



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Civil



LEONARDO FELLIPE PRADO LEITE

**NOVAS FUNÇÕES ZIG-ZAG DE ALTA ORDEM PARA ANÁLISE  
DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS**

São Cristóvão - SE

2022

LEONARDO FELLIPE PRADO LEITE

**NOVAS FUNÇÕES ZIG-ZAG DE ALTA ORDEM PARA ANÁLISE  
DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Sergipe – UFS, para  
encerramento do componente curricular e  
conclusão da graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha

São Cristóvão – SE

2022

PRADO LEITE, Leonardo Fellipe.  
NOVAS FUNÇÕES ZIG-ZAG DE ALTA ORDEM PARA  
ANÁLISE DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS

Leonardo Fellipe Prado Leite

São Cristóvão, 2022

56 p.: il.

Trabalho Acadêmico Orientado. Centro de Ciências Exatas e  
Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

I. Universidade Federal de Sergipe/Sergipe. CDS

II. Novas funções zig-zag de alta ordem para análise de vigas  
compósitas laminadas



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



ATA DE DEFESA

Leonardo Fellipe Prado Leite

**Novas Funções Zig-Zag de Alta Ordem para Análise de Vigas Compósitas Laminadas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **1 de julho de 2022**

<b>Banca Examinadora</b>	<b>Nota</b>
Orientador(a): Prof. D.Sc.. Fabio Carlos da Rocha (UFS)	– 10,0
Examinador(a): Prof. D.Sc. Aref Kalilo Lima Kzam (UNILA)	– 10,0
Examinador(a): Prof. D.Sc. Rafael Marques Lins (ITA)	– 10,0
<b>Média Final:</b>	<b>10,0</b>

Documento assinado digitalmente  
 Fabio Carlos da Rocha  
Data: 04/07/2022 22:19:38-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. D.Sc. Fabio Carlos da Rocha (UFS)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, aos meus pais Soraya e Waltenison que me deram a vida e tudo que precisei para ser, hoje, quem sou. Agradeço aos meus avôs e avós, em especial Maria Lúcia por tudo que fez pela nossa família. Agradeço a todos os outros familiares que sempre me ajudaram quando eu precisei. Agradeço ao meu irmão que sempre está comigo.

Agradeço a todas as pessoas que fizeram parte dessa jornada e estiveram comigo me apoiando sempre, principalmente minha namorada, meus amigos do colégio e meus amigos de curso.

Todos vocês me ajudam de formas que nem imaginam e aprendo muito com cada um.

Agradeço à universidade por me conceder a estrutura para desenvolver meus estudos e ao meu orientador, professor Fabio, por me guiar tão bem no caminho científico desde a iniciação. Agradeço a todos os outros professores do departamento, cada um teve papel fundamental no meu aprendizado. Agradeço aos demais professores que passaram pela minha vida, desde o colégio, em especial meu tio Heráclito.

Todos vocês foram essenciais para que eu tivesse essa paixão pelo conhecimento.

Agradeço ao pessoal do trabalho do complexo barra village, pois foram essenciais para minha formação profissional e me ensinam todos os dias como ser um engenheiro melhor.

Agradeço a Deus ou “o Universo” pela sequência de fatos que me levaram até aqui e me fizeram evoluir como pessoa. Obrigado.

## RESUMO

O conceito de unir materiais diferentes para aproveitar de suas melhores propriedades foi, ao longo da história, usado para a evolução dos processos humanos. Hoje, há um aumento nas variedades de produtos e processos industriais, os quais necessitam de peças cada vez mais específicas e eficientes, o que é objetivo da utilização de materiais compósitos. Por isso, seu estudo se torna importante e, por terem um comportamento mais complexo, necessitam de teorias próprias para cada caso específico. Na engenharia, há uma vasta gama de peças que têm o comportamento estrutural de vigas e são aplicadas em áreas como engenharia civil, mecânica, aeronáutica e militar. Devido à necessidade de um comportamento estrutural adequado para cada caso, existem as vigas compósitas laminadas que unem diferentes materiais para se obter os resultados desejados. No presente trabalho, foi desenvolvido um estudo comparativo das teorias das vigas laminadas e seus resultados, visando melhorar a aproximação do comportamento real delas com o menor custo computacional possível. Para tanto, foi feita uma formulação da teoria zig-zag com cinemáticas e “funções zig-zag” de alta ordem de forma unificada, propondo novos formatos zig-zag, além de um estudo específico para melhorias da aproximação no campo de cisalhamento.

**Palavras-chave:** Teoria zig-zag; Vigas compósitas laminadas; Teorias de vigas de alta ordem; Tensão de cisalhamento;

## ABSTRACT

The concept of joining different materials to take advantage of their best properties has historically been used for the evolution of human processes. Today, there is an increase in the variety of products and industrial processes which require the use of specific and efficient materials. Therefore, the study of composite materials becomes important and, as they are more complex, they need their own theories for each specific case. Speaking of engineering, there is a large range of parts that have the structural behavior of beams and are applied in areas such as civil, mechanical, aeronautical and military engineering. Due to the need for an adequate structural behavior for each case, there are laminated composite beams that join different materials to obtain the desired results. In the present work, a comparative study of the laminated beams theories and their results was developed in order to improve the approximation of their real behavior with the lowest possible computational cost. Thus, a unified formulation of the zig-zag theory was developed with high order kinematics and high order “zig-zag functions” with new zig-zag’s shapes. In addition to a study to improve the approximation in the shear field of these elements.

**Keywords:** Zig-zag Theory; Composite laminated beams; High order beams theory; Shear stress;

## LISTA DE SÍMBOLOS

$L$  → comprimento da viga

$2h$  → altura da viga

$b$  → largura da viga

$q$  → carregamento

$f'(x)$  → derivada primeira de uma função de  $x$

$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$  → derivada  $n$  – ésima de uma função de  $x$

$\int f(x)dx$  → integral de uma função de  $x$

$\text{Sin}(f(x))$  → seno de uma função de  $x$

$\text{Cos}(f(x))$  → cosseno de uma função de  $x$

$\text{Sinh}(f(x))$  → seno hiperbólico de uma função de  $x$

$\text{Cosh}(f(x))$  → cosseno hiperbólico de uma função de  $x$

$f^{(k)}(z)$  → função válida para uma lâmina  $k$

$\exp[f(x)]$  → número de euller elevado a uma função de  $x$

$e^{f(x)}$  → número de euller elevado a uma função de  $x$

$\text{Tanh}(f(x))$  → tangente hiperbólica de uma função de  $x$

$\text{Sech}(f(x))$  → secante hiperbólica de uma função de  $x$

$u_0(x)$  → deslocamento axial na linha neutra da viga

$w_0(x)$  → deslocamento vertical na linha neutra da viga

$\phi(x)$  → ângulo devido ao cisalhamento

$f(z)$  → teoria cisalhante de alta ordem

$\phi_{ZZ}^{(k)}(z)$  → função zig – zag

$\phi_{MURZZ}^{(k)}$  → função zig – zag de Murakami

$\phi_{RZTZZ}^{(k)}$  → função zig – zag refinada

$\psi(x)$  → função amplitude zig – zag

$\beta^{(k)}(z)$  → derivada primeira da função zig – zag

$RED90$  → função cisalhante de Reddy, 1990

*KRU49* → função cisalhante de Kruswesky, 1949  
*TOU91* → função cisalhante de Tourratier, 1991  
*SOL92* → função cisalhante de Soldatos, 1992  
*KAR03* → função cisalhante de Karama, 2003  
*AKA07* → função cisalhante de Akavic, 2007  
*ZZSEN* → função zig – zag senoidal  
*ZZHIP* → função zig – zag hiperbólica  
*ZZEXP* → função zig – zag exponencial  
*ZZHE* → função zig – zag hiperbólica – exponencial  
 $\delta$  → operador variacional  
 $\delta_d$  → operador delta de dirac  
 $N_x$  → Esforço normal clássico  
 $M_x$  → Momento fletor clássico  
 $V_x$  → Esforço cortante clássico  
 $M_\phi$  → Momento fletor que provoca o cisalhamento  
 $M_{zz}$  → Momento fletor que provoca o efeito zig – zag  
 $V_\phi$  → Esforço cortante que provoca o cisalhamento  
 $V_\beta$  → Esforço cortante que provoca o efeito zig – zag

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1: Comportamento de tensões em concreto reforçado com fibras.....</b>	<b>2</b>
<b>Figura 2: Fluxograma de metodologia de pesquisa .....</b>	<b>5</b>
<b>Figura 3: Deformação devido a tensão cisalhante em uma viga.....</b>	<b>8</b>
<b>Figura 4: Viga em estado indeformado e deformado para Euller-Bernoulli</b> .....	<b>10</b>
<b>Figura 5: Viga em estado indeformado e deformado para Timoshenko .....</b>	<b>11</b>
<b>Figura 6: Viga em estado indeformado e deformado para Teoria de alta</b> <b>ordem .....</b>	<b>11</b>
<b>Figura 7: Viga laminada submetida aos esforços gerais .....</b>	<b>15</b>
<b>Figura 8: Características geométricas das lâminas .....</b>	<b>16</b>
<b>Figura 9: Comportamentos Zig-Zag dos formatos propostos para um</b> <b>exemplo numérico de 3 camadas.....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 10: Significado físico da função amplitude zig-zag.....</b>	<b>22</b>
<b>Figura 11: Tipos de carregamentos.....</b>	<b>30</b>
<b>Figura 12: Configurações de lâminas e fibras.....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 13: Viga resolvida no exemplo 1.....</b>	<b>33</b>
<b>Figura 14: gráficos completos dos resultados de referência do exemplo 1..</b>	<b>36</b>
<b>Figura 15: Viga resolvida no exemplo 2.....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 16: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão</b> <b>cisalhante do exemplo 2.....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 17: Viga resolvida no exemplo 3.....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 18: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão</b> <b>cisalhante do exemplo 3.....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 19: Viga resolvida no exemplo 4.....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 20: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão</b> <b>cisalhante do exemplo 4.....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 21: Viga resolvida no exemplo 5.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 22: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão</b> <b>cisalhante do exemplo 5.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 23: resultados da tensão de cisalhamento do exemplo 1, calculados</b> <b>através das relações constitutivas das hipóteses 1 e 2.....</b>	<b>44</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1: Funções do cisalhamento de alta ordem para teorias de vigas....</b>	<b>19</b>
<b>Tabela 2: Funções Ziz-Zag de Alta Ordem .....</b>	<b>20</b>
<b>Tabela 3: Resultados de referência para o exemplo 1. ....</b>	<b>33</b>
<b>Tabela 4: Resultados das combinações zig-zag de alta ordem para o exemplo 1 para HIP1. ....</b>	<b>34</b>
<b>Tabela 5: WAPE dos gráficos completos do exemplo 1. ....</b>	<b>37</b>
<b>Tabela 6: WAPE da hipótese 2 para o exemplo 1.....</b>	<b>45</b>

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	IMPORTÂNCIA DOS MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS .....	1
1.2	INOVAÇÃO.....	2
<b>2.</b>	<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>4</b>
2.1	OBJETIVOS GERAIS.....	4
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	4
<b>3.</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>5</b>
<b>4.</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>7</b>
4.1	TEORIAS DE MODELAGEM DE VIGAS .....	7
4.2	TEORIAS DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS .....	8
4.3	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VIGAS.....	9
4.4	HISTÓRICO E EVOLUÇÃO DA CINEMÁTICA ZIG-ZAG.....	9
<b>5.</b>	<b>DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO .....</b>	<b>15</b>
5.1	CARACTERÍSTICAS INICIAIS.....	15
5.2	CAMPO DE DEFORMAÇÃO.....	16
5.3	CAMPO DE TENSÃO.....	17
5.4	COMPORTAMENTO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO .....	17
5.5	TEORIAS DE VIGAS.....	19
5.6	FUNÇÃO ZIG-ZAG.....	19
5.7	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	22
<b>6.</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>29</b>
6.1	PROBLEMAS RESOLVIDOS .....	29
6.2	REFERÊNCIAS DE COMPARAÇÃO .....	32
6.3	ANÁLISE DE GRÁFICOS .....	32
6.3.1	EXEMPLO 1.....	32

<b>6.3.2</b>	<b>EXEMPLO 2.....</b>	<b>38</b>
<b>6.3.3</b>	<b>EXEMPLO 3.....</b>	<b>39</b>
<b>6.3.4</b>	<b>EXEMPLO 4.....</b>	<b>41</b>
<b>6.3.5</b>	<b>EXEMPLO 5.....</b>	<b>42</b>
<b>6.4</b>	<b>ANÁLISE DA TENSÃO DE CISALHAMENTO .....</b>	<b>44</b>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>46</b>
<b>8.</b>	<b>PESPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>47</b>
<b>9.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE VIGAS LÂMINADAS .....</b>	<b>52</b>

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 IMPORTÂNCIA DOS MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Ao longo da história da construção civil houveram diversas combinações de materiais para obtenção de propriedade final desejada. Um exemplo claro desse processo ocorreu na evolução do concreto para concreto armado, em que o concreto e aço são combinados de forma que cada um desses materiais fosse melhor aproveitado. Conhecendo as propriedades separadas de cada um desses insumos e prevendo a característica do material final, foi possível atingir possibilidades construtivas que até então não eram imaginadas pelos engenheiros.

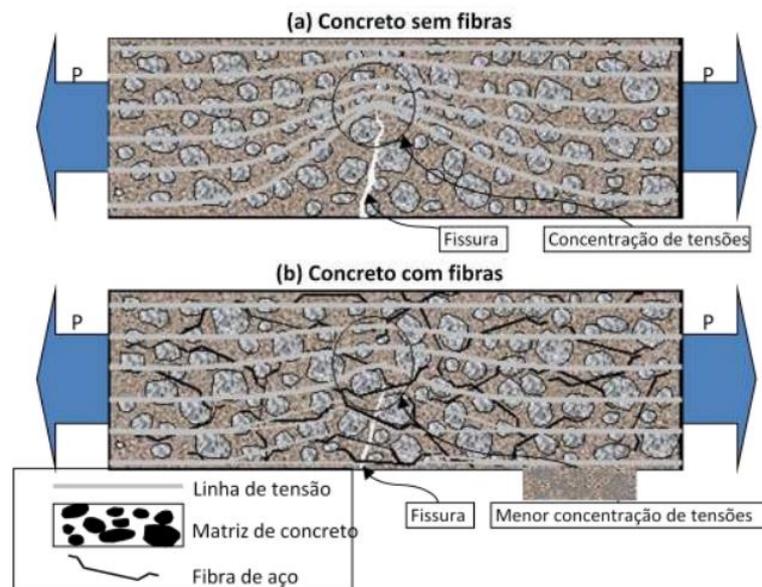
No entanto, este exemplo não é um caso isolado na história quando o assunto são materiais compósitos. A antiga civilização israelita utilizava a mistura de palha picada com pedras para reforçar suas estruturas, os guerreiros samurais japoneses eram conhecidos por suas espadas laminadas forjadas com o intuito de ter propriedades cortantes desejáveis e, hoje, há um campo de pesquisa vasto em concretos reforçados por fibras (FIGURA 1). Atualmente é essencial entender o funcionamento desse tipo de material visto que este é utilizado em diversas tecnologias como na produção de caminhões de alta resistência, navios, barcos, pontes, estradas, equipamentos modernos de agricultura, hélices para energia eólica, instrumentos musicais e asas de aeronaves (VISON e SIERAKOWSKI, 2008).

Existe uma quantidade vasta de gêneros de materiais compósitos, variando seu comportamento de acordo com as características elasto-plásticas dos materiais em separado, a direção das fibras internas, o grau e a distribuição da porosidade e a maneira física que esses componentes são organizados e rearranjados. Dentre esses gêneros, destacam-se os materiais compósitos laminados que tem aplicabilidade em elementos de vigas (VISON e SIERAKOWSKI, 2008).

As vigas compósitas laminadas são formadas por camadas de ao menos dois materiais diferentes. Esta composição tem o objetivo criar vigas com elevadas relações resistência-peso e rigidez-peso quando comparadas com as formadas por único material. Dentre os compósitos que têm grande facilidade de obter as elevadas relações citadas

acima, pode-se mencionar as lâminas reforçadas com fibras (JONES, 1999). Estas lâminas são importantes pois proporcionam maior controle da distribuição dos esforços, uma vez que apresentam maior resistência na direção dessas fibras.

**Figura 1: Comportamento de tensões em concreto reforçado com fibras**



Fonte: Figueiredo, 2011.

Devido às vantagens proporcionadas pelos compósitos laminados, em particular aplicados a estrutura de vigas, torna-se importante a precisão na determinação dos campos mecânicos, tais como deslocamentos e forças de interação entre camadas, quando submetidas à flexão. As principais teorias utilizadas para analisar vigas laminadas são: teoria da camada única equivalente (ESL – *equivalent single layer*), teoria LayerWise (LW) e a teoria Zig-Zag (ZZ).

## 1.2 INOVAÇÃO

No presente trabalho foi realizado um estudo sobre a teoria zig-zag para vigas compósitas laminadas, destacando seu histórico, evolução, vantagens e desvantagens para aplicações práticas. Como caráter inovador, tem-se os seguintes pontos:

- Foi feita uma formulação de cinemática unificada em que se pode combinar várias teorias de vigas de alta ordem com diferentes funções zig-zag;
- Foram sugeridas quatro possíveis novas funções zig-zag de alta ordem com o objetivo de aumentar a precisão da teoria;

- c) Foram propostas hipóteses diferentes de formulação e observado a alteração nos resultados, principalmente no campo de cisalhamento;

Com isso, notou-se um incremento na eficiência da teoria utilizando algumas combinações de função zig-zag com funções cisalhantes, ambas de alta ordem, visto que conseguem recuperar os resultados de referência com erros baixos mesmo sendo uma teoria de baixo custo computacional.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 OBJETIVOS GERAIS**

Unificar a teoria Zig-Zag utilizando uma cinemática composta por funções de aproximação de cisalhamento e funções zig-zag, ambas de alta ordem, de modo a investigar a precisão dessa teoria em relação ao comportamento real em problemas de vigas compósitas laminadas.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

a) Unificar as teorias de deformação cisalhante superior em uma única cinemática com função Zig-Zag de alta ordem.

