



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Jose Italo Porto Siqueira

Regra de Decisão Alternativa e Evaporação Incorporadas ao Método Fletcher-Ponnambalam para Operação de Reservatórios

São Cristóvão – SE

2022

Jose Italo Porto Siqueira

Regra de Decisão Alternativa e Evaporação Incorporadas ao Método Fletcher-Ponnambalam para Operação de Reservatórios

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Universidade Federal de Sergipe - UFS, para
encerramento do componente curricular e con-
clusão da graduação em Engenharia Civil

Universidade Federal de Sergipe (UFS)
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET)
Departamento de Engenharia Civil (DEC)

Orientador: Prof. Dr. Alcigeimes Batista Celeste

São Cristóvão – SE

2022

Jose Italo Porto Siqueira.

Regra de Decisão Alternativa e Evaporação Incorporadas ao Método Fletcher-Ponnambalam para Operação de Reservatórios/ Jose Italo Porto Siqueira, São Cristóvão – SE, 2022. 40 p.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE.

I. Universidade Federal de Sergipe. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



Ata de defesa

Jose Italo Porto Siqueira

**Regra de Decisão Alternativa e Evaporação Incorporadas ao Método
Fletcher-Ponnambalam para Operação de Reservatórios**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da
Universidade Federal de Sergipe como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em: 30 de maio de 2022

Banca examinadora

	Nota
Orientador(a): Prof. Dr. Alcigeimes Batista Celeste (UFS)	<u>10,0</u>
Examinador(a): Prof. Dr. Ludmilson Abritta Mendes (UFS)	<u>10,0</u>
Examinador(a): Prof. Dr. Camilo Allyson Simões de Farias (UFCEG)	<u>10,0</u>

Declaro que este Trabalho de Conclusão do Curso foi apresentado por videoconferência, com
anuência dos membros da banca, seguindo a Portaria nº 001/2020/CCET, de 17 de março de
2020.

Documento assinado digitalmente
gov.br ALCIGEIMES BATISTA CELESTE
Data: 04/06/2022 11:28:58-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Alcigeimes Batista Celeste (UFS)
Orientador(a)

Dedico este trabalho a Deus, por ser essencial em minha vida. A meus pais e minha irmã que foram minha base. A todos estudantes, em especial aos da rede pública. É possível! não desistam do seus sonhos, acreditem na educação.

Agradecimentos

Agradeço,

À Deus, pela minha vida, e por me ajudar sempre, com forças e discernimento para superar todos os obstáculos.

À minha família por todo incentivo e motivação para realizar meus objetivos. Meus pais, Joelma Porto da Silva Siqueira e Salmo Santos Siqueira, com toda dedicação, sacrifício e empenho em zelar por mim, para alcançar meus sonhos.

A Minha irmã, por todo carinho e atenção dedicadas quando sempre precisei. A minha avó, Leda Porto, por todo cuidado, preocupação e oração.

A todos professores que tive a oportunidade proveitosa de aprofundar conhecimento e ensinamentos de vida.

Ao meu professor orientador Alcigeimes por todo auxílio, direcionamento e paciência no processo.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia Civil pelos ensinamentos que foram essenciais para minha formação acadêmica.

Aos colegas do curso de Engenharia Civil, com quem convivi durante esses últimos anos, compartilhando experiências, ideias e conselhos que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

A todos os meus amigos que me deram a força e o apoio necessário para manter-me empenhado no trabalho e estudo. Em especial, Ronaldo Guilherme, Renato Santana, Matheus Jesus, pela amizade verdadeira e auxílio nos inúmeros desafios desta jornada.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

“A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar é aproximar-se de Deus...”

(Pitágoras)

Resumo

Este trabalho aplica a otimização estocástica explícita para a operação do reservatório de Sobradinho, localizado no Nordeste brasileiro. É abordado o método Fletcher-Ponnambalam (FP), que já foi aplicado com sucesso em vários estudos de caso na literatura, implementando-o em ambiente de programação de código aberto. Por se tratar de um problema explícito de otimização estocástica, o FP requer a suposição de uma distribuição de probabilidades para as afluências ao reservatório, no intuito de resolver integrais referentes às equações dos momentos estatísticos de armazenamento, bem como as probabilidades de contenção (armazenamento contido entre os níveis mínimo e máximo), de déficit (abaixo do mínimo) e de vertimento (acima do máximo). A principal contribuição desta pesquisa foi incorporar uma nova regra operacional ao método, assim como as perdas evaporativas de maneira explícita. Com essa proposta, o modelo de otimização evita simplificações típicas e insere as variáveis explicitamente em sua modelagem, além de seguir uma regra de operação mais sofisticada. Os resultados, comparados aos da formulação atual do método FP e aos gerados por uma simulação Monte Carlo da operação mensal do reservatório em questão, mostraram-se bastante satisfatórios.

Palavras-chaves: Dinâmica de reservatórios; Otimização estocástica explícita; Equações dos momentos.

Abstract

This work applies explicit stochastic optimization to the operation of the Sobradinho reservoir, located in Northeastern Brazil. The Fletcher-Ponnambalam (FP) method, which has already been successfully applied to several case studies in the literature, is addressed and implemented in an open-source programming environment. As an explicit stochastic optimization problem, the FP method requires the assumption of a probability distribution for the reservoir inflows, in order to solve integrals referring to the equations of the statistical moments of storage, as well as the probabilities of containment (storage contained between the minimum and maximum levels), deficit (below minimum) and spill (above maximum). The main contribution of this research was to incorporate a new operational rule to the method as well as evaporation losses in an explicit way. With this proposal, the optimization model avoids typical simplifications and explicitly incorporates the variables in its modeling, in addition to following a more sophisticated operating rule. The results, compared to the current formulation of the FP method and to those generated by a Monte Carlo simulation of the monthly reservoir operation, proved to be very satisfactory.

Keywords: Reservoir dynamics; Explicit stochastic optimization; Moment equations.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	Representação esquemática de um reservatório com as variáveis utilizadas na sua dinâmica.	19
Figura 2	–	Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de Jarque-Bera para cada mês nos registros de entrada. Quando todos os pontos de dados caem perto da linha, a suposição de normalidade é razoável.	32
Figura 3	–	Probabilidades de contenção, déficit e vertimento encontrados pelo método FP para Sobradinho.	33
Figura 4	–	Momentos estatísticos de armazenamento encontrados pelo método FP para Sobradinho. Os armazenamentos foram adimensionalizados em termos da afluência média de longo período.	34

Lista de tabelas

Tabela 1	– Principais características hidroclimatológicas da região submédia do rio São Francisco.	29
Tabela 2	– Informações sobre o reservatório de Sobradinho.	29
Tabela 3	– Lâminas evaporativas mensais (mm) do reservatório de Sobradinho.	30
Tabela 4	– Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP para Sobradinho.	32
Tabela 5	– Momentos de armazenamento obtidos pelo método FP em comparação com os correspondentes amostrais obtidos por simulação. Os armazenamentos foram adimensionalizados em termos da afluência média de longo período.	34

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Contextualização	12
1.2	Objetivos	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	Dinâmica dos Reservatórios	15
2.2	Modelos de Simulação	16
2.3	Modelos de Otimização	17
2.3.1	Otimização Estocástica Implícita	17
2.3.2	Otimização Estocástica Explícita	17
2.4	Método Fletcher-Ponnambalam	18
3	MATERIAL E MÉTODOS	19
3.1	Dinâmica de um Reservatório	19
3.2	Método FP Considerando Evaporação	21
3.3	Regra de Decisão	22
3.4	Momentos Estatísticos	23
3.5	Formulação do Problema de Otimização	25
3.6	Resolução das Integrais Assumindo Afluências Gaussianas	26
3.7	Momentos Estatísticos Assumindo Afluências Gaussianas	28
3.8	Estudo de Caso	28
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
4.1	Considerações	31
4.2	Operação de Sobradinho	31
	Conclusão	36
	REFERÊNCIAS	37

1 Introdução

1.1 Contextualização

Os reservatórios de armazenamento provenientes da construção de barragens possuem como função básica armazenar água nos períodos abundantes e liberar nos períodos escassos para atender a demanda geral de uma região. Essas estruturas visam garantir o múltiplo uso da água, um recurso vital, que atende às necessidades elementares da sociedade, ao setor produtivo e à recreação, e protegem as regiões de desastres naturais como inundações e deslizamento de terra. Visando todos esses objetivos, surge a situação de usos conflitantes, o que potencializa problemáticas sociais, político-econômicas e ambientais (BILLINGTON; JACKSON, 2017; WADA et al., 2017; AHMAD et al., 2014; PEIXOTO, 2006).

As características peculiares de cada aplicação da água podem ser decisivas para a determinação da melhor abordagem operacional dos reservatórios. A operação eficaz desses sistemas permite que os múltiplos usos sejam integrados eficientemente, sem ocorrerem drásticas variações de fluxos entre os usos consuntivos, quando alteram a disponibilidade, como abastecimento doméstico, industrial, irrigação e os não consuntivos, nos quais não há consumo direto da água, tal como a navegação, recreação e produção de energia (GARCIA; RIDOLFI; BALDASSARRE, 2020; PEIXOTO, 2006).

A situação climática de uma região corrobora com a complexabilidade da gestão hídrica, além de impactar no regime de chuvas e, conseqüentemente, na quantidade de água que chega ao reservatório, denominada de afluência, além de afetar diretamente na evaporação das águas superficiais, relevante nas regiões do semiárido. Os frequentes períodos de estiagem, ocorrências de secas e a elevação dos índices de perdas por evaporação contribuem para o desequilíbrio hídrico, tornando necessária a operação adequada dos reservatórios a fim de conciliar, prevenir ou mitigar conflitos nas escassas reservas de água desta região (CELESTE; SANTOS, 2016; NUNES; GALVAO; RÊGO, 2016; CELESTE; CURI; CURI, 2009).

A operação de reservatórios frequentemente encara dificuldades em quantificar e definir sua melhor política operacional, principalmente por causa da estocasticidade do processo hidrológico das afluências e a complexidade em implementar estratégias a fim de alcançar a eficiência no funcionamento e minimizar os problemas com falta d'água em uma região (BRAVO, 2006). Grill et al. (2019) estimam, na perspectiva global, que as barragens controlam cerca de 50% de todos os rios, no entanto, a Comissão Mundial de Barragens (WCD, 2000) publicou que muitos dos grandes reservatórios estão falhando em produzir o nível de benefícios que justificam economicamente o seu desenvolvimento. Isso ressalta a importância de um gerenciamento hídrico eficaz, sendo para isso muito utilizada a ferramenta de modelagem computacional, capaz de fornecer informações que levam a decisões operacionais coesas diante

de todas as condicionantes presentes nos sistemas (SANTANA, 2019).

