



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL**

FÁBIO AUGUSTO SILVA SANTOS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE DENTES DE CONCRETO
ARMADO**

SÃO CRISTÓVÃO

2022

FÁBIO AUGUSTO SILVA SANTOS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE DENTES DE CONCRETO
ARMADO**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe como pré-requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil;

Presidente: Profa. Dra. Rejane Martins Fernandes Canha

SÃO CRISTÓVÃO

2022

FÁBIO AUGUSTO SILVA SANTOS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE DENTES DE CONCRETO
ARMADO**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe como pré-requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil;

Presidente: Profa. Dra. Rejane Martins Fernandes Canha

Examinador interno: Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim

Examinador externo à instituição: Prof. Dr. Rodrigo Barros

RESUMO

Os dentes de apoio ou dentes Gerber tem como função agir na transmissão de esforços entre as peças que compõem o arranjo de suporte das edificações, sobretudo em estruturas de concreto pré-moldado. Detentoras de uma geometria específica, as vigas com dentes de concreto enfrentam a redução de altura na extremidade, o que acarreta altas tensões convencionais de cisalhamento, por serem elementos curtos, e não são integralmente bem representados pela Hipótese de Bernoulli. Com base nisto, os dentes de concreto são caracterizados como regiões de descontinuidades e necessitam ser abordados por modelos mais realísticos, como o de bielas e tirantes e atrito-cisalhamento. Outra alternativa de exame do comportamento desses elementos, viabilizada pelo progresso da capacidade de processamento das ferramentas computacionais, é o uso de elementos finitos associado à não linearidade do problema. Portanto, o presente trabalho tem como objetivo, com o auxílio da ferramenta computacional de elementos finitos ATENA, contribuir com este campo de pesquisa ao analisar e validar simulações numéricas de diferentes modelos e tipos de dentes, previamente ensaiados experimentalmente em outros trabalhos obtidos na literatura técnica e avaliar o comportamento de modelos dimensionados pelos modelos de atrito-cisalhamento e de escoras e tirantes das normas nacionais através desse programa computacional. Constatou-se nas validações que a capacidade de suporte ao cisalhamento dos dentes de concreto cresceu com a diminuição da razão de aspecto, sendo verificada importante compatibilidade com os dados reportados nos ensaios referente a cargas, deslocamentos, panorama de fissuração e modos de falha. O dente de concreto com armadura de suspensão inclinada apresentou uma fissuração com abertura mais moderada, mostrando uma redistribuição mais adequada das tensões, e uma maior capacidade de suporte em relação ao dente com armadura de suspensão vertical. Para os modelos estudados considerando os normativos nacionais, observou-se que as menores capacidades resistentes foram manifestadas pelos espécimes de dentes de concreto curtos dimensionados por atrito-cisalhamento.

PALAVRAS-CHAVE: dentes, concreto armado, modelo de escoras e tirantes, modelo de atrito-cisalhamento, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

The dapped-end beams have the function of acting on the transmission of forces between the parts that make up the support arrangement of buildings, especially in precast concrete structures. With a specific geometry, the dapped-end beams have a reduction in height at the end, which causes high shear stresses, therefore, they are not fully well represented by a linear analysis, distancing it from the Bernoulli Hypothesis. Based on this, dapped-end beams are characterized as regions of discontinuities and need to be treated by more realistic models, such as strut-tie model, shear-friction model. Another alternative for examining the behavior of these elements, made possible by the progress of the processing capacity of the computational tools, is the use of finite elements associated with the non-linearity of the problem. In view of this, considering the evident importance of these connecting elements in supporting the structures, the verification and deepening of the study of their behavior are paramount. Therefore, this study aims, with the aid of the finite element computational tool ATENA, to contribute to this field of research by analyzing and comparing different models and types of dapped-end beams, previously tested experimentally in other studies obtained in the background literature and to evaluate the behavior of models dimensioned by the friction-shear and strut and tie models of national standards through this computer program. It was found in the validations that the shear support capacity of dapped-end beams grew with the decrease of the a/d ratio, being verified important compatibility with the data reported in the tests referring to loads, displacements, cracking panorama and failure modes. The hanger bars arranged inclined showed a more moderate cracking opening, showing a more adequate redistribution of stresses, and a greater bearing capacity than the vertical hanger bars. For the models studied considering the national regulations, it was observed that the lowest resistant capacities were manifested by the specimens of short dapped-end beams dimensioned by shear friction.

KEYWORDS: dapped-end beams, reinforced concrete, strut-and-tie model, shear-friction model, Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Geometria dos dentes de concreto	4
Figura 2-Regiões B e D.....	5
Figura 3-Modos de falhas potenciais dos dentes de concreto	6
Figura 4-Influência da relação hc/h no comportamento do dente de concreto	7
Figura 5- Comparação do sistema interno de forças: a) consolos, b) dentes de concreto	7
Figura 6 - Analogia de treliça para uma viga simplesmente apoiada.....	9
Figura 7 - Modelos escoras e tirantes para avaliação de esforços internos	10
Figura 8 - Modelo de bielas e tirantes de Schlaich et al. (1987).	10
Figura 9- Modelo de escoras e tirantes Cook e Mitchell (1988) presente nos exemplos de projeto da ACI SP-208	11
Figura 10- (a) Modelo de escoras e tirantes alternativo FIP; (b) Modelo simplificado sugerido por Mattock	12
Figura 11 - Modelo “dente de serra” da teoria atrito-cisalhamento	14
Figura 12 - Modelo atrito-cisalhamento dentes de concreto, armadura necessária.....	16
Figura 13 - Malhas de elementos finitos propostas: (a) Werner e Dilger (1973) e (b) Cook (1987)	17
Figura 14 - Padrão de fissuração e reforço utilizado por Nagy-György et al.....	18
Figura 15 - Malha de elementos e componentes do modelo	19
Figura 16 - Modelagem e padrão de fissuras, vigas com dente sob carga de impacto.....	19
Figura 17 - Modelo de bielas e tirantes para dentes da NBR 9062	20
Figura 18 - Modelo geométrico bielas e tirantes para dentes curtos	21
Figura 19 - Detalhe de armadura de dente Gerber	24
Figura 20 - Esquema de transmissão das forças e da armadura nos dentes de concreto	27
Figura 21 - Arranjos da armadura nos dentes de concreto	28
Figura 22 - Detalhamento e ancoragem das armaduras em dentes de concreto.....	28
Figura 23 - Modos de ruínas e armaduras requeridas para dentes de concreto	29
Figura 24 - Descontinuidades geométricas e de carregamento	32
Figura 25 – Região nodal com: (a) camada única de armadura; (b) armaduras distribuídas	33
Figura 26 - Modelo escoras e tirantes ajustado para dentes de concreto.....	34
Figura 27 - Geometria do elemento CCIsoTruss<...>	39
Figura 28- Geometria do elemento CCIsoQuad<...>	40
Figura 29 -Lei de tensão-deformação uniaxial para concreto	42
Figura 30 - Lei exponencial de abertura de fissura	43
Figura 31 - Estágios da abertura de fissura	44
Figura 32 - Função de ruptura tração-compressão para o concreto.....	45
Figura 33 - Diagrama tensão-deformação na compressão	45
Figura 34 – Curva tensão efetiva-deslocamento na compressão.....	46
Figura 35 - Diagrama de falha biaxial do concreto.	47
Figura 36 - Sistema de coordenadas para o concreto fissurado.....	48
Figura 37 - Redução da força de compressão no concreto fissurado	49
Figura 38- A lei bilinear tensão-deformação para armadura.....	50
Figura 39 - Espécime 1 e 2: Propriedades geométricas e detalhes do ensaio.....	53
Figura 40 - Esquema geral dos ensaios	53
Figura 41 - Análise de convergência de malha Espécimes 1 e 2 - LU et al (2012).....	55
Figura 42 – Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do Lu-Esp1	56
Figura 43 – Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do Lu-Esp2	56
Figura 44 – Análise da tensão de cisalhamento e das tensões principais no passo 55 e 56	57
Figura 45 - Padrão de fissuração e tensões principais do Espécime 1	58

Figura 46 - Curva carregamento versus deslocamento do modelo Lu-Esp1	58
Figura 47 - Localização dos extensômetros para Lu-Esp-2	59
Figura 48 - Curva força versus deformação na armadura do modelo Lu-Esp-2	60
Figura 49 - Padrão de fissuração e tensões principais do Lu-Esp2	60
Figura 50 - Curva carregamento versus deslocamento do modelo Lu-Esp2.....	61
Figura 51- Esquema de armação Espécime 1.6.....	62
Figura 52 - Esquema de armação Espécime 2.6.....	62
Figura 53 - Esquema geral dos ensaios	63
Figura 54 - Análise de convergência de malha Espécimes 1.6 e 2.6.....	65
Figura 55 - Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do modelo Falcón-Esp1.6.....	66
Figura 56 - Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do modelo Falcón-Esp2.6.....	66
Figura 57 - Curva carregamento versus deslocamento do dente Falcón-Esp1.6.....	67
Figura 58 - Gráfico comparativo da abertura de fissura para o Espécime 1.6	68
Figura 59 - Localização dos extensômetros para o dente Falcón-Esp1.6.....	68
Figura 60 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Falcón-Esp1.6.....	69
Figura 61- Padrão de fissuração comparativo para o dente Falcón-Esp1.6	69
Figura 62 - Curva carregamento versus deslocamento do dente Falcón-Esp2.6.....	70
Figura 63 - Curva abertura de fissura versus carga no apoio Falcón-Esp2.6	71
Figura 64 - Localização dos extensômetros para o Falcón-Esp2.6	71
Figura 65 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Falcón-Esp2.6.....	72
Figura 66 - Padrão de fissuração comparativo para Falcón-Esp2.6	72
Figura 67 – Geometria e monitoramento dos modelos simulados	77
Figura 68 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d0.25AC e a/d0.25BT.....	79
Figura 69 - Padrão de fissuração modelos a/d0.25AC e a/d0.25BT	79
Figura 70 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Modelos a/d0,25	80
Figura 71 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Modelos a/d0,25	80
Figura 72 - Curva carga no apoio versus deslocamento para modelos de relação a/d = 0, 5	81
Figura 73 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Modelos a/d 0,5	81
Figura 74 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos dos modelos a/d0.5AC e a/d0.5BT.....	82
Figura 75 - Padrão de fissuração modelos a/d0.5AC e a/d0.5BT	82
Figura 76 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Modelos a/d 0,75	83
Figura 77 - Curva carga no apoio versus deslocamento para modelos de relação a/d = 0, 75	84
Figura 78 - Deformação plástica da armadura no passo de ruptura	84
Figura 79 - Padrão de fissuração modelos a/d0.75AC e a/d0.75BT	85
Figura 80 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d0.75AC e a/d0.75BT.....	86
Figura 81 - Curva carga no apoio versus deformação da armadura Modelos a/d 1	87
Figura 82 - Curva carga no apoio versus deslocamento para modelos de relação a/d = 1	87
Figura 83 - Deformação plástica da armadura no passo de ruptura	88
Figura 84 - Padrão de fissuração modelos a/d1AC e a/d1BT	89
Figura 85 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d1AC e a/d1BT	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Marcos estabelecidos no modelo atrito-cisalhamento.....	14
Tabela 2 - Coeficiente de atrito por interfaces	23
Tabela 3 - Valores recomendados para coeficiente de atrito.....	30
Tabela 4 - Coeficiente de biela β_s	35
Tabela 5 - Fator de modificação de confinamento biela-nó	36
Tabela 6 - Armadura mínima distribuída	36
Tabela 7 - Coeficiente da zona nodal	37
Tabela 8- Funções de interpolação dos elementos CCIsoTruss<...>.....	39
Tabela 9- Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoTruss<xxx> de 2 e 3 nós.....	39
Tabela 10 - Funções de interpolação dos elementos CCIsoQuad<...>	40
Tabela 11 - Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoQuad <...> de 4 nós	41
Tabela 12- Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoQuad <...> de 5 a 9 nós	41
Tabela 13 - Parâmetros padrões para o modelo constitutivo.....	50
Tabela 14 – Detalhes de armação dos dentes de concreto - LU <i>et al</i> (2012).	53
Tabela 15 – Detalhes de armação do corpo principal da viga - LU <i>et al</i> (2012).....	54
Tabela 16 - Propriedades das armaduras - LU <i>et al</i> (2012).....	54
Tabela 17 - Propriedades dos concretos - LU <i>et al</i> (2012).....	54
Tabela 18 – Resumo dos resultados para LU <i>et al</i> (2012)	61
Tabela 19 - Detalhes de armação dos dentes de concreto - FALCÓN <i>et al</i> (2019).	63
Tabela 20 - Detalhes de armação do corpo da viga - FALCÓN <i>et al</i> (2019).....	63
Tabela 21 - Propriedades das armaduras - FALCÓN <i>et al</i> (2019).....	64
Tabela 22 - Propriedades dos concretos - FALCÓN <i>et al</i> (2019).....	64
Tabela 23 - Resumo dos resultados para FALCÓN <i>et al</i> (2019)	73
Tabela 24 - Dimensionamento da armadura pelo modelo atrito-cisalhamento	74
Tabela 25 - Dimensionamento da armadura pelo modelo de escoras e tirantes.....	74
Tabela 26 - Verificação do concreto para do método de escoras e tirantes.....	75
Tabela 27 - Resumo dos resultados das simulações considerando os normativos nacionais	91

ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

- A'_s - Área de compressão da armadura ao longo do comprimento da biela;
 A_{cs} - Área da seção transversal no final da biela;
 A_{nz} - Área da seção nodal;
 $A_{s,sus}$ - Área de aço da armadura de suspensão;
 $A_{s,tir}$ - Área total de aço concentrada no tirante;
 A_s - Área da armadura principal horizontal;
 A_{sh} - Área de aço da armadura de costura estribos horizontais;
 A'_{sh} - Área da armadura horizontal inferior;
 A_{sv} - Área de aço dos estribos verticais;
 Eq - Equação;
 F_d - Força aplicada no dente, suportada pela armadura de suspensão;
 F_{nn} - Resistência nominal à tração do nó;
 F_{ns} - Resistência nominal à compressão da biela;
 F_{nt} - Resistência nominal à tração do tirante;
 F_{us} - Força de compressão solicitante de cálculo biela;
 F_{us} - Força de compressão solicitante de cálculo nó;
 F_{ut} - Força de compressão solicitante de cálculo tirante;
 H_d - Componente horizontal da força;
 S_u - Esforço resistência;
 T_1 - Tensão tirante;
 V_d - Componente vertical da força;
 V_g - Força vertical resultante da ação permanente (El Debs);
 V_q - Força vertical resultante da ação variável (El Debs);
 d_h - Altura total menos altura útil;
 d_{vig} - Altura útil da viga;
 f_{bd} - Resistência de aderência de cálculo;
 f_c - Resistência à compressão do concreto;
 f_{cd} - Resistência à compressão do concreto de cálculo;
 f_{ce} - Resistência efetiva à compressão do concreto;
 f_{ck} - Resistência característica à compressão do concreto;
 f_{ct} - Resistência à tração do concreto;
 f'_s - Tensão na armadura de compressão no eixo nominal;
 f'_s - Tensão na armadura de compressão no eixo nominal de força da biela;
 f_y - Tensão de escoamento da armadura;
 f_{yd} - Tensão de escoamento da armadura de cálculo;
 $f_c'^{ef}$ - Tensão de pico na compressão;
 $f_t'^{ef}$ - Tensão de pico na tração;
 h_c - Altura do dente;
 ℓ_b - Comprimento da armadura de ancoragem;
 ℓ_c - Comprimento de dente;
 v_u - Tensão final de cisalhamento longitudinal no concreto;
 γ_R - Coeficiente de redução (PCI e ACI);
 γ_c - Coeficiente de minoração da resistência à compressão do concreto;
 γ_g - Coeficiente de majoração de ação permanente (El Debs);
 γ_n - Coeficiente de ajustamento (El Debs);

γ_q - Coeficiente de majoração de ação variável (El Debs);
 σ_n - Tensão normal atuando na interface;
 τ_{wd} - Tensão de cisalhamento atuante de cálculo;
 τ_{wu} - Tensão de cisalhamento resistente;
 h - Altura total da viga;
 U - Esforço solicitante;
 a - Distância entre o ponto de aplicação da força e o centro de gravidade da armadura de suspensão;
 c - Cobrimento;
 d - Altura útil do dente;
 μ - Coeficiente de atrito;
 ρ - Taxa geométrica de armadura no tirante;
 ω - Taxa mecânica da armadura do tirante;

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Justificativa	2
1.3 Objetivos	3
2. REFERENCIAL TEÓRICO	4
2.1 Dentes de concreto.....	4
2.2 Modelo de escoras e tirantes.....	8
2.3 Modelo atrito-cisalhamento.....	13
2.4 Elementos finitos	16
2.5 Critérios e procedimentos de projetos.....	20
2.51 - NBR 6118 (2014) e NBR 9062 (2017)	20
2.52 – El Debs (2017)	25
2.53 – PCI Design Handbook (2010)	29
2.54 – ACI 318-19.....	31
3. METODOLOGIA	38
3.1 Elementos Finitos	38
3.2 Modelos Constitutivos.....	41
3.21 – Modelo Constitutivo do concreto	41
3.22 – Modelo Constitutivo da armadura	50
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
4.1.1 Espécimes 1 e 2 - LU <i>et al</i>, 2012.....	52
4.1.2 Espécimes 1.6 e 2.6 - FALCÓN <i>et al</i>, 2019	62
4.2 Modelos simulados considerando os normativos nacionais.....	73
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
6. REFERÊNCIAS	94

1. INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Continuamente em busca do aumento da produtividade e da redução da perda de materiais, a indústria da construção civil se empenha na melhoria dos seus procedimentos e no desenvolvimento das suas tecnologias. No âmbito dos sistemas estruturais, essa evolução se manifesta, dentre outras formas, no crescimento do uso de elementos pré-moldados e dos processos fabris na realização dos empreendimentos. Segundo publicação da Associação Brasileira da Construção Industrializada de Concreto (ABCIC), em dezembro de 2020, na próxima década (2021-2030), os conceitos de indústria 4.0 irão se impor ao setor, e só o emprego da tecnologia, por meio da construção modular como um dos principais paradigmas, conseguirá fazer frente aos desafios envolvendo sustentabilidade, déficit habitacional, obras de infraestrutura, escassez de mão de obra e preservação de recursos naturais.

Os dentes de apoio ou dentes Gerber atuam na transmissão de esforços entre as peças pré-moldadas que compõe o arranjo de suporte das edificações, dessa forma, tornam-se cruciais na estabilidade das mesmas. São classificados como elementos de ligação, e assim como consolos, cálices de fundação, dentre outros, não são integralmente bem representados por uma análise linear da peça, distanciando-se da Hipótese de Bernoulli. A análise linear considera a progressividade contínua das relações entre as ações e os efeitos atuantes, desta maneira, simplifica o exame do comportamento estrutural. Tal consideração é bem empregada para situações onde se analisam elementos longos e contínuos, já para estudo de zonas de descontinuidades, como as supracitadas, e onde há altas concentrações de tensões, é imprescindível a ponderação das propriedades não lineares.

Em virtude da geometria característica, as vigas com dentes de concreto enfrentam a redução de altura na extremidade, o que acarreta altas tensões de cisalhamento, por conseguinte, a disposição das tensões e armaduras possuem arranjos especiais. Numa aproximação inicial, o comportamento dos dentes de concreto pode ser aproximado ao dos consolos, o canto reentrante é considerado o ponto mais vulnerável da ligação, onde manifestam-se fissuras principais, que se estendem até a parte superior da viga, podendo levar a ligação ao colapso. Os normativos nacionais indicam os modelos de bielas e tirantes ou atrito-cisalhamento para o dimensionamento desses elementos, a depender da sua geometria. Não obstante, o progresso tecnológico e a evolução da capacidade de processamento das ferramentas computacionais

viabilizam o aprofundamento do estudo relacionado a essas técnicas de análise, por meio de modelos numéricos.

Desta forma, afim de melhor compreender o comportamento mecânico e aprimorar os procedimentos utilizados no estudo de dentes de concreto, este trabalho propõe a apuração dos resultados obtidos por meio de simulações validadas diante de ensaios experimentais. No intuito de avaliar a implicação de parâmetros como a resistência à compressão do concreto, relação a/d , o arranjo da armadura de suspensão, além de verificar o desempenho da armadura de suspensão e do tirante principal, o comportamento das bielas e os carregamentos alcançados para diferentes geometrias de dentes, contemplando a análise das recomendações normativas nacionais.

1.2 Justificativa

Dentes são elementos de suma importância nas ligações e na transferência de esforços em estruturas, sendo responsável pelo apoio e transmissão de esforços dos componentes estruturais de concreto pré-moldado. Com o aumento do emprego dessa técnica fabril, a indústria da construção civil demanda uma maior análise dos procedimentos, estudos correntes acerca das ligações e a ampliação do conhecimento quanto ao comportamento desses elementos.

Corriqueiramente, nota-se que as discontinuidades, como apoios em dentes e consolos, apesar de possuírem comportamento distinto, findam sendo projetadas por técnicas aproximadas, baseadas em estimativas e experiências prévias, por conta de não haver um consenso nos modelos de projeto. O limite da relação a/d , para o projeto pelo método das bielas ou o modelo de atrito-cisalhamento, a tensão efetiva nas bielas e nos tirantes, a influência do arranjo da armadura de suspensão são alguns dos parâmetros onde ainda perduram incertezas.

Atualmente o uso dos elementos finitos, por meio de ferramentas computacionais, fornece assistência à execução de projetos, porém, na maior parte dos casos desconsideram a não linearidade dos elementos. Assim, o presente trabalho mostra-se relevante no aprofundamento da análise de parâmetros importantes nos modelos de projetos, propiciando a oportunidade de examinar o efetivo comportamento de alguns componentes, conferindo uma observação mais profunda e precisa dos dentes de concreto.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é investigar o comportamento dos elementos de ligação configurados como dentes de concreto armado, considerando o comportamento não linear, por meio de uma análise paramétrica via elementos finitos.

Como objetivos específicos, têm-se:

- Validar os modelos numéricos, confrontando com resultados experimentais oriundos de ensaios descritos na literatura;
- Analisar os parâmetros de resistência à compressão do concreto, relação a/d e o arranjo da armadura de suspensão (inclinada ou vertical) no desempenho dos dentes modelados numericamente com resultados experimentais da literatura;
- Estudar o comportamento dos dentes de concreto perante os normativos nacionais (NBR's 9062 (2017) e 6118 (2014));
- Por meio das simulações, verificar a adequação das recomendações normativas, o funcionamento da armadura de suspensão e dos tirantes principais, o comportamento das bielas e as cargas alcançadas pelos modelos.

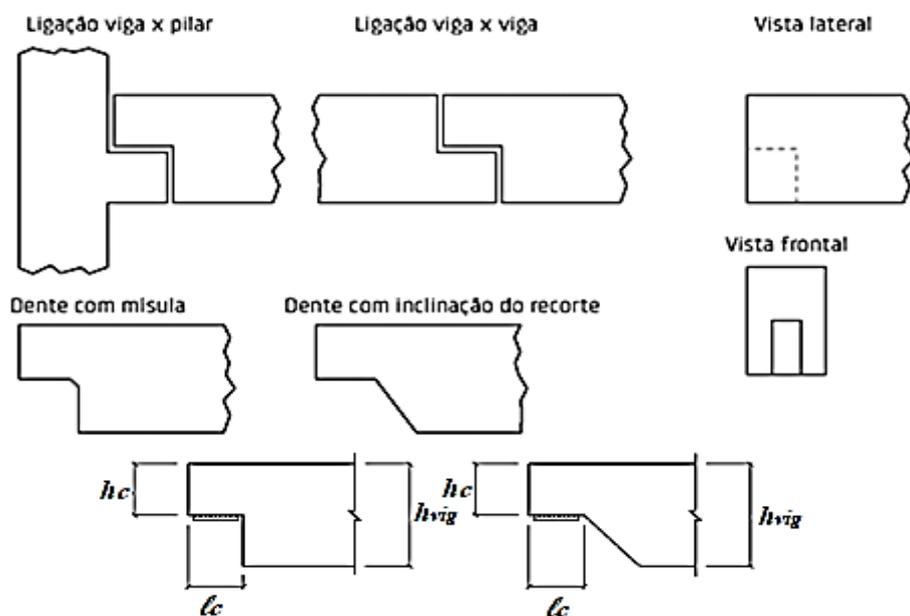
2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Dentes de concreto

Nos pontos de ligação de uma estrutura de concreto armado, como consolos e dentes, são observadas concentrações de tensões e uma mudança repentina da seção. Tais elementos atuam na transmissão de esforços entre as peças, usualmente pré-moldadas, que compõem o arranjo de suporte das edificações, e desta forma, são cruciais na estabilidade das mesmas. Os dentes de apoio ou dentes Gerber, como referidos nas normas técnicas brasileiras, devido à diminuição da altura da seção dos elementos, suportam elevadas tensões de cisalhamento, resultando numa disposição complexa, com elevadas taxas de armadura e num mecanismo de transferência característico (EL DEBS, 2017).