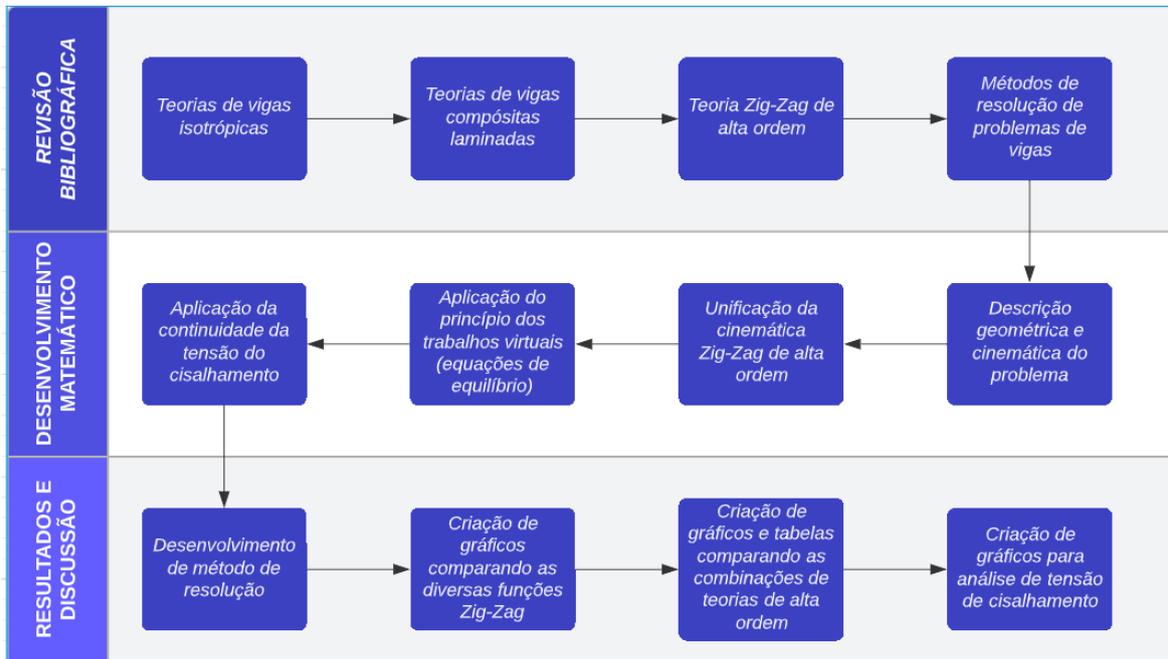
b) Desenvolver outras funções Zig-Zag de alta ordem e verificar a compatibilidade delas com as teorias de vigas.

c) Propor melhorias na precisão do campo de tensão de cisalhamento, por meio da teoria Zig-Zag.

### 3. METODOLOGIA

Este trabalho, foi desenvolvido com base em um planejamento que está descrito no seguinte fluxograma:

**Figura 2: Fluxograma de metodologia de pesquisa**



Fonte: Autoral, 2022.

Inicialmente foi feita uma vasta revisão bibliográfica nos tópicos relativos às teorias de vigas isotrópicas e compósitas laminadas, em seguida foi feita uma busca de trabalhos aprofundada nas aplicações das teorias zig-zag de alta ordem, observando sua evolução. Por fim, foi estudado os métodos de resolução de problemas de vigas numéricos e analíticos.

Na fase de desenvolvimento matemático, foi realizada a descrição geométrica das vigas pontuando as nomenclaturas e padrões utilizados para a formulação. Então foi proposta uma cinemática unificada que comporte funções zig-zag e cinemáticas de vigas isotrópicas de alta ordem. A partir dessa cinemática, foram calculados os campos de deslocamento, deformação e tensão e aplicado o princípio dos trabalhos virtuais para se obter as equações de equilíbrio, os esforços e condições de contorno, naturais e essenciais, do problema.

Com toda a formulação feita, foram propostos novos formatos zig-zag a fim de melhorar os resultados obtidos pela literatura.

Para os resultados, foram separados os exemplos a serem resolvidos e feito o desenvolvimento analítico para as condições de contorno de viga simplesmente apoiada. Com isso, os exemplos foram resolvidos para diversas combinações de funções zig-zag e cinemática a fim de observar o comportamento de cada combinação e eleger as melhores para cada caso. Por último, fez-se um estudo em separado dos resultados da análise de cisalhamento, comparando com as respostas inicialmente obtidas.

## 4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

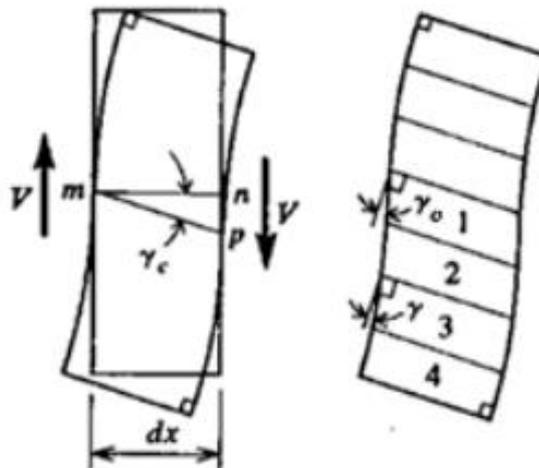
### 4.1 TEORIAS DE MODELAGEM DE VIGAS

A escolha de uma teoria para resolução de problemas de vigas depende de diversos fatores, dos quais a adoção de uma cinemática é fundamental para maior precisão em relação aos resultados experimentais. As diversas cinemáticas para vigas existentes se diferenciam quanto a capacidade de modelar fenômenos de interesse e, por nível de complexidade, tem-se: a teoria elementar de vigas (TEV), a mais simples, conhecida como teoria de Euler-Bernoulli, na sequência tem a adição da consideração do efeito de cisalhamento presente na teoria de deformação cisalhante de primeira ordem, conhecida como teoria de Timoshenko. Evoluindo a análise, tem-se as teorias que, adicionalmente ao efeito de cisalhamento, consideram tanto o efeito do empenamento da seção quanto a nulidade da tensão de cisalhamento nas bordas inferior e superior das vigas. Estas abordagens mais elaboradas são conhecidas como teoria de deformação cisalhante de alta ordem ou teoria refinada para vigas.

Como uma das mais antigas teorias para viga (século XVIII), a teoria Euler-Bernoulli tem vantagem por ser simples e com alta precisão para vigas que têm relação comprimento-altura muito grande, no entanto a mesma possui limitações por não considerar o efeito de deformação do cisalhamento na flexão. Devido a essa limitação, em 1921, o Engenheiro Stephen Timoshenko incluiu o efeito cisalhante, de maneira simples, à teoria de vigas por considerar a tensão de cisalhamento ser constante na seção transversal, por conta disso ela é classificada com teoria de deformação cisalhante de primeira ordem. No entanto, esta simplicidade proporciona imprecisão na interpretação das tensões e da deformação axial. Com o passar do tempo, surgiram outras teorias que consideravam essa tensão de cisalhamento variável ao longo da altura da viga, ou seja, de ordem superior (SAYYAD, 2011).

A Figura 2 mostra o comportamento da deformação de uma viga retangular considerando apenas o efeito do cisalhamento contemplado pelas teorias de alta ordem para vigas, no entanto, desprezado pela teoria clássica.

Figura 3: Deformação devido a tensão cisalhante em uma viga



Fonte: Timoshenko e Gere, 1983.

Segundo a teoria de Euler-Bernoulli, quando uma viga sofre deflexão, a mesma mantém as seções planas e perpendiculares à linha neutra. Já para a análise das vigas de Timoshenko as seções após deformadas continuam planas, porém não são mais perpendiculares a linha neutra, isso se deve ao fato de considerar tanto a rotação devido à flexão, ou seja, rotação equivalente à derivada primeira da deflexão, quanto a rotação devido ao cisalhamento. Por fim, as teorias de alta ordem não garantem a planicidade das seções após flexão.

#### 4.2 TEORIAS DE VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS

Os materiais compósitos são caracterizados por anisotropia, o que faz com que as suas relações constitutivas sejam formuladas de maneira mais completa se comparados aos materiais isotrópicos. Para o caso das vigas laminadas fibrosas, pode-se aproximar para um comportamento ortotrópico, visto que as suas propriedades mecânicas são diferentes em três direções do espaço (VISON e SIERAKOWSKI, 2008).

Realizada a adaptação comentada logo acima, faz-se necessário descrever o comportamento desses materiais trabalhando em conjunto, além disso, a interação entre essas lâminas. Por isso, existem as teorias de vigas laminadas que combinadas às cinemáticas de vigas isotrópicas (seção 1.2) fazem essa descrição.

A ESL (*equivalent single layer*) é uma teoria que condensa as propriedades do laminado em uma única camada por meio de uma ponderação entre as características de cada lâmina. Devido à particularidade da ESL, tanto a teoria clássica de viga, quanto as teorias com consideração de cisalhamento de primeira ordem e de ordem superior podem ser aplicadas (FARIA, 2006). Já a teoria LayerWise e Zig-Zag consideram separadamente cada camada, no entanto, diferenciam-se na consideração da hipótese de interação entre elas. Por estes fatos, LW e ZZ são teorias consideradas mais precisas quando comparadas com a ESL, entretanto, mais custosas computacionalmente. A teoria LayerWise apresenta resultados mais próximos aos valores reais por aproximar o comportamento de cada lâmina individualmente, enquanto que a teoria Zig-Zag é uma aproximação dos campos de deslocamentos da viga, o que apresenta maior erro relativo à LayerWise, porém uma relação entre resultado e custo computacional mais efetiva. Outra vantagem da teoria Zig-Zag em relação à LayerWise é sua simplicidade, uma vez que a LW tem o número de variáveis compatível com a quantidade de camadas o que representa muito mais incógnitas do que à abordagem ZZ (SAYYAD e GHUGAL, 2017).

#### 4.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VIGAS

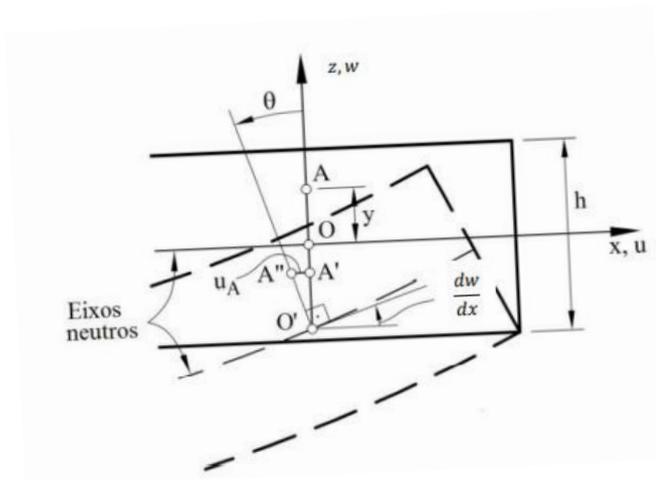
Há dois principais métodos de resolução: analítico e numérico. Na abordagem analítica, tem-se a metodologia de solução pelo procedimento de Navier, do método das funções de Green, métodos de energia entre outras técnicas de resolução de equações diferenciais parciais. Para problemas de vigas de alta ordem, deve-se escolher uma solução que satisfaça as condições de contorno e condições de equilíbrio (que se trata de um conjunto de equações diferenciais).

#### 4.4 HISTÓRICO E EVOLUÇÃO DA CINEMÁTICA ZIG-ZAG

Para vigas isotrópicas, as cinemáticas incorporam características geométricas que influenciam no deslocamento final de um corpo, submetido a um carregamento e condições de contorno. Como discutido para Euler Bernoulli, as seções após deformação

sem mantêm planas e perpendiculares à linha neutra, por isso a rotação total devido à deflexão se resume à derivada da própria linha elástica (Figura 4) como mostra a equação a seguir.

**Figura 4: Viga em estado indeformado e deformado para Euler-Bernoulli**



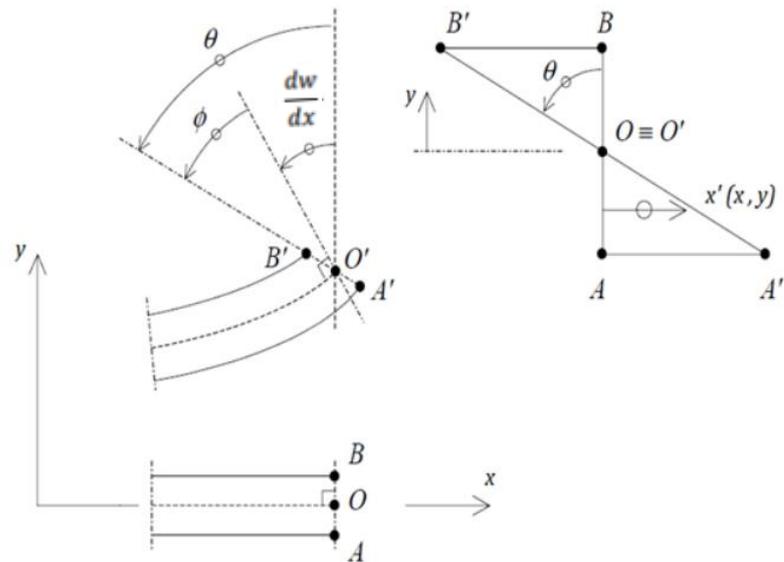
Fonte: Onate, 2013.

$$u(x, z) = u_0(x) - z w_0'(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (1)$$

Onde  $u_0$  representa o deslocamento axial na linha neutra e  $w_0$  o deslocamento vertical no eixo centroidal. Considerando o mesmo sistema de coordenadas da Figura 5, o engenheiro Stephen Timoshenko introduziu uma rotação adicional devido ao efeito do cisalhamento  $\phi$  e com isso, obteve um campo de tensão de cisalhamento constante (Figura 5). A cinemática de Timoshenko é descrita por:

**Figura 5: Viga em estado indeformado e deformado para Timoshenko**



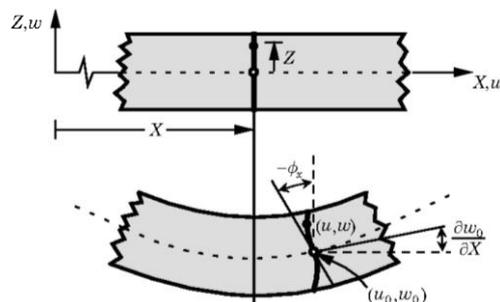
Fonte: adaptado de Oliveira, 2017.

$$u(x, z) = u_0(x) - z[w_0'(x) - \phi(x)]$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (2)$$

Nesta teoria, há uma particularidade, pois, é introduzido o fator de correção do cisalhamento que varia com as características geométricas da viga. Avançando para as teorias de alta ordem, o fator multiplicativo do ângulo devido ao cisalhamento não é mais linear e sim descrito por termos de alta ordem que pode ser apresentado de forma unificada (Figura 6).

**Figura 6: Viga em estado indeformado e deformado para Teoria de alta ordem**



Fonte: Payette e Reddy, 2013.

$$u(x, z) = u_0(x) - z w_0'(x) + f(z)\phi(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3)$$

As teorias Zig-Zag para laminados utilizam essas cinemáticas e acrescentam características específicas que descrevem o “efeito zig-zag” apresentado por esse tipo de material quando se desloca axialmente sob flexão. Nos trabalhos de 1984, Di Sciuva introduziu uma função linear que representa o comportamento do deslocamento axial de uma viga sob flexão, de modo que esta expressão, conhecida como “função Zig-Zag”, seja adicionada às cinemáticas clássicas (Euler-Bernoulli e Timoshenko) aumentando a parcela de deformação devido ao cisalhamento (DI SCIUVA, 1984). Já em Di Sciuva (1987), houveram melhorias na cinemática pela adição de uma parcela de deslocamento cúbico para problemas de placas. Esta formulação apresentou uma alta eficiência em termos de resultados e facilidade de resolução do sistema de equações. No entanto, para a implementação do método dos elementos finitos ela requer uma formulação de classe C1 para o deslocamento transversal, o que não é algo comum em teorias de vigas clássicas que usam funções C0.

Em Averill (1994), há uma solução para esse problema, formulando, inicialmente a teoria zig-zag em conjunto com a teoria de Timoshenko. Entretanto, surgiram algumas falhas na formulação, principalmente no campo de tensão cisalhante. Para resolver essa inconsistência, em 2007, Di Sciuva e Gherlone desenvolveram a teoria zig-zag refinada (RZT) que utiliza, também, a teoria cisalhante de primeira ordem (DI SCIUVA E GHERLONE, 2007).

$$u^{(k)}(x, z) = u_0(x) - z[w_0'(x) - \phi(x)] + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \tag{4}$$

Nesse caso,  $\phi_{zz}^{(k)}(z)$  é a função Zig-Zag dependente de uma camada  $k$  e  $\psi$  é uma função desconhecida que informa a amplitude da variação Zig-Zag ao longo do comprimento da viga. O modelo RZT propõe uma função Zig-Zag (Eq. 5) ponderada por deslocamentos entre as lâminas  $u_{zz}^{(k)}$  que provocam uma continuidade parcial da tensão de cisalhamento e, além disso, essa consideração consegue diferenciar a característica do material em cada lâmina.

$$\phi_{RZTzz}^{(k)}(z) = \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})u_{zz}^{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})u_{zz}^{(k)} \quad (5)$$

Por outro lado, em Murakami (1981) já havia proposto uma aproximação do comportamento dos deslocamentos nos laminados através de uma função geométrica. De igual modo, o mesmo obteve resultados com alta precisão por meio um sistema de simples resolução. A cinemática se manteve a mesma da equação 4, porém sua função Zig-Zag é dada por

$$\phi_{MURzz}^{(k)}(z) = \xi^{(k)}(-1^{(k)}) \quad (6)$$

Onde o fator  $\xi^{(k)}$ , comum às teorias RZT e Murakami, é descrito pela equação 7.

$$\xi^{(k)} = \frac{[-2z + (z^{(k)} + z^{(k-1)})]}{2h^{(k)}} \quad (7)$$

Outra observação é que a teoria de Murakami não considera, de maneira direta, a continuidade da tensão de cisalhamento e as diferenças entre os materiais das lâminas, pois sua cinemática é meramente geométrica.