A modelagem computacional utiliza do equacionamento matemático e lógico das variáveis envolvidas na gestão hídrica para planejar e determinar um procedimento operacional, calculando a liberação da água que melhor possa atender os objetivos envolvidos. Com grande foco de estudos nas últimas décadas, a otimização matemática é um caminho bastante utilizado para resolver problemas de operação de reservatórios, tratando com variáveis determinísticas e estocásticas, tendo como principais destaques a programação linear, a programação não linear, e a programação dinâmica (BOLOURIYAZDELI et al., 2014; LANNA; LIMA, 2005).

Classicamente, a operação de reservatórios é conduzida por meio de curvas guia, construídas a partir de modelos de simulação para fornecer respostas dos reservatórios a políticas operacionais predefinidas. São modelos iterativos que dependem da decisão do usuário para alcançar a melhor solução, divergindo dos modelos de otimização, onde uma formulação matemática calcula a melhor política viável. Dentre estes últimos modelos, é popular a programação dinâmica, proposta por Bellman (1957) que, aplicada de maneira estocástica e explícita, decompõe o problema original em subproblemas para serem resolvidos sequencialmente em estágios, incorporando a probabilidade das afluências diretamente no problema. Contudo, ao considerar essas entradas aleatórias, o número de variáveis de estado do modelo é demasiadamente discretizado, ocasionando a chamada maldição da dimensionalidade (LABADIE, 2004; MELLO JR; MATOS, 1999).

O método Fletcher-Ponnambalam (FP) (FLETCHER; PONNAMBALAM, 1996) para otimização estocástica explícita de sistemas de armazenamento tem sido aplicado com sucesso em diferentes estudos, inclusive na operação de múltiplos reservatórios (CELESTE; SIQUEIRA; CAI, 2021; MAHOOTCHI; PONNAMBALAM, 2013; MAHOOTCHI; PONNAMBALAM; TIZHOOSH, 2010; FLETCHER; PONNAMBALAM, 2008; ZHANG; PONNAMBALAM, 2006; ZHANG; PONNAMBALAM, 2005). O método FP não requer discretização das variáveis de estado nem simulações Monte Carlo como outros modelos estocásticos. Sendo um problema explícito de otimização estocástica, o método FP propõe uma distribuição de probabilidade para as afluências ao reservatório, a fim de resolver várias integrais referentes às equações de momentos estatísticos para armazenamento, bem como as probabilidades de contenção (armazenamento entre os níveis mínimo e máximo), déficit (abaixo do mínimo) e vertimento (acima do máximo).

1.2 Objetivos

A meta principal desta pesquisa é propor e implementar inovações à estratégia de otimização estocástica explícita FP e aplicá-la na derivação de regras operacionais mensais de reservatórios. Os objetivos específicos são os listados abaixo:

- a) Incorporar nova regra operacional ao método FP;
- b) Incorporar perdas evaporativas de forma explícita ao método FP;

- c) Usar o método FP para gerar regras de alocação que promovam a operação sustentável de reservatórios com o objetivo de mitigar secas hidrológicas;
- d) Propor refinamentos na versão atual que possam melhorar a eficiência do modelo, implementando-o em ambiente de programação de código aberto;
- e) Avaliar o desempenho da nova implementação do método FP em um reservatório com as características de Sobradinho.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Dinâmica dos Reservatórios

Os reservatórios de acumulação superficial são obras de infraestrutura utilizadas para garantir a segurança hídrica de uma região, com função de potencializar a disponibilidade da água superficial, sem deixar de garantir vazões regularizadas para os cursos dos rios ao armazenar o recurso nos períodos úmidos e ofertá-lo durante todo tempo, sobretudo nos períodos de estiagem (ANA, 2021).

Os reservatórios são construções capazes de proporcionar desenvolvimento social e econômico, saúde e melhores condições de vida, quando a água chega em seu objetivo na quantidade e qualidade adequada para seu uso, além de garantirem a sustentabilidade econômica dos seus projetos (RIMA, 2004).

O funcionamento de um reservatório é determinado por um complexo sistema operacional que, geralmente, equaciona as entradas e saídas levando em conta fatores relevantes a essa análise tais como as atividades desenvolvidas, os atores, os aspectos socioeconômicos e ambientais, as características hidráulicas e hidrológicas, e os aspectos climáticos (ZOMORODIAN et al., 2017).

A crescente demanda hídrica em diferentes setores torna o recurso natural uma fonte de conflito. Como os reservatórios, geralmente em regiões do semiárido, são a principal fonte de água, sua operação deve alocar adequadamente o recurso de modo a satisfazer os requisitos de demanda, custos, armazenamento e proteção da região, como inundações e deslizamento de terra (GOMES, 2020).

O maior parte do consumo de água se concentra na agricultura, na indústria e no uso doméstico. Com o desenvolvimento das regiões, cresce a necessidade de alimentos, incentivando a agricultura e a produção de energia, o que coloca grande pressão sobre os recursos hídricos, visto a necessidade de proteção e de se garantir uma vazão sustentável para os rios barrados (SILVA et al., 2022).

As vazões naturais dos cursos d'água são as principais entradas (afluências) aos reservatórios e, tendo relação intrínseca com a precipitação, são fortemente afetadas por fatores climáticos como os fluxos de massa de ar, o relevo, a exposição aos ventos, etc. Assim, a irregularidade das afluências, por conta das chuvas escassas em períodos variáveis e curtos, ordenados pela dinâmica atmosférica, afeta o balanço hídrico (LINO; COIADO; FRANCATO, 2020; ARAÚJO, 2011).

As vazões afluentes possuem incertezas em sua natureza, principalmente quando valores médios históricos não são suficientes para representar adequadamente as condições hidrológicas altamente variáveis ou quando as afluências não podem ser previstas de forma confiável por

um período relativamente longo (CELESTE, 2011).

Condições climáticas afetam diretamente na disponibilidade hídrica no Brasil, alterando a capacidade de fornecimento adequado dos recursos hídricos. As altas temperaturas potencializam a evaporação da superfície livre da água, o que é uma problemática presente no Nordeste brasileiro, tendo em vista seu clima semiárido, por apresentar elevadas taxas de perdas por evaporação, o que destaca a vulnerabilidade da região (SOUZA et al., 2019; ARAÚJO, 2011; MOURA et al., 2007).

Em busca de atender os benefícios sociais, ambientais e econômicos almejados do gerenciamento, com o equilíbrio nos conflitos existentes, é necessário otimizar o uso das reservas por meio de modelos computacionais capazes de incluir as variáveis mais complexas presentes no sistema seguindo uma política de operação, descrita como um procedimento que a cada estágio de tempo toma uma decisão factível a partir de um estado (armazenamento) do sistema (RAMOS; ZAMBELLI; SOARES, 2019).

2.2 Modelos de Simulação

Os modelos de simulação permitem a consideração de todas as características de um sistema que são representadas matematicamente. Esses modelos analisam diversos cenários distintos para um determinado sistema, encontrando as alocações e armazenamentos para cada cenário testado segundo a regra operacional utilizada. Dessa forma, representa detalhadamente e realisticamente o sistema, o que permite ao tomador de decisões examinar seu desempenho, modelando as várias entradas e as possíveis regras de decisão até a percepção de resultados próximos do ótimo (SANTANA, 2019; VIEIRA, 2017).

Na operação de reservatórios, os modelos de simulação equacionam o balanço hídrico das aflúências, liberações e variações no armazenamento, além de incluir considerações econômicas e possíveis prejuízos de desastres naturais entre outras características. As liberações são determinadas com base em políticas operacionais predefinidas (VIEIRA, 2017; CELESTE; SUZUKI; SANTOS, 2005).

A simulação é uma ótima alternativa para avaliar os conflitos causados pelo uso múltiplo na gestão de sistemas de recursos hídricos, capaz de examinar as consequências dos diversos cenários gerados. Os resultados fornecidos permitem avaliar o atendimento dos objetivos com índices estatísticos e funções de probabilidade (PEIXOTO, 2006).

A política de operação de reservatórios mais simples e comumente utilizada é a política de operação padrão (SOP: *standard operating policy*), que depende apenas da disponibilidade hídrica atual. Visando atender a demanda solicitada imediatamente, a SOP libera a demanda requerida e armazena o restante quando há disponibilidade. Além disso, fornece o recurso disponível quando este for inferior a demanda. Essa abordagem maximiza a confiabilidade do sistema em atender a demanda, mas não considera a escassez potencial nos períodos posteriores (GARCIA; RIDOLFI; BALDASSARRE, 2020; TAN et al., 2017; CELESTE; SANTANA; SANTOS, 2016).

2.3 Modelos de Otimização

A aplicação da otimização para resolver problemas de operação é um assunto bastante estudado. A consideração a respeito das incertezas presentes no processo hidrológico determina a classificação dos modelos, haja vista que modelos determinísticos assumem que esse comportamento é conhecido, ao contrário dos modelos estocásticos que incorporam essas incertezas. Assim, o tipo de técnica utilizada e a regra operacional são determinadas com intuito de modelar as características do sistema da melhor maneira em busca de uma operação sustentável (SANTANA, 2019; AHMAD et al., 2014; CELESTE; BILLIB, 2009).

Com relação as técnicas de otimização, a programação linear se destaca por sua versatilidade, ao representar a função objetivo e suas restrições em forma linear, sendo aplicada em sistemas de grande escala e convergindo para ótimos globais. Porém, como na maioria dos casos reais as funções envolvidas são não lineares, a programação não linear precisa ser aplicada. A não linearidade do problema juntamente a estocasticidade podem ser lidadas apropriadamente pela programação dinâmica (AHMAD et al., 2014; RANI; MOREIRA, 2010).

Nos modelos de otimização, a abordagem estocástica considera as incertezas das vazões afluentes ao reservatório, visto que os valores médios esperados não são apropriados para representar condições hidrológicas altamente variáveis ao passo que as afluições não podem ser previstas com acurácia para um período relativamente longo. A otimização estocástica pode ser classificada em otimização estocástica implícita (OEI) e otimização estocástica explícita (OEE) (CELESTE, 2011).