São conceituados pela NBR 6118 (ABNT, 2014) como uma saliência projetada na parcela superior das vigas objetivando apoiá-las em consolos ou na região inferior da extremidade de outra viga. Já a NBR 9062 (ABNT, 2017) define dentes de apoio como elementos de suporte na extremidade de vigas, placas ou painéis, cuja altura é menor que a altura do elemento a ser apoiado e que podem ser aproximados a consolos. De maneira geral, os dentes são caracterizados geometricamente pela sua altura h_c e pelo seu comprimento ℓ_c , com possibilidade de apresentar mísula no canto reentrante ou inclinação do recorte vertical, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Geometria dos dentes de concreto



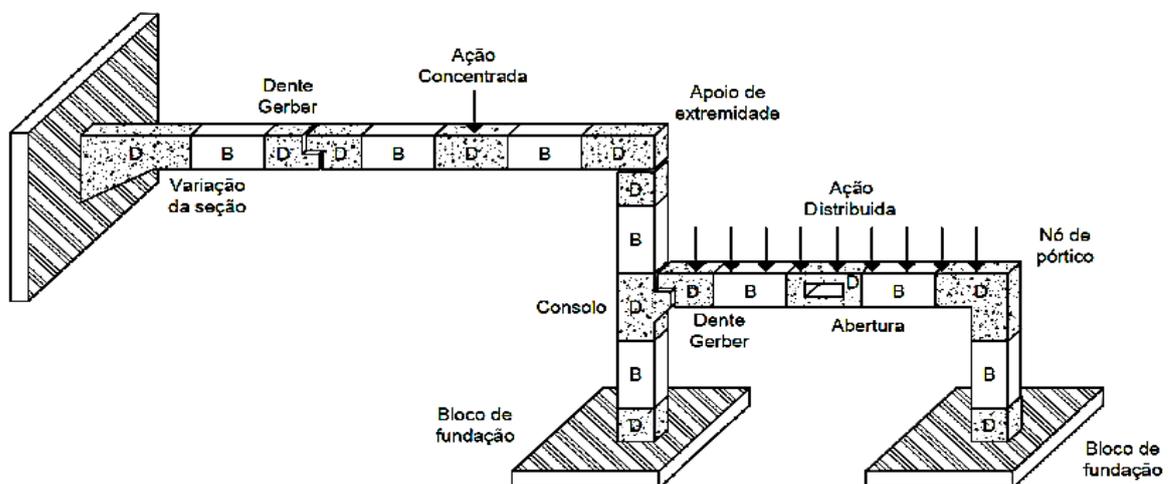
Fonte: El Debs (2017)

Ainda segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas NBR 9062 (ABNT, 2017), são considerados elementos especiais os componentes estruturais caracterizados por descontinuidades geométricas ou de cargas que influenciem o comportamento estrutural de maneira geral. Tais dispositivos, como os dentes Geber, além de consolos, vigas-paredes, sapatas e blocos de fundação, são específicos, pois, como não são suficientemente longos para que as perturbações localizadas sejam dissipadas, seus comportamentos não obedecem a Hipótese de Bernoulli, onde se considera que as seções transversais ao eixo neutro do elemento, permanecem planas após o esforço aplicado.

Essas descontinuidades estáticas e geométricas acarretam uma alteração na distribuição de tensões, por conseguinte, tais áreas são classificadas como regiões do tipo D. Sendo assim, os esforços de cisalhamento compreendem uma parcela significativa a ser considerada no dimensionamento dos elementos de descontinuidade, que requerem convalidações experimentais e análises realísticas como no modelo das bielas, atrito-cisalhamento e o método dos elementos finitos.

Dessa maneira, como observado na Figura 2, para o cálculo mais acurado uma estrutura pode ser dividida em duas regiões: Regiões B (Bernoulli), onde é aceitável considerar uma distribuição linear de deformações ao longo das seções transversais, pois a hipótese de que as seções planas permanecem planas é válida, e as teorias clássicas de flexão e cisalhamento representam bem o comportamento dos elementos; e regiões D (Descontinuidade), onde, em função de mudanças bruscas de seção, pontos de apoio ou cargas concentradas, origina-se um campo não-linear de deformações e deslocamentos, nas quais as teorias clássicas não são válidas, também conhecidas como regiões de Saint Venant.

Figura 2-Regiões B e D

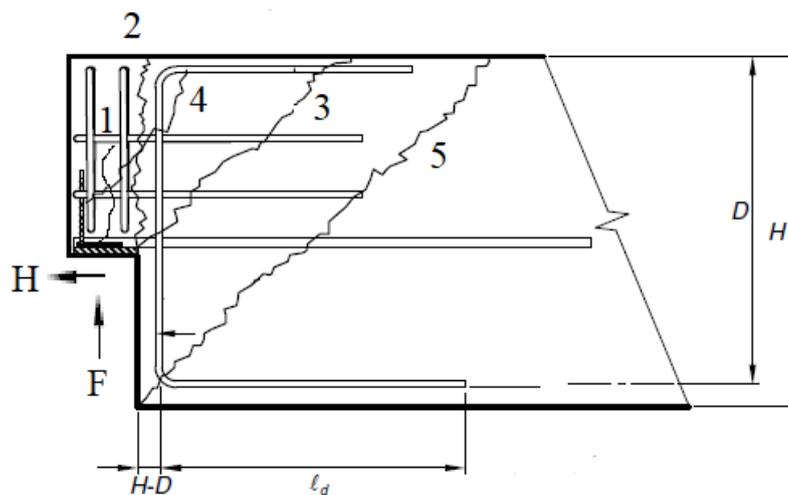


Fonte: Silva (2017)

Segundo o *PCI (PRECAST AND PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE) Design Handbook* (2010) e El Debs (2017), os apoios do tipo dentes de concreto possuem cinco modos de falha potenciais, os quais são ilustrados na Figura 3:

- 1) Por efeito da flexão e tensão axial na extremidade do dente, proporcionando um acréscimo de deformação nas armaduras do tirante e um esmagamento do concreto na parte superior do dente;
- 2) Ruína por cisalhamento direto na junção do dente e da componente principal da viga;
- 3) Devido à tensão diagonal originária do canto reentrante, promovendo o escoamento das armaduras de suspensão;
- 4) Por ação da tensão diagonal na extremidade do dente acarretando um esforço excessivo nas barras do tirante;
- 5) Ruína em virtude da tensão diagonal que se origina na parte inferior da viga, por conta da deficiência de armadura que chega ao canto inferior.

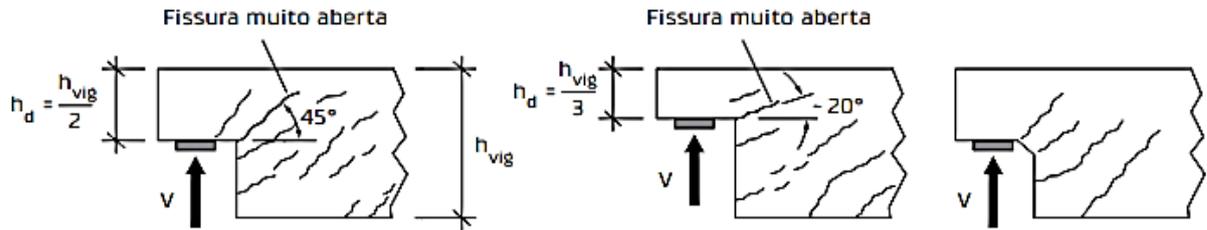
Figura 3-Modos de falhas potenciais dos dentes de concreto



Fonte: PCI (2010)

De acordo com a Figura 4, observa-se que as inclinações das fissuras manifestadas nesse tipo de ligação possuem relação com a altura do dente h_c e a altura total da viga h , tendendo à direção horizontal quanto menor a razão h_c/h . Nota-se, também, que a existência na mísula ou chanfro, no canto reentrante, impede o aparecimento da fissura principal que sai deste, além de retardar o aparecimento de fissuras (LEONHARD & MONNIG, 1978).

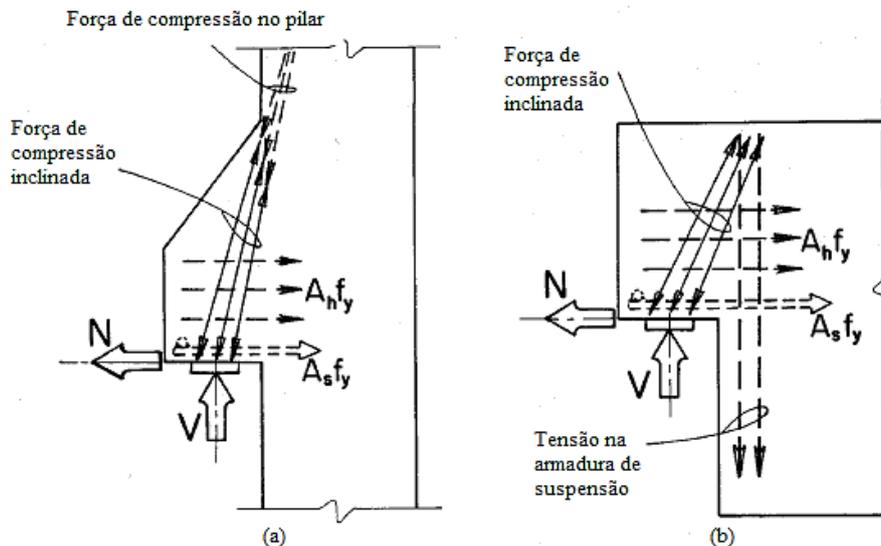
Figura 4-Influência da relação h_c/h no comportamento do dente de concreto



Fonte: El Debs (2017)

Conforme a Figura 5 os dentes de concreto se assemelham a consolos invertidos em diversos aspectos, não obstante a força de compressão inclinada, no caso dos consolos, é resistida pela coluna. Conforme a Figura 5, no tocante aos dentes, esse esforço é suportado por um reforço de estribos posicionado próximo a interface dente-viga, denominado no Brasil de armadura de suspensão (MATTOCK, A.H.; CHAN, T. C., 1979)

Figura 5- Comparação do sistema interno de forças: a) consolos, b) dentes de concreto



Fonte: Mattock;Chan (1979)

As normas brasileiras sugerem essa mesma analogia para abordagem dos dentes Geber, desta forma, em consonância com a NBR 9062 (ABNT, 2017), os dentes podem ser classificados e examinados do seguinte modo, sendo (a) distância entre o ponto de aplicação da força ao centro de gravidade da armadura de suspensão, e (d) a altura útil do dente:

- a) Para $1,0 < a/d \leq 2,0$: o dimensionamento é feito como vigas em balanço;

b) Para $0,5 < a/d \leq 1,0$ (dentes curtos): deve-se proceder o dimensionamento segundo o modelo de bielas e tirantes, representado por um modelo matemático de uma treliça com duas barras, uma tracionada, representada pela armadura principal do tirante, e outra comprimida, representada pela biela de compressão. Para esse modelo deve-se verificar a capacidade resistente do concreto e do aço.

c) Para $a/d \leq 0,5$ (dentes muito curtos): o dimensionamento é feito pelo modelo de atrito-cisalhamento, supondo a ruptura ao longo do plano de ligação do dente com a viga, podendo considerar o efeito favorável do intertravamento dos agregados, desde que a interface seja atravessada por barras de aço;

d) Despreza-se o efeito favorável de eventuais cargas horizontais, que comprimam a ligação dente-viga;

e) São consideradas cargas horizontais que tracionem o plano de ligação entre o dente e o elemento de sustentação, pressupondo que essas são absorvidas integralmente pelo tirante;

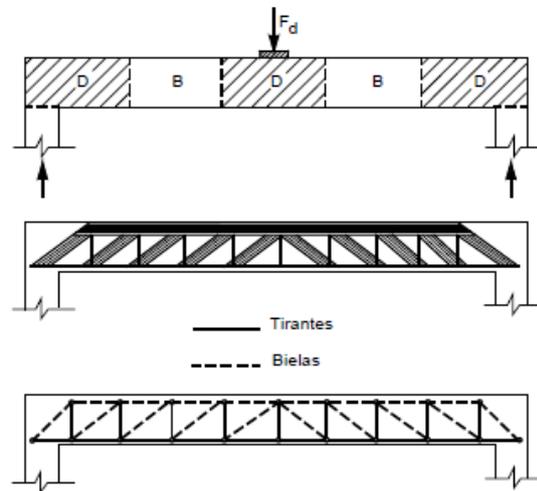
2.2 Modelo de escoras e tirantes

Na caracterização estrutural de dentes de concreto armado, o modelo de escoras e tirantes é largamente empregado pois proporciona uma abordagem realista do comportamento da peça, e essa perspectiva é essencial na análise de regiões de descontinuidades geométricas, onde a Hipótese de Bernoulli de distribuição linear de deformações não é aplicável. Oriundo da clássica analogia de treliça, idealizada por Ritter e Mörsh no começo do século XX, onde se associa a viga de concreto armado fissurada e a treliça (Figura 6), o modelo de escoras e tirantes foi consolidado a partir da década de 70 de modo generalizado no dimensionamento de outros elementos estruturais especiais, como vigas-paredes, apoio em dentes, abertura em vigas, consolos, ligações viga-pilar, sapatas e blocos de fundação (SILVA, 1991).

Também denominado de método das bielas, porém normatizado nacionalmente como modelo de bielas e tirantes, este método configura o comportamento estrutural de elementos de concreto a partir de campos e fluxos de tensões, onde as tensões de tração são concebidas como tirantes (elementos de aço) e as tensões de compressão são consideradas bielas comprimidas (elementos de concreto). Esses elementos são ligados por meio de nós, admitindo-se, desta forma, a representação de uma treliça. Segundo Silva (1991), os modelos de escoras e tirantes podem ser desenvolvidos diretamente, por meio da análise elástica, quando se dispõe das

tensões elásticas e suas direções principais, ou pelo fluxo de tensões através da estrutura, empregando o processo do caminho da carga.

Figura 6 - Analogia de treliça para uma viga simplesmente apoiada

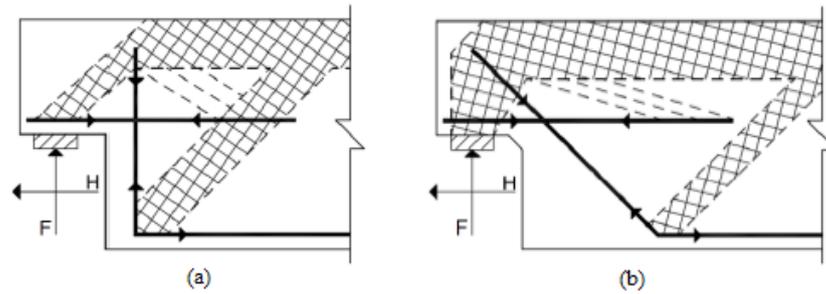


Fonte: Silva (1991)

A adoção da geometria apropriada do modelo é de primordial significância para sua boa representatividade. Para isso, são analisados os tipos de ações atuantes, o ângulo entre as escoras e os tirantes, a área de aplicação das ações e das reações, os arranjos das armaduras e o cobrimento das mesmas. Na literatura, são propostos diversos modelos de escoras e tirantes desenvolvidos para ligações em dentes de concreto, dos quais os principais encontram-se tratados a seguir.

Leonhardt e Mönning (1978) apresentaram modelos de bielas comprimidas e tirantes horizontais, verticais, inclinados ou combinados. No primeiro caso (Figura 7 (a)) a força cortante é contida com armadura de suspensão vertical, além disso a armadura do banzo inferior deve ser ancorada à esquerda do início da placa de apoio para a direita, introduzindo-se na viga até uma seção tal que as bielas de compressão, originadas na sua ancoragem, possam se apoiar nos nós superiores da treliça. No segundo caso (Figura 7 (b)) a força cortante é contida com barras ou estribos inclinados, com ângulo igual ou inferior a 45° , e neste caso, embora na teoria não surjam esforços de tração na parte inferior do dente, é necessário colocar armadura no banzo de baixo para evitar o cisalhamento do dente ao longo das barras inclinadas e para absorção das forças horizontais.

Figura 7 - Modelos escoras e tirantes para avaliação de esforços internos

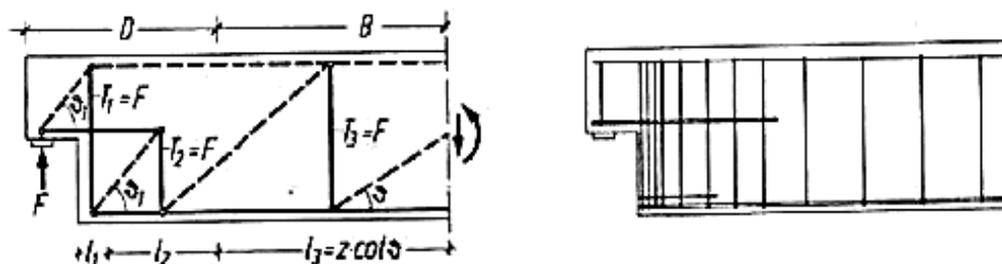


Fonte: Leonhardt e Mönning (1978)

Os autores destacam, ainda, que em ensaios realizados na Universidade de Stuttgart ficou evidenciado que, no primeiro caso (Figura 7 (a)), as barras de suspensão não suportaram toda solicitação da força vertical, pois uma parte dessa força é transmitida diretamente ao apoio pela inclinação da força do banzo comprimido, e essa parcela deve aumentar com a razão h_c/h . Foi constatado que a maior capacidade resistente foi obtida com a combinação dos casos (a) e (b), nesse último caso, a parcela de carga atribuída à armadura inclinada deve ser aumentada, para valores maiores de h_c/h .

Schlaich *et al.* (1987), observa que, embora fosse praticada a consideração de que seria suficiente a simples relação do tirante T_1 com a armadura de cisalhamento, um modelo de escoras e tirantes completo, para dentes de concreto, deveria adicionar a força de tração vertical T_2 , por conta da amarração da solicitação horizontal (Figura 8). Por sua vez, as tensões nos tirantes T_2 e T_3 seriam distribuídas, respectivamente, ao longo dos comprimentos l_2 e l_3 e o mesmo ângulo seria adotado para a biela superior e para a inferior, na extremidade da viga.

Figura 8 - Modelo de bielas e tirantes de Schlaich et al. (1987).

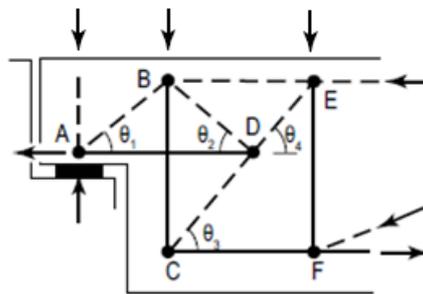


Fonte: Schlaich *et al.*(1987)

Originalmente proposto por Cook e Mitchell (1988) e adotado por Sanders (2002) no ACI SP 208, como exemplo de projeto do modelo de escoras e tirantes para dentes de concreto, o modelo da Figura 9 é resultado de uma observação dos campos de tensão por meio de

resultados experimentais em conjunto com análises computacionais via elementos finitos. É assumido que o cisalhamento na extremidade da viga é absorvido na parte inferior da seção completa (nó C) e levado pelo tirante vertical principal B-C até o topo da viga (nó B), o esforço cortante no dente flui para a reação de apoio por meio da biela de compressão inclinada A-B. A amarração horizontal A-D é necessária para fornecer equilíbrio no nó logo acima da reação de suporte e equilibrar o impulso para fora da biela A-B.

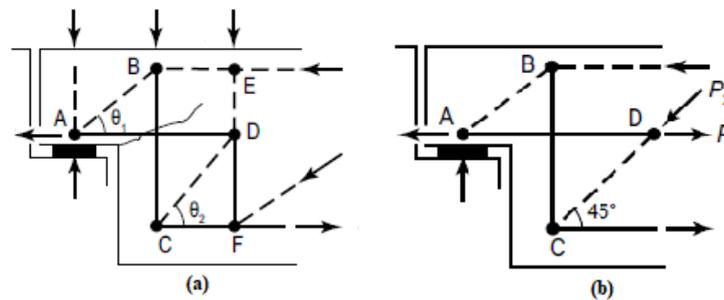
Figura 9- Modelo de escoras e tirantes Cook e Mitchell (1988) presente nos exemplos de projeto da ACI SP-208



Fonte: Mattock (2012)

Mattock em 2012, examina o modelo proposto por Cook e Mitchell (Figura 9) e um modelo alternativo proposto pela FIP (Figura 10(a)), submetidos a uma variedade de combinação de esforços externos horizontais e verticais. Na análise do primeiro, constata inconsistências com os resultados advindos das dezesseis vigas experimentadas. Tal incongruência é fruto da superestimação da força atuante nas armaduras de suspensão, levando a uma quantidade maior de armadura do que realmente é necessário. Quanto ao modelo alternativo proposto pela FIP, que leva em consideração uma tensão diagonal de fissuração oriunda do canto reentrante, o autor analisa que a tensão de tração levada pelo tirante AD no nó D não atua pontualmente, ou seja, é estendida além do nó, não sendo resistida pela parcela da reação de compressão da biela CD em conjunto com o tirante DF. Desta forma, como, na prática, o tirante AD é estendido além do nó D, com comprimento suficiente para desenvolver sua resistência ao escoamento, não se faz necessário o tirante DF. Isso posto, é sugerido um novo modelo simplificado (Figura 10(b)), sem o tirante DF.

Figura 10- (a) Modelo de escoras e tirantes alternativo FIP; (b) Modelo simplificado sugerido por Mattock



Fonte: Mattock (2012)

Lu *et al* em 2012, examinou 24 vigas com dentes de concreto considerando como principais variáveis a resistência do concreto, a relação a/d e o valor de carga horizontal. Os resultados indicaram que a rigidez e a carga de ruptura aumentam com a redução da relação a/d e o aumento da resistência do concreto e decresceram com o aumento da carga horizontal. Os autores também propuseram um modelo de escoras e tirantes capaz de prever a capacidade de cisalhamento dos dentes de concreto armado. Já Nagrodzka-Godycka e Piotrkowski (2012), investigaram experimentalmente 12 dentes de concreto armado em 6 vigas, com o objetivo de comparar o comportamento de peças idênticas sujeitas a cargas inclinadas com outras carregadas apenas verticalmente. Os autores observaram, além do padrão discrepante de fissuração e de abertura das fissuras, que a imposição força horizontal igual a metade da força vertical, causou uma diminuição de 25% da capacidade de carga. Dentre outras constatações, foi verificado experimentalmente que dobrando a armadura horizontal, bem como a de suspensão e os estribos verticais, independentemente do tipo de carregamento, a capacidade de carga aumentou apenas cerca de 50%.

Moreno e Meli (2014), também realizaram trabalho experimental, testando quatro modelos de vigas com dentes de concreto sob a ação de cargas verticais. Foram estudados espécimes construídos de acordo com as recomendações do *PCI Design Handbook* além de alternativas para o controle da fissuração oriunda do canto reentrante. Os autores concluíram que as disposições de projeto do PCI previram corretamente o modo crítico de dano, porém se mostraram bastante conservadoras na determinação da capacidade de carga para o modo de falha crítica. Também foi observado que o modelo de escoras e tirantes proposto por Mattock (2012) teve boa correlação com os resultados experimentais e proporcionou uma melhor estimativa da capacidade de carga da peça.

Em 2019, Falcón *et al* publicou estudo, fruto da sua tese de doutorado (FALCÓN, 2015), onde foram testados 28 dentes de concreto. Com base nos resultados foi proposta uma abordagem simplificada, com uma camada de armadura de suspensão para determinação da geometria dos modelos de escoras e tirantes. O estudo considerou o nó compressão-compressão-tração (CCT), na extremidade superior do tirante vertical, como ponto crítico de ruptura da peça, permitindo, por meio do procedimento proposto, desenvolver a capacidade do nó incluindo uma cobertura de concreto. Mohammed *et al.* em 2020 também estudou experimentalmente vigas com dentes de concreto. Ensaando 27 espécimes e analisando variações do esquema da armadura de suspensão, como também os efeitos da utilização de compósitos cimentícios de engenharia (ECC), o autor observou as melhoras da capacidade de deflexão e de carga dos dentes, frente às vigas de controle dimensionadas de acordo com os requisitos do *PCI Design Handbook*.

