Teorema 149). Desta forma, basta mostrar que

$$\text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]) \geqslant n + 1.$$

Como R anel Cohen-Macaulay, $\text{grade}\,(\mathfrak{p}, R) = n$. Assim, seja $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$ uma R-sequência maximal em $\mathfrak{p}$. Uma vez que $\mathbf{y}$ permanece sendo uma sequência regular em $R[X]$, obtemos

$$\text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]/\mathbf{y}R[X]) = \text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]) - n.$$

Desta forma, basta provar que $\text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]/\mathbf{y}R[X]) \geqslant 1$. Suponha então que

$$\text{grade}\,(\mathfrak{m}, R[X]/\mathbf{y}R[X]) = 0.$$

Deste modo, $\mathfrak{m}$ está contido nos divisores de zero de $R[X]/\mathbf{y}R[X]$. Em particular, $X \notin \mathfrak{m}$, donde segue que $R[X] = (\mathfrak{m}, X)$. Podemos portanto escrever

$$1 = Xf + g, \quad \text{para algum } g \in \mathfrak{m} \text{ e } f \in R[X].$$

Consequentemente, $1 - Xf \in \mathfrak{m}$. No entanto, afirmamos que $1 - Xf$ é elemento regular de $R[X]/\mathbf{y}R[X]$. Para isto, suponha que $(1 - Xf)p(X) \in \mathbf{y}R[X]$ e escreva

$$p(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k.$$

É suficiente provar que $a_k \in \mathbf{y}R$. Faremos isto por indução sobre k. Para o caso $k = 0$, note inicialmente que $\mathbf{y}R[X] = \mathbf{y}R + (y_1X)R[X] + \cdots + (y_nX)R[X]$. Assim, podemos escrever

$$(1 - Xf)p(X) = b + y_1Xf_1 + \cdots + y_nXf_n \tag{2.2}$$

com $b \in \mathbf{y}R$ e $f_i \in R[X]$. Avaliando (2.2) em $X = 0$, obtemos $a_0 = b \in \mathbf{y}R$. Supondo agora $a_t \in \mathbf{y}R$ para todo $t < k$, temos

$$(1 - Xf)p(X) = \underbrace{\sum_{t=0}^{k-1} a_tX^t(1 - Xf)}_{\in\, yR[X]} + \sum_{t=k}^{m} a_tX^t(1 - Xf) \in yR[X]$$

donde

$$\sum_{t=k}^{m} a_tX^t(1 - Xf) \in \mathbf{y}R[X].$$

Como a_k é o coeficiente de X^k no somatório acima, escrevendo uma igualdade análoga a (2.2), concluímos que $a_k \in \mathbf{y}R$. Desta forma, está mostrado que $1-Xf$ é elemento regular de $R[X]/\mathbf{y}R[X]$, o que é um absurdo visto que $1 - Xf \in \mathfrak{m}$. Isto encerra a demonstração. $\square$

Em particular, se R for Cohen-Macaulay, então $R[X_1, \ldots, X_n]$ é Cohen-Macaulay.

Exemplo 2.1.11. O anel de polinômios $k[X]$ com k um corpo é um anel Cohen-Macaulay. A k-álgebra $k\left[\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right]$ é Cohen-Macaulay pois

$$k\left[\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right] \simeq \frac{k[X, Y]}{(X^2 + Y^2 - 1)}.$$

Exemplo 2.1.12. Seja K um corpo. O anel quociente

$$A = \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{p}$$

é Cohen-Macaulay para todo ideal primo p com $\operatorname{ht} p \in \{0, 1, n-1, n\}$. De fato, se $\operatorname{ht} p = 0$, então $p = 0$ e $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ é Cohen-Macaulay. Se $\operatorname{ht} p = 1$, então p é ideal principal (ver Lema 2.2.19). Logo, A é Cohen-Macaulay pelo item $a)$ do Teorema 2.1.7. Se $\operatorname{ht} p = n - 1$, então A é um domínio de dimensão de Krull 1, e portanto Cohen-Macaulay pelo Exemplo 2.1.3. Por fim, se $\operatorname{ht} p = n$, então p é ideal maximal e A é Cohen-Macaulay por ser um corpo.

Exemplo 2.1.13. Considere a k-álgebra $R = k[X^4, X^3Y, XY^3, Y^4]$. Afirmamos que R não é Cohen-

Macaulay. Para tal, considere o seguinte ideal maximal de R:

$$\mathfrak{m} = (X^4, X^3Y, XY^3, Y^4).$$

Uma vez que
$$R/(X^4, Y^4) \simeq k[X^3Y, XY^3],$$
(X^4, Y^4) é ideal primo de R. Logo, a cadeia de inclusões

$$(0) \subset (X^4, Y^4) \subset \mathfrak{m}$$

nos mostra que $\operatorname{ht}\mathfrak{m} \geqslant 2$. Além disso,

$$\mathfrak{m}^4 \subset (X^4, Y^4), \text{ donde } \mathfrak{m} = \operatorname{rad}(X^4, Y^4).$$

Consequentemente
$$\operatorname{rad}(X^4, Y^4)_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}.$$

Assim, pelo Teorema 1.5.3, $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim R_{\mathfrak{m}} \leqslant 2$. Desta forma, $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = 2$. No entanto, afirmamos que $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, R) = 1$. De fato, as igualdades

$$\begin{cases} (X^3Y)^2 = X^6Y^2 \notin X^4R. \\ \\ X^3Y(X^3Y)^2 = X^8XY^3 \in X^4R. \\ \\ XY^3(X^3Y)^2 = (X^4Y^4)X^3Y \in X^4R. \\ \\ Y^4(X^3Y)^2 = X^4(XY^3)^2 \in X^4R. \end{cases}$$

mostram que todo elemento de R é divisor de zero em $R/(X^4)R$. Assim, X^4 é uma sequência regular maximal em $\mathfrak{m}$.

Exemplo 2.1.14. Podemos completar a discussão iniciada no Exemplo 2.1.12 afirmando que se $n > 3$, então para cada $i \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ existe um ideal primo $\mathfrak{p}$ com $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = i$ e A não Cohen-Macaulay. Com este objetivo, seja R a k-álgebra do exemplo anterior e definamos inicialmente o morfismo sobrejetor

$$\varphi : k[X_1, X_2, X_3, X_4] \to R, \quad F(X_1, X_2, X_3, X_4) \mapsto F(X^4, X^3Y, XY^3, Y^4)$$

e seja $\mathfrak{p} = \ker \varphi$. Assim
$$k[X_1, X_2, X_3, X_4]/\mathfrak{p} \simeq R$$
não é Cohen-Macaulay pelo exemplo anterior. Também concluímos que $\mathfrak{p}$ é ideal primo de $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Além disso, como $\{X^4, Y^4\}$ é base de transcendência para a k-álgebra R, sua dimensão de Krull é 2 e, portanto, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 2$. Isto resolve o problema para o caso $n = 4$. Se $n > 4$, o isomorfismo

$$k[X_1, \ldots, X_n]/(\mathfrak{p}, X_5, \ldots, X_r) \simeq (k[X_1, X_2, X_3, X_4]/\mathfrak{p})\,[X_{r+1}, \ldots, X_n] \quad (5 \leqslant r \leqslant n)$$

juntamente com o Teorema 2.1.10 garantem que o ideal $(\mathfrak{p}, X_5, \ldots, X_r)$ é primo e que o quociente

$$k[X_1, \ldots, X_n]/(\mathfrak{p}, X_5, \ldots, X_r)$$

não é Cohen-Macaulay. Ademais

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}, X_5, \ldots, X_r) = r - 2$$

varre o conjunto $\{3, \ldots, n-2\}$ para $5 \leqslant r \leqslant n$. Analogamente, o isomorfismo

$$k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p} \simeq (K[X_1, X_2, X_3, X_4]/\mathfrak{p})\,[X_5, \ldots, X_n]$$

garante que o quociente
$$k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}$$
não é Cohen-Macaulay. Como $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 2$, isto encerra todos os casos.

Veremos agora como a propriedade Cohen-Macaulay pode ser caracterizada pela decomposição primária de certos ideais.

Definição 2.1.15. *Seja R um anel noetheriano. Um ideal I de R é dito puro se todo primo associado a I possui a mesma altura.*

Note que todo ideal puro não possui primos imersos. Além disso, se $\operatorname{ht} I = n$ e I pode ser gerado por n elementos, então não possuir primos imersos implica em ser puro.

Teorema 2.1.16. *Seja R um anel noetheriano. Então, R é Cohen-Macaulay se, e somente se, todo ideal I gerado por $\operatorname{ht} I$ elementos for puro.*

Prova. Suponha que R é Cohen-Macaulay e seja $I = (x_1, \ldots, x_n)$ com $n = \operatorname{ht} I$. Basta mostrar que I não possui primos imersos. Assim, considere $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} R/I$ com $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ e vejamos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Tomando um ideal maximal $\mathfrak{m}$ com $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$, temos que $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{q}R_{\mathfrak{m}}$ são primos associados de $I_{\mathfrak{m}}$. Deste modo, pelo item a) do Teorema 2.1.5, basta provar que $R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen Macaulay. Sendo $R_{\mathfrak{m}}$ anel Cohen-Macaulay local, o corolário anterior nos diz que

$$\dim R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}} = \dim R_{\mathfrak{m}} - \operatorname{ht} I_{\mathfrak{m}}.$$

Afirmamos que $\operatorname{ht} I_{\mathfrak{m}} = n$. De fato, como $I_{\mathfrak{m}}$ é gerado por n elementos, temos $\operatorname{ht} I_{\mathfrak{m}} \leqslant n$ pelo Teorema do Ideal de Krull. Por outro lado

$$\begin{aligned} \operatorname{ht} I_{\mathfrak{m}} &= \inf\{\operatorname{ht} \mathfrak{p}'R_{\mathfrak{m}};\ \text{com } \mathfrak{p}' \text{ ideal primo de } R \text{ e } I \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{m}\} \\ &= \{\operatorname{ht} \mathfrak{p}'; \text{com } \mathfrak{p}' \text{ ideal primo de } R \text{ e } I \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{m}\} \\ &\geqslant \operatorname{ht} I. \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{ht} I_{\mathfrak{m}} = n$ e $\dim R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}} = \dim R_{\mathfrak{m}} - n$. Por outro lado, pelo corolário anterior, $n = \operatorname{grade} I_{\mathfrak{m}}$. Logo, resulta do Corolário 1.6.16 que $\overline{x}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-regular, onde $\overline{x}$ é a imagem de x em $R_{\mathfrak{m}}$. Logo:

$$\operatorname{depth}\ (R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}) = \operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}} - b = \dim R_{\mathfrak{m}} - n,$$

o que implica que $R_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$ é anel Cohen-Macaulay. Isto prova a primeira implicação. Para a implicação reversa, provemos que $\operatorname{ht} I = \operatorname{grade} I$ para todo ideal $I \subset R$. Digamos que $\operatorname{ht} I = n$. Como R é noetheriano, existem $x_1, \ldots, x_n \in I$ tais que $\operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_i) = i$, para cada i. Observe que $x_{i+1} \notin \mathfrak{p}$, para cada $\mathfrak{p}$ primo minimal em $\operatorname{Ass}(R/(x_1, \ldots, x_i))$. De fato, do contrário a inclusão $(x_1, \ldots, x_{i+1}) \subset \mathfrak{p}$ implicaria que $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = i + 1$, o que é um absurdo. Por outro lado, $(x_1, \ldots, x_i)$ é puro e portanto, não possui primos imersos. Deste modo, x_{i+1} é elemento $R/(x_1, \ldots, x_i)$-regular, donde a sequência $x_1, \ldots, x_n$ é R-regular. Resulta daí que $\operatorname{grade} I \geqslant n$. Ora, mas $\operatorname{grade} I \leqslant \operatorname{ht} I = n$. Segue que $\operatorname{grade} I = \operatorname{ht} I$, donde R é anel Cohen-Macaulay. □

2.2 Anéis Regulares

2.2.1 Definição e propriedades.

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Pelo lema de Nakayama, o número mínimo de geradores de seu ideal maximal pode ser expresso pela dimensão do k-espaço vetorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Definimos este número como sendo a *dimensão de imersão* de R, denotada por $\operatorname{embdim} R$. Em geral, temos $\dim R \leqslant \operatorname{embdim} R$, pelo teorema do ideal de Krull. Quando a igualdade ocorre, dizemos que R é um *anel regular local*.

Exemplo 2.2.1. Dado um corpo k, $k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ e $k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ são exemplos de anéis regulares locais.

Exemplo 2.2.2. Seja $R = k[X]/(X^2)$. Note que R é um anel local artiniano. Assim, $\dim R = 0$. Por outro lado, o ideal maximal de R é principal e não-nulo. Assim, $\operatorname{embdim} R = 1$. Portanto, R não é um anel regular local.

Observe que se $(R, \mathfrak{m})$ é regular, então qualquer gerador mínimo de $\mathfrak{m}$ é um sistema de parâmetros de R. Por esta razão, quando $(R, \mathfrak{m})$ é regular, cada gerador mínimo de $\mathfrak{m}$ é dito ser um *sistema regular de parâmetros* de R. Vejamos uma condição para que o quociente de um anel regular local permaneça regular.

Proposição 2.2.3. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel regular. Se $I = (x_1, \ldots, x_t)$ e $x_1, \ldots, x_t$ é parte de um sistema regular de parâmetros de R, então R/I é regular.

Prova. Seja $n = \dim R$. Por hipótese, existe um sistema regular de parâmetros $\{x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n\}$ de R. Pelo Teorema 1.5.14, segue que

$$\dim R/I = n - t.$$

Por outro lado, sendo η o ideal maximal de R/I, temos $\eta = (\overline{x_{t+1}}, \ldots, \overline{x_n})$. Assim:

$$n - t = \dim R/I \leqslant \operatorname{embdim} R/I \leqslant n - t.$$

Portanto, $\dim R/I = \operatorname{embdim} R/I$, donde R/I é regular local. $\square$

A condição de ser regular repercurte na natureza aritmética do anel, como vemos a seguir.

Teorema 2.2.4. *Todo anel regular local é um domínio.*

Prova. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel regular. Faremos indução em $\dim R$. Caso $\dim R = 0$, R é um corpo e o resultado está provado. Suponha agora $\dim R > 0$ e sejam $p_1, \ldots, p_n$ os primos minimais de R. Afirmamos que existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$ que não pertence a $\mathfrak{m}^2$ e nem a nenhum dos primos minimais de R. De fato, se este não fosse o caso, teríamos

$$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2 \cup p_1 \cup \cdots \cup p_n.$$

Pelo lema da esquiva, uma vez que $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}^2$ (Pois isto implicaria que $\mathfrak{m} = 0$, contrariando a hipótese $\dim R > 0$), devemos ter $\mathfrak{m} = p_i$, para algum i. Ora, mas isto nos diz que $\mathfrak{m}$ é um primo minimal e portanto, $\dim R = 0$, contrariando novamente a hipótese $\dim R > 0$. Deste modo, podemos escolher um elemento $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ com $x \notin p_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $x \notin \mathfrak{m}^2$, a imagem de x no k-espaço vetorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ é não-nula. Estendendo-a a uma base deste espaço vetorial, concluímos pelo lema de Nakayama que x faz parte de um gerador mínimo de $\mathfrak{m}$. Pela Proposição 2.2.3, segue que $R/(x)$ é regular. Por outro lado, pelo Teorema 1.5.14,

$$\dim R/(x) = \dim R - 1.$$

Assim, deduzimos, por hipótese indutiva, que $R/(x)$ é um domínio. Desta forma, (x) é ideal primo de R e, portanto, contém $\mathfrak{p}_i$, para algum i. Por fim, para tal índice i, dado $y \in \mathfrak{p}_i$, podemos escrever

$$y = ax$$

para algum $a \in R$. Como $x \notin \mathfrak{p}_i$, segue que $a \in \mathfrak{p}_i$. Assim, está provado que

$$\mathfrak{p}_i = x\mathfrak{p}_i.$$

Pelo lema de Nakayama, segue que $\mathfrak{p}_i = (0)$, o que mostra que R é um domínio. □

Proposição 2.2.5. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *um gerador mínimo de* $\mathfrak{m}$. *São equivalentes:*

(a) R *é regular.*

(b) $\mathbf{x}$ *é uma sequência regular.*

Prova. (a)⇒(b) Uma vez que R é regular, $\mathbf{x}$ é um sistema de parâmetros de R. Assim,

$$R/(x_1, \ldots, x_i)$$

é regular e portanto um domínio, para cada $i = 1, \ldots, n-1$. Segue que x_{i+1} é elemento regular sobre $R/(x_1, \ldots, x_i)$, donde $\mathbf{x}$ é uma sequência regular.

(b)⇒(a) Por um lado, sendo $\mathbf{x}$ uma sequência regular, $\mathbf{x}$ é parte de um sistema de parâmetros de R e assim, $\dim R \geqslant n$. Por outro lado, como

$$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$$

concluímos pelo teorema do ideal de Krull que

$$\dim R = \operatorname{ht} \mathfrak{m} \leqslant n.$$

□

Segue da proposição anterior que todo anel regular local é Cohen-Macaulay. Assim, estamos de fato estudando um tipo especial de anel Cohen-Macaulay. A igualdade entre as dimensões de Krull e de imersão num anel regular local R nos fornece uma medida de controle universal para a dimensão projetiva de todos os seus R-módulos. Este é um aspecto que diferencia os anéis regulares locais dos anéis Cohen-Macaulay em geral. Para entender isto melhor, começamos com a definição abaixo.

Definição 2.2.6. *A dimensão global de um anel* R *é o supremo das dimensões projetivas de seus* R*-módulos.*

Denotamos a dimensão global de R por dimgl R. Desta forma:

$$\text{dimgl}\, R = \sup\{\dim\text{proj}\, M,\ M \text{ é um } R\text{-módulo}\}.$$

Um aspecto crucial a respeito da dimensão global é que ela pode ser calculada restringindo-se aos R-módulos finitamente gerados. Este resultado dependerá dos lemas a seguir.

Lema 2.2.7. Seja M um R-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) M é um R-módulo projetivo.

(b) $\text{Ext}^n_R(M, N) = 0$, para todo R-módulo N e $n > 0$.

(c) $\text{Ext}^1_R(M, N) = 0$, para todo R-módulo N.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b) Sendo M projetivo,

$$P_\bullet : 0 \to M \to 0$$

é uma resolução projetiva deletada de M. Logo, aplicando o funtor $\text{Hom}(-, N)$ ao complexo acima, obtemos

$$\text{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\text{Hom}(P_\bullet, N)) = 0,$$

para todo $n > 0$.

(b)$\Rightarrow$(c) Trivial.

(c)$\Rightarrow$(a) Pelo Corolário 4.1.9, é suficiente mostrar que o funtor $\text{Hom}_R(M, -)$ é exato. Dado uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

obtemos a sequência exata longa induzida

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \to \mathrm{Hom}(M, B) \to \mathrm{Hom}(M, C) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(M, A)}_{0}.$$

Isto encerra a demonstração. □

Podemos generalizar o resultado anterior, obtendo uma melhor compreensão sobre como a nulidade do funtor $\mathrm{Ext}_R(M, -)$ afeta a dimensão projetiva de M.

Lema 2.2.8. *Seja M um R-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $\dim\mathrm{proj}\, M \leqslant n$.

(b) $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0$*, para todo R-módulo N e para todo $i > n$.*

(c) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0$*, para todo R-módulo N.*

(d) *Se $0 \to K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ é uma sequência exata de R-módulos com os P_i's projetivos, então K_{n-1} é projetivo.*

Prova. (a)⇒(b) Seja $r = \dim\mathrm{proj}\, M \leqslant n$ e tome uma resolução projetiva de M

$$P_\bullet : 0 \to P_r \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

Segue que

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = H^i(\mathrm{Hom}(P_\bullet, n)) = 0.$$

para $i > r$.

(b)⇒(c) Trivial.

(c)⇒(d) Sendo N um R-módulo arbitrário e $K_0 = \ker f_0$, obtemos a sequência exata

$$0 \to K_0 \to P_0 \to M \to 0$$

a qual induz a sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^n_R(P_0, N)}_{0} \to \mathrm{Ext}^n_R(K_0, N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}_R(P_0, N)}_{0} \to \cdots$$

Consequentemente,

$$\mathrm{Ext}^n_R(K_0, N) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0.$$

Analogamente, tomando $K_1 = \ker f_1$ e repetindo o raciocínio acima, deduzimos que

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(K_1, N) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(K_0, N) = 0.$$

Iterando o raciocínio, concluímos que

$$\mathrm{Ext}_R^n(K_{n-1}, N) = 0.$$

Assim, pelo Lema 2.2.7, K_{n-1} é projetivo.

(d)$\Rightarrow$(a) Segue da definição de dimensão projetiva de um módulo. □

Corolário 2.2.9. *Se* M, N *são* R*-módulos,* N *tem dimensão projetiva finita e é um somando direto de* M*, então*

$$\dim \mathrm{proj}\, N \leqslant \dim \mathrm{proj}\, M.$$

Prova. Se $\dim \mathrm{proj}\, M = \infty$, não há o que se fazer. Suponha agora que $\dim \mathrm{proj}\, M = n$. Sendo

$$N \oplus \tilde{N} = M,$$

considere sequências exatas

$$0 \to K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to N \to 0$$

e

$$0 \to \tilde{K}_{n-1} \to \tilde{P}_{n-1} \to \cdots \to \tilde{P}_0 \to \tilde{N} \to 0$$

onde $P_i, \tilde{P}_i$ são módulos projetivos. Destas sequências, se obtém a sequência exata

$$0 \to K_{n-1} \oplus \tilde{K}_{n-1} \to P_{n-1} \oplus \tilde{P}_{n-1} \to \cdots \to P_0 \oplus \tilde{P}_0 \to N \oplus \tilde{N} \to 0.$$

Pelo lema anterior, concluímos que $K_{n-1} \oplus \tilde{K}_{n-1}$ é projetivo, donde segue que K_{n-1} é projetivo. Logo, $\dim \mathrm{proj}\, N \leqslant n$. □

Lema 2.2.10. *Seja* M *um* R*-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\dim \mathrm{inj}\, M \leqslant n$.

(b) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$, *para todo ideal* $I \subset R$.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b) Suponha que $\dim \mathrm{inj}\, M = r \leqslant n$ e considere uma resolução injetiva de M

$$Q^\bullet : 0 \to Q^0 \to \cdots \to Q^r \to 0.$$

Segue que

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = H^{n+1}(\operatorname{Hom}(R/I, Q^\bullet)) = 0.$$

(b)⇒(a) Faremos indução sobre n. Suponha inicialmente $n = 0$. Devemos mostrar que M é um R-módulo injetivo. Faremos isto utilizando o critério de Baer. Sendo assim, fixe um ideal $I \subset R$. Da sequência exata

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0,$$

obtemos a sequência exata longa induzida pelo funtor $\operatorname{Ext}_R(-, M)$:

$$0 \to \operatorname{Hom}(R/I, M) \to \operatorname{Hom}(R, M) \to \operatorname{Hom}(I, M) \to \underbrace{\operatorname{Ext}_R^1(R/I, M)}_{0} \to \cdots$$

Daí, concluímos que o morfismo

$$\psi : \operatorname{Hom}(R, M) \to \operatorname{Hom}(I, M), \quad f \mapsto f \circ i$$

é sobrejetor. Pelo critério de Baer, segue que M é um R-módulo injetivo. Suponha agora $n > 0$ e tomemos uma resolução injetiva de M

$$Q^\bullet : 0 \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} Q_n \to \cdots$$

Seja $C = \operatorname{Coker} \varphi_{n-2}$. Isto nos fornece a sequência exata

$$0 \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^{n-2} \to Q^{n-1} \to C \to 0 \tag{2.3}$$

Se C for R-módulo injetivo, então (2.3) é uma resolução injetiva para M, donde $\dim \operatorname{inj} M \leqslant n$. Logo, é suficiente provar que C é injetivo. Ora, conectando (2.3) a uma resolução injetiva de C, obtemos:

$$\operatorname{Ext}_R^1(R/I, C) \simeq \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0.$$

Pelo caso $n = 0$, concluímos que C é injetivo. □

Corolário 2.2.11. *Seja* R *um anel. Então:*

$$\operatorname{dimgl} R = \sup\{\dim \operatorname{proj} M,\ M \textit{ é } R\textit{-módulo finitamente gerado}\}.$$

Prova. Suponha que $\dim \operatorname{proj} M \leqslant n$ para todo R-módulo finitamente gerado e mostremos que a mesma desigualdade vale para um R-módulo qualquer. Fixado um ideal $I \subset R$, uma vez que R/I é um R-módulo finitamente gerado, temos

$$\dim\operatorname{proj} R/I \leqslant n.$$

Daí, dado um R-módulo M, segue que

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0.$$

Consequentemente, $\dim\operatorname{inj} M \leqslant n$. Com esta desigualdade vale para todo R-módulo, obtemos pelo Lema 2.2.10 que

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0,$$

para quaisquer R-módulos M, N. Por fim, usando agora o Lema 2.2.8, concluímos que

$$\dim\operatorname{proj} M \leqslant n$$

para todo R-módulo M. □

Exemplo 2.2.12. Seja R um domínio de ideais principais que não é um corpo.. Afirmamos que $\operatorname{dimgl} R = 1$. De fato, se M é um R-módulo finitamente gerado não-nulo, podemos construir um morfismo sobrejetor $\varphi : R^n \to M$. Uma vez que, sobre um domínio de ideais principais, todo submódulo de um módulo livre também é livre, concluímos que $\ker\varphi$ é livre. Isto nos dá uma resolução livre

$$F_\bullet : 0 \to \ker\varphi \to R^n \to M \to 0$$

de comprimento 1. Assim,

$$\dim\operatorname{proj} M \leqslant 1.$$

Pelo corolário anterior, segue que

$$\operatorname{dimgl} R \leqslant 1.$$

Por outro lado, pelo exemplo 4.1.4, para qualquer ideal não-nulo I de R, temos que $M = R/I$ não é R-módulo projetivo. Logo, $\dim\operatorname{proj} M = 1$. Desta forma,

$$\operatorname{dimgl} R = 1.$$

Teorema 2.2.13. *Seja R anel noetheriano local com corpo residual k. Então:*

$$\operatorname{dimgl} R = \dim\operatorname{proj} k.$$

Prova. Já temos, por definição de dimensão global, a desigualdade $\operatorname{dimgl} R \geqslant \dim\operatorname{proj} k$. Se

$\dim\operatorname{proj} k = \infty$, o resultado é trivial. Supondo agora $n = \dim\operatorname{proj} k$, concluímos por definição do funtor Tor que

$$\operatorname{Tor}^R_{n+1}(M, k) = 0.$$

Logo, pelo Corolário 1.3.5, segue que

$$\dim\operatorname{proj} M \leqslant n$$

para todo R-módulo finitamente gerado. Pelo corolário anterior, isto mostra que $\operatorname{dimgl} R \leqslant n$. Assim, o teorema está provado. $\square$

Desta forma, no caso local, a dimensão global parece se comportar melhor. Neste caso, iremos provar que a finitude da dimensão global é equivalente a regularidade do anel.

O resultado a seguir é um lema técnico.

Lema 2.2.14. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. *Então,* $\mathfrak{m}/xR$ *é somando direto do* R*-módulo* $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$.

Prova. Considere o morfismo natural $f : \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/xR$. Basta provar que existe um morfismo $g : \mathfrak{m}/xR \to \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ cumprindo a igualdade $f \circ g = \mathrm{id}$. De fato, isto implica que a sequência exata

$$0 \to \ker f \to \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \xrightarrow{f} \mathfrak{m}/xR$$

cinde, o que garante que $\mathfrak{m}/xR$ é somando direto de $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ conforme a Proposição 4.1.7. Como $x \notin \mathfrak{m}^2$, podemos construir um gerador mínimo de $\mathfrak{m}$ a partir de x, digamos $\mathfrak{m} = (x, x_1, \ldots, x_s)$. Sendo $\mathfrak{b} = (x_1, \ldots, x_s)$, não é difícil verificar que

$$\mathfrak{b} \cap xR \subset x\mathfrak{m}.$$

Assim, temos o isomorfismo

$$\mathfrak{m}/xR = (\mathfrak{b} + xR)/xR \simeq \mathfrak{b}/xR \cap \mathfrak{b}$$

o qual nos permite identificar o morfismo natural $g : \mathfrak{b}/xR\cap\mathfrak{b} \to \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ como $g : \mathfrak{m}/xR \to \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. A verificação de que $f \circ g = \mathrm{id}$ é imediata. $\square$

Teorema 2.2.15 (Auslander-Buchsbaum-Serre)**.** *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local. Então,* R *é regular se, e somente se sua dimensão global é finita. Em caso, positivo, vale a igualdade*

$$\operatorname{dimgl} R = \dim R = \dim\operatorname{proj} k.$$

Prova. Suponha inicialmente que R é regular com $\dim R = n$. Tome $x = x_1, \ldots, x_n$ um sistema regular de parâmetros. Sendo x uma R-sequência em $\mathfrak{m}$, o Corolário 1.6.14 nos diz que o complexo de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ é uma resolução livre minimal de k. Assim, $\dim\operatorname{proj} k = n$. Logo, segue do Teorema 2.2.13 que $\operatorname{dimgl} R = n$. Suponha agora que $\operatorname{dimgl} R$ é finita. Em particular, $\dim\operatorname{proj} \mathfrak{m}$ é finita também. Mostraremos que este fato implica na regularidade de R, fazendo indução sobre $n = \operatorname{embdim} R$. No caso em que $n = 0$, R é um corpo e portanto, regular. Suponha agora $n > 0$. Afirmamos que existe um elemento regular $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. De fato, se este não fosse o caso, então obteríamos a inclusão

$$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$$

onde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ são os primos associados de R. Pelo lema da esquiva, isto implica em

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \text{ ou } \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i, \text{para algum } i.$$

Na primeira possibilidade, obtemos $\mathfrak{m} = 0$, contrariando o fato de n ser positivo. O caso $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i$ exige maior análise. Primeiramente, existe $c \in R$ não nulo tal que $c\mathfrak{m} = 0$, pois $\mathfrak{m}$ é um primo associado de R. Isto já nos diz que $\mathfrak{m}$ não é R-módulo projetivo, pois se o fosse, $\mathfrak{m}$ seria livre e a igualdade $c\mathfrak{m} = 0$ nos conduz ao mesmo absurdo de que $\mathfrak{m} = 0$. Por outro lado, sendo $\mathfrak{m}$ um primo associado de R, temos $\operatorname{depth} R = 0$. Assim, pelo Teorema de Auslander-Buchsbaum, $\dim\operatorname{proj} \mathfrak{m} = 0$, donde $\mathfrak{m}$ é R-módulo projetivo, o que é uma contradição.