2.3.1 Otimização Estocástica Implícita

A otimização estocástica implícita, também conhecida por otimização Monte Carlo, emprega um modelo de otimização determinística a fim de encontrar as alocações ótimas do reservatório em consideração para vários cenários distintos de vazões afluentes, obtidas de registros históricos ou geradas sinteticamente por modelos estatísticos. A OEI é capaz de incorporar a estocasticidade das afluições e de produzir curvas guia, que fornecem respostas do reservatório a políticas operacionais predefinidas (SANTANA, 2019; CELESTE, 2011; CELESTE; BILLIB, 2009).

2.3.2 Otimização Estocástica Explícita

A otimização estocástica explícita incorpora diretamente no problema de otimização as incertezas hidrológicas, através de modelos probabilísticos de vazão. O método que mais tem visibilidade é a programação dinâmica estocástica (PDE), sendo a mais utilizada por conseguir preservar uma estrutura realista do problema em sua formulação, incorporando as características estocásticas e a não linearidade presentes nos sistemas de gestão hídrica (GIULIANI et al., 2021; CELESTE, 2011; PEIXOTO, 2006).

A PDE foi formulada por Bellman (1957) e explora de forma efetiva a estrutura sequencial de decisão dos problemas de otimização de operação de reservatórios (LABADIE, 2004). Sua abordagem decompõe o problema original em subproblemas que são resolvidos sequencialmente por estágios (BRAVO et al., 2005).

No entanto, a PDE possui alguns fatores limitantes que Giuliani et al. (2021) sintetizaram, principalmente a maldição da dimensionalidade, que limita a dimensão do sistema a dois ou três reservatórios devido ao crescimento exponencial do custo computacional com o número de variáveis de estado.

2.4 Método Fletcher-Ponnambalam

Fletcher e Ponnambalam (1996) formularam um método de otimização estocástica explícita de operação de múltiplos reservatórios, considerando as incertezas das variáveis de entrada (afluências). O modelo formula o primeiro e segundo momentos estatísticos do estado de armazenamento em termos das probabilidades das variáveis de entrada.

O método FP correlaciona a equação de balanço hídrico do reservatório com os limites de armazenamento por meio de funções indicadoras. Utilizando a expansão da série de Taylor de primeira e segunda ordem os momentos do armazenamento são equacionados e considerados como restrições de igualdade. Com isso, as probabilidades de vertimento e de déficit podem ser incorporadas ao modelo sem a adição de novas variáveis (MAHOOTCHI; PONNAMBALAM; TIZHOOSH, 2010).

O método foi aplicado com sucesso em vários estudos na literatura. Fletcher e Ponnambalam (1998) consideraram a natureza estocástica das afluências, discretizando-as para manipular múltiplas variáveis de estado. Zhang e Ponnambalam (2005) estenderam esse tipo de modelagem para operações de curto e médio prazo, com a estocasticidade do fluxos de entrada e saída considerada. Fletcher e Ponnambalam (2008) refinaram seu modelo para políticas de liberação aleatórias, onde a alocação é uma variável aleatória dependente do armazenamento do período anterior. Mahootchi, Ponnambalam e Tizhoosh (2010) aplicaram o método em sistemas com vários reservatórios com as afluências modeladas pela distribuição de Kumaraswamy (1980).

A versão atual do método requer a suposição de uma distribuição de probabilidade para as entradas do reservatório, a fim de resolver várias integrais referentes às equações estatísticas dos momentos de armazenamento, bem como as probabilidades de contenção, déficit e vertimento. Celeste, Siqueira e Cai (2021) propuseram uma maneira alternativa de aproximar a solução de tais integrais usando a amostra de registros históricos de vazão sem envolver a consideração de qualquer distribuição e que leva a expressões muito mais curtas, bem como a menos encargos computacionais.

3 Material e Métodos

3.1 Dinâmica de um Reservatório

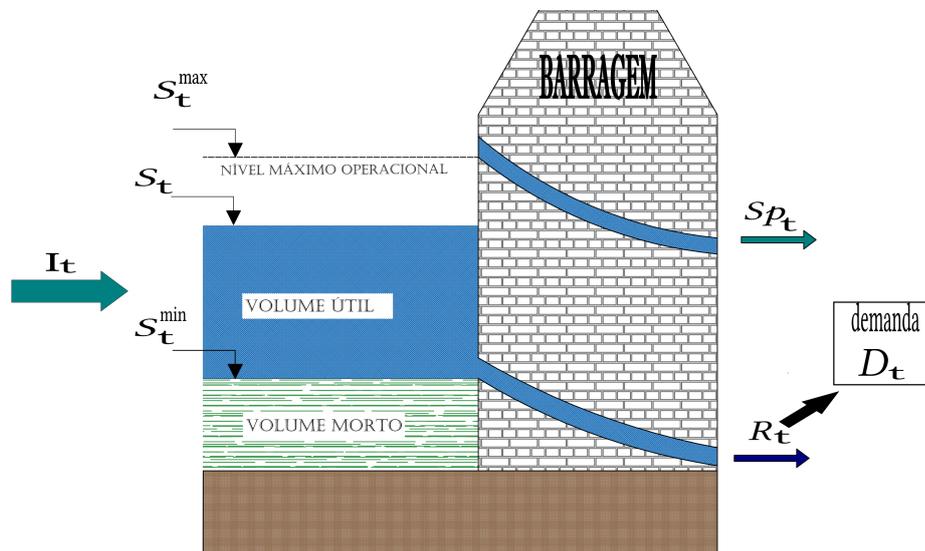
Um reservatório de abastecimento acumula água nos períodos de cheias a fim de regular as vazões e atender ao máximo as demandas durante as estações chuvosa e seca. Na abordagem atual do método FP o balanço de massa do sistema pode ser escrito como segue

$$S_t = S_{t-1} + I_t - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.1)$$

onde S_t e S_{t-1} representam o armazenamento do reservatório no (final do) período t e $t - 1$, respectivamente; I_t é o saldo de afluência natural ao reservatório no tempo t ; U_t é a alocação total (proposta) do reservatório no tempo t ; e Sp_t e δ_t são, respectivamente, vertimento e déficit, definidos à seguir.

De acordo com a Figura 1, assume-se o armazenamento S_t tendo limite inferior (S_t^{\min}) e superior (S_t^{\max}) para cada estação do ano $\tau = t \pmod{T}$ em que T é o número de estações em um ano (ou seja, uma operação mensal implica em $T = 12$). Seja $\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - U_t$ o *volume de armazenamento projetado*, i.e., o armazenamento no final do tempo t se a proposta U_t for liberada e o armazenamento final permanecer (ou estiver contido) dentro dos limites, i.e., $S_t^{\min} \leq \hat{S}_t \leq S_t^{\max}$ (neste caso, $S_t = \hat{S}_t$). Quando o armazenamento projetado não for contido, haverá (mas não simultaneamente) vertimento (Sp_t) ou déficit (δ_t). Se a alocação de U_t fizer com que o armazenamento projetado viole o limite superior (i.e., $\hat{S}_t > S_t^{\max}$), então o excesso de água deve ser vertido do reservatório. Neste caso, a variável de vertimento Sp_t é

Figura 1 – Representação esquemática de um reservatório com as variáveis utilizadas na sua dinâmica.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

acionada de modo que o armazenamento final se torne $S_t = S_t^{\max}$; a quantidade vertida será de $Sp_t = \hat{S}_t - S_t^{\max}$. Alternativamente, quando $\hat{S}_t < S_t^{\min}$ então U_t não pode ser totalmente atendida e haverá um déficit de liberação δ_t , situação que requer uma liberação alternativa $R_t < U_t$ para que o armazenamento final se torne pelo menos S_t^{\min} . Neste caso, o valor do déficit será $\delta_t = S_t^{\min} - \hat{S}_t$ e a liberação real será $R_t = U_t - \delta_t$. Observe-se que ambos Sp_t e δ_t são quantidades não negativas; tornam-se maiores do que zero somente se o armazenamento projetado violar os limites de armazenamento

A equação (3.1) alternativamente pode ser expressa como

$$\begin{aligned} S_t &= \underbrace{S_{t-1} + I_t}_{\text{disponibilidade}} - \underbrace{\left(\overset{\text{proposta}}{U_t} + \overset{\text{excesso}}{Sp_t} - \overset{\text{déficit}}{\delta_t} \right)}_{\text{liberação total real, } r_t} \\ &= S_{t-1} + I_t - r_t \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou como

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} + I_t - \underbrace{[(U_t - \delta_t) + Sp_t]}_{\substack{\text{liberação} \\ \text{real, } R_t}} \\ &= S_{t-1} + I_t - R_t - Sp_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que a liberação total real do sistema é $r_t = U_t + Sp_t - \delta_t$ (ver equação (3.2)), i.e., a liberação proposta U_t contabilizando o déficit ou o vertimento. Como mencionado anteriormente, quando há um déficit, U_t não pode ser totalmente liberada e a liberação real se torna $R_t = U_t - \delta_t$ (ver equação (3.3)).

Resumidamente, a liberação total real é $r_t = R_t + Sp_t = (U_t - \delta_t) + Sp_t$. Assim, para os três casos possíveis, seus valores podem ser:

$$r_t = \begin{cases} (U_t - 0) + 0 = U_t & \text{se houver contenção} \\ (U_t - \delta_t) + 0 = U_t - \delta_t = R_t & \text{se houver déficit} \\ (U_t - 0) + Sp_t = U_t + Sp_t & \text{se houver vertimento} \end{cases} \quad (3.4)$$

Nesta pesquisa, em busca de atender a todas as características reais, será considerado no equacionamento do balanço hídrico o volume evaporado no tempo t (E_t), que pode ser estimado pelo produto da lâmina evaporativa mensal ϵ_t pela área superficial média do reservatório durante o tempo t

$$E_t = \epsilon_t \left(\frac{A_{t-1} + A_t}{2} \right) \quad (3.5)$$

onde A_t é a área da superfície líquida (lago) no fim do período t .

Curvas área-volume de reservatórios são geralmente funções côncavas que podem ser linearizadas da forma

$$A_t = a_0 + m (S_t - S_{\text{morto}}) \quad (3.6)$$

em que a_0 é a área definida pela reta para o volume morto S_{morto} e m é a declividade da reta.