Desde então, surgiram inúmero trabalhos relacionados às melhorias e aplicações práticas da teoria Zig-Zag. Em Gherlone, Tessler e Di Sciuva (2011) foi desenvolvido o método dos elementos finitos baseado em um elemento C0 com a teoria refinada RZT. Em Lurlaro (2013) foi realizado um estudo entre a RZT e outras teorias de vigas, mostrando o comportamento para flambagem e flexão, neste trabalho foi possível visualizar a diferença entre o campo de tensão calculado através das equações de equilíbrio e calculado através das relações constitutivas. Em Di Sciuva (2015) foi feito trabalho semelhante ao apresentado em 2011 pelo próprio autor, no entanto aplicando o MEF com elementos de alta ordem.

Todas as aplicações citadas no parágrafo anterior utilizaram a cinemática de Timoshenko, porém outros autores exploraram funções de alta ordem. Em Vidal (2018), foi desenvolvida uma formulação de elementos finitos para a função zig-zag de Murakami juntamente com uma função senoidal.

$$u^{(k)}(x, z) = u_0(x) - zw_0'(x) + \frac{h}{\pi} \text{Sin}\left(\frac{\pi}{h} z\right) \phi(x) + \phi_{MURzz}^{(k)}(z) \psi(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (8)$$

Além de funções senoidais, Zhen (2018), utilizou a cinemática de Reddy (1984) em conjunto com uma função Zig-Zag de alta ordem composta por funções de Murakami, conforme abaixo apresentado

$$u^{(k)}(x, z) = u_0(x) - zw_0'(x) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) \phi(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z) \psi(x)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (9)$$

$$\phi_{zz}^{(k)}(z) = \phi_{MURzz}^{(k)}(z) - \left[ \left(\frac{z^2}{2z_0}\right) + \left(\frac{2z^3 - 3z_0z^2}{12z_N^2}\right) \right] \frac{d\phi_{MURzz}^{(0)}(z)}{dz}$$

$$- \left[ \frac{2z^3 - 3z_0z^2}{12z_N^2} \right] \frac{d\phi_{MURzz}^{(N)}(z)}{dz}$$

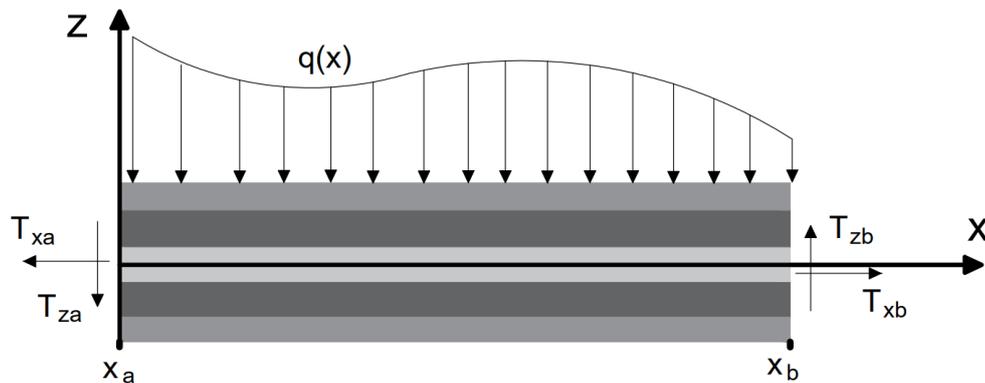
Os resultados tiveram maior precisão no campo de tensão de cisalhamento se comparado com os trabalhos com teorias de primeira ordem, porém ainda calculado através das equações integrais de equilíbrio. Surgiram, então, outros formados de alta ordem da função Zig-Zag a exemplo de Zhao (2019) que utilizou uma função Zig-Zag de alta ordem hiperbólica. Zhao (2019) obteve resultados em ordem de precisão semelhantes aos obtidos por Zhen (ZHEN, 2018). Atualmente, a utilização de teorias Zig-Zag de alta é cada vez mais explorada em diversos campos da engenharia, tais como em análise térmica, aerolástica (XIE, 2019) e dinâmica (Pirzadeh e Boroomand, 2020) em compósitos laminados.

## 5. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

### 5.1 CARACTERÍSTICAS INICIAIS

Considere uma viga laminada de comprimento  $L = x_b - x_a$  submetida a um carregamento distribuído variável  $q(x)$  e forças externas  $T$  nas direções  $x$  e  $z$  (Figura 6).

Figura 7: Viga laminada submetida aos esforços gerais



Fonte: Autoral, 2022.

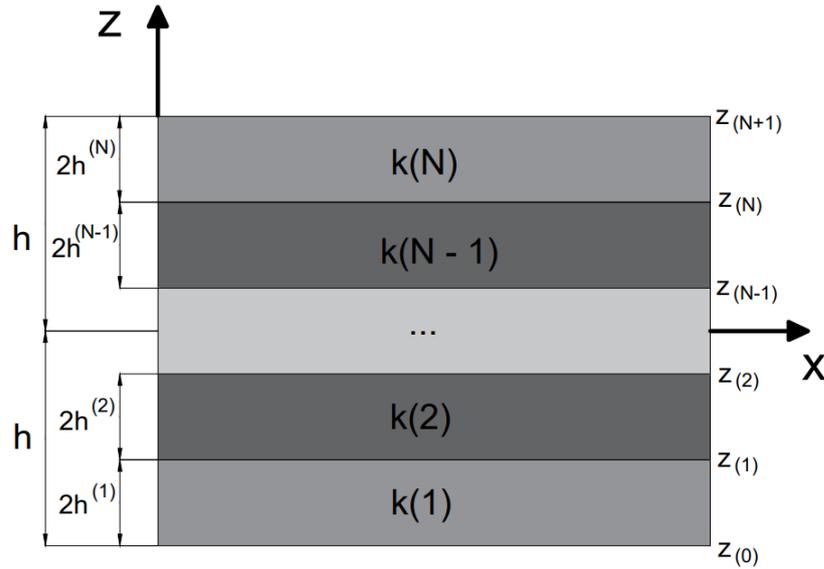
A viga está em situação livre, sem imposição de vinculações, porém, pode-se escrever o formato unificado de seu campo de deslocamento, utilizando a teoria Zig-Zag, como é mostrado na equação abaixo (Eq. 10).

$$u^{(k)}(x, z) = u_0(x) - zw_0'(x) + f(z)\phi(x) + \phi_{zz}^{(k)}(z)\psi(x)$$

$$w(x) = w_0(x) \quad (10)$$

O deslocamento axial  $u^{(k)}(x, z)$  varia seu formato conforme são analisadas cada camada da viga, o índice  $k$  representa o número dessas camadas variando de  $k = 1$  a  $k = N$ , que são, respectivamente, a primeira de última camadas (Figura 7). O deslocamento  $w(x)$ , para este contexto de vigas em análise bidimensional, não é dependente da posição entre camadas. Os demais termos são descritos da seguinte forma:  $u_0(x)$  é o deslocamento axial no eixo centroidal,  $w_0(x)$  é o deslocamento vertical no eixo centroidal,  $f(z)$  é a função geral de unificação das teorias de alta ordem de cisalhamento,  $\phi(x)$  é o ângulo devido ao cisalhamento,  $\phi_{zz}^{(k)}(z)$  é a função Zig-Zag e  $\psi(x)$  é uma função desconhecida que confere amplitude ao efeito zig-zag ao longo do comprimento da viga.

Figura 8: Características geométricas das lâminas



Fonte: Autoral, 2022.

É importante observar que a viga tem uma altura total de  $2h$  e cada camada tem sua altura local de  $2h^{(k)}$ , além disso há um único sistema de coordenadas global em  $z$  que varia desde de  $z_0 = -h$  à  $z_{N+1} = h$ . Logo, pode-se resumir as posições entre as lâminas com sendo  $z_{(i)}$  ( $i = 0, 2, \dots, N, N + 1$ ).

## 5.2 CAMPO DE DEFORMAÇÃO

A partir destas considerações, as expressões da equação 10 foram derivadas de modo a se obter as funções de deformação da viga, tanto na direção longitudinal ( $\varepsilon^{(k)}(x, z)$ ) quanto na direção transversal devido ao cisalhamento ( $\gamma^{(k)}(x, z)$ ). Tais derivadas estão descritas na equação 11, enquanto que as deformações são mostradas na equação 12.

$$\varepsilon^{(k)}(x, z) = \frac{du(x, z)}{dx}$$

$$\gamma^{(k)}(x, z) = \frac{du(x, z)}{dz} + \frac{dw(x)}{dx} \quad (11)$$

$$\varepsilon^{(k)}(x, z) = u'_0(x) - w''_0(x)z + \phi'(x)f(z) + \psi'(x)\phi_{ZZ}^{(k)}(z)$$

$$\gamma^{(k)}(x, z) = \phi(x)f'(z) + \psi(x)\beta^{(k)}(z) \quad (12)$$

Onde que  $\beta^{(k)}(z) = \phi_{ZZ}^{(k)'}(z)$  (primeira derivada da função Zig-Zag).

### 5.3 CAMPO DE TENSÃO

Através das relações constitutivas dos materiais e com base na Lei de Hooke, é possível relacionar tensões às deformações (Equação 13).

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(x, z) &= Q_{11}^{(k)} \varepsilon^{(k)}(x, z) \\ \tau^{(k)}(x, z) &= Q_{55}^{(k)} \gamma^{(k)}(x, z) \end{aligned} \quad (13)$$

Onde  $\sigma^{(k)}(x, z)$  representa a tensão normal e  $\tau^{(k)}(x, z)$  a tensão de cisalhamento da viga. Além disso, os termos constitutivos  $Q_{11}^{(k)}$  e  $Q_{55}^{(k)}$  são valores por camada que relacionam os módulos de elasticidades longitudinais e transversais, respectivamente, para materiais ortotrópicos. Esses termos são detalhados no apêndice A. Com isso,

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(x, z) &= Q_{11}^{(k)} \left[ u_0'(x) - w_0''(x)z + \phi'(x)f(z) + \psi'(x)\phi_{ZZ}^{(k)}(z) \right] \\ \tau^{(k)}(x, z) &= Q_{55}^{(k)} \left[ \phi(x)f'(z) + \psi(x)\beta^{(k)}(z) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

### 5.4 COMPORTAMENTO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO

Um dos desafios ao analisar um elemento de viga através da teoria Zig-Zag é a acurácia nos resultados da tensão de cisalhamento. Há duas formas para determinar o campo de tensão cisalhante: 1) por meio das relações constitutivas ou 2) por meio das equações de equilíbrio. Por conta de inconsistências na imposição da continuidade da

tensão de cisalhamento, a maioria dos os trabalhos existentes, que fazem uso da teoria Zig-Zag, até mesmo as de alta ordem, só conseguem apresentar resultados próximos aos exatos através das equações de equilíbrio.

No presente trabalho, foram analisadas as diversas formas de determinar e promover a continuidade da tensão de cisalhamento entre lâminas. Para a primeira Hipótese (HIP01), os campos de deslocamento, deformação e tensão são mantidos os iniciais (equações 10 a 14). Na HIP01 as tensões de cisalhamento apresentam comportamento descontínuo entre as camadas de materiais diferentes e menores erros nos resultados serão obtidos através das equações de equilíbrio.

A segunda hipótese (HIP02) considera que as tensões de cisalhamento nos pontos interlaminares sejam iguais. Tem-se, assim:

$$\tau^{(k)}(x, z_k) = \tau^{(k+1)}(x, z_k) \quad (15)$$

Substituindo a equação 14 na 15, é possível construir uma relação entre a rotação devido ao cisalhamento  $\phi(x)$  e a função amplitude zig-zag  $\psi(x)$ , como observado nas equações abaixo

$$Q_{55}^{(k)} [\phi(x) f'(z_{(k)}) + \psi(x) \beta^{(k)}(z_{(k)})] = Q_{55}^{(k+1)} [\phi(x) f'(z_{(k)}) + \psi(x) \beta^{(k+1)}(z_{(z)})]$$

$$\psi(x) = \frac{\phi(x) f'(z_{(k)}) [Q_{55}^{(k)} - Q_{55}^{(k+1)}]}{[\beta^{(k+1)}(z_{(z)}) Q_{55}^{(k+1)} - \beta^{(k)}(z_{(k)}) Q_{55}^{(k)}]}$$

$$\psi(x) = K_\beta \phi(x) \quad (16)$$

$$\text{Com } K_\beta = \frac{f'(z_{(k)}) [Q_{55}^{(k)} - Q_{55}^{(k+1)}]}{[\beta^{(k+1)}(z_{(z)}) Q_{55}^{(k+1)} - \beta^{(k)}(z_{(k)}) Q_{55}^{(k)}]}$$

Ao substituir a equação 16 nas relações de deslocamentos (equação 10), é possível reescrever todas as relações constitutivas em função da rotação  $\phi(x)$ , diminuindo o número de incógnitas do sistema e impondo o campo de cisalhamento contínuo.

## 5.5 TEORIAS DE VIGAS

Devido à existência de diversas cinemáticas na literatura (Reddy, 1990; Kruszewski, 1949; Touratier, 1991; Soldatos, 1992; Karama, 2003; Akavci, 2007), foi realizado um compilado de teorias de alta ordem para vigas e exposto na tabela 1. No presente trabalho, as formulações de alta ordem (tabela 1) serão comparadas quanto a sua precisão na obtenção dos campos de resposta, especificamente para materiais laminados.

**Tabela 1: Funções do cisalhamento de alta ordem para teorias de vigas**

<b>Autor</b>	<b><math>f(z)</math></b>
Reddy (1990) – RED90	$z \left( 1 - \frac{4z^2}{12h^2} \right)$
Kruszewski (1949) – KRU49	$\frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{12h^2} \right)$
Touratier (1991) – TOU91	$\frac{2h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{2h} \right)$
Soldatos (1992) – SOL92	$z \cosh \left( \frac{1}{2} \right) - 2h \sinh \left( \frac{z}{2h} \right)$
Karama et al. (2003) – KAR03	$z \exp \left[ -2 \left( \frac{z}{2h} \right)^2 \right]$
Akavci (2007) – AKA07	$\frac{3\pi}{2} \left[ 2h \tanh \left( \frac{z}{2h} \right) - z \sec^2 h \left( \frac{1}{2} \right) \right]$

Fonte: Autorial, 2022.

É interessante ressaltar que a formulação unificada também recupera a teoria clássica de Euler-Bernoulli e a teoria de vigas de Timoshenko para tanto faz-se necessário impor  $f(z) = 0$  e  $f(z) = z$ , respectivamente.

## 5.6 FUNÇÃO ZIG-ZAG

Além dos formatos de funções Zig-Zag presentes na literatura e apresentados no item 4, este trabalho propõe novas funções  $\phi_{ZZ}^{(k)}(z)$  adaptadas para teorias de alta ordem. A tabela abaixo (Tabela 2) mostra as diversas funções utilizadas nos problemas aqui estudados.

Tabela 2: Funções Ziz-Zag de Alta Ordem

Ordem/Autor	$\phi_{ZZ}^{(k)}(z)$
Muramaki (1981) – $(\phi_{MURZZ}^{(k)}(z))$	$\xi^{(k)}(-1^{(k)})$
Zhen (2018)	$\phi_{MURZZ}^{(k)}(z) - \left[ \left( \frac{z^2}{2 z_0} \right) + \left( \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right) \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(0)}(z)}{dz}$ $- \left[ \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(N)}(z)}{dz}$
Formato senoidal – ZZSEN (autoral)	$\text{Sin} \left[ \phi_{MURZZ}^{(k)}(z) \right] - \left[ \left( \frac{z^2}{2 z_0} \right) + \left( \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right) \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(0)}(z)}{dz}$ $- \left[ \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(N)}(z)}{dz}$
Formato hiperbólico – ZZHIP (autoral)	$\text{Sinh} \left[ \phi_{MURZZ}^{(k)}(z) \right] - \left[ \left( \frac{z^2}{2 z_0} \right) + \left( \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right) \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(0)}(z)}{dz}$ $- \left[ \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right] \frac{d\phi_{MURZZ}^{(N)}(z)}{dz}$
Formato exponencial – ZZEXP (autoral)	$e^{(2h^{(k)})^3} \left[ \phi_{MURZZ}^{(k)}(z) \right] - \left[ \left( \frac{z^2}{2 z_0} \right) + \left( \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right) \right] e^{2h^{(k)}} \frac{d\phi_{MURZZ}^{(0)}(z)}{dz}$ $- \left[ \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right] e^{2h^{(k)}} \frac{d\phi_{MURZZ}^{(N)}(z)}{dz}$
Formato hiperbólica-exponencial – ZZHE (autoral)	$\text{Sinh} \left[ \phi_{MURZZ}^{(k)}(z) \right] - \left[ \left( \frac{z^2}{2 z_0} \right) + \left( \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right) \right] e^{\frac{8}{3}h^{(k)}} \frac{d\phi_{MURZZ}^{(0)}(z)}{dz}$ $- \left[ \frac{2 z^3 - 3 z_0 z^2}{12 z_N^2} \right] e^{\frac{8}{3}h^{(k)}} \frac{d\phi_{MURZZ}^{(N)}(z)}{dz}$

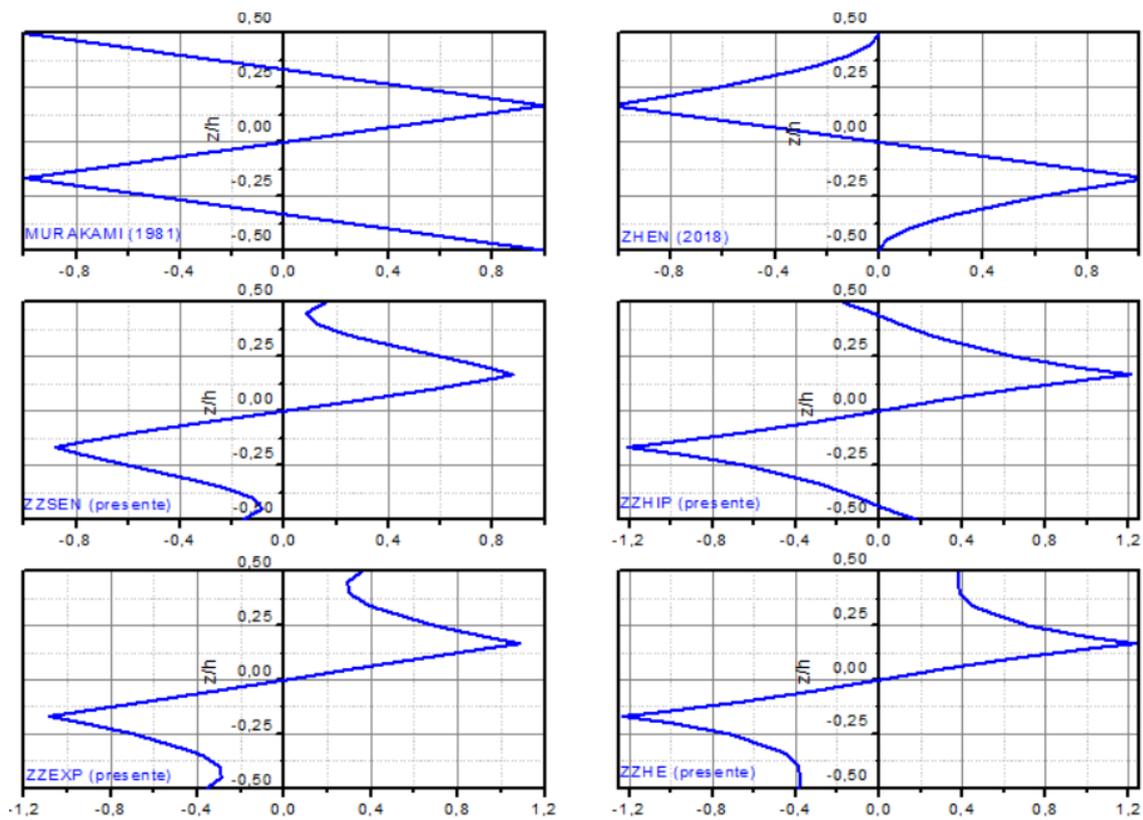
Fonte: Autoral, 2022.