Assim, podemos escolher um elemento regular $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. Considere $R' = R/xR$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/xR$. Não é difícil verificar que $\operatorname{embdim} R' = n - 1$. Se provarmos que $\dim\operatorname{proj} \mathfrak{n}$ é finita, então, poderemos usar a hipótese indutiva para garantir que R' é regular. Daí, como

$$\dim R' = \dim R - 1,$$

concluiremos que $\dim R = n$, ou seja, que R é regular. Portanto, basta provar a finitude de $\dim\operatorname{proj} \mathfrak{n}$. Para isto, começamos notando que, pelo Lema 1.3.6:

$$\dim\operatorname{proj}_{R'} \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} = \dim\operatorname{proj}_R \mathfrak{m} < \infty.$$

Por outro lado, usando agora o Lema 2.2.14, podemos concluir que $\mathfrak{m}/xR$ é somando direto de $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$. Isto posto, obtemos pelo Corolário 2.2.9 que

$$\dim\operatorname{proj}_{R'} \mathfrak{m}/xR < \infty.$$

Isto encerra a demonstração. □

Corolário 2.2.16. *Se* R *é um anel regular local e* $\mathfrak{p}$ *é ideal primo de* R*, então* $R_{\mathfrak{p}}$ *é anel regular.*

Prova. Pelo teorema anterior, $\dim\text{proj}\ R/\mathfrak{p} < \infty$. Assim, podemos tomar uma resolução projetiva $P_\bullet$ para $R/\mathfrak{p}$. Segue que $P_\bullet \otimes R_{\mathfrak{p}}$ é uma resolução do projetiva do $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Assim, o corpo residual de $R_{\mathfrak{p}}$ possui dimensão projetiva finita. Pelo teorema anterior, $R_{\mathfrak{p}}$ é anel regular. □

Exemplo 2.2.17. Considere o anel $R = k[X]/(X^2)$. Vimos no exemplo 2.2.2 que R é um anel local que não é regular. O corpo residual de R visto como R-módulo é isomorfo a k, onde a ação de $\overline{X}$ sobre k é nula. Pelo Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre juntamente com o Teorema 2.2.13, deduzimos que $\text{projdim}_R k = \infty$.

Podemos verificar isto diretamente, a partir da resolução livre minimal infinita

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{.X} R \xrightarrow{.X} R \xrightarrow{\pi} k \to 0$$

onde $\pi : R \to k$ é a projeção canônica de R sobre $k = k[X]/(X)$. A infinitude da dimensão projetiva de k como R-módulo decorre agora do Corolário 1.3.5.

Observação 2.2.18. Podemos naturalmente generalizar o exemplo anterior, considerando o anel $R = k[X]/(X^n)$, para $n > 1$. Note que, neste caso, uma resolução livre minimal infinita de k é dada por

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow R \xrightarrow{.X^{n-1}} R \xrightarrow{.X} R \xrightarrow{.X^{n-1}} R \xrightarrow{.X} R \xrightarrow{\pi} k \to 0.$$

2.2.2 O teorema das Sizígias de Hilbert e o teorema de Auslander-Buchsbaum-Nagata

Nesta seção, encerramos nosso estudo de propriedades aritméticas dos anéis regulares locais, apresentando o teorema de Auslander-Buchsbaum-Nagata, o qual afirma que tais anéis são domínios de fatoração única. Em seguida, estenderemos o conceito de anel regular para o caso não local. Veremos que os anéis de polinômios com coeficientes num corpo formam um anel regular com dimensão global finita, a partir do teorema das Sizígias de Hilbert.

Começamos com dois lemas técnicos a respeito de DFU's.

Lema 2.2.19. *Seja* D *um domínio noetheriano. Então,* D *é um DFU se, e somente se, todo ideal primo de altura 1 é principal.*

Prova. Suponha que D é um DFU e seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de altura 1. Tomando um elemento d não-nulo em $\mathfrak{p}$, segue que algum de seus fatores irredutíveis pertence a $\mathfrak{p}$. Chamando tal fator de d', obtemos a inclusão $(d') \subset \mathfrak{p}$. Por outro lado, (d') também é ideal primo de altura 1. Logo, $(d') = \mathfrak{p}$.

Para a recíproca, é suficiente mostrar que todo elemento irredutível de D é primo. Com este objetivo, considere um elemento irredtutível u em D e seja p um primo minimal sobre (u). Pelo teorema do ideal de Krull, obtemos $\operatorname{ht} p = 1$. Assim, $p = (a)$ para algum $a \in D$. Podemos então escrever $u = ta$ para algum $t \in D$. Como u é irredutível, t é invertível e portanto $(u) = p$. Em particular, u é elemento primo de D. □

Lema 2.2.20. *Sejam* D *um domínio noetheriano e* π *um elemento primo de* D. *Se* D_π *for um DFU, então* D *é um DFU.*

Prova. Pelo lema anterior, basta tomar um ideal primo p e mostrar que $\operatorname{ht} p = 1$. Denote por S o conjunto multiplicativo das potências de π. Se p intersectar S, então $\pi \in p$, donde $p = (\pi)$. Caso p seja disjunto de S, pD_π será um ideal primo de altura 1 em D_π e, portanto, principal. Deste modo, o conjunto

$$X = \{(a), aD_\pi = pD_\pi\}$$

não é vazio. Sendo D noetheriano, X possui um elemento maximal, digamos (b). Vamos provar que $p = (b)$. Para isto, observe preliminarmente que $b \notin (\pi)$. Com efeito, se este fosse o caso, poderíamos escrever

$$b = t\pi,$$

com $t \in D$. Assim, como $b \in p$ e $\pi \notin p$, temos $t \in p$. Ora, mas então $(b) \subsetneq (t)$ e $(t) \in X$, contrariando a maximalidade de (b). Finalmente, dado $x \in p$, como $x \in bD_\pi$, obteremos $u \in D$ e $\pi^n \in S$ tais que

$$\pi^n x = ub.$$

Como π é elemento primo e $\pi \nmid b$, segue que $\pi \mid u$. Deste modo, a igualdade acima se reduz a

$$\pi^{n-1} x = \tilde{u} b.$$

Iterando o argumento anterior, obtemos por fim , $x \in (b)$, o que prova que $p = (b)$. □

Teorema 2.2.21 (Auslander-Buchsbaum-Nagata)**.** *Todo anel regular local é um DFU.*

Prova. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel regular local. Faremos indução em $\dim R$. Caso $\dim R = 0$, então R é um corpo e, portanto, um DFU. Suponha agora $\dim R > 0$. Podemos escolher um elemento $\pi \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$. Assim, π faz parte de um sistema regular de parâmetros de R, o que nos diz que $R/(\pi)$ é regular. Deste modo, (π) é um ideal primo. Pelo Lema 2.2.20 é suficiente provar que $S = R_\pi$ é um DFU. Para isto, tomemos um ideal primo $p \in S$ com altura 1 e provemos que p é ideal principal.

Seja T o conjunto multiplicativo das potências de π. Dado um ideal primo $q \in S$, sabemos que

$$q = T^{-1}\tilde{p}$$

para algum ideal primo $\tilde{p}$ de R, com $\tilde{p}$ disjunto de T. Em partiular, $S_q \simeq R_{\tilde{p}}$. Por outro lado, $\tilde{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Consequentemente

$$\dim S_q = \dim R_{\tilde{p}} = \operatorname{ht} \tilde{p} < \dim R.$$

Assim, por hipótese indutiva, S_q é um DFU. Se $p \not\subset q$, então $pS_q \simeq S_q$ Caso $p \subset q$, então pS_q é ideal primo de altura 1 em S_q e, desta forma, é ideal principal . Como S_q é um domínio, obtemos também $pS_q \simeq S_q$. Assim, de todo modo, temos $pS_q \simeq S_q$. Em particular, pS_q é S_q-módulo livre de posto 1, para todo ideal primo q de S. Isto implica que p é S-módulo projetivo. Agora escrevamos $p = T^{-1}\beta$, com β ideal primo de R. Como R é regular local, $\dim \operatorname{proj} \beta$ é finita. Assim, existe uma resolução livre minimal finita para β. Localizando tal resolução, obtemos uma resolução livre finita de S-módulos para p:

$$G_\bullet : 0 \to G_s \xrightarrow{\varphi_s} G_{s-1} \to \cdots \to G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_0 \to p \to 0$$

Se $s = 0$, então $p \simeq G_0$. Além disso, p possui posto 1. Logo, $G_0 = S$ e, assim, p é principal. Suponha então $s > 0$. Note que, se p possui uma resolução livre do tipo

$$0 \to S^n \xrightarrow{\varphi} S^{n+1} \to p \to 0 \tag{2.4}$$

então, pelo teorema de Hilbert-Burch, p é principal, como queríamos. Assim, é suficiente provar que p admite uma resolução livre como em (2.4). Faremos indução sobre s.

Se $s = 1$, o resultado segue do fato de p ter posto 1 juntamente com a Proposição 1.4.6. Suponha agora $s > 1$. Como p é um S-módulo projetivo, não é difícil verificar que seus módulos de sizígias com respeito a $G_\bullet$ também o são. Em particular, a sequência exata

$$0 \to \ker G_{s-1} \to G_{s-1} \to \operatorname{Im} G_{s-1} \to 0$$

cinde, ou seja

$$G_{s-1} \simeq \operatorname{Im} G_{s-1} \oplus \ker \varphi_{s-1}.$$

Por outro lado, como φ_s é injetor e $\operatorname{Im} \varphi_s = \ker \varphi_{s-1}$, concluímos que

$$G_{s-1} \simeq \operatorname{Im}_{s-1} \oplus G_s.$$

Assim, $G_\bullet$ induz a resolução livre

$$G'_\bullet : 0 \to \operatorname{Im} G_{s-1} \oplus G_s \to G_{s-2} \oplus G_s \to G_{s-3} \to \cdots \to G_0 \to \mathfrak{p} \to 0$$

de comprimento $s-1$. Pela hipótese indutiva, a afirmação está provada. $\square$

Podemos estender a noção de regularidade para o caso não-local.

Definição 2.2.22. Um anel noetheriano R é dito *regular* se $R_\mathfrak{m}$ é um anel regular local, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Observação 2.2.23. É imediato que o Corolário 2.2.16 se estende ao caso não-local.

Exemplo 2.2.24. Vejamos que o teorema de Auslander-Buchsbaum-Nagata não se aplica ao caso não local. Para isto, considere o anel $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 + X)$. Note que R é um anel noetheriano não-local, onde, pelo teorema dos zeros de Hilbert, os ideais maximais são da forma $\mathfrak{m} = (X - a, Y - b)$, com $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $b^2 - a^3 + a = 0$. Vamos mostrar que R é regular. Para tal, usaremos o resultado abaixo (vide [9], Proposição 4.6.3):

Seja k *um corpo algebricamente fechado,* $f \in k[X,Y]$ *um polinômio irredutível e* $(a,b) \in \mathbb{A}^2_k$ *um ponto da curva* $f(x,y) = 0$*, correspondendo ao ideal maximal* $\mathfrak{m} = (X-a, Y-b)$ *do anel* $S = k[X,Y]/(f)$. *Então:*

$$\dim_k \frac{\mathfrak{m}S_\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}S_\mathfrak{m})^2} = \begin{cases} 2, \text{ se } \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0. \\ \\ 1, \text{do contrário.} \end{cases}$$

No nosso caso, sendo $f = Y^2 - X^3 + X$, as condições

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0,$$

implicam que $b = 0$ e $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e nenhuma dessas soluções satisfaz $f(a,b) = 0$. Assim,

$$\dim_k \frac{\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}{(\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^2} = 1,$$

para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Logo, $\operatorname{embdim} R_\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m} = 1$. Portanto, $R_\mathfrak{m}$ é regular para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Assim, R é um anel regular.

Vejamos agora que R não é um DFU. Considere o ideal primo $\mathfrak{p} = (\overline{X}, \overline{Y})$ de R. Note que

$\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$. Assim, se R for DFU, então $\mathfrak{p}$ deve ser principal, conforme o Lema 2.2.19. Observe que

$$\mathfrak{p}^2 = (\overline{X}^2, \overline{XY}, \overline{Y}^2) = (\overline{X}^2, \overline{XY}, \overline{X}^3 - \overline{X}) = (\overline{X}, \overline{XY}) = (\overline{X}).$$

Considere ainda o k-automorfismo $\sigma : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[X,Y]$ dado por $\sigma(X) = X$ e $\sigma(Y) = -Y$. Uma vez que $\sigma(Y^2 - X^3 + X) = Y^2 - X^3 + X$, podemos estender σ a R. Com tal extensão, vale, é claro, $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Agora suponhamos que $\mathfrak{p}$ é ideal principal. Como todo elemento de R pode ser escrito na forma $a(\overline{X}) + b(\overline{X})\overline{Y}$, com $a(X), b(X) \in \mathbb{C}[X]$ e, como vimos, vale $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, podemos escrever

$$\mathfrak{p} = (a(\overline{X}) + b(\overline{X})\overline{Y}) = (a(\overline{X}) - b(\overline{X})\overline{Y}).$$

Assim,

$$(\overline{X}) = \mathfrak{p}^2 = (a(\overline{X}) + b(\overline{X})\overline{Y}).(a(\overline{X}) - b(\overline{X})\overline{Y}) = (a^2(\overline{X}) - b^2(\overline{X})\overline{Y}^2).$$

Em particular,

$$\overline{X} = (u(\overline{X}) + v(\overline{X})\overline{Y}).(a^2(\overline{X}) - b^2(\overline{X})\overline{Y}^2) = (u(\overline{X}) + v(\overline{X})\overline{Y}).(a^2(\overline{X}) - b^2(\overline{X})(\overline{X}^3 - \overline{X})).$$

para certos $u(X), v(X) \in \mathbb{C}[X]$. Assim, existe $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tal que

$$X = (u(X) + v(X)Y)(a^2(X) - b^2(X)(X^3 - X)) + p(X,Y)(Y^2 - X^3 + X).$$

Analisando o grau de Y nos dois membros da igualdade acima, concluímos que $p(X,Y) = 0$. De

$$X = (u(X) + v(X)Y)(a^2(X) - b^2(X)(X^3 - X))$$

segue que $a^2(X) - b^2(X)(X^3 - X)$ é uma constante não-nula ou é da forma λX, para algum $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. O primeiro caso não ocorre uma vez que os graus de $a^2(X)$ e de $b^2(X)(X^3 - X)$ possuem paridades diferentes.

Quanto ao segundo caso, teríamos que $a(X)$ é múltiplo de X, o que reduz este caso a uma igualdade do tipo

$$X(u'(X))^2(X) - b^2(X)(X^2 - 1) = \lambda.$$

Pela mesma razão do primeiro caso, obtemos uma contradição. Logo, R não é um DFU.

Assim como ocorre com os anéis Cohen-Macaulay, a regularidade também é uma propriedade preservada por adjunção de uma indeterminada.

Teorema 2.2.25. *Se R for um anel regular, então $R[X]$ também é regular.*

Prova. Tome $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de $R[X]$ e provemos que $R[X]_{\mathfrak{m}}$ é anel regular. Seja $\mathfrak{p}$ a contração de $\mathfrak{m}$ em R. Uma vez que

$$(R[X])_{\mathfrak{m}} \simeq (R_{\mathfrak{p}}[X])_{\mathfrak{m}}$$

e $R_{\mathfrak{p}}$ é regular, podemos supor sem perda de generalidade que R é anel local e que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap R$ é seu ideal maximal. Com isto em mente, podemos compreender a natureza de $\mathfrak{m}$ a partir de sua imagem em $R[X]/\mathfrak{p}R[X] \simeq k[X]$. De fato, sendo $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}R[X]$ ideal maximal de $k[X]$, segue que

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{p}R[X] = (\bar{f}(X))$$

onde $\bar{f}(X)$ é um polinômio irredutível em $k[X]$, imagem de um polinômio $f(X) \in R[X]$. Usando o isomorfismo acima, concluímos que

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, f(X)).$$

Assim, como $\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}}$ é gerado pelas imagens dos geradores de $\mathfrak{p}$ juntamente com a imagem de $f(X)$, deduzimos que

$$\text{embdim} R[X]_{\mathfrak{m}} \leqslant \dim R + 1.$$

Por outro lado, como $\mathfrak{p}R[X] \neq \mathfrak{m}$, temos

$$\dim R[X]_{\mathfrak{m}} = \operatorname{ht} \mathfrak{m} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + 1 = \dim R + 1.$$

Isto prova a igualdade $\dim R[X]_{\mathfrak{m}} = \dim R[X]_{\mathfrak{m}}$ e conclui a demonstração. $\square$

Em particular, se k é um corpo, $k[X_1, \dots, X_n]$ é um anel regular.

Em geral, ao menos que seja local, um anel regular não necessariamente possui dimensão global finita. Um caso positivo de grande importância é justamente o anel de polinômios $k[X_1, \dots, X_n]$. Este é o conteúdo do teorema seguinte, um resultado clássico da álgebra comutativa.

Teorema 2.2.26. *(Teorema das Sizígias de Hilbert) Seja k um corpo e $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Então, dado um R-módulo finitamente gerado M, a n-ésima sizígia de M numa resolução qualquer de módulos projetivos finitamente gerados é um R-módulo livre. Em particular,* $\dim\text{proj}\, M \leqslant n$.

Prova. Inicialmente note que, dado um ideal maximal m de R, R_m é um anel regular local. Assim, se M é um R-módulo finitamente gerado,

$$\dim\text{proj}_{R_m} M_m \leqslant \text{dimgl}\, R_m = \dim R_m = n.$$

Agora, seja $P_\bullet$ uma resolução qualquer de M formada por módulos projetivos finitamente gerados (tal resolução existe pois M é finitamente gerado) e denote por N o n-ésimo módulo de sizígias de M associado a $P_\bullet$. Para cada ideal maximal m de R, N_m possui dimensão projetiva finita e, pelo

Corolário 4.1.15, segue que

$$\dim\operatorname{proj}_{R_m} M_m = n + \dim\operatorname{proj}_{R_m} N_m.$$

Logo, devemos ter $\dim\operatorname{proj}_{R_m} N_m = 0$. Portanto, N_m é um R_m-módulo projetivo. Logo, é um módulo livre, conforme a Observação 4.1.12. □

Observação 2.2.27. A demonstração do teorema anterior também pode ser usada para mostrar que, se R é um anel regular (não necessariamente local) de dimensão n, então $\dim\operatorname{proj} M \leqslant n$, para todo R-módulo finitamente gerado M. Em particular $\operatorname{dimgl} R \leqslant n$. Como em geral, para anéis noetherianos, $\dim R \leqslant \operatorname{dimgl} R$, obtemos a igualdade

$$\dim R = \operatorname{dimgl} R.$$

Existem anéis regulares com dimensão global infinita. Necessariamente, tais anéis possuem dimensão de Krull infinita.

Corolário 2.2.28. *A dimensão global do anel* $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ *é* n.

Prova. Do teorema anterior, temos que $\operatorname{dimgl} R \leqslant n$. Por outro lado, seja $I = (X_1, \ldots, X_n)$. Uma vez que I é um ideal perfeito de grade n, $\operatorname{dimproj} R/I = n$. Logo, $\operatorname{dimgl} R = n$. □

2.3 Anéis de Interseção Completa

Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e $x = x_1, \ldots, x_n$ um gerador mínimo de $\mathfrak{m}$. Pelo Corolário 1.6.12 sabemos que

$$\mathfrak{m} H_p(K_\bullet(x)) = 0,$$

para todo p. Em particular, isto nos diz que $H_p(K_\bullet(x))$ é um k-espaço vetorial de modo natural. Sua dimensão será denotada por $\epsilon_p(A)$. O valor $\epsilon_1(A)$ está associado a codimensão de imersão de A e desempenhará papel fundamental na definição dos anéis de interseção completa, objeto principal de estudo desta seção.

2.3.1 O invariante $\epsilon_1(A)$

A proposição abaixo mostra que $\epsilon_p(A)$ está bem definido, não dependendo do gerador mínimo escolhido.

Proposição 2.3.1. *Seja* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local. Se* $x = x_1, \ldots, x_n$ *e* $x' = {x_1}', \ldots, {x_n}'$ *são geradores mínimos de* $\mathfrak{m}$*, então os complexos de Koszul* $K_\bullet(x)$ *e* $K_\bullet(x')$ *são isomorfos.*

Prova. Considere a matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ tal que

$$x_i{}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i.$$

Escrevendo a igualdade anterior módulo $\mathfrak{m}^2$, concluímos que a matriz $(\overline{a_{ij}})_{n\times n}$ com entradas em k é a matriz de mudança de base em relação às bases $\overline{x'}$ e $\overline{x}$ do k-espaço vetorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Deste modo, $(\overline{a_{ij}})_{n\times n}$ é invertível e, em particular, $\det(\overline{a_{ij}}) \neq 0$. Assim, $\det(a_{ij}) \notin \mathfrak{m}$ e portanto é elemento invertível de R. Consequentemente, a matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ é invertível. Isto garante que o morfismo de R-módulos

$$f : R^n \to R^n, \quad e_i{}' \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_i$$

é um isomorfismo. O isomorfismo f induz isomorfismos $f_t : \bigwedge^t R^n \to \bigwedge^t R^n$. Isto nos fornece o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
K_\bullet(x') : \cdots \arrow[r] & \bigwedge^2 R^n \arrow[r, "d'^2"] \arrow[d, "f_2"] & R^n \arrow[r, "d'^1"] \arrow[d, "f"] & R \arrow[d, "id"] \\
K_\bullet(x) : \cdots \arrow[r] & \bigwedge^2 R^n \arrow[r, "d^2"] & R^n \arrow[r, "d^1"] & R
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Resta provar que este diagrama é comutativo. Dado $x \in \bigwedge^r R^n$ e $y \in \bigwedge^s R^n$, sabemos que

$$d'^{r+s}(x.y) = d'^r(x).y + (-1)^r x.d'^s(y).$$

Analogamente, temos a igualdade anterior com d no lugar de d'. Deste modo

$$d^{r+s} \circ f_{r+s}(xy) = d^r(f_r(x)).f_s(y) + (-1)^r f_r(x).d^s(f_s(y)).$$

e

$$f_{r+s} \circ d'^{r+s}(xy) = f_r(d'^r(x)).f_s(y) + (-1)^r f_r(x).f_s(d'^s(y)).$$

Uma vez que $\bigwedge R^n$ é gerado com R-álgebra por R^n, as igualdades acima nos mostram que a comutatividade do diagrama (2.5) segue da igualdade $d' \circ f = d'^1$, a qual é imediatamente verificada.

$\square$

Dentre os valores $\epsilon_p(A)$, $\epsilon_0(A)$ é certamente o mais simples de se calcular. Uma vez que $H_0(K_\bullet(x)) = k$, temos $\epsilon_0(A) = 1$. Por outro lado, $\epsilon_1(A)$ está intimamente ligado com a regularidade do anel A: se A for regular, então x é uma sequência regular e portanto, $\epsilon_i(A) = 0$, para todo $i > 0$, conforme o Teorema 1.6.13 e assim, em particular, $\epsilon_1(A) = 0$. Por outro lado, se

$\epsilon_1(A) = 0$, então novamente pelo Teorema 1.6.13 segue que x é uma sequência regular. Logo, pela Proposição 2.2.5, A é regular. Em suma:

$$A \text{ é regular se, e somente se, } \epsilon_1(A) = 0. \tag{2.6}$$

Podemos medir o quão próximo um anel noetheriano local A está de ser regular a partir de sua *codimensão de imersão*, isto é, a partir da diferença $\operatorname{embdim} A - \dim A$. É natural então nos perguntar se há relação entre $\epsilon_1(A)$ e a codimensão de imersão de A. O invariante $\epsilon_1(A)$ é chamado de 1° *desvio de* A, cujo estudo requer apenas que analisemos seu comportamento no caso em que A é um anel regular local. A principal razão para isto é o teorema abaixo.

Teorema 2.3.2 (Cohen)**.** *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Então, o completamento $\mathfrak{m}$-ádico $\hat{A}$ é isomorfo ao quociente de um anel regular local.*

Prova. Ver [4], Teorema 29.4. □

O teorema estrutural de Cohen ganha importância no estudo do invariante $\epsilon_1(A)$ pois este último não se altera quando trocamos A por seu completamento $\hat{A}$. Tal resultado seguirá do próximo lema.

Lema 2.3.3. *Seja $C_\bullet$ um complexo de R-módulos e N um R-módulo plano. Então:*

$$H_p(C_\bullet \otimes N) \simeq H_p(C_\bullet) \otimes N, \textit{ para todo } p.$$

Prova. Consideremos o complexo de R-módulos

$$C_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow M_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} M_p \xrightarrow{f_p} \cdots$$

e denotemos a diferencial do complexo $C_\bullet \otimes N$ por $\tilde{f}$. Por definição:

$$H_p(C_\bullet \otimes N) = \frac{\ker \tilde{f}_p}{\operatorname{Im} \tilde{f}_{p+1}} \text{ e } H_p(C_\bullet) \otimes N = \frac{\ker f_p}{\operatorname{Im} f_{p+1}}.$$

Portanto, basta provar que $\ker \tilde{f}_p = \ker f \otimes N$ e $\operatorname{Im} \tilde{f}_{p+1} = \operatorname{Im} f_{p+1} \otimes N$.

A última igualdade segue da definição de $\tilde{f}_{p+1}$. Para a primeira igualdade, começamos observando que

$$\ker f_p \otimes N \subset \ker \tilde{f}_p.$$

Isto induz o morfismo

$$\tilde{F}_p : \frac{M_p \otimes N}{\ker f_p \otimes N} \to M_{p-1} \otimes N$$

cuja injetividade equivale a igualdade

$$\ker f_p \otimes N = \ker \tilde{f}_p.$$

Por outro lado, f_p induz o morfismo injetor

$$F_p : \frac{M_p}{\ker f_p} \to M_{p-1}.$$

Pela planitude de N, segue que

$$F_p \otimes N : \frac{M_p}{\ker f_p} \otimes N \to M_{p-1} \otimes N$$

é injetor. Por fim, a injetividade de $\tilde{F}_p$ segue agora do isomorfismo

$$\frac{M_p \otimes N}{\ker f_p \otimes N} \simeq \frac{M_p}{\ker f_p} \otimes N.$$

□

Proposição 2.3.4. *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local. Então, para todo* p*, temos:*

$$\epsilon_p(A) = \epsilon_p(\hat{A}).$$

Prova. Seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ um gerador mínimo de $\mathfrak{m}$. Como $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$, segue que $\hat{\mathbf{x}} = \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ é um gerador de $\widehat{\mathfrak{m}}$. Mais que isso, os isomorfismos

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}^2} \quad \text{e} \quad \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \simeq A/\mathfrak{m},$$

mostram que $\hat{\mathbf{x}}$ é um gerador mínimo de $\widehat{\mathfrak{m}}$. Como $K_\bullet(\hat{\mathbf{x}}) \simeq K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes \hat{A}$ e $\hat{A}$ é um A-módulo plano, temos pelo lema anterior:

$$H_p(K_\bullet(\hat{\mathbf{x}})) \simeq H_p(K_\bullet(\mathbf{x})) \otimes \hat{A} \simeq H_p\widehat{(K_\bullet(\mathbf{x}})).$$

Por fim, como $\mathfrak{m}H_p(K_\bullet(\mathbf{x})) = 0$, toda sequência de Cauchy em $H_p(K_\bullet(x))$ é eventualmente constante. Deste modo, $H_p(K_\bullet(\mathbf{x}))$ é adicamente completo e, assim

$$H_p\widehat{(K_\bullet(\mathbf{x}})) \simeq H_p(K_\bullet(\mathbf{x})).$$

Logo:

$$\epsilon_p(\hat{A}) = \dim_k H_p(K_\bullet(\hat{\mathbf{x}})) = \dim_k H_p(K_\bullet(\mathbf{x})) = \epsilon_p(A).$$

$\square$

Os resultados anteriores nos permitem restringir nossas atenções ao cálculo de $\epsilon_1(A)$ no caso em que A é o quociente de um anel regular local. Observamos que se $A = R/I$, com $(R, \mathfrak{n})$ anel regular local, então podemos supor $I \subset \mathfrak{n}^2$.

De fato, se este não for o caso, tomamos um elemento $x \in I - \mathfrak{n}^2$. Assim, x faz parte de um gerador mínimo de $\mathfrak{n}$. Como R é regular, segue que x é um elemento regular. Pondo $R' = R/(x)$, $I' = I/(x)$ e $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/(x)$, obtemos $A \simeq R'/I'$, com R' anel regular local. Como $\dim R' = \dim R - 1$, concluímos que, iterando o raciocínio anterior um número finito de vezes, obteremos um anel regular local $(\tilde{R}, \tilde{\mathfrak{n}})$ e um ideal $\tilde{I}$ de $\tilde{R}$ tal que $A \simeq \tilde{R}/\tilde{I}$ com $\tilde{I} \subset \tilde{\mathfrak{n}}^2$.

Para um quociente R/I, onde $(R, \mathfrak{n})$ é um anel noetheriano local, a inclusão $I \subset \mathfrak{n}^2$ pode ser caracterizada aritmeticamente.

Proposição 2.3.5. *Seja* $A = R/I$*, onde* $(R, \mathfrak{n}, k)$ *é um anel noetheriano local. Então,* $I \subset \mathfrak{n}^2$ *se, e somente se,* $\operatorname{embdim} A = \operatorname{embdim} R$.

Prova. Suponha que $I \subset \mathfrak{n}^2$. Sendo $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I$ o ideal maximal de A, temos:

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{n}/I)/(\mathfrak{n}^2 + I)/I \simeq \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + I) = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2.$$

Segue que $\operatorname{embdim} A = \operatorname{embdim} R$. Reciprocamente, a igualdade $\operatorname{embdim} A = \operatorname{embdim} R$ é equivalente a

$$\dim_k \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + I} = \dim_k \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2.$$

Isto implica que que o morfismo sobrejetor natural de k-espaços vetoriais

$$\varphi : \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + I} \to \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2}$$

é um isomorfismo, o que equivale à inclusão $I \subset \mathfrak{n}^2$. $\square$

Exemplo 2.3.6. Seja $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$ e $\mathfrak{m} = \overline{(X, Y)}$. Assim, $A_\mathfrak{m} \simeq R/I$, onde $R = \mathbb{C}[X, Y]_{(X,Y)}$ e $I = (Y^2 - X^2(X + 1))_{(X,Y)}$. Sendo $\mathfrak{n} = (X, Y)_{(X,Y)}$ o ideal maximal de R, temos $I \subset \mathfrak{n}^2$. Desta forma, pela proposição anterior

$$\operatorname{embdim} A_\mathfrak{m} = \operatorname{embdim} \mathbb{C}[X, Y]_{(X,Y)} = 2.$$

Proposição 2.3.7. *Sejam* $(R, \mathfrak{n}, k)$ *anel regular local e* $A = R/I$*, onde* $I \subset \mathfrak{n}^2$*. Então:*

$$\epsilon_1(A) = \mu(I).$$

Prova. Seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ um gerador mínimo de η. Denotando a imagem de x_i em A por $\overline{x}_i$, segue que $\overline{\mathbf{x}} = \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ é um gerador mínimo de $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I$. Podemos obter o complexo de Koszul $K_\bullet(\overline{\mathbf{x}})$ "tensorizando"o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$. Em outras palavras:

$$K_\bullet(\overline{\mathbf{x}}) \simeq K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes A.$$

Por outro lado, uma vez que $K_\bullet(\mathbf{x})$ é uma resolução projetiva de k, concluímos que

$$H_p(K_\bullet(\overline{x})) \simeq \mathrm{Tor}_p^R(k, A).$$

Desta forma, basta mostrar que $\mathrm{Tor}_1^R(k, A) \simeq I/\mathfrak{n}I$. Para isto, partimos da sequência exata

$$0 \to I \to R \to A \to 0$$

Tal sequência exata induz o complexo exato

$$\mathrm{Tor}_1^R(k, R) \to \mathrm{Tor}_1^R(k, A) \to k \otimes I \to \otimes R \to k \otimes A \to 0 \tag{2.7}$$

Sendo R um R-módulo plano, obtemos $\mathrm{Tor}_1^R(k, R) = 0$. Além disso:

$$k \otimes A = R/\mathfrak{n} \otimes R/I \simeq R/(\mathfrak{n} + I) = R/\mathfrak{n} = k.$$

Fazendo as identificações pelo isomorfismo acima, concluímos que ψ é o morfismo identidade. Por fim, da exatidão de (2.7), deduzimos que

$$\mathrm{Tor}_1^R(k, A) \simeq k \otimes I \simeq I/\mathfrak{n}I.$$

□

O próximo resultado relaciona $\epsilon_1(A)$ com a codimensão de imersão de A além de generalizar a proposição anterior.