Combinando as equações tem-se:

$$E_t = \epsilon_t \left[\frac{a_0 + m(S_{t-1} - S_{\text{morto}}) + a_0 + m(S_t - S_{\text{morto}})}{2} \right] \quad (3.7)$$

$$E_t = \epsilon_t \left[\frac{2a_0 + m(S_{t-1} + S_t) - 2mS_{\text{morto}}}{2} \right] \quad (3.8)$$

$$E_t = \epsilon_t (a_0 - mS_{\text{morto}}) + m\epsilon_t \left(\frac{S_{t-1} + S_t}{2} \right) \quad (3.9)$$

$$E_t = e_{0,t} + e_t \left(\frac{S_{t-1} + S_t}{2} \right) \quad (3.10)$$

sendo $e_{0,t} = \epsilon_t (a_0 - mS_{\text{morto}})$ a perda fixa por evaporação e $e_t = m\epsilon_t$ a perda evaporativa por unidade de volume. Desse modo, com a equação do balanço hídrico sendo escrita da seguinte forma

$$S_t = S_{t-1} + I_t - E_t - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.11)$$

e substituindo E_t da equação (3.10) fornece

$$\left(1 + \frac{e_t}{2}\right) S_t = \left(1 - \frac{e_t}{2}\right) S_{t-1} + I_t - e_{0,t} - U_t - Sp_t + \delta_t \quad (3.12)$$

Portanto, o armazenamento projetado ficará da seguinte maneira

$$\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - U_t - E_t \quad (3.13)$$

$$\hat{S}_t = S_{t-1} + I_t - U_t - e_{0,t} - e_t \left(\frac{S_{t-1} + \hat{S}_t}{2} \right) \quad (3.14)$$

$$\left(1 + \frac{e_t}{2}\right) \hat{S}_t = \left(1 - \frac{e_t}{2}\right) S_{t-1} + I_t - U_t - e_{0,t} \quad (3.15)$$

$$\hat{S}_t = \left(\frac{1 - \frac{e_t}{2}}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) S_{t-1} + \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) I_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) U_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) e_{0,t} \quad (3.16)$$

3.2 Método FP Considerando Evaporação

No método FP, a dinâmica de um sistema de reservatórios levando em consideração todas as situações acima¹ é escrita como

$$\begin{aligned} S_t = & (S_{t-1} + I_t - U_t - E_t) \cdot \mathbb{1}_{[S_t^{\min}, S_t^{\max}]} \left(\hat{S}_t \right) \\ & + S_t^{\min} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_t^{\min}]} \left(\hat{S}_t \right) \\ & + S_t^{\max} \cdot \mathbb{1}_{[S_t^{\max}, +\infty)} \left(\hat{S}_t \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

¹ Considerando, agora, a evaporação de forma explícita, diferentemente de formulações correntes do método.

em que a notação $\mathbb{1}_{[\cdot]}(\hat{S}_t)$ representa a função indicadora (ou característica), com as seguintes propriedades:

$$\mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } S_\tau^{\min} \leq \hat{S}_t \leq S_\tau^{\max} \text{ (contenção)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } \hat{S}_t < S_\tau^{\min} \text{ (déficit)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) := \begin{cases} 1 & \text{para } \hat{S}_t > S_\tau^{\max} \text{ (vertimento)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.20)$$

Nesta pesquisa, a evaporação é incorporada explicitamente no método FP. Dessa forma, a equação (3.17) é reescrita modificando-se o termo entre parênteses correspondente ao \hat{S}_t para sua versão considerando a evaporação descrita na equação (3.16). Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} S_t &= \left[\left(\frac{1 - \frac{e_t}{2}}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) S_{t-1} + \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) I_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) U_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) e_{0,t} \right] \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]}(\hat{S}_t) \\ &\quad + S_\tau^{\min} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]}(\hat{S}_t) \\ &\quad + S_\tau^{\max} \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)}(\hat{S}_t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 Regra de Decisão

Considere-se que a política de liberação do reservatório seja guiada por uma regra de decisão linear do tipo SQ (LDR: *linear decision rule*)(REVELLE; JOERES; KIRBY, 1969) da seguinte forma (BHASKAR; WHITLATCH, 1987):

$$U_t = S_{t-1} + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau \quad (3.22)$$

na qual α_τ é um parâmetro ($0 \leq \alpha_\tau < 1$) e β_τ é uma constante de decisão para a estação τ . Se $\alpha_\tau = 0$, a política de liberação converte-se em uma LDR do tipo S da forma $U_t = S_{t-1} - \beta_\tau$ usada no método FP original (FLETCHER; PONNAMBALAM, 2008). Incorporando a perda evaporativa, vista na seção anterior, a LDR em (3.22) torna-se

$$U_t = \left(1 - \frac{e_t}{2} \right) S_{t-1} + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau - e_{0,t} \quad (3.23)$$

Sob a LDR da equação (3.23) o volume de armazenamento projetado é

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= \left(\frac{1 - \frac{e_t}{2}}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) S_{t-1} + \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) I_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) U_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) e_{0,t} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{e_t}{2}}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) S + \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) I_t - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \left[\left(1 - \frac{e_t}{2} \right) S + \alpha_\tau I_t - \beta_\tau - e_{0,t} \right] - \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) e_{0,t} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_t + \beta_\tau] \end{aligned} \quad (3.24)$$

e substituindo em (3.21) para eliminar o termo contendo S_{t-1} resulta em

$$\begin{aligned}
S_t &= \left\{ \left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_t + \beta_\tau] \right\} \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_t) \\
&\quad + S_\tau^{\min} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]} (\hat{S}_t) \\
&\quad + S_\tau^{\max} \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_t)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.4 Momentos Estatísticos

Tomando-se a esperança (ou seja, o primeiro momento estatístico em relação a origem) do armazenamento dado pela equação de balanço de massa (3.25) para qualquer tempo τ resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\
&\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\
&\quad + S_\tau^{\min} \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\
&\quad + S_\tau^{\max} \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_\tau) \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

na qual $\mathbb{E}(\cdot)$ denota o operador esperança. O valor esperado da função indicadora de uma variável aleatória em qualquer região é a probabilidade dessa variável aleatória ocorrer dentro dessa mesma região. Assim, a esperança no segundo termo do lado direito da equação (3.26) representa a probabilidade de contenção $\mathbb{P}_\tau^{\text{con}}$ (ou seja, armazenamento projetado dentro dos limites de armazenamento) e pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} \\
&= \Pr \left(S_\tau^{\min} \leq \hat{S}_t \leq S_\tau^{\max} \right) \\
&= \Pr \left(S_\tau^{\min} \leq \left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] \leq S_\tau^{\max} \right) \\
&= \Pr \left(\frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \leq I_t \leq \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right), \text{ para } \alpha_\tau < 1 \\
&= \int_{\text{LB}}^{\text{UB}} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau
\end{aligned} \tag{3.27}$$

em que $\Pr(\cdot)$ denota probabilidade; $\text{LB} = \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau}$ e $\text{UB} = \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau}$; e $f_{I_\tau}(I_\tau)$ é a função densidade de probabilidade (PDF: *probability density function*) das afluências I_τ no período τ . Da mesma forma, a esperança no terceiro termo do lado direito da equação (3.26) representa a probabilidade de déficit $\mathbb{P}_\tau^{\text{def}}$ (ou seja, armazenamento projetado abaixo do mínimo) e pode ser

calculada como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]} (\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} \\
&= \Pr \left(\hat{S}_\tau < S_\tau^{\min} \right) \\
&= \Pr \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] < S_\tau^{\min} \right) \\
&= \Pr \left(I_\tau < \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right), \text{ para } \alpha_\tau < 1 \\
&= \int_{-\infty}^{\text{LB}} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Finalmente, a esperança no quarto termo do lado direito da equação (3.26) representa a probabilidade de vertimento $\mathbb{P}_\tau^{\text{SP}}$ (i.e., armazenamento projetado acima do máximo) e pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_\tau) \right) &= \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \\
&= \Pr \left(\hat{S}_\tau > S_\tau^{\max} \right) \\
&= \Pr \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] > S_\tau^{\max} \right) \\
&= \Pr \left(I_\tau > \frac{(1 + \frac{e_\tau}{2}) S_\tau^{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \right), \text{ for } \alpha_\tau < 1 \\
&= \int_{\text{UB}}^{+\infty} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau
\end{aligned} \tag{3.29}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.26) contém a esperança de uma função $g(I_\tau) = I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau)$ da variável aleatória I_τ . Dada a propriedade de esperança $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ (onde X é uma variável aleatória e $f(x)$ é sua PDF), então

$$\mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right] f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.30}$$

Esta integral pode ser separada em três partes correspondentes ao intervalos $(-\infty, \text{LB})$, $[\text{LB}, \text{UB}]$ e $(\text{UB}, +\infty)$ e ser expressa apenas para os limites onde a função indicadora é unitária (segundo intervalo) como

$$\mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) = \int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \tag{3.31}$$

que finalmente resulta na equação para o primeiro momento do armazenamento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_\tau) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\
&\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + S_\tau^{\min} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + S_\tau^{\max} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Em qualquer tempo, apenas uma das funções indicadoras pode assumir o valor de 1. Assim, se elevarmos ao quadrado a equação de balanço de massa (3.25), os termos que contêm os produtos de diferentes funções indicadoras desaparecerão, resultando em

$$\begin{aligned} S_t^2 &= \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) [(1 - \alpha_t) I_t + \beta_t] \right]^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_t^{\min}, S_t^{\max}]} (\hat{S}_t) \\ &\quad + (S_t^{\min})^2 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, S_t^{\min}]} (\hat{S}_t) \\ &\quad + (S_t^{\max})^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_t^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde as funções indicadoras não estão elevadas ao quadrado, uma vez que produzem apenas resultados binários. Calculando a esperança (equivalente ao cálculo do segundo momento de armazenamento) para o período τ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \mathbb{E} \left(\left[\left(\frac{1}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right) [(1 - \alpha_\tau) I_\tau + \beta_\tau] \right]^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_\tau^{\min})^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(-\infty, S_\tau^{\min}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_\tau^{\max})^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\max}, +\infty)} (\hat{S}_\tau) \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \mathbb{E} \left(\left[\left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 I_\tau^2 + 2 \frac{(1 - \alpha_\tau)}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} I_\tau \beta_\tau + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \right] \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_\tau^{\min})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + (S_\tau^{\max})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau^2 \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + 2 \frac{(1 - \alpha_\tau)}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} \beta_\tau \cdot \mathbb{E} \left(I_\tau \cdot \mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[S_\tau^{\min}, S_\tau^{\max}]} (\hat{S}_\tau) \right) \\ &\quad + (S_\tau^{\min})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + (S_\tau^{\max})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

finalmente resulta na equação para o segundo momento do armazenamento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + 2 \frac{(1 - \alpha_\tau)}{(1 + \frac{e_\tau}{2})^2} \beta_\tau \cdot \int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_\tau}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + (S_\tau^{\min})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + (S_\tau^{\max})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.5 Formulação do Problema de Otimização