Essas funções foram desenvolvidas de modo a atender as seguintes condições:

- 1) comportamento “zig-zag” aos campos de deslocamento axiais da viga e
- 2) nulidade das tensões cisalhantes nas bordas superior e inferior do laminado, ou seja,  $\tau^{(1)}(x, z_{(0)}) = \tau^{(N)}(x, z_{(N)}) = 0$ .

Os formatos  $\phi_{ZZ}^{(k)}(z)$  propostos neste trabalho foram ZZSEN, ZZHIP, ZZEXP e ZZHE (ver Tabela 2). A figura abaixo apresenta o comportamento das funções zig-zag analisadas.

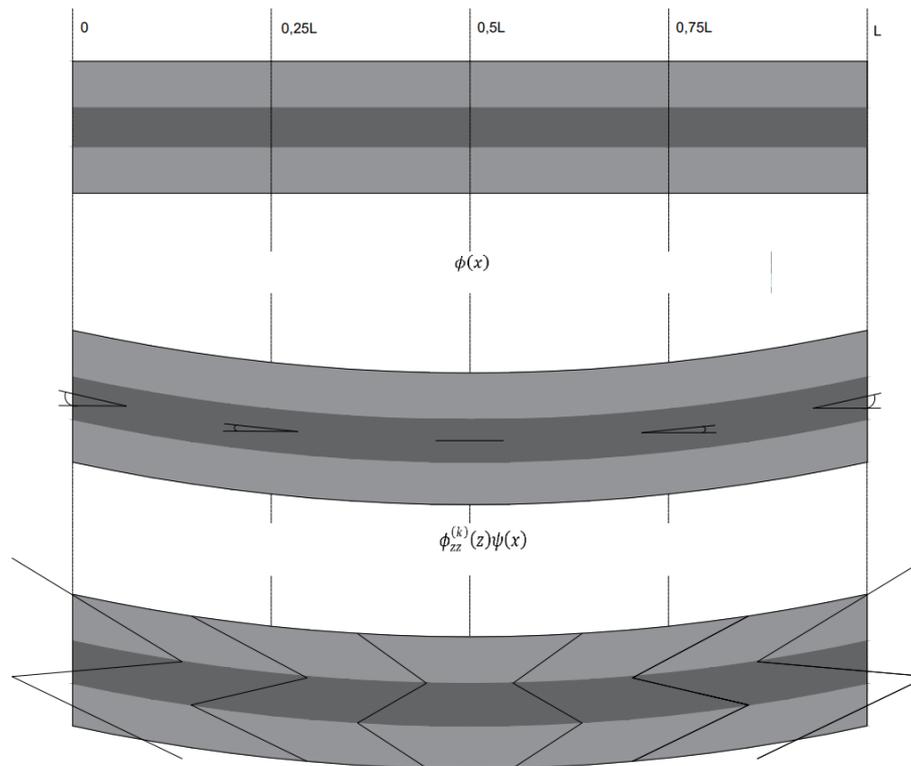
**Figura 9: Comportamentos Zig-Zag dos formatos propostos para um exemplo numérico de 3 camadas.**



Fonte: Autoral, 2022.

Além das cinemáticas (Tabela 1) e funções zig-zag (Tabela 2) outro fator importante na formulação da teoria é a função amplitude  $\psi(x)$ . Estudar seu comportamento é importante visto que  $\psi(x)$  influencia no entendimento da relação proporcional apresentada na HIP2 (Eq. 16). A função  $\psi(x)$  pode ser comparada com um ângulo que ocorre devido ao efeito zig-zag no momento da flexão, a figura 9 mostra essa variação em um exemplo genérico, é possível notar o significado físico da relação proporcional entre esses ângulos.

**Figura 10: Significado físico da função amplitude zig-zag.**



Fonte: Autoral, 2022.

## 5.7 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para a HIP1 os campos de deslocamento, deformação e tensão desenvolvidos nesta seção são utilizados para, através do princípio variacional, formular as equações de equilíbrio do problema. Considere que a viga mostrada na figura 6 tem um volume genérico  $V$ , a variação da energia interna desse corpo, escrita em função de tensões e deformações, é da forma de

$$\delta U = \int_V (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz}^{(k)}) dV \quad (17)$$

O símbolo  $\delta$  denota o operador variacional. Considerando os carregamentos externos, é possível escrever a variação da energia externa também.

$$\begin{aligned}
\delta V = & - \int_L q(x) \delta w(x) dx - \int_A \left( T_{ax}(x_a) \delta u^{(k)}(X_a, z) + T_{az}(z) \delta w(X_a) \right) dA \\
& + \int_A \left( T_{bx}(x_b) \delta u^{(k)}(X_b, z) + T_{bz}(z) \delta w(X_b) \right) dA
\end{aligned} \tag{18}$$

Para que se mantenha o equilíbrio essas expressões de energia devem ser equivalentes.

$$\delta U - \delta V = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{X_a}^{X_b} \int_A \left( \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz}^{(k)} \right) dA dx + \int_{X_a}^{X_b} q(x) \delta w(x) dx \\
& + \int_A \left( T_{ax}(x_a) \delta u^{(k)}(X_a, z) + T_{az}(z) \delta w(X_a) \right) dA \\
& - \int_A \left( T_{bx}(x_b) \delta u^{(k)}(X_b, z) + T_{bz}(z) \delta w(X_b) \right) dA = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Ao substituir as expressões de deformação e deslocamentos é possível definir os esforços internos (equações 21) e externos (equações 22) do problema, observe

$$\begin{aligned}
& \int_{X_a}^{X_b} \int_A \left( \sigma_x^{(k)} \delta \left[ u_0'(x) - w''(x)z + \phi'(x)f(z) + \psi'(x)\phi_{ZZ}^{(k)}(z) \right] \right. \\
& \quad \left. + \tau_{xz}^{(k)} \delta [\phi(x)f'(z) + \psi(x)\beta^{(k)}(z)] \right) dA dx + \int_{X_a}^{X_b} q(x) \delta w(x) dx \\
& + \int_A \left( T_{ax}(x_a) \delta \left[ u_0(x_a) - \frac{dw(x_a)}{dx} z + \phi(x_a)f(z) + \psi(x_a)\phi_{ZZ}^{(k)}(z) \right] \right. \\
& \quad \left. + T_{az}(z) \delta w(X_a) \right) dA \\
& - \int_A \left( T_{bx}(x_b) \delta \left[ u_0(x_b) - \frac{dw(x_b)}{dx} z + \phi(x_b)f(z) + \psi(x_b)\phi_{ZZ}^{(k)}(z) \right] \right. \\
& \quad \left. + T_{bz}(z) \delta w(X_b) \right) dA = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_A \sigma_x^{(k)} dA \\
M_x &= \int_A z \sigma_x^{(k)} dA \\
M_\phi &= \int_A f(z) \sigma_x^{(k)} dA \\
M_{zz} &= \int_A \phi_{zz}^{(k)}(z) \sigma_x^{(k)} dA \\
V_\phi &= \int_A f'(z) \tau_{xz}^{(k)} dA \\
V_\beta &= \int_A \beta^{(k)}(z) \tau_{xz}^{(k)} dA
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\Delta = a \text{ ou } \Delta = b$$

$$\begin{aligned}
\overline{N_{x\Delta}} &= \int_A T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{M_{x\Delta}} &= \int_A z T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{M_{\phi\Delta}} &= \int_A f(z) T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{M_{zz\Delta}} &= \int_A \phi_{zz}^{(k)}(z) T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{V_{x\Delta}} &= \int_A T_{\Delta z}(z) dA
\end{aligned} \tag{22}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
&\int_{x_a}^{x_b} \delta u'_0(x) N_x - \delta w''(x) M_x + \delta \phi'(x) M_\phi + \delta \psi'(x) M_{zz} + \delta \phi(x) V_\phi \\
&\quad + \delta \psi(x) V_\beta + q(x) \delta w(x) dx - [\overline{N_{xb}} \delta u_0(x_b) - \overline{N_{xa}} \delta u_0(x_a)] \\
&\quad + [\overline{M_{xb}} \delta w'(x_b) - \overline{M_{xa}} \delta w'(x_a)] - [\overline{M_{\phi b}} \delta \phi(x_b) - \overline{M_{\phi a}} \delta \phi(x_a)] \\
&\quad - [\overline{M_{zbb}} \delta \psi(x_b) - \overline{M_{zba}} \delta \psi(x_a)] - [\overline{V_{xb}} \delta w(x_b) - \overline{V_{xa}} \delta w(x_a)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(23)

Note que para o presente desenvolvimento formulacional, tem-se esforço normal, cortante e fletor clássicos ( $N_x$ ,  $V_x$  e  $M_x$ ) e aparecem outros tipos de esforços denominados de momento e cortante devido à rotação do cisalhamento ( $M_\phi$  e  $V_\phi$ ) e o momento e cortante devido ao efeito zig-zag ( $M_{zz}$  e  $V_\beta$ ). Em sequência, utiliza-se a regra do produto para eliminar as derivadas dos termos variacionais e deixar explícita a condição de equilíbrio do sistema.

$$\begin{aligned}
& \int_{x_a}^{x_b} N'_x(x, z) \delta u_0(x) + [V_\phi(x, z) - M'_\phi(x, z)] \delta \phi(x) \\
& + [V_\beta(x, z) - M'_{zz}(x, z)] \delta \psi(x) - [M''_x(x, z) - q(x)] \delta w(x) dx \\
& - [N_x(x_\Delta, z) - \overline{N_{x\Delta}}(x_\Delta, z)] \delta u_0(x_\Delta) \\
& + [M_x(x_\Delta, z) - \overline{M_{x\Delta}}(x_\Delta, z)] \delta w'(x_\Delta) \\
& - [M_\phi(x_\Delta, z) - \overline{M_{\phi\Delta}}(x_\Delta, z)] \delta \phi(x_\Delta) \\
& - [M_{zz}(x_\Delta, z) - \overline{M_{zz\Delta}}(x_\Delta, z)] \delta \psi(x_\Delta) \\
& - [M'_x(x_\Delta, z) - \overline{V_{x\Delta}}(x_\Delta)] \delta w(x_\Delta) = 0
\end{aligned}
\tag{24}$$

Então, para que a expressão 24 seja nula, os termos que multiplicam os operadores variacionais devem ser nulos também. A partir deste pensamento, surgem as equações de equilíbrio e as condições de contorno do problema.

$$\begin{aligned}
N_x(x_\Delta, z) &= \overline{N_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } u_0(x_\Delta) \\
M_x(x_\Delta, z) &= \overline{M_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } w'(x_\Delta) \\
M_\phi(x_\Delta, z) &= \overline{M_{\phi\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } \phi(x_\Delta) \\
M_{zz}(x_\Delta, z) &= \overline{M_{zz\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } \psi(x_\Delta) \\
M'_x(x_\Delta, z) &= \overline{V_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } w(x_\Delta)
\end{aligned}
\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
N'_x(x, z) &= 0; \\
M''_x(x, z) &= q(x); \\
M'_\phi(x, z) &= V_\phi(x, z); \\
M'_{zz}(x, z) &= V_\beta(x, z);
\end{aligned}$$

(26)

Substituindo os valores do campo e tensão no conjunto de equações 21 e, em seguida, alocando esse resultado nas equações 26, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
Au_0''(x) - A_z w'''(x) + B\phi''(x) + D\psi''(x) &= 0; \\
A_z u_0'''(x) - A_{zz} w''''(x) + B_z \phi'''(x) + D_z \psi'''(x) &= q(x); \\
Bu_0''(x) - B_z w'''(x) + B_f \phi''(x) + D_f \psi''(x) &= G_f \phi(x) + G\psi(x); \\
Du_0''(x) - D_z w'''(x) + D_f \phi''(x) + D_\phi \psi''(x) &= G\phi(x) + G_\beta \psi(x);
\end{aligned}
\tag{27}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
(A, A_z, A_{zz}) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z^2 Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(B, B_z, B_f) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} f(z) Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z f(z) Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} f(z)^2 Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(D, D_z) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \phi_{ZZ}^{(k)}(z) Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z \phi_{ZZ}^{(k)}(z) Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(D_f, D_\phi) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \phi_{ZZ}^{(k)}(z) f(z) Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \phi_{ZZ}^{(k)}(z)^2 Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(G, G_f, G_\beta) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} f'(z) \beta^{(k)}(z) Q_{55}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} f'(z)^2 Q_{55}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \beta^{(k)2}(z) Q_{55}^{(k)} dz \right)
\end{aligned}
\tag{28}$$

Na HIP2, faz-se a substituição da equação 16 e, realizando processo análogo, obtém-se os seguintes resultados:

Para os esforços,

$$N_x = \int_A \sigma_x^{(k)} dA$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_A z \sigma_x^{(k)} dA \\
M_{ZZ} &= \int_A [f(z) + K_\beta \phi_{ZZ}^{(k)}(z)] \sigma_x^{(k)} dA \\
V_\beta &= \int_A [f'(z) + K_\beta \beta^{(k)}(z)] \tau_{xz}^{(k)} dA
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\overline{N_{x\Delta}} &= \int_A T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{M_{x\Delta}} &= \int_A z T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{M_{ZZ\Delta}} &= \int_A [f(z) + K_\beta \phi_{ZZ}^{(k)}(z)] T_{\Delta x}(x_\Delta) dA \\
\overline{V_{x\Delta}} &= \int_A T_{\Delta z}(z) dA
\end{aligned} \tag{30}$$

Para as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
N_x(x_\Delta, z) &= \overline{N_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } u_0(x_\Delta) \\
M_x(x_\Delta, z) &= \overline{M_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } w'(x_\Delta) \\
M_{ZZ}(x_\Delta, z) &= \overline{M_{\phi\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } \phi(x_\Delta) \\
M'_x(x_\Delta, z) &= \overline{V_{x\Delta}}(x_\Delta, z) \text{ ou } w(x_\Delta)
\end{aligned} \tag{31}$$

Para as equações de equilíbrio,

$$\begin{aligned}
N'_x(x, z) &= 0; \\
M''_x(x, z) &= q(x); \\
M'_{ZZ}(x, z) &= V_\beta(x, z);
\end{aligned} \tag{32}$$

Em resumo,

$$A u''_0(x) - A_z w'''(x) + B \phi''(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
A_z u_0'''(x) - A_{zz} w''''(x) + B_z \phi'''(x) &= q(x) \\
B u_0''(x) - B_z w''''(x) + B_{zz} \phi''(x) &= G\phi(x)
\end{aligned}$$

(33)

$$\begin{aligned}
(A, A_z, A_{zz}) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z^2 Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(B, B_z, B_f) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [f(z) + K_\beta \phi_{zz}^{(k)}(z)] Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z [f(z) \right. \\
&\quad \left. + K_\beta \phi_{zz}^{(k)}(z)] Q_{11}^{(k)} dz, \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [f(z) + K_\beta \phi_{zz}^{(k)}(z)]^2 Q_{11}^{(k)} dz \right) \\
(G) &= b \left( \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [f'(z) + K_\beta \beta^{(k)}(z)]^2 Q_{55}^{(k)} dz \right)
\end{aligned}$$

(34)

A partir disso, tem-se as equações de domínio e de contorno necessária para a modelagem de compósitos por meio da teoria zigue-zague.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir do sistema de equações parciais de equilíbrio e das condições de contorno de cada problema, é possível resolver os problemas que serão apresentados nesta seção. Para a vinculação de viga simplesmente apoiada, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$w(x) = M_x(x, z) = M_{zz}(x, z) = M_\phi(x, z) = 0 \text{ para } x = L = 0$$

Usando a solução de Navier, os campos de deslocamentos são aproximados pelas expressões trigonométricas abaixo.