Teorema 2.3.8. *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local. Então:*

$$\epsilon_1(A) \geqslant \operatorname{embdim} A - \dim A.$$

Além disso, se $A = R/I$*, com* $(R, \mathfrak{n})$ *anel regular local, então:*

$$\mu(I) = \dim R - \operatorname{embdim} A + \epsilon_1(A).$$

Prova. Como ϵ_1, a dimensão de imersão e a dimensão de Krull são invariantes com completamento $\mathfrak{m}$-ádico, podemos supor que A é completo. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos $A = R/I$, para algum anel regular local $(R, \mathfrak{n})$. Podemos supor $I \subset \mathfrak{n}^2$. Pela Proposição 2.3.7 juntamente com o fato de R ser um anel Cohen-Macaulay, temos :

$$\epsilon_1(A) = \mu(I) \geqslant \mathrm{ht}(I) = \dim R - \dim A = \operatorname{embdim} A - \dim A.$$

A segunda igualdade do enunciado é imediata no caso em que $I \subset \mathfrak{n}^2$. Se $I \not\subset \mathfrak{n}^2$, tomemos $x \in I - \mathfrak{n}^2$ e definimos $R' = R/(x)$, $I' = I/(x)$ e $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/(x)$. Caso $I' \subset \mathfrak{n}'^2$, teremos:

$$\begin{cases} \mu(I') = \epsilon_1(A) = \mu(I) - 1 \\ \\ \quad \dim R' = \dim R - 1 \\ \\ \quad \operatorname{embdim} A = \dim R' \end{cases}$$

Assim:

$$\mu(I) = \mu(I') + 1 = \epsilon_1(A) + \dim R - \operatorname{embdim} A.$$

Se $I' \not\subset \mathfrak{n}'^2$, basta iterarmos o raciocínio acima. $\square$

Anéis para os quais $\epsilon_1(A)$ é mínimo recebem um nome especial.

Definição 2.3.9. Dizemos que um anel noetheriano local A é um *anel de interseção completa* quando $\epsilon_1(A) = \operatorname{embdim} A - \dim A$.

Exemplo 2.3.10. Todo anel regular local é de interseção completa, uma vez que, neste caso, tanto ϵ_1 quanto a codimensão de imersão são iguais a zero. A recíproca, no entanto, não é verdadeira, conforme veremos adiante no Exemplo 2.3.16.

2.3.2 Ideais de interseção completa

Nesta seção, veremos uma caracterização dos anéis de interseção completa que torna mais simples seu reconhecimento. Tal caracterização depende do estudo dos ideais gerados por sequências regulares, que passamos a discutir a seguir.

Proposição 2.3.11. *Sejam* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *ideais primos de um anel* R*,* $I \subset R$ *um ideal e* $x \in R$ *tais que* $I + (x) \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$*. Então, existe* $y \in I$ *tal que* $x + y \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$, para todo $i \neq j$. Observe que, se $x \notin \mathfrak{p}_i$, para todo i, então basta tomar $y = 0$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{i=1}^{r} p_i$, então, a condição

$$I + (x) \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} p_i$$

implica na existência de um elemento $y \in I$ tal que

$$y + \alpha x \notin \bigcup_{i=1}^{r} p_i,$$

para algum α em R. Em particular, deve-se ter $y \notin p_i$, para todo i. Disto, se conclui que

$$x + y \notin \bigcup_{i=1}^{r} p_i.$$

Encerrada a análise destas situações, resta ainda o caso onde se pode assegurar a existência de t tal que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{t} p_i$$

e x não pertence a nenhum dos primos $p_{t+1}, \ldots, p_r$. Neste caso, note que

$$I \not\subset \bigcup_{i=1}^{t} p_i,$$

donde pode-se escolher $\beta \in I$ com $\beta \notin p_j$, $1 \leqslant j \leqslant t$. Além disso, uma vez que

$$\bigcap_{i=t+1}^{r} p_i \not\subset \bigcup_{i=1}^{t} p_i,$$

podemos tomar $\tilde{y}$ com

$$\tilde{y} \in \bigcup_{i=1}^{r} p_i$$

e $\tilde{y}$ não pertencendo a nenhum dos primos $p_{t+1}, \ldots, p_r$. Assim, $y = \beta\tilde{y}$ satisfaz as condições do enunciado desta proposição. $\square$

Corolário 2.3.12. *Seja* R *um anel e* $I = (x_1, \ldots, x_n)$ *ideal de* R. *Se* $\operatorname{grade}(I, R) = n$, *então* I *é gerado por uma sequência regular.*

Demonstração. O caso $n = 1$ é trivial. Suponha $n > 1$. Uma vez que $\operatorname{grade}(I, R) = n > 0$, I

possui elementos regulares. Assim, sendo $\operatorname{Ass} R = \{p_1, \ldots, p_r\}$, segue que

$$I = (x_1) + (x_2, \ldots, x_n) \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} p_i.$$

Em particular, pela Proposição 2.3.11, existe $y_1 \in (x_2, \ldots, x_n)$ tal que

$$u_1 = x_1 + y_1 \notin \bigcup_{i=1}^{r} p_i.$$

Portanto, u_1 é um elemento R-regular. Note também que

$$I = (u_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Por outro lado, pelo item d) do Teorema 1.2.12,

$$\operatorname{grade}(J, R/u_1R) = n - 1 > 0,$$

donde

$$J \not\subset Z(R/u_1R).$$

Em particular, segue também que

$$(x_2, \ldots, x_n) = (x_2) + (x_3, \ldots, x_n) \not\subset Z(R/u_1R).$$

Assim, utilizando mais uma vez a Proposição 2.3.11, podemos garantir a existência de $y_2 \in (x_3, \ldots, x_n)$ tal que

$$u_2 = x_2 + y_2$$

é um elemento R/u_1R-regular. Vale ainda que

$$I = (u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Iterando o raciocínio, obteremos uma sequência regular $u = u_1, \ldots, u_n$ tal que $I = (u_1, \ldots, u_n)$. $\square$

Dizemos que um ideal I é um *ideal de interseção completa* quando $\mu(I) = \operatorname{ht} I$. O corolário anterior nos dá uma caracterização para essa classe de ideais em termos de sequências regulares no ambiente Cohen-Macaulay, como veremos no teorema seguinte.

Teorema 2.3.13. *Seja* R *um anel Cohen-Macaulay. Então, um ideal* $I \subset R$ *é um ideal de interseção completa se, e somente se,* I *pode ser gerado por uma sequência regular.*

Demonstração. Suponha que $\mu(I) = \text{ht } I = n$. Por um lado, existem $x_1, \ldots, x_n$ em R tais que

$$I = (x_1, \ldots, x_n).$$

Por outro lado, sendo R um anel Cohen-Macaulay, deve-se ter

$$\text{grade}\,(I, R) = \text{ht}\, I = n.$$

Logo, pelo Corolário 2.3.12, I pode ser gerado por uma sequência regular.

Reciprocamente, se I é gerado por uma sequência regular de comprimento n, então

$$\text{grade}\,(I, R) = n,$$

bem como também

$$\mu(I) \leqslant n.$$

Logo,

$$n = \text{grade}\,(I, R) = \text{ht } I \leqslant \mu(I) \leqslant n,$$

donde obtemos a igualdade $\mu(I) = \text{ht } I$. □

Observação 2.3.14. Observe que a demonstração da recíproca do teorema anterior é igualmente válida no ambiente não Cohen-Macaulay, visto que a desigualdade

$$\text{grade}\,(I, R) \leqslant \text{ht } I$$

seria suficiente para garantir a igualdade

$$\mu(I) = \text{ht } I.$$

Assim, em geral, todo ideal gerado uma sequência regular é um ideal de interseção completa.

O teorema seguinte coleta as propriedades básicas dos anéis de interseção completa.

Teorema 2.3.15. *Seja* A *um anel noetheriano local. Então:*

(i) A *é anel de interseção completa se, e somente se* $\widehat{A}$ *o é.*

(ii) *Se* $A = R/I$*, com* R *anel regular local, então:* A *é anel de interseção completa se, e somente se,* I *é gerado por uma sequência regular.*

(iii) A *é anel de interseção completa se, e somente se,* $\hat{A}$ *é da forma* R/I*, com* R *anel regular local e* I *ideal gerado uma sequência regular.*

Prova. (i) Decorre imediatamente das igualdades $\epsilon_1(A) = \epsilon_1(\hat{A})$, $\operatorname{embdim} A = \operatorname{embdim} \hat{A}$ e $\dim A = \dim \hat{A}$.

(ii) Segue do Teorema 2.3.8 juntamente com o fato de R ser Cohen-Macaulay que A é anel de interseção completa se, e somente se, $\mu(I) = \operatorname{ht}(I)$. Esta última igualdade é equivalente a I ser gerado por uma sequência regular, conforme o Teorema 2.3.13.

(iii) Segue dos itens anteriores. □

Exemplo 2.3.16. Conforme comentado no Exemplo 2.3.10, nem todo anel de interseção completa é um anel regular. Sejam A e $\mathfrak{m}$ como no Exemplo 2.3.6. Pelo item (ii) do teorema anterior, $A_\mathfrak{m}$ é um anel de interseção completa. Por outro lado, como $\operatorname{embdim} A_\mathfrak{m} = 2$ e $\dim A_\mathfrak{m} = 1$, $A_\mathfrak{m}$ não é um anel regular.

Suponha que desejamos julgar se um anel $S = R/I$ é um anel de interseção completa ou não, onde R é regular local. Caso nos seja dado um conjunto de geradores para I e este não seja uma sequência regular, é bastante tentador concluir imediatamente que S não é um anel de interseção completa.

Porém, nada nos garante, a priori, a impossibilidade da existência de outro conjunto de geradores de I que seja uma sequência regular. Assim, a caracterização instríseca do fato de um ideal ser ou não gerado por uma sequência regular em termos da igualdade $\mu(I) = \operatorname{ht}\ I$ é de grande valia nesta situação.

Exemplo 2.3.17. Vamos considerar o anel

$$A = \frac{k[X, Y, Z]}{(X^2 - Y^2, Y^2 - Z^2, XY, XZ, YZ)}.$$

Note que A é um anel noetheriano local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$. Pelo item i) do Teorema 2.3.15, A é um anel de interseção completa se, e somente se, seu completamento $\mathfrak{m}$-ádico

$$\widehat{A} = \frac{k[\![X, Y, Z]\!]}{(X^2 - Y^2, Y^2 - Z^2, XY, XZ, YZ)}$$

também o for. Sendo $k[\![X, Y, Z]\!]$ um anel regular local, a propriedade de A ser interseção completa passa a ser equivalente a saber se o ideal

$$I = (X^2 - Y^2, Y^2 - Z^2, XY, XZ, YZ)$$

é um ideal de interseção completa. Note que, sendo $\mathbf{m} = \mathfrak{m}\widehat{A}$, I é $\mathbf{m}$-primário, donde $\operatorname{ht}\ I = 3$.

Por outro lado, uma vez que $I \subset \mathbf{m}^2$, podemos considerar o mapa natural de k-espaços vetoriais

$$\varphi : I/\mathbf{m}I \to \mathbf{m}^2/\mathbf{m}^3.$$

É imediato notar que

$$\dim_k \operatorname{Im} \varphi = 5.$$

Logo,

$$\mu(I) = \dim_k I/\mathbf{m}I \geqslant 5.$$

Assim, I não é um ideal de interseção completa (não pode ser gerado por uma sequência regular) e, portanto, A não é um anel de interseção completa.

Capítulo 3

Anéis de Gorenstein e teoria de dualidade

Neste capítulo, apresentamos os conceitos de dimensão injetiva e anéis de Gorenstein. Mostramos que os anéis de Gorenstein são os anéis Cohen-Macaulay de tipo 1. Em seguida, estudamos a teoria de dualidade sobre anéis Cohen-Macaulay e estabelecemos o conceito de módulo canônico, cuja existência está intimamente relacionada com os anéis de Gorenstein.

3.1 Generalidades sobre módulos injetivos

Definição 3.1.1. Seja M um R-módulo. Uma *resolução injetiva de* M é um complexo exato de R-módulos

$$I^\bullet :\ 0 \to M \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

onde cada I^i é um R-módulo injetivo. A resolução injetiva é dita *finita* se existe $n \geqslant 0$ tal que $I^n \neq 0$ e $I^i = 0$, para todo $i > n$. Neste caso, n é o *comprimento* de $I^\bullet$. O menor comprimento dentre as resoluções injetivas finitas de M é a *dimensão injetiva* de M, a qual denotamos por $\dim\operatorname{inj} M$.

Equivalentemente, podemos pensar uma resolução injetiva de M como um complexo de módulos injetivos

$$I^\bullet :\ 0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

onde $H^i(I^\bullet) = 0$, para $i > 0$ e $H^0(I^\bullet) = M$. Nestes termos, $I^\bullet$ é chamada *resolução injetiva deletada de* M. No caso em que I não possui uma resolução injetiva finita, convencionamos que $\dim\operatorname{inj} M = \infty$. Naturalmente, M é injetivo se, e somente se, $\dim\operatorname{inj} M = 0$.

Todo módulo admite uma resolução injetiva. Com efeito, dado um R-módulo M, pelo Teorema 4.2.12, existe um R-módulo injetivo I^0 juntamente com um morfismo injetor $i : M \to I^0$. Analogamente, existe um R-módulo injetivo I^1 juntamente com um morfismo injetor $\psi^0 : \operatorname{Coker} i \to I^1$.

Logo, sendo π a projeção de I^0 sobre $\operatorname{Coker} i$, temos que $\varphi^0 = \psi^0 \circ \pi$, cumpre a igualdade $\operatorname{Im} i = \ker \varphi^0$. Procedendo indutivamente, obtemos uma resolução injetiva

$$I^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{\varphi^0} I^1 \xrightarrow{\varphi^1} \cdots$$

Exemplo 3.1.2. Seja D um domínio de ideais principais e K seu corpo de frações. Considere a sequência exata de D-módulos

$$0 \to D \to K \to K/D \to 0$$

Pelo Exemplo 4.2.8, K é um D-módulo injetivo. Além disso, como K é um D-módulo divisível, K/D também o é. Assim, segue do Teorema 4.2.6 que K/D é um D-módulo injetivo. Em particular, $\dim\operatorname{inj} D \leqslant 1$. Se D não for um D-módulo injetivo, teremos $\dim\operatorname{inj} D = 1$. Em particular, $\dim\operatorname{inj} \mathbb{Z} = 1$.

A proposição seguinte estabelece duas propriedades básicas a respeito dos módulos injetivos.

Proposição 3.1.3. *Seja R um anel noetheriano. Temos:*

(i) *Se I é um R-módulo injetivo, então I_S é um R_S-módulo injetivo, para qualquer conjunto multiplicativo $S \subset R$. Em particular,* $\dim\operatorname{inj}_{R_S} M_S \leqslant \dim\operatorname{inj}_R M$, *para todo R-módulo M.*

(ii) *Se $\{I_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de R-módulos injetivos, então $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ é um R-módulo injetivo.*

Prova. (i) Tome um ideal J' de R_S. Então, $J' = J_S$ para algum ideal J de R, disjunto de S. Segue que:

$$\operatorname{Ext}^1_{R_S}(R_S/J', I_S) \simeq \left[\operatorname{Ext}^1_R(R/J, I)\right]_S = 0.$$

Pelo Lema 2.2.10, segue que I_S é um R_S-módulo injetivo.

(ii) Provaremos isto usando o critério de Baer. Assim, sejam J um ideal de R e $\varphi : J \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ um morfismo de R-módulos. Sendo $J = (a_1, \dots, a_n)$, consideremos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tais que $\varphi(a_i) \in I_{\lambda_i}$, para $i = 1, \dots, n$. Denotando por π_i a projeção de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ sobre I_{λ_i}, temos pelo critério de Baer, que cada morfismo $\pi_i \circ \varphi : J \to I_{\lambda_i}$ se estende a um morfismo $\psi_i : R \to I_{\lambda_i}$. Por fim, definindo $\tilde{\varphi} = \bigoplus_{i=1}^{n} \psi_i$, segue que $\tilde{\varphi}$ estende φ a R. □

Assim como a dimensão projetiva, a dimensão injetiva também pode ser caracterizada homologicamente no caso noetheriano local. Estabeleceremos este fato a partir dos lemas seguintes.

Lema 3.1.4. *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo. Se N é um R-módulo finitamente gerado e* $\operatorname{Ext}^n_R(R/\mathfrak{p}, M) = 0$, *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} N$, *então* $\operatorname{Ext}^n_R(N, M) = 0$.

Prova. Considere uma cadeia primária de submódulos de N, isto é, uma cadeia de submódulos

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_t = N,$$

de modo que $N_{i+1}/N_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$, com $\mathfrak{p}_i$ ideal primo de R. Faremos indução no comprimento t da cadeia primária. O caso $t = 0$ é trivial. Supondo agora $t > 0$, partindo da sequência exata curta

$$0 \to N_1 \to N \to N/N_1 \to 0$$

obtemos a sequência exata longa:

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(N/N_1, M) \to \cdots \to \operatorname{Ext}_R^n(N/N_1, M) \to \operatorname{Ext}_R^n(N, M) \to \operatorname{Ext}_R^n(N_1, M). \qquad (3.1)$$

Por um lado, $N_1 \simeq R/\mathfrak{p}_0$. Em particular, $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass} N_1 \subset \operatorname{Supp} N$. Daí, $\operatorname{Ext}_R^n(N_1, M) = 0$.

Por outro lado, N/N_1 admite uma cadeia primária de comprimento $t-1$, e assim, por hipótese indutiva, segue que $\operatorname{Ext}_R^n(N/N_1, M) = 0$. Portanto, da exatidão de (3.1), concluímos que

$$\operatorname{Ext}_R^n(N, M) = 0.$$

□

Corolário 3.1.5. *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. São equivalentes:*

(i) $\dim \operatorname{inj} M \leqslant n$.

(ii) $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{p}, M) = 0$*, para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$ *de* R.

Prova. (i)⇒(ii) Segue diretamente do Lema 2.2.10.

(ii)⇒(i) Do lema anterior concluímos que $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0$, para todo R-módulo finitamente gerado N. Em particular, $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$, para todo ideal I de R. O resultado agora segue novamente do Lema 2.2.10. □

Lema 3.1.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ um ideal primo de R e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{q}, M) = 0$, para todo $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$ com $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, então $\operatorname{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) = 0$.*

Prova. Tome um elemento $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$. Desta forma, x é $R/\mathfrak{p}$-regular. Isto nos fornece a sequência exata

$$0 \to R/\mathfrak{p} \xrightarrow{.x} R/\mathfrak{p} \to R/(\mathfrak{p}, x) \to 0$$

a qual, por sua vez, induz a sequência exata

$$\operatorname{Ext}_R^n(R/p, M) \xrightarrow{.x} \operatorname{Ext}_R^n(R/p, M) \to \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/(p,x), M).$$

Uma vez que $\operatorname{Supp} R/(p,x) = V((p,x))$, segue do Lema 3.1.4 juntamente com a hipótese do enunciado que $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/(p,x), M) = 0$. Por fim, a exatidão da sequência anterior implica que

$$\operatorname{Ext}_R^n(R/p, M) = x\operatorname{Ext}_R^n(R/p, M).$$

Pelo lema de Nakayama, concluímos que $\operatorname{Ext}_R^n(R/p, M) = 0$. □

Proposição 3.1.7. *Sejam* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local e* M *um* R*-módulo finitamente gerado. Então:*

$$\dim\operatorname{inj} M = \sup\{i; \operatorname{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

Prova. Seja $t = \sup\{i; \operatorname{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}$ e suponha que $\dim\operatorname{inj} M < \infty$. Pela definição de $\operatorname{Ext}_R^i(k, M)$, segue que $t \leqslant \dim\operatorname{inj} M$. Para a desigualdade oposta, à luz do Corolário 3.1.5, é suficiente provar que

$$\operatorname{Ext}_R^{t+1}(R/p, M) = 0,$$

para todo ideal primo p de R. Seja $n = \dim R$. Se $\operatorname{ht} p = n$, então $p = \mathfrak{m}$, donde o resultado é trivial. Se $\operatorname{ht} p = n-1$, então $V(p) = \{p, \mathfrak{m}\}$ e consequentemente $\operatorname{Ext}_R^{t+1}(R/p, M) = 0$, pela proposição anterior. Agora caso $\operatorname{ht} p = n-2$, para cada $q \in V(p)$ com $q \neq p$, vale $\operatorname{ht} q \in \{n-1, n\}$. Invocando novamente a proposição anterior, concluímos que $\operatorname{Ext}_R^{t+1}(R/p, M) = 0$. Repetindo o argumento acima para os valores sucessivos de $\operatorname{ht} p$, concluímos o resultado. □

Diferentemente da dimensão projetiva, a dimensão injetiva de um módulo, quando finita, depende apenas do anel base. Esta é uma consequência da caracterização homológica vista anteriormente. Estabeleceremos este importante fato a partir dos dois resultados técnicos a seguir.

Lema 3.1.8. *Dados* R*-módulos* M *e* N*, se* x *é um elemento* R*-regular,* M*-regular e* $xN = 0$*, então*

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M) \simeq \operatorname{Ext}_{R/(x)}^n(N, M/xM).$$

Prova. Denotemos M/xM por $\overline{M}$. Fixado o R-módulo M, defina, para cada $n \geqslant 0$, o funtor $T^n : R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$ dado por $T^n(-) = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(-, M)$. Vamos provar que T^n é isomorfo ao funtor $\operatorname{Ext}_{R/(x)}^n(-, \overline{M}) : R-\mathrm{Mod} :\to \mathrm{Ab}$. Basta mostrar que T^n é o funtor derivado à direita do funtor $\operatorname{Hom}_{R/(x)}(-, \overline{M})$ (Ver Teorema 6.64 de [10]).

Começamos provando que T^0 e $\operatorname{Hom}_{R/(x)}(-, \overline{M})$ são isomorfos. Para isto, considere a sequência exata:

$$0 \to M \xrightarrow{.x} M \to \overline{M} \to 0$$

Dado um $R/(x)$-módulo $\tilde{N}$, obtemos a sequência exata longa:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\tilde{N}, M) \to \mathrm{Hom}_R(\tilde{N}, M) \to \mathrm{Hom}_R(\tilde{N}, \overline{M}) \to \mathrm{Ext}^1_R(\tilde{N}, M) \xrightarrow{.x} \mathrm{Ext}^1_R(\tilde{N}, M)$$

Pelo Teorema 1.2.4, item (i), segue que $\mathrm{Hom}_R(\tilde{N}, M) = 0$. Além disso, $x\,\mathrm{Ext}^1_R(\tilde{N}, M) = 0$. Desta forma:

$$T^0(\tilde{N}) \simeq \mathrm{Hom}_R(\tilde{N}, \overline{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{R/(x)}(\tilde{N}, M).$$

Nosso próximo passo é mostrar que $T^n(P) = 0$, para todo $R/(x)$-módulo projetivo P e $n > 0$. Por comodidade, denotemos $B = R/(x)$. Inicialmente, sendo x um elemento R-regular, (x) é um R-módulo livre. Consequentemente, obtemos a resolução livre de B:

$$0 \to (x) \to R \to B \to 0$$

Em particular, $\dim \mathrm{proj}_R B \leqslant 1$. Por outro lado, argumentando analogamente ao Exemplo 4.1.4, concluímos que B não é um R-módulo projetivo. Assim, $\dim \mathrm{proj}\,_R B = 1$.

Tomemos agora um B-módulo projetivo P e sejam P' e L B-módulos, com L livre tais que

$$P \oplus P' = L.$$

Esta última igualdade também pode ser pensada como uma soma direta de R-módulos. Por outro lado, $\dim \mathrm{proj}\,_R B = 1$ implica que $\dim \mathrm{proj}\,_R L = 1$. Em particular:

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_R(L, M) = 0$$

para todo $n > 0$. Segue que:

$$0 = \mathrm{Ext}^{n+1}(P \oplus P', M) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_R(P, M) \oplus \mathrm{Ext}^{n+1}_R(P', M),$$

donde obtemos $T^n(P) = \mathrm{Ext}^{n+1}_R(P, M) = 0$. Por fim, pela definição de T^n, toda sequência exata curta de B-módulos

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to T^n(A) \to T^{n+1}(C) \to T^{n+1}(B) \to T^{n+1}(A) \to \cdots$$

Assim, T^n é naturalmente isomorfo ao funtor $\mathrm{Ext}^n_B(-, \overline{M})$, donde segue o resultado. □

Corolário 3.1.9. *Sejam $(R, \boldsymbol{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado.*

Se x é um elemento R-regular e M-regular, então:

$$\dim\operatorname{inj}_{R/(x)} M/xM = \dim\operatorname{inj} M - 1.$$

Prova. Seja $n = \dim\operatorname{inj}_{R/(x)} M/xM$. Pela Proposição 3.1.7 e pelo Lema 3.1.8, segue que

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(k, M) \simeq \operatorname{Ext}_{R/(x)}^{n} M/xM \neq 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Ext}_R^{t+1}(k, M) \simeq \operatorname{Ext}_{R/(x)}^{t} M/xM = 0,$$

para todo $t > n$. Desta forma, $\dim\operatorname{inj}_R M = n + 1$.

Analogamente, se $\dim\operatorname{inj}_{R/(x)} M/xM = \infty$, então $\dim\operatorname{inj}_R M = \infty$.

Teorema 3.1.10. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\dim\operatorname{inj} M < \infty$, então:*

$$\dim M \leqslant \dim\operatorname{inj} M = \operatorname{depth} R.$$

Prova. Começamos provando que $\dim M \leqslant \dim\operatorname{inj} M$. Para isto, seja $d = \dim M$ e

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d = \mathfrak{m}$$

uma cadeia máxima de primos em $\operatorname{Supp} M$. É suficiente provar que

$$\operatorname{Ext}^i_{R_{p_i}}(k(p_i), M_{p_i}) \neq 0, \tag{3.2}$$

para todo i. De fato, a veracidade de (3.2) implica que

$$\left[\operatorname{Ext}^d_R(k, M)\right]_{\mathfrak{m}} \simeq \operatorname{Ext}^d_{R_{\mathfrak{m}}}(k(\mathfrak{m}), M_{\mathfrak{m}}) \neq 0,$$

donde $d \leqslant \dim\operatorname{inj} M$. Provemos (3.2) por indução em i. No caso $i = 0$, uma vez que P_0 é primo minimal em $\operatorname{Supp} M$, segue que P_0 é primo minimal em $\operatorname{Ass} M$. Consequentemente, $P_0 R_{P_0} \in \operatorname{Ass} M_{P_0}$. Segue que

$$\operatorname{Ext}^0_{R_{P_0}}(k(P_0), M_{P_0}) = \operatorname{Hom}_{R_{P_0}}(k(P_0), M_{P_0}) \neq 0.$$

Supondo $i > 0$, temos

$$\operatorname{Ext}^{i-1}_{R_{P_i}}(R_{P_i}/P_i R_{P_i}, M_{P_i})_{P_{i-1}R_{P_i}} \simeq \operatorname{Ext}^{i-1}_{R_{P_{i-1}}}(k(P_{i-1}), M_{P_{i-1}}) \neq 0,$$

por hipótese indutiva. O isomorfismo anterior se dá pelo fato de que $(M_{P_i})_{P_{i-1}R_{P_i}} \simeq M_{P_{i-1}}$ e $(R_{P_i})_{P_{i-1}R_{P_i}} \simeq R_{P_{i-1}}$ (este último isomorfismo identifica $P_{i-1}R_{P_i}$ com $P_{i-1}R_{P_{i-1}}$ em $R_{P_{i-1}}$).

Concluímos que

$$\operatorname{Ext}^{i-1}_{R_{P_i}}(R_{P_i}/P_iR_{P_i}, M_{P_i}) \neq 0.$$

Assim, como $V(P_{i-1}R_{P_i}) = \{P_{i-1}R_{P_i}, P_iR_{P_i}\}$, segue da Proposição 3.1.6 que

$$\operatorname{Ext}^{i}_{R_{P_i}}(k(P_i), M_{P_i}) \neq 0.$$

Provemos agora que $\dim\operatorname{inj} M = \operatorname{depth} R$. Denotemos $\dim\operatorname{inj} M = t$ e $\operatorname{depth} R = s$. Considerando $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_s$ uma M-sequência maximal em $\mathfrak{m}$, temos que $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R/(\mathbf{x})$, o que nos fornece um morfismo injetor $f : k \to R/(\mathbf{x})$. Em particular, obtemos a sequência exata

$$0 \to k \to R/(\mathbf{x}) \to \operatorname{Coker} f \to 0$$

a qual induz o complexo exato

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^t_R(\operatorname{Coker} f, M) \to \operatorname{Ext}^t_R(R/(x), M) \to \operatorname{Ext}^t_R(k, M) \to \operatorname{Ext}^{t+1}_R(\operatorname{Coker} f, M).$$

Pela Proposição 3.1.7, $\operatorname{Ext}^t_R(k, M) \neq 0$. Além disso, $\operatorname{Ext}^{t+1}_R(\operatorname{Coker} f, M) = 0$, pois $t = \dim\operatorname{inj} M$. Assim, pela exatidão do complexo acima, concluímos que

$$\operatorname{Ext}^t_R(R/(\mathbf{x}), M) \neq 0.$$

Por outro lado, uma vez que $K_\bullet(\mathbf{x})$ é uma resolução livre minimal de $R/(\mathbf{x})$, temos $\dim\operatorname{inj} R/(\mathbf{x}) = s$, donde

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/(\mathbf{x}), M) = 0$$

para todo $i > s$. Logo, $t \leqslant s$. Para a desigualdade reversa, uma vez que $\operatorname{Ext}^i_R(R/(\mathbf{x}), M) = 0$, para todo $i > t$, é suficiente mostrar que $\operatorname{Ext}^s_R(R/(\mathbf{x}), M) \neq 0$.