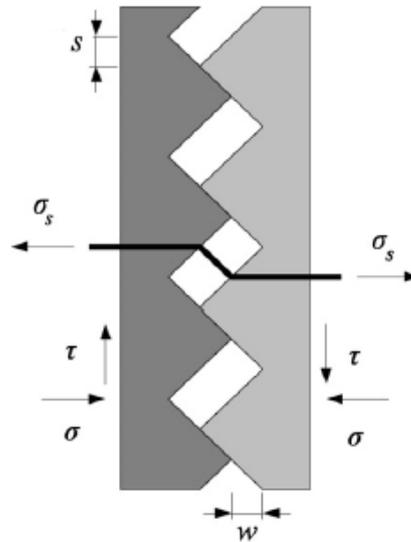
2.3 Modelo atrito-cisalhamento

Apresentado em princípio por Birkeland e Birkeland (1966), o modelo do atrito-cisalhamento pode prever, de maneira semiempírica, a resistência da interface concreto-concreto submetida a tensões de cisalhamento longitudinal. Essa teoria garante que tais esforços são suportados apenas pelo atrito, por meio de um modelo de intertravamento entre as faces adjacentes, influenciado pela armadura que cruza a seção e as forças externas que atuam na direção normal ao plano considerado.

Essencialmente o modelo admite que, no plano onde ocorre a solicitação de tensões cisalhantes, se desenvolve uma fissura potencial no concreto. A consolidação das faces separadas por essa fissura potencial é assegurada pela colocação de armaduras transversais, que cruzam as partes e produzem uma força normal ao sistema. Essa força equilibra o cisalhamento atuante, mobilizando a força de atrito, dessa forma, pode-se determinar a armadura necessária para combater a solicitação de cisalhamento a partir da teoria do atrito de Coulomb (EL DEBS, 2000).

O mecanismo simplificado de “dente de serra”, representado na Figura 11, é usualmente adotado para retratar os princípios fundamentais dessa teoria. É demonstrada a influência da armadura transversal que cruza a interface e são consideradas as forças externas que agem normais ao plano de cisalhamento.

Figura 11 - Modelo “dente de serra” da teoria atrito-cisalhamento



Fonte: Santos e Julio (2012)

Santos e Julio (2012), em trabalho sobre o estágio científico do tema, listam os marcos mais significativos, no modelo atrito-cisalhamento, para a mensuração da tensão de cisalhamento longitudinal na interface concreto-concreto. Essas contribuições são listadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Marcos estabelecidos no modelo atrito-cisalhamento

Autor	Ano	Expressão proposta
Birkeland e Birkeland (1966)	1966	$v_u = \mu \rho f_y$
Mattock e Hawkins(1972)	1972	$v_u = 1,38 + 0,8(\sigma_n + \rho f_y)$
Loov (1978)	1978	$v_u = k \sqrt{f_c (\sigma_n + \rho f_y)}$
Walraven <i>et al.</i> (1987)	1987	$v_u = C_1 (\rho f_y)^{C_2}$ $C_1 = 0,822 f_c^{0,406}$ $C_2 = 0,159 f_c^{0,303}$
Randl (1997)	1997	$v_u = c f_c^{\frac{1}{3}} + \mu (\sigma_n + \rho k f_y) + \alpha \rho \sqrt{f_y f_c} \leq \beta v f_c$

Fonte: Santos e Julio (2012)

Nas expressões relacionadas, v_u é a tensão final de cisalhamento no concreto, μ é o coeficiente de atrito, ρ significa a taxa de armadura, f_y é a tensão de escoamento da armadura, σ_n representa a tensão normal atuando na interface devido ao carregamento externo. Birkeland and Birkeland (1966) regula o coeficiente de atrito segundo a preparação da superfície, conferindo os seguintes valores: $\mu = 1,7$ para concretos monolíticos, $\mu = 1,4$ para juntas de construção artificiais, $\mu = 0,8$ a $1,0$ para juntas de construções triviais e interfaces aço-concreto. Além disso, os autores impõem os limites de projeto de $\rho \leq 1,5\%$, $v_u \leq 5,52$ MPa e $f_y \geq 27,58$ MPa.

Mattock e Hawkins (1972) aprimoram o primeiro modelo considerando explicitamente a contribuição da coesão, onde o primeiro termo é referente à coesão na interface e o segundo à tensão de confinamento, considera-se o coeficiente de atrito constante igual a 0,8. A expressão proposta foi determinada para o limite inferior de testes experimentais, sendo a tensão de cisalhamento final limitada entre $0,3f_c$ e 10,34 MPa e a tensão de confinamento superior a 1,38 MPa.

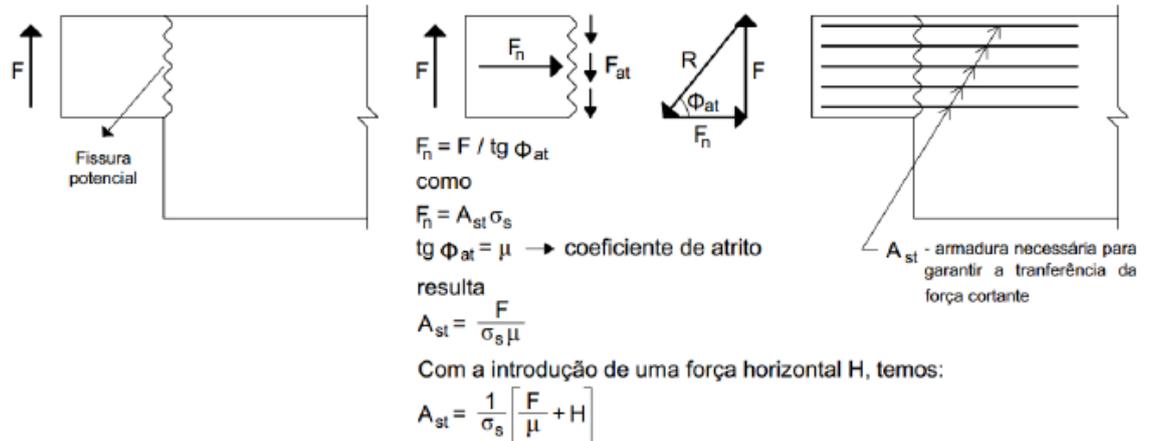
Loov (1978) leva em conta a constante k na sua expressão, igual a 0,5 para interfaces não fissuradas e inclui a resistência à compressão do concreto f_c . Walraven *et al.* (1987) propõem, a partir de largo estudo experimental uma função não linear, que considera os termos, C_1 e C_2 , para descrever a resistência ao cisalhamento de interfaces inicialmente fissuradas. A expressão de Randl (1997) leva em conta a coesão oriunda do intertravamento dos agregados, o atrito devido ao deslocamento longitudinal relativo e o efeito de pino, relacionado com a resistência à flexão que cruza as interfaces.

Especificamente para dentes de concreto, como ilustrado na Figura 12, a fissura potencial que divide as interfaces é admitida entre o dente e a viga, a partir dessa é considerado o deslocamento relativo das faces, o intertravamento dos agregados e o efeito de pino aliado à força normal, em virtude da armadura distribuída que cruza a interface. El Debs (2000) salienta que esse modelo não determina a posição exata da armação, orientando-se que as armaduras sejam distribuídas de maneira uniforme ao longo do traçado de ruptura. Dessa forma, o momento fletor não é considerado na seção da fissura potencial, por conta da excentricidade da carga, implicando uma armadura mais concentrada na parte mais tracionada na seção, ou seja, próximo ao canto reentrante na parte inferior do dente

O modelo atrito-cisalhamento é previsto nas normas brasileiras, NBR 6118 (ABNT, 2014) e NBR 9062 (ABNT, 2017) para dentes de concreto muito curtos ($a/d \leq 0,5$), podendo

ser considerado o efeito favorável do engrenamento dos agregados, desde que a interface seja atravessada por barras de aço.

Figura 12 - Modelo atrito-cisalhamento dentes de concreto, armadura necessária



Fonte: Silva (2017), adaptado de El Debs(2000)

2.4 Elementos finitos

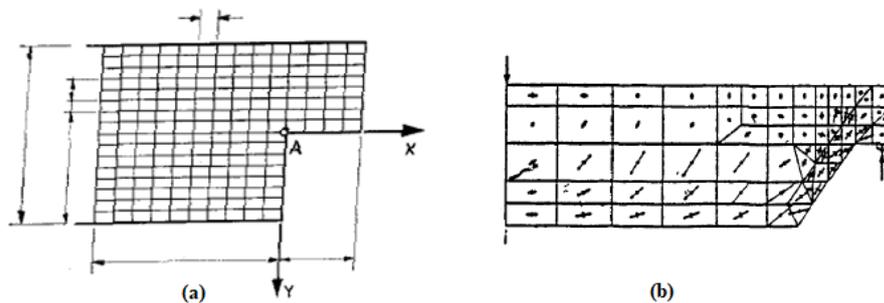
A técnica dos elementos finitos tem sido extensivamente aplicada no estudo do comportamento de regiões do tipo D. Especificamente, para dentes de concreto, Sargious e Tadros (1970) foram pioneiros ao utilizar essa análise na determinação do comportamento e da resistência de vigas com dentes de concreto. Os autores propuseram vários arranjos de cabos pré-tensionados, em vigas protendidas, porém não empreenderam validações experimentais.

Werner e Dilger (1973) também trabalharam com modelos de elementos finitos em vigas protendidas com dentes de concreto e determinaram, por meio da média das tensões de três elementos finitos conectados ao ponto A (Figura 13(a)), a força de cisalhamento limite para o surgimento de fissuras oriundas do canto reentrante, admitindo quatro diferentes tipos de carregamento. Conforme convalidações experimentais, foi concluído que a resistência de fissuração por cisalhamento no canto reentrante pode ser associada à resistência à tração do concreto por meio da relação $6\sqrt{f_{ct}}$, sendo que para projetos práticos foi sugerida a relação $4\sqrt{f_{ct}}$.

Cook (1987) (Figura 13 (b)) estudou o comportamento de elementos de concreto próximos a discontinuidades, por meio de um programa bidimensional não linear de elementos finitos. Entre outros elementos especiais, como consolos e apoios de extremidades, foram

modelados e ensaiados experimentalmente quadro dentes de concreto com diferentes arranjos, onde pôde-se analisar os ângulos de inclinação das bielas de compressão e dos tirantes, as camadas de modelagem necessárias e a influência do tipo de elemento finito utilizado, de nove nós quadrilaterais ou seis nós triangulares. Foi possível, também, realizar a comparação das cargas de ruptura, observando-se que o valor obtido por meio da modelagem numérica girou em torno de 90% do limite percebido nos resultados experimentais.

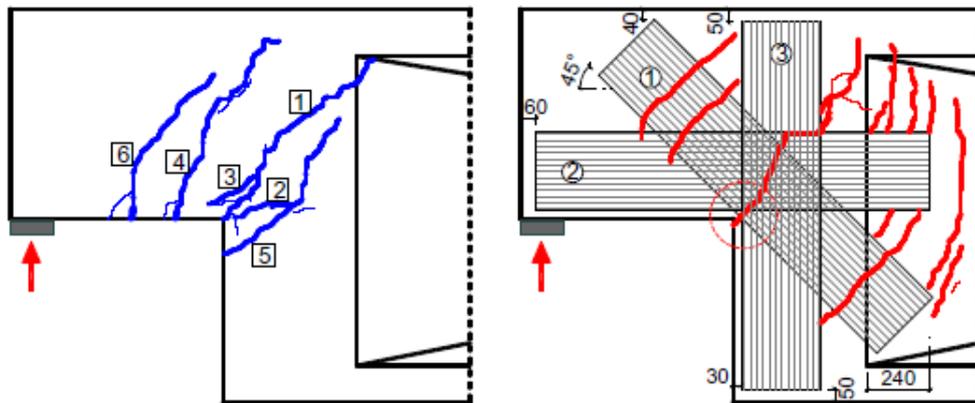
Figura 13 - Malhas de elementos finitos propostas: (a) Werner e Dilger (1973) e (b) Cook (1987)



Fonte: Werner e Dilger (1973) e Cook (1987)

Nagy-Gyorgy *et al* (2012), apresentou avaliações experimentais e numéricas, por meio de elementos finitos não lineares, da utilização do reforço de polímeros reforçados com fibra de carbono (CFRP's) ligados externamente em dentes de concreto armado. A partir de uma motivação real, na qual os dentes de vários pré-moldados de vigas de concreto desenvolveram fissuras diagonais devido a erros durante a montagem, os dentes foram reforçados no local usando placas de CFRP para limitar a abertura de mais fissuras (Figura 14), após o teste e a simulação dos modelos. Análise de elemento finito não linear dos espécimes nas condições de teste indicou possíveis pontos de descolagem das placas e que a capacidade poderia ter aumentado em até 20% se as placas tivessem sido ancoradas mecanicamente.

Figura 14 - Padrão de fissuração e reforço utilizado por Nagy-György et al.

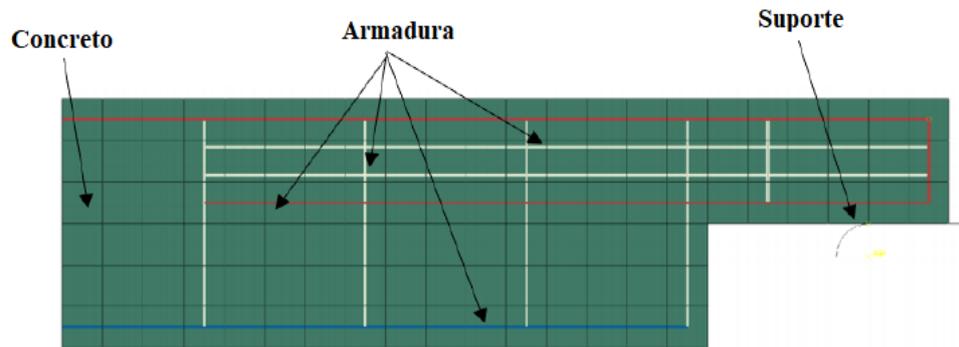


Fonte: Nagy-György *et al.* (2012)

Em pesquisas mais atuais é possível incrementar esses modelos, incorporando outras não-linearidades, tais como, a rigidez à tração pós-fissuração do concreto ou a tensão transmitida transversalmente ao aço pelo concreto fissurado. Empregando essa análise, Al Musawi (2018) estudou o comportamento da falha à flexão de três vigas com dentes de concreto com $a/d > 1,0$ por meio do software ABAQUS. Foram empregados modelos tridimensionais usando elementos com três graus de liberdade em cada nó, capazes de representar o efeito da distorção plástica, fissuras em três dimensões ortogonais e o esmagamento. Constatou-se que os modelos numéricos se relacionaram bem com os resultados de dados experimentais, incluindo os modos de ruptura e a carga limite de fissuração. Os valores de resistência ao cisalhamento foram condizentes e aumentaram com a resistência à compressão das vigas, assim como a resistência à flexão cresceu com o aumento da taxa da armadura de reforço.

Utilizando a mesma ferramenta, Abdel-Moniem *et al* (2018), investigou numericamente a aplicação de diferentes técnicas de reforço externo para extremidades com dentes de concreto. Por meio de um modelo de elementos finitos bidimensional, aplicando o software ABAQUS (Figura 15), se estudou várias técnicas de fortalecimento externo dos dentes, entre elas: colagem externa de aço no canto reentrante, ancoragem de parafusos inclinados, revestimento externo de fibra de carbono e de placas de aço inclinadas. Os resultados, apresentados em termos de capacidade de carga final, carga-deflexão e padrão de trinca na falha, mostrou compatibilidade com dados de teste disponíveis, além disso, possibilitou a captura do andamento da falha com boa precisão. Dentre outras constatações, os autores destacaram que o método de revestimento externo de placa de aço apresentou melhor capacidade de carga e grande efeito na limitação de fissuras, já a técnica de ancoragem de parafusos melhor comportamento dúctil.

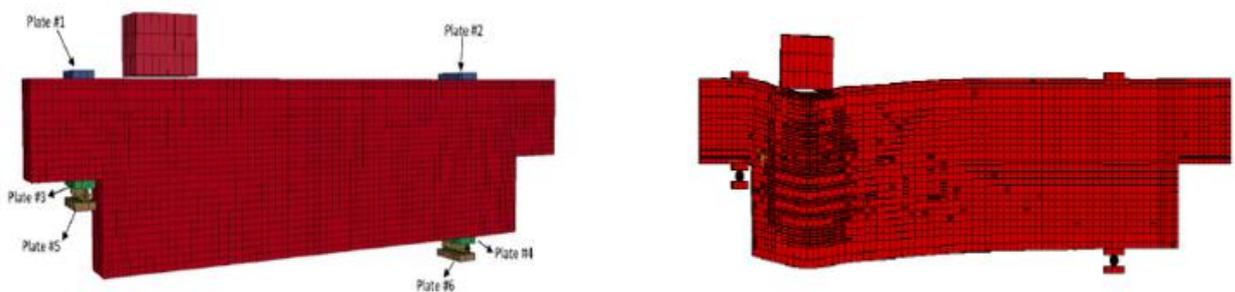
Figura 15 - Malha de elementos e componentes do modelo



Fonte: Abdel-Moniem *et al* (2018)

Syed, Z.I. *et al* (2019) conduziu um estudo numérico não-linear para investigar o comportamento de dentes de concreto com diferentes arranjos de armadura sob cargas de impacto. Os modelos foram simulados no pacote de elementos finitos LS-DYNA (Figura 16), por meio de uma análise paramétrica é destacado que sob a carga de impacto, todas as vigas falharam no cisalhamento, ademais os diferentes arranjos de armadura de suspensão afetaram o controle de fissuras, porém não melhoraram a resistência ao cisalhamento para os dentes. Por outro lado, o aumento do diâmetro da armadura de suspensão aumentou a resistência final de cisalhamento da peça.

Figura 16 - Modelagem e padrão de fissuras, vigas com dente sob carga de impacto.



Fonte: Syed, Z.I. *et al* (2019)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) sugere o emprego da análise estrutural por elementos finitos em elementos específicos de concreto como: lajes lisas, lajes cogumelos, vigas, pilares-parede e blocos. Todavia, a aplicação dos resultados dessa metodologia, no regime linear, em projetos é limitada em duas situações: a primeira é para visualizar o caminho da carga, como por exemplo via trajetória de tensões principais, distinguindo, assim, os trechos comprimidos e tracionados, facilitando a criação de modelos de escoras e tirantes; a segunda é para a

determinação de esforços solicitantes em elementos estruturais, em geral por integração de campos de tensões. Já a aplicação dos resultados obtidos com modelos de análise em regime não linear, os quais representam adequadamente a reologia do concreto e do aço, além da interação de ambos, podem ser usados para avaliar o desempenho da estrutura em serviços ou na ruptura, no entanto, o dimensionamento das armaduras não pode ser realizado a partir desta análise.

2.5 Critérios e procedimentos de projetos

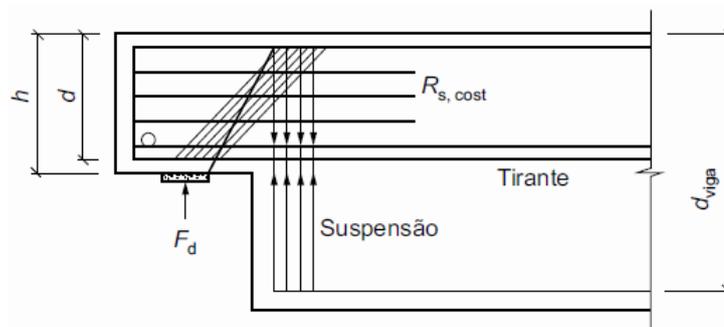
2.5.1 - NBR 6118 (2014) e NBR 9062 (2017)

As normas brasileiras permitem a aproximação do comportamento estrutural dos dentes aos consolos, podendo ser descritos por um modelo biela-tirantes (Figura 17), listando as diferenças mais importantes como sendo as seguintes:

- a) A biela é usualmente mais inclinada, pois deve procurar apoio na armadura de suspensão, dentro da viga, na extremidade oposta ao ponto de aplicação da carga;
- b) A armadura horizontal principal deve penetrar na viga, procurando ancoragem nas bielas devido ao cisalhamento na viga;
- c) A armadura de suspensão deve ser calculada para uma força no mínimo igual a F_d , de acordo com o modelo biela-tirante adotado.

Como disposições construtivas têm-se que: a altura do dente não pode ser menor que a metade da altura da viga, deduzido o afastamento do aparelho de apoio à borda externa; toda armadura do tirante deve ser localizada no quinto da altura do dente, junto à borda tracionada.

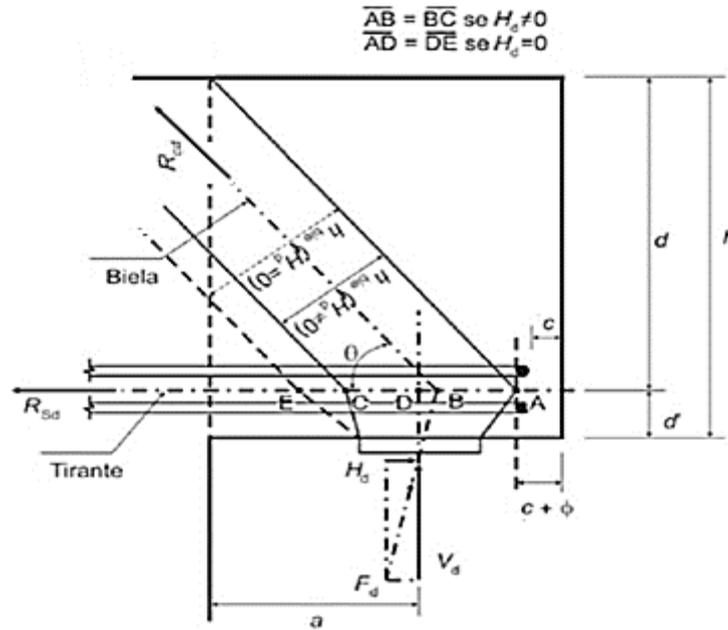
Figura 17 - Modelo de bielas e tirantes para dentes da NBR 9062



Fonte: NBR 9062 ABNT (2017)

Para dentes com $1,0 < a/d \leq 2,0$, o dimensionamento é feito como vigas em balanço. Deve-se verificar os elementos quanto ao esmagamento para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$), sendo que a tensão de compressão na biela inclinada não pode ultrapassar f_{cd} (para carga direta) e $0,85 f_{cd}$ (para carga indireta). Nesta verificação, encontra-se a largura da biela comprimida e respectiva tensão por processo gráfico, onde geometricamente se observa o modelo da Figura 18.

Figura 18 - Modelo geométrico bielas e tirantes para dentes curtos



Fonte: Adaptado NBR 9062 ABNT (2017)

$$\overline{AB} = \ell_c - \left(a + c + \phi + \frac{d_h H_d}{V_d} \right) \quad (1)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{d}{\ell_c - c - \phi_{tir}} \right) \quad (2)$$

$$h_{bie} = 2\overline{AB} \text{sen}\theta \quad (3)$$

$$a_{bie} = (\ell_c - c - \phi - \overline{AB}) \text{sen}\theta \quad (4)$$

Fazendo o equilíbrio da treliça, tem-se:

$$R_{cd} a_{bie} = \frac{V_d}{\text{sen}\theta} + \frac{H_d d_h}{a_{bie}} \quad (5)$$

Resultando em um valor de tensão na biela de:

$$\sigma = \left(\frac{V_d}{\text{sen}\theta} + \frac{H_d d_h}{a_{bie}} \right) \cdot \frac{1}{2b \overline{AB} \text{sen}\theta} \quad (6)$$

Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), sujeitos as condições de compressão diagonal em função da tensão de cisalhamento, adota-se:

$$\tau_{wu} = 3,0 + 0,9 \cdot \rho \cdot f_{yd} \leq 0,27 (1 - f_{ck} / 250) f_{cd} \leq 8MPa \quad (7)$$

Sendo $f_{yd} \leq 435 MPa$, onde τ_{wu} é a tensão de cisalhamento, f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto, definida pela razão (f_{ck}/γ_c), f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço, f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto e ρ é a taxa geométrica de armadura do tirante, γ_c é o coeficiente de minoração da resistência à compressão do concreto que é igual a 1,3 para elemento pré-fabricado e 1,4 para elemento pré-moldado.