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \text{sen} \left( \frac{j\pi x}{L} \right)$$

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j} \text{cos} \left( \frac{j\pi x}{L} \right)$$

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \text{cos} \left( \frac{j\pi x}{L} \right)$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \text{cos} \left( \frac{j\pi x}{L} \right)$$

(35)

### 6.1 PROBLEMAS RESOLVIDOS

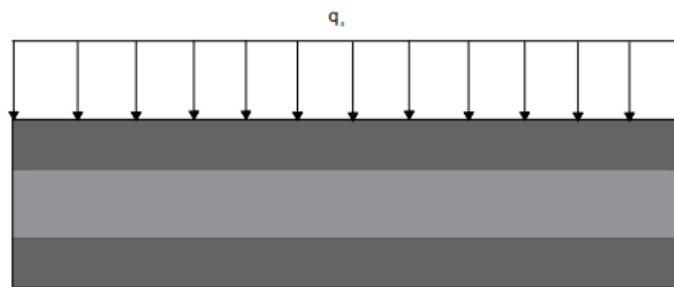
Houve grande variação das características dos exemplos resolvidos, dentre elas, tipo de carregamento, geometria das camadas, número de camadas, direção das fibras do material e formas de resolução. Os carregamentos variaram entre carga pontual, carregamento uniformemente distribuído e carregamento senoidal (Figura 10).

$q(x) = q_0$  – carregamento uniformemente distribuído

$$q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \text{ – carregamento senoidal}$$

$q(x) = P\delta_d(x - X)$  – carregamento pontual

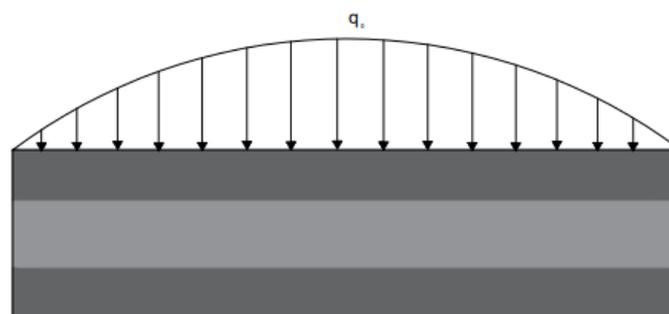
**Figura 11: Tipos de carregamentos.**



CARREGAMENTO UNIFORME



CARREGAMENTO PONTUAL



CARREGAMENTO SENOIDAL

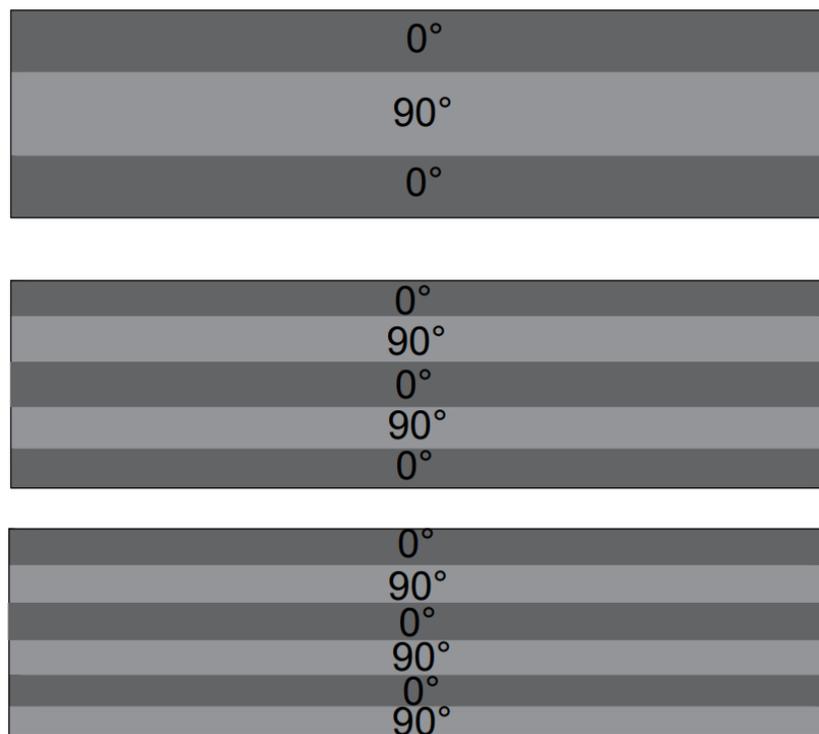
Fonte: Autorial, 2022.

Onde  $\delta_d$  representa o comportamento da função Delta de Dirac. O material utilizado na resolução dos exemplos são vigas laminadas reforçadas por fibras, suas propriedades se resumem em

$$E_x = 25 \text{ MPa} \quad E_y = 1 \text{ MPa}; \quad G_{xy} = 0,5 \text{ MPa}; \quad G_{yz} = 0,2 \text{ MPa};$$

As possíveis configurações de lâminas e distribuição de fibras utilizadas são as que seguem

**Figura 12: Configurações de lâminas e fibras**



Fonte: Autoral, 2022.

Para uma altura total  $2h$ , cada configuração apresentada divide suas lâminas igualmente.

## 6.2 REFERÊNCIAS DE COMPARAÇÃO

Os resultados deste trabalho foram comparados com os valores das formulações analíticas de Pagano (1969). Em alguns casos, foi utilizada como paralelo os resultados de Liu e Lu (1992) utilizando a teoria LayerWise.

As comparações feitas se basearam em valores de pontos específicos, média de erros relativos dos gráficos e por qualitativa do formato das funções. Para tornar as respostas independentes dos dados de entrada, foram utilizados os seguintes formatos adimensionais:

$$u_a^{(k)}(x, z) = \frac{u^{(k)}(x, z)E_y b}{2hq_0}$$

$$\sigma_a^{(k)}(x, z) = \frac{\sigma^{(k)}(x, z)b}{q_0}$$

$$\tau_a^{(k)}(x, z) = \frac{\tau^{(k)}(x, z)b}{q_0}$$

$$w_a(x) = \frac{w(x)800E_y b h^3}{L^4 q_0}$$

Outro fator importante é a relação entre o comprimento da viga e sua altura total, visto que estes valores mudam a natureza dos resultados e existem teorias mais adequadas para cada faixa de  $S$ .

$$S = \frac{L}{2h}$$

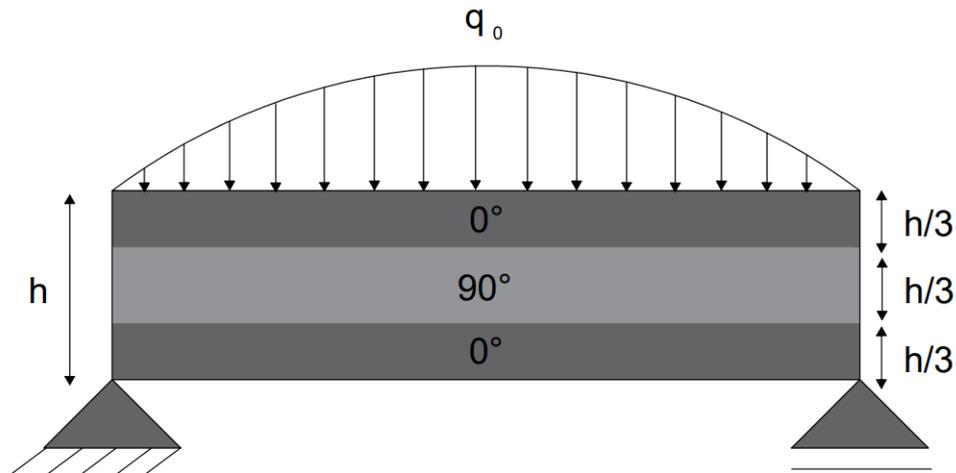
## 6.3 ANÁLISE DE GRÁFICOS

### 6.3.1 EXEMPLO 1

Para validar as hipóteses comentadas nas últimas seções foi realizada uma série de exemplos variando características iniciais do problema. Foi analisada uma viga com 3

lâminas (Figura 12). Esta viga foi submetida a um carregamento senoidal e possui vinculação de simplesmente apoiada, possuindo seção retangular com largura  $b$  e altura das lâminas divididas igualmente. A orientação das fibras foi alternada entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  em relação à horizontal.

**Figura 13: Viga resolvida no exemplo 1**



Fonte: Autoral, 2022.

Este primeiro problema (exemplo 1) tem o objetivo de comparar os resultados das combinações das teorias de alta ordem cisalhante com as funções zig-zag de alta ordem a fim de observar as combinações mais precisas. Foram comparados os valores da deflexão no meio do vão, do deslocamento axial, da tensão normal no topo da viga e da tensão de cisalhamento em seu eixo. Os valores de referência adimensionais foram obtidos pela teoria da elasticidade (Pagano, 1969) e pela teoria LayerWise (1992). A tabela 3 mostra os valores de referência para os campos de resposta analisados em pontos críticos específicos.

**Tabela 3: Resultados de referência para o exemplo 1.**

Resultado	Pagano (1969)	Lu e Liu (1992)
$w\left(\frac{L}{2}\right)$	-2,8919	-2,9112 $e_{rel}: 0,67\%$
$u(L, h)$	-0,9330	-0,9396 $e_{rel}: 0,71\%$
$\sigma\left(\frac{L}{2}, h\right)$	18,6791	18,4494 $e_{rel}: 1,23\%$
$\tau(0, 0)$	1,4299	1,4256 $e_{rel}: 0,30\%$

Fonte: Autoral, 2022.

O erro relativo acima é calculado sempre em referência ao valor analítico de Pagano (1969) e é dado por

$$e_{rel}(\%) = \left( \frac{X_j - x_j}{x_j} \right) 100$$

Nesse caso,  $X_j$  é o valor calculado e  $x_j$  é o valor de referência. Por outro lado, as teorias zig-zag obtiveram os seguintes resultados mostrados na tabela 4

**Tabela 4: Resultados das combinações zig-zag de alta ordem para o exemplo 1 para HIP1.**

Resultados	$f(z)$	Zhen (2018)	ZZSEN (2022)	ZZHIP (2022)	ZZEXP (2022)	ZZHE (2022)
$w\left(\frac{L}{2}\right)$	<b>RED90</b>	-2,8825	-2,8624	-2,8827	-2,8970	-2,9087
		$e_{rel}: 0,33\%$	$e_{rel}: 1,02\%$	$e_{rel}: 0,32\%$	$e_{rel}: 0,18\%$	$e_{rel}: 0,58\%$
	<b>KRU49</b>	-2,8825	-2,8624	-2,8827	-2,8970	-2,9087
		$e_{rel}: 0,33\%$	$e_{rel}: 1,02\%$	$e_{rel}: 0,32\%$	$e_{rel}: 0,18\%$	$e_{rel}: 0,58\%$
	<b>TOU91</b>	-2,8645	-2,8470	-2,8668	-2,8844	-2,8997
		$e_{rel}: 0,95\%$	$e_{rel}: 1,55\%$	$e_{rel}: 0,87\%$	$e_{rel}: 0,26\%$	$e_{rel}: 0,27\%$
<b>SOL92</b>	-2,8839	-2,8636	-2,8839	-2,8978	-2,9091	
	$e_{rel}: 0,28\%$	$e_{rel}: 0,98\%$	$e_{rel}: 0,28\%$	$e_{rel}: 0,21\%$	$e_{rel}: 0,59\%$	
<b>KAR03</b>	-2,8428	-2,8285	-2,8486	-2,8659	-2,8839	
	$e_{rel}: 1,70\%$	$e_{rel}: 2,19\%$	$e_{rel}: 1,49\%$	$e_{rel}: 0,90\%$	$e_{rel}: 0,28\%$	
<b>AKA07</b>	-2,8704	-2,8280	-2,8722	-2,8889	-2,8965	
	$e_{rel}: 0,74\%$	$e_{rel}: 2,20\%$	$e_{rel}: 0,68\%$	$e_{rel}: 0,10\%$	$e_{rel}: 0,16\%$	
$u(L, h)$	<b>RED90</b>	-0,9736	-0,9422	-0,9896	-0,9416	-0,9505
		$e_{rel}: 4,35\%$	$e_{rel}: 0,99\%$	$e_{rel}: 6,07\%$	$e_{rel}: 0,92\%$	$e_{rel}: 1,88\%$
	<b>KRU49</b>	-0,9736	-0,9422	-0,9896	-0,9416	-0,9505
		$e_{rel}: 4,35\%$	$e_{rel}: 0,99\%$	$e_{rel}: 6,07\%$	$e_{rel}: 0,92\%$	$e_{rel}: 1,88\%$
	<b>TOU91</b>	-0,9829	-0,9550	-0,9979	-0,9571	-0,9667
		$e_{rel}: 5,35\%$	$e_{rel}: 2,36\%$	$e_{rel}: 6,96\%$	$e_{rel}: 2,58\%$	$e_{rel}: 3,61\%$
<b>SOL92</b>	-0,9727	-0,9410	-0,9888	-0,9402	-0,9489	
	$e_{rel}: 4,26\%$	$e_{rel}: 0,86\%$	$e_{rel}: 5,98\%$	$e_{rel}: 0,77\%$	$e_{rel}: 1,70\%$	
<b>KAR03</b>	-0,9905	-0,9663	-1,0043	-0,9709	-0,9811	
	$e_{rel}: 6,16\%$	$e_{rel}: 3,57\%$	$e_{rel}: 7,64\%$	$e_{rel}: 4,06\%$	$e_{rel}: 5,15\%$	
<b>AKA07</b>	-0,9801	-0,9664	-0,9954	-0,9525	-0,9752	
	$e_{rel}: 5,05\%$	$e_{rel}: 3,58\%$	$e_{rel}: 6,69\%$	$e_{rel}: 2,09\%$	$e_{rel}: 4,52\%$	

$\sigma\left(\frac{L}{2}, h\right)$	<b>RED90</b>	19,1175 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,35%	18,4999 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,96%	19,4317 <i>e<sub>rel</sub></i> : 4,03%	18,4887 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,02%	18,6632 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,09%
	<b>KRU49</b>	19,1175 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,35%	18,4999 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,96%	19,4317 <i>e<sub>rel</sub></i> : 4,03%	18,4887 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,02%	18,6632 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,09%
	<b>TOU91</b>	19,2995 <i>e<sub>rel</sub></i> : 3,32%	18,7510 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,38%	19,5938 <i>e<sub>rel</sub></i> : 4,89%	18,7927 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,61%	18,9817 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,62%
	<b>SOL92</b>	19,0998 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,25%	18,4761 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,09%	19,4157 <i>e<sub>rel</sub></i> : 3,95%	18,4600 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,17%	18,6631 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,08%
	<b>KAR03</b>	19,4486 <i>e<sub>rel</sub></i> : 4,12%	18,9745 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,58%	19,7199 <i>e<sub>rel</sub></i> : 5,57%	19,0646 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,06%	19,2649 <i>e<sub>rel</sub></i> : 3,13%
	<b>AKA07</b>	19,2446 <i>e<sub>rel</sub></i> : 3,03%	18,9743 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,58%	19,5453 <i>e<sub>rel</sub></i> : 4,64%	18,7016 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,12%	19,1032 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,27%
	<b>RED90</b>	1,4051 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,73%	1,4132 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,17%	1,4125 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,22%	1,4132 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,17%	1,4213 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,60%
	<b>KRU49</b>	1,4051 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,73%	1,4132 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,17%	1,4125 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,22%	1,4132 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,17%	1,4213 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,60%
	<b>TOU91</b>	1,3989 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,17%	1,4071 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,59%	1,4056 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,70%	1,4022 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,94%	1,4071 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,59%
	<b>SOL92</b>	1,4057 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,69%	1,4138 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,13%	1,4132 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,18%	1,4142 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,10%	1,4226 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,51%
$\tau(0, 0)$	<b>KAR03</b>	1,3945 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,48%	1,4019 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,96%	1,3965 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,33%	1,3921 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,64%	1,3936 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,54%
	<b>AKA07</b>	1,4007 <i>e<sub>rel</sub></i> : 2,04%	1,4018 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,97%	1,4066 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,63%	1,4055 <i>e<sub>rel</sub></i> : 1,70%	1,4173 <i>e<sub>rel</sub></i> : 0,88%

Fonte: Autoral, 2022.

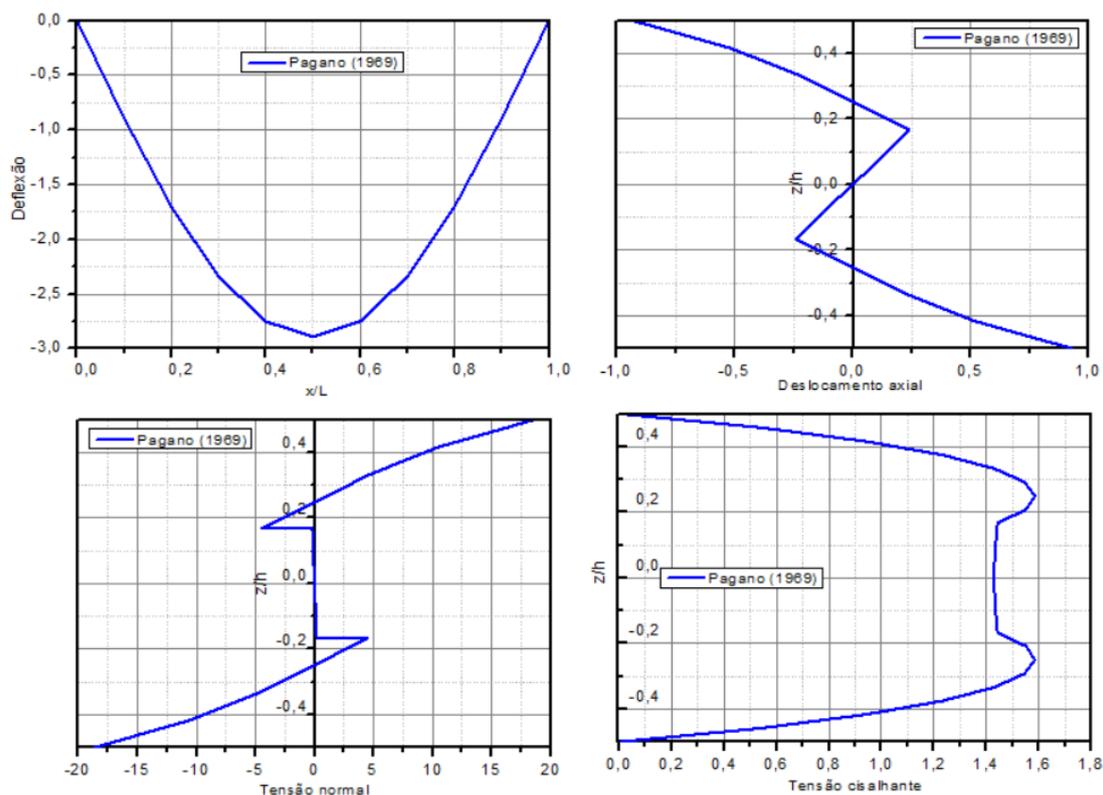
É importante mencionar que os resultados de tensão do cisalhamento para este exemplo foram obtidos por equação de equilíbrio, processo descrito no trabalho de Reddy (2004). Foi observado que os resultados recuperados pela teoria de Kruszewski (1949) e Reddy (1990) tem diferença irrisória. Na tabela 4, é observado que, de maneira geral, os resultados de pico com menor erro relativo foram os da deflexão e os resultados que apresentaram maior erro foram os do deslocamento axial, é notório, também, que os formatos zig-zag ZZEXP e ZZHE apresentaram melhores resultados em relação às demais. Por outro lado, as cinemáticas que apresentaram melhor desempenho a maioria dos casos foram RED90, KRU49 e SOL92. Esta análise é importante para dimensionamento de peças, pois geralmente se faz utilizando os valores de pico de tensões e deslocamentos.