Afirmamos que $\operatorname{Ext}^s_R(R/(\mathbf{x}), M) \simeq M/\mathbf{x}M$. Para provar tal isomorfismo, usamos o complexo de Koszul da sequência $\mathbf{x}$ para obter $\operatorname{Ext}^s_R(R/(\mathbf{x}), M)$. Explicitamente, temos

$$K_\bullet(\mathbf{x}):\ 0 \to R \xrightarrow{d} R^s \to \cdots \to R \to 0$$

onde

$$d : R \to R^s, \quad a \longmapsto (x_1a, -x_2a, \ldots, (-1)^{s-1}x_sa).$$

Aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_R(-, M)$, obtemos o complexo

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(R, M) \to \cdots \to \operatorname{Hom}_R(R^s, M) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}_R(R, M).$$

onde

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(R^s, M) \to \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad f \mapsto f \circ d.$$

Por definição, $\mathrm{Ext}^s_R(R/(\mathbf{x}), M) = \mathrm{Hom}_R(R, M)/\operatorname{Im}\varphi$. Assim, é suficiente provar que $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$, onde

$$\psi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M/\mathbf{x}M, \quad g \mapsto \overline{g(1_R)}.$$

Não é difícil verificar que ψ é sobrejetiva e que $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\psi$. Por outro lado, dado $g \in \ker\psi$, existem $m_1, \ldots, m_s \in M$ tais que

$$g(1_R) = x_1 m_1 + \cdots + x_s m_s.$$

Assim, definindo $f \in \mathrm{Hom}_R(R^s, M)$, pondo $f(e_i) = (-1)^{i-1} m_i$, obtemos

$$\varphi(f)(1_R) = (f \circ d)(1_R) = f(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{s-1} x_s) = x_1 m_1 + \cdots + x_s m_s = g(1_R).$$

Portanto, $g = \psi(f)$, o que encerra a demonstração. □

3.2 Decomposição de módulos injetivos em módulos injetivos indecomponíveis

Nesta seção, exploraremos o conceito de módulo indecomponível. No ambiente noetheriano, veremos que os módulos injetivos indecomponíveis estão em bijeção com os ideais primos do anel base. Por fim, mostraremos que todo módulo injetivo se decompõe numa soma direta de módulos injetivos indecomponíveis.

Definição 3.2.1. Um R-módulo M é dito *indecomponível* se não existem submódulos próprios M_1, M_2 tais que $M = M_1 \oplus M_2$.

Exemplo 3.2.2. Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, então R é indecomponível como R-módulo. De fato, como todo ideal próprio de R está contido em $\mathfrak{m}$, a soma de dois ideais próprios estará contida em $\mathfrak{m}$, não podendo, portanto, se igualar a R.

Teorema 3.2.3. *Seja R um anel noetheriano. Temos:*

(i) $E(R/\mathfrak{p})$ *é um R-módulo indecomponível, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.*

(ii) *Se I é um R-módulo injetivo não-nulo e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$, então $E(R/\mathfrak{p})$ é um somando direto de I. Em particular, se I for indecomponível, então $I \simeq E(R/\mathfrak{p})$.*

iii) $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} E(M)$, *para todo* R-*módulo* M. *Em particular, a aplicação* $\mathfrak{p} \to E(R/\mathfrak{p})$ *estabelece uma bijeção entre os ideais primos de* R *e os* R-*módulos injetivos indecomponíveis.*

Prova. (i) Suponha que existem R-submódulos não-nulos N_1 e N_2 de $E(R/\mathfrak{p})$ tais que $E(R/\mathfrak{p}) = N_1 \oplus N_2$. Em particular, $N_1 \cap N_2 = 0$, donde $(N_1 \cap (R/\mathfrak{p})) \cap (N_2 \cap (R/\mathfrak{p})) = 0$.

Por outro lado, como $R/\mathfrak{p} \subset E(R/\mathfrak{p})$ é uma extensão essencial, existem $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ não-nulos em $R/\mathfrak{p}$ com $\overline{r_1} \in N_1$ e $\overline{r_2} \in N_2$. Segue que $r_1\overline{r_2} = r_2\overline{r_1} = \overline{r_1 r_2}$ é um elemento não-nulo em $(N_1 \cap (R/\mathfrak{p})) \cap (N_2 \cap (R/\mathfrak{p}))$, o que é um absurdo. Assim, $E(R/\mathfrak{p})$ é indecomponível.

(ii) Uma vez que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$, podemos identificar $R/\mathfrak{p}$ como submódulo de I. Segue que $E(R/\mathfrak{p})$ é isomorfo a um submódulo de $E(I) = I$. Como $E(R/\mathfrak{p})$ é R-módulo injetivo, ele é um somando direto de I.

(iii) Inicialmente, a inclusão $M \subset E(M)$ implica que $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} E(M)$. Para a inclusão reversa, tome $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} E(M)$. Assim, podemos identificar $R/\mathfrak{q}$ com um submódulo U de $E(M)$. Sendo $M \subset E(M)$ uma extensão essencial, existe $x \neq 0$ em $U \cap M$. Uma vez que $\mathfrak{q}$ é o anulador de qualquer elemento não-nulo de $R/\mathfrak{q}$, segue que $\mathfrak{q}$ é o anulador de x, donde $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$.

Por fim, se $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ são ideais primos de R com $E(R/\mathfrak{p}) \simeq E(R/\mathfrak{q})$, então

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ass} R/\mathfrak{p} = \operatorname{Ass} E(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{Ass} E(R/\mathfrak{q}) = \operatorname{Ass} R/\mathfrak{q} = \mathfrak{q}.$$

Logo, segue do item ii) deste teorema que a aplicação $\mathfrak{p} \to E(R/\mathfrak{p})$ é uma bijeção. □

Encerramos esta seção com o teorema a respeito da decomposição de módulos injetivos. Para este teorema, faremos uso dos dois resultados seguintes.

Proposição 3.2.4. *Sejam* R *um anel noetheriano,* $S \subset R$ *um conjunto multiplicativo e* M *um* R-*módulo. Então:*

$$[E_R(M)]_S \simeq E_{R_S}(M_S).$$

Prova. Vamos provar que $[E_R(M)]_S$ é o fecho injetivo de M_S. Uma vez que $[E_R(M)]_S$ é um R_S-módulo injetivo, é suficiente provar que $M_S \subset [E_R(M)]_S$ é uma extensão essencial.

Para isto basta tomar um elemento $x \neq 0$ em $[E_R(M)]_S$ e verificar que $R_S x \cap M_S \neq 0$. Por outro lado, sendo $x = n/s$, com $n \in E_R(M)$ e $s \in S$, temos que $R_S x = R_S n$. Isto nos diz que podemos supor $x \in E_R(M)$.

Defina $T = \{\operatorname{Ann}_R(tx), t \in S\}$. Como R é noetheriano, T possui um elemento maximal, digamos $\operatorname{Ann}_R(sx)$. Sendo $M \subset E_R(M)$ uma extensão essencial, concluímos que $M \cap Rsx \neq 0$. Por outro lado, denotando $I = \{b \in R;\ bsx \in M\}$, podemos escrever

$$M \cap Rsx = Isx \neq 0.$$

Digamos que $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Afirmamos que $a_i sx \neq 0$ em $[E_R(M)]_S$ para algum i. De fato, do contrário, haveria $t \in S$ tal que

$$a_i tsx = 0$$

em $E_R(M)$ e para todo i. Em particular $a_i \in \text{Ann}_R(tsx)$. Como $\text{Ann}_R(sx) \subset \text{Ann}_R(tsx)$, devemos ter $\text{Ann}_R(sx) = \text{Ann}_R(tsx)$, pela maximalidade de $\text{Ann}_R(sx)$ em T. Resulta daí que $I \subset \text{Ann}_R(sx)$, o que é um absurdo. Assim, existe i tal que $a_i sx \neq 0$ em $[E_R(M)]_S$. Por fim, como $a_i \in I$, temos $a_i sx \in M_S$, donde $R_S(sx) \cap M_S \neq 0$. Sendo $R_S(sx) = R_S x$, o resultado está provado. □

Lema 3.2.5. *Seja R um anel noetheriano e p um ideal primo de R. Então:*

$$k(p) \simeq \text{Hom}_{R_p}\left(k(p), \left[E\left(\frac{R}{p}\right)\right]_p\right)$$

como R_p-módulos.

Prova.

É suficiente provar o resultado no caso em que R é local e p é seu ideal maximal. De fato, suponha que o resultado seja válido nesta situação. Considere os seguintes isomorfismos:

$$k(p) = R_p/pR_p \simeq (R/p)_p \simeq \text{Frac}(R/p).$$

Analogamente, temos também os isomorfismos seguintes:

$$k(pR_p) \simeq (R_p/pR_p)_{pR_p} \simeq (k(p))_{pR_p} \simeq \text{Frac}(k(p)) = k(p).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
k(p)_{pR_p} &\simeq k(p) \\
&\simeq k(pR_p) \\
&\simeq \text{Hom}_{(R_p)_{pR_p}}\left[k(p), E_{R_p}\left(R_p/pR_p\right)_{pR_p}\right] \\
&\simeq \left(\text{Hom}_{R_p}\left[k(p), E_{R_p}\left[(R/p)_p\right]\right]\right)_{pR_p} \\
&\simeq \left(\text{Hom}_{R_p}\left[k(p), [E(R/p)]_p\right]\right)_{pR_p}
\end{aligned}$$

Como pR_p é o único ideal maximal de R_p, concluímos que

$$k(p) \simeq \text{Hom}_{R_p}\left(k(p), [E\left(R/p\right)]_p\right)$$

Assim, podemos supor que R é local e $\mathfrak{p}$ é seu ideal maximal. Sendo $k = R/\mathfrak{p}$, temos que $k(\mathfrak{p}) \simeq k_{\mathfrak{p}}$. Logo, é suficiente provar que

$$k \simeq \mathrm{Hom}_R(k, E(k)).$$

Sendo $\mathrm{Soc}\, E(k) = \{x \in E(k); \mathfrak{p} \cdot x = 0\}$ (vide Definição 3.3.4), temos um isomorfismo natural de k-espaços vetoriais

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(k, E(k)) \to \mathrm{Soc}\, E(k),\ (f \longmapsto f(\overline{1}))$$

Assim, é suficiente provar que $\mathrm{Soc}\, E(k) = k$. A inclusão $k \subset \mathrm{Soc}\, E(k)$ é imediata. Por outro lado, se $k \neq \mathrm{Soc}\, E(k)$, haveria $\nu \in \mathrm{Soc}\, E(k) \backslash k$. Em particular $k\nu$ é um subespaço não-nulo de $\mathrm{Soc}\, E(k)$ com $k\nu \cap k = 0$. Por outro lado, como $k\nu$ também é um R-submódulo de $\mathrm{Soc}\, E(k)$ e a extensão $k \subset E(k)$ é essencial, deveríamos ter $k\nu \cap k \neq 0$. Assim, $k = \mathrm{Soc}\, E(k)$ e o resultado está provado. □

Teorema 3.2.6. *Seja R um anel noetheriano e I um R-módulo injetivo. Então, I se decompõe numa soma direta de R-módulos injetivos indecomponíveis. Tal decomposição é única no seguinte sentido: Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, a cardinalidade do conjunto de somandos na decomposição que são isomorfos a $E(R/\mathfrak{p})$ depende apenas de I e $\mathfrak{p}$, sendo igual a* $\dim_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), I_{\mathfrak{p}})$.

Prova. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de submódulos de I que são injetivos indecomponíveis e cuja soma é direta. Pelo item (ii) do Teorema 3.2.3, $\mathcal{S}$ não é vazio. Ordenando $\mathcal{S}$ parcialmente por inclusão, segue do lema de Zorn que este possui um elemento maximal, digamos $\mathcal{F}$.

Seja E a soma (direta) dos elementos de $\mathcal{F}$. Pelo item (ii) da Proposição 3.1.3, E é um R-módulo injetivo e, portanto, é um somando direito de I. Escrevamos

$$I = E \oplus H.$$

Pelo Exemplo 4.2.4, H é injetivo. Afirmamos que $H = 0$.

De fato, se $H \neq 0$, então podemos escolher $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, H$. Daí, $E(R/\mathfrak{p})$ é um somando direto de H. Como $E(R/\mathfrak{p})$ é injetivo indecomponível e a soma $E \oplus E(R/\mathfrak{p})$ é direta, segue que $\mathcal{F} \cup E(R/\mathfrak{p}) \in \mathcal{S}$, o que contraria a maximalidade de $\mathcal{F}$. Assim, $H = 0$ e $I = E$, o que prova a existência da decomposição requerida.

Agora, escrevamos $I = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, onde cada I_λ é um R-módulo injetivo indecomponível. Fixe um ideal primo $\mathfrak{p}$ e seja

$$\Lambda_{\mathfrak{p}} = \{\lambda \in \Lambda; I_\lambda \simeq E(R/\mathfrak{p})\}.$$

Note que

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), I_{\mathfrak{p}}) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), (I_\lambda)_{\mathfrak{p}}).$$

Desta forma, se $\mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), (I_\lambda)_p) = 0$, sempre que I_λ não for isomorfo a $E(R/p)$, concluiremos que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), I_p) &\simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_p} \mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), (I_\lambda)_p) \\ &\simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_p} \mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), E(R/p)_p) \\ &\simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_p} k(p). \end{aligned}$$

Em particular, seguirá que a cardinalidade de Λ_p é igual a $\dim_{k(p)} \mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), I_p)$.

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.3, item (ii), I_λ é isomorfo a $E(R/q)$, para algum ideal primo q. Assim, é suficiente provar que $\mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), E(R/q)_p) = 0$, se $q \neq p$.

Para tal, suponha inicialmente que $q \not\subset p$. Neste caso, como $\mathrm{Ass}\, E(R/q) = \mathrm{Ass}\, R/q = \{q\}$, segue que $\mathrm{Ass}\, E(R/q)_p = \emptyset$, donde $E(R/q)_p = 0$. Assim, $\mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), E(R/q)_p) = 0$.

Por outro lado, se $q \subset p$, então podemos escolher um elemento $x \in p\ q$. Sendo ψ_x a multiplicação por x em $E(R/q)$, temos que $\ker \psi_x \cap R/q = 0$. Como a extensão $R/q \subset E(R/q)$ é essencial, concluímos que $\ker \psi_x = 0$.

Por fim, dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R/p, E(R/q))$, temos $x\varphi(\overline{1}) = \varphi(\overline{x}) = 0$. Assim, $\varphi(\overline{1}) \in \ker \psi_x = 0$. Isto mostra que $\varphi = 0$, de modo que $\mathrm{Hom}_R(R/p, E(R/q)) = 0$. Em particular,

$$\mathrm{Hom}_{R_p}(k(p), E(R/q)_p) \simeq [\mathrm{Hom}_R(R/p, E(R/q))]_p = 0.$$

□

3.3 Anéis de Gorenstein

Nesta seção, apresentamos o conceito de anéis de Gorenstein. Mostraremos que essa classe de anéis está contida na classe dos anéis Cohen-Macaulay e abrange classes importantes já estudadas: Os anéis regulares e os anéis de interseção completa.

Além disso, veremos uma caracterização dos anéis de Gorenstein, especialmente efetiva em dimensão zero.

Definição 3.3.1. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Dizemos que R é um *anel de Gorenstein* (ou simplesmente *anel Gorenstein*) se $\dim \mathrm{inj}\, R < \infty$. No caso em que R não é local, ele é dito ser um anel de Gorenstein se $R_\mathfrak{m}$ for anel de Gorenstein, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Proposição 3.3.2. *Seja R um anel noetheriano.*

(i) *Se* R *for um anel de Gorenstein e* $S \subset R$ *é um conjunto multiplicativo, então* R_S *é um anel de Gorenstein.*

(ii) *Se* R *é um anel de Gorenstein e* $\mathbf{x}$ *é uma* R*- sequência, então* $R/(\mathbf{x})$ *é um anel de Gorenstein. A recíproca vale se* R *for um anel local.*

(iii) *Se* R *for um anel local, então* R *é Gorenstein se, e somente se,* $\hat{R}$ *for Gorenstein.*

Prova. (i) Por um argumento análogo ao que foi utilizado na Observação 2.1.8, é suficiente provar que R_p é Gorenstein para todo ideal primo p de R. Para tal objetivo, tome um ideal maximal $\mathfrak{m}$ contendo p. Assim, $R_p \simeq (R_{\mathfrak{m}})_p$. Segue da Proposição 3.1.3, item (i), que

$$\dim \operatorname{inj}_{R_p} R_p \leqslant \dim \operatorname{inj}_{R_{\mathfrak{m}}} R_{\mathfrak{m}} < \infty.$$

(ii) Se R for local, o resultado segue da igualdade

$$\dim \operatorname{inj}_{R/(\mathbf{x})} R/(\mathbf{x}) = \dim \operatorname{inj} R - n,$$

onde n é o comprimento de $\mathbf{x}$. Se R não for local, tome um ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $R/(\mathbf{x})$. Assim, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/(\mathbf{x})$, para algum $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R e, portanto:

$$(R/(\mathbf{x}))_{\mathfrak{n}} \simeq R_{\mathfrak{m}}/(\mathbf{x})R_{\mathfrak{m}}.$$

Logo, pelo caso local, $(R/(\mathbf{x}))_{\mathfrak{n}}$ é Gorenstein.

(iii) Segue da Proposição 3.1.7 juntamente com o fato de que $\widehat{\operatorname{Ext}^i_R(k, R)} \simeq \operatorname{Ext}^i_{\hat{R}}(k, \hat{R})$, para todo i. □

O próximo resultado mostra que anéis de interseção completa são casos particulares de anéis de Gorenstein, os quais são anéis Cohen-Macaulay.

Teorema 3.3.3. *Seja* R *um anel noetheriano local. Temos as seguintes implicações:*

R *é regular* $\Rightarrow$ R *é de interseção completa* $\Rightarrow$ R *é Gorenstein* $\Rightarrow$ R *é Cohen-Macaulay.*

Prova. A primeira implicação já foi vista. Para a segunda, uma vez que R é de interseção completa, segue do Teorema 2.3.15 que $\hat{R} = S/I$, onde $(S, \mathbf{m}, k)$ é um anel regular local e I é um ideal gerado por uma sequência regular. Pela regularidade de S, temos que $\dim \operatorname{proj}_S k < \infty$. Em particular :

$$\operatorname{Ext}^i_S(k, S) = 0,$$

para $i >> 0$. Desta forma, $\dim \operatorname{inj} S < \infty$, o que nos diz que S é Gorenstein. Assim, pelos itens $ii)$ e $iii)$ da proposição anterior, segue que R é Gorenstein.

Por fim, para a última implicação, a hipótese de que R é Gorenstein nos diz que $\dim R \leqslant \dim \operatorname{inj} R = \operatorname{depth} R$. Como $\operatorname{depth} R \leqslant \dim R$, segue que $\dim R = \operatorname{depth} R$ e, portanto, R é Cohen-Macaulay. □

Já vimos que existem anéis de interseção completa que não são regulares. Naturalmente, gostaríamos de saber se há anéis de Gorenstein que não são de interseção completa. Responder a esta questão é uma tarefa que depende de nossa habilidade em reconhecer quando um anel é de Gorenstein ou não. Assim, iremos em busca de uma caracterização dos anéis de Gorenstein que torne mais simples sua identificação.

Tal caracterização será dada em termos da definição abaixo.

Definição 3.3.4. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado com profundidade t.

(a) O *tipo de* M é definido por
$$r(M) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^t(k, M).$$

(b) O *socle* de M, denotado por $\operatorname{Soc} M$, é o R-módulo
$$\operatorname{Soc} M = \{x \in M; \mathfrak{m} \cdot x = 0\}.$$

Observe que $\operatorname{Soc} M$ possui uma estrutura natural de k-espaço vetorial e pode ser naturalmente identificado com $\operatorname{Hom}_R(k, M)$. Assim, se $\operatorname{depth} M = 0$, então
$$r(M) = \dim_k \operatorname{Hom}_R(k, M) = \dim_k \operatorname{Soc} M.$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.2.6, se x for uma M-sequência maximal, então
$$\operatorname{Ext}_R^t(k, M) \simeq \operatorname{Hom}_R(k, M/xM).$$

Desta forma, $r(M) = \dim_k \operatorname{Soc} M/xM$. Em particular, $r(M) = r(M/xM)$.

Veremos adiante que os anéis de Gorenstein são precisamente os anéis Cohen-Macaulay locais de tipo 1. O módulo $E_R(k)$ desempenhará um papel fundamental na demonstração deste resultado. Sua contribuição está associada ao funtor $\operatorname{Hom}_R(-, E_R(k))$.

Dado um R-módulo M, denotaremos $\operatorname{Hom}_R(M, E_R(k))$ por $M^\vee$, o *E-dual* de M. Veremos que esta definição de dual torna reflexivo todo módulo de comprimento finito. Por simplicidade, denotaremos $E_R(k)$ simplismente por E_R.

Teorema 3.3.5. *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local e* N *um* R*-módulo de comprimento finito.*

(a) $\ell(N) = \ell(N^\vee)$.

(b) O morfismo canônico $N \to N^{\vee\vee}$ é um isomorfismo, ou seja, N é reflexivo com respeito ao E-dual.

(c) $\mu(N) = r(N^\vee)$ e $\mu(N^\vee) = r(N)$.

(d) Se R for artiniano, então E_R é um R-módulo finitamente gerado, fiel e cumpre as condições seguintes:

(i) $\ell(E_R) = \ell(R)$.

(ii) O mapa canônico $R \to \mathrm{Hom}_R(E_R, E_R)$ é um isomorfismo.

(iii) $r(E_R) = 1$ e $\mu(E_R) = r(R)$.

Reciprocamente, qualquer R-módulo finitamente gerado, fiel e de tipo 1 é isomorfo a E_R.

Prova. (a) Faremos indução sobre $\ell(N)$. Se $\ell(N) = 1$, então N é cíclico. Como R é local, segue que $N \simeq k$. Assim, $N^\vee \simeq \mathrm{Hom}_R(k, E_R) \simeq k$, pela demonstração do item (ii) do Lema 3.2.5. Portanto, $\ell(N^\vee) = \ell(k) = 1 = \ell(N)$.

Se $\ell(N) > 1$, então existe um submódulo $U \subsetneq N$. Dele, se obtém uma sequência exata

$$0 \to U \to N \to W \to 0 \tag{3.3}$$

Em particular,

$$\ell(N) = \ell(U) + \ell(W).$$

Por outro lado, como E_R é injetivo, o funtor $\mathrm{Hom}(-, E_R)$ é exato. Isto nos fornece a sequência exata:

$$0 \to W^\vee \to N^\vee \to U^\vee \to 0 \tag{3.4}$$

Como $\ell(U), \ell(W) < \ell(N)$, obtemos por hipótese indutiva que $\ell(U) = \ell(U^\vee)$ e $\ell(W) = \ell(W^\vee)$. Por fim, como

$$\ell(N^\vee) = \ell(U^\vee) + \ell(W^\vee),$$

segue que $\ell(N) = \ell(N^\vee)$.

(b) Mais uma vez, faremos indução sobre $\ell(N)$. Se $\ell(N) = 1$, então $N \simeq k$. Assim, $N^{\vee\vee} \simeq k$, de modo que podemos identificar o mapa canônico $\varphi : N \to N^{\vee\vee}$ com o mapa linear $\varphi : k \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(k, E_R), E_R) \simeq k$.

Consequentemente, φ é um isomorfismo se, e somente se, φ não é nulo. Para ver que φ não é nulo, tomemos $x \neq 0$ em $\mathrm{Soc}\, E_R$. O isomorfismo $\mathrm{Soc}\, E_R \simeq \mathrm{Hom}_R(k, E_R)$ associa x a um elemento $f \in \mathrm{Hom}_R(k, E_R)$ tal que $f(\overline{1}) = x$. Assim, $\varphi(\overline{1})(f) = f(\overline{1}) = x \neq 0$, o que prova que $\varphi \neq 0$.

No caso em que $\ell(N) > 1$, procedemos de forma análoga ao item anterior, obtendo a sequência exata (3.3). Usando a exatidão do funtor $\mathrm{Hom}_R(-, E_R)$, obtemos o diagrama comutativo de linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U^{\vee\vee} \arrow[r] & N^{\vee\vee} \arrow[r] & W^{\vee\vee} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótese indutiva, os mapas canônicos $U \to U^{\vee\vee}$ e $W \to W^{\vee\vee}$ são isomorfismos. Logo, pelo lema da serpente aplicado ao diagrama anterior, concluímos que $N \to N^{\vee\vee}$ é um isomorfismo.

(c) Pelo item b), basta mostrar que $\mu(N) = r(N^{\vee})$. Temos $\mu(N) = \dim_k N/\mathfrak{m}N$. Por outro lado, note que, dado $f \in (N/\mathfrak{m}N)^{\vee}$, temos $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Soc}\, E_R$. Assim,

$$(N/\mathfrak{m}N)^{\vee} = \mathrm{Hom}_R(N/\mathfrak{m}N, E_R) = \mathrm{Hom}_R(N/\mathfrak{m}N, \mathrm{Soc}\, E_R).$$

Como $\mathrm{Soc}\, E_R \simeq \mathrm{Hom}_R(k, E_R) \simeq k$, segue que

$$\dim_k (N/\mathfrak{m}N)^{\vee} = \dim_k N/\mathfrak{m}N \cdot \dim_k \mathrm{Soc}\, E_R = \dim_k N/\mathfrak{m}N.$$

Isto mostra que $\mu(N) = \dim_k N/\mathfrak{m}N$. Por outro lado, pelo isomorfismo

$$\varphi : \mathrm{Soc}\, N^{\vee} \to (N/\mathfrak{m}N)^{\vee}, \quad f \mapsto F; F(\overline{n}) = f(n),$$

concluímos que $\mu(N) = \dim_k \mathrm{Soc}\, N^{\vee}$. Deste modo, nos resta provar a igualdade

$$\dim_k \mathrm{Soc}\, N^{\vee} = r(N^{\vee}),$$

ou equivalentemente, provar que $\mathrm{depth}\, N^{\vee} = 0$. Isto será feito por indução em $\ell(N^{\vee})$. O caso $\ell(N^{\vee}) = 1$ é trivial, uma vez que nesta situação $N^{\vee} \simeq k$. Se $\ell(N^{\vee}) > 1$, argumentando analogamente ao item a), obtemos a sequência exata (3.4) . Por hipótese indutiva, $\mathrm{depth}\, W^{\vee} = \mathrm{depth}\, U^{\vee} = 0$. Pela Proposição 1.2.11, segue que $\mathrm{depth}\, N^{\vee} = 0$.

(d) Como $R^{\vee} \simeq E_R$, temos que $\ell(E_R) = \ell(R^{\vee}) = \ell(R) < \infty$. Em particular, E_R é finitamente gerado. Por outro lado, segue do item (b) que o morfismo canônico

$$\alpha : R \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R, E_R), E_R)$$

é um isomorfismo de R-módulos. Uma vez que $R \simeq \mathrm{Hom}_R(R, E_R)$, α pode ser identificado com o mapa

$$\alpha : R \to \mathrm{Hom}_R(E_R, E_R), \quad r \mapsto F; F(e) = re.$$

Em particular, a injetividade de α implica que E_R é fiel. Por fim:

$$r(E_R) = \mu(E_R^\vee) = \mu(R^{\vee\vee}) = \mu(R) = 1 \text{ e } \mu(E_R) = r(E_R^\vee) = r(R).$$

Suponha agora que N é um R-módulo finitamente gerado, fiel e de tipo 1. Assim:

$$\mu(N^\vee) = r(N^{\vee\vee}) = r(N) = 1,$$

ou seja, $N^\vee$ é cíclico.
Afirmação: Se M é um R-módulo cíclico, então $M^\vee \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, E_R)$, para algum ideal I.

Digamos que $M = Rm$ e seja $I = \mathrm{Ann}(m)$. Seja

$$\psi : M^\vee \to \mathrm{Hom}_R(R/I, E_R), \quad f \longmapsto \psi(f);\ \psi(f)(\bar{r}) = f(rm).$$

Não é difícil verificar que ψ está bem definida e é um morfismo injetivo de R-módulos. Além disso, dado $g \in \mathrm{Hom}_R(R/I, E_R)$, seja $f \in M^\vee$, onde $f(rm) = rg(\bar{1})$. Segue que f está de fato bem definido e que $\psi(f) = g$. Isto mostra a sobrejetividade de ψ.

Por fim, pela afirmação anterior, existe um ideal I de R tal que

$$N \simeq N^{\vee\vee} \simeq \mathrm{Hom}_R(R/I, E_R).$$

Como N é fiel, concluímos que $I = 0$, donde $N \simeq E_R$. □

Observação 3.3.6. Em geral, pode-se garantir que a aplicação canônica $M \to M^{\vee\vee}$ é injetiva, ou seja, dado $m \in M$ não-nulo, existe $f \in M^\vee$ com $f(m) \neq 0$. Para ver isto, basta compor o isomorfismo $Rx \simeq R/\mathrm{Ann}(m)$ com o mapa natural $R/\mathrm{Ann}(m) \to k \subset E_R$, obtendo assim um morfismo $\varphi : Rx \to E_R$, cumprindo $\varphi(m) \neq 0$. Como E_R é injetivo, podemos estender esta aplicação a um morfismo $f : M \to E_R$ que cumpre $f(m) \neq 0$.

Estamos agora em posição de caracterizar os anéis de Gorenstein.

Corolário 3.3.7. *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel noetheriano local. São equivalentes:*

(i) R *é um anel de Gorenstein.*

(ii) R *é um anel Cohen-Macaulay de tipo 1.*

Prova. Inicialmente, note que, se x é uma R-sequência maximal, então R é Gorenstein (respectivamente Cohen-Macaulay, tem tipo 1) se, e somente se, $R/(x)$ é Gorenstein (respectivamente Cohen-Macaulay, tem tipo 1). Desta forma, basta provar o resultado para o caso em que R é artiniano.

(i)⇒(ii) Como R é artiniano, R é Cohen-Macaulay. Além disso, R é R-módulo injetivo e indecomponível, conforme o Exemplo 3.2.2. Logo, pelo item (ii) do Teorema 3.2.3, concluímos que $R \simeq E_R(k)$. e portanto, tem tipo 1, conforme a proposição anterior.

(ii)⇒(i) Pelo item d) do teorema anterior, segue que R é isomorfo a E_R e, portanto, é injetivo como R-módulo. Assim, R é Gorenstein. $\square$

Exemplo 3.3.8. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel artiniano local com $\mathfrak{m}^2 = 0$. Assim, $\operatorname{Soc} R = \mathfrak{m}$ e, portanto

$$r(R) = \dim_k \mathfrak{m} = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \operatorname{embdim} R.$$

Desta forma, R é Gorenstein se, e somente se, $\operatorname{embdim} R = 1$. Em particular,

$$K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)^2$$

é Gorenstein apenas quando $n = 1$(Isto nos dá uma família infinita de anéis Cohen-Macaulay que não são Gorenstein). Notemos ainda que, no caso de R ser Gorenstein, ele também é de interseção completa. De fato, sendo $\operatorname{embdim} R = 1$, temos $\mathfrak{m} = (x)$. Com o complexo de Koszul $K_\bullet(x)$ consiste essencialmente na multiplicação por x em R, resulta que

$$H_1(K_\bullet(x)) = \ker \psi_x = \operatorname{Soc} R,$$

onde ψ_x é a multiplicação por x. Assim, $\epsilon_1(R) = 1$.