No tirante, não é permitido a diminuição de seção transversal entre o ponto de aplicação da carga e o engastamento, exceto quando $a/d > 2.0$. Para dentes com $a/d \leq 2.0$, a taxa mecânica da armadura do tirante $\omega = \rho \times f_{yk}/f_{ck}$ deve ser superior a 0,04, no intuito de evitar a ruptura frágil do elemento. A taxa geométrica de armadura no tirante é dada por:

$$\rho = A_{s,tir}/b \cdot d \quad (8)$$

Em que $A_{s,tir}$ é a área total de aço concentrada no tirante, b é a largura do dente de concreto e d é a altura de cálculo. Como critérios para o dimensionamento da armadura, a NBR 9062 (ABNT, 2017) traz:

Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$):

$$A_{s,tir} = A_{sv} + H_d / f_{yd} , \quad (9)$$

Onde

$$A_{sv} = \left(0,1 + \frac{a}{d} \right) F_d / f_{yd} \quad (10)$$

Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$):

$$A_{s,tir} = A_{sv} + H_d / f_{yd} \quad (11)$$

$$A_{sv} = 0,8 F_d / (f_{yd} \cdot \mu) \quad (12)$$

Em que F_d é a força vertical de cálculo e μ é o coeficiente de atrito, que varia conforme a interface entre o dente e a viga de acordo com a seguinte tabela:

Tabela 2 - Coeficiente de atrito por interfaces

Tipo de interface	μ
Concreto lançado monoliticamente	1,4
Concreto lançado sobre concreto endurecido com interface áspera com rugosidade mínima de 0,5 cm em 3,0 cm	1,0
Concreto lançado sobre concreto endurecido com interface lisa	0,6

Fonte: NBR 9062 ABNT (2017)

O comprimento da armadura de ancoragem ℓ_b , do tirante, deve seguir o estabelecido na NBR 6118 (ABNT, 2014), onde f_{bd} é a resistência de aderência de cálculo, ou seja:

$$\ell_b = \emptyset \frac{f_{yd}}{4 f_{bd}} \quad (13)$$

Quanto à armadura de suspensão, os normativos nacionais indicam que esta deve ser capaz de resistir à totalidade das cargas verticais aplicadas no dente (F_d), com a tensão f_{yd} não podendo exceder o valor de 435 MPa. A armadura deve ser disposta concentrada na extremidade da viga adjacente ao dente de apoio, na forma de estribos fechados que envolvam a armadura longitudinal da viga. Dessa forma, a área de aço da armadura de suspensão, $A_{s,sus}$, pode ser calculada segundo a equação:

$$A_{s,sus} = \frac{F_d}{f_{yd}} \quad (14)$$

Ainda segundo a NBR 9062 (ABNT, 2017), armadura de costura é considerada obrigatória, adequada quando segue os seguintes critérios:

a) Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$):

$$A_{sh}/s \geq 0,4(A_{sv}/d) \quad (15)$$

b) Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$):

2.52 – El Debs (2017)

Baseado nos modelos sugeridos por Leonhardt e Mönning (1978), como mostra a Figura 7, El Debs (2017), apresenta dois arranjos de dimensionamento para dentes de concreto. Em geral, os casos apresentados são consoantes com as normas brasileiras expostas anteriormente e, da mesma forma, aproximam o comportamento estrutural de dentes aos consolos. O autor recomenda para cálculo de dentes a introdução de um coeficiente de ajustamento γ_n , que altera o coeficiente de ponderação das ações. O valor de γ_n é igual a 1.0 para elementos pré-fabricados, quando a força permanente for preponderante, e 1.1 em casos contrários. Para elementos que não são pré-fabricados, quando a força permanente é preponderante, $\gamma_n = 1.1$, quando não preponderante, $\gamma_n = 1.2$.

Dessa forma, as forças verticais (V_d) e horizontais (H_d) de cálculo são obtidas pelas seguintes fórmulas:

$$V_d = \gamma_n(\gamma_g V_g + \gamma_q V_q) \quad (17)$$

$$H_d \geq 0,2V_d \quad (18)$$

Onde γ_g e γ_q são, respectivamente, o coeficiente de majoração de ação permanente, e o coeficiente de majoração de ação variável, iguais a 1,4, V_g é a força vertical resultante da ação permanente e V_q é a força vertical consequente da ação variável.

Para o modelo (a), como ilustra a Figura 20, a verificação do concreto, que consiste na constatação que a tensão atuante de cálculo (τ_{wd}) é menor que a tensão resistente (τ_{wu}), no caso de dentes curtos, é procedida por meio da equação (19).

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b \cdot d} \leq \tau_{wu} = \frac{0,18f_{cd}}{\sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} < 0,17f_{cd} \quad (19)$$

Ao considerar a limitação da tensão de compressão na biela em $0,85f_{cd}$, conforme a NBR 9062 (ABNT, 2017), o resultado seria um limite de tensão de referência para os dentes de concreto de $0,17f_{cd}$.

Para dentes muito curtos, verificação do esmagamento do concreto pode ser feita também em termos de tensão tangencial de referência, conforme as seguintes diretrizes:

$$\tau_{wu} = 3,0 + 0,9 \cdot \rho \cdot f_{yd} \leq 0,27 (1 - f_{ck} / 250) f_{cd} \leq 8MPa \quad (20)$$

Os valores das áreas das armaduras principais são obtidos pelas equações:

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{f_{yd}} \quad (21)$$

Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$):

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \left(\frac{V_d a}{0,85d} + 1,2H_d \right) \quad (22)$$

Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), pela teoria do atrito-cisalhamento, onde os valores de μ são apontados na Tabela 2, conforme o tipo de interface.

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \left(\frac{0,8V_d}{\mu} + H_d \right) \quad (23)$$

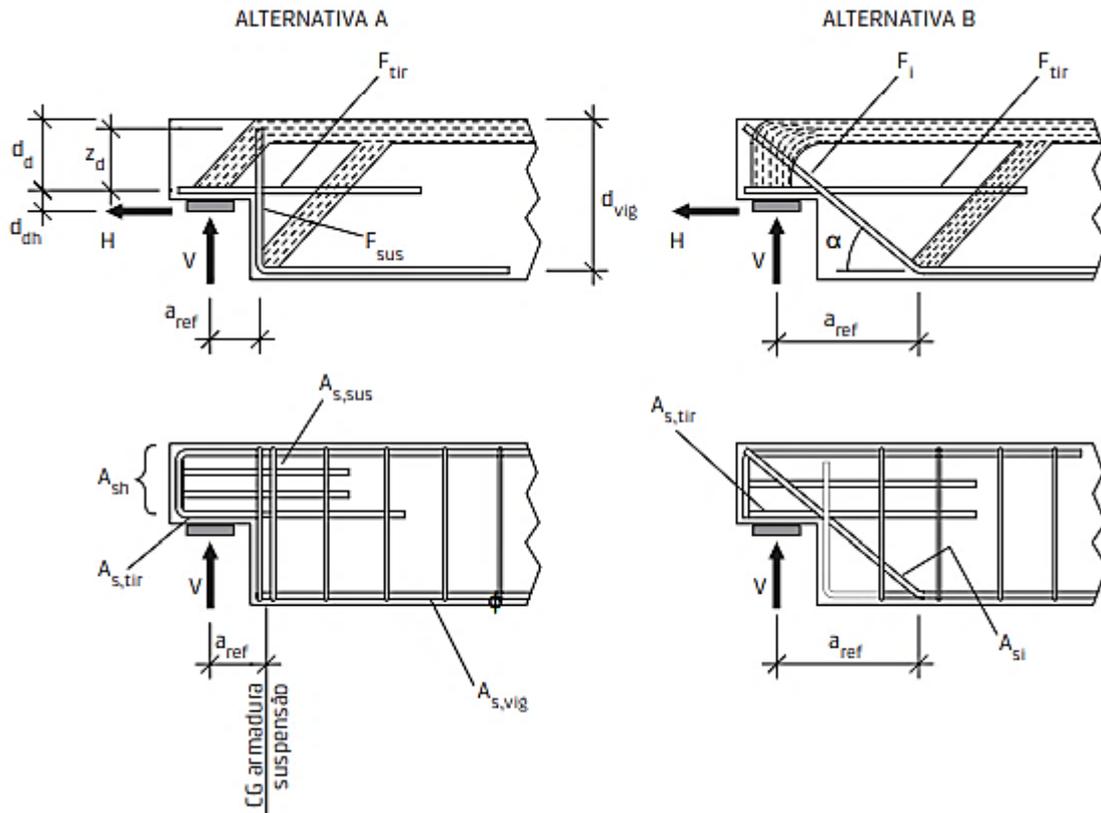
No modelo (b), onde a armadura de suspensão é disposta com uma inclinação α , a verificação do concreto é feita conforme a atuação indireta da força, ou seja, é considerada 85% da tensão resistente de cálculo (τ_{wu}), na equação (19). As armaduras principais, de acordo com Figura 20 (b), são calculadas considerando $z_c = 0,85d$ e $d_h = 0,2d$, como indicado:

$$F_{tir} = 0,3 \frac{d_{vig}}{d} \frac{a}{d} V_d + 1,2H_d \quad (24)$$

$$A_{s,tir} = \frac{F_{tir}}{f_{yd}} \quad (25)$$

$$A_{s,suspi} = \frac{V_d}{\sin \alpha f_{yd}} \quad (26)$$

Figura 20 - Esquema de transmissão das forças e da armadura nos dentes de concreto



Fonte: El Debs (2017)

A ancoragem do tirante é preconizada a partir da fissura potencial que sai do canto inferior da viga, e este ponto é normatizado a partir de $(d_{vig} - d)$, contado do primeiro estribo da armadura de suspensão. Logo, admite-se que a fissura potencial tenha uma inclinação de 45° com a horizontal. A armadura de costura horizontal (A_{sh}) e os estribos verticais (A_{sv}) são dimensionadas, respectivamente, pelas seguintes equações:

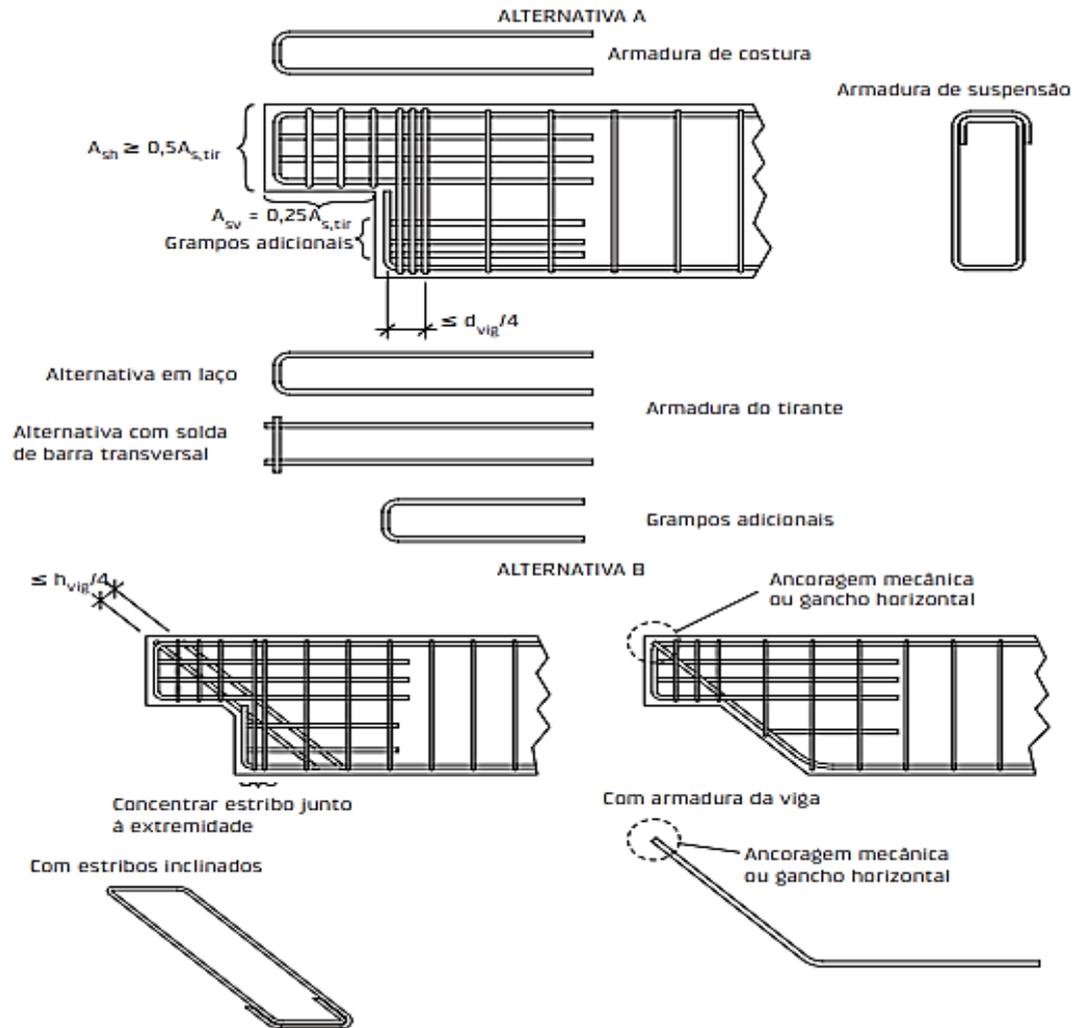
$$A_{sh} \geq 0,40A_{s,tir} \quad (27)$$

$$A_{sv} = 0,25A_{s,tir} \quad (28)$$

El Debs (2017), propõem os arranjos (a) e (b), ilustrados na Figura 21, para a disposição das armaduras nos dentes e salienta que a armadura de suspensão deve ser constituída por estribos fechados, estando concentrada em uma faixa de $d/4$ na extremidade da viga. O uso da armadura principal da viga dobrada 90° , fazendo parte da armadura de suspensão, deve ser evitado. O autor ressalta, ainda, que deve-se ancorar A_{sh} a partir da fissura potencial oriunda do canto reentrante, distribuída em $2/3$ da altura útil do dente ($2d_c/3$), com um comprimento

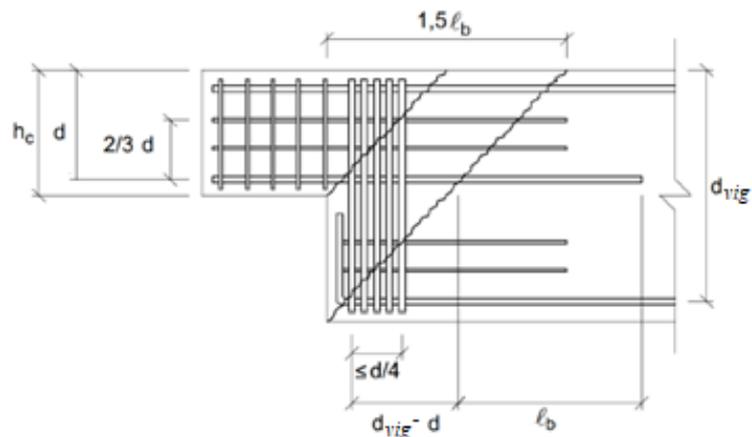
de $1,5\ell_b$ a partir do canto reentrante (Figura 22), em concordância com a NBR 9062 (ABNT, 2017).

Figura 21 - Arranjos da armadura nos dentes de concreto



Fonte: El Debs (2017)

Figura 22 - Detalhamento e ancoragem das armaduras em dentes de concreto.

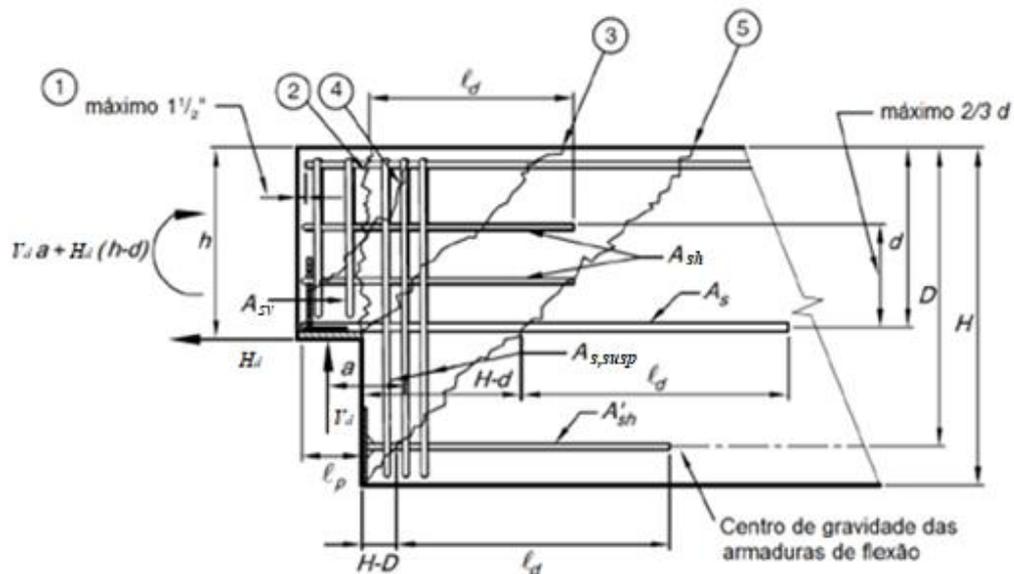


Fonte: Silva (2017) adaptado de El Debs (2000)

2.53 – PCI Design Handbook (2010)

Tanto a sétima quanto a oitava edição do manual *PCI Design Handbook Precast and Prestressed Concrete* (PCI, 2010) (PCI, 2017) possuem os mesmos critérios e procedimentos de projetos. Essas edições enfatizam que o projeto de dentes de concreto requer a investigação dos diversos modos de falhas potenciais. Desta forma, a armadura necessária é dimensionada para cada uma das formas de ruína possíveis. Indicadas para elementos nos quais a relação $a/d \leq 1,0$ seja respeitada, ou seja, dentes curtos e muito curtos, as equações de projeto são provenientes da teoria de atrito-cisalhamento e da teoria clássica de cisalhamento. Em vista disso, são abordados os modos de falhas separadamente e o dimensionamento necessário para combatê-los. Destaca-se que os requisitos de armadura não são cumulativos, isto é, para os critérios 1 e 2, e, 2 e 4, a área de aço adequada corresponde ao maior valor calculado, não a soma.

Figura 23 - Modos de ruínas e armaduras requeridas para dentes de concreto



Fonte: PCI (2010)

Os modos de ruína e as armaduras necessárias para evitá-los, de acordo com PCI, 2010, são descritos a seguir:

- 1) Flexão e tensão axial na extremidade do dente

A armadura principal horizontal A_s para atender a este critério é determinada de maneira similar à de um consolo:

$$A_s = A_f + A_n = \frac{1}{\gamma_R f_y} \left[V_d \left(\frac{a}{d} \right) + H_d \left(\frac{h}{d} \right) \right] \quad (29)$$

Onde γ_R é um coeficiente de redução da resistência igual a 0,75, a é dado pela distância entre o ponto de aplicação da força vertical e o centro de gravidade da armadura de suspensão, h é a altura total, d é a altura útil, f_y é a resistência característica ao escoamento do aço, V_d e H_d são as forças vertical e horizontal de cálculo, respectivamente, sendo $H_d = 0,20V_d$

2) Cisalhamento direto

A fissura potencial 2, apontada na Figura 23, deve ser resistida pela combinação das armaduras horizontais A_s e A_{sh} . Esses parâmetros podem ser calculados da seguinte forma:

$$A_s = 2 \frac{V_d}{3\gamma_R f_y \mu_e} + A_n \quad (30)$$

$$A_n = \frac{H_d}{\gamma_R f_y} \quad (31)$$

$$A_{sh} = 0.5(A_s - A_n) \quad (32)$$

$$\mu_e = \frac{\gamma_R 1000 \lambda A_{cr} \mu}{V_d} \quad (33)$$

Sendo γ_R igual a 0,75, μ_e o coeficiente de atrito efetivo que deve obedecer aos limites da Tabela 3, A_{cr} é a área da interface da superfície, f_{ck} a resistência característica à compressão do concreto, λ o coeficiente de densidade do concreto, igual a 0,75 para baixas densidades e 1,0 para densidades regulares.

Tabela 3 - Valores recomendados para coeficiente de atrito

Tipo de interface	μ_a	μ_e (Valor máximo)	$\frac{V_d}{\phi}$ (Valor máximo)
Concreto-concreto moldado monoliticamente	$1,4\lambda$	3,4	$0,30\lambda f_{ck} A_{cr} \leq 1000\lambda A_{cr}$
Concreto-concreto endurecido com superfície rugosa	$1,0\lambda$	2,9	$0,25\lambda f_{ck} A_{cr} \leq 1000\lambda A_{cr}$
Concreto-concreto endurecido não rugoso	$0,6\lambda$	Não aplicável	$0,20\lambda f_{ck} A_{cr} \leq 800\lambda A_{cr}$
Concreto-aço	$0,7\lambda$	Não aplicável	$0,30\lambda f_{ck} A_{cr} \leq 800\lambda A_{cr}$

Fonte: PCI (2010)

3) Tensão diagonal no canto reentrante

Segundo o manual PCI (2010), a armadura requerida para resistir a tensão de fissuração oriunda do canto reentrante, indicada na Figura 23 pelo número 3, pode ser calculada da seguinte forma:

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{\phi f_y} \quad (34)$$

4) Tensão diagonal na extremidade do dente

A armadura adicional para combater a fissura potencial 4 deve atender a equação proposta:

$$\gamma_R V_d = \gamma_R (A_{sv} f_y + A_{sh} f_y + 2bd\lambda\sqrt{f_{ck}}) \quad (35)$$

Neste critério, pelo menos metade da armadura necessária deve ser colocada verticalmente, portanto:

$$A_{sv} = \frac{1}{2f_y} \left(\frac{V_d}{\gamma_R} - 2bd\lambda\sqrt{f_{ck}} \right) \quad (36)$$

5) Ancoragem da armadura

É destacado que a armadura horizontal principal A_s deve se estender a um comprimento ℓ_d , passando da fissura potencial de número 5, afim de combater tal falha, sendo ancorada por meio de barras transversais, chapas ou ganchos. A armadura horizontal A_{sh} deve ter um mínimo de comprimento ℓ_d que passe pela fissura 2 e seja ancorada no fim da viga por laços ou ganchos.

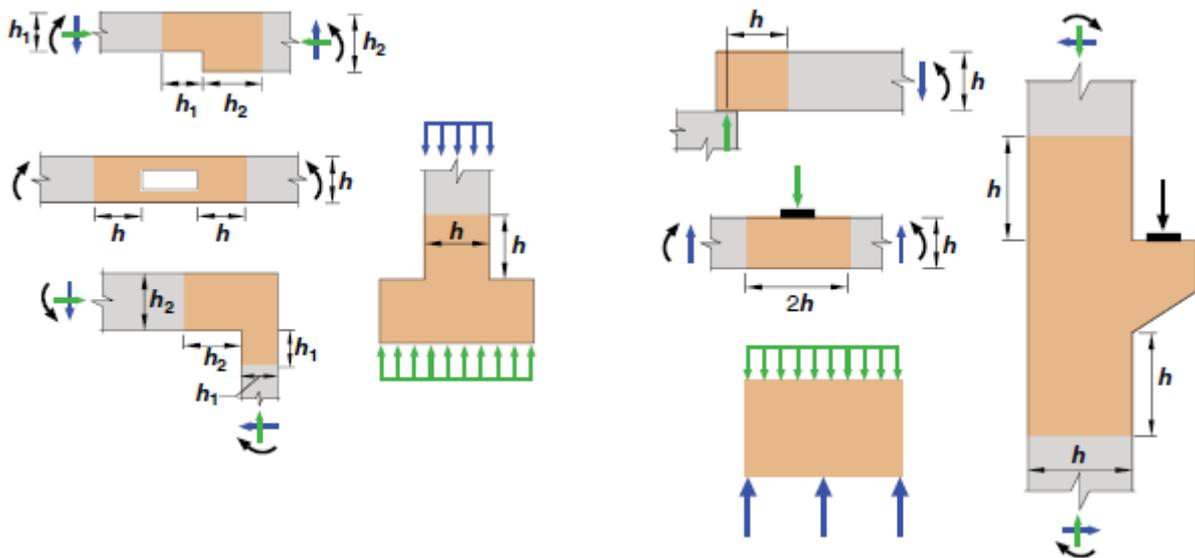
Esse manual não contraindica que a armadura de suspensão $A_{s,susp}$ seja dobrada e continue paralela ao interior da viga, como também preconiza que essa pode ser disposta separada da armadura horizontal inferior A'_{sh} , devendo ser prevista a relação $A'_{sh} \geq A_{s,susp}$, observado que a extensão de ancoragem deve ir além da fissura potencial de número 5. Neste caso, a armadura A'_{sh} deve ser ligada no lado do dente mediante a barras transversais, chapas ou ganchos. Cumprindo esses requisitos de ancoragem, a armadura de flexão da viga pode ser usada para tal fim. Para a armação vertical A_{sv} , sugere-se o uso de ganchos, conforme recomendações do *American Concrete Institute*, assim como reforços de solda e ligações que podem ser usados na ligação.