Além disso, foi calculado a métrica de erro denominada WAPE (*Weighted Absolute Percentage Error*) para todos os pontos de cada gráfico, de modo que a análise não se restrinja apenas a pontos isolados. Esses resultados são comparados aos resultados analíticos de Pagano (Pagano, 1969). Para esta análise, a métrica WAPE foi escolhida pois tem a vantagem de conseguir representar os erros para poucos pontos e, além disso, ao utilizar a normalização os erros para números pequenos e grandes são tratados de maneira igualitária (RIVA, 2021). Outros parâmetros indicadores do erro, tais como o erro absoluto médio majora o erro entre números grandes em relação aos pequenos. Já as métricas de erro relativo médio e a norma L2, melhoram os erros entre números pequenos (menores que 1). Diante do exposto a métrica WAPE foi adotada e a sua quantificação é dada por:

$$WAPE (\%) = 100 \frac{\sum_{j=1}^n |x_j - X_j|}{\sum_{j=1}^n |X_j|}$$

Nesse caso,  $x_j$  é o ponto calculado e  $X_j$  é o valor de referência.

**Figura 14: gráficos completos dos resultados de referência do exemplo 1.**



Fonte: Autoral, 2022.

Tabela 5: WAPE dos gráficos completos do exemplo 1.

Resultados	$f(z)$	Zhen (2018)	ZZSEN (2022)	ZZHIP (2022)	ZZEXP (2022)	ZZHE (2022)	Lu e Liu (1992)
$w(x)$	RED90	0,34%	1,02%	0,32%	0,18%	0,58%	0,67%
	KRU49	0,34%	1,02%	0,32%	0,18%	0,58%	
	TOU91	0,95%	1,55%	0,89%	0,26%	0,27%	
	SOL92	0,28%	0,98%	0,28%	0,20%	0,59%	
	KAR03	1,70%	2,21%	1,56%	0,90%	0,28%	
	AKA07	0,74%	2,21%	0,68%	0,11%	0,27%	
$u(x, z)$	RED90	9,91%	8,94%	10,95%	6,24%	6,63%	6,52%
	KRU49	9,91%	8,94%	10,95%	6,24%	6,63%	
	TOU91	12,22%	11,39%	13,14%	7,82%	7,10%	
	SOL92	9,69%	8,75%	10,74%	6,10%	6,69%	
	KAR03	14,29%	13,64%	15,07%	10,36%	9,43%	
	AKA07	11,51%	13,64%	12,47%	7,29%	7,10%	
$\sigma(x, z)$	RED90	6,33%	7,03%	6,39%	3,54%	1,10%	2,28%
	KRU49	6,33%	7,03%	6,39%	3,54%	1,10%	
	TOU91	8,47%	7,97%	8,58%	4,79%	3,48%	
	SOL92	6,13%	6,99%	6,19%	3,49%	1,23%	
	KAR03	10,42%	9,97%	10,58%	7,37%	6,40%	
	AKA07	7,82%	9,97%	7,92%	4,08%	3,48%	
$\tau(x, z)$	RED90	1,66%	1,20%	1,36%	0,95%	0,48%	1,26%
	KRU49	1,66%	1,20%	1,36%	0,95%	0,48%	
	TOU91	2,13%	1,68%	1,87%	1,71%	1,36%	
	SOL92	1,61%	1,16%	1,31%	0,88%	0,42%	
	KAR03	2,56%	2,10%	2,42%	2,41%	2,25%	
	AKA07	1,99%	2,10%	1,73%	1,48%	1,37%	

Fonte: Autoral, 2022.

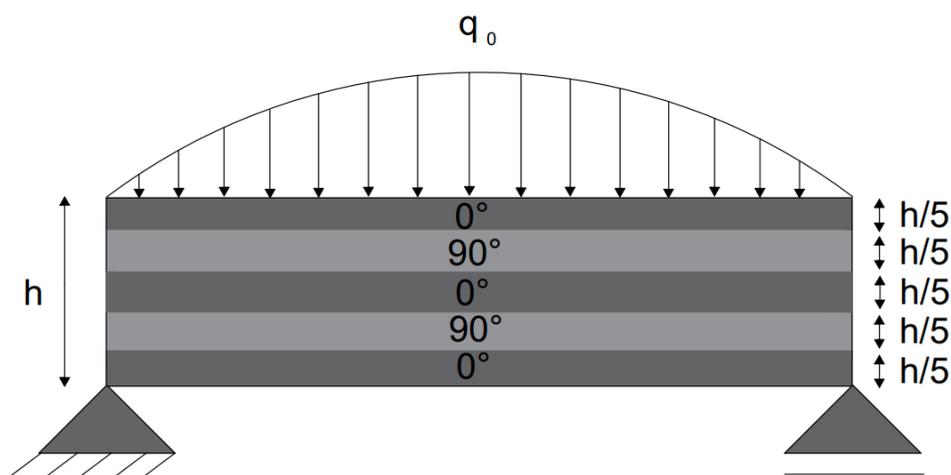
A partir dos resultados do exemplo 1 apresentados nas tabelas 4 e 5, pode-se concluir que tanto para a ponderação dos valores específicos de pico, como para o acompanhamento médio do formato do gráfico completo, a função zig-zag exponencial (ZZEXP) e a hiperbólica-exponencial (ZZHE), propostas pelo presente trabalho, possuem um desempenho melhor em relação aos outros formatos no campo dos deslocamentos e das tensões, respectivamente. De forma geral, apresentaram precisão maior em

combinação com todas as funções de alta ordem de cisalhamento, destacando-se os resultados em conjunto com RED90, KRU49 e SOL92, que obtiveram valores de erros semelhantes (e em alguns casos menores) aos da teoria LayerWise. Quando analisado os valores em determinado ponto (Tabela 3 e 4), a função zig-zag exponencial apresentou melhores resultados. Já para análise qualitativa das curvas, a solução hiperbólica-exponencial apresentou menores erros, em média. É interessante fazer essas duas análises visto que as teorias que melhor representam valores de picos são mais interessantes para dimensionamento de peças, pois é utilizado o maior esforço. Sabendo disso, essas combinações serão utilizadas para as análises que seguem.

### 6.3.2 EXEMPLO 2

Para avaliar as vantagens e desvantagens dessa formulação, foram resolvidos problemas variados. Os exemplos 2, 3, 4 e 5 têm uma relação  $S$  igual a 4. No exemplo 2 (figura 14) foi utilizada uma viga com 5 lâminas, para avaliar se a teoria perde precisão com o aumento do número de camadas. Esses resultados foram desenvolvidos para o carregamento senoidal, vinculação de viga simplesmente apoiada, largura  $b$  da seção retangular e altura igualmente dividida.

**Figura 15: Viga resolvida no exemplo 2**

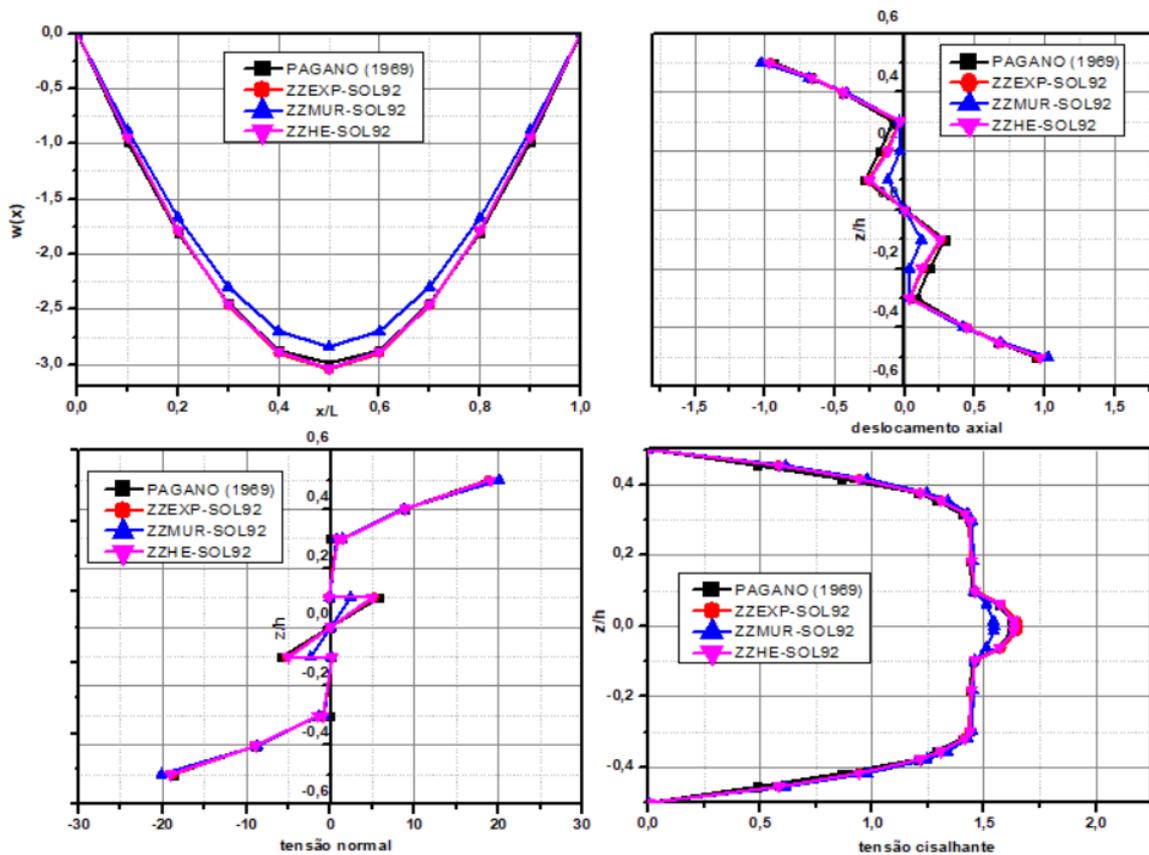


Fonte: Autoral, 2022.

Para fins de comparação, acrescentou-se a teoria zig-zag de Murakami (1981) aos resultados. Por ser uma função zig-zag linear, mesmo combinada com cinemáticas de alta

ordem ela não obtém o mesmo desempenho que as funções zig-zag ZZHE e ZZEXP, conforme os exemplos que seguem. Os gráficos de resultados foram, para este exemplo foram:

Figura 16: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão cisalhante de exemplo 2.



Fonte: Autoral, 2022.

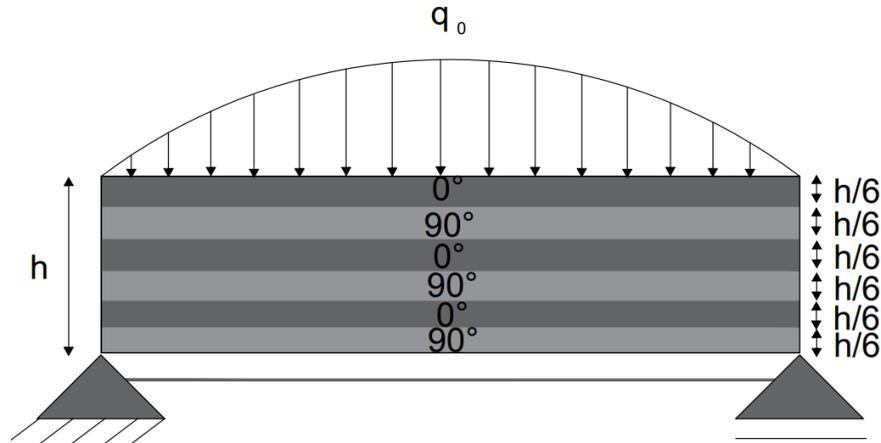
A partir do exposto, nota-se que a formulação de alta ordem acompanhou os resultados de referência no formato de todos os campos apresentados, diferente da função de Murakami.

### 6.3.3 EXEMPLO 3

No exemplo 3 foi estudado o comportamento da função perante uma situação assimétrica. Essa situação supõe uma viga com 6 lâminas com orientação de  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , alternadamente, altura igualmente dividida e largura da seção  $b$ . Da mesma forma dos

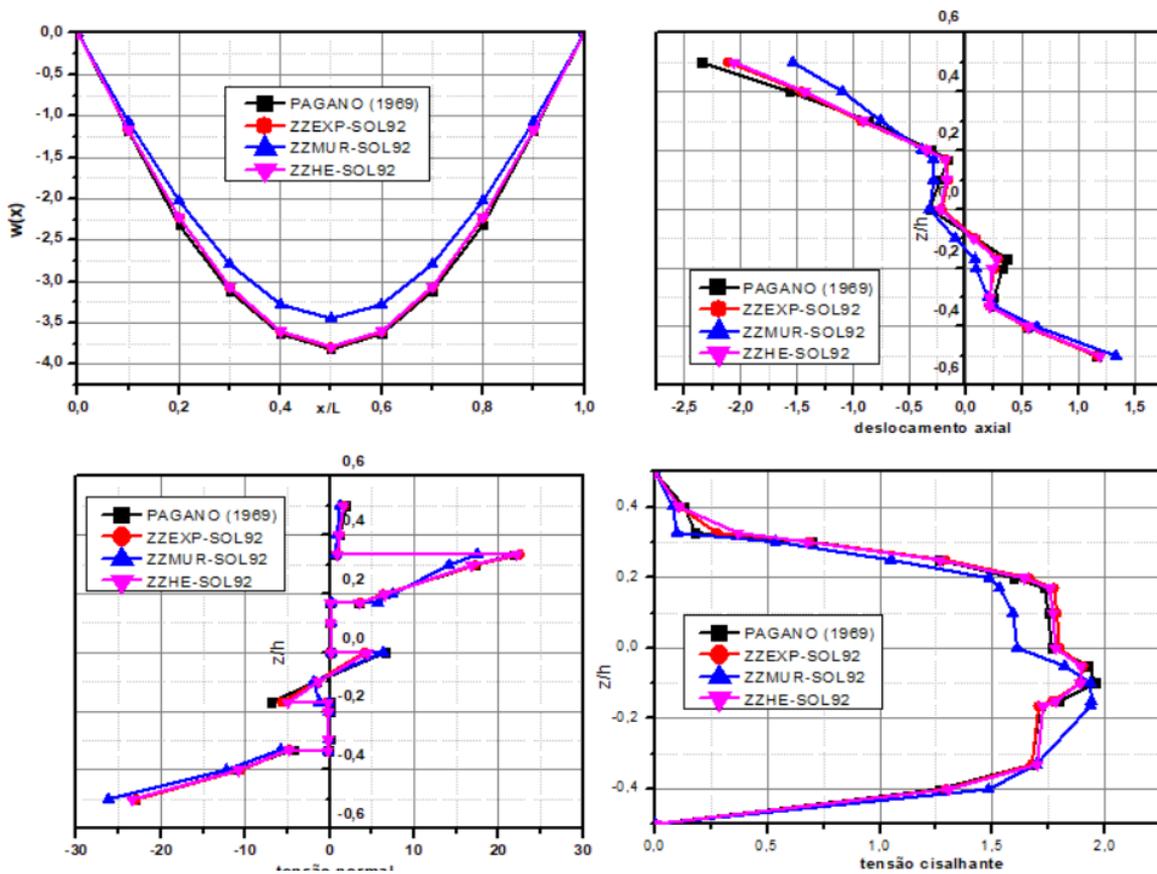
exemplos anteriores, o carregamento considerado foi de formato senoidal e a vinculação de simplesmente apoiada. Observe,

Figura 17: Viga resolvida no exemplo 3



Fonte: Autorial, 2022.

Figura 18: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão cisalhante do exemplo 3.



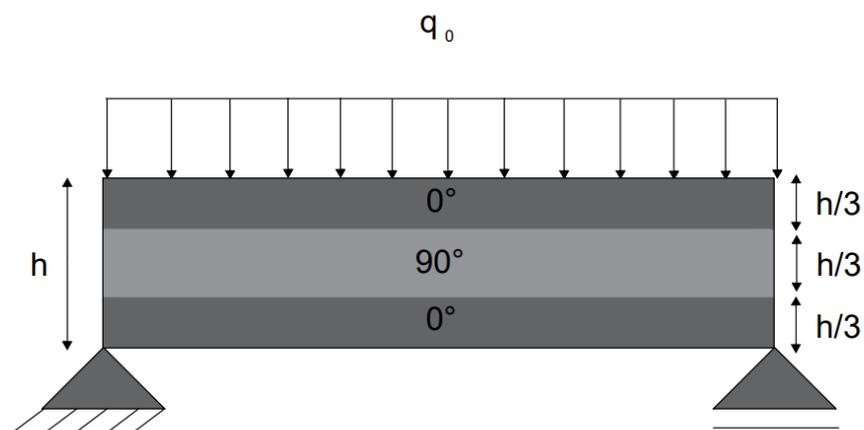
Fonte: Autorial, 2022.

Através dos resultados da figura 17, é notório que a precisão é menor relativamente à problemas simétricos, no entanto, os valores se mantêm coerentes com a formulação de referência. Não foi feito nenhum tipo de adequação para problemas assimétricos e, mesmo assim, a formulação obteve alta precisão. Além disso, a função de Murakami (1981), para esse caso assimétrico, não conseguiu acompanhar o formato dos gráficos da mesma forma do que em um problema simétrico.