Exemplo 3.3.9. Seja $R = K[X, Y]/(X^2, Y^3)$. Todo ideal primo que contém (X^2, Y^3) deve conter o ideal maximal (X, Y). Consequentemente, R é artiniano. Assim, para saber se R é Gorenstein, basta vermos se $\operatorname{Soc} R$ é unidimensional como K-espaço vetorial. Para isto, note que R é gerado como K-espaço vetorial por $\overline{1}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{XY}, \overline{Y^2}$ e $\overline{XY^2}$. Dado

$$f = a_1\overline{1} + a_2\overline{X} + a_3\overline{Y} + a_4\overline{XY} + a_5\overline{Y^2} + a_6\overline{XY^2} \in \operatorname{Soc} R,$$

as igualdades $Xf = Yf = 0$ implicam que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Assim, $\operatorname{Soc} R$ é gerado por $\overline{XY^2}$. Isto mostra que R é Gorenstein. Procedendo de forma análoga, verifica-se que se $R = K[X, Y]/(X^2, XY^2, Y^3)$, então $\operatorname{Soc} R$ é gerado por $\overline{XY^2}$ e $\overline{Y^2}$ como K-espaço vetorial. Assim, neste caso, R não é Gorenstein.

Exemplo 3.3.10. Seja $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ e denote por S_m o conjunto dos polinômios homogêneos de grau m. Seja $\varphi : S_m \to K$ um morfismo K-linear não-nulo. Defina

$$I_j = \begin{cases} S_j, \text{ se } j > m. \\ \\ a \in S_j \text{ com } \varphi(aS_{m-j}) = 0, \text{ se } j \leqslant m. \end{cases}$$

e seja $I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} I_j$. É imediato verificar que I é um ideal homogêneo de S, com $I_m = \ker\varphi$. Considere o anel $R = S/I$ e seja $\mathbf{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. Como $\mathbf{m}^{m+1} \subset I$, segue que R é um anel local, sendo $\mathbf{m}R$ seu ideal maximal. Mais ainda, R é artiniano. De fato, como I é **m**-primário, $\mathrm{Ass}\ (S/I) = \{\mathbf{m}\}$, donde $\mathrm{Supp}\,(S/I) = \{\mathbf{m}\}$. Portanto:

$$\dim R = \dim S/I = \dim_S S/I = 0.$$

Vamos provar que R é Gorestein. Para isto, começamos escrevendo

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_m,$$

onde $R_j = S_j/I_j$. Note que $\mathrm{Soc}\, R$ é ideal homogêneo de R pois **m** é ideal homogêneo de S. Além disso, é evidente que $R_m \subset \mathrm{Soc}\, R$. Afirmamos que $\mathrm{Soc}\, R = R_m$. Para isto, basta mostrar que nenhum elemento não-nulo de R_i pertence a $\mathrm{Soc}\, R$, se $i < m$. Com efeito, se $\overline{b} \in R_j \cap \mathrm{Soc}\, R$ e $\overline{b} \neq 0$, então existe $a \in S_{m-j}$ com $\varphi(ba) \neq 0$. Como $I_m = \ker\varphi$, concluímos que $\overline{a}.\overline{b} \neq 0$. Por fim, uma vez que $m - j > 0$, segue que $\overline{a} \in mR$, o que contraria a hipótese de que $\overline{b} \in \mathrm{Soc}\, R$. Assim,

$$\mathrm{Soc}\, R = R_m = S_m/\ker\varphi \simeq K$$

e, portanto, R tem tipo 1.

Exemplo 3.3.11. Vamos explicitar a construção do exemplo anterior definindo o morfismo K-linear $\varphi : S_2 \to K$ pondo $\varphi(X_iX_j) = 0$, se $i \neq j$ e $\varphi(X_i^2) = 1$, para $i = 1, \ldots, n$. Temos $I = I_0 \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus S_3 \oplus \cdots$. É imediato verificar que $I_0 = I_1 = 0$. Por outro lado, $I_2 = \ker\varphi$. Dado $f = a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2 + \sum\limits_{i \neq j} a_{ij}X_{ij} \in S_2$, temos que $f \in \ker\varphi$ se, e somente se

$$a_1 + \cdots + a_n = 0.$$

Isto mostra que $\ker\varphi \subset J$, onde

$$J = (X_1^2 - X_2^2, X_1^2 - X_3^2, \ldots, X_1^2 - X_n^2, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_{n-1}X_n).$$

Além disso, $S_i \subset J$, para todo $i > 2$ e, portanto, $I \subset J$. Como cada gerador de J pertence a $\ker\varphi$, concluímos que $I = J$. Explicitamente, temos que

$$R = \frac{K[X_1, \ldots, X_n]}{(X_1^2 - X_2^2, X_1^2 - X_3^2, \ldots, X_1^2 - X_n^2, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_{n-1}X_n)}$$

é um anel de Gorenstein, para todo n. Para $n = 1$, temos que $R = K[X_1]/(X_1^2)$, o qual também é um anel de interseção completa, conforme o Exemplo (3.3.9). Para $n = 2$, temos

$$R = K[X_1, X_2]/(X_1X_2, X_1^2 - X_2^2).$$

Afirmamos que, neste caso R também é um anel de interseção completa. De fato, tomando seu completamento ádico com respeito a seu ideal maximal, obtemos:

$$\hat{R} \simeq K[\![X_1, X_2]\!]/(X_1X_2, X_1^2 - X_2^2).$$

Uma vez que $K[\![X_1, X_2]\!]$ é um anel regular local e $X_1X_2, X_1^2 - X_2^2$ é uma sequência regular neste anel, segue do Teorema 2.3.15, item (iii), que R é de interseção completa. Procedendo de forma análoga, concluímos que $\widehat{R}$ não é de interseção completa para $n > 2$, pois

$$\hat{R} \simeq \frac{K[\![X_1, \ldots, X_n]\!]}{(X_1^2 - X_2^2, X_1^2 - X_3^2, \ldots, X_1^2 - X_n^2, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_{n-1}X_n)}$$

e, por um argumento análogo ao que foi feito no Exemplo 2.3.17, o ideal

$$I = (X_1^2 - X_2^2, X_1^2 - X_3^2, \ldots, X_1^2 - X_n^2, X_1X_2, X_1X_3, \ldots, X_{n-1}X_n)$$

não pode ser gerado por uma sequência regular. Assim, produzimos uma infinidade de anéis Gorenstein que não são de interseção completa.

Observação 3.3.12. No exemplo anterior, pode-se verificar diretamente que o anel R é Gorenstein:

Como k-espaço vetorial, R é gerado pelo conjunto

$$\{1, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}, X_1^2\}.$$

Daí, se pode concluir que $\mathrm{Soc}\ R$ é gerado por X_1^2, donde R é Gorenstein.

3.4 O módulo Canônico e Teoria de Dualidade

Seja M um R-módulo finitamente gerado. A noção usual de dual de M é o R-módulo $\mathrm{Hom}_R(M, R)$. Ao contrário do que ocorre com espaços vetoriais de dimensão finita, M pode não ser reflexivo em geral. Por exemplo, se $R = \mathbb{Z}$ e $M = \mathbb{Z}_2$, temos $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$ e assim, M não é reflexivo.

Este é apenas um inconveniente do funtor $\mathrm{Hom}_R(-, R)$. Outro inconveniente é a perda de sua exatidão, como é o caso quando tomamos $R = \mathbb{Z}$. Estudaremos a teoria de dualidade a partir de um funtor dualizante, conforme a definição a seguir.

Definição 3.4.1. Um funtor $T : R - \mathrm{Mod} \to R - \mathrm{Mod}$ é dito *dualizante* se satisfaz as seguintes condições:

(i) T é contravariante e exato.

(ii) Para quaisquer R-módulos M, N, a aplicação

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(T(M), T(N), \ (\varphi \longrightarrow T(\varphi))$$

é um morfismo de R-módulos.

(iii) T é idempotente, ou seja, $T^2 \simeq I$.

O Teorema 3.3.5 nos diz que, se R é um anel noetheriano local, então o funtor $T(-) = \mathrm{Hom}_R(-, E_R)$ é dualizante na categoria dos módulos de comprimento finito. Nesta seção, estudaremos a teoria de dualidade sobre anéis Cohen-Macaulay. Mais precisamente, veremos que, sob condições apropriadas, existe um R-módulo M tal que o funtor $T(-) = \mathrm{Hom}_R(-, M)$ é dualizante na categoria dos R-módulos Cohen-Macaulay maximais (vide definição abaixo). O módulo M em questão é chamado *módulo canônico de* R e coincidirá com E_R no caso artiniano.

Definição 3.4.2. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay local. Um R-módulo M é dito *Cohen-Macaulay maximal* se

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R = \dim R.$$

Observação 3.4.3. Resulta do teorema de Auslander-Buchsbaum que todo módulo Cohen-Macaulay maximal M sobre um anel regular local $(R, \mathfrak{m})$ é livre. De fato, pelo Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre (Teorema 2.2.15), M possui dimensão projetiva finita. Logo, pelo teorema de Auslander-Buchsbaum:

$$\dim \mathrm{proj} M + \operatorname{depth} M = \dim R = \operatorname{depth} M.$$

Logo, $\dim \mathrm{proj} M = 0$, donde M é projetivo. Uma vez que R é local, M é livre.

Definição 3.4.4. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay local. Um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão injetiva finita e tipo 1 é dito um *módulo canônico de* R.

Investigaremos a existência e unicidade do módulo canônico. Começaremos provando sua unicidade. Para estabelecê-la, usaremos os três lemas seguintes.

Lema 3.4.5. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* M *um* R*-módulo Cohen-Macaulay maximal. Então, toda sequência* R*-regular é também uma sequência* M*-regular.*

Prova. Seja $\dim R = t$ e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma R-sequência. Pelo Teorema 1.5.14, $\mathbf{x}$ faz parte de um sistema de parâmetros de R, digamos $\mathbf{y} = x, x_{n+1}, \ldots, x_t$. Seja $I = \mathbf{y}R$. Assim, $\operatorname{rad} I = \mathfrak{m}$. Por outro lado, pelo item (b) do Teorema 1.2.12, temos:

$$\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(\operatorname{rad} I, M) = \operatorname{depth} M = t.$$

Portanto, segue do Corolário 1.6.16 que $\mathbf{y}$ é uma M-sequência. Em particular, $\mathbf{x}$ também o é. □

Lema 3.4.6. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay de dimensão* d *e* C *um* R*-módulo Cohen-Macaulay maximal.*

(a) *Suponha que* M *é um* R*-módulo Coehn-Macaulay maximal com* $\operatorname{Ext}_R^j(M, C) = 0$*, para todo* $j > 0$*. Então* $\operatorname{Hom}_R(M, C)$ *é Cohen-Macaulay maximal e para toda* R*-sequência* $\mathbf{x}$*, temos:*

$$\operatorname{Hom}_R(M, C) \otimes_R R/\mathbf{x}R \simeq \operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(M/\mathbf{x}M, C/\mathbf{x}C). \tag{3.5}$$

(b) *Suponha que* $\dim \operatorname{inj} C < \infty$ *e seja* M *um* R*-módulo Cohen-Macaulay de dimensão* t*. Então:*

(i) $\operatorname{Ext}_R^j(M, C) = 0$*, se* $j \neq d - t$*.*

(ii) $\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C)$ *é Cohen-Macaulay de dimensão* t*.*

Prova. (a) Por indução no comprimento da sequência, vamos provar o isomorfismo para um elemento R-regular x. Como C é Cohen-Macaulay maximal, x é C-regular, conforme o Lema 3.4.5. Assim, podemos considerar a sequência exata

$$0 \to C \xrightarrow{.x} C \to C/xC \to 0$$

Como $\operatorname{Ext}_R^j(M, C) = 0$, para $j > 0$, obtemos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{.x} \operatorname{Hom}_R(M, C) \to \operatorname{Hom}_R(M, C/xC) \to 0$$

Daí, segue que

$$\operatorname{Hom}_R(M, C/xC) \simeq \operatorname{Hom}_R(M, C)/x \operatorname{Hom}_R(M, C) \simeq \operatorname{Hom}_R(M, C) \otimes_R R/xR.$$

Por fim, pelo isomorfismo natural de R/xR-módulos

$$\operatorname{Hom}_{R/xR}(M/xM, C/xC) \simeq \operatorname{Hom}_R(M, C/xC),$$

obtemos o resultado desejado.

Provemos agora que $\operatorname{Hom}_R(M, C)$ é Cohen-Macaulay maximal. Faremos indução sobre $d = \dim R$. O resultado é trivial se $d = 0$. Se $d > 0$, seja x um elemento R-regular. Pelo Lema 3.1.8, temos, para cada j:

$$\operatorname{Ext}^j_{R/(x)}(M/xM, C/xC) \simeq \operatorname{Ext}^{j+1}_R(M/xM, C).$$

Por outro lado, da sequência exata

$$0 \to M \xrightarrow{.x} M \to M/xM \to 0$$

obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^j_R(M, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^j_R(M, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{j+1}_R(M/xM, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{j+1}_R(M, C) \longrightarrow \cdots$$

Assim, $\operatorname{Ext}^j_R(M/xM, C) = 0$. Portanto, podemos usar a hipótese indutiva para garantir que $\operatorname{Hom}_{R/xR}(M/xM, C/xC)$ é R/xR-módulo Cohen-Macaulay maximal. Pelo item (a) do Teorema 2.1.7 juntamente com o isomorfismo (3.5), concluímos que $\operatorname{Hom}_R(M, C)$ é Cohen-Macaulay maximal.

(b) (i) Começamos provando que $\operatorname{Ext}^j_R(M, C) = 0$ para $j > d - t$. Isto será feito por indução em $t = \dim M$. Se $t = 0$, então $\operatorname{Ext}^j_R(M, C) = 0$ para todo $j > d$, pois $\dim \operatorname{inj} C = d$. Se $t > 0$, podemos escolher um elemento M-regular x. A partir da sequência exata

$$0 \to M \xrightarrow{.x} M \to M/xM \to 0$$

obtemos a sequência exata

$$\operatorname{Ext}^j_R(M, C) \xrightarrow{.x} \operatorname{Ext}^j_R(M, C) \to \operatorname{Ext}^j_R(M/xM, C)$$

Como M/xM é Cohen-Macaulay de dimensão t, obtemos por hipótese indutiva que $\operatorname{Ext}^l_R(M/xM, C) = 0$, para todo $r > d - t + 1$. Como $j > d - t$, concluímos que

$$\operatorname{Ext}^{j+1}_R(M/xM, C) = 0,$$

o que implica que

$$\operatorname{Ext}^j_R(M, C) = x.\operatorname{Ext}^j_R(M, C).$$

Pelo lema de Nakayama, segue que $\operatorname{Ext}_R^j(M, C) = 0$.

O caso $j < d - t$ também será feito por indução em t. Se $t = 0$, então $\dim M = 0$. Assim, $V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}\}$. Como $\operatorname{grade}(\mathfrak{m}, C) = d$, o resultado segue do item (e) do Teorema 1.2.12. O caso $t > 0$ é análogo ao que fizemos na primeira parte desta demonstração.

(ii) Mais uma vez, faremos indução sobre t. Se $t = 0$, então como $\operatorname{Ann} M \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ext}_R^j(M, C)$, segue que $\dim \operatorname{Ext}_R^j(M, C) = 0$. Se $t > 0$, podemos escolher um elemento M-regular x. Procedendo analogamente à demonstração do item (i), obtemos a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C) \xrightarrow{.x} \operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C) \to \operatorname{Ext}_R^{d-(t-1)}(M/xM, C) \to 0$$

Por hipótese indutiva, $\operatorname{Ext}_R^{d-(t-1)}(M/xM, C)$ é Cohen-Macaulay de dimensão $t-1$. Assim, segue do isomorfismo

$$\frac{\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C)}{x \operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C)} \simeq \operatorname{Ext}_R^{d-(t-1)}(M, C)$$

juntamente com o item (a) do Teorema 2.1.7 que $\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C)$ é Cohen-Macaulay de dimensão t. □

Lema 3.4.7. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* $\varphi : M \to N$ *um morfismo de* R*-módulos finitamente gerados. Se* $\mathbf{x}$ *é uma* N*-sequência e o morfismo induzido* $\tilde{\varphi} : M/\mathbf{x}M \to N/\mathbf{x}N$ *é um isomorfismo, então* φ *é um isomorfismo.*

Prova. Pelo lema de Nakayama, a sobrejetividade de $\tilde{\varphi}$ implica a sobrejetividade de φ. Por outro lado, sendo $K = \ker \varphi$, segue da Proposição 1.1.6 que a sequência exata

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

induz a sequência exata

$$0 \to K/\mathbf{x}K \to M/\mathbf{x}M \to N/\mathbf{x}N \to 0$$

Daí, $K/\mathbf{x}K = 0$, donde $K = 0$, conforme o lema de Nakayama. □

Teorema 3.4.8. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay local e* C, C' *módulos canônicos de* R*. Então:*

(i) $C/\mathbf{x}C \simeq E_{R/(\mathbf{x})}$ *para qualquer* R*-sequência maximal* $\mathbf{x}$.

(ii) $C \simeq C'$.

(iii) $\operatorname{Hom}_R(C, C') \simeq R$ *e cada gerador de* $\operatorname{Hom}_R(C, C')$ *é um isomorfismo.*

(iv) *O mapa canônico* $R \to \operatorname{Hom}_R(C, C)$ *é um isomorfismo.*

Prova. (i) Pelo Corolário 3.1.9, temos que $C/\mathbf{x}C$ é $R/\mathbf{x}R$-módulo injetivo. Como $C/\mathbf{x}C$ tem tipo 1 e Spec $(R/(\mathbf{x})) = \{\mathfrak{m}/(\mathbf{x})\}$, segue do Teorema 3.2.6 que $C/\mathbf{x}C \simeq E_{R/(\mathbf{x})}$.

(ii) e (iii) Tome $\mathbf{x}$ uma R-sequência maximal. Pelo Lema 3.4.6 juntamente com o item (i), segue que

$$\mathrm{Hom}_R(C, C') \otimes_R R/(\mathbf{x}) \simeq \mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(E_{R/(\mathbf{x})}, E_{R/(\mathbf{x})}).$$

Por outro lado, como $R/(\mathbf{x})$ é artiniano, temos o isomorfismo canônico

$$R/(\mathbf{x}) \simeq \mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(E_{R/(\mathbf{x})}, E_{R/(\mathbf{x})}),$$

conforme o item (d) do Teorema 3.3.5. Compondo os isomorfismos anteriores, obtemos o isomorfismo

$$\psi : R/(\mathbf{x}) \to \mathrm{Hom}_R(C, C')/\mathbf{x}\,\mathrm{Hom}_R(C, C').$$

Sendo $\overline{\varphi}$ a imagem da unidade por ψ, concluímos que

$$\mathrm{Hom}_R(C, C') = R\varphi + \mathbf{x}\,\mathrm{Hom}_R(C, C').$$

Assim, segue do lema de Nakayama que $\mathrm{Hom}_R(C, C') = R\varphi$. Isto mostra que $\mathrm{Hom}_R(C, C')$ é cíclico. Ademais, como $R\varphi$ é Cohen-Macaulay maximal, $\mathbf{x}$ é $R\varphi$- regular. Deste modo, o mapa natural $R \to R\varphi$ é um isomorfismo, conforme o Lema 3.4.7. Por fim, seja φ um gerador qualquer de $\mathrm{Hom}_R(C, C')$. Novamente pelo Lema 3.4.7, para provar que φ é um isomorfismo, é suficiente mostrar que $\varphi \otimes R/(\mathbf{x})$ é um isomorfismo. Podemos identificar $\varphi \otimes R/(\mathbf{x})$ com um gerador de $E_{R/(\mathbf{x})}(k)$. Por outro lado, como o mapa canônico $R/(\mathbf{x}) \to E_{R/(\mathbf{x})}$ é um isomorfismo, todo gerador de $E_{R/(\mathbf{x})}$ está associado a um elemento invertível de R e, portanto, é um isomorfismo. Logo, φ é um isomorfismo.

(iv) Seja

$$\psi : R \to \mathrm{Hom}_R(C, C)$$

o mapa canônico. Sendo $\mathbf{x}$ uma R-sequência maximal, podemos identificar o mapa induzido $\psi \otimes R/(\mathbf{x})$ com o isomorfismo

$$R/(\mathbf{x}) \to \mathrm{Hom}_{R/(\mathbf{x})}(E_{R/(\mathbf{x})}, E_{R/(\mathbf{x})}).$$

Logo, o resultado segue do Lema 3.4.7. □

Pelo teorema anterior, o módulo canônico de um anel R, quando existe, é único. Denotaremos tal módulo por ω_R. A próxima proposição lista duas propriedades básicas do módulo canônico.

Proposição 3.4.9. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay local com módulo canônico ω_R. Então:*

(i) $\omega_R/\mathbf{x}\omega_R \simeq \omega_{R/\mathbf{x}R}$, *para toda R-sequência $\mathbf{x}$.*

(i) $(\omega_R)_p \simeq \omega_{R_p}$, *para todo* $p \in \operatorname{Spec} R$.

Prova. (i) Como ω_R é Cohen-Macaulay maximal, $\mathbf{x}$ é ω_R-regular. Assim $\omega_R/\mathbf{x}\omega_R$ é $R/\mathbf{x}R$-Cohen-Macaulay maximal de tipo 1 com dimensão injetiva finita. Pela unicidade do módulo canônico, segue que

$$\omega_R/\mathbf{x}\omega_R \simeq \omega_{R/\mathbf{x}R}.$$

(ii) Inicialmente, pela Proposição 3.1.3, temos que $\dim \operatorname{inj}_{R_p}(\omega_R)_p < \infty$. Por outro lado, pelo Teorema 2.1.7, $\operatorname{grade}(p, R) = \operatorname{depth} R_p$ e $\operatorname{grade}(p, \omega_R) = \operatorname{depth}(\omega_R)_p$. Além disso, como ω_R é Cohen-Macaulay maximal, toda sequência R-regular é ω_R-regular e, portanto, $\operatorname{grade}(p, R) \leqslant \operatorname{grade}(p, \omega_R)$. Deste modo:

$$\dim R_p = \operatorname{depth} R_p \leqslant \operatorname{depth}(\omega_R)_p = \dim(\omega_R)_p \leqslant \dim R_p.$$

Isto mostra que $(\omega_R)_p$ é R_p-módulo Cohen-Macaulay maximal. Nos resta provar que $(\omega_R)_p$ tem tipo 1. Para isto, seja $\mathbf{x}$ uma sequência de elementos de R cuja imagem em R_p é uma sequência regular maximal (Por abuso de notação, denotaremos tal imagem por $\mathbf{x}$ também). Como $(\omega_R)_p$ é R_p-módulo Cohen-Macaulay maximal e $\mathbf{x}$ tem comprimento igual a $\operatorname{depth} R_p$, $\mathbf{x}$ é $(\omega_R)_p$-regular maximal. Além disso, $\dim \operatorname{inj}_{R_p}(\omega_R)_p = \operatorname{depth} R_p$. Consequentemente,

$$\dim \operatorname{inj}_A M = 0,$$

onde $M = (\omega_R)_p/\mathbf{x}(\omega_R)_p$ e $A = R_p/\mathbf{x}R_p$. Uma vez que M é A-módulo injetivo e pR_p é o único ideal primo de A, segue do Teorema 3.2.6 que $M \simeq {E_A}^r$, onde r é o tipo de M. Por um lado, pelo Teorema 3.3.5, temos:

$$\operatorname{Hom}_A(M, M) \simeq [\operatorname{Hom}_A(E_A, E_A]^{r^2} \simeq A^{r^2}.$$

Por outro lado, usando o item (iv) do teorema anterior, concluímos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M, M) &\simeq \left[\operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(\omega_R/\mathbf{x}\omega_R, \omega_R/\mathbf{x}\omega_R)\right]_p \\ &\simeq \left[\operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(\omega_{R/\mathbf{x}R}, \omega_{R/\mathbf{x}R})\right]_p \\ &\simeq (R/\mathbf{x}R)_p \\ &\simeq R_p/\mathbf{x}R_p \\ &\simeq A. \end{aligned}$$

Assim, $A \simeq A^{r^2}$, o que implica que $r = 1$. □

Exemplo 3.4.10. Pelo Teorema 3.4.6, se R for artiniano, então ω_R existe e é isomorfo a E_R.

Outra situação em que o módulo canônico existe é quando R é um anel de Gorenstein. Na verdade, à luz da caracterização provada no Corolário 3.3.7, podemos afirmar que R é Gorenstein se, e somente se, ω_R existe e é isomorfo a R.

Discutiremos agora sobre a existência do módulo canônico. Veremos que os anéis que admitem módulo canônico estão, de certa forma, próximos de serem Gorenstein.

Lema 3.4.11. *Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ um morfismo de anéis noetherianos locais de modo que S seja R-módulo finitamente gerado. se M é um S-módulo que é R-finitamente gerado, então:*

$$\dim_R M = \dim_S M \quad e \quad \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth}_S M.$$

Prova. Inicialmente note que $\operatorname{Ann}_R M = \varphi^{-1}(\operatorname{Ann}_S M)$. Assim, podemos considerar a extensão de anéis

$$R/\operatorname{Ann}_R M \subset S/\operatorname{Ann}_S M,$$

que é uma extensão finita pois $R \subset S$ é uma extensão finita. Assim, tal extensão é integral e, portanto:

$$\dim_R M = \dim R/\operatorname{Ann}_R M = \dim S/\operatorname{Ann}_S M = \dim_S M.$$

Para a segunda igualdade, seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n \subset \mathfrak{m}$ uma M-sequência maximal. Assim, pondo $y_i = \varphi(x_i)$, temos que $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$ é uma M-sequência. Vamos provar que $\mathbf{y}$ é uma S-sequência maximal.

Seja $N = M/\mathbf{x}M = M/\mathbf{y}M$. Como M é R-módulo noetheriano, N também o é. Em particular, N é um S-módulo que é finitamente gerado como R-módulo. Assim, o mesmo vale para $\operatorname{Soc}_R N$. Desta forma,

$$\dim_R \operatorname{Soc}_R N = \dim_S \operatorname{Soc}_R N.$$

Por outro lado, como $\operatorname{Ann}_R \operatorname{Soc}_R N = \{\mathfrak{m}\}$, segue que $\dim_R \operatorname{Soc}_R N = 0$. Portanto, $\dim_S \operatorname{Soc}_R N = 0$. Em particular, $V(\operatorname{Ann}_S \operatorname{Soc}_R N) = \{\mathfrak{n}\}$. Por fim, como $\operatorname{depth}_R N = 0$, segue do item (ii) do Teorema 1.2.4 que

$$\operatorname{Soc}_R N \simeq \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, N) \neq 0.$$

Assim, podemos tomar $p \in \operatorname{Ass}_S \operatorname{Soc}_R N$. Consequentemente, $\operatorname{Ann}_S \operatorname{Soc}_R N \subset p$, donde $p = \mathfrak{n}$. Sendo assim, $\mathfrak{n} \in \operatorname{Ass}_S N$, o que nos diz que $\mathbf{y}$ é uma S-sequência maximal.

Proposição 3.4.12. *Seja $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ um morfismo de anéis Cohen-Macaulay locais de modo que S seja R-módulo finitamente gerado. Se ω_R existe, então ω_S existe e é isomorfo a $\operatorname{Ext}^t_R(S, \omega_R)$, onde $t = \dim R - \dim S$.*

Prova. Suponha inicialmente que $\dim R = \dim S = d$. Assim, devemos provar que $\operatorname{Hom}_R(S, \omega_R)$ é o módulo canônico de S. Pela Proposição anterior, segue que S é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal. Assim, pelo item (b) do Lema 3.4.6, concluímos que $\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)$ é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal. Em particular, se $\mathbf{x}$ é uma R-sequência maximal, então $\mathbf{x}$ é uma sequência ω_R-regular e $\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)$-regular. Por outro lado, o item (a) desta mesma proposição nos diz que

$$\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R) \otimes R' \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(S', \omega_{R'}),$$

onde $R' = R/\mathbf{x}R$ e $S' = S/\mathbf{x}S$. Como R' é artiniano, $\omega'_R \simeq E'_R$ e assim,

$$\mathrm{Hom}_{R'}(S', \omega_{R'}) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(S', E_{R'})$$

é um S'-módulo injetivo. Pelo Teorema 3.2.6, podemos escrever

$$\mathrm{Hom}_{R'}(S', E_{R'}) \simeq (E'_S)^r.$$

Usando o Teorema 3.3.5 juntamente com a aditividade da função ℓ, obtemos a igualdades abaixo:

$$\ell(E'_S) = \ell(S') = \ell(\mathrm{Hom}'_R(S', E'_R)) = r \cdot \ell(E'_S).$$

Assim, $r = 1$. Isto mostra que $\mathrm{Hom}_{R'}(S', \omega_{R'})$ é o módulo canônico de S'. Além disso, pela proposição anterior, $\varphi(\mathbf{x})$ é uma S-sequência maximal e $\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)$ é um S-módulo Cohen-Macaulay maximal. Desta forma, o isomorfismo

$$\mathrm{Hom}'_R(S', \omega_{R'}) \simeq \mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)/\mathbf{x}\,\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R) = \mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)/\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)$$

nos diz que $\mathrm{Hom}_R(S, \omega_R)$ é um S-módulo de tipo 1 e dimensão injetiva finita, o que prova que ele é o módulo canônico de S.

Para o caso geral, como $\dim R/\ker\varphi = \dim S$, segue do item (b) do Teorema 2.1.5 que

$$\mathrm{grade}\,(\ker\varphi, R) = \dim R - \dim S = t.$$

Assim, existe uma R-sequência maximal $\mathbf{x}$ em $\ker\varphi$ de comprimento t. Em particular, $\dim \overline{R} = \dim S$, onde $\overline{R} = R/\mathbf{x}R$. Assim, pelo caso discutido anteriormente, concluímos que ω_S existe e é isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(S, \omega_{\overline{R}})$. Por fim,

$$\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(S, \omega_{\overline{R}}) \simeq \mathrm{Ext}^t_R(S, \omega_R)$$

conforme o Teorema 1.2.6.

Exemplo 3.4.13. Se R é uma K-álgebra artiniana finita, então R admite módulo canônico. Basta considerar o morfismo estrutural $\varphi : K \to R$ e observar que $\omega_K = K$, já que todo corpo é um anel de Gorenstein. Assim, pela proposição anterior, $\omega_R = \mathrm{Hom}_K(R, K)$.

Para caracterizar os anéis que admitem módulo canônico, faremos uso do conceito de extensão trivial de um anel R por um R-módulo M.

Definição 3.4.14. Seja R um anel e M um R-módulo. A *extensão trivial de* R *por* M, denotada por $R * M$, é o R-módulo $R \oplus M$ munido do produto

$$(x_1, m_1) \cdot (x_2, m_2) := (x_1x_2, x_1m_2 + x_2m_1).$$

Não é difícil verificar que $R * M$ é de fato um anel, com a multiplicação definida anteriormente. Além disso, podemos naturalmente identificar R com o subanel $\{(x, 0); x \in R\}$ de $R * M$. O lema seguinte reúne algumas propriedades básicas do anel $R * M$ que usaremos mais adiante.

Lema 3.4.15. *Sejam* R *um anel e* M *um* R*-módulo.*

(i) *Se* $(R, \mathfrak{m})$ *for local, então* $R * M$ *é um anel local, com ideal maximal* $\mathfrak{m} * M = \{(x, m) \in R * M; x \in \mathfrak{m}\}$.

(ii) *Se* R *for noetheriano e* M *for finitamente gerado, então* $R * M$ *é um anel noetheriano.*

(iii) *Suponha que* $(R, \mathfrak{m})$ *é um anel noetheriano local e* M *é um* R*-módulo finitamente gerado. Se toda* R*-sequência é uma* M*-sequência, então*

$$\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} R * M.$$

(iv) *A extensão* $R \subset R * M$ *é inteira. Em particular,* $\dim R = \dim R * M$.