2.54 – ACI 318-19

O Instituto Americano de Concreto (ACI) em seu código de requisitos para construções em concreto estrutural publicado em 2019 (ACI 318-19), sugere a aplicação do modelo de escoras e tirantes, baseado na analogia de treliça, para regiões onde ocorre mudança da geometria do elemento estrutural, carregamentos concentrados ou reações, isto é, para as

regiões descontínuas (regiões-D). Segundo o princípio de *Saint Venant*, a regularização da distribuição das tensões ocorre, aproximadamente, a uma distância igual à altura h do elemento estrutural; a vista disso, as regiões D podem ser delimitadas a uma distância h do ponto de mudança geométrica ou aplicação da ação do carregamento concentrado.

Figura 24 - Descontinuidades geométricas e de carregamento



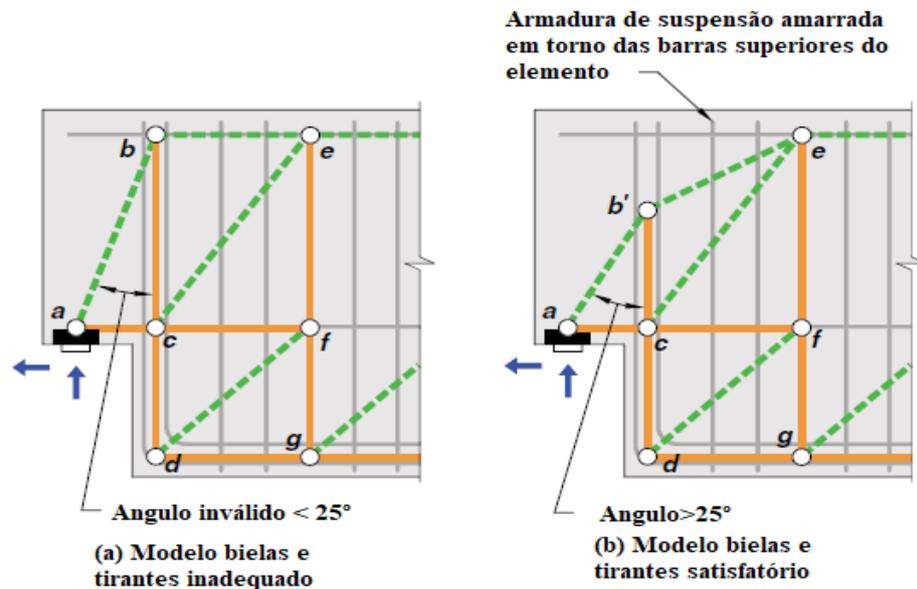
Fonte: ACI (2019)

São indicados quatro passos no processo de dimensionamento pelo método de escoras e tirantes: 1) definir e isolar cada região D; 2) calcular as forças resultantes em cada limite das regiões de descontinuidade; 3) selecionar o modelo e calcular as forças nas bielas e nos tirantes para transferir as resultantes da região de descontinuidade e 4) dimensionar os tirantes, as bielas e as zonas nodais para que sejam adequados à solicitação.

Preliminarmente, o ACI (2019) recomenda que a treliça idealizada seja consistente com as dimensões das bielas, tirantes, áreas de apoio e suporte. É sugerida a limitação de no máximo três forças agindo em cada nó, além de que o modelo adotado deve ser capaz de transferir todas as cargas às regiões B adjacentes e deve estar em equilíbrio com as cargas e reações atuantes. É permitido aos tirantes cruzar outros tirantes e bielas, já as bielas devem se cruzar ou se sobrepor apenas nos nós.

Os nós do modelo são classificados de acordo com os esforços atuantes, sendo C-C-C quando resistem a três forças de compressão, C-C-T quando suportam duas forças compressivas e uma de tração e C-T-T quando atuam duas forças de tração e apenas uma compressiva. A área sombreada na Figura 25 é uma extensão da zona nodal, ou seja, a porção limitada pela

Figura 26 - Modelo escoras e tirantes ajustado para dentes de concreto



Fonte: ACI (2019)

Para qualquer modelo, cada combinação de carga, seja nas bielas, tirantes ou regiões nodais, deve obedecer ao critério $\gamma_R S_u \geq U$, ou seja, a parcela referente à resistência $\gamma_R S_u$, deve ser maior ou equivalente ao esforço solicitante U . O coeficiente de redução da resistência γ_R é igual a 0,75 para todas as verificações. Especificamente para as bielas, tem-se:

$$\gamma_R F_{ns} \geq F_{us} \quad (38)$$

Onde F_{us} é a força de compressão solicitante de cálculo e F_{ns} a resistência nominal à compressão da biela, a qual deve ser calculada por dois meios.

Quando não há armadura longitudinal, F_{ns} é dada por:

$$F_{ns} = f_{ce} A_{cs} \quad (39)$$

Por outro lado, quando há armadura longitudinal, F_{ns} é expressa por:

$$F_{ns} = f_{ce} A_{cs} + A'_s f'_s \quad (40)$$

Sendo que F_{ns} deve ser avaliada em cada extremidade da biela e adotado o menor valor. A_{cs} é a área da seção transversal no final da biela em consideração, f_{ce} é a resistência efetiva à compressão do concreto, A'_s é a área de compressão da armadura ao longo do comprimento da biela e f'_s é a tensão na armadura de compressão no eixo nominal de força da biela.

A resistência efetiva à compressão do concreto deve ser calculada pela equação:

$$f_{ce} = 0,85 \beta_c \beta_s f_{ck} \quad (41)$$

Onde f_{ck} é a resistência à compressão do concreto, β_s é o coeficiente de biela e β_c é o fator de modificação de confinamento biela-nó. Tais parâmetros são obtidos nas Tabela 4 e

Tabela 5. O valor de β_s na Tabela 4 linha (a) é aplicado para modelos transversais de vigas de apoio utilizadas com armaduras de suspensão ou de apoios, onde a tração longitudinal nas bordas reduz a força nas bielas transversais. O baixo valor de β_s reflete que essas bielas precisam transferir compressão em uma zona onde tensões de tração atuam perpendicularmente ao plano do modelo de escoras e tirantes. O valor de β_s na Tabela 4 linha (b) é aplicado em bielas externas e resultam em estados de tensão que são comparáveis aos blocos de tensão retangulares nas zonas de compressão de uma viga ou coluna. Essas bielas não são sujeitas à tração transversal, e possuem resistência efetiva à compressão do concreto f_{ce} , maior que as bielas internas.

O valor de β_s na linha (c) da Tabela 4 reflete o efeito benéfico da armadura distribuída, já para bielas internas com forças diagonais de tração suficiente para satisfazer a equação 42 é aplicado o valor da linha (d). A linha (e) reflete os requisitos para armação ou confinamento das ligações vigas-colunas e na linha (f) o coeficiente de biela é reduzido para impedir a falha por tensão diagonal em regiões sem armadura transversal que não se encontram ou não são avaliadas pela equação 42.

Tabela 4 - Coeficiente de biela β_s

Localização da biela	Tipo de biela	Critério	β_s	Linha
Áreas tracionadas ou zonas de tração dos membros	Qualquer tipo	Todos os casos	0,40	(a)
Todos os outros casos	Bielas externas	Todos os casos	1,0	(b)
	Bielas interiores	Armaduras que satisfazem as linhas (a) e (b) da Tab. 6.	0,75	(c)
		Satisfazem a Eq. 42.	0,75	(d)
		Ligação vigas-colunas	0,75	(e)
		Todos os outros casos	0,40	(f)

Fonte: ACI (2019)

Tabela 5 - Fator de modificação de confinamento biela-nó

Localização	β_c	
Fim da biela conectada com o nó que inclui a superfície de apoio ou nó que inclui a superfície de apoio	Menor que	$\sqrt{A_2/A_1}$, onde A_1 é a área da superfície de apoio e A_2 é a área da base inferior do volume confinado, tendo sua base superior igual à área da superfície de apoio.
		2,0
Outros casos	1,0	

Fonte: ACI (2019)

Se o uso de β_s é igual a 0,75, baseado na linha (d) da Tabela 4, as dimensões dos elementos devem ser selecionadas para satisfazer a relação:

$$V_u \leq \gamma_R 5 \tan \gamma_R \cdot \lambda \cdot \lambda_s \cdot \sqrt{f_{ck}} b_w d \quad (42)$$

Onde d é a altura útil em polegadas, λ é o coeficiente de densidade do concreto, igual a 0,75 para baixas densidades e 1,0 para densidades regulares, e λ_s o fator de modificação de efeito de tamanho, igual a 1 se o elemento tiver armadura mínima distribuída conforme o código ou, caso contrário, determinado pela equação:

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{d}{10}}} \leq 1 \quad (43)$$

A armadura mínima distribuída para regiões D, pelo método de escoras e tirantes, deve ser prevista através dos eixos das bielas interiores de acordo com a Tabela 6, destaca-se que o espaçamento entre as barras não deve exceder 304,08 mm e o ângulo α_1 não deve ser menor que 40°.

Tabela 6 - Armadura mínima distribuída

Restrição lateral da biela	Configuração da armadura	Razão da armadura mínima distribuída
Sem restrição	Malha ortogonal	0,0025 em cada direção
	Armadura em uma direção cruzando a biela a um ângulo α_1	$\frac{0,0025}{\text{sen}^2 \alpha_1}$
Com restrição	Armadura distribuída não requerida	

Fonte: ACI (2019)

Os tirantes, que podem ser pré-tensionados ou não, também devem ser verificados, necessitando respeitar o seguinte critério:

$$\gamma_R F_{nt} \geq F_{ut} \quad (44)$$

A força de tração solicitante de cálculo no tirante F_{ut} deve ser menor que a resistência nominal à tração do tirante F_{nt} , que é calculada por:

$$F_{nt} = A_{s,tir} f_y + A_{tp} \Delta f_p \quad (45)$$

Onde A_{tp} é igual a zero para elementos não protendidos, f_y é a resistência ao escoamento do aço, $A_{s,tir}$ é a área do aço da armadura do tirante. O eixo do centroide da armadura deve ser o mesmo do eixo atribuído ao tirante no modelo adotado. Para elementos protendidos é permitido adotar Δf_p igual a 413,68 MPa para armaduras aderentes e 689,47 MPa para armaduras protendidas não-aderentes.

A verificação das zonas nodais é feita por meio da resistência nominal à compressão, calculada pelo parâmetro F_{nn} , onde:

$$\gamma_R F_{nn} \geq F_{us} \quad (46)$$

$$F_{nn} = f_{ce} A_{nz} \quad (47)$$

Sendo que A_{nz} é a área de cada face de uma zona nodal e f_{ce} a força efetiva de compressão na face da zona nodal, calculada através da equação 48. Observa-se que A_{nz} deve ser menor que a área da face perpendicular à linha de ação de F_{us} e que a área da seção perpendicular à linha de ação da força resultante no nó.

$$f_{ce} = 0,85 \beta_c \beta_n f_{ck} \quad (48)$$

O fator de modificação de confinamento biela-nó β_c , é análogo à verificação das bielas, expresso na Tabela 5 e o coeficiente da zona nodal β_n é obtido na Tabela 7:

Tabela 7 - Coeficiente da zona nodal

Configuração da zona nodal	β_n
Zona nodal delimitada por bielas, área de apoio ou ambos	1,0
Zona nodal ancorada em um tirante	0,8
Zona nodal ancorada em dois ou mais tirantes	0,6

Fonte: ACI (2019)

3. METODOLOGIA

Neste trabalho, é utilizado o código computacional ATENA (*Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*), para realizar a modelagem de vigas com dentes de concreto experimentadas e relatadas na literatura. O sistema operacional utilizado engloba um pacote de componentes projetados especificamente para a simulação computacional de estruturas em concreto, todavia, permite a modelagem de outros materiais, tais como, metais, componentes elásticos, solos, etc.

O pacote de programas que compõe o ATENA emprega a análise de elementos finitos na formulação linear ou não linear, sendo ofertada uma série de recursos na análise estrutural, incluindo exames de tensão de ruptura, influência do tempo (fluência, dinâmica), transferência de calor, umidade e suas interações. A ação atuante total define-se pela integral no tempo de acréscimos de forças, com utilização dos métodos de Newton-Raphson ou Arc-Length.

O programa foi concebido para análise de elementos planos 2D e sólidos 3D, oferecendo-se uma vasta gama de modelos de elementos e materiais, bem como funções de: pré-processamento, que corresponde a entrada da geometria dos modelos (concreto, armadura, interface, etc.), condições de carregamento e monitoramento, especificações dos materiais e os parâmetros de solução; acompanhamento da análise, onde é possível supervisionar em tempo real os resultados e processamentos realizados; pós-processamento, o qual proporciona o acesso aos resultados gráficos e numéricos, como também, opções de apresentação dos produtos obtidos (LYRA, 2011).

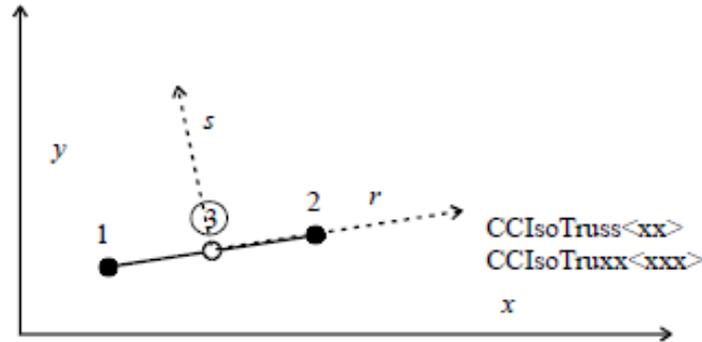
3.1 Elementos Finitos

Os elementos finitos disponíveis no ATENA são divididos em três grupos: elementos planos (para 2D, 3D e análise simétrica axial), elementos sólidos 3D e elementos especiais. Todos elementos utilizados no programa, ressalvadas algumas poucas exceções, são construídos usando formulações isoparamétricas com funções de interpolação lineares ou quadráticas.

No caso deste trabalho, as barras de aço da armadura das peças modeladas são caracterizadas pelo grupo de elementos *CCIsoTruss<xx>*, onde o “x” presente no “<...>” identifica os nós presentes em cada elemento. Foram utilizados elementos unidimensionais, isoparamétricos, com dois nós, integrados em um ponto de integração, neste caso de interpolação linear. Também é possível realizar a análise 3D, onde a geometria das barras retas

fica definida por dois pontos, ao passo que, a de barras curvas são necessários três pontos. A geometria dos elementos de barra é ilustrada na Figura 27.

Figura 27 - Geometria do elemento CCIsoTruss<...>



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

As funções de interpolação e os pontos de integração dos elementos de barra são verificados nas Tabela 8 e 9, respectivamente.

Tabela 8- Funções de interpolação dos elementos CCIsoTruss<...>

Nó i	Função h_i	Incluído somente se o nó 3 é definido
1	$\frac{1}{2} (1 - r)$	$-\frac{1}{2} h_3$
2	$\frac{1}{2} (1 + r)$	$-\frac{1}{2} h_3$
3	$(1 - r^2)$	

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Tabela 9- Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoTruss<xxx> de 2 e 3 nós

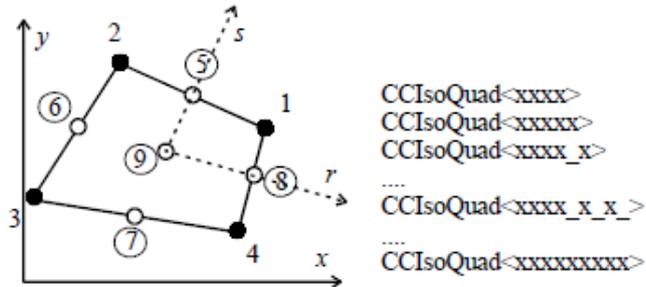
Ponto de Integração	Coordenada r	Peso
1	0,577350269189626	1
2	-0,577350269189626	1

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Para a modelagem do concreto, é utilizado o grupo de elementos quadriláteros planos 2D da biblioteca de elementos finitos do ATENA. São considerados os elementos em forma de

tetraedro *CCIsoQuad*<...>, de acordo com a Figura 28, com quatro a nove nós. Nesta análise, utilizou-se o elemento com quatro nós e quatro pontos de integração.

Figura 28- Geometria do elemento *CCIsoQuad*<...>



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Da mesma forma, esses elementos são elementos isoparamétricos integrados pela integração de Gauss, com funções de interpolação apresentadas da Tabela 10 e pontos de integração para todas as variáveis dos elementos fornecidos nas Tabela 11 e 12.

Tabela 10 - Funções de interpolação dos elementos *CCIsoQuad*<...>

Nó <i>i</i>	Função h_i	Incluído somente se o nó <i>i</i> é definido				
		<i>i=5</i>	<i>i=6</i>	<i>i=7</i>	<i>i=8</i>	<i>i=9</i>
1	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$			$-\frac{1}{2}h_8$	$\frac{1}{4}h_9$
2	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$\frac{1}{4}h_9$
3	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$\frac{1}{4}h_9$
4	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$\frac{1}{4}h_9$
5	$\frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
6	$\frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
7	$\frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
8	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s^2)$					$-\frac{1}{2}h_9$
9	$\frac{1}{4}(1-r^2)(1-s^2)$					

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Tabela 11 - Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoQuad <...> de 4 nós

Ponto de Integração	Coordenada r	Coordenada s	Peso
1	0,577350269189626	0,577350269189626	1
2	0,577350269189626	-0,577350269189626	1
3	-0,577350269189626	0,577350269189626	1
4	-0,577350269189626	-0,577350269189626	1

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Tabela 12- Pontos para integração de Gauss para elementos CCIsoQuad <...> de 5 a 9 nós

Ponto de Integração	Coordenada r	Coordenada s	Peso
1	0,774596669241483	0,774596669241483	0,3086419753
2	0,774596669241483	0	0,4938271605
3	0,774596669241483	-0,774596669241483	0,3086419753
4	0	0,774596669241483	0,4938271605
5	0	0	0,7901234568
6	0	-0,774596669241483	0,4938271605
7	-0,774596669241483	0,774596669241483	0,3086419753
8	-0,774596669241483	0	0,4938271605
9	-0,774596669241483	-0,774596669241483	0,3086419753

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

3.2 Modelos Constitutivos

3.21 – Modelo Constitutivo do concreto

Para caracterização do concreto é utilizado o modelo constitutivo *SBETA*. Esse modelo inclui diversos efeitos do comportamento do concreto, como: comportamento não linear na compressão, incluindo endurecimento e amolecimento; fratura do concreto na tração com base na mecânica de fratura não linear; critério de falha biaxial; redução da resistência à compressão após a fissuração; contribuição do concreto íntegro entre fissuras para a rigidez do elemento

estrutural; redução da rigidez de cisalhamento após a fissuração. Neste caso é assumida a perfeita aderência entre o concreto e a armadura.

O modelo engloba duas categorias de fissura distribuída: fissura fixa e fissura rotacional. No primeiro, a direção da fissura é dada pela direção da tensão principal no início da fissuração, no segundo caso, a direção da fissura coincide com a direção principal das tensões e a rotação ocorre quando é alterada a direção da deformação.

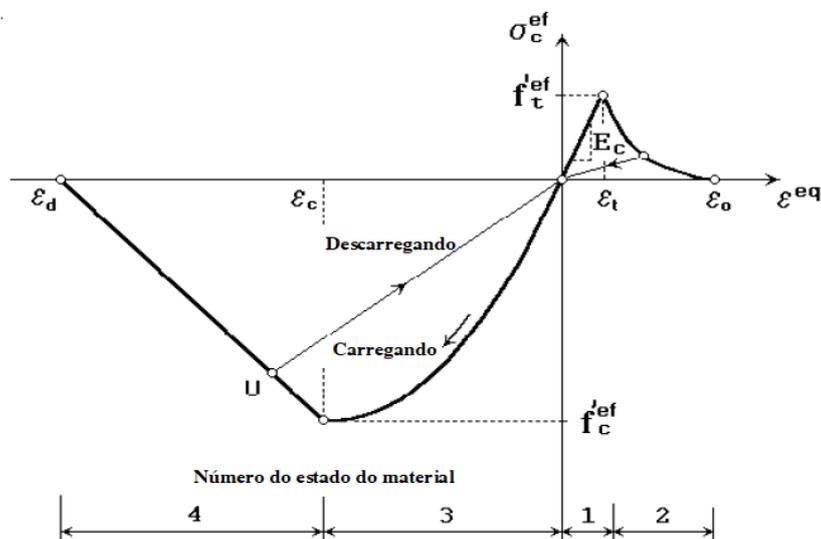
É utilizada para caracterização do concreto a abordagem não linear, e nesse sentido as constantes elásticas são decorrentes de uma função tensão-deformação denominada de lei uniaxial equivalente, similar ao modelo constitutivo hipoplástico não linear, à exceção que diferentes leis são utilizadas para carga e descarga, causando a dissipação da energia exaurida pelo dano do material.

Descreve-se o comportamento não linear do concreto no estado de tensão biaxial pela tensão efetiva σ_c^{ef} e a deformação uniaxial equivalente ε^{eq} (Equação 49). A tensão efetiva é a tensão principal na maioria dos casos. A deformação uniaxial equivalente é introduzida a fim de eliminar o efeito de Poisson no estado plano de tensão.

$$\varepsilon^{eq} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad (49)$$

Supondo a deformação uniaxial equivalente como a deformação produzida pela tensão σ_{ci} em um teste uniaxial, com módulo E_{ci} , associado à direção i , a não linearidade que representa um dano é causada apenas pela tensão governante σ_{ci} . O diagrama tensão-deformação uniaxial equivalente completo, para o concreto, pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 -Lei de tensão-deformação uniaxial para concreto



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Os números da parte inferior do diagrama (número do estado do material) são usados nos resultados da análise para indicar o estado de dano do concreto. O descarregamento é uma função linear para a origem. Os valores da tensão de pico na compressão $f_c'^{ef}$ e na tração $f_t'^{ef}$ são calculados de acordo com o estado de tensão biaxial. Sendo assim, a lei de tensão-deformação uniaxial equivalente retrata o estado de tensão biaxial.

Definida a relação tensão-deformação usada para calcular o módulo de elasticidade para a matriz de rigidez do material, o módulo secante é calculado como:

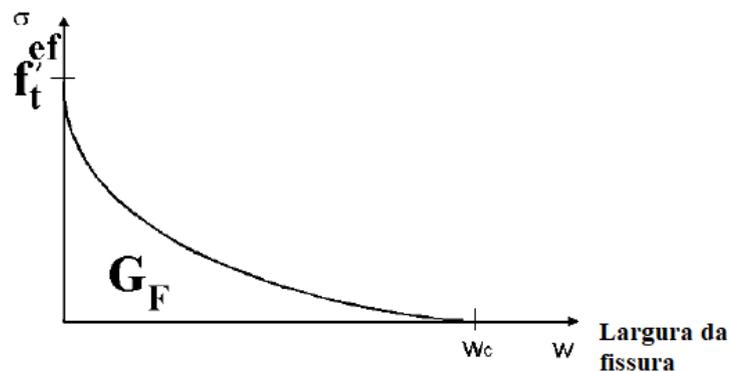
$$E_c^s = \frac{\sigma_c}{\varepsilon^{eq}} \quad (50)$$

Neste trabalho, o comportamento do concreto íntegro na tração sem fissuras é assumido como elástico linear, segundo a Eq. 51. E_c é o módulo de elasticidade inicial do concreto e $f_t'^{ef}$ é a força efetiva à tração, derivada da função de falha biaxial, calculado conforme a equação (54).

$$\sigma_c^{ef} = E_c \varepsilon^{eq}, 0 \leq \sigma_c \leq f_t'^{ef} \quad (51)$$

O concreto fissurado na tração obedece a um modelo de fissura fictícia, baseado na lei de abertura de fissura exponencial e energia de fratura, como indicado na Figura 30.

Figura 30 - Lei exponencial de abertura de fissura



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

A função de abertura de fissura indicada, obtida experimentalmente, é escrita por meio da equação (52).

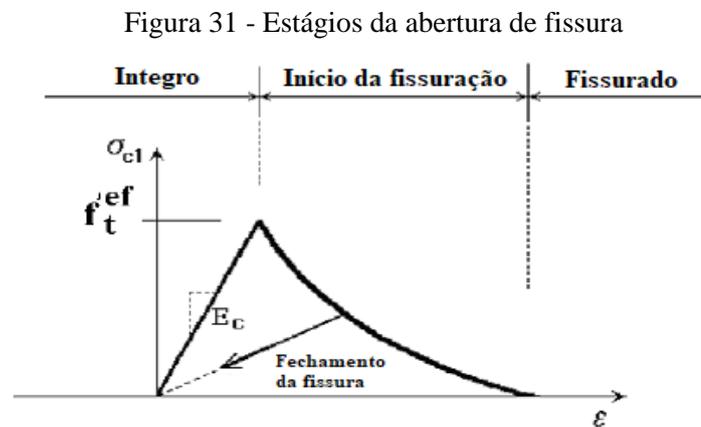
$$\frac{\sigma}{f_t'^{ef}} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad (52)$$

$$w_c = 5,14 \frac{G_f}{f_t'^{ef}}$$

Onde w é a abertura de fissura, w_c a abertura de fissura completamente livre de tensão, σ é a tensão normal na fissura, c_1 constante de valor 3, c_2 constante de valor igual a 6,93, G_f é a energia de fratura necessária para que a fissura esteja livre de tensão e $f_t'^{ef}$ é a força efetiva de tração derivada da função de ruptura. A abertura de fissura w é calculada como deslocamento total da abertura da fissura dentro da banda de fissuração, conforme a equação (53).

$$w = \varepsilon_{cr} L'_t \quad (53)$$

Onde ε_{cr} é a deformação de abertura de fissura, que é igual à deformação normal à direção da fissura no estágio fissurado sem tensão, e L'_t é a largura de faixa. Os estágios da abertura de fissura são ilustrados na Figura 31.