Nas versões atuais do método FP, um problema de otimização mensal da operação do reservatório visando minimizar a soma dos desvios quadráticos entre as liberações e as demandas é

formulado como

$$\text{minimize } \mathbb{Z}_0 = \mathbb{E} \left(\sum_{\tau=1}^T (U_\tau - D_\tau)^2 \right) \approx \sum_{\tau=1}^T [\mathbb{E} (U_\tau) - D_\tau]^2 \quad (3.38)$$

em que D_τ é a demanda no tempo τ e o símbolo de aproximação é devido à expansão em série de Taylor de ordem zero do primeiro termo (FLETCHER; PONNAMBALAM, 1998). A função objetivo pode ser expandida para

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_0 = & \sum_{\tau=1}^T \left[\left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right)^2 \mathbb{E} (S_{\tau-1})^2 + 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) \alpha_\tau \bar{I}_\tau \mathbb{E} (S_{\tau-1}) \right. \\ & - 2 \left(1 - \frac{e_\tau}{2}\right) (\beta_\tau + e_{0,\tau} + D_\tau) \mathbb{E} (S_{\tau-1}) + \alpha_\tau^2 \bar{I}_\tau^2 \\ & \left. - 2\alpha_\tau (\beta_\tau + e_{0,\tau} + D_\tau) \bar{I}_\tau + (\beta_\tau + e_{0,\tau} + D_\tau)^2 \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

Assim como $\mathbb{E} (S_\tau)$, a função objetivo \mathbb{Z}_0 é dependente não linearmente de α_τ e β_τ , estas sendo, portanto, as variáveis de decisão do problema. Uma vez encontrados os valores ótimos dos parâmetros α_τ e β_τ , os valores correspondentes do primeiro e segundo momentos de armazenamento, bem como as probabilidades de contenção, déficit e vertimento para o armazenamento projetado \hat{S}_t podem ser calculados pelas expressões mostradas anteriormente.

No método FP, basta resolver o problema de otimização irrestrita altamente não linear dado pela função objetivo (3.38). No entanto, para encontrar todas as probabilidades e momentos de armazenamento, integrais do tipo (I): $\int_{\text{LB}}^{\text{UB}} f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau$, (II): $\int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau$, e (III): $\int_{\text{LB}}^{\text{UB}} I_\tau^2 f_{I_\tau}(I_\tau) dI_\tau$ precisam ser resolvidas. Isso é alcançado atualmente assumindo uma função de densidade de probabilidade para I_τ e usando-a para resolver analiticamente as integrais. Frequentemente, afliências gaussianas são assumidas e expressões analíticas podem ser derivadas.

3.6 Resolução das Integrais Assumindo Afluências Gaussianas

Nesta modelagem, para resolver o problema de otimização irrestrita altamente não linear que foi formulado, surgem integrais com certo grau de complexidade que precisam ser solucionadas a fim de encontrar as probabilidade e os momentos. Para resolver essas integrais analiticamente, é assumido que função densidade de probabilidade (PDF) da variável aleatória I_τ segue uma distribuição gaussiana da forma $\mathcal{N}(\bar{I}_\tau, \text{Var}(I_\tau))$, sendo escrita como segue

$$f_{I_\tau}(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}(I_\tau)}} \exp \left(- \left(\frac{I - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\text{Var}(I_\tau)}} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}(I_\tau)}} \exp(-Z_I^2) \quad (3.40)$$

onde $z_I = \frac{I - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\text{Var}(I_\tau)}}$ é a versão padronizada (z -score) de I . A função de distribuição acumulada correspondente (CDF: *cumulative distribution function*) de I_τ é

$$F_{I_\tau}(I) = \Pr(I_\tau \leq I) = \int_{-\infty}^I f_{I_\tau}(u) du = \frac{1}{2} [1 + \text{erf}(z_I)] \quad (3.41)$$

na qual $\text{erf}(\cdot)$ é a função erro formulada como

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (3.42)$$

Com isso, as soluções para todas as integrais que aparecem nas expressões dos momentos brutos de armazenamento, bem como nas expressões para probabilidades podem ser encontradas analiticamente. Supondo limites de integração genéricos inferiores L e superiores U :

$$\begin{aligned} \int_L^U f_{I_\tau}(I) dI_\tau &= F_{I_\tau}(U) - F_{I_\tau}(L) \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{erf}(z_U) - \text{erf}(z_L) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \int_L^U I f_{I_\tau}(I) dI_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}(I_\tau)}} \int_L^U I \exp(-Z_I^2) dI_\tau \\ &= \frac{1}{2} \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_U) - \text{erf}(z_L) \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_U^2) - \exp(-z_L^2) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \int_L^U I^2 f_{I_\tau}(I) dI_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}(I_\tau)}} \int_L^U I^2 \exp(-Z_I^2) dI_\tau \\ &= \frac{1}{2} (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_U) - \text{erf}(z_L) \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + U) \exp(-z_U^2) \right. \\ &\quad \left. - (\bar{I}_\tau + L) \exp(-z_L^2) \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Os limites de integração L e U podem ser alterados apropriadamente para derivar as expressões finais para probabilidades e momentos. Estas são exibidas abaixo, usando LB e UB definidos nas seções anteriores:

- z -scores de LB e UB :

$$z_{LB} = \frac{LB - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\text{Var}(I_\tau)}}, \text{ para } LB = \frac{(1 + \frac{\epsilon_t}{2}) S_\tau^{\min} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \quad (3.46)$$

$$z_{UB} = \frac{UB - \bar{I}_\tau}{\sqrt{2\text{Var}(I_\tau)}}, \text{ para } UB = \frac{(1 + \frac{\epsilon_t}{2}) S_\tau^{\max} - \beta_\tau}{1 - \alpha_\tau} \quad (3.47)$$

- Probabilidade de contenção:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{con}} = \frac{1}{2} \left[\text{erf}(z_{UB}) - \text{erf}(z_{LB}) \right] \quad (3.48)$$

- Probabilidade de déficit:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{def}} = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}(z_{\text{LB}}) \right] \quad (3.49)$$

- Probabilidade de vertimento:

$$\mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf}(z_{\text{UB}}) \right] \quad (3.50)$$

3.7 Momentos Estatísticos Assumindo Afluências Gaussianas

Substituindo as soluções das integrais encontradas em (3.44) e (3.45) nas equações dos momentos de armazenamento, são encontradas as seguintes expressões finais para o primeiro e segundo momento:

- Primeiro momento de armazenamento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{UB}}) - \text{erf}(z_{\text{LB}}) \right] \\ &\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}}^2) - \exp(-z_{\text{LB}}^2) \right] \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right) \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + S_\tau^{\text{min}} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + S_\tau^{\text{max}} \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

- Segundo momento de armazenamento:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\tau^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right)^2 (\bar{I}_\tau^2 + \text{Var}(I_\tau)) \left[\text{erf}(z_{\text{UB}}) - \text{erf}(z_{\text{LB}}) \right] \\ &\quad - \left(\frac{1 - \alpha_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right)^2 \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[(\bar{I}_\tau + z_{\text{UB}}) \exp(-z_{\text{UB}}^2) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - (\bar{I}_\tau + z_{\text{LB}}) \exp(-z_{\text{LB}}^2) \right] \\ &\quad + \frac{1 - \alpha_\tau}{\left(1 + \frac{e_t}{2}\right)^2} \beta_\tau \bar{I}_\tau \left[\text{erf}(z_{\text{UB}}) - \text{erf}(z_{\text{LB}}) \right] \\ &\quad - 2 \frac{1 - \alpha_\tau}{\left(1 + \frac{e_t}{2}\right)^2} \beta_\tau \sqrt{\frac{\text{Var}(I_\tau)}{2\pi}} \left[\exp(-z_{\text{UB}}^2) - \exp(-z_{\text{LB}}^2) \right] \\ &\quad + \left(\frac{\beta_\tau}{1 + \frac{e_t}{2}} \right)^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{con}} + (S_\tau^{\text{min}})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{def}} + (S_\tau^{\text{max}})^2 \cdot \mathbb{P}_\tau^{\text{SP}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.8 Estudo de Caso

O objeto de estudo escolhido para aplicação da metodologia abordada é o reservatório de Sobradinho, inserido na bacia do rio São Francisco. A bacia hidrográfica do rio São Francisco possui uma área de 619.543,94 km² contemplando 505 municípios, dentre os quais 409 inseridos totalmente e 96 parcialmente (CODEVASF, 2019).

Tabela 1 – Principais características hidroclimatológicas da região submédia do rio São Francisco.

Característica	Região Submédia
Clima predominante	Semiárido e Árido
Precipitação média anual (mm)	350 a 800 (693)
Temperatura média (°C)	27
Insolação média anual (h)	2.800
Evapotranspiração média anual (mm)	1.550(*)
Trecho principal (km)	550
Vazão média anual máxima (m ³ /s)	4660
Vazão média anual mínima (m ³ /s)	1.507

* Na parte mais seca da bacia e do semiárido brasileiro, esse valor atinge o extremo de 2.700 mm/ano.

Fonte: MMA (2006).

Tabela 2 – Informações sobre o reservatório de Sobradinho.

Característica	Dados
Área de reservatório na cota 392,50 m	4.214 km ²
Volume total do reservatório	34.116 hm ³
Volume morto do reservatório	5.447 hm ³
Volume útil do reservatório	28.669 hm ³
Vazão regularizada	2.060 m ³ /s km
Nível máximo <i>maximorum</i>	393,50 m
Nível máximo operativo normal	392,50 m
Nível mínimo operativo normal	380,50 m
Área de drenagem até o reservatório	498.968 km ²

Fonte: Chesf (2017).

O reservatório de Sobradinho foi instalado na zona submédia da bacia do rio São Francisco, a 1.912 km de sua nascente no estado de Minas Gerais e a 748 km da sua foz entre Sergipe e Alagoas (CORREIA; DIAS; ARAGAO, 2006). As características fisiográficas dessa região estão presentes na Tabela 1.

A construção da barragem iniciou-se em 1973. Teve sua função inicial a regularização de vazão e em seguida a geração de energia elétrica, que acabou sendo invertida ao longo do tempo. Constitui-se em uma barragem de terra zoneada com altura máxima de 41 m e comprimento total de 12,5 km, vertedouro de superfície e descarregador de fundo para controle de cheia, tomadas de água com capacidade até de 25 m³/s (CHESF, 2017). As informações sobre áreas, volumes, vazão regularizada e níveis do reservatório estão apresentados na Tabela 2.