Prova. (i) É imediato verificar que $\mathfrak{m} * M$ é um ideal de $R * M$. Além disso, se $(x, m) \notin \mathbf{m} * M$, então $x \notin \mathfrak{m}$. Em particular, x é invertível em R. Consequentemente, $(x, m) \cdot (x^{-1}, -x^{-2}m) = (1, 0)$, donde (x, m) é invertível em $R * M$. Isto mostra que todo elemento de $R * M \setminus \mathfrak{m} * M$ é invertível. Logo, $\mathfrak{m} * M$ é o único ideal maximal de $R * M$.

(ii) O núcleo da projeção canônica $\pi : R * M \to R$ é o ideal

$$0 * M = \{(0, m); m \in M\}.$$

Além disso, $0 * M \simeq M$ como R-módulos. Em particular, $0 * M$ é um R-módulo noetheriano. Desta forma, $0 * M$ também é um $(R * M)$-módulo noetheriano. Por outro lado, o isomorfismo

$R * M/0 * M \simeq R$ nos diz que $R * M/0 * M$ é um anel noetheriano e, portanto, é também um $(R * M)$-módulo noetheriano. Logo, sendo

$$0 \to 0 * M \to R * M \to (R * M)/(0 * M) \to 0$$

uma sequência exata de $(R*M)$-módulos, concluímos que $R*M$ é um $(R*M)$-módulo noetheriano e, portanto, é um anel noetheriano.

(iii) Pelos itens anteriores, $R * M$ é um anel noetheriano local, sendo $\mathfrak{m} * M$ seu ideal maximal. Seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma R-sequência maximal. Como $(x_i, 0) \cdot (r, m) = (x_i r, x_i m)$, segue que $\mathbf{x}' = (x_1, 0), \ldots, (x_n, 0)$ é $(R*M)$-regular. Além disso, se $\mathbf{x}', (y, m)$ fosse uma sequência $(R*M)$-regular, então y seria um elemento $R/\mathbf{x}R$-regular. De fato, se $yr \in xR$, então $(y, m) \cdot (r, 0) \in \mathbf{x}'(R * M) = \mathbf{x}R * M$. Assim, $(r, 0) \in \mathbf{x}R * M$, donde $r \in \mathbf{x}R$. Logo, $\mathbf{x}'$ é uma $(R * M)$-sequência maximal, donde segue o resultado.

(iv) Seja J um ideal primo de $R * M$. Uma vez que

$$(0 * M)^2 = 0,$$

segue que $0 * M \subset J$. Por outro lado, o mapa natural

$$R * M \to R, \ (r, m) \mapsto r$$

induz um isomorfismo natural

$$(R * M)/(0 * M) \simeq R$$

Por tal isomorfismo, J corresponde a um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Assim,

$$J = \mathfrak{p} * M.$$

Inversamente, dado um ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, $\mathfrak{p} * M$ é um ideal de $R * M$ e tal ideal é primo, uma vez que

$$(R * M)/(\mathfrak{p} * M) \simeq R/\mathfrak{p}.$$

Desta forma, obtemos uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $R * M$ e os ideais primos de R. Uma vez que tal correspondência respeita inclusões, segue que $\dim R = \dim R * M$. □

Observação 3.4.16. Uma forma alternativa de provar o item ii) do lema anterior consiste em observar que o mapa

$$R * R^n \to R[X_1, \cdots, X_n]/(X_1, \cdots, X_n)^2, \quad (r, \sum_{i=1}^{n} r_i e_i) \mapsto r + \sum_{i=1}^{n} r_i X_i + (X_1, \cdots, X_n)^2$$

é um isomorfismo de anéis. Assim, se M é gerado por n elementos, obtemos um morfismo sobrejetor $R^n \to M$, o qual induz um morfismo sobrejetor $R * R^n \to R * M$. Segue daí que $R * M$ é neotheriano.

Teorema 3.4.17. *Seja* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel Cohen-Macaulay local. São equivalentes:*

(i) R *admite módulo canônico.*

(ii) R *é imagem homomórfica de algum anel de Gorenstein local.*

Prova. (i)$\Rightarrow$(ii): Vamos provar que $R * \omega_R$ é Gorenstein. Pelo lema anterior, $R * \omega_R$ é Cohen-Macaulay local. Pelo Corolário 3.3.7, resta apenas provar que $R * \omega_R$ possui tipo 1.

Para isto, podemos supor que R é artiniano. Com efeito, tomando uma R-sequência maximal $\mathbf{x}$, temos os isomorfismos naturais:

$$R * \omega_R/\mathbf{x}(R * \omega_R) \simeq R/\mathbf{x}R * \omega_R/\mathbf{x}\omega_R \simeq R/\mathbf{x}R * \omega_{R/\mathbf{x}R}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.4.8, $\omega_{R/\mathbf{x}R} \simeq E_{R/\mathbf{x}R}(k)$. Assim,

$$R * \omega_R/\mathbf{x}(R * \omega_R) \simeq R/\mathbf{x}R * E_{R/\mathbf{x}R}(k).$$

Consequentemente, $R * \omega_R$ tem tipo 1 se, e só se, $R/xR * E_{R/xR}(k)$. Isto reduz o problema ao de provar que, se R artiniano, então $R' = R * E_R(k)$ possui tipo 1. Para isto, basta calcularmos $\operatorname{Soc} R'$. Afirmamos que $\operatorname{Soc} R' = 0 * \operatorname{Soc} E_R(k)$. É imediato que $0 * \operatorname{Soc} E_R(k) \subset \operatorname{Soc} R'$. Por outro lado, suponha que $(x, m) \in \operatorname{Soc} R'$ e $x \neq 0$.

Afirmação: $\operatorname{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E) \simeq E_{R/\mathbf{x}R}$.

Pelo Lema 4.2.11, temos que $\operatorname{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E)$ é $R/\mathbf{x}R$-módulo injetivo. Assim, pelo Teorema 3.2.6, basta provar que $\operatorname{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E)$ tem tipo 1. Para isto, note que $f \in \operatorname{Soc} \operatorname{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E)$ se, e somente se,

$$\overline{r} \cdot f(\overline{s}) = 0$$

para todo $r \in \mathfrak{m}$ e $s \in R$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \overline{r}.f(\overline{s}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(\overline{rs}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad r.f(\overline{s}) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $f \in \text{Soc Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E)$ se, e somente se, $\text{Im}\, f \subset \text{Soc}\, E_R = k$. Portanto,

$$\text{Soc Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E) = \text{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, k),$$

o que nos diz que $\text{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, E)$ tem tipo 1.

Desta forma, aplicando o funtor $\text{Hom}_R(-, E)$ à sequência exata

$$R \xrightarrow{.\mathbf{x}} R \to R/\mathbf{x}R \to 0$$

obtemos a sequência exata

$$0 \to E_{R/xR} \to E_R \to E_R$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.3.5,

$$\ell(E_{R/xR}) = \ell(R/xR) < \ell(R) = \ell(E_R).$$

Consequentemente, a multiplicação por x em E_R não pode ser a aplicação nula, visto que isto implicaria em $E_{R/xR} \simeq E_R$. Assim, existe $y \in E_R$ tal que $xy \neq 0$. Portanto

$$(0, y).(x, m) = (0, xy) \neq (0, 0),$$

o que é um absurdo pois $(0, y) \in \mathfrak{m} * E_R$ e $(x, m) \in \text{Soc}\, R'$. Logo, $\text{Soc}\, R' = 0 * \text{Soc}\, E_R \simeq \text{Soc}\, E_R = k$, provando assim que R' tem tipo 1. □

Exemplo 3.4.18. Se R for um anel Cohen-Macaulay local e completo, então pelo teorema de Cohen, R é quociente de um anel regular local, o qual é Gorenstein. Assim, pelo teorema anterior, R admite um módulo canônico.

O teorema seguinte lista três caracterizações do módulo canônico: A primeira o caracteriza a partir dos números de Bass, a segunda é uma caracterização em função dos funtores $\text{Ext}^i_R(-, C)$ e a terceira reside no fato do funtor $T(-) = \text{Hom}_R(-, C)$ ser dualizante na categoria dos módulos Cohen-Macaulay maximais.

Teorema 3.4.19. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local de dimensão d e C um R-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *C é o módulo canônico de R.*

(b) *$\mu_i(\mathfrak{p}, C) = \delta_{ih}$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}\,(R)$, onde $h = \text{ht}\, \mathfrak{p}$.*

(c) *Para todo inteiro $t = 0, 1, \ldots, d$ e todo R-módulo Cohen-Macaulay M de dimensão t, vale:*

(i) $\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C)$ *é Cohen-Macaulay de dimensão* t.

(ii) $\operatorname{Ext}_R^i(M, C) = 0$ *para todo* $i \neq d - t$.

(iii) *Existe um isomorfismo*

$$M \simeq \operatorname{Ext}_R^{d-t}\left(\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C), C\right)$$

o qual se reduz ao isomorfismo canônico $M \simeq C$*, no caso em que* $d = t$.

(d) *Para todo* R*-módulo Cohen-Macaulay maximal* M*, vale:*

(i) $\operatorname{Hom}_R(M, C)$ *é Cohen-Macaulay maximal.*

(ii) $\operatorname{Ext}_R^i(M, C) = 0$*, para todo* $i > 0$.

(iii) *O morfismo natural*

$$M \to \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, C), C)$$

é um isomorfismo.

Prova. (a)$\Rightarrow$(b) Seja $C = \omega_R$. Temos:

$$\mu_i(p, \omega_R) = \dim_{k(p)} \operatorname{Ext}^i_{R_p}(k(p), \omega_{R_p}).$$

Como ω_{R_p} é R_p-módulo Cohen-Macaulay maximal de tipo 1 e $\dim R_p = \operatorname{ht} p = h$, o resultado segue das fórmulas

$$\operatorname{depth} M = \inf\{i; \operatorname{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}$$

e

$$\dim \operatorname{inj} M = \sup\{i; \operatorname{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

(b)$\Rightarrow$(a): Fazendo $p = \mathfrak{m}$, temos

$$\delta_{ih} = \dim_{k(\mathfrak{m})} \operatorname{Ext}^i_{R_\mathfrak{m}}(k(\mathfrak{m}), C_\mathfrak{m}) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^i(k, C).$$

Assim, pelas fórmulas usadas anteriormente, concluímos que $C = \omega_R$.

(a)$\Rightarrow$(c): Os itens i) e ii) seguem do Lema 3.4.6. Para provar o item iii), começamos com a seguinte afirmação:

Afirmação: Podemos supor $d = t$.

Suponha que o resultado está provado neste caso. Assim, pelo item (b) do Teorema 2.1.5, temos:

$$\operatorname{grade}(\operatorname{Ann} M, R) = \dim R - \dim M = d - t.$$

Consequentemente, existe uma R-sequência $\mathbf{x}$ de comprimento $d-t$ em $\operatorname{Ann} M$. Por outro lado, uma vez que $\operatorname{Ann} M \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ext}_R^i(M, C)$, segue do Lema 3.1.8 que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_R^{d-t}(\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C), C) &\simeq \operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(\operatorname{Ext}_R^{d-t}(M, C), C/\mathbf{x}C) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}\left(\operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(M, C/\mathbf{x}C), C/\mathbf{x}C\right). \end{aligned}$$

Como M é um $R/\mathbf{x}R$-módulo e $\dim_{R/\mathbf{x}R} M = \operatorname{depth}_{R/\mathbf{x}R} M = t = \dim R/\mathbf{x}R$, segue que

$$M \simeq \operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}\left(\operatorname{Hom}_{R/\mathbf{x}R}(M, C/\mathbf{x}C), C/\mathbf{x}C\right),$$

provando assim a afirmação.

Além disso, pelo Lema 3.4.6, sendo $\mathbf{y}$ uma R-sequência maximal, concluímos que

$$\operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, C), C) \otimes R/\mathbf{y}R \simeq \operatorname{Hom}_{R/\mathbf{y}R}\left(\operatorname{Hom}_{R/\mathbf{y}R}(M/\mathbf{y}M, C/\mathbf{y}C), C/\mathbf{y}C\right).$$

Isto juntamente com o Lema 3.4.7 reduz o problema ao caso em que $\dim R = 0$. Ora, mas neste caso, $C \simeq E_R$ e assim, o isomorfismo $M \simeq \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, C), C)$ segue do item (b) do Teorema 3.3.5.

(c)⇒(d) O item (d) é apenas um caso particular do item (c).

(d)⇒(a) Fazendo $M = R$, obtemos que $\operatorname{Hom}_R(R, C) \simeq C$ é Cohen-Macaulay maximal. Vamos agora provar que C tem dimensão injetiva finita. Para isto, é suficiente mostrar que $\operatorname{Ext}_R^i(k, C) = 0$, para i suficientemente grande.

Seja

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} k \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de k e $M_i = \ker \varphi_{i-1}$ a i-ésima sizígia de k com respeito a tal resolução. Se $M_1 \neq 0$, então segue da sequência exata

$$0 \to M_1 \to P_0 \to k \to 0$$

juntamente com o item (b) da Proposição 1.2.11 que

$$\operatorname{depth} M_1 \geqslant \min\{\operatorname{depth} P_0, 1\}.$$

Como P_0 é livre e R é Cohen-Macaulay, $\operatorname{depth} P_0 = d$, donde $\operatorname{depth} M_1 \geqslant 1$. Analogamente, se $M_2 \neq 0$, então $\operatorname{depth} M_2 \geqslant 2$. Procedendo indutivamente, concluímos que M_d é nulo ou é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal. De todo modo, segue que $\operatorname{Ext}_R^i(M_d, C) = 0$, para todo

$i > 0$. Como $\mathrm{Ext}_R^i(M_d, C) \simeq \mathrm{Ext}_R^{i+d}(k, C)$, obtemos

$$\mathrm{Ext}_R^j(k, C) = 0,$$

para todo $j > d$. Isto mostra que C possui dimensão injetiva finita.

Resta mostrar que C tem tipo 1. Como $r(C) = r(C/xC)$, onde x é uma R-sequência maximal, podemos nos restringir ao caso em que R é artiniano. Neste caso, $\dim \operatorname{inj} C = \operatorname{depth} R = 0$. Assim, C é um R-módulo injetivo e pelo Teorema 3.2.6, $C \simeq {E_R}^r$, onde r é o tipo de C. Logo, pelo Teorema 3.3.5:

$$R^{r^2} \simeq \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(R, C), C\right).$$

Por outro lado, por hipótese

$$\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(R, C), C\right) \simeq R.$$

Logo, $r = 1$. $\square$

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Módulos Projetivos

Módulos projetivos são módulos que, de certa forma, generalizam a noção de módulos livres como veremos na definição a seguir.

Definição 4.1.1. Um R-módulo M é *projetivo* se for um somando direto de um R-módulo livre, isto é, se existe um R-módulo N tal que $M \oplus N$ é livre.

Segue da definição acima que todo módulo livre é projetivo. Por outro lado, nem todo módulo projetivo é livre.

Exemplo 4.1.2. Sejam R_1, R_2 anéis e considere o anel $R = R_1 \times R_2$. Tomando os R-módulos $P_1 = R_1 \times \{0\}$ e $P_2 = \{0\} \times R_2$, temos que $R = P_1 \oplus P_2$. Em particular, P_1 e P_2 são R-módulos projetivos. Por outro lado, nenhum deles é um R-módulo livre. De fato, uma vez que

$$(0, 1) \cdot P_1 = (1, 0) \cdot P_2 = 0,$$

concluímos que P_1 e P_2 não possuem subconjuntos linearmente independentes e portanto não são módulos livres.

Exemplo 4.1.3. Vejamos que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo. Inicialmente, note que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0.$$

De fato, dado um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, seja $n = f(1)$. Se $n \neq 0$, então, tomando um inteiro m não-nulo que não divida n, teríamos

$$n = f(1) = f(m \,.\, 1/m) = mf(1/m),$$

donde m dividiria n, o que é um absurdo. Logo, $f(1) = 0$. Daí, segue que $f(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Além disso, para cada $t \in \mathbb{Z}$ não- nulo, a igualdade

$$0 = f(1) = f(t \,.\, 1/t) = tf(1/t)$$

mostra que $f(1/t) = 0$. Desta forma, teremos $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Assim,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0.$$

Suponha agora que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo. Então, ele é somando direto de um $\mathbb{Z}$-módulo livre

$$L = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}.$$

Em particular, temos um mapa injetor $g : \mathbb{Q} \to L$. Sendo $\pi_i : L \to \mathbb{Z}$ a projeção natural na i-ésima coordenada, temos $\pi_i \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Assim, $\pi_i \circ g = 0$. Uma vez que isto vale para cada $i \in I$, a igualdade

$$g(r) = (\pi_i \circ g(r))_{i \in I}, \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Q},$$

mostra que $g = 0$, o que contraria sua injetividade. Assim, $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo.

Exemplo 4.1.4. Seja M um R-módulo tal que exista $r \in Z_R(M) \cap (R \backslash Z_R(R))$ não-nulo. Então, M não é projetivo. De fato, se M fosse projetivo, então M seria somando direto de um R-módulo livre L. Em particular, teríamos um morfismo injetor $\varphi : M \to L$. Seja $\{e_i, i \in I\}$ uma base de L e considere $m \neq 0$ em M tal que $rm = 0$. Assim, existem $i_1, \ldots, i_k \in I$ e $n_1, \ldots, n_k \in R$ tais que

$$\varphi(m) = n_1 e_{i_1} + \cdots + n_k e_{i_k}.$$

Como $r\varphi(m) = 0$ e $r \notin Z_R(R)$, concluímos que $n_j = 0$, para $j = 1, \ldots, k$. Logo, $\varphi(m) = 0$, o que contraria a injetividade de φ. Em particular, $\mathbb{Z}_n$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo. Mais geralmente, se R é um domínio e I é um ideal próprio não-nulo de R, então R/I não é um R-módulo projetivo.

Observação 4.1.5. Se M é um R-módulo projetivo, então, para cada ideal primo p de R, a localização M_p é um R_p-módulo projetivo.

Com efeito, uma vez que existe um R-módulo L tal que

$$M \oplus L = \bigoplus_{i \in I} R$$

é um R-módulo livre, segue da comutatividade do funtor localização com somas diretas que

$$M_p \oplus L_p = \bigoplus_{i \in I} R_p$$

é um R_p-módulo livre. Assim, M_p é um somando direto de um R_p-módulo livre, ou seja, M_p é um R_p-módulo projetivo.

Veremos agora uma caracterização categórica dos módulos projetivos. Para tal, é necessário alguns resultados preliminares.

Definição 4.1.6. Dizemos que uma sequência exata $0 \to N \to M \to K \to 0$ de R-módulos *cinde* se existe um isomorfismo de R-módulos $\varphi : M \to N \oplus K$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \oplus K \arrow[r, "\pi"'] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

O resultado a seguir exibe duas caracterizações úteis para sequências exatas que cindem.

Proposição 4.1.7. *Dada uma sequência exata* $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$ *de* R*-módulos, são equivalentes:*

(i) *A sequência dada cinde.*

(ii) *Existe um morfismo de* R*-módulos* $h : K \to M$ *tal que* $g \circ h = id_K$.

(iii) *Existe um morfismo de* R*-módulos* $\alpha : M \to N$ *tal que* $\alpha \circ f = id_N$.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Por hipótese, existe um isomorfismo $\varphi : M \to N \oplus K$ de R-módulos tal que $\pi \circ \varphi = id_K \circ g$. Definindo $h : K \to M$ pondo $h(k) = \varphi^{-1}(0, k)$, para cada $k \in K$, temos que h é um morfismo de R-módulos e, para cada $k \in K$, vale:

$$(g \circ h)(k) = (g \circ \varphi^{-1})(0, k) = (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}(0, k) = k$$

Assim, $g \circ h = id_K$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Defina $\alpha : M \to N$ pondo $\alpha(m) = f^{-1}(m - (h \circ g)(m))$. Observe que α está bem definida, pois

$$m - (h \circ g)(m) \in \ker g = \operatorname{Im} f$$

e f é injetor. Por fim, para cada $n \in N$, temos:

$$\alpha \circ f(n) = f^{-1}(f(n) - (h \circ g \circ f)(n)) = f^{-1} \circ f(n) = n.$$

Logo, $\alpha \circ f = id_N$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Afirmamos que $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker\ \alpha$. De fato, dado $m \in M$, temos que

$$m - (f \circ \alpha)(m) \in \ker\ \alpha.$$

Portanto,

$$m = m - (f \circ \alpha)(m) + (f \circ \alpha)(m).$$

Assim:

$$M = \operatorname{Im} f + \ker\ \alpha.$$

Uma vez que $\alpha \circ f = id_N$, segue que $\operatorname{Im} f \cap \ker\ \alpha = 0$. Desta forma, $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker\ \alpha$. Sendo assim, cada elemento de M pode ser escrito de forma única como $x + f(n)$, para certos $x \in \ker\ \alpha$ e $n \in N$. Defina então $\varphi : M \to N \oplus K$, pondo

$$\varphi(x + f(n)) = (n, g(x)).$$

É imediato verificar que φ é um morfismo de R-módulos. Provaremos agora que φ é injetor. Com efeito, se $x + f(n) \in \ker \varphi$, temos que

$$(n, g(x)) = (0, 0).$$

Assim, $n = 0$ e $x \in \ker g = \operatorname{Im} f$. Logo,

$$x \in \operatorname{Im} f \cap \ker\ \alpha = 0.$$

Por fim, vejamos que φ é sobrejetor. Ora, dado $k \in K$, temos $k = g(m)$ para algum $m \in M$, pois g é sobrejetor. escrevendo $m = x + f(n)$, com $x \in \ker\ \alpha$ e $n \in N$, obtemos $k = g(x)$. Daí, segue imediatamente a sobrejetividade de φ. □

De posse da Proposição 4.1.7, vejamos agora uma caracterização categórica dos módulos projetivos.

Teorema 4.1.8. *Seja P um R-módulo. São equivalentes:*

(i) P *é* R-*módulo projetivo.*

(ii) *Se* M *e* N *são* R*-módulos e* $f : P \to N$, $g : M \to N$ *são morfismos de* R*-módulos com* g *sobrejetor, então existe um morfismo de* R*-módulos* $h : P \to M$ *tal que o diagrama abaixo seja comutativo:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

(iii) *Toda sequência exata de* R*-módulos*

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$$

cinde.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja Q um R-módulo tal que $P \oplus Q$ é livre. Tome uma base $(b_j)_{j \in I}$ de $P \oplus Q$, onde $b_j = (p_j, q_j)$. Sendo g sobrejetor, podemos escolher para cada $j \in I$, um elemento $m_j \in M$ de modo que $g(m_j) = f(p_j)$. Defina então o morfismo de R-módulos $\tilde{h} : P \oplus Q \to M$ pondo $\tilde{h}(p_j, q_j) = m_j$, para cada $j \in I$. Sendo $\iota : P \to P \oplus Q$ o morfismo inclusão, é imediato verificar que a composição $h = \tilde{h} \circ \iota$ cumpre a igualdade $g \circ h = f$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Pela Proposição 4.1.7, basta exibir um morfismo $h : P \to M$ cumprindo $g \circ h = \mathrm{id}_P$. Ora, sendo g sobrejetor, usando id_P no lugar de f no enunciado do item (ii), obtemos a existência de um tal morfismo h.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Note que é suficiente exibir uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

com M livre. Para tal, considere um conjunto gerador $(p_i)_{i \in I}$ de P e, sendo

$$M = \bigoplus_{i \in I} R,$$

defina o morfismo

$$g : M \to P, \quad e_i \mapsto p_i$$

onde $(e_i)_{i \in I}$ denota a base canônica de M. Sendo g sobrejetor, basta fazermos $N = \ker\ g$ e obtemos a sequência exata de R-módulos desejada. □

Corolário 4.1.9. P *é um* R*-módulo projetivo se, e somente se, o funtor* $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ *é exato.*

Prova. Basta observar que a exatidão do funtor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ é equivalente ao item (ii) do Teorema 4.1.8. $\square$

Exemplo 4.1.10. Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local e P é um R-módulo projetivo, então P é livre. Este resultado foi provado por Kaplansky em [5]. Neste exemplo, provaremos este resultado no caso em que P é finitamente gerado. Neste caso, tomamos um conjunto gerador mínimo $\{p_1, \dots, p_n\}$ de P e consideramos o morfismo sobrejetor

$$\varphi : R^n \to P, \quad e_i \mapsto p_i.$$

Pelo item (iii) do teorema anterior, a sequência exata

$$0 \to N \to R^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

cinde, onde $N = \ker \varphi$. Em particular, $R^n \simeq N \oplus P$. Aplicando o funtor $- \otimes R/\mathfrak{m}$, obtemos:

$$k^n \simeq N/\mathfrak{m}N \oplus P/\mathfrak{m}P.$$

Como $\dim_k P/\mathfrak{m}P = n$, segue que $N/\mathfrak{m}N = 0$. Pelo lema de Nakayama, concluímos que $N = 0$ e, portanto, $P \simeq R^n$.

Podemos utilizar o Corolário 4.1.9 para dar uma recíproca fraca ao exemplo 4.1.5, no seguinte sentido:

Proposição 4.1.11. *Se R é noetheriano e M é R-módulo finitamente gerado, então M é projetivo se, e somente se, cada localização $M_\mathfrak{p}$ é um $R_\mathfrak{p}$-módulo livre. Em outras palavras, M é projetivo se, e somente se, M é localmente livre.*

Demonstração. Inicialmente, se M for projetivo, então $M_\mathfrak{p}$ é $R_\mathfrak{p}$-módulo projetivo, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, conforme o exemplo 4.1.5. Pelo exemplo anterior, segue que $M_\mathfrak{p}$ é $R_\mathfrak{p}$-módulo livre.

Para a recíproca, é suficiente mostrar que $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ é um funtor exato, conforme o Corolário 4.1.9. Uma vez que este funtor é, em geral, um funtor covariante exato à esquerda, devemos provar sua exatidão à direita. Para isto, seja $g : N \to L$ um morfismo sobrejetor de R-módulos. Sendo localização um funtor exato, o morfismo induzido de $R_\mathfrak{p}$-módulos $g_\mathfrak{p} : N_\mathfrak{p} \to L_\mathfrak{p}$ também é sobrejetor, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Assim, sendo $M_\mathfrak{p}$ um $R_\mathfrak{p}$-módulo livre, obtemos sobrejeção

$$\mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}).$$

Por outro lado, como M é R-módulo finitamente gerado, temos, para cada R-módulo K, o isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(M, K)_\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}).$$

Além disso, este isomorfismo é funtorial. No nosso caso, isto se exprime na comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{R_p}(M_p, N_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{R_p}(M_p, L_p) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(M, N)_p \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, L)_p
\end{tikzcd}$$

Como as flechas verticais são isomorfismos, concluímos que o morfismo

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)_p \to \mathrm{Hom}_R(M, L)_p$$

é sobrejetor. Uma vez que este é a localização do mapa

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, L)$$

induzido por $g : N \to L$, segue do princípio local-global que tal mapa é sobrejetor. Isto prova a exatidão do funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ e, assim, M é um R-módulo projetivo. $\square$

Observação 4.1.12. Na Proposição anterior, o resultado permanece válido se exigirmos apenas que $M_{\mathfrak{m}}$ seja livre para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Para ver isto, basta recordar o fato de que, dada uma inclsão de primos $p \subset q$, temos o isomorfismo $R_p \simeq (R_q)_{pR_q}$.

Apresentamos agora o lema de Schanuel. Este é um resultado técnico que usamos neste trabalho.

Proposição 4.1.13 (Lema de Schanuel)**.** *Seja R um anel e considere as sequências exatas de R-módulos*

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

e

$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$$

onde P e P' são projetivos. Então:

$$K \oplus P' \simeq K' \oplus P.$$

Prova. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "i'"] & P' \arrow[r, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A existência de β segue da projetividade de P, enquanto a existência de $\alpha : K \to K'$ cumprindo $i' \circ \alpha = \beta \circ i$, segue do caça ao diagrama. Defina

$$\theta : K \to P \oplus K' \quad (k \longmapsto (i(k), \alpha(k))$$

e

$$\psi : P \oplus K' \to P' \quad ((p, k') \longmapsto \beta(p) - i'(k')).$$

Vamos provar que

$$0 \to K \xrightarrow{\theta} P \oplus K' \xrightarrow{\psi} P' \to 0 \tag{4.1}$$

é uma sequência exata.

A injetividade de θ segue da injetividade de i enquanto que a inclusão $\operatorname{Im}\theta \subset \ker\psi$ segue diretamente da comutatividade do diagrama acima. Vamos agora provar que $\ker\psi \subset \operatorname{Im}\theta$. Seja $(p, k') \in \ker\psi$. Assim, $\beta(p) = i'(k')$. Como

$$0 = (\varphi' \circ i')(k') = (\varphi' \circ \beta)(p) = \varphi(p),$$

concluímos que $p \in \ker\varphi = \operatorname{Im} i$. Assim, existe $k \in K$ tal que $i(k) = p$. Por fim:

$$(i' \circ \alpha)(k) = (\beta \circ i)(k) = \beta(p) = i'(k').$$

Assim, a injetividade de i' implica que $\alpha(k) = k'$. Logo, $\theta(k) = (p, k')$.

Por último, vejamos que ψ é sobrejetor. Para isto, seja $p' \in P'$. Da sobrejetividade de π segue que existe $p \in P$ tal que $\varphi'(p') = \varphi(p)$. Logo

$$(\varphi' \circ \beta)(p) = \varphi(p) = \varphi'(p').$$

Isto mostra que $\beta(p) - p'\ker\varphi' = \operatorname{Im} i'$. Portanto, existe $k' \in K'$ tal que

$$i'(k') = \beta(p) - p',$$

ou seja, $\psi(p, k') = p'$. Uma vez provada a exatidão da sequência (4.1), o resultado segue da projetividade de P'. □

Corolário 4.1.14. *(Lema de Schanuel generalizado) Considere as sequências exatas de* R*-módulos*

$$0 \to K \longrightarrow P_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

e

$$0 \to K' \longrightarrow Q_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0.$$

Se os módulos P_i e Q_i são todos projetivos, então

$$K \oplus Q_r \oplus P_{r-1} \oplus Q_{r-2} \oplus \ldots \simeq K' \oplus P_r \oplus Q_{r-1} \oplus P_{r-2} \oplus \ldots.$$

Prova. Sejam $L = \ker \alpha$ e $L' = \ker \beta$. Segue do Lema de Schanuel que

$$L \oplus Q_0 \simeq L' \oplus P_0.$$

Desta forma, podemos considerar as sequências exatas

$$0 \to K \longrightarrow P_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \oplus Q_0 \longrightarrow L \oplus Q_0 \to 0$$

e

$$0 \to K' \longrightarrow Q_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \oplus P_0 \longrightarrow L' \oplus P_0 \to 0$$

O resultado agora segue por indução em r. $\square$

Na seção 1.3 definimos resoluções projetivas e dimensão projetiva de um módulo. A dimensão projetiva não é aditiva em sequências exatas. Um exemplo disto é mostrado no resultado a seguir.