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

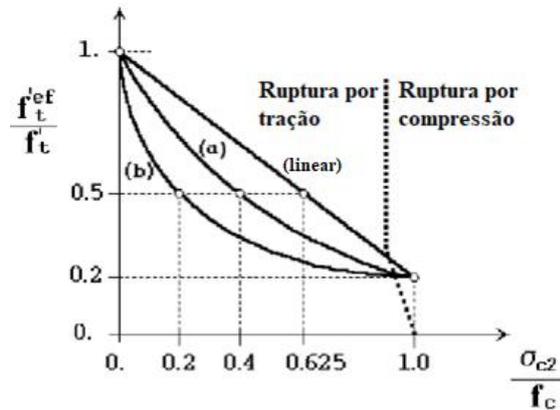
O critério de ruptura do concreto à tração, considera que no estado de tensão tração-tração, a força de tração é constante e igual a força de tração uniaxial f'_t . No estado de tração-compressão, a força à tração é reduzida pela relação:

$$f_t'^{ef} = f'_t r_{et} \quad (54)$$

Onde r_{et} é o fator de redução da resistência à tração na direção 1 devido à tensão compressiva na direção 2. Adotou-se a função de redução linear ilustrada na Figura 32, com a seguinte formulação:

$$r_{et} = 1 - 0,95 \frac{\sigma_{c2}}{f'_c} \quad (55)$$

Figura 32 - Função de ruptura tração-compressão para o concreto

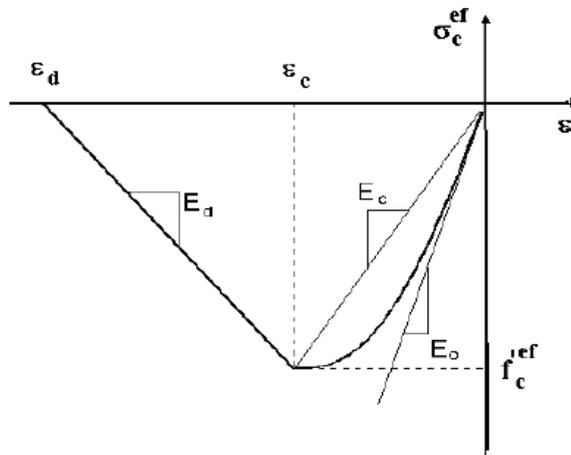


Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Para a compressão sem esmagamento do concreto, representada pelo ramo ascendente da lei tensão-deformação da Figura 33, é adotada a equação (56). Tal fórmula possibilita representar uma ampla gama de curvas, sendo apropriada para concreto usual ou de alto desempenho.

$$\sigma_c^{ef} = f_c^{ef} \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2)x}, \quad x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}, \quad k = \frac{E_0}{E_c} \quad (56)$$

Figura 33 - Diagrama tensão-deformação na compressão

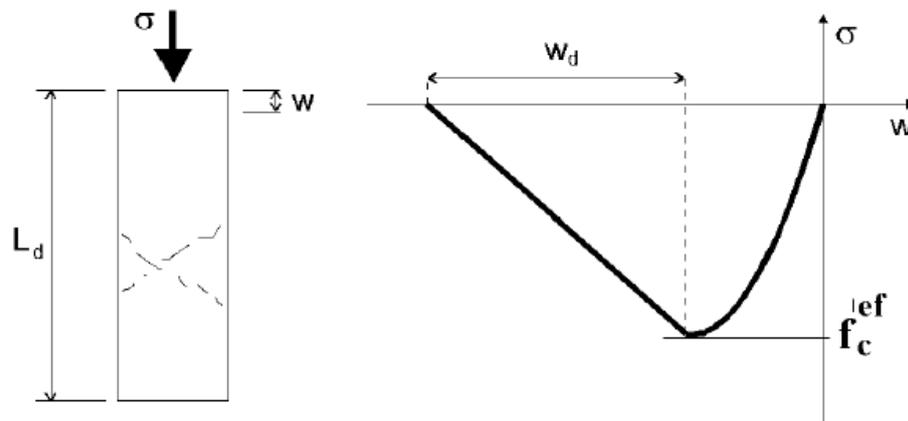


Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Onde, na formulação acima, σ_c^{ef} é a tensão de compressão do concreto, f_c^{ef} a força efetiva de compressão do concreto (Equação 58), x simboliza a deformação normalizada, ε_c é a deformação na tensão de pico de compressão, E_0 representa o módulo de elasticidade inicial, E_c o módulo de elasticidade secante na tensão de pico e k o parâmetro de forma que pode ter qualquer valor positivo maior ou igual a 1.

No caso de compressão com esmagamento do concreto, após a tensão de pico, a lei de amolecimento é linearmente decrescente Figura 34. O modelo é baseado na suposição de que a falha de compressão está localizada em um plano normal à direção da tensão principal compressiva. É assumido que todos os deslocamentos compressivos pós-pico e a dissipação de energia estão localizados neste plano e supõe-se que esse deslocamento seja desassociado ao tamanho da estrutura. Essa hipótese é análoga à análise para tração, onde a forma da lei da abertura da fissura e a energia de fratura são definidas e consideradas propriedades do material.

Figura 34 – Curva tensão efetiva-deslocamento na compressão



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Neste caso, o ponto final da curva de amolecimento é definido por meio do deslocamento plástico w_d , o valor de w_d , por padrão, é considerado igual a 0,5 mm. A lei de amolecimento é transformada de um plano de ruptura fictício (Figura 34) em uma relação tensão-deformação válida para o volume correspondente de material contínuo (Figura 33), definindo-se a tangente da parte de amolecimento do diagrama tensão-deformação em dois pontos: o pico do diagrama na tensão máxima e a deformação limite na compressão ε_d na tensão zero. Essa deformação é calculada a partir do deslocamento plástico w_d e da largura de faixa L'_d , por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L'_d} \quad (57)$$

O critério biaxial de ruptura do concreto à compressão, considera no estado de tensão compressão-compressão a seguinte função de ruptura:

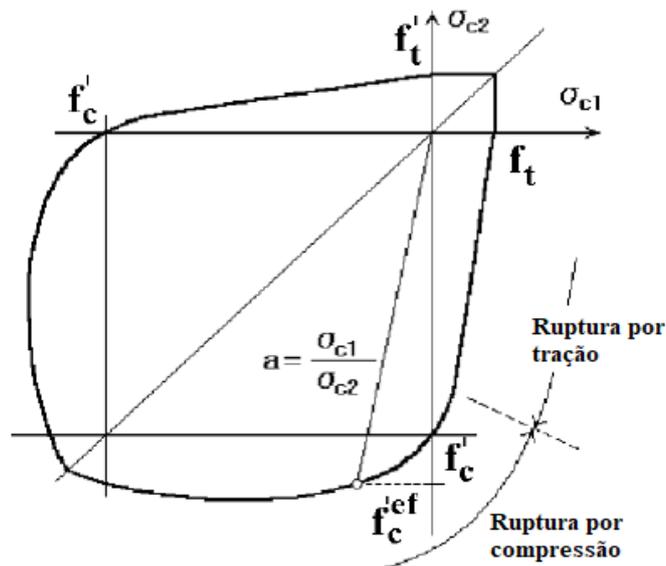
$$f_c'^{ef} = \frac{1 + 3,65a}{(1 + a)^2} f_c' , \quad a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (58)$$

Onde σ_{c1} e σ_{c2} são as tensões principais no concreto e f'_c a força uniaxial no cilindro. No estado de tração-compressão, a função de ruptura continua linearmente a partir do ponto $\sigma_{c1} = 0, \sigma_{c2} = f'_c$ até a região tração-compressão com a diminuição linear da força.

$$f'_c{}^{ef} = f'_c r_{ec}, \quad r_{ec} = \left(1 + 5,3278 \frac{\sigma_{c1}}{f'_c}\right), \quad 0,9 \leq r_{ec} \leq 1,0 \quad (59)$$

O fator de redução da resistência à compressão na direção principal 2 devido à tensão de tração na direção principal 1 é simbolizado por r_{ec} . Na Figura 35 é ilustrado o critério de ruptura de tensão biaxial para o concreto.

Figura 35 - Diagrama de falha biaxial do concreto.



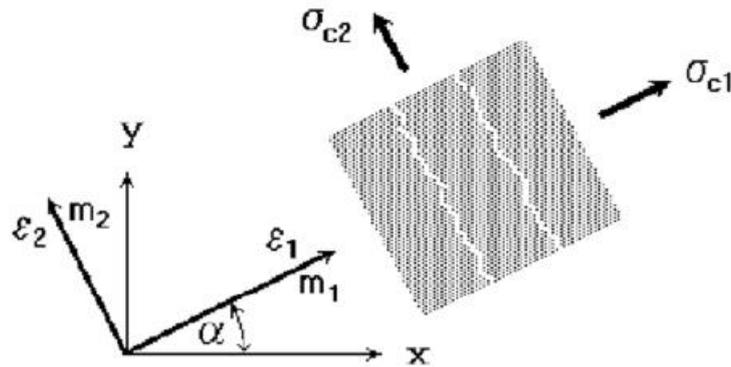
Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

A matriz de rigidez do material para o concreto não fissurado tem a forma de uma matriz elástica de um material isotrópico. É escrita no sistema de coordenadas global, conforme a seguinte equação:

$$D_c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do concreto derivado da lei uniaxial equivalente e ν o coeficiente de Poisson que é constante. Para o concreto fissurado, a matriz tem a forma da matriz elástica para o material ortotrópico e é formulada em um sistema de coordenadas m_1, m_2 (Figura 36), o qual é coincidente com a direção da fissura.

Figura 36 - Sistema de coordenadas para o concreto fissurado



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

A definição das constantes elásticas para o material ortotrópico no estado plano de tensão decorre da relação de flexibilidade, expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-v_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (61)$$

São eliminadas as razões de Poisson ortotrópicas para o concreto fissurado, pois elas são comumente desconhecidas. Considerando que $v_{21} = v$ é o coeficiente de Poisson do concreto não fissurado e usando a relação de simetria, obtém-se:

$$v_{12} = \frac{E_1}{E_2} v \quad (62)$$

A matriz de rigidez D_c^L é encontrada pela inversão da matriz de flexibilidade, desta forma:

$$D_c^L = H \begin{bmatrix} \xi & v\xi & 0 \\ v\xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\xi = \frac{E_1}{E_2}, H = E_1(1 - \xi v^2)$$

Na relação demonstrada, E_2 não pode ser zero. Se E_2 for zero e E_1 for diferente de zero, então uma formulação alternativa é usada com o parâmetro inverso $\frac{1}{\xi} = \frac{E_2}{E_1}$. No caso de ambos os módulos de elasticidade serem zero, a matriz D_c^L é definida igual à matriz nula.

Para esforços de cisalhamento, no modelo de fissura fixa, o módulo de cisalhamento é reduzido com deformação crescente normal à fissura, representando uma redução da rigidez de cisalhamento devido à abertura da falha, conforme a seguinte lei:

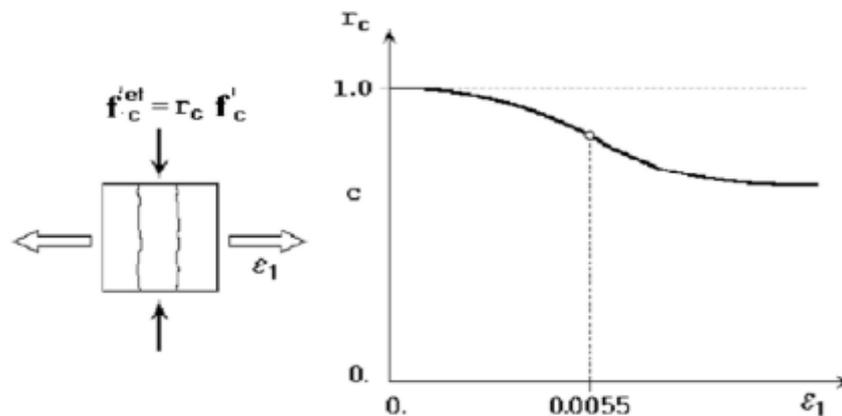
$$G = r_g G_c, \quad r_g = \frac{c_3 - \ln\left(\frac{1000\varepsilon_u}{c_1}\right)}{c_2}, \quad G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad (64)$$

$$c_1 = 7 + 333(p - 0,005), \quad c_2 = 10 - 167(p - 0,005), \quad 0 \leq p \leq 0,02$$

Onde r_g é o fator de retenção de cisalhamento, G é o módulo de cisalhamento reduzido e G_c é o valor inicial. A deformação ε_u é normal à direção da fissura (deformação de abertura da fissura), c_1 e c_2 são parâmetros que dependem da armadura que cruza a direção da fissura, p é a razão de armadura transformada, assumido como zero no ATENA, e c_3 é o fator de escala do usuário, sendo $c_3=1$ por padrão.

Para a compressão, a redução de força depois da fissuração é formulada na teoria dos campos de compressão e baseada em experimentos. A função tem a forma de uma função de Gauss, como ilustrado na Figura 37.

Figura 37 - Redução da força de compressão no concreto fissurado



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

Os parâmetros são obtidos conforme as funções:

$$f_c'^{ef} = r_c f_c', \quad r_c = c + (1 - c)e^{(128\varepsilon_u)^2} \quad (65)$$

Não há nenhuma redução da força de compressão para a deformação zero, porém quando a deformação aumenta a força cai e se aproxima de $f_c'^{ef} = r_c f_c'$. A constante c , adotada

igual a 0,8 com base em pesquisas experimentais, representa a redução máxima da força, quando ocorre grandes deformações na direção normal à compressão. A Tabela 13 lista os parâmetros padrões para o modelo constitutivo adotado.

Tabela 13 - Parâmetros padrões para o modelo constitutivo

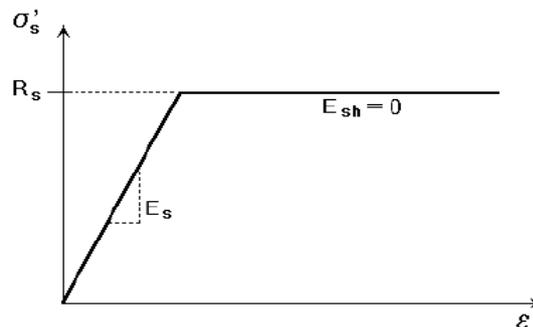
Parâmetro	Fórmula
Compressão cilíndrica	$f'_c = -0,85f'_{cu}$
Força de tração	$f'_t = 0,24f'_{cu}{}^{\frac{2}{3}}$
Módulo de elasticidade inicial	$E_c = (6000 - 15,5f'_{cu})\sqrt{f'_{cu}}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
Amolecimento na compressão	$w_d = 0,0005 \text{ m}$
Resistência à compressão do concreto fissurado	$c = 0,8$
Tensão do “ <i>tension stiffening</i> ”	$\sigma_{st} = 0$
Tipo de função de compressão-tração	Linear
Energia de fratura	$G_F = 0,000025f'_t{}^{cf} \text{ MN/m}$

Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

3.22 – Modelo Constitutivo da armadura

A armadura é modelada da forma discreta, por elementos de treliça, onde o estado de tensão uniaxial é assumido e a mesma formulação da lei tensão-deformação é usada em todos os tipos de armadura. A lei bilinear, para o comportamento elasto-plástico perfeito, é assumida como mostrado na Figura 38 :

Figura 38- A lei bilinear tensão-deformação para armadura



Fonte: Cervenka, V., Cervenka, J., & Jendele, L (2018)

A parte elástica inicial possui o módulo de elasticidade do aço E_s . A segunda linha representa a plasticidade do aço com endurecimento e sua inclinação é o módulo de endurecimento E_{sh} . Nessa situação, considerando plasticidade perfeita, $E_{sh} = 0$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados os experimentos que foram modelados e os resultados obtidos nas simulações, por meio de uma análise não-linear das peças com a utilização do programa ATENA 2D. Foram realizadas inicialmente quatro simulações numéricas de espécimes de dentes de concreto, através dos dados fornecidos nos ensaios, como geometria das vigas e dos elementos de ligação, armaduras empregadas, propriedades dos materiais e critérios de monitoramento. As peças modeladas são provenientes de dois programas experimentais, os estudos de LU *et al* (2012) e FALCÓN *et al* (2019). Considerou-se, neste primeiro momento, como principais variáveis de análise os parâmetros de resistência à compressão do concreto, relação a/d e o arranjo da armadura de suspensão (inclinada ou vertical).

Posteriormente, após a validação dos modelos numéricos confrontados com os resultados experimentais, foi estudado o comportamento dos dentes perante os normativos nacionais, com base nas vigas ensaiadas por FALCÓN *et al* (2019). Empregou-se as características das vigas analisadas do referido autor e examinou-se os elementos de ligação à vista das normas brasileiras. Para isso, foram selecionados quatro níveis de relações a/d (0,25, 0,5, 0,75 e 1), dimensionados e modelados os dentes tanto pelo modelo de escoras e tirantes quanto por atrito-cisalhamento com base nas instruções nacionais, com o intento de, por meio das simulações, verificar a adequação das recomendações normativas, o funcionamento da armadura de suspensão e do tirante principal, o comportamento das bielas e as cargas alcançadas pelos modelos.

4.1.1 Espécimes 1 e 2 - LU *et al*, 2012

Os Espécimes 1 e 2 foram modelados conforme os detalhes da Figura 39, onde são observadas as configurações geométricas da viga utilizada no ensaio. A Figura 40 apresenta os detalhes gerais do ensaio.

Figura 39 - Espécime 1 e 2: Propriedades geométricas e detalhes do ensaio

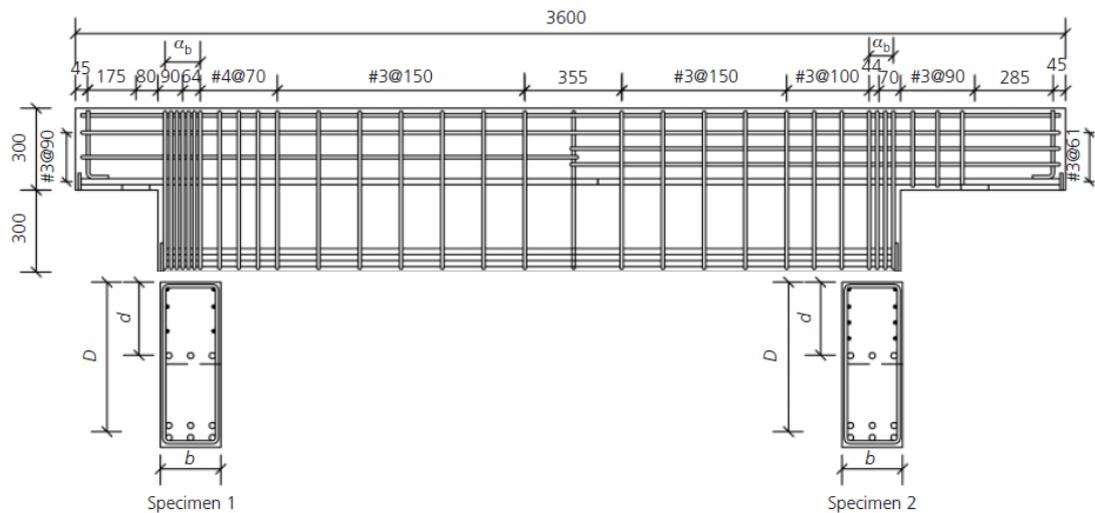
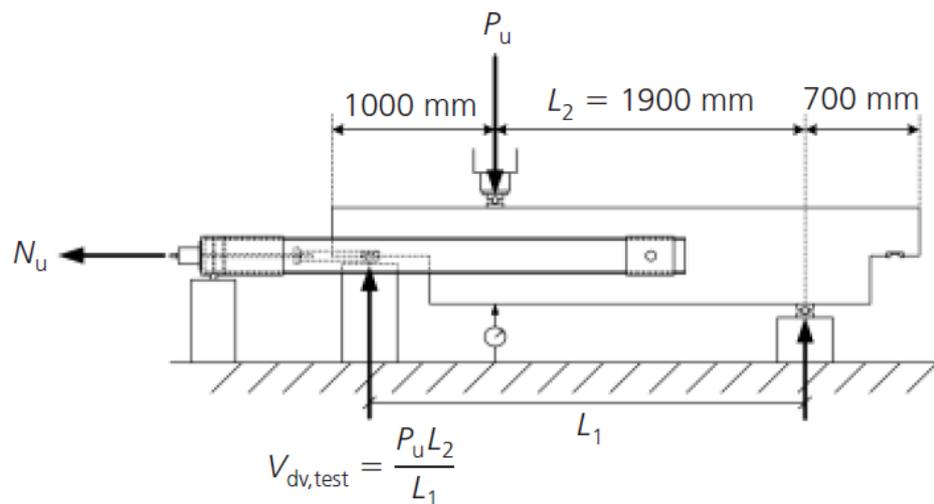
Fonte: LU *et al* (2012)

Figura 40 - Esquema geral dos ensaios

Fonte: LU *et al* (2012)

Nas Tabela 14 e 15, são exibidas as particularidades no arranjo e na armadura dos dentes e no corpo principal das vigas.

Tabela 14 – Detalhes de armadura dos dentes de concreto - LU *et al* (2012).

Espécime	Barras principais A_s mm^2	Estribos horizontais A_h mm^2	Estribos verticais A_v mm^2	Armadura de suspensão A_{vh} mm^2	f_c MPa	b mm	d mm	h mm
1	3#7 1161,2	2#3 285,3	-	7#4 1773,5	60,6	220	269	300
2	3#7 1161,2	3#3 428,0	3#3 428,0	4#4 1013,4	60,6	230	274	305

Fonte: LU *et al* (2012)

Tabela 15 – Detalhes de armação do corpo principal da viga - LU *et al* (2012).

Espécime	Armadura principal	Armadura de cisalhamento		<i>b</i> mm	<i>H</i> mm	<i>a</i> mm	<i>d</i> mm	<i>a/d</i>
		Fim	Meio					
1	6#7	#4@70mm	#3@150mm	220	600	170	269	0,63
2	6#7	#3@100mm	#3@150mm	230	600	340	274	1,24

Fonte: LU *et al* (2012)

As propriedades das armaduras e dos concretos utilizados no ensaio são detalhadas nas Tabelas 16 e 17, respectivamente.