A região apresenta desde a topografia irregular até o clima semiárido com suas peculiaridades. A precipitação ocorre significativamente entre os meses de novembro e abril, com valores máximos entre 800 e 1.000 mm e mínimos abaixo de 400 mm. A caatinga caracteriza a região com arbustos, árvores e cactos. O lago formou um espelho d'água de 4.214 km²,

Tabela 3 – Lâminas evaporativas mensais (mm) do reservatório de Sobradinho.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
171	109	61	56	108	104	165	203	234	267	245	223

Fontes: Mendes (2012).

onde antes predominavam vales, pequenas cidades e vegetação nativa, que foram totalmente transformados (BACELAR, 2019; CORREIA; DIAS; ARAGAO, 2006).

Localizado dentro do polígono das secas, o reservatório está sujeito a períodos críticos de prolongadas estiagens. Desde 2013, a bacia do rio São Francisco vem enfrentando condições hidrometeorológicas adversas, com vazões e precipitações abaixo da média, com consequências nos níveis de armazenamento dos reservatórios existentes (CBHSF, 2021).

As altas taxas de evaporação estão relacionadas ao espelho d'água e as condições climáticas. Segundo a ANA (2021), a evaporação é o segundo maior gasto hídrico e seu volume é mais que cinco vezes o necessário para abastecimento doméstico do Brasil (BACELAR, 2019). Esse fato ressalta a importância envolvendo a consideração da evaporação. Mendes (2012) organizou as perdas médias mensais por evaporação apresentadas na Tabela 3. Dados de vazão natural afluyente ao reservatório estão disponibilizados no portal da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) (www.ccee.org.br).

4 Resultados e Discussão

4.1 Considerações

O modelo de otimização estudado foi implementado em ambiente de programação de código livre, utilizando a ferramenta de programação científica GNU Octave (www.octave.org). Além disso, para validação do modelo foi realizada uma operação mensal de 1.000 anos do reservatório em questão, utilizando cenários de vazões geradas sinteticamente, sendo guiada pela mesma política operacional utilizada no método FP incorporando também a evaporação em sua formulação. Para cada mês do calendário (de janeiro a dezembro), foram gerados 1.000 valores de afluência. Um valor único (para um determinado ano e mês τ) era obtido por $\bar{I}_\tau + \xi \cdot \sigma_\tau$, onde \bar{I}_τ e σ_τ são a média e o desvio padrão das vazões históricas no mês τ , respectivamente, e ξ é uma variável aleatória seguindo uma distribuição normal com média zero e variância unitária. Para cada mês, foram gerados 1.000 valores diferentes de ξ resultando nos 1.000 valores de afluência. A partir da simulação Monte Carlo, calcularam-se os momentos amostrais de armazenamento e as frequências de contenção, déficit e vertimento a fim de compará-los com os correspondentes valores estimados pelo modelo estudado.

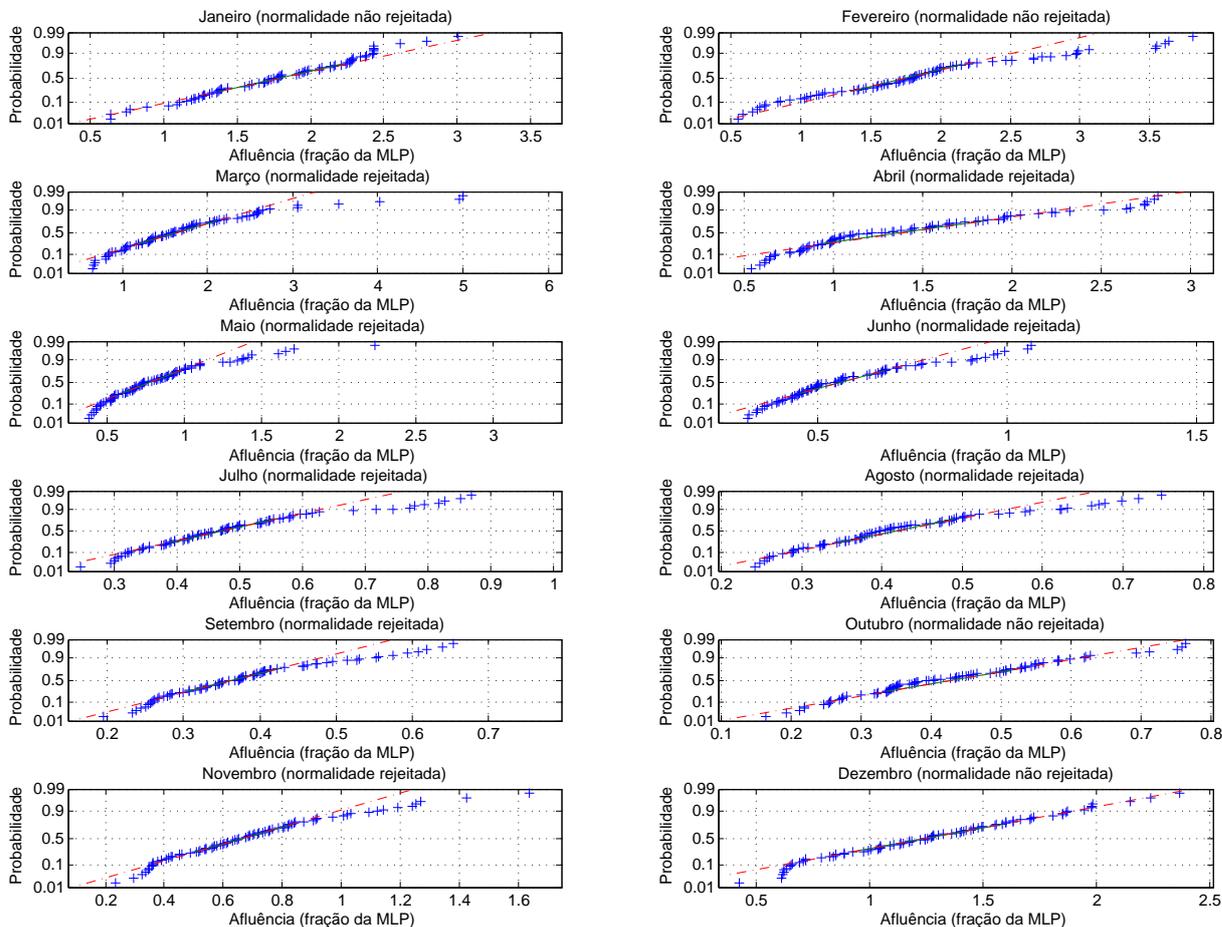
Algumas considerações foram realizadas para manter a continuidade do cálculo, como simplificar a questão do múltiplo uso da água do reservatório, em que foi utilizada uma demanda constante D_τ igual a 80% da vazão média de longo período (MLP), considerada como única para todos meses do ano $\tau = 1, 2, \dots, 12$. Adicionalmente, foi considerado que as afluências históricas eram normalmente distribuídas, sendo a configuração da versão atual do método FP formulada por Fletcher e Ponnambalam (2008), a qual possibilita a resolução analítica das integrais do tipo (I), (II) e (III) presentes no método. De fato, testes de normalidade de Jarque-Bera (JARQUE; BERA, 1980) foram realizados para cada mês dos registros de entrada. A Figura 2 mostra os resultados dos testes juntamente com os gráficos de probabilidade normal. Os testes indicaram que a normalidade foi razoável apenas para janeiro, fevereiro, outubro e dezembro. A hipótese de distribuição normal foi rejeitada para todos os outros meses.

4.2 Operação de Sobradinho

Após executar a otimização do método FP com dados de entrada do reservatório de Sobradinho, foram obtidos para cada mês do ano os parâmetros α e β da regra de decisão LDR do tipo SQ, mostrados na Tabela 4.

Com os dados da política operativa, foram determinadas as probabilidades $\mathbb{P}_\tau^{\text{con}}$, $\mathbb{P}_\tau^{\text{def}}$, $\mathbb{P}_\tau^{\text{sp}}$ e os momentos estatísticos de armazenamento $\mathbb{E}(S_\tau)$ e $\mathbb{E}(S_\tau^2)$, a partir da otimização, bem como seus respectivos correspondentes amostrais da simulação. Como observado nas figuras

Figura 2 – Gráficos de probabilidade normal e resultados do teste de Jarque-Bera para cada mês nos registros de entrada. Quando todos os pontos de dados caem perto da linha, a suposição de normalidade é razoável.



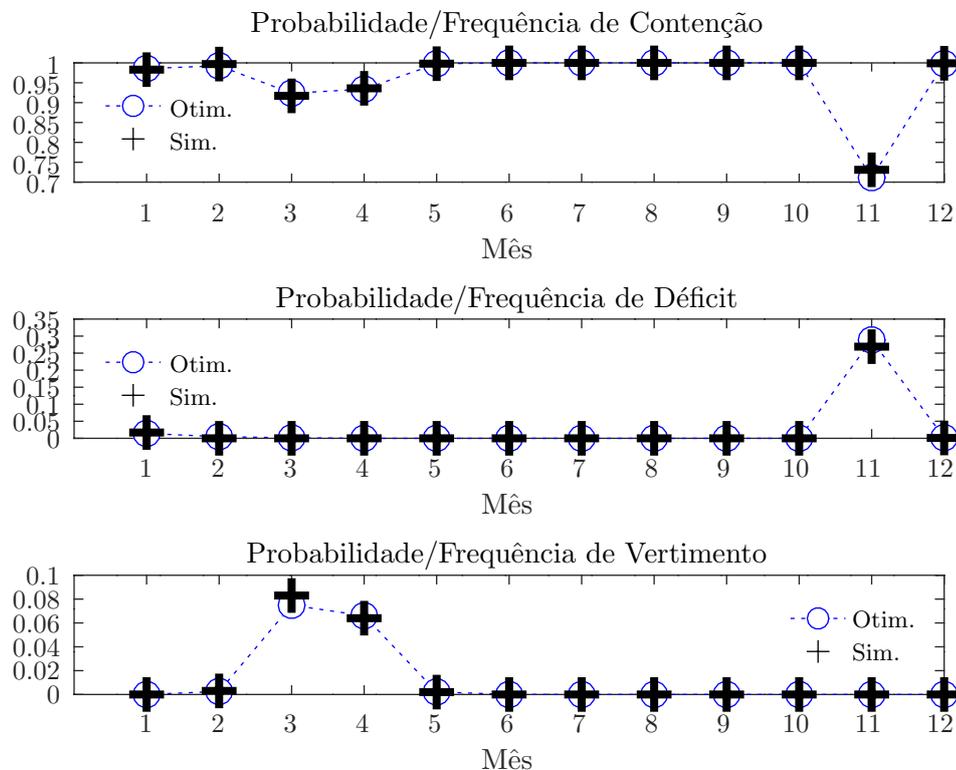
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 4 – Parâmetros da regra de decisão linear LDR encontrados pelo método FP para Sobradinho.