Corolário 4.1.15. *Considere uma sequência exata de* R*-módulos*

$$0 \to M \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi} P_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_r \longrightarrow N \to 0$$

onde cada P_i *é um* R*-módulo projetivo. Então,* $\dim\operatorname{proj} M < \infty$ *se, e somente se, então* $\dim\operatorname{proj} N < \infty$*. Neste caso, vale:*

$$\dim\operatorname{proj} N = \dim\operatorname{proj} M + r.$$

Prova. Suponha que $\dim\operatorname{proj} N = n < \infty$. Pelo Lema 2.2.8, temos que $n \geqslant r$ e se $Q^\bullet$ é uma resolução projetiva de M, então Q_{n-r} é um R-módulo projetivo. Logo, $\dim\operatorname{proj} M \leqslant n - r < \infty$.

Suponha agora que $\dim\operatorname{proj} M = m < \infty$. Obviamente, segue que $\dim\operatorname{proj} N < \infty$.

Para provar a igualdade, faremos indução sobre r. Consideremos $r = 1$. Denote $\dim\operatorname{proj} N = n$ e considere resoluções projetivas

$$Q_\bullet : \ 0 \to Q_m \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to 0$$

e

$$Q'_\bullet : \ 0 \to Q'_m \to \cdots \to Q'_1 \to Q'_0 \to 0$$

de M e N, respectivamente. Adicionando P a $Q_\bullet$ obtemos uma resolução projetiva de N de comprimento $m+1$, de modo que $n \leqslant m+1$. Para a desigualdade oposta começamos decompondo

$Q_\bullet$ em sequências exatas

$$0 \to M_{i+1} \to Q_i \to M_i \to 0$$

onde $M_{m+1} = 0$ e $M_0 = M$. Analogamente, podemos decompor a resolução $Q'_\bullet$ em sequências exatas

$$0 \to N_{i+1} \to Q_i^{'} \to N_i \to 0$$

onde $N_{n+1} = 0$ e $N_0 = N$. Aplicando o lema de Schanuel às sequências exatas

$$0 \to M \to P \to N \to 0$$

e

$$0 \to N_1 \to Q_0^{'} \to N \to 0$$

concluímos que $M \oplus Q_0' \simeq N_1 \oplus P$. Aplicando o mesmo lema às sequências exatas

$$0 \to Q_0' \oplus M_1 \to Q_0' \oplus Q_0 \to Q_0' \oplus M \to 0$$

e

$$0 \to P \oplus N_2 \to P \oplus Q_1' \to P \oplus N_1 \to 0$$

obtemos

$$Q_0' \oplus M_1 \oplus P \oplus Q_1' \simeq P \oplus N_2 \oplus Q_0' \oplus Q_0.$$

Em suma, existem módulos projetivos K_1, L_2 tais que $K_1 \oplus M_1 \simeq N_2 \oplus N_2$. Iterando este raciocínio, obtemos para cada j, módulos projetivos K_j, L_{j+1} tais que

$$K_j \oplus M_j \simeq L_{j+1} \oplus N_{j+1}.$$

Em particular, para $j = n - 1$, temos

$$K_{n-1} \oplus M_{n-1} \simeq L_n \oplus N_n.$$

Como N_n é projetivo, concluímos que M_{n-1} é projetivo. Portanto, $m \leqslant n - 1$, ou equivalentemente, $n \geqslant m + 1$, donde $n = m + 1$.

No caso geral, note que, da sequência exata

$$0 \to M \to P_1 \to \operatorname{Im} \varphi \to 0$$

se obtém $\dim \operatorname{proj} \operatorname{Im} \varphi = m+1$. Por outro lado, utilizando a hipótese indutiva, segue da sequência exata

$$0 \to \mathrm{Im}\,\varphi \to P_2 \to \ldots \to P_r \to N \to 0$$

que

$$\dim \mathrm{proj}\, N = \dim \mathrm{proj}\ \mathrm{Im}\,\varphi + r - 1 = m + r.$$

$\square$

4.2 Módulos Injetivos

Módulos injetivos são, de certa forma, a versão “dual” de módulos projetivos, como veremos a seguir.

Teorema 4.2.1. *As seguintes condições são equivalentes para um* R*-módulo* I.

(i) *Dados* R*-módulos* M, N *e morfismos de* R*-módulos* $g : M \to I$ *e* $f : M \to N$*, com* f *injetor, existe um morfismo de* R*-módulos* $h : N \to I$ *tal que o diagrama abaixo seja comutativo:*

$$\begin{tikzcd} J & \\ M \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

(ii) *Toda sequência exata de* R*-módulos*

$$0 \to I \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \to 0$$

cinde.

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Para provarmos tal implicação, devemos mostrar que a sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \to 0$$

cinde. Pelo item (iii) da Proposição 4.1.7, é suficiente exibir um morfismo de R-módulos $h : N \to I$, tal que $h \circ f = \mathrm{id}_I$. Considere o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "\mathrm{id}_I"'] & \\ I \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Uma vez que f é injetor, a existência do morfismo h segue diretamente da hipótese assumida no item (i).
(ii) $\Rightarrow$ (i) Devemos provar a existência de um morfismo $h : N \to I$ que cumpra $h \circ f = g$. Inicialmente, defina o R-módulo $\widetilde{M}$, pondo

$$\widetilde{M} = \frac{N \oplus I}{\{(-f(m), g(m)); m \in M\}}.$$

Considere os morfismos canônicos

$$i_1 : N \to \widetilde{M}, \quad n \mapsto \overline{(n, 0)} \quad \text{e} \quad i_2 : I \to \widetilde{M}, \quad j \to \overline{(0, j)}.$$

Note que $i_1 \circ f = i_2 \circ g$. Além disso, i_2 é injetor, o que induz a sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i_2} \widetilde{M} \xrightarrow{\pi} \text{Coker } i_2 \to 0.$$

Por hipótese, tal sequência cinde. Em particular, isto implica que existe um morfismo de R-módulos $\varphi : \widetilde{M} \to I$ tal que $\varphi \circ i_2 = id_I$. Assim, definindo $h = \varphi \circ i_1$, obtemos por fim:

$$h \circ f = \varphi \circ i_1 \circ f = \varphi \circ i_2 \circ g = g$$

como queríamos. □

Podemos ainda caracterizar a injetividade de um módulo em termos de "extensões de morfismos". Mais precisamente:

Teorema 4.2.2 (Critério de Baer). *As seguintes condições são equivalentes para um R-módulo I:*

(i) I *é injetivo.*

(ii) *Dado um ideal J de R e um morfismo de R-módulos $f : J \to I$, existe um morfismo de R-módulos $\bar{f} : R \to I$ que estende f.*

(iii) *Dados um R-módulo M e N um submódulo de M, todo morfismo de R-módulos $f : N \to I$ se estende a um morfismo $\bar{f} : M \to I$.*

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $i : J \to R$ a inclusão de J em R. Pela injetividade de I, segue que existe um morfismo $\bar{f} : R \to I$ tal que $\bar{f} \circ i = f$. Em outras palavras, $\bar{f}$ estende f.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Inicialmente, consideremos o conjunto

$$Z = \{(K, f_K); K \text{ é submódulo de M com } N \subset K \text{ e } f_K \in \mathrm{Hom}_R(K, I) \text{ estende } f\}.$$

Note que Z não é vazio pois $(N, f) \in Z$. Além disso, podemos ordenar Z parcialmente. Para isto, dados $(K, f_K), (S, f_S) \in Z$, definimos que $(K, f_K) \leqslant (S, f_S)$ caso $K \subset S$ e f_S estenda f_K. É imediato verificar que "$\leqslant$"é de fato uma relação de ordem parcial em Z. Também não é difícil verificar que todo subconjunto totalmente ordenado de $(Z, \leqslant)$ possui uma cota superior. Assim, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal (K_0, f_{K_0}) de $(Z, \leqslant)$. Vamos provar que $K_0 = M$. Para isto, suponha que exista $m_0 \in M - K_0$. Defina o ideal $J = \{r \in R; rm_0 \in K_0\}$ e considere o morfismo de R-módulos

$$g : J \to I, \quad r \mapsto f_{K_0}(rm_0).$$

Por hipótese, g se estende a um morfismo de R-módulos $\bar{g} : R \to I$. Definamos também o morfismo

$$\varphi : K_0 + Rm_0 \to I, \quad k_0 + rm_0 \mapsto f_{K_0}(k_0) + \bar{g}(r).$$

Uma vez que a soma $K_0 + Rm_0$ não é necessariamente direta, precisamos verificar a boa definição de φ. Para tal, tomemos $m \in K_0 + Rm_0$ e suponhamos que

$$m = k_0 + rm_0 = \tilde{k}_0 + \tilde{r}m_0,$$

onde $k_0, \tilde{k}_0 \in K_0$ e $r, \tilde{r} \in R$. Devemos verificar que

$$f_{K_0}(k_0) + \bar{g}(r) = f_{K_0}(\tilde{k}_0) + \bar{g}(\tilde{r})$$

ou equivalentemente, que

$$g(r - \tilde{r}) = f_{K_0}(k_0 - \tilde{k}_0).$$

Uma vez que $(r - \tilde{r})m_0 = k_0 - \tilde{k}_0$, concluímos que $r - \tilde{r} \in I$. Desta forma

$$g(r - \tilde{r}) = f_{K_0}(k_0 - \tilde{k}_0),$$

que mostra que φ está bem definido. Observe também que φ estende f, pois dado $n \in N$, temos que $n \in K_0$ e portanto $\varphi(n) = f_{K_0}(n) = f(n)$.

Assim, $(K_0, f_{K_0}) \leqslant (K_0 + Rm_0, \varphi)$ e a inclusão $K_0 \subset K_0 + Rm_0$ é própria, o que contraria a maximalidade do par (K_0, f_{K_0}).

Portanto, $K_0 = M$ e f_{K_0} é uma extensão de f a M, como queríamos.

(iii) $\Rightarrow$ (i) De fato, considere o diagrama de morfismos de R-módulos abaixo, onde f é injetor.

$$\begin{tikzcd} I \\ M \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Sendo $f(M)$ submódulo de N, o morfismo $g \circ f^{-1} : f(M) \to I$ se estende, por hipótese, a um morfismo $h : N \to I$. Em outras palavras, h cumpre a igualdade

$$h \circ i = g \circ f^{-1}$$

onde i é a inclusão de $f(M)$ em N. Compondo a igualdade acima à direita com f, obtemos $h \circ f = g$, o que mostra a injetividade de I. $\square$

Exemplo 4.2.3. Vejamos que $\mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. Para tal, consideremos o ideal $2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ e tomemos o morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos abaixo:

$$\varphi : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad 2k \mapsto k.$$

Note que φ não pode ser estendido a um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos definido em todo $\mathbb{Z}$. De fato se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fosse uma tal extensão, teríamos em particular, $2f(1) = f(2) = 1$, o que é um absurdo uma vez que $f(1) \in \mathbb{Z}$. Desta forma, segue do critério de Baer que $\mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

Exemplo 4.2.4. Seja M um R-módulo injetivo e N um somando direto de M. Podemos utilizar o critério de Baer para argumentar que N também é um R-módulo injetivo. De fato, escreva

$$M = N \oplus P$$

e seja I ideal de R juntamente com um morfismo de R-módulos $f : I \to N$. A composição de f com a inclusão natural $N \hookrightarrow M$ nos dá um morfismo $g : I \to M$. Pelo critério de Baer, g se estende a um morfismo $h : R \to M$. Por fim, a composição de h com a projeção natural $\pi : M \to N$ nos dá um morfismo $\tilde{f} : R \to N$ que estende f a R. Isto garante que N é um R-módulo injetivo, conforme o critério de Baer.

Definição 4.2.5. Um R-módulo M é dito *divisível* se, para cada elemento regular $a \in R$, o morfismo

$$\mu : M \to M, \quad m \mapsto am$$

é sobrejetor.

Assim, num módulo divisível, sempre podemos intuitivamente "dividir"um elemento $m \in M$ por um elemento não nulo $a \in R$.

O teorema a seguir exibe uma relação entre os conceitos de injetividade e divisibilidade.

Teorema 4.2.6. *Seja* M *um* R*-módulo* .

(i) *Se* M *for injetivo, então* M *é divisível.*

(ii) *Se* R *for um domínio de ideais principais e* M *for divisível, então* M *é injetivo.*

Prova. (i) Fixado um elmento regular $a \in R$ e $m \in M$, devemos mostrar a existência de um elemento $n \in M$ tal que $m = an$. Para tal, considere os morfismos abaixo

$$\varphi : R \to R, \quad b \mapsto ab \quad \text{e} \quad \tau : R \to M, \quad b \mapsto bm.$$

Como φ é um morfismo injetor e M é um R-módulo injetivo, existe um morfismo de R-módulos $\mu R \to M$ cumprindo $\mu \circ \varphi = \tau$. Logo:

$$m = \tau(1) = \mu(a) = a\mu(1)$$

donde segue que M é R-módulo divisível.

(ii) Vamos usar o critério de Baer para verificar a injetividade de M. Assim, tomemos inicialmente um ideal $I = (a)$ de R e um morfismo $f : I \to M$. Uma vez que M é R-módulo divisível, existe $m \in M$ tal que $f(a) = am$. Assim, definindo $\bar{f} : R \to M$, pondo $f(x) = xm$, concluímos que $\bar{f}$ é um morfismo de R-módulos que estende f. □

Exemplo 4.2.7. O teorema anterior fornece outra forma de argumentar a não injetividade de $\mathbb{Z}$ como um um $\mathbb{Z}$-módulo. De fato, uma vez que não existe um inteiro n tal que $1 = 2n$, vemos que $\mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível e portanto não pode ser injetivo. Por outro lado, $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo divisível e portanto, injetivo.

Exemplo 4.2.8. Seja D um domínio e K o seu corpo de frações. Vejamos que K é um D-módulo injetivo. Faremos isto usando o critério de Baer. Assim, sejam I um ideal de D e $f : I \to K$ um morfismo de D-módulos. Devemos provar que f se estende a um morfismo de D-módulos $g : D \to K$. Isto é trivial se $I = 0$. Supondo agora $I \neq 0$, escolhamos $x \neq 0$ em I. Como K é um D-módulo divisível, existe $k \in K$ tal que

$$f(x) = xk.$$

Assim, dado $a \in I$, temos:

$$xf(a) = f(ax) = af(x) = axk.$$

Como D é um domínio, concluímos que $f(a) = ak$. Logo, pondo

$$g : D \to K, \ (d \longmapsto dk)$$

segue que g estende f. Portanto, K é um D-módulo injetivo.

Observação 4.2.9. Ainda que R seja domínio, um R-módulo divisível não é necessariamente injetivo, ou seja, a recíproca do item (i) do Teorema 4.2.6 não é válida. Para ver isto, considere o $\mathbb{Z}[X]$-módulo $M = \mathbb{Z}(X)/\mathbb{Z}[X]$ onde $\mathbb{Z}(X)$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}[X]$. É imediato verificar que M é um $\mathbb{Z}[X]$-módulo divisível. Por outro lado, dado o ideal $I = (2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ consideremos o seguinte morfismo de $\mathbb{Z}[X]$-módulos:

$$f : I \to M, \quad 2p(X) + Xq(X) \mapsto \frac{X}{2}q(X) + \mathbb{Z}[X].$$

Primeiro observamos que esse mapa está bem definido. De fato, se $2p(X) + Xq(X) = 2p'(X) + Xq'(X)$. então $2(p(X) - p'(X)) = X(q'(X) - q(X))$. Como 2 é elemento primo de $\mathbb{Z}[X]$ e 2 não divide X segue que 2 divide $q'(X) - q(X)$. Assim, $\frac{X}{2}q(X) + \mathbb{Z}[X] = \frac{X}{2}q'(X) + \mathbb{Z}[X]$. Logo, f realmente está bem definido.

Se M fosse um $\mathbb{Z}[X]$-módulo injetor então, pelo critério de Baer, f se estenderia a um morfismo $h : \mathbb{Z}[X] \to M$. Consequentemente, teríamos

$$0 + \mathbb{Z}[X] = h(2) = 2h(1) \quad \text{e} \quad h(X) = Xh(1) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}[X],$$

ou seja, existiriam $p(X), q(X) \in \mathbb{Z}[X]$, coprimos, tais que

$$2\frac{p(X)}{q(X)} + \mathbb{Z}[X] = 0 + \mathbb{Z}[X] \quad \text{e} \quad X\frac{p(X)}{q(X)} + \mathbb{Z}[X] = \frac{1}{2} = \mathbb{Z}[X].$$

Da primeira igualdade obtemos que $q(X) = 2$. Com isso e a segunda igualdade teríamos

$$\frac{1}{2}(Xp(X) - 1) \in \mathbb{Z}[X].$$

Mas isso é um absurdo, pois 2 não divide $Xp(X) - 1$ em $\mathbb{Z}[X]$. Portanto, M não é um módulo injetivo.

O objetivo final desta seção é provar que todo módulo pode ser mergulhado num módulo injetor. Mais precisamente, iremos provar que dado um R-módulo M, existe um R-módulo injetor N juntamente com um morfismo injetor de R-módulos $f : M \to N$. O lema abaixo estabelece este resultado para o caso dos $\mathbb{Z}$-módulos.

Lema 4.2.10. *Seja* G *um* $\mathbb{Z}$*- módulo. Então, existe um* $\mathbb{Z}$*-módulo injetor* H *juntamente com um morfismo injetor de* $\mathbb{Z}$*-módulos* $f : G \to H$.

Prova. Tome $\{g_i\}_{i\in I}$ um conjunto gerador de G e sejam $M_1 = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$ e $M_2 = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}$. Defina o morfismo sobrejetor

$$\varphi : M_1 \to G, \quad (n_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} n_i g_i.$$

Sendo $J = \ker \varphi$, temos um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\overline{\varphi} : M_1/J \to G$. Denote $N_1 = M_1/J$ e $N_2 = M_2/J$. Considerando o morfismo inclusão

$$i : N_1 \to N_2$$

temos que

$$f = i \circ \overline{\varphi}^{-1} : G \to N_2$$

é um morfismo injetor de $\mathbb{Z}$-módulos. Uma vez que a soma direta e o quociente de módulos divisíveis são também módulos divisíveis, concluímos que H é um $\mathbb{Z}$-módulo injetor. Logo, o resultado está provado. □

Seja E um $\mathbb{Z}$-módulo e R um anel qualquer. Podemos dar ao $\mathbb{Z}$-módulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ uma estrutura natural de R-módulo, definindo, para $r \in R$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$,

$$r\varphi(s) := \varphi(rs).$$

Lema 4.2.11. *Se* E *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo injetivo e* R *é um anel qualquer, então* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ *é um* R*-módulo injetivo.*

Prova. Mostraremos a injetividade do R-módulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ usando o critério de Baer. Assim, seja I um ideal de R e $f : I \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ um morfismo de R-módulos. Sendo 1_R a unidade de R, defina o morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

$$g : I \to E, \quad a \mapsto f(a)(1_R).$$

Como E é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo, g se estende a um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\tilde{g} : R \to E$. Defina então a função $\tilde{f} : R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$, que associa cada $r \in R$ ao morfismo $\tilde{f}(r)$ definido por

$$\tilde{f}(r) : R \to E, \quad s \mapsto \tilde{g}(rs).$$

É imediato verificar que $\tilde{f}$ é um morfismo de R-módulos. Além disso, para cada $a \in I$ e $r \in R$, temos:

$$\tilde{f}(a)(r) = \tilde{g}(ar) = r\tilde{g}(a) = rf(a)(1_R) = f(a)(r).$$

Logo, $\tilde{f}(a) = f(a)$, para todo $a \in I$, ou seja, $\tilde{f}$ estende f e , portanto, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ é um R-módulo injetivo. $\square$

Encerramos esta seção com o resultado prometido.

Teorema 4.2.12. *Seja M um R-módulo. Então, existe um R-módulo injetivo N juntamente com um morfismo injetor de R-módulos $f : M \to N$.*

Prova. Inicialmente, considerando R como um $\mathbb{Z}$-módulo, obtemos do Lema 4.2.10, um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo E juntamente com um morfismo injetor de $\mathbb{Z}$-módulos $g : M \to E$. Pelo Lema 4.2.11, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$ é um R-módulo injetor.

Por fim, defina a função $\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$, pondo $\varphi(m)(r) = h(rm)$. É imediato verificar que φ é um morfismo de R-módulos. Além disso, se $\varphi(m) = 0$, então, em particular $\varphi(m)(1_R) = h(m) = 0$, donde $m = 0$. Assim, φ é injetor, o que encerra a demonstração.

$\square$

Definição 4.2.13. Seja M um R-módulo e N um submódulo de M. Dizemos que M é uma *extensão essencial* de N se $U \cap N \neq 0$, para todo submódulo não-nulo U de M. Além disso, se $N \subsetneq M$, dizemos que M é uma *extensão essencial própria* de N.

Podemos caracterizar a injetividade de um módulo a partir de suas extensões essenciais.

Lema 4.2.14. *M é um R-módulo injetivo se, e somente se, M não admite extensão essencial própria.*

Prova. Suponha que M é um R-módulo injetivo e seja E uma extensão essencial de M. Pela injetividade de M, segue que existe um submódulo F de E tal que

$$E = M \oplus F.$$

Em particular, $M \cap F \neq 0$. Assim, $F = 0$ e $E = M$.

Reciprocamente, suponha que M não admite extensão essencial própria. Considere uma sequência exata de R-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{f} E \to L \to 0$$

Como f é injetivo, podemos supor que M é submódulo de E. Pelo lema de Zorn, o conjunto

$$X = \{P \text{ é submódulo de } E \text{ e } P \cap M = 0\}$$

possui um elemento maximal, digamos N. Como $N \cap M = 0$, o morfismo natural $\varphi : M \to E/N$ é injetivo, de modo que podemos identificar M com o submódulo $\varphi(M)$ de E/N. Por outro lado, segue da maximalidade de N em X que $M \subset E/N$ é uma extensão essencial de M. Assim, $M = E/N$, o que implica que $E = N \oplus M$. □

Teorema 4.2.15. *Todo módulo admite um fecho injetivo.*

Prova. Seja M um R-módulo. Pelo Teorema 4.2.12, existe um R-módulo injetivo I com $M \subset I$. Pelo lema de Zorn, o conjunto

$$X = \{P \text{ é submódulo de } I \text{ e é uma extensão essencial de } M\}$$

possui um elemento maximal, digamos N. Vamos provar que N é um fecho injetivo de M. Para isto, suponha que E é uma extensão essencial de M com $N \subsetneq E$. Como I é um R-módulo injetivo, a inclusão $i : N \to I$ se estende a um morfismo $\varphi : E \to I$. Naturalmente, $\ker\varphi \cap N = 0$. Como E é extensão essencial de N, segue que $\ker\varphi = 0$. Daí, $E \simeq \varphi(E)$, donde $M \subset \varphi(E)$ é uma extensão essencial. Por outro lado, $N \subsetneq \varphi(E)$, o que contraria a maximalidade de N em X. Portanto, N é uma extensão essencial maximal de M, ou seja, é um fecho injetivo de M. □

Teorema 4.2.16. *Considere R-módulos M e I, como $M \subset I$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) I *é uma extensão essencial maximal de* M.

(ii) I *é um R-módulo injetivo e a extensão $M \subset I$ é essencial.*

(iii) I *é um R-módulo injetivo minimal sobre* M.

Prova. (i)⇒(ii): Toda extensão essencial de I também é uma extensão essencial de M. Assim, I não admite extensões essenciais próprias, sendo portanto injetivo, conforme o Lema 4.2.14.

(ii)⇒(iii): Suponha que I' seja um R-módulo injetivo com $M \subset I' \subset I$. Em particular, I' é um somando direto de I. Assim, podemos escrever

$$I = I' \oplus J,$$

para algum R-módulo J. Por outro lado, como $J \cap I' = 0$, segue que $J \cap M = 0$. Logo, como $M \subset I$ é uma extensão essencial, concluímos que $J = 0$ e assim, $I = I'$.

(iii)⇒(i): Pela demonstração do Teorema 4.2.15, existe uma extensão essencial maximal J de M contida em I. Por outro lado, segue da implicação (i)⇒(ii) que tal extensão é um R-módulo injetivo. Logo, pela minimalidade de I, concluímos que $I = J$. □

Definição 4.2.17. Seja M um R-módulo. Um R-módulo que satisfaz alguma das condições do teorema anterior é um *fecho injetivo de* M.

A existência do fecho injetivo está assegurada pelo Teorema 4.2.15.

Teorema 4.2.18. *O fecho injetivo de um módulo é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam M um R-módulo e I, I' dois fechos injetivos de M. Como I' é injetivo, a inclusão $M \hookrightarrow I'$ se estende a um morfismo $\varphi : I \to I'$. Por outro lado, $\ker \varphi \cap M = 0$. Assim, como $M \subset I$ é uma extensão essencial, segue que $\ker \varphi = 0$. Portanto $\varphi(I) \simeq I$ é um R-módulo injetivo e $M \subset \varphi(I)$. Uma vez que I' é um R-módulo injetivo minimal sobre M, segue que $\varphi(I) = I'$, donde $I \simeq I'$. □

Corolário 4.2.19. *Se* $M \subset N$ *é uma extensão essencial de* R*-módulos, então* $E(M) \simeq E(N)$.

Demonstração. Como $E(N)$ é uma extensão essencial maximal de N, segue da cadeia de inclusões $M \subset N \subset E(N)$ que $E(N)$ também é uma extensão essencial maximal de M. Logo, o resultado. □

Exemplo 4.2.20. Seja D um domínio e K seu corpo de frações. Vimos no Exemplo 4.2.8 que K é um D-módulo injetivo. Além disso, a extensão $D \subset K$ é essencial. De fato, se M é um D-submódulo não-nulo de K, então, tomando $k = a/b \in M$ não-nulo, obtemos $bk = a \in D$. Isto mostra que $M \cap D \neq 0$. Portanto, $D \subset K$ é uma extensão essencial e, consequentemente, K é um fecho injetivo de D.

4.3 Homologia Algébrica

Os métodos homológicos estão presentes em todos os capítulos deste trabalho. Nesta seção, apresentamos os conceitos e resultados que foram utilizados ao longo do texto.

4.3.1 Noções gerais

Definição 4.3.1. Um complexo de R-módulos é uma sequência de R-módulos e morfismos

$$K_\bullet : \cdots \to K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

tais que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo n. Os morfismos d_n são chamados de *diferenciais* do complexo. A n-*ésima homologia* do complexo $K_\bullet$ é o R-módulo $H_n(K_\bullet) = \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. O complexo é dito *exato* se $H_n(K_\bullet) = 0$, para todo n.

Usualmente, para deixar claro a diferencial do complexo, também utilizamos a notação $(K_\bullet, d_\bullet)$ em vez de apenas $K_\bullet$. A versão dual de um complexo de R-módulos é a noção cocomplexo.

Definição 4.3.2. Um cocomplexo de R-módulos é uma sequência de R-módulos e morfismos

$$K^\bullet : \cdots \to K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

tais que $d^n \circ d^{n-1} = 0$, para todo n. Os morfismos d^n são chamados de *diferenciais* do cocomplexo. A *n-ésima cohomologia* do cocomplexo $K^\bullet$ é o R-módulo $H^n(K^\bullet) = \ker d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$. O complexo é dito *exato* se $H_n(K_\bullet) = 0$, para todo n.

As noções que discutiremos aqui para complexos de R-módulos podem ser analogamente definidas para cocomplexos.

Definição 4.3.3. Sejam $K_\bullet$, $K'_\bullet$ dois complexos de R-módulos. Um morfismo $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ de complexos é uma sequência $f = (f_n)_n$ de morfismos de R-módulos $f_n : K_n \to K'_n$ tal que o diagrama seguinte é comutativo, para cada n:

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & K_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ K'_n \arrow[r, "d'_n"] & K'_{n-1} \end{tikzcd}$$

A sequência $(id_{K_n})_n$ define um morfismo $f : K_\bullet \to K_\bullet$ que chamaremos de *morfismo identidade*. Tal morfismo será denotado por $1_{K_\bullet}$. Podemos naturalmente definir a composição entre morfismos de complexos. Explicitamente, se $f = (f_n)_n : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g = (g_n)_n : K'_\bullet \to K''_\bullet$ são morfismos de complexos, então a composição $gf = (g_n f_n)_n : K_\bullet \to K''_\bullet$ é um morfismo de complexos. A verificação deste fato é imediata.

Não é difícil verificar também que um morfismo $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ induz morfismos $f_{*n} : H_n(K_\bullet) \to H_n(K'_\bullet)$ nas respectivas homologias de $K_\bullet$ e $K'_\bullet$.

Uma condição para que dois morfismos $f, g : K_\bullet \to K'_\bullet$ induzam os mesmos morfismos nas homologias é a *homotopia*, conforme a definição abaixo.

Definição 4.3.4. Dois morfismos $f, g : (K_\bullet, d_\bullet) \to (K'_\bullet, d'_\bullet)$ são ditos *homotópicos* se, para cada n, existe um morfismo de R-módulos $h_n : K_n \to K'_{n+1}$ tal que

$$f_n - g_n = d'_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n.$$

Usamos a notação $f \sim g$ para significar que f e g são homotópicos.

Proposição 4.3.5. *Se* $f, g : (K_\bullet, d_\bullet) \to (K'_\bullet, d'_\bullet)$ *são morfismos homotópicos, então*

$$f_{*n} = g_{*n}.$$

para cada n.

Prova. Sejam

$$f_{*n} : \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} \to \ker d'_n / \operatorname{Im} d'_{n+1} \; (\overline{x} \longmapsto \overline{f_n(x)})$$

e

$$g_{*n} : \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} \to \ker d'_n / \operatorname{Im} d'_{n+1} \; (\overline{x} \longmapsto \overline{g_n(x)})$$

Devemos provar que $f_{*n}(\overline{x}) = g_{*n}(\overline{x})$, para todo $x \in H_n(K_\bullet)$. Isto equivale a dizer que $f_n(x) - g_n(x) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}$ Como $x \in \ker d_n$, temos

$$f_n(x) - g_n(x) = d'_{n+1}h_n(x) + h_{n-1}d_n(x) = d'_{n+1}h_n(x) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}.$$

Isto encerra a demonstração. □

Veremos agora condição que garante que dois complexos possuam a mesma homologia (a menos de isomorfismos.)

Definição 4.3.6. Dois complexos $K_\bullet$ e $K'_\bullet$ são ditos *homotopicamente equivalentes* se existem morfismos $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g : K'_\bullet \to K_\bullet$ tais que $gf \sim 1_{K_\bullet}$ e $fg \sim 1_{K'_\bullet}$.

Proposição 4.3.7. *Dois complexos* $(K_\bullet, d_\bullet)$ *e* $(K'_\bullet, d'_\bullet$ *homotopicamente equivalentes possuem as mesmas homologias, a menos de isomorfismos.*

Prova. Sejam $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ e $g : K'_\bullet \to K_\bullet$ tais que $gf \sim 1_{K_\bullet}$ e $fg \sim 1_{K'_\bullet}$. Então, existem morfismos de R-módulos $h_n : K_n \to K'_{n+1}$ e $h'_n : K'_n \to K_{n+1}$ cumprindo as igualdades

$$g_nf_n - id_{K_n} = d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

e

$$f_ng_n - id_{K'_n} = d'_{n+1}h_n + h'_{n-1}d'_n.$$

Assim, dado $\overline{x} \in H_n(K_\bullet)$, temos:

$$\begin{aligned} g_{*n}(f_{*n}(\overline{x})) &= \overline{g_n(f_n(x))} \\ &= \overline{x + d_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x))} \\ &= \overline{x} \end{aligned}$$

pois $x \in \ker d_n$. Analogamente prova-se que $f_{*n} \circ g_{*n} = id_{H_n(K'_\bullet)}$. Assim, $H_n(K_\bullet) \simeq H_n(K'_\bullet)$.