Tabela 16 - Propriedades das armaduras - LU *et al* (2012)

	<i>d_b</i> mm	<i>A_b</i> mm ²	<i>f_y</i> MPa	<i>f_u</i> MPa	Observação
#3	9,53	71,33	419	594	Estribos horizontais e verticais
#3	9,53	71,33	502	751	Armadura de cisalhamento das vigas
#4	12,70	126,68	505	765	Armadura de suspensão e armadura de cisalhamento
#6	19,10	286,52	516	724	Armadura principal das vigas
#7	22,20	387,08	517	731	Armadura principal das vigas e dos dentes
#8	25,4	506,71	518	729	Armadura principal das vigas

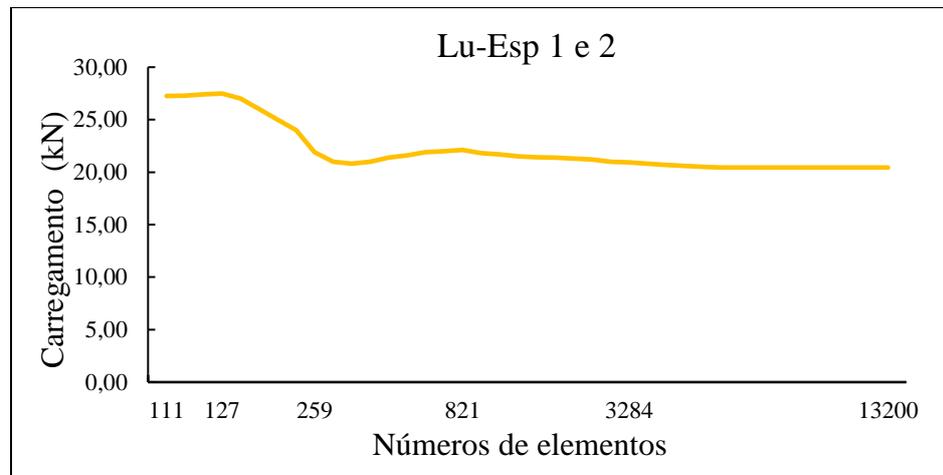
Fonte: LU *et al* (2012)Tabela 17 - Propriedades dos concretos - LU *et al* (2012)

Resistência característica à compressão de projeto <i>f_{ck}</i> (MPa)	Resistência real à compressão <i>f_{cm}</i> (MPa)	Relação água/cimento	<i>Slump</i> mm	Diâmetro máximo do agregado mm	Unidade kg/m ³
48,3	48,5	0,32	250	150	2362
69,0	60,6	0,28	250	130	2470

Fonte: LU *et al* (2012)

Para a modelagem do aço e do concreto, foram empregados, respectivamente, os elementos finitos CCIsoTruss<xx> e CCIsoQuad<xxxx>. Inicialmente, para a obtenção da dimensão da malha quadrilateral de elementos finitos, foi realizada uma análise de convergência de malha, com materiais de comportamento linear. Examinou-se, por meio do monitoramento da carga para um deslocamento de 5 mm no meio do vão da viga, a convergência do comportamento da relação carga *versus* número de elementos para diferentes tamanhos de malhas contidas de 40 a 1,25 cm, conforme Figura 41. Obtendo-se no valor de 3284 elementos da malha de 2,5 cm, uma convergência e um tempo de processamento adequados.

Figura 41 - Análise de convergência de malha Espécimes 1 e 2 - LU *et al* (2012)



Fonte: O autor (2021)

Posteriormente, com a dimensão da discretização da malha determinada, definiram-se os parâmetros dos materiais utilizados na análise, guiados pelos dados inerentes ao ensaio experimental, a saber:

a) Concreto

Espécimes 1 e 2: Modelo constitutivo SBETA;

Resistência cúbica do concreto: $f'_{cu} = 71,29$ MPa;

Resistência à compressão do concreto : $f_c = 60,6$ MPa;

Resistência à tração do concreto : $f'_t = 4,126$ MPa;

Módulo de elasticidade : $E_c = 41,33$ GPa;

Coefficiente de poisson: $\nu = 0,2$;

Função de compressão-tração: Linear;

Modelo de fissuração: Fixa;

Fator de redução da resistência do concreto fissurado: $c = 0,8$;

b) Aço

Espécimes 1 e 2: Modelo constitutivo bilinear;

Módulo de elasticidade : $E_c = 210$ GPa;

Tensão de escoamento: σ_y empregado conforme Tabela 16;

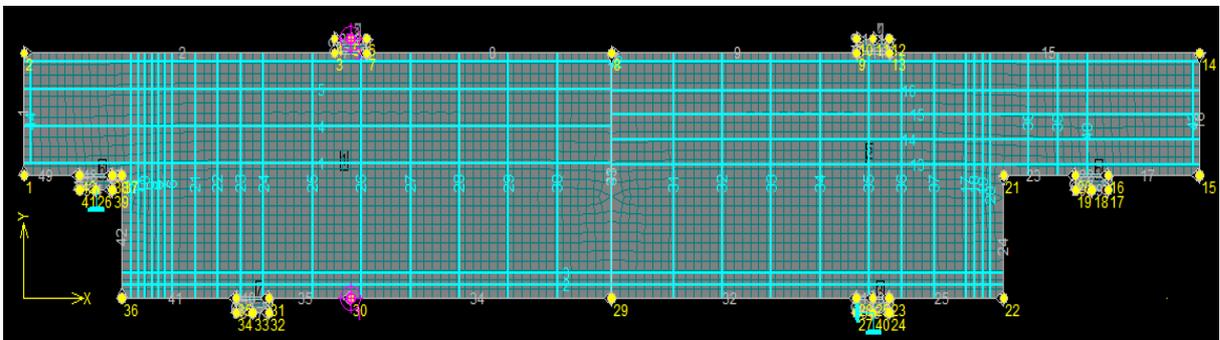
Adotou-se, ainda, nos pontos de aplicação da carga e nos pontos de apoio, placas com características elasto-lineares, modulo de elasticidade igual a 200 GPa, de modo a uniformizar as tensões transmitidas para o concreto. Foram definidos dois casos de carregamento da

estrutura, o primeiro para a simulação das cargas atuantes, onde foi prescrito um deslocamento de 0,1mm no ponto de aplicação da carga para cada passo de carga, e o segundo para as condições de suporte, onde os pontos de apoio foram locados, restringindo o deslocamento apenas na direção vertical no apoio do dente e nas direções vertical e horizontal no apoio do corpo da viga.

Para obter os resultados de ambas combinações, foram adotados 100 passos de análise para o Espécime 1 (Lu-Esp1) e 300 passos para o Espécime 2 (Lu-Esp2), pois este último alcança um maior deslocamento experimentalmente. Utilizou-se o critério de análise de Newton-Rhapson para a solução de equações não-lineares, com um limite de 500 interações por passo, configurada a opção de matriz de rigidez tangente e uma tolerância de erro em energia de 0,0001.

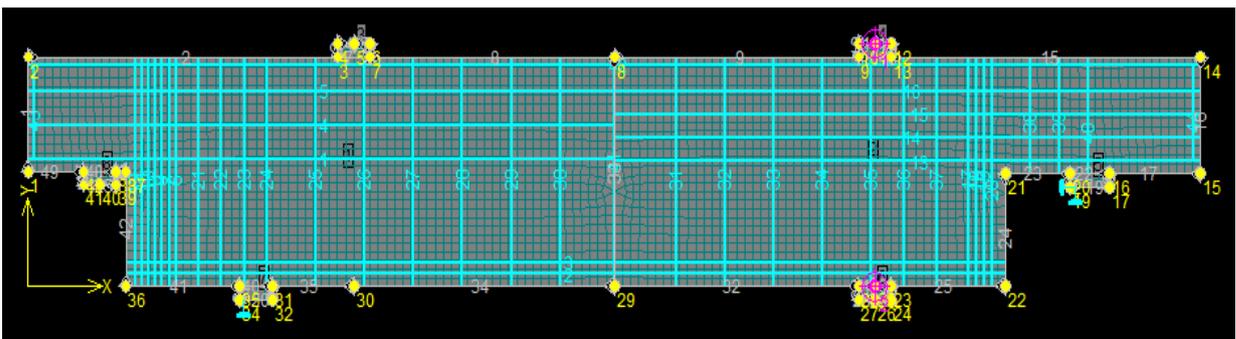
Com o intuito de traçar e examinar a curva carregamento *versus* deslocamento, foram considerados dois pontos de monitoramento, ilustrados nas Figura 42 e 43, o primeiro localizado no ponto de aplicação do deslocamento prescrito, aferindo as reações alcançadas, e o segundo, exatamente na linha de aplicação do carregamento na parte inferior da viga, medindo os deslocamentos da peça.

Figura 42 – Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do Lu-Esp1



Fonte: O autor (2021)

Figura 43 – Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do Lu-Esp2



Fonte: O autor (2021)

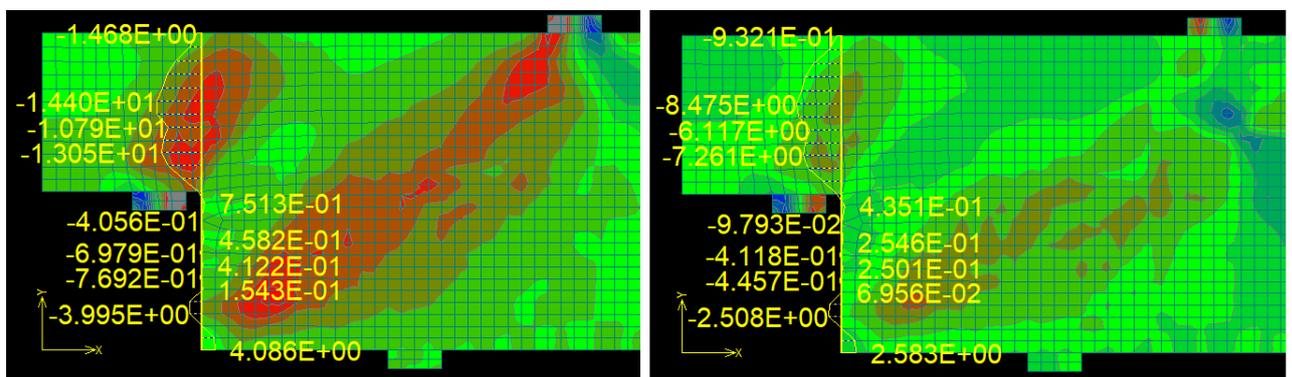
Primeiramente, para o modelo Lu-Esp1, de relação $a/d = 0,63$, observa-se que o modelo atinge um deslocamento máximo de 5,39 mm, até a ruptura no passo 55, com um carregamento equivalente de 1.013 kN. As primeiras fissuras surgem no passo 4, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 215,80 kN, com aberturas de 0,1018 mm. Constatase que a tensão máxima nas armaduras do tirante principal do dente compreende um valor de 432,90 MPa, nota-se que não foi caracterizada uma ruptura por flexão, já que a tensão de escoamento das mesmas não foi atingida. Ao analisar os resultados obtidos, é apurado que a tensão de cisalhamento evolui gradativamente até o passo 55, chegando no valor de 14,4 MPa. No passo seguinte, para uma carga de 603 kN, como ilustrado na Figura 44, há uma significativa redução e os valores passam a girar em torno de 8,47 MPa. Feita a verificação do concreto sugerida por El Debs (2017) na equação (19), conclui-se que a tensão de cisalhamento atuante (τ_{wd}) supera a tensão resistente de cálculo (τ_{wu}) e o limite de $0,17f_{cd}$, desta forma, é caracterizada uma falha por esmagamento diagonal do concreto.

$$\tau_{wd} = 14,40 \text{ MPa}; \quad (66)$$

$$\tau_{wu} = \frac{0,18 \cdot \left(\frac{60,6}{1,4}\right)}{\sqrt{(0,9)^2 + (0,63)^2}} = 7,09 \text{ MPa};$$

$$\tau_{wd} > 0,17f_{cd} = 0,17 \cdot \left(\frac{60,6}{1,4}\right) = 7,36 \text{ MPa};$$

Figura 44 – Análise da tensão de cisalhamento e das tensões principais no passo 55 e 56

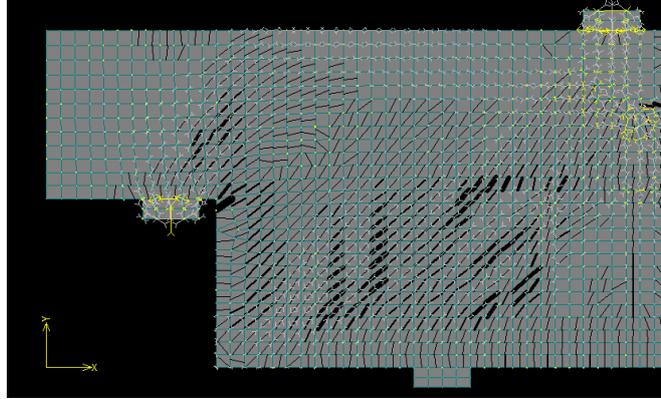


Fonte: O autor (2021)

O padrão de fissuração, considerando o passo de carga relativo à força última, pode ser analisado na Figura 45, na qual observa-se que a representação das fissuras seguiu a orientação

paralela às bielas de compressão, sem cruzá-las, e foi atingida uma abertura máxima de 2,22 mm.

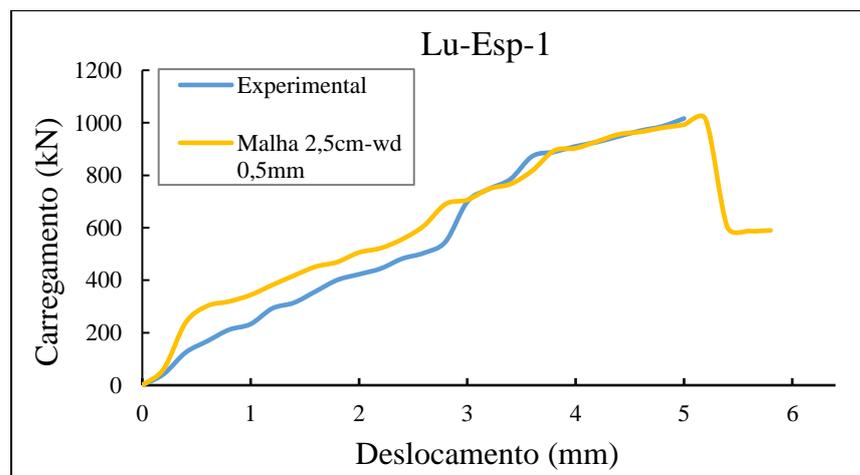
Figura 45 - Padrão de fissuração e tensões principais do Espécime 1



Fonte: O autor (2021)

Plotando a curva carregamento *versus* deslocamento para o modelo do Lu-Esp1 e comparando com os dados obtidos experimentalmente, observa-se que foi alcançada uma correspondência estreita nos resultados. O teste experimental obteve a carga última de 1015,00 kN, atingindo um deslocamento máximo de 4,89 mm. As curvas relacionadas demonstram importante compatibilidade, com cargas e deslocamentos equiparados, bem como o modo de falha reportado no ensaio, por esmagamento diagonal do concreto, e o começo da fissuração, por volta de 20% da carga última, mostraram-se similares.

Figura 46 - Curva carregamento *versus* deslocamento do modelo Lu-Esp1

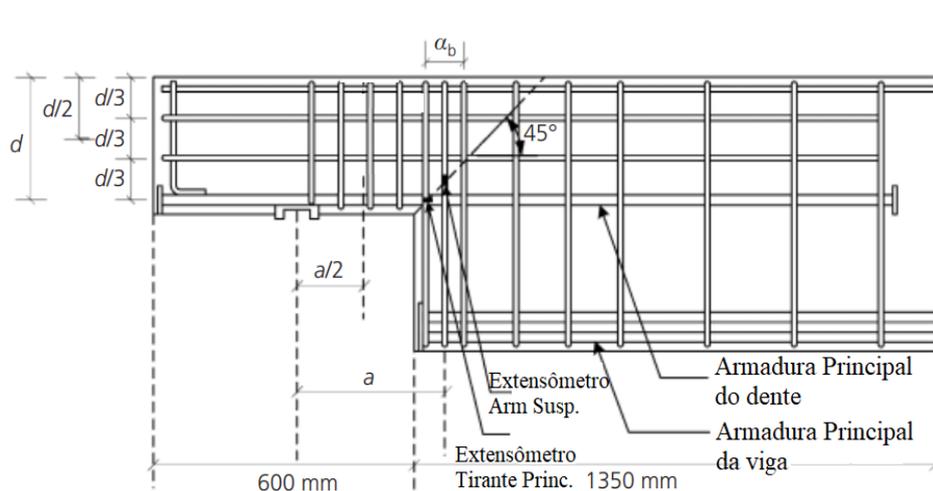


Fonte: O autor (2021)

No caso do Lu-Esp2, de relação $a/d = 1,24$, observa-se que o modelo atinge um deslocamento máximo de 22,23 mm, até a ruptura no passo 222. O carregamento máximo percebido foi de 776 kN, e as primeiras fissuras surgem no passo 3, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 147,4 kN, com aberturas de 0,1055 mm. Observa-se no modelo que primeiramente a armadura de suspensão atinge a tensão de escoamento de 505 MPa, no passo 31, com um carregamento de 547,9 kN e posteriormente a armadura do tirante principal do dente alcança o escoamento, com a tensão de 517 MPa no passo 50, para uma carga correspondente de 731,4 kN.

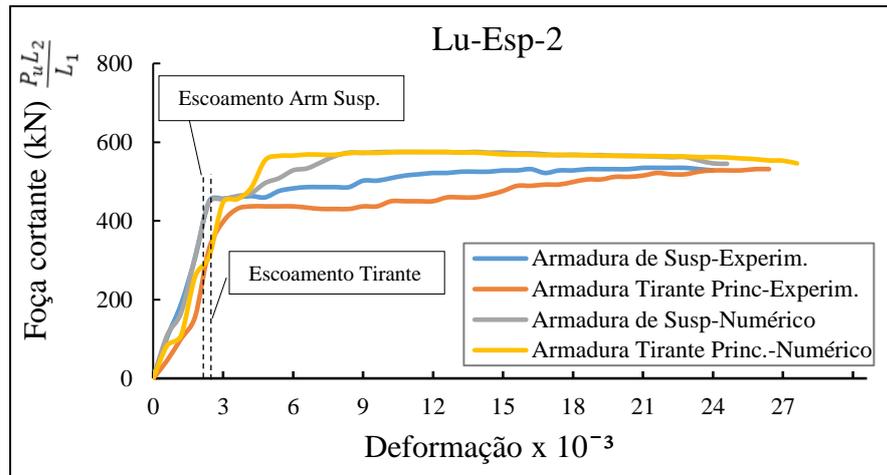
Os dados experimentais deste espécime ofereceram a condição de observar mais detalhadamente o comportamento das armaduras, foram instalados medidores de deformação (extensômetros), conforme Figura 47, as curvas que relacionam as forças cortantes com as deformações foram plotadas, assim foi possível comparar com a modelagem realizada o desempenho das mesmas. A Figura 48 traz o gráfico comparativo da força cortante versus as deformações medidas nas armaduras de suspensão e na armadura principal no Lu-Esp2. Constata-se uma boa relação entre o comportamento das armaduras ensaiadas experimentalmente e as do modelo numérico, ambas com a armadura de suspensão deformando menos e absorvendo uma força de cisalhamento maior inicialmente.

Figura 47 - Localização dos extensômetros para Lu-Esp-2



Fonte: LU *et al* (2012)

Figura 48 - Curva força *versus* deformação na armadura do modelo Lu-Esp-2

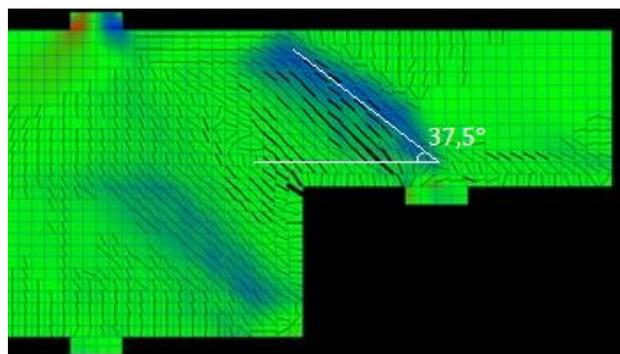


Fonte: O autor (2021)

Considerando a geometria do referido espécime, que possui $1,0 < a/d \leq 2,0$, e as direções das tensões principais, nota-se que sua biela apresenta uma inclinação de aproximadamente $37,5^\circ$. Observa-se que a NBR 6118 (ABNT, 2014) adverte que as bielas inclinadas devem ter um ângulo de inclinação cuja tangente esteja entre 0,57 e 2 em relação ao eixo da armadura longitudinal. Desta forma, ante aos normativos nacionais, o dimensionamento para este caso é feito como para vigas em balanço, e tal análise é corroborada ao se examinar que, mesmo após atingir a tensão resistente de cálculo nas bielas (τ_{wu}) no passo 21, para este caso 8,376 MPa, o carregamento continua a evoluir, provocando o escoamento da armadura principal e de suspensão, caracterizando, assim, uma ruptura por flexão do dente no passo 222.

O panorama de fissuração apresentado para o último passo de deslocamento é ilustrado na Figura 49, juntamente com o mapa de calor das tensões principais. A representação das fissuras também se iniciou a partir do canto reentrante e seguiu a orientação paralela às tensões principais de compressão, sendo atingida uma abertura máxima de 7,32 mm.

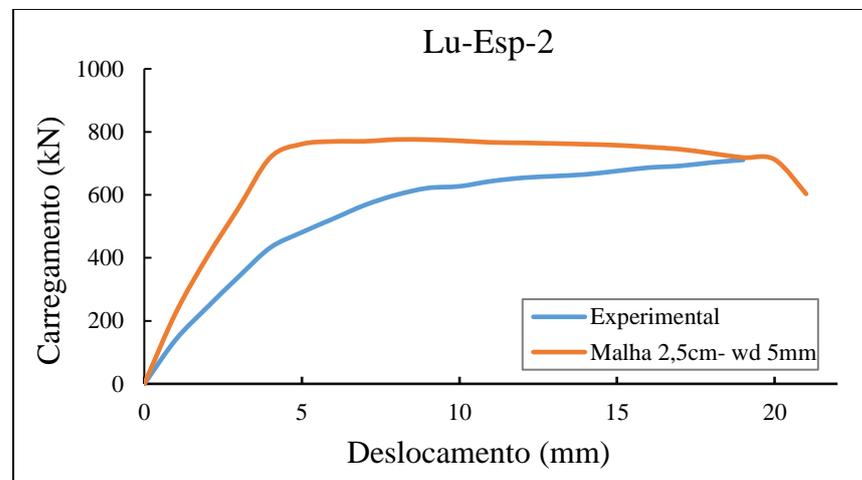
Figura 49 - Padrão de fissuração e tensões principais do Lu-Esp2



Fonte: O autor (2021)

Plotando o gráfico carregamento *versus* deslocamento para o modelo Lu-Esp2 e comparando com os dados obtidos experimentalmente (Figura 50), observa-se que foi alcançada uma melhor correspondência para o modelo com $w_d = 5$ mm e o teste experimental obteve a carga última de 711 kN, atingindo um deslocamento máximo de 20,14 mm. As curvas relacionadas demonstram compatibilidade, com cargas e deslocamentos equiparados. Nota-se que o modelo numérico simulado atinge um maior nível de carregamento com menores deslocamentos, e segue com padrões de carga estabilizados, após as armaduras dos tirantes e de suspensão entrarem em regime de escoamento, até um decréscimo mais acentuado devido à ruptura.

Figura 50 - Curva carregamento *versus* deslocamento do modelo Lu-Esp2



Fonte: O autor (2021)

A Tabela 18 apresenta o resumo das cargas e modos de ruptura para cada modelo estudado. Os resultados mostram que a capacidade de suporte ao cisalhamento dos dentes de concreto cresceu com a diminuição da relação a/d . Verificou-se uma boa correlação entre os modelos simulados e os dados colhidos experimentalmente, tanto em relação aos carregamentos e deslocamentos obtidos, quanto no tocante às deformações das armaduras e aos modos de falha observados.