#### 6.3.4 EXEMPLO 4

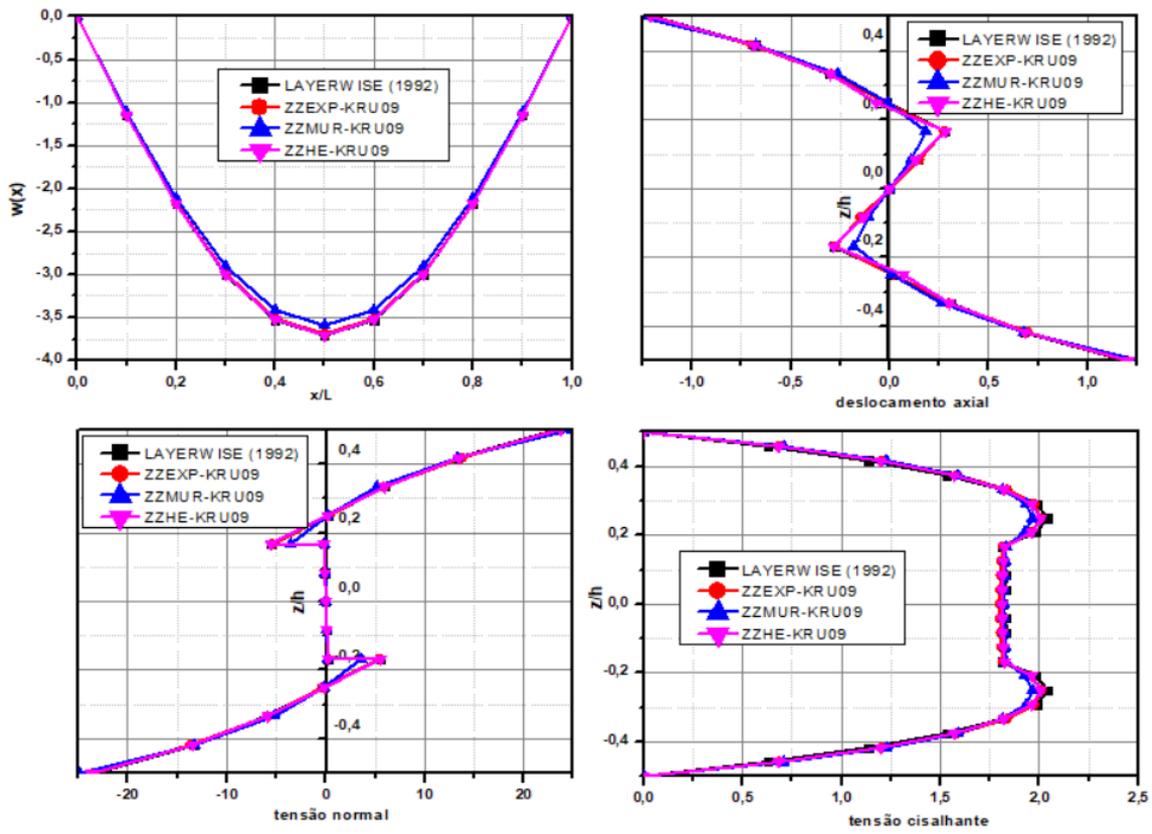
Para o problema do exemplo 4, a variação ocorreu no carregamento, mudando de carga senoidal para uniformemente distribuída. O caso foi feito com 3 lâminas  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , seção retangular com altura dividida igualmente e largura  $b$ , sendo sua vinculação de simplesmente apoiada.

Figura 19: Viga resolvida no exemplo 4



Fonte: Autoral, 2022.

Figura 20: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão cisalhante do exemplo 4.



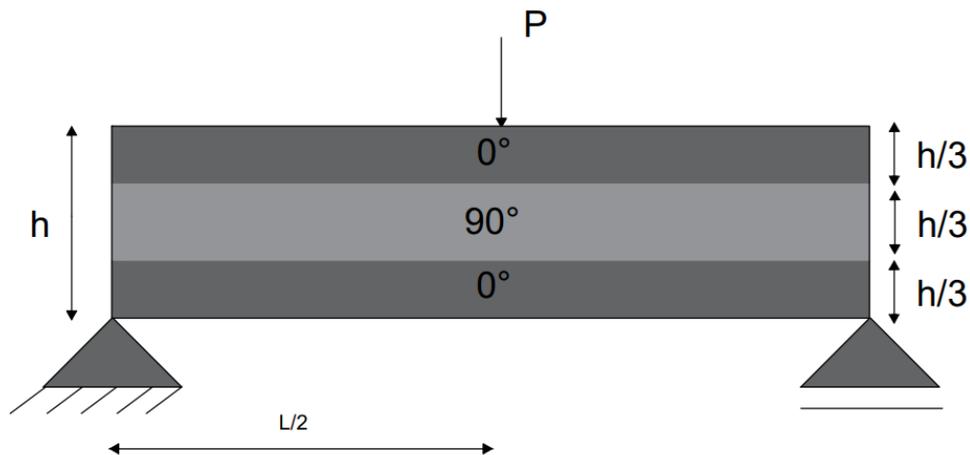
Fonte: Autoral, 2022.

Nota-se que a alteração do carregamento de senoidal para uniformemente distribuído não alterou a precisão das teorias apresentadas em relação à referência e, para esse caso com menos camadas, a teoria zig-zag de Murakami (que não é de alta ordem) se aproximou mais das teorias de alta ordem (Figura 19).

### 6.3.5 EXEMPLO 5

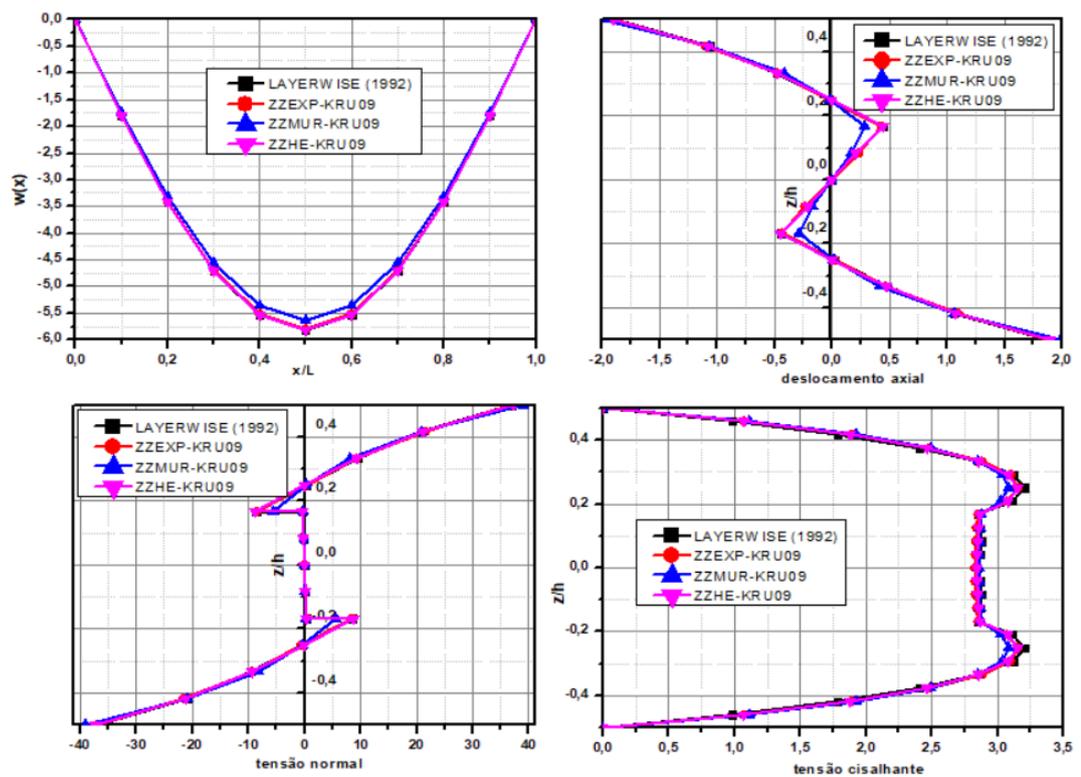
Por fim, o exemplo 5 tem o objetivo de avaliar o comportamento da função com carregamento pontual localizado no meio do vão da viga. Com configuração de lâmina, geometria da seção e condições de contorno idênticas aos exemplos 4 e 1.

Figura 21: Viga resolvida no exemplo 5



Fonte: Autoral, 2022.

Figura 22: resultados de deflexão, deslocamento axial, tensão normal e tensão cisalhante do exemplo 5.



Fonte: Autoral, 2022.

Para os resultados do exemplo 5 (Figura 21), notou-se que para um carregamento pontual os resultados de todos os campos se tornaram maiores do que quando a carga é distribuída, porém o formato se manteve o mesmo, se comparado ao exemplo 4. Da

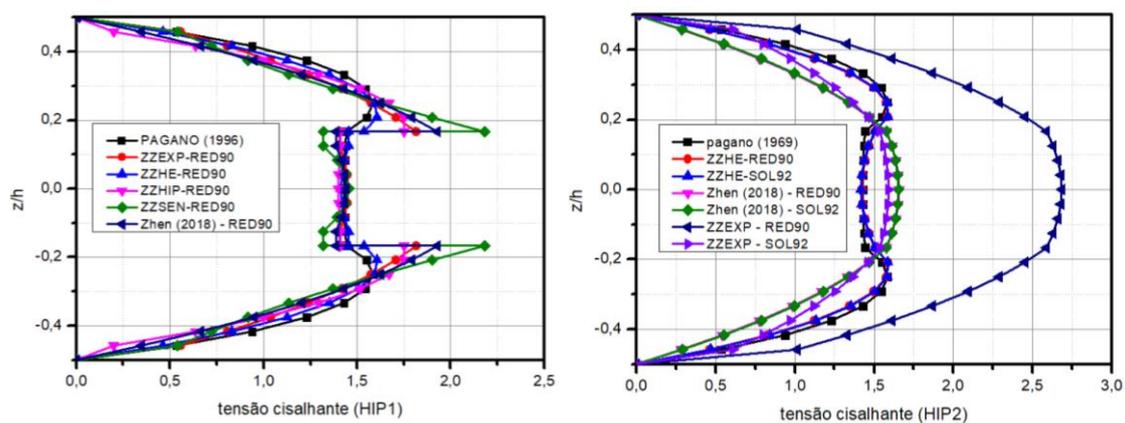
mesma forma os resultados alcançados tiveram precisão semelhante aos apresentados na figura 19.

#### 6.4 ANÁLISE DA TENSÃO DE CISALHAMENTO

Mudando o foco da análise, foi realizado um estudo na determinação do campo de cisalhamento com as hipóteses explicadas na seção 5.4. O formato da função zig-zag ZZEXP e ZZHE provaram-se mais precisas para a hipótese 1 (com cisalhamento calculado pelo equilíbrio), como mostrado nos problemas resolvidos e como evidenciado nas tabelas 4 e 5 na seção da tensão de cisalhamento. No entanto, para a hipótese 2, o formato do gráfico resultante tem grande variação dependendo de qual tipo de função zig-zag e função cisalhante de alta ordem é utilizada. Isso ocorre por que na HIP2 a continuidade da tensão cisalhante é aproximada pela combinação das derivadas dessas funções. Sabendo disso, o campo de cisalhamento do exemplo 1 foi resolvido, também, através das equações constitutivas, comparando-se as hipóteses apresentadas com os resultados de referência.

É interessante afirmar que a variação da função de alta ordem do cisalhamento altera apenas os valores absolutos dos resultados, já a variação da função zig-zag de alta ordem altera o formato da tensão de cisalhamento. Os gráficos da figura 22 mostram para as hipóteses 1 e 2 os resultados da tensão de cisalhamento através das relações constitutivas, observe:

**Figura 23: resultados da tensão de cisalhamento do exemplo 1, calculados através das relações constitutivas das hipóteses 1 e 2.**



Fonte: Autoral, 2022.

**Tabela 6: WAPE da hipótese 2 para o exemplo 1.**

Resultados	$f(z)$	Zhen (2018)	ZZEXP (2022)	ZZHE (2022)
$\tau(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	RED90	20,14%	62,01%	3,59%
	SOL92	19,70%	12,93%	3,38%

Fonte: Autoral, 2022.

Inicialmente foram comparados todos os formatos zig-zag combinados com RED90 para a HIP1, foi observado que todos eles apresentaram comportamento descontínuo semelhante, com exceção do formato hiperbólico-exponencial que foi o que mais se aproximou de uma continuidade (Figura 22). Para a HIP2, foram utilizados RED90 e SOL92 que apresentaram as melhores combinações na seção anterior.

É possível observar nas figuras 22 que a HIP2 é uma aproximação da HIP1 evitando o problema da descontinuidade entre camadas observada. As funções ZZHIP e ZZSEN apresentaram inconsistências nas condições de bordos quando calculadas para a HIP2, por conta disso servem apenas para a HIP1. Nota-se, então, uma grande dificuldade para todas as funções zig-zag para recuperar o formato real do gráfico, no entanto a função zig-zag hiperbólica-exponencial conseguiu alto desempenho para a HIP2, apresentando uma alternativa de cálculo do cisalhamento, diretamente das relações constitutivas, que comparando com a tabela 5, não possui grandes discrepâncias dos resultados calculados por equilíbrio. A análise da hipótese 2, neste trabalho, se restringiu a laminados de até 3 camadas visto que para estes casos com funções de alta ordem,  $K_\beta$  se mantém constante.

## 7. CONCLUSÃO

Diante do exposto, é perceptível que ao utilizar em conjunto funções zig-zag e funções cisalhantes, ambas de alta ordem, é possível alcançar a precisão semelhante à gerada pela teoria LayerWise e, em alguns casos, ser mais preciso que a mesma, com a vantagem de ser uma formulação com menor custo computacional e de resolução relativamente mais simples. Além disso, dentre os novos formatos zig-zag propostos pelo presente trabalho, a forma exponencial (ZZEXP) e hiperbólica-exponencial (ZZHE) foram as mais acuradas para problemas de múltiplas camadas, carregamentos diversos e problemas assimétricos, principalmente quando utilizados em conjunto com as teorias de vigas de Reddy (1990), Kruszweski (1949) e Soldatos (1992). Por fim, notou-se que o comportamento do cisalhamento calculado através das equações constitutivas ainda é um processo e mais complicado do que simplesmente calcular através do princípio do equilíbrio. No entanto, a aproximação proposta na hipótese 2 trouxe resultados consistentes para a presente formulação de alta ordem, principalmente com a função zig-zag hiperbólica-exponencial (ZZHE).

## 8. PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para outros trabalhos que seguem essa linha, pode-se citar os seguintes objetivos:

- a) Aplicação da formulação unificada zig-zag ao método dos elementos finitos;
- b) Aplicação da formulação unificada zig-zag para vigas compósitas laminadas porosas;
- c) Aplicação da formulação unificada zig-zag para vigas funcionalmente graduadas;
- d) Um estudo mais aprofundado em vigas laminadas assimétricas;
- e) Um estudo mais aprofundado no cálculo da tensão de cisalhamento através das relações constitutivas para vigas com mais que 3 lâminas;
- f) Comparar resultados com resultados numéricos de softwares comerciais a fim de aumentar a variabilidade dos exemplos resolvidos;
- g) Comparar resultados teóricos com valores experimentais.

## 9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAVCI, S. S. **Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation.** Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol 26, No. 18, p 1907–1919, 2007.

AVERILL, R. C. **Static and Dynamic Response of Moderately Thick Laminated Beams with Damage,** Composites Engineering, 4(4): 381–395, 1994.

AZEVEDO, Álvaro F. M. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.** Primeira edição pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal. Abril, 2003.

DI SCIUVA, M., 1987, "An Improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates," ASME J. Appl. Mech., 54(3), pp. 589-596

DI SCIUVA, M. **A Refined Transverse Shear Deformation Theory for Multilayered Anisotropic Plates,** Atti Accademia delle Scienze di Torino, 118: 279–295, 1984.

DI SCIUVA, M. **A Refinement of the Transverse Shear Deformation Theory for Multilayered Orthotropic Plates,** Proceedings of 7th AIDAA National Congress, October 1983, also published in L'aerotecnica missili e spazio, 62: 84–92, 1984.

DI SCIUVA, M.; GHERLONE, M. **Refinement of Timoshenko Beam Theory for Composite and Sandwich Beams Using Zigzag Kinematics.** Department of Aeronautics and Space Engineering Politecnico di Torino, Torino, Italy, 2007

DI SCIUVA, M; GHERLONE, M; IURLARO, L; TESSLER, A. **A class of higher-order C0 composite and sandwich beam elements based on the refined zigzag theory.** Compos Struct 2015;132:784–803. 2015.

FIGUEIREDO, ANTONIO DOMINGUES DE. **Concreto reforçado em fibras/** A.D. de Figueiredo. São Paulo, 2011 248 p.

GHERLONE, M; TESSLER, A; DI SCIUVA, M. **C0 beam elements based on the Refined Zigzag Theory for multilayered composite and sandwich laminates.** Department of Aeronautics and Space Engineering, Politecnico di Torino and Structural Mechanics and Concepts Branch, NASA. Composite Structures, 2011.

JONES, R. M; MILLARD R. **Mechanics of composite materials** / Robert M. Jones. Second Ed. p. cm.

KARAMA, M., AFAQ, K. S., MISTOU, S. **Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity**. International Journal of Solids and Structures, 40, p. 1525–1546, 2003.

KRUSZEWSKI, E. T. **Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam**. National Advisory Committee for Aeronautics, 1949.

LIU, D; LU, X. **Na Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for Laminated Composite Analysis**," Computers and Structures, 42(1): 9-78, 1992.

LULARON, L; GHERLONE, M; TESSLER, A; DI SCIUVA, M. **Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories**. Department of Aeronautics and Space Engineering, Politecnico di Torino and Structural Mechanics and Concepts Branch, NASA. Composite Structures, 2013.