□

Definição 4.3.8. Uma sequência de complexos

$$0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{f} K_\bullet \xrightarrow{g} K''_\bullet \longrightarrow 0$$

é exata se, para cada n, a sequência

$$0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{g_n} K''_n \longrightarrow 0$$

é exata.

Neste caso, podemos definir um morfismo "conector" $\delta_n : H_n(K''_\bullet) \to H_{n-1}(K'_\bullet)$ de modo a obter a sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{*n}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{*n}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Podemos verificar isto analisando o diagrama comutativo de linhas exatas abaixo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & K_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & K''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & K_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & K''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dado $\overline{x} \in H_n(K''_\bullet)$, temos $x \in \ker d''_n \subset K''_n$. Sendo g_n sobrejetor, existe $k_n \in K_n$ tal que $x = g_n(k_n)$. Como

$$g_{n-1} \circ d_n(k_n) = d''_n \circ g_n(k_n) = 0$$

concluímos que $d_n(k_n) \in \ker g_{n-1} = \operatorname{Im} f_{n-1}$. Daí, pela injetividade de f_{n-1} segue que existe um único $k'_{n-1} \in K'_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(k'_{n-1}) = d_n(k_n)$. Além disso, note que $k'_{n-1} \in \ker d'_{n-1}$. Isto segue da injetividade de f_{n-2} juntamente com a igualdade abaixo

$$f_{n-2} \circ d'_{n-1}(k'_{n-1}) = d_{n-1} \circ f_{n-1}(k'_{n-1}) = d_{n-1} \circ d_n(k_n) = 0.$$

Portanto, é natural definirmos

$$\delta_n(\overline{x}) = \overline{k'_{n-1}}, \text{ em } H_{n-1}(K'_\bullet).$$

Devemos, contudo, verificar a consistência desta definição. Inicialmente, temos que mostrar que tal construção independe da escolha de k_n. Explicitamente, devemos mostrar que, se $x = g_n(\tilde{k_n})$, então, sendo p o único elemento de K'_{n-1} a cumprir a igualdade $f_{n-1}(p) = d_n(\tilde{k_n})$, teremos

$$\overline{k'_{n-1}} = \overline{p}, \text{ em } H_{n-1}(K'_\bullet),$$

ou equivalentemente, $k'_{n-1} - p \in \operatorname{Im} d'_n$.

Para ver isto, começamos observando que $k_n - \tilde{k_n} \in \ker g_n = \operatorname{Im} f_n$. Disto, segue a existência de $k'_n \in K'_n$ tal que

$$k_n - \tilde{k_n} = f_n(k'_n).$$

Logo, a igualdade

$$d_n \circ f_n(k'_n) = f_{n-1} \circ d'_n(k'_n)$$

implica que $d_n(k_n - \tilde{k_n}) = f_{n-1} \circ d'_n(k'_n)$. Por fim, como

$$d_n(k_n) = f_{n-1}(k'_{n-1}) \text{ e } d_n(\tilde{k_n}) = f_{n-1}(p),$$

segue que

$$d_n(k_n - \tilde{k_n}) = f_{n-1}(k'_{n-1} - p)$$

e, portanto,

$$f_{n-1}(k'_{n-1} - p) = f_{n-1} \circ d'_n(k_n).$$

A injetividade de f_{n-1} nos leva a conclusão de que $k'_{n-1} - p \in \operatorname{Im} d'_n(k'n)$.

Procedendo de forma análoga, também pode-se verificar que a construção acima independe do representante x. Assim, δ_n está bem definida.

Proposição 4.3.9. *Com as notações anteriores, temos que o complexo*

$$\cdots \longrightarrow H_n(K'_\bullet) \xrightarrow{f_{*n}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{g_{*n}} H_n(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

é exato.

Prova. Começamos provando que $\operatorname{Im} f_{*n} = \ker g_{*n}$. A inclusão $\operatorname{Im} f_{*n} \subset \ker g_{*n}$ é imediata. Para a inclusão oposta, considere $\overline{y} \in \ker g_{*n}$. Assim, $g_n(y) = d''_{n+1}(k''_{n+1})$, para algum $k''_{n+1} \in K''_{n+1}$. Pela sobrejetividade de g_{n+1} temos que $k''_{n+1} = g_{n+1}(k_{n+1})$, para algum $k_{n+1} \in K_{n+1}$. Por outro lado, pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} K_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & K''_{n+1} \arrow[d, "d''_{n+1}"] \\ K_n \arrow[r, "g_n"] & K''_n \end{tikzcd}$$

temos a igualdade

$$g_n(y) = g_n \circ d_{n+1}(k_{n+1}).$$

Assim, $y - d_{n+1}(k_{n+1}) \in \ker g_n = \operatorname{Im} f_n$. Sendo $k'_n \in K'_n$ tal que $y - d_{n+1}(k_{n+1}) = f_n(k'_n)$, concluímos que

$$y - f_n(k'_n) \in \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Em outras palavras, $\overline{y} = \overline{f_n(k'_n)}$ em $H_n(K_\bullet)$. Portanto, $\overline{y} \in \operatorname{Im} f_{*n}$.

Resta provar que $\operatorname{Im} g_{*n} = \ker \delta_n$. Mais uma vez, a inclusão $\operatorname{Im} g_{*n} \subset \ker \delta_n$ é imediata. Para a inclusão oposta, tome $\overline{x} \in \ker \delta_n$. Isto significa que, sendo $k_n \in K_n$ tal que $x = g_n(k_n)$ e $k_{n-1} \in K_{n-1}$ tal que $d_n(k_n) = f_{n-1}(k_{n-1})$, temos que $k'_{n-1} \in \operatorname{Im} d'_n$. Assim, escrevendo $k'_{n-1} = d'_n(k'_n)$, temos:

$$d_n(k_n) = f_{n-1} \circ d'_n(k'_n) = d_n \circ f_n(k'_n).$$

Desta forma, $k_n - f_n(k'_n) \in \ker d_n$ e como $g_n \circ f_n = 0$, temos

$$x = g_n(k_n - f_n(k'_n)).$$

Isto nos diz que $\overline{x} = g_{*n}(k_n - f_n(k'_n))$, o que encerra a demonstração. $\square$

Encerramos esta subseção definindo a noção de produto tensorial entre complexos. Esta noção foi utilizada neste trabalho no estudo da álgebra tensorial de um módulo.

Definição 4.3.10. *Sejam $(K_\bullet, d_\bullet)$ e $(L_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de R-módulos. O produto tensorial destes complexos é o complexo $K_\bullet \otimes L_\bullet$ definido pondo*

$$(K_\bullet \otimes L_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} K_p \otimes L_q$$

juntamente com as diferenciais

$$\delta_n : (K_\bullet \otimes L_\bullet)_n \to (K_\bullet \otimes L_\bullet)_{n-1},\ x \otimes y \longmapsto dx \otimes y + (-1)^p x \otimes d'y \ \ (x \in K_p, y \in L_q)$$

4.3.2 O funtor Tor

Os funtores $\operatorname{Tor}_n^R(-, M)$ foram bastante utilizados neste trabalho. Dedicamos esta seção à sua construção e mostramos algumas de suas propriedades.

Proposição 4.3.11. *Considere R-módulos M, N. Sejam ainda $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$,*

$$P_\bullet : \cdots \to P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \to 0$$

uma resolução projetiva de M *e*

$$C_\bullet : \cdots \to C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow N \to 0$$

um complexo exato. Então, existe um um morfismo de complexos $\varphi = (\varphi_n)_n : P_\bullet \to C_\bullet$ *tal que* $\varphi_{-1} = f$. *Além disso,* φ *é único a menos de homotopia.*

Prova.

Devemos construir $\varphi_n : P_n \to C_n$ de modo que o diagrama abaixo seja comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] & C_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como δ_0 é sobrejetor, a existência de φ_0 verificando a igualdade $f \circ d_0 = \delta_0 \circ \varphi_0$ segue da projetividade de P_0. Supondo construídos os morfismos $\varphi_0, ..., \varphi_n$, vamos construir o morfismo φ_{n+1}. Inicialmente, a igualdade

$$\delta_n \circ \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ d_n$$

implica que

$$\delta_n \circ \varphi_n \circ d_{n+1} = 0.$$

Assim, $\operatorname{Im}(\varphi_n \circ d_{n+1}) \subset \ker \delta_n = \operatorname{Im} \delta_{n+1}$. Desta forma, considerando os morfismos $\varphi_n \circ d_{n+1} : P_{n+1} \to \operatorname{Im} \delta_{n+1}$ e $\delta_{n+1} : C_{n+1} \to \operatorname{Im} \delta_{n+1}$, a existência de φ_{n+1} verificando a igualdade $\delta_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ d_{n+1}$ segue da projetividade de P_{n+1}. Provemos agora a unicidade de φ a menos de homotopia. Para isto, suponha que $g = (g_n)_n : P_\bullet \to C_\bullet$ é um morfismo de complexos com $g_{-1} = f$. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] & C_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por definição de homotopia, devemos provar a existência de morfismos $s_n : P_n \to C_{n+1}$ de modo que $\varphi_n - g_n = \delta_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$. Inicialmente, definimos $s_{-1} : M \to C_0$ como sendo o morfismo nulo. Desta forma, nosso próximo passo deve ser garantir a existência de um morfismo $s_0 : P_0 \to C_1$ verificando a igualdade

$$\varphi_0 - g_0 = \delta_1 \circ s_0.$$

Ora, como

$$\delta_0 \circ \varphi_0 = f \circ d_0 = \delta_0 \circ g_0$$

segue que $\mathrm{Im}(\varphi_0 - g_0) \subset \ker \delta_0 = \mathrm{Im}\, \delta_1$. Desta forma, considerando os morfismos $\varphi_0 - g_0 : P_0 \to \mathrm{Im}\, \delta_1$ e $\delta_1 : C_1 \to \mathrm{Im}\, \delta_1$, a existência de s_0 segue imediatamente da projetividade de P_0.

Supondo obtidos s_i para $i \leqslant n$, provemos a existência de $s_{n+1} : P_{n+1} \to C_{n+2}$ cumprindo a igualdade

$$\varphi_{n+1} - g_{n+1} = \delta_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1}.$$

ou equivalentemente

$$\delta_{n+2} \circ s_{n+1} = \varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}.$$

Ora, como

$$\delta_{n+1} \circ (\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) = (\varphi_n - g_n - \delta_{n+1} \circ s_n) \circ d_{n+1} = s_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0$$

segue que $\mathrm{Im}(\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subset \ker \delta_{n+1} = \mathrm{Im}\, \delta_{n+2}$.

Logo, considerando os morfismos $\varphi_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1} : P_{n+1} \to \mathrm{Im}\, \delta_{n+2}$ e $\delta_{n+2} : C_{n+2} \to \mathrm{Im}\, \delta_{n+2}$, a existência de s_{n+1} segue imediatamente da projetividade de P_{n+1}. □

Corolário 4.3.12. *Quaisquer duas resoluções projetivas de um R-módulo M são homotopicamente equivalentes.*

Prova. Sejam $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ duas resoluções projetivas de M. Pela proposição anterior, existem morfismos de complexos $f : P_\bullet \to Q_\bullet$ e $g : Q_\bullet \to P_\bullet$ tais que $f_{-1} = g_{-1} = id_M$. Pela unicidade estabelecida nesta mesma proposição, concluímos ainda que $g \circ f \sim 1_{P_\bullet}$ bem como $f \circ g \sim 1_{Q_\bullet}$. Logo, $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são homotopicamente equivalentes. □

Corolário 4.3.13. *Sejam $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ resoluções projetivas de um R-módulo M e $\mathcal{F}$ um funtor aditivo definido na categoria dos R-módulos. Então, $\mathcal{F}(P_\bullet)$ e $\mathcal{F}(Q_\bullet)$ são homotopicamente equivalentes.*

Prova. Suponha sem perda de generalidade que $\mathcal{F}$ é covariante. Pelo corolário anterior, existem morfismos $f : P_\bullet \to Q_\bullet$ e $g : Q_\bullet \to P_\bullet$ tais que $f \circ g \sim 1_{Q_\bullet}$ e $g \circ f \sim 1_{P_\bullet}$. Assim, resulta da aditividade de $\mathcal{F}$ que $\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \sim 1_{P_\bullet}$ e $\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \sim 1_{Q_\bullet}$, o que prova o desejado. □

Definição 4.3.14. Considere R-módulos M e N. Seja $P_\bullet$ uma resolução projetiva deletada de M. Definimos

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = H_n(P_\bullet \otimes N).$$

Como o funtor $- \otimes N$ é aditivo na categoria dos R-módulos, a boa definição de $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ segue do corolário anterior. Segue imediatamente da definição acima que $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes N$

e que $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)=0$, se $n<0$. Além disso, também podemos concluir que, se M for projetivo ou N for plano, então $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)=0$ para todo $n\geqslant 1$. Outra observação imediata reside no fato de que, se M_n é a n-ésima sizígia de M, então $\operatorname{Tor}_i^R(M_n,N)\simeq \operatorname{Tor}_{i+n}^R(M,N)$, para todo $i\geqslant 1$.

Dado um morfismo $f: M\to N$ de R-módulos, considere resoluções projetivas $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet,\delta_\bullet)$ de M e N, respectivamente. Pela Proposição 4.3.11, existe um morfismo de complexos $\varphi_\bullet:(P_\bullet,d_\bullet)\to(Q_\bullet,\delta_\bullet)$ tal que $\varphi_{-1}=f$. Em particular, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Dado um R-módulo T, aplicando o funtor $-\otimes_R T$ em cada linha do complexo acima e tomando os mapas induzidos nas homologias do complexo resultante, obtemos mapas $\operatorname{Tor}_n^R(M,T)\to\operatorname{Tor}_n^R(N,T)$. Tais mapas estão bem definidos, uma vez que $\varphi_\bullet$ é único a menos de homotopia. Isto nos fornece a descrição completa dos funtores $\operatorname{Tor}_n^R(-,T)$, para cada n. (As demais verificações a serem feitas para garantir que $\operatorname{Tor}_n^R(-,T)$ é de fato um funtor na categoria dos R-módulos são imediatas.)

Lema 4.3.15. *Considere R-módulos M' e M'' com resoluções projetivas $(P_\bullet,d'_\bullet)$ e $(Q_\bullet,d''_\bullet)$, respectivamente. Suponha que*

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Então, existe uma resolução projetiva $C_\bullet$ de M juntamente com uma sequência exata de complexos

$$0\to P_\bullet\longrightarrow C_\bullet\longrightarrow Q_\bullet\to 0$$

Prova. Seja $C_n=P_n\oplus Q_n$. Isto nos dá a sequência exata natural

$$0\to P_n\longrightarrow C_n\longrightarrow Q_n\to 0$$

Nosso próximo passo é definir as diferenciais do complexo $C_\bullet$. Para isto, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d''_2"] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r, "d''_1"] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r, "d''_0"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d'_1"] & P_0 \arrow[r, "fd'_0"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pela Proposição 4.3.11, existem morfismos $t_0: Q_0\to M$ e $t_n: Q_n\to P_{n-1}$ tais que o diagrama anterior seja comutativo. De posse destes morfismos, definimos agora

$$d_0 : C_0 \to M, \ \ (p_0, q_0) \longmapsto f \circ d'_0(p_0) + t_0(q_0)$$

e

$$d_n : C_n \to C_{n-1}, \ \ (p_n, q_n) \longmapsto (d'_n(p_n) + (-1)^n t_n(q_n), d''_n(q_n))$$

Uma verificação usual mostra que $(C_\bullet, d_\bullet)$ cumpre as condições requeridas. $\square$

Corolário 4.3.16. *Se* $0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0$ *é uma sequência exata de* R*-módulos, então, para cada* R*-módulo* N*, temos a sequência exata longa*

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_{n+1}(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_n(M', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_n(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_n(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_{n-1}(M', N) \to \cdots$$

Prova. Tome resoluções projetivas deletadas $P'_\bullet$ e $P''_\bullet$ de M' e M'', respectivamente. Assim, pelo lema anterior existe uma resolução projetiva deletada $P_\bullet$ de M juntamente com uma sequência exata de complexos

$$0 \to P'_\bullet \longrightarrow P_\bullet \longrightarrow P''_\bullet \to 0$$

Além disso, considerando a sequência exata

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{f} P_n \longrightarrow P''_n \longrightarrow 0$$

temos que a mesma cinde pois P''_n é projetivo. Em particular, pela Proposição 4.1.7, existe um morfismo $g : P_n \to P'_n$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{P_n}$. Consequentemente, considerando os morfismos induzidos $f \otimes N : P'_n \otimes N \to P_n \otimes N$ e $g \otimes N : P_n \otimes N \to P'_n \otimes N$, temos

$$(g \otimes N) \circ (f \otimes N) = \mathrm{id}_{P'_n \otimes N}.$$

Segue daí que $f \otimes N$ é injetor, o que nos diz que a sequência

$$0 \to P'_n \otimes N \longrightarrow P_n \otimes N \longrightarrow P''_n \otimes N \to 0$$

é exata. Isto nos dá a sequência exata de complexos

$$0 \to P'_\bullet \otimes N \longrightarrow P_\bullet \otimes N \longrightarrow P''_\bullet \otimes N \to 0$$

Portanto, o resultado segue da Proposição 4.3.9. $\square$

Definimos $\mathrm{Tor}^R_n(M, N)$ em termos de uma resolução projetiva de M. Procedendo de forma análoga com resoluções projetivas de N, chegaremos ao mesmo resultado. Mostraremos isto, utilizando o lema técnico a seguir, o qual também é bastante utilizado em vários outros contextos de álgebra comutativa.

Lema 4.3.17 (Lema da Serpente)**.** *Considere o seguinte diagrama comutativo de* R*-módulos com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "b'"] & C' \arrow[r, "c'"] & D' \end{tikzcd}$$

Então, temos a seguinte sequência exata

$$\ker\beta \xrightarrow{\tilde{b}} \ker\gamma \xrightarrow{\tilde{c}} \ker\delta \xrightarrow{\tilde{\delta}} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\tilde{b'}} \operatorname{Coker}\gamma \xrightarrow{\tilde{c'}} \operatorname{Coker}\delta$$

Prova. Os morfismos $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$ são as restrições de b e c a $\ker\beta$ e $\ker\gamma$, respectivamente, assim como $\tilde{b'}$ e $\tilde{c'}$ são naturalmente induzidos pelos morfismos b' e c'. A definição de $\tilde{\delta}$ se obtém de forma análoga à definição do morfismo δ_n na Proposição 4.3.9. Não é difícil verificar que a sequência assim definida é exata. □

Teorema 4.3.18. *Considere* R*-módulos* M *e* N *e seja* $Q_\bullet$ *uma resolução projetiva deletada de* N*. Defina*

$$\overline{\operatorname{Tor}_n^R}(M,N) = H_n(M \otimes Q_\bullet).$$

Então,

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = \overline{\operatorname{Tor}_n^R}(M,N).$$

Em particular, $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = \operatorname{Tor}_n^R(N,M)$.

Prova. O resultado é imediato se $n \leqslant 0$. Tome módulos M_1 e N_1 de modo a obter as sequências exatas

$$0 \to M_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \to 0 \text{ e } 0 \to N_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \to 0.$$

Consideremos o diagrama comutativo de linhas e colunas exatas abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \overline{\operatorname{Tor}_1^R}(M_1,Q_0)=0 & & & & \overline{\operatorname{Tor}_1^R}(M,Q_0)=0 & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \overline{\operatorname{Tor}_1^R}(M_1,N) & & & & \overline{\operatorname{Tor}_1^R}(M,N) & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0=\operatorname{Tor}_1^R(P_0,N_1) & \to & \operatorname{Tor}_1^R(M,N_1) & \to & M_1\otimes N_1 & \to & P_0\otimes N_1 & \to & M\otimes N_1 & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & M_1\otimes Q_0 & \to & P_0\otimes Q_0 & \to & M\otimes Q_0 & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & M_1\otimes N & \to & P_0\otimes N & \to & M\otimes N & \to & 0
\end{array}$$

O lema da serpente nos dá a sequência exata

$$\ker\beta \to \ker\gamma \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\gamma \to 0$$

Equivalentemente, temos a sequência exata

$$0 \to \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M,N) \longrightarrow M_1 \otimes N \longrightarrow P_0 \otimes N \longrightarrow M \otimes N \to 0$$

Por um lado, também temos a sequências exatas

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to M_1 \otimes N \longrightarrow P_0 \otimes N \longrightarrow M \otimes N \to 0$$

com os mapas naturais. Consequentemente, $\overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_1^R(M,N)$. Por outro lado:

$$\overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M_1,N) \simeq \ker\alpha = \ker(g\circ\alpha) = \ker(\beta\circ f) = \ker f \simeq \mathrm{Tor}_1^R(M,N_1).$$

Assim, $\overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M_1,N) \simeq \mathrm{Tor}_1^R(M,N_1)$. Sendo agora $M_n = \ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$ e $N_n = \ker(Q_{n-1} \to Q_{n-2})$, temos as sequências exatas:

$$0 \to M_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \to \cdots$$

e

$$0 \to N_n \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow Q_{n-2} \to \cdots$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) &\simeq \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M,N_{n-1}) \\
&\simeq \mathrm{Tor}_1^R(M,N_{n-1}) \\
&\simeq \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M_1,N_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\simeq \overline{\mathrm{Tor}}_1^R(M_{n-1},N) \\
&\simeq \mathrm{Tor}_1^R(M_{n-1},N) \\
&\simeq \mathrm{Tor}_n^R(M,N).
\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 4.3.19. $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = 0$*, se* M *ou* N *for* R*-módulo plano. Em particular, se*

$$0 \to M \longrightarrow N \longrightarrow K \to 0$$

é uma sequência exata de R*-módulos e* K *é plano, então*

$$0 \to M \otimes T \longrightarrow N \otimes K \longrightarrow K \otimes T \to 0$$

é uma sequência exata, para todo R*-módulo* T*.*

Prova. A primeira igualdade segue imediatamente do teorema anterior. Quanto ao segundo fato, basta considerar a sequência exata

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(K, T) \longrightarrow M \otimes T \longrightarrow N \otimes K \longrightarrow K \otimes T \to 0$$

e usar o fato de que $\mathrm{Tor}_1^R(K, T) = 0$. □

Corolário 4.3.20. *Dado um* R*-módulo* M*, são equivalentes:*

i) M *é um* R*-módulo plano.*

ii) $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = 0$*, para todo* R*-módulo* N *e* $n > 0$*.*

iii) $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$*, para todo* R*-módulo* N*.*

Prova. As implicações i) $\Rightarrow$ ii) e ii) $\Rightarrow$ iii) são imediatas. Para a última implicação, seja $f : N \to K$ um morfismo injetor de R-módulos. Assim, obtemos a sequência exata

$$0 \to N \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f \to 0$$

a partir da qual se obtém a sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{Coker}\, f) \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow K \otimes M \to 0$$

Por hipótese, $\mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{Coker}\, f) = 0$. Logo, segue o resultado. □

4.3.3 O funtor Ext

Os funtores $\mathrm{Ext}_R^n(-, M)$ e $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ também foram amplamente utilizados ao longo deste trabalho. Os resultados apresentados nesta seção são semelhantes aos da seção anterior. Assim, omitiremos as provas, que podem ser todas encontradas em [7].

Proposição 4.3.21. *Considere* R*-módulos* M *e* N*. Sejam ainda* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$*,*

$$I^\bullet : 0 \to M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \to \cdots$$

uma resolução injetiva de M *e*

$$C^\bullet : 0 \to N \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \to \cdots$$

um cocomplexo exato. Então, existe um morfismo de cocomplexos $\varphi = (\varphi^n)_n : I^\bullet \to C^\bullet$ *tal que* $\varphi^{-1} = f$*. Além disso,* φ *é único a menos de homotopia.*

Corolário 4.3.22. *Quaisquer resoluções injetivas de um* R*-módulo* M *são homotopicamente equivalentes.*

Corolário 4.3.23. *Sejam* $I^\bullet$ *e* $J^\bullet$ *resoluções injetivas de um* R*-módulo* M *e* $\mathcal{F}$ *um funtor aditivo definido na categoria dos* R*-módulos. Então,* $\mathcal{F}(I^\bullet)$ *e* $\mathcal{F}(J^\bullet)$ *são homotopicamente equivalentes.*

Definição 4.3.24. *Considere* R*-módulos* M *e* N*. Seja* $I^\bullet$ *uma resolução injetiva deletada de* N*. Definimos*

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(M, I^\bullet))$$

Como o funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ é aditivo na categoria dos R-módulos, a boa definição de $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ segue do corolário anterior. Segue imediatamente da definição acima que $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ e que $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = 0$, se $n < 0$. Além disso, também podemos concluir que, se M for projetivo ou N for injetivo, então $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = 0$, para todo $n \geqslant 1$.

Seja $f : M \to N$ um morfismo de R-módulos. Dadas resoluções injetivas $(I^\bullet, d^\bullet)$ e $(J^\bullet, \delta^\bullet)$, pela Proposição 4.3.21, existe um morfismo de complexos $\varphi^\bullet : (I^\bullet, d^\bullet) \to (J^\bullet, \delta^\bullet)$ tal que $\varphi^{-1} = f$. Em particular, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f"] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\varphi^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\delta^{-1}"] & J^0 \arrow[r, "\delta^0"] & J^1 \arrow[r, "\delta^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, dado um R-módulo T, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}(T, -)$ em cada linha do complexo anterior e tomando os morfismos induzidos nas cohomologias do complexo resultante, obtemos mapas $\mathrm{Ext}^n_R(T, M) \to \mathrm{Ext}^n_R(T, N)$, para cada n. Tais mapas estão bem definidos, uma vez que $\varphi_\bullet$ é único a menos de homotopia. Isto nos fornece a descrição completa dos funtores covariantes $\mathrm{Ext}^n_R(T, -)$, para cada n. (As demais verificações a serem feitas para garantir que $\mathrm{Ext}^n_R(T, -)$ é de fato um funtor na categoria dos R-módulos são imediatas.)

Proposição 4.3.25. *Considere* R*-módulos* M' *e* M'' *com resoluções injetivas* $(I^\bullet, d'^\bullet)$ *e* $(J^\bullet, d''^\bullet)$*, respectivamente. Suponha que*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Então, existe uma resolução injetiva $C^\bullet$ *de* M *juntamente com uma sequência exata de complexos*

$$0 \to I^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow J^\bullet \to 0$$

Corolário 4.3.26. *Se* $0 \to N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \to 0$ *é uma sequência exata de* R*-módulos, então, para cada* R*-módulo* M*, temos a sequência exata longa*

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^{n-1}(M, N'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M, N') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M, N'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N') \to \cdots$$

Considere R-módulos M e N. Dada uma resolução projetiva deletada $P_\bullet$ de M, definimos

$$\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet), N).$$

Dado um morfismo $f : M \to N$ de R-módulos, considere resoluções projetivas $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, \delta_\bullet)$ de M e N, respectivamente. Pela Proposição 4.3.11, existe um morfismo de complexos $\varphi_\bullet : (P_\bullet, d_\bullet) \to (Q_\bullet, \delta_\bullet)$ tal que $\varphi_{-1} = f$. Em particular, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Dado um R-módulo T, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(-, T)$ em cada linha do complexo acima e tomando os mapas induzidos nas cohomologias do complexo resultante, obtemos mapas $\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(N, T) \to \overline{\mathrm{Ext}_R^n}(M, T)$. Tais mapas estão bem definidos, uma vez que $\varphi_\bullet$ é único a menos de homotopia. Isto nos fornece a descrição completa dos funtores contravariantes $\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(-, T)$, para cada n. (As demais verificações a serem feitas para garantir que $\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(-, T)$ é de fato um funtor na categoria dos R-módulos são imediatas.) Segue imediatamente da Proposição 4.3.9 que, se

$$0 \to N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \to 0$$

é uma sequência exata de R-módulos, então, para cada R-módulo M, temos a sequência exata longa

$$\cdots \to \overline{\mathrm{Ext}_R^{n-1}}(N', M) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}_R^{n}}(N'', M) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}_R^{n}}(N, M) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}_R^{n}}(N', M) \longrightarrow \overline{\mathrm{Ext}_R^{n+1}}(N'', M) \to \cdots$$

O resultado seguinte mostra que, na verdade, esta é uma outra forma equivalente de definir $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$.

Teorema 4.3.27. *Considere R-módulos M e N. Então, para cada n, temos*

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) \simeq \overline{\mathrm{Ext}_R^n}(M, N).$$

Observação 4.3.28. De posse deste resultado, podemos, por abuso de notação, simplismente escrever $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ em vez de $\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(M, N)$. Em particular, o funtor $\overline{\mathrm{Ext}_R^n}(-, T)$ será simplismente denotado por $\mathrm{Ext}_R^n(-, T)$. Assim, um morfismo de R-módulos

$$f : M \to N$$

induz tanto mapas

$$\mathrm{Ext}_R^n(T, M) \to \mathrm{Ext}_R^n(T, N)$$

quanto mapas

$$\mathrm{Ext}_R^n(N, T) \to \mathrm{Ext}_R^n(M, T).$$

Corolário 4.3.29. *Se R é um anel noetheriano, $\mathfrak{p} \in$ Spec (R) e M, N são R-módulos finitamente gerados, então*

$$\mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^n(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \simeq [\mathrm{Ext}_R^n(M, N)]_\mathfrak{p}.$$

Prova. Seja

$$P_\bullet : \ \cdots \to P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \to 0$$

uma resolução projetiva deletada de M. Como localização de módulo projetivo é projetivo,

$$(P_\bullet)_\mathfrak{p} : \ \cdots \to (P_2)_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_{2\mathfrak{p}}} (P_1)_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_{1\mathfrak{p}}} (P_0)_\mathfrak{p} \to 0$$

é uma resolução projetiva do $R_\mathfrak{p}$-módulo $M_\mathfrak{p}$. Por fim, uma vez que localização comuta com quocientes (logo, comuta com cohomologias) e comuta com os funtores $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ e $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, temos:

$$\mathrm{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^n(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) = H^n\left(\mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}((P_\bullet)_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p})\right) \simeq \left[H^n\left(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N)\right)\right]_\mathfrak{p}.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **60**, Cambridge Unniversity Press, 1993.

[2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150, New York, Springer-Verlag, 1995.

[3] S. Lang, *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, 211 (Revised third ed.), New York, Springer-Verlag, 2002.

[4] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.

[5] I. Kaplansky, *Projective Modules*, Ann. Math., **68** (1958), 372-7.

[6] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, University of Chicago Press, 1974.

[7] I.Swanson, *Homological Algebra*, Graz., 2018.

[8] D.Dummit; R.Foote, *Abstract Algebra,* John Wiley & Sons, 2003.

[9] E. Tengan; H.Borges, *Álgebra comutativa em quatro movimentos*, IMPA, 2015.

[10] Joseph J.Rotman, *An Introduction to Homological Algebra* (second edition), Universitext, 2009.

[11] D.D.Anderson; Michael Winders, *Idealization of a module*, Journal of Commutative Algebra, Vol 1, Number 1, Springer, 2009.