Mês	α	β
1	0,0546	0,2976
2	0,0000	1,0132
3	0,0006	1,8891
4	0,0122	2,6973
5	0,1058	3,1940
6	0,0000	2,9646
7	0,1187	2,5915
8	0,0393	2,0433
9	0,0249	1,4857
10	0,1866	0,9456
11	0,5139	0,5565
12	0,7161	0,8339

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Figura 3 – Probabilidades de contenção, déficit e vertimento encontrados pelo método FP para Sobradinho.



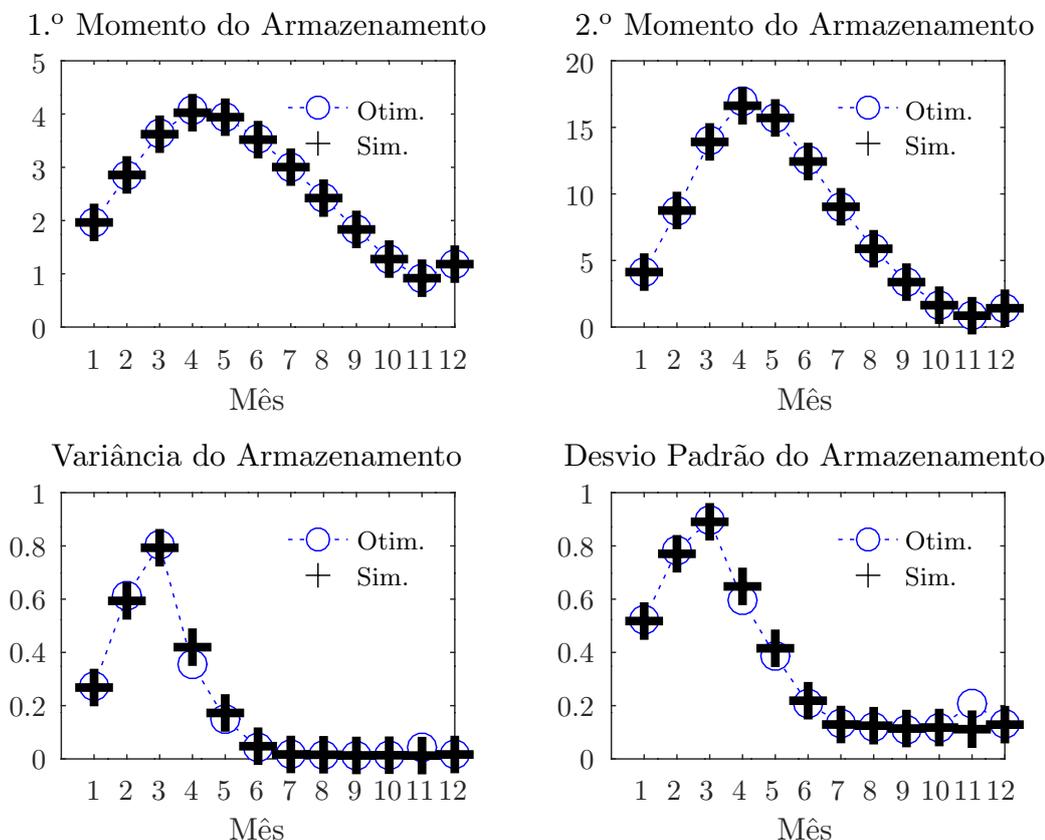
Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

3 e 4, que mostram a comparação gráfica entre probabilidades e momentos, respectivamente, o método FP gerou resultados condizentes com os da simulação, destacando a eficiência do método, aproximando a conjectura da realidade. Como mencionado anteriormente, o processo de otimização do método FP para o reservatório de Sobradinho foi formulado considerando que as aflúências seguem a distribuição gaussiana, o que possibilitou a resolução analítica das integrais (3.43), (3.44) e (3.45). Ademais, o efeito das autocorrelações das aflúências também não foi considerado. No entanto, as consequências para os resultados finais foram mínimas. Sem aumentar a complexidade do modelo, outras distribuições de probabilidade podem ser assumidas para as aflúências.

Em termos de valores, podem ser vistos na Tabela 5, que compara os momentos estatísticos do armazenamento assim como sua variância e desvio padrão calculados pela otimização e simulação, sendo nítido que a ordem de discrepância é muito baixa, caracterizando uma perspectiva positiva para a implementação do método.

Com os bons resultados obtidos, o método mostra sua eficiência e versatilidade com a capacidade de prever os momentos estatísticos e as probabilidades citadas sem ter a necessidade de simular o comportamento. Além disso, a implementação da nova regra de operação mais sofisticada mostra perspectivas satisfatórias na modelagem do problema. Com a adição de mais uma variável (evaporação), o método é aperfeiçoado e desvincula-se da ótica de que

Figura 4 – Momentos estatísticos de armazenamento encontrados pelo método FP para Sobradinho. Os armazenamentos foram adimensionalizados em termos da afluência média de longo período.



Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

Tabela 5 – Momentos de armazenamento obtidos pelo método FP em comparação com os correspondentes amostrais obtidos por simulação. Os armazenamentos foram adimensionalizados em termos da afluência média de longo período.

Mês	Otimização				Simulação			
	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio	1.º Mom.	2.º Mom.	Var.	Desvio
1	1,9637	4,129	0,273	0,5225	1,9651	4,1294	0,2681	0,5178
2	2,8471	8,7185	0,6128	0,7828	2,8572	8,7566	0,5935	0,7704
3	3,6357	14,0226	0,8043	0,8968	3,6218	13,9096	0,7931	0,8906
4	4,0751	16,9618	0,3554	0,5961	4,0257	16,6256	0,4197	0,6479
5	3,943	15,6967	0,1406	0,3868	3,9417	15,7096	0,1726	0,4155
6	3,5348	12,538	0,0432	0,2079	3,5199	12,4371	0,0478	0,2186
7	2,9994	9,0139	0,0177	0,1331	3,0034	9,0373	0,0167	0,1292
8	2,4268	5,9037	0,0144	0,1198	2,422	5,8818	0,0156	0,1248
9	1,835	3,379	0,0119	0,1093	1,8337	3,3754	0,013	0,114
10	1,2742	1,6373	0,0136	0,1167	1,2765	1,6433	0,0139	0,1178
11	0,9132	0,877	0,0432	0,2077	0,9175	0,8543	0,0125	0,1116
12	1,1815	1,4132	0,0174	0,1317	1,1819	1,4134	0,0166	0,1287

Fonte: Elaborada durante a pesquisa.

os métodos de otimização se limitam a diversas simplificações para obtenção de resultados. Entretanto, uma restrição desta abordagem se concentra na mesma enfrentada pela versão atual do método, qual seja: se a suposição gaussiana não for válida para um determinado estudo de caso, todo o conjunto de integrais deve ser resolvido novamente (quando possível) assumindo uma distribuição de probabilidade apropriada e o código computacional deve ser atualizado com o novo conjunto de equações. Ressalta-se, porém, que, no estudo de caso presente, as afluições não seguiram totalmente o padrão gaussiano e, mesmo assim, os resultados foram coerentes. Para contornar essa limitação, a metodologia formulada por Celeste, Siqueira e Cai (2021), a qual considera apenas dos dados históricos das afluições para resolver as integrais pertinentes ao método FP, poderia ser expandida com a incorporação da evaporação e a nova regra de operação LDR.

Essa nova perspectiva gera grandes expectativas no aprimoramento do modelo, ao passo que os processos computacionais já foram simplificados sem a necessidade de assumir uma distribuição de probabilidade. Os benefícios do método seriam enriquecidos, visto a sua formulação com benefício computacional e a consideração explícita de mais variáveis relevantes ao sistema, ao passo que é adotada uma diretriz operacional refinada.

Conclusão

A gestão de recursos hídricos otimizada que consiga atender às necessidades econômicas e sociais está cada vez mais sendo primordial para o bom funcionamento da sociedade. Nos últimos tempos, mudanças climáticas têm provocado alterações no balanço hídrico das regiões, principalmente no semiárido. Variações nas precipitações e elevadas taxas de evaporação são dois fatores que impactam drasticamente na disponibilidade da água. Portanto, o desenvolvimento e aplicação de técnicas que incorporam a estocasticidade do processo hidrológico e as perdas evaporativas podem auxiliar a mitigar situações de secas com operações sustentáveis do sistema trabalhado.

Este trabalho propôs melhorias ao método FP para a otimização da operação de um reservatório de abastecimento d'água. No geral, os bons resultados encontrados indicaram que o método FP pode ser utilizado para modelar problemas reais incorporando incertezas das aflúncias e avaliando as perdas evaporativas de uma região. Outrossim, a utilização da nova estratégia de operação do reservatório (LDR do tipo SQ) nas estimativas do primeiro e segundo momentos estatísticos de armazenamento, bem como das probabilidades de contenção, déficit e vertimento, apresentou resultados muito úteis no contexto de projeto e operação de um reservatório.

O método FP incorpora os limites mínimo e máximo de armazenamento explicitamente na dinâmica dos sistemas. A aplicação na operação mensal do reservatório de Sobradinho resultou em boas correspondências entre otimização e simulação. Mesmo com a limitação da necessidade de supor que os registros históricos de aflúncias seguem uma distribuição de probabilidade, neste caso gaussiana, a aplicação da nova regra de operação e a incorporação das perdas evaporativas trouxeram ganhos significativos para o método em virtude dos ajustes bem próximos entre os resultados e os cenários gerados.

Por fim, os bons resultados confirmam que o modelo de otimização FP baseado nas equações dos momentos pode modelar adequadamente o comportamento estocástico do sistema real, além de contornar simplificações comuns, como as perdas evaporativas, que podem ser influentes no balanço hídrico. A aplicação desta metodologia para sistemas de múltiplos reservatórios com vários objetivos, com políticas operacionais alternativas e hipóteses de outras distribuições de probabilidade que melhor se ajustem aos registros históricos de aflúncia são perspectivas para trabalhos futuros.