MURAKAMI, H., MAEWAL, A., and HEGEMIER, G. A.. 1981, "**A Mixture Theory With a Director for Linear Elastodynamics of Periodically Laminated Media**," Int. J. Sol. Str., 17, pp.

OLIVEIRA, E. H. A. **Estudo de elemento finito de 3 nós e 5 graus de liberdade e seu efeito no bloqueio de solução no caso de uma viga engastada a partir das teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko**. Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de engenharia. 2017.

ONATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics**. 1. ed. Barcelona: Springer, 2013. v. 2.

PAGANO, N. J. **Exact solution for composite laminates in cylindrical bending**, J. Compos. Mater., vol. 3, 1969, 398–411.

PAYETTE, G. REDDY, J. **A nonlinear finite element framework for viscoelastic beams based on the high-order Reddy beam theory**. Journal of engineering materials and technology-transactions of the asme. 2013.

PIRZADEH, A. BORROOMAND, B. **On dynamic behavior of composite plates using a higher-order Zig-Zag theory and exponential basis functions.** Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature. 2020.

REDDY, J. N., **A general non-linear third order theory of plates with moderate thickness.** International Journal of Non-linear Mechanics, 25 (6), p. 677–686, 1990.

REDDY, J. N. **A simple higher-order theory for laminated composite plates.** Journal of Applied Mechanics, v. 51, n. 4, p. 745–752, 1984.

REDDY J.N. **Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis.** Boca Raton: CRC Press; 2004.

RIVA, M. **Understanding forecast accuracy: MAPE, WAPE, WMAPE.** Disponível em < [www.baeldung.com/cs/mape-vs-wape-vs-wmape](http://www.baeldung.com/cs/mape-vs-wape-vs-wmape) >. Acesso em: 10/06/2022. Baeldung CS, 2021

SAYYAD, A. S. **Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams.** Applied and Computational Mechanics, 2011.

SAYYAD, A. S.; GHUGAL, Y. M. **Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature.** Composite Structures, v. 171, n. October, p. 486–504, 2017.

SOLDATOS, K. P. **A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates.** Acta Mechanica, 94, p 195–220, 1992.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mechanics of Materials.** Volume 1. Pws Pub Co, 1998.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, James E. **Mecânica dos Sólidos.** Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1983.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity.** Second Ed. New York, 1951.

TIMOSHENKO, S. P. **On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section**, Philosophical Magazine, p. 744, 1921.

TOURATIER, M. **An efficient standard plate theory**. International Journal of Engineering Science, Vol. 29, No. 8, pp. 901–916, 1991.

VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. **The Behavior of Structures Composed of Composite Materials**. Second Ed. Ontario, 2008.

VIDAL, P; POLIT, O. **A sine finite element using a zig-zag function for the analysis of laminated composite beams**. Composites Part B: Engineering, Elsevier, 2011, 42 (6), pp.1671-1682.

XIE, F. QU, Y. ZHANG, W. PENG, Z. MENG G. **Nonlinear aerothermoelastic analysis of composite laminated panels using a general higher-order shear deformation zig-zag theory**. Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China. 2019.

ZHAO, D; ZHEN, W; REN, X. **New Sinusoidal Higher-Order Theory Including the Zig-Zag Function for Multilayered Composite Beams**, Journal of Aerospace Engineering, 2019.

ZHEN, W; YANG, C; ZHANG, H; ZHENG, X. **Stability of laminated composite and sandwich beams by a Reddy-type higher-order zig-zag theory**, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018.

## APÊNDICE – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE VIGAS LÂMINADAS

Uma estrutura de material compósito pode ser tratada da mesma forma que uma viga homogênea no que diz respeito ao seu equilíbrio, às relações entre deslocamentos e deformações e a equações de compatibilidade para solucionar sistemas hiperestáticos. As relações constitutivas entre tensões e deformações, por sua vez, alteram-se drasticamente, pois as propriedades elásticas da estrutura divergem para diferentes direções (VINSON, 2008).

Adotando um sistema tridimensional ortogonal e curvilíneo qualquer com eixos 1, 2 e 3 e analisando um elemento de controle cúbico infinitesimal, as tensões atuantes sobre suas faces podem ser descritas por um tensor tridimensional de ordem 2, cujas 9 componentes são  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Do mesmo modo, as componentes de deformação são representadas pelo tensor  $\varepsilon_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , onde componentes com  $k = l$  são as deformações longitudinais. As componentes onde  $k \neq l$  são os alongamentos ou encurtamentos provocados pelas deformações angulares em cada uma das faces do elemento. Se os acréscimos ou decréscimos dos ângulos retos nos vértices de cada face são  $\gamma_{kl}$ , então  $\varepsilon_{kl} = \gamma_{kl}/2$ .

Em um material isotrópico, as relações tensão-deformação podem ser descritas com simplicidade, pois tensões normais exclusivamente causam deformações longitudinais, e sua relação é, para todas as direções, governada pelas quantidades módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ . Por sua vez, as tensões cisalhantes unicamente provocam deformações angulares, e estas são comumente atreladas pelo módulo de elasticidade transversal  $G$ , mas sabendo que esta é função direta de  $E$  e  $\nu$ , se fazem necessárias apenas duas grandezas para descrever todo o comportamento do material.

Tais hipóteses não podem ser presumidas para um material anisotrópico. Considerando inicialmente que qualquer tensão pode provocar uma deformação em qualquer direção, a relação constitutiva será descrita por um tensor de quarta ordem  $C_{ijkl}$  tal que, para  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1)$$

Apesar da existência de 81 componentes neste tensor, duas simplificações imediatamente reduzem a quantidade de constantes necessárias.

Primeiramente, sabe-se que para preservar o equilíbrio do elemento, é necessário que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Assim, é possível tomar uma notação reduzida  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , onde as componentes normais são  $\sigma_i = \sigma_{ii}$  e as cisalhantes são  $\sigma_4 = \sigma_{23}$ ,  $\sigma_5 = \sigma_{13}$  e  $\sigma_6 = \sigma_{12}$ . A mesma condição se aplica para o tensor de deformações de modo a preservar sua geometria, ou seja,  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ . Assim toma-se a notação  $\varepsilon_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , onde  $\varepsilon_j = \varepsilon_{jj}$  para as deformações longitudinais. Toma-se para as deformações angulares que  $\varepsilon_4 = \gamma_{23}$ ,  $\varepsilon_5 = \gamma_{13}$  e  $\varepsilon_6 = \gamma_{12}$ , o que implica em  $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}$  e  $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$ .

A partir desta notação, é definida uma nova matriz constitutiva com apenas 36 componentes.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (2)$$

onde  $i, j = 1, \dots, 6$ .  $[C]$  é definida como a matriz elástica do material.

A segunda simetria é obtida pela função densidade de energia  $W$ , que mostra que  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , e, portanto,  $C_{ij} = C_{ji}$ , o que reduz a quantidade máxima de constantes para 21.

Estuda-se o caso particular de ortotropia, onde as características elásticas são simétricas em relação aos 3 eixos de um sistema ortogonal e curvilíneo, condição esta que será aplicada ao estudo de materiais laminados. Para isto, inicialmente considera-se um sistema de eixos  $x_1, x_2, x_3$  e um material cujas propriedades elásticas são simétricas em  $x_3$  (condição parcial de ortotropia). Com esta condição, uma transformação para um sistema de eixos  $x'_1, x'_2, x'_3$  onde  $x'_1 = x_1$ ,  $x'_2 = x_2$  e  $x'_3 = -x_3$  não provocará alteração nas constantes  $C_{ij}$ .

São definidos os cossenos diretores  $t_{\gamma k}$ , se  $\gamma$  e  $k$  são os índices dos eixos transformados e iniciais, respectivamente. Sabe-se que  $t_{11} = t_{22} = 1$ ,  $t_{33} = -1$  e  $t_{\gamma k} = 0$  se  $\gamma \neq k$ . Com isso, efetua-se a transformação dos tensores tensão e deformação  $\sigma_{mn}$  e  $\varepsilon_{mn}$  para o novo sistema de coordenadas com as expressões

$$\sigma'_{\alpha\beta} = t_{\alpha m} t_{\beta n} \sigma_{mn} \text{ e } \varepsilon'_{\alpha\beta} = t_{\alpha m} t_{\beta n} \varepsilon_{mn},$$

onde parte que para os pares de índices 11, 22, 33 e 12 ou 21,  $\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{mn}$  e  $\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon_{mn}$ , enquanto que para 23 ou 32 e 13 ou 31,  $\sigma'_{\alpha\beta} = -\sigma_{mn}$  e  $\varepsilon'_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{mn}$ . Pela

notação adotada,  $\sigma'_i = \sigma_i$  e  $\varepsilon'_j = \varepsilon_j$  para  $i, j = 1, 2, 3, 6$  e  $\sigma'_i = -\sigma_i$  e  $\varepsilon'_j = -\varepsilon_j$  para  $i, j = 4, 5$ .

Equacionando uma das componentes de tensão nos sistemas inicial e transformado pela Equação (2),

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6, \\ -\sigma_4 &= C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 - C_{44}\varepsilon_4 - C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6.\end{aligned}$$

Igualando as equações, conclui-se que  $C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{46} = 0$ . Do mesmo modo, pelo equacionamento de  $\sigma_5$  chega-se a  $C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{56} = 0$ . Comparando as componentes de tensão restantes, tal como

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \\ &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 - C_{14}\varepsilon_4 - C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6,\end{aligned}$$

também  $C_{14} = C_{15} = 0$  e analogamente,  $C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = 0$ .

Um material com ortotropia possui efetivamente 3 planos ortogonais de simetria elástica. Assim, a mesma análise pode ser feita para simetria em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , donde conclui-se que também  $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{54} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = 0$ .

Tomando a Equação (2) com todas as simplificações alcançadas para um material ortotrópico, as relações tensão-deformação são descritas de forma sucinta.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Da Equação (3), conclui-se que um material ortotrópico necessita de 9 constantes independentes para descrever todo o seu comportamento. Também é notável que tensões normais apenas causam deformações longitudinais, seja na direção da tensão ou em direções ortogonais devido aos efeitos de Poisson. Por sua vez, as tensões cisalhantes estão exclusivamente acopladas à deformação angular na face de aplicação da tensão. Estas duas últimas considerações são comuns a materiais isotrópicos.

Para fins práticos, é desejável que as relações tensão-deformação estejam descritas em termos das grandezas  $E_i$ ,  $\nu_{ij}$  e  $G_i$ , únicas para cada direção ou par de direções, as quais possuem um significado físico direto. Reescrever os termos  $C_{ij}$  em função destes valores não é uma tarefa simples. Facilita analisar a matriz inversa  $[a] = [C]^{-1}$ , donde claramente tem-se a expressão, ainda para os índices  $i, j = 1, \dots, 6$ ,

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j. \quad (4)$$

A matriz  $[a]$ , por seu teor físico de relacionar uma deformação elástica de um corpo com uma força neste aplicada, é chamada matriz de conformidade. Nota-se que, se  $C_{ij} = C_{ji}$ , intuitivamente  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Supõe-se que o material é submetido a um teste de tensão normal na direção 1, ou seja,  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_2 = \dots = \sigma_6 = 0$ . Uma rápida análise na Equação (3) mostra que ocorrerão as deformações  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , atreladas à tensão aplicada pela Equação (4) pelos termos  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{31}$ .  $\varepsilon_1$ , por estar na direção de aplicação da tensão, é consequência direta da lei de Hooke  $\varepsilon = \sigma/E$ . Assim,  $a_{11} = 1/E_1$ . As outras duas componentes são consequência do efeito de Poisson. Definindo  $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$ , tem-se que  $\varepsilon_j = -\nu_{ij}\varepsilon_i$ . Assim,  $\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1$ , mas como  $\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1$ , conclui-se que  $\varepsilon_2 = -\nu_{12}\sigma_1/E_1$ , ou seja,  $a_{21} = -\nu_{12}/E_1$ . Da mesma forma,  $a_{31} = -\nu_{13}/E_1$ .

Se o material sofre tensão normal nas direções 2 e 3, os resultados serão similares, de modo que é possível generalizar que, para  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1/E_i, \\ a_{ij} &= -\nu_{ji}/E_j, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

Ademais, como se sabe que  $a_{ij} = a_{ji}$ ,

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}. \quad (6)$$

Agora, aplicando unicamente uma tensão cisalhante  $\sigma_4$ , observa-se pela Equação (3) que apenas ocorrerá uma deformação angular de índice correspondente, a saber,  $\varepsilon_4$ , atrelada à tensão por  $a_{44}$ . Esta deformação é diretamente descrita pela lei de Hooke para tensões cisalhantes  $\gamma = \sigma/G$ . Lembrando da definição  $\varepsilon_4 = \gamma_{23}$ , ter-se-á que  $\gamma_{23} = \sigma_{23}/G_{23}$ , ou  $\varepsilon_4 = \sigma_4/G_4$ , se  $G_i$  é definido de forma análoga às tensões e deformações para

$i = 4, 5, 6$ . Assim,  $a_{44} = 1/G_4$ . O mesmo se aplica se o corpo sofre as tensões  $\sigma_5$  ou  $\sigma_6$ . De modo a generalizar, para  $i = 4, 5, 6$ ,

$$a_{ii} = 1/G_i. \quad (7)$$

Tendo em mãos as Equações (5) e (7), a matriz de conformidade será

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_6 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Apesar da presença de 12 constantes, a Equação (6) reduz para 9 o número de grandezas físicas independentes necessárias para descrever o material. Vale lembrar que esta consideração vale para qualquer material ortotrópico.

É necessário efetuar a inversão da matriz de conformidade para chegar à matriz elástica  $[C]$ , chamada  $[Q]$  quando expressa em termos das constantes físicas. O resultado do árduo processo é apresentado na Equação (9).

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_2(1-\nu_{31}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

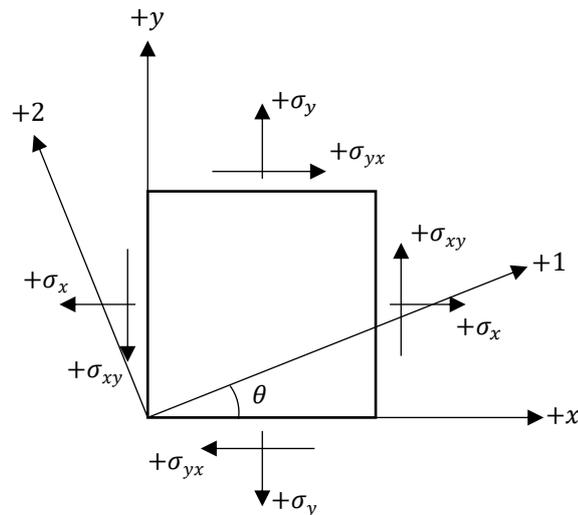
$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}.$$

A matriz  $[Q]$ , portanto, descreve as propriedades elásticas do material no sistema de eixos 1-2-3. Porém, nem sempre estes eixos coincidirão com os eixos da peça estrutural. Por vezes, lâminas serão posicionadas com uma angulação em relação ao plano neutro da viga, de modo que a direção com maior resistência do material coincida com a dos maiores esforços que a peça precisa resistir.

Considera-se uma estrutura orientada pelos eixos  $x$ - $y$ - $z$  cujas fibras estão orientadas nas direções 1-2-3. Os eixos 1 e 2 são inclinados em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, de um ângulo  $\theta$ . Como peças estruturais não tendem a ser projetadas

para trabalhar em mais que 2 direções, admite-se, por simplicidade, que os eixos 3 e z são coincidentes.

Figura 2 – Sistemas de coordenadas em um elemento de viga.



Naturalmente, uma análise na estrutura permitirá calcular as tensões que ocorrem nos eixos estruturais  $x$ - $y$ - $z$ , e busca-se calcular as deformações nestas mesmas direções. Porém, o fato de as propriedades elásticas conhecidas do material estarem na direção dos eixos 1-2-3 torna necessária a transferência das tensões para este sistema de eixos, e encontradas as deformações, ainda uma transformação inversa deve ser efetuada para retornar aos eixos na direção da estrutura.

Seja uma matriz  $T$  que transforma componentes de tensão ou deformação do sistema de eixos  $x$ - $y$ - $z$  para o sistema 1-2-3, e a matriz  $T^{-1}$  que faz o procedimento inverso. A relação tensão-deformação para os eixos estruturais, expressada matricialmente, será

$$[\sigma] = [T][Q][T^{-1}][\varepsilon], \quad (10)$$

onde

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \text{ e } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix},$$

lembrando que é necessário inserir os fatores 2 nos termos de deformação angular para transformá-los no ângulo de deformação, que é a grandeza efetivamente presente na

Equação. Será importante trabalhar com esta grandeza na forma não contraída mais adiante.

A transferência de sistemas de eixos é feita de forma análoga à análise do círculo de Mohr para tensões e deformações equilibrando um elemento de controle com uma face inclinada, resultando em

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & m & 0 \\ mn & -mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix},$$

onde, por convenção,  $m = \cos\theta$  e  $n = \sin\theta$ .

Para tornar o cálculo de deformações mais direto, define-se a matriz  $[\bar{Q}] = [T][Q][T^{-1}]$ . Essencialmente, essa matriz representa as propriedades elásticas do material nos eixos estruturais. Essa matriz pode ser expressa em função dos termos  $Q_{ij}$ . Serão apresentados neste texto, a título de exemplificação e praticidade, as quantidades que serão de fato utilizadas posteriormente no estudo de vigas, a saber

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4, \quad (12a)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2. \quad (12b)$$

A Equação (10) reduz-se então a

$$[\sigma] = [\bar{Q}][\varepsilon]. \quad (13)$$

A Equação (13) é geral para estruturas de material compósito ortotrópico homogêneas. Estuda-se, por fim, o caso de um material laminado, cuja característica é ser constituído de  $N$  lâminas, cada uma com orientação e propriedades elásticas próprias. A relação constitutiva deve então ser descrita para cada lâmina individualmente.

Para a  $k$ -ésima lâmina,

$$[\sigma]_k = [\bar{Q}]_k[\varepsilon]. \quad (14)$$

Note que a matriz  $[\varepsilon]$  é desprovida de índice, pois conjectura-se nesta formulação que as funções que descrevem a deformação da estrutura são contínuas em uma seção transversal.