Referências

- AHMAD, A. et al. Reservoir optimization in water resources: a review. *Water Resources Management*, v. 28, n. 11, p. 3391–3405, 2014.
- ANA. *Conjuntura Recursos Hídricos do Brasil 2021*. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico, 2021. Disponível em: <<https://relatorio-conjuntura-ana-2021.webflow.io>>.
- ARAÚJO, S. M. S. de. A região semiárida do nordeste do Brasil: questões ambientais e possibilidades de uso sustentável dos recursos. *Rios Eletrônica-Revista Científica da FASETE*, v. 5, n. 5, p. 89–98, 2011.
- BACELAR, T. S. *Características das condições ambientais no reservatório da UHE Sobradinho no contexto da geração fotovoltaica flutuante*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- BELLMAN, R. *Dynamic Programming*. [S.l.]: Princeton University Press, 1957. (Rand Corporation research study).
- BHASKAR, N. R.; WHITLATCH, E. E. Comparison of reservoir linear operation rules using linear and dynamic programming. *Journal of the American Water Resources Association*, Wiley, v. 23, n. 6, p. 1027–1036, dez. 1987.
- BILLINGTON, D. P.; JACKSON, D. C. *Big dams of the new deal era: A confluence of engineering and politics*. [S.l.: s.n.], 2017.
- BOLOURIAZDELI, Y. et al. Evaluation of real-time operation rules in reservoir systems operation. *Water Resources Management*, v. 28, n. 3, 2014.
- BRAVO, J. M. *Otimização da operação de um reservatório para controle de cheias com base na previsão de vazão*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- BRAVO, J. M. et al. Operação de um reservatório com múltiplos usos com base na previsão de curto prazo de vazão. *Revista Brasileira de Energia*, v. 11, n. 2, p. 85–110, 2005.
- CBHSF. *A Bacia*. O Comitê da Bacia do Rio São Francisco. [S.l.], 2021. Disponível em: <<https://cbhsaofrancisco.org.br/a-bacia/>>.
- CELESTE, A. B. Comparação de modelos de otimização estocástica implícita e explícita na derivação de regras operacionais mensais de reservatórios. *XIX Simpósio Brasileiro de Recursos hídricos*. Associação Brasileira de Recursos hídricos (ABR_h), Maceió, 2011.
- CELESTE, A. B.; BILLIB, M. Evaluation of stochastic reservoir operation optimization models. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 32, n. 9, p. 1429–1443, 2009.
- CELESTE, A. B.; CURI, W. F.; CURI, R. C. Implicit stochastic optimization for deriving reservoir operating rules in semiarid Brazil. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 223–234, 2009.

- CELESTE, A. B.; SANTANA, R. F.; SANTOS, W. M. Otimização estocástica dinâmica e implícita para operação de reservatório: estudo de caso em Sergipe. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 273–280, 2016.
- CELESTE, A. B.; SANTOS, J. A. S. Curvas-guia operacionais de reservatório sergipano derivadas por otimização estocástica implícita e regressão não linear. *Scientia cum industria*, v. 4, n. 1, p. 32–37, 2016.
- CELESTE, A. B.; SIQUEIRA, J. I. P.; CAI, X. Using inflow records to approximate solutions to statistical moment equations of an explicit stochastic reservoir optimization method. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 147, n. 7, p. 06021006, 2021.
- CELESTE, A. B.; SUZUKI, K.; SANTOS, V. S. Análise de indicadores de sustentabilidade para reservatórios operados por regras derivadas de otimização estocástica implícita. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE RECURSOS HÍDRICOS (ABRH). *Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. João Pessoa, 2005.
- CHESF. *Descrição do Aproveitamento de Sobradinho*. [S.l.], 2017. Disponível em: <[#](https://www.chesf.gov.br/SistemaChesf/Pages/SistemaGeracao/Sobradinho.aspx)>.
- CODEVASF. *Caracterização da Bacia*. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://www.codevasf.gov.br/linhas-de-negocio/projeto-sao-francisco/caracterizacao-da-bacia>>.
- CORREIA, M. F.; DIAS, M. A. F. S.; ARAGAO, M. R. S. Soil occupation and atmospheric variations over Sobradinho Lake area. Part one: an observational analysis. *Meteorology and Atmospheric Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 94, n. 1-4, p. 103–113, jun. 2006.
- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. A new formulation for the stochastic control of systems with bounded state variables: An application to a single reservoir system. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Springer, v. 10, n. 3, p. 167–186, 1996.
- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. Constrained state formulation for the stochastic control of multireservoir systems. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 34, n. 2, p. 257–270, 1998.
- FLETCHER, S. G.; PONNAMBALAM, K. Stochastic control of reservoir systems using indicator functions: New enhancements. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 44, n. 12, 2008.
- GARCIA, M.; RIDOLFI, E.; BALDASSARRE, G. D. The interplay between reservoir storage and operating rules under evolving conditions. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 590, p. 125270, 2020.
- GIULIANI, M. et al. A state-of-the-art review of optimal reservoir control for managing conflicting demands in a changing world. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 57, n. 12, p. e2021WR029927, 2021.
- GOMES, L. S. *Regra de operação de reservatório isolado no semiárido: uma aplicação da lógica fuzzy*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.
- GRILL, G. et al. Mapping the worlds free-flowing rivers. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 569, n. 7755, p. 215–221, 2019.

- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, v. 6, n. 3, p. 255–259, 1980.
- KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, v. 46, n. 1, p. 79–88, 1980.
- LABADIE, J. W. Optimal operation of multireservoir systems: state-of-the-art review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 2, p. 93–111, 2004.
- LANNA, A. E. L.; LIMA, H. V. C. Modelos para operação de sistemas de reservatórios: atualização do estado da arte. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 10, n. 3, p. 5–22, 2005.
- LINO, V. F.; COIADO, L. C.; FRANCATO, A. L. Análise da garantia física de usinas hidroelétricas de forma cooperativa por meio de modelos de otimização. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 10, p. 74356–74372, 2020.
- MAHOOTCHI, M.; PONNAMBALAM, K. Parambikulam-Aliyar project operations optimization with reliability constraints. *Journal of Water Resources Planning and Management*, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 4, p. 364–375, 2013.
- MAHOOTCHI, M.; PONNAMBALAM, K.; TIZHOOSH, H. R. Comparison of risk-based optimization models for reservoir management. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 37, n. 1, p. 112–124, 2010.
- MELLO JR, A. V.; MATOS, L. N. Otimização da operação de reservatório pela programação dinâmica em um processo de decisão markoviano. *Revista Brasileira de Recursos Hidricos*, v. 4, n. 3, p. 5–15, 1999. ISSN 2318-0331.
- MENDES, L. A. *O impacto dos usos consuntivos na operação de sistemas de reservatórios para produção de energia elétrica*. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2012.
- MMA. *Caderno da Região Hidrográfica do São Francisco*. Distrito Federal, 2006. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/estruturas/161/_publicacao/161_publicacao03032011023538.pdf>.
- MOURA, M. S. B. de et al. Clima e água de chuva no Semi-Árido. In: BRITO, L. T. L.; MOURA, M. S. B. de; GAMA, G. F. B. (Ed.). *Potencialidades da água de chuva no Semi-Árido brasileiro*. Petrolina: Embrapa Semi-Árido, 2007. p. 37–59.
- NUNES, T. H. C.; GALVAO, C. O.; RÊGO, J. C. Rule curve for seasonal increasing of water concessions in reservoirs with low regularized discharges. *RBRH*, SciELO Brasil, v. 21, p. 493–501, 2016.
- PEIXOTO, L. S. *Derivação de regras operacionais de proteção contra déficits de suprimento de sistemas de reservatórios via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) – Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.
- RAMOS, G. L.; ZAMBELLI, M.; SOARES, S. Impacto de regras de operação de reservatórios na produtividade de sistemas hidrelétricos em cascata: um estudo de caso com as usinas hidrelétricas de três marias e sobradinho na bacia do rio São Francisco. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 1, n. 1.

- RANI, D.; MOREIRA, M. M. Simulation–optimization modeling: a survey and potential application in reservoir systems operation. *Water Resources Management*, Springer, v. 24, n. 6, p. 1107–1138, 2010.
- REVELLE, C.; JOERES, E.; KIRBY, W. The linear decision rule in reservoir management and design: 1, Development of the stochastic model. *Water Resources Research*, v. 5, n. 4, p. 767–777, 1969.
- RIMA. *Relatório de impacto sobre o meio ambiente do projeto de integração do rio São Francisco com bacias hidrográficas do nordeste setentrional*. Brasília, 2004. Disponível em: <<http://www.integracao.gov.br/saofrancisco/rima/download.asp>>.
- SANTANA, R. F. *Avaliação de estratégias de otimização estocástica para operação de reservatórios de pequena, média e grande escalas*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe (UFS), São Cristóvão, 2019.
- SILVA, T. O. da et al. Caracterização morfométrica da SubBacia Hidrográfica do Rio dos Monos-Bahia, Brasil. *Conjecturas*, União Atlântica de Pesquisadores, v. 22, n. 2, p. 292–306, 2022.
- SOUZA, A. S. et al. Análise do desempenho hídrico do eixo leste do PISF considerando diferentes cenários hidrológicos. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE RECURSOS HÍDRICOS (ABRH). *Anais do XXIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. Foz do Iguaçu, 2019.
- TAN, Q.-f. et al. Derivation of optimal joint operating rules for multi-purpose multi-reservoir water-supply system. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 551, p. 253–264, 2017.
- VIEIRA, A. S. *Um modelo de simulação, via programação linear sequencial, para sistema de recursos hídricos*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.
- WADA, Y. et al. Human–water interface in hydrological modelling: current status and future directions. *Hydrology and Earth System Sciences*, Copernicus GmbH, v. 21, n. 8, p. 4169–4193, 2017.
- WCD: World Commission on Dams. *Dams and development: A new framework for decision-making*. [S.l.]: Earthscan Publications Ltd, 2000.
- ZHANG, J. L.; PONNAMBALAM, K. Stochastic control for risk under deregulated electricity market: a case study using a new formulation. *Canadian Journal of Civil Engineering*, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 32, n. 4, p. 719–725, 2005.
- ZHANG, J. L.; PONNAMBALAM, K. Hydro energy management optimization in a deregulated electricity market. *Optimization and Engineering*, Springer Science and Business Media LLC, v. 7, n. 1, p. 47–61, mar. 2006.
- ZOMORODIAN, M. et al. Development and application of coupled system dynamics and game theory: A dynamic water conflict resolution method. *PLOS ONE*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 12, n. 12, p. e0188489, 2017.