Tabela 18 – Resumo dos resultados para LU *et al* (2012)

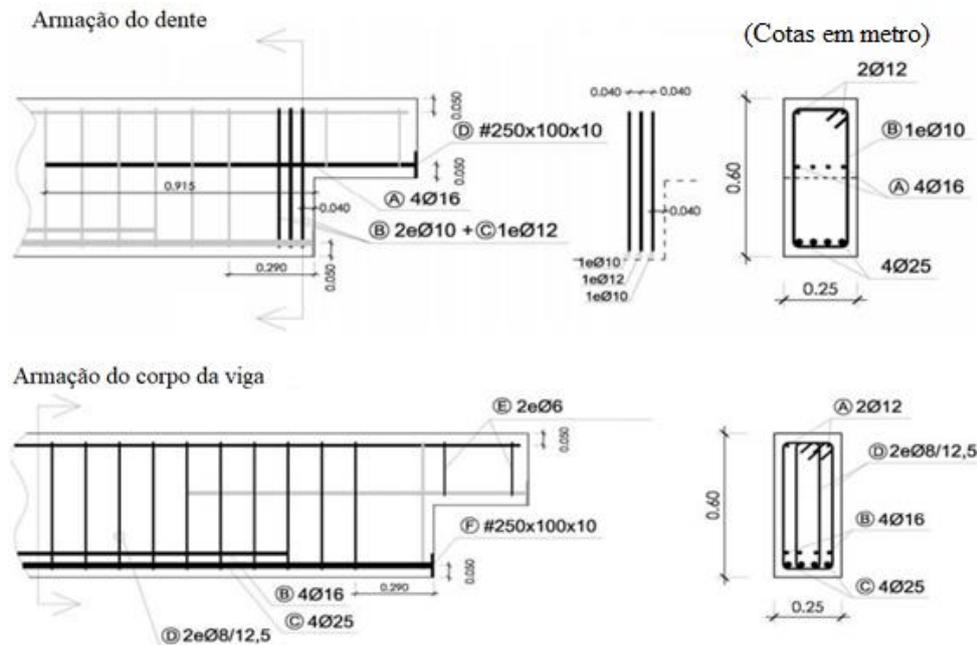
Modelos	f'_c (MPa)	Relação a/d	Carga Máxima Experimental (kN)	Carga Máxima Modelagem (kN)	Modo de ruptura
Lu-Esp1	60,6	0,63	1015	1013	Esmagamento diagonal
Lu-Esp2	60,6	1,24	711	776	Flexão

Fonte: O autor (2021)

4.1.2 Espécimes 1.6 e 2.6 - FALCÓN *et al*, 2019

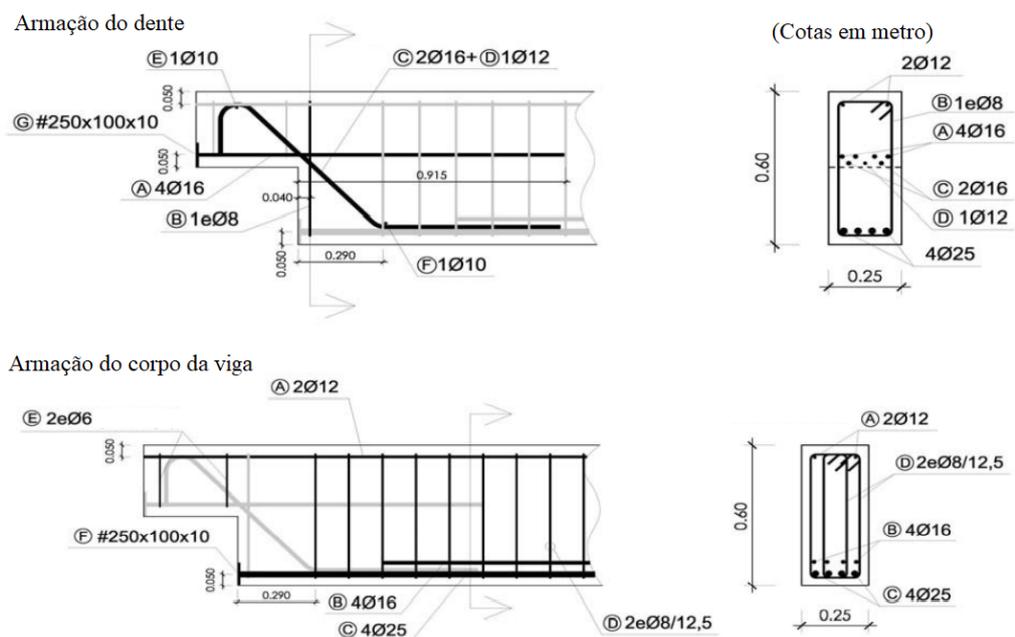
Os Espécimes 1.6 (Falcón-Esp1.6) e 2.6 (Falcón-Esp2.6) foram modelados conforme os detalhes das Figura 51 e 52, respectivamente, onde se observam os detalhes da armação e as configurações geométricas das vigas utilizadas no ensaio. A Figura 53 apresenta o esquema geral do experimento.

Figura 51- Esquema de armação Espécime 1.6



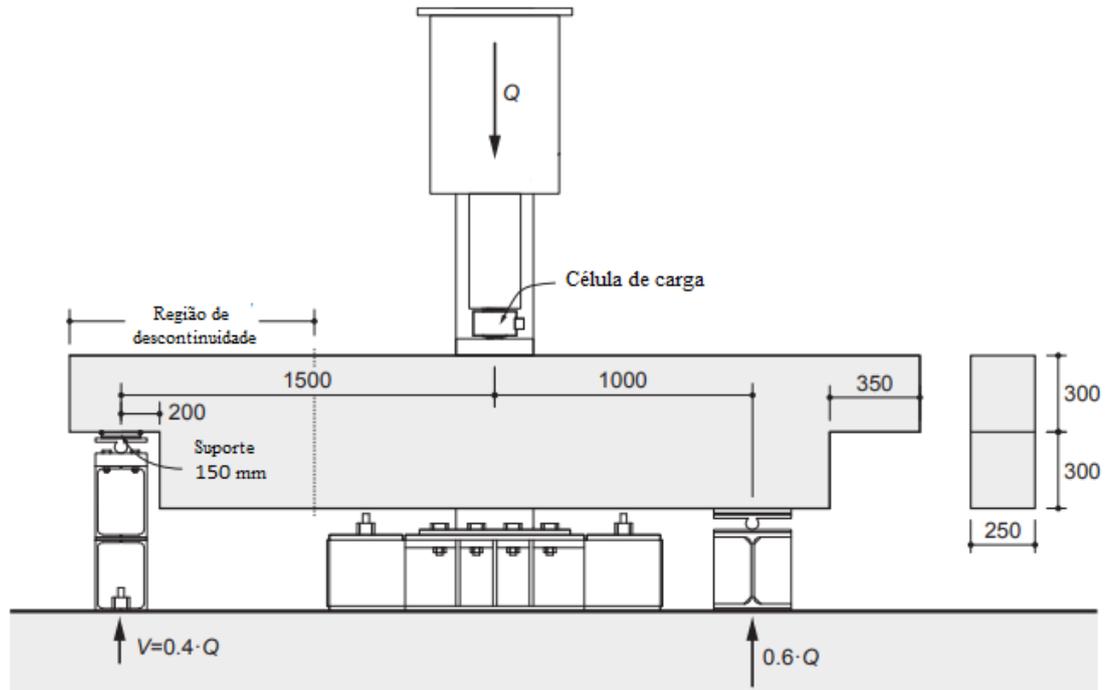
Fonte: FALCÓN (2015)

Figura 52 - Esquema de armação Espécime 2.6



Fonte: FALCÓN (2015)

Figura 53 - Esquema geral dos ensaios

Fonte: FALCÓN *et al* (2019)

Nas Tabela 19 e 20, são mostradas particularidades no arranjo e na armação dos dentes e no corpo principal das vigas.

Tabela 19 - Detalhes de armação dos dentes de concreto - FALCÓN *et al* (2019).

Espécime	Barras principais A_s (mm^2)	Estribos verticais A_v (mm^2)	Armadura de suspensão vertical A_{sv} (mm^2)			Armadura de suspensão inclinada A_{SD} (mm^2)	f_c (MPa)	b mm	d mm	h mm
			$2\phi 10$ (157)	$2\phi 12$ (226)	$2\phi 10$ (157)					
1.6	4 $\phi 16$ (804)	2 $\phi 6$ (57)	$2\phi 10$ (157)	$2\phi 12$ (226)	$2\phi 10$ (157)	-	31,1	250	250	300
2.6	4 $\phi 16$ (804)	2 $\phi 6$ (57)	2 $\phi 8$ (101)	-	-	2 $\phi 10$ (157)	38,3	250	250	300

Fonte: FALCÓN *et al* (2019)Tabela 20 - Detalhes de armação do corpo da viga - FALCÓN *et al* (2019)

Espécime	Armadura principal		Armadura de cisalhamento (mm^2)	Porta estribo (mm^2)	H mm	a mm	d mm	a/d
	A_{sF1} (mm^2)	A_{sF2} (mm^2)						
1.6	4 $\phi 25$ (1963)	4 $\phi 16$ (804)	4 $\phi 8/0,125$ (1608)	600	600	280	250	1,12
2.6	4 $\phi 25$ (1963)	4 $\phi 16$ (804)	4 $\phi 8/0,125$ (1608)	600	600	490	250	1,96

Fonte: FALCÓN *et al* (2019)

As propriedades das armaduras e dos concretos utilizados no ensaio são detalhadas nas Tabela 21 e 22 , repectivamente.

Tabela 21 - Propriedades das armaduras - FALCÓN *et al* (2019)

d_b (mm)	Espécime 1.6		Espécime 2.6		Observação
	f_y (MPa)	f_u (MPa)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	
6	547,3	680,1	558,6	718,2	Estribos verticais
8	532,3	672,1	554,1	673,5	Armadura de cisalhamento das vigas
10	544,2	654,3	548,4	656,2	Armadura de suspensão
12	546,1	658,5	551,7	640,1	Armadura de suspensão e porta estribo
16	549,6	672,8	543,9	637,3	Armadura principal das vigas e dos dentes
25	569,9	695,9	539,9	650,9	Armadura principal das vigas

Fonte: FALCÓN *et al* (2019)

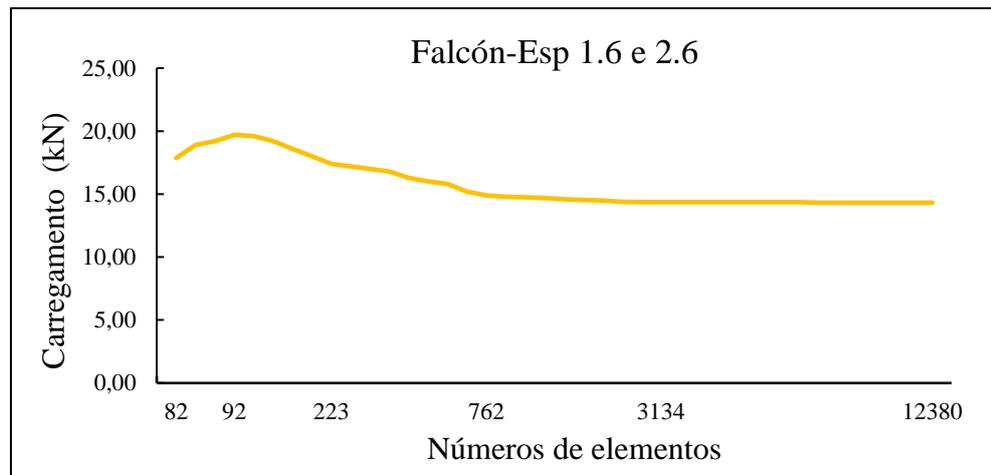
Tabela 22 - Propriedades dos concretos - FALCÓN *et al* (2019)

Espécime	Resistência característica à compressão de projeto f_{ck} (MPa)	Resistência real à compressão f_{cm} (MPa)	Resistência média à tração f'_t (MPa)	Diâmetro máximo do agregado mm
1.6	30,0	31,1	3,19	20
2.6	30,0	38,3	3,19	20

Fonte: FALCÓN *et al* (2019)

De forma análoga à simulação anterior, nesta modelagem, para o aço foram utilizados elementos CCIsoTruss<xx>, para o concreto foram empregados os elementos do tipo CCIsoQuad<xxxx>. Foi realizada uma nova análise de convergência de malha para as características específicas das vigas ensaiadas, com materiais de comportamento linear, para diferentes tamanhos de malhas contidas de 40 a 1,25 cm, (Figura 54). Através do monitoramento da carga para o deslocamento de 10 mm no meio do vão, a convergência do comportamento da relação carga *versus* número de elementos foi observada para a dimensão de malha de 2,5 mm, com 3134 elementos, com um tempo de processamento plausível, com duração aproximada de três horas por modelo.

Figura 54 - Análise de convergência de malha Espécimes 1.6 e 2.6



Fonte: O autor (2021)

Com a dimensão da discretização da malha determinada, definiu-se os parâmetros dos materiais utilizados na análise, guiados pelos dados inerentes ao ensaio experimental:

a) Concreto

Espécimes 1.6 e 2.6: Modelo constitutivo SBETA;

Coefficiente de poisson: $\nu = 0,2$;

Função de compressão-tração: Linear;

Modelo de fissuração: Fixa;

Fator de redução da resistência do concreto fissurado: $c = 0,8$;

Resistência cúbica à compressão do concreto Espécime 1.6: $f'_{cu} = 36,58$ MPa;

Resistência à compressão do concreto Espécime 1.6: $f_c = 31,1$ MPa;

Resistência à tração do concreto Espécime 1.6: $f'_t = 3,19$ MPa;

Módulo de elasticidade Espécime 1.6: $E_c = 35,93$ GPa;

Resistência de cubo do concreto Espécime 2.6: $f'_{cu} = 45,06$ MPa;

Resistência à compressão do concreto Espécime 2.6: $f_c = 38,3$ MPa;

Resistência à tração do concreto Espécime 2.6: $f'_t = 3,19$ MPa;

Módulo de elasticidade Espécime 2.6: $E_c = 35,93$ GPa;

b) Aço

Espécimes 1.6 e 2.6: Modelo constitutivo bilinear

Módulo de elasticidade : $E_c = 210$ GPa;

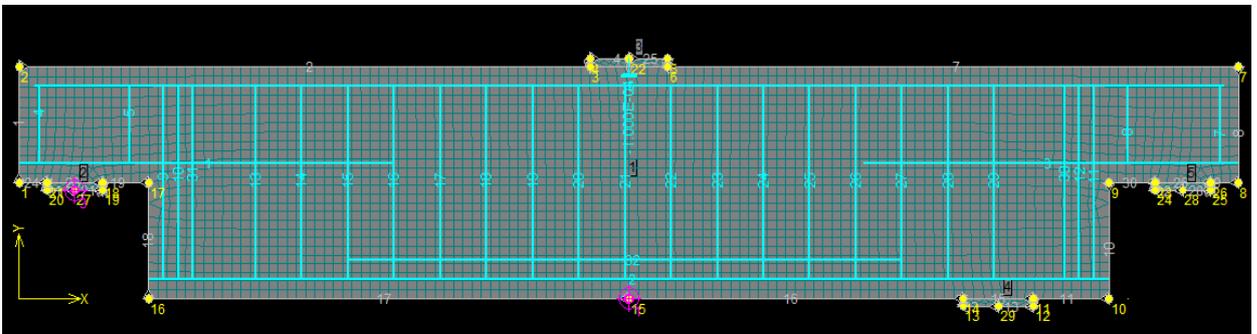
Tensão de escoamento: σ_y empregado conforme Tabela 21;

Nos pontos de aplicação da carga e nos pontos de apoio, placas com características elasto-lineares, módulo de elasticidade igual a 200 GPa, de modo a uniformizar as tensões transmitidas para o concreto. Foram definidos dois casos de carregamento da estrutura, o primeiro para a simulação das cargas atuantes, onde foi prescrito um deslocamento de 0,1mm no meio do vão para cada passo de carga, ponto de aplicação das cargas, e o segundo para as condições de suporte descritas no ensaio, restringindo-se o deslocamento apenas na direção vertical onde os pontos de apoio foram locados.

Para obter os resultados de ambas as combinações, adotaram-se 100 passos de análise para os dois espécimes, utilizando-se o critério de análise de Newton-Rhapson para a solução de equações não-lineares, com um limite de 500 interações por passo, configurada a opção de matriz de rigidez tangente e uma tolerância de erro em energia de 0,001.

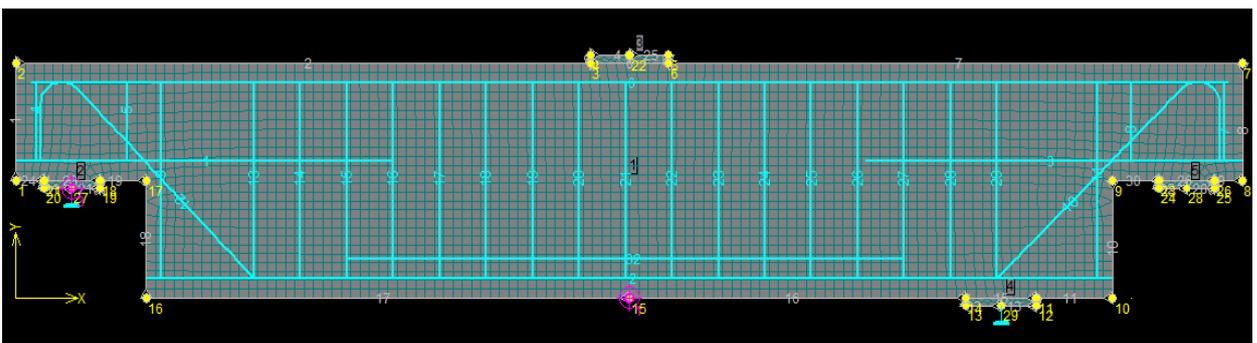
Com o intuito de obter a curva carregamento *versus* deslocamento, foram considerados dois pontos de monitoramento, ilustrados nas Figuras 55 e 56 conforme os descritos experimentalmente. O primeiro localizado no ponto de apoio do dente, aferindo as reações alcançadas, e o segundo, exatamente na linha de aplicação do carregamento na parte inferior da viga, no meio do vão, medindo os deslocamentos da peça

Figura 55 - Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do modelo Falcón-Esp1.6



Fonte: O autor (2021)

Figura 56 - Armação, pontos de monitoramento e pontos de apoio do modelo Falcón-Esp2.6

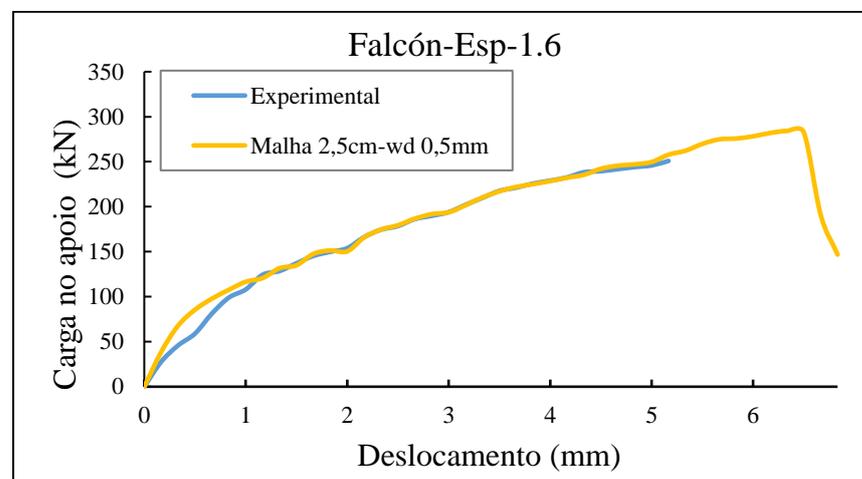


Fonte: O autor (2021)

Para o Falcón-Esp1.6, de relação $a/d = 1,12$, observa-se que o modelo atinge um deslocamento máximo de 6,308 mm, até a ruptura no passo 64, com um carregamento no apoio de 282,7 kN. As primeiras fissuras surgem no passo 3, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 54,93 kN, com aberturas de 0,04456 mm. Constatou-se que o modelo atinge a tensão de escoamento da armadura de suspensão de 544,20 MPa no passo 45, com uma carga de 245,60 kN. A falha da peça se dá após o início do processo de plastificação da armadura potencializada pelo lascamento (*spalling*) do concreto, dano caracterizado pela fissuração em forma de lasca, neste caso, localizada no nó superior da armadura de suspensão.

Comparando-se os dados experimentais fornecidos por Falcón *et al* (2019), para Falcón-Esp1.6 a curva que relaciona a carga no apoio e o deslocamento obtido se mostra bem próxima (Figura 57), com uma carga última e deslocamentos menores para o experimento, que foram iguais, respectivamente, a 250,9 kN e 5,12 mm. A modelagem alcança um carregamento maior, até o primeiro milímetro de deslocamento no meio do vão, depois as curvas seguem praticamente sobrepostas, até a ruptura experimental.

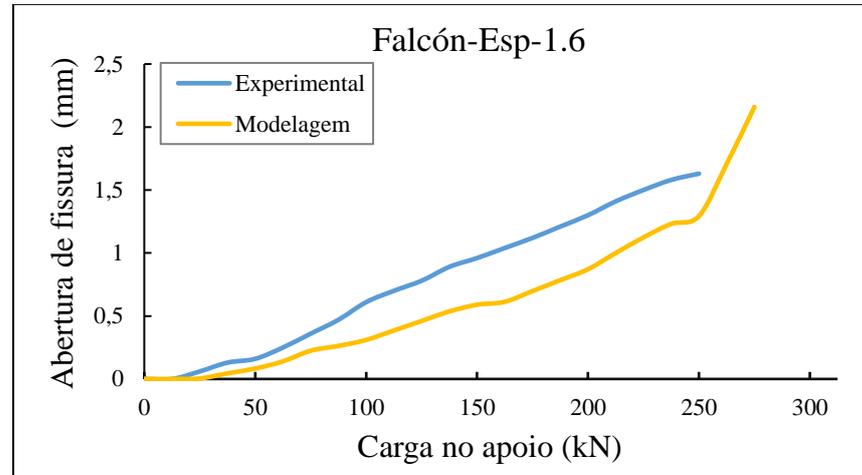
Figura 57 - Curva carregamento *versus* deslocamento do dente Falcón-Esp1.6



Fonte: O autor (2021)

Analisando-se os dados de abertura de fissura fornecidos pelo ensaio, ilustrados na Figura 58, nota-se que experimentalmente a abertura máxima para a carga de ruptura é de 1,63 mm. A modelagem conserva valores menores, porém próximos, quanto ao tamanho das fissuras, aumentando as dimensões de forma acentuada ao se aproximar da carga de ruptura, com abertura de 2,159 mm para a carga máxima, localizada na região onde ocorre o lascamento do concreto.

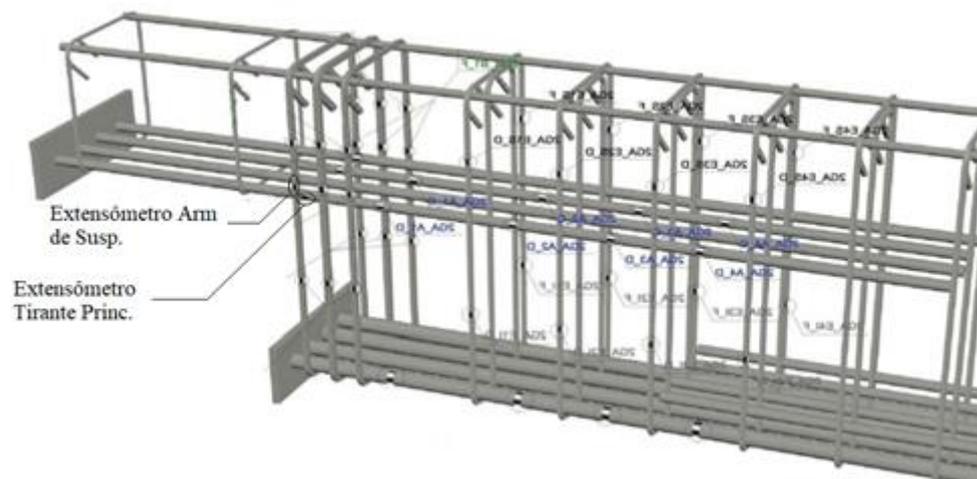
Figura 58 - Gráfico comparativo da abertura de fissura para o Espécime 1.6



Fonte: O autor (2021)

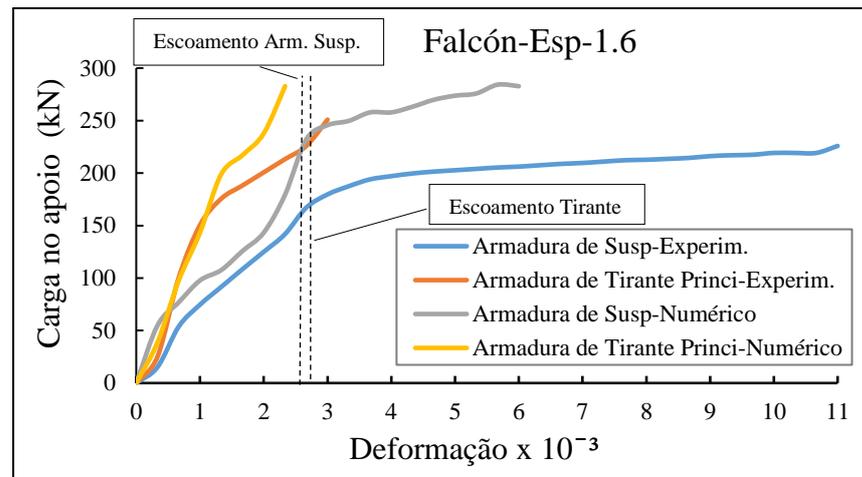
No trabalho experimental também foram monitoradas as armaduras por meio de extensômetros. A Figura 59 ilustra os pontos do dente Falcón-Esp1.6 onde foram analisadas as deformações. O comparativo da carga no apoio versus as deformações medidas nas armaduras de suspensão e na armadura principal é traçado na Figura 60. Consta-se uma boa relação entre o comportamento das armaduras ensaiadas experimentalmente e as do modelo numérico, ambas com a armadura do tirante principal deformando menos. Na simulação, as deformações chegaram a valores máximos de $8,507 \times 10^{-3}$ mm para a armadura de suspensão e $2,316 \times 10^{-3}$ mm para o aço no tirante principal do dente, no caso dos ensaios, são encontrados valores de $11,10 \times 10^{-3}$ mm e $3,93 \times 10^{-3}$ mm, respectivamente.

Figura 59 - Localização dos extensômetros para o dente Falcón-Esp1.6



Fonte: FALCÓN (2015) adaptado pelo autor (2021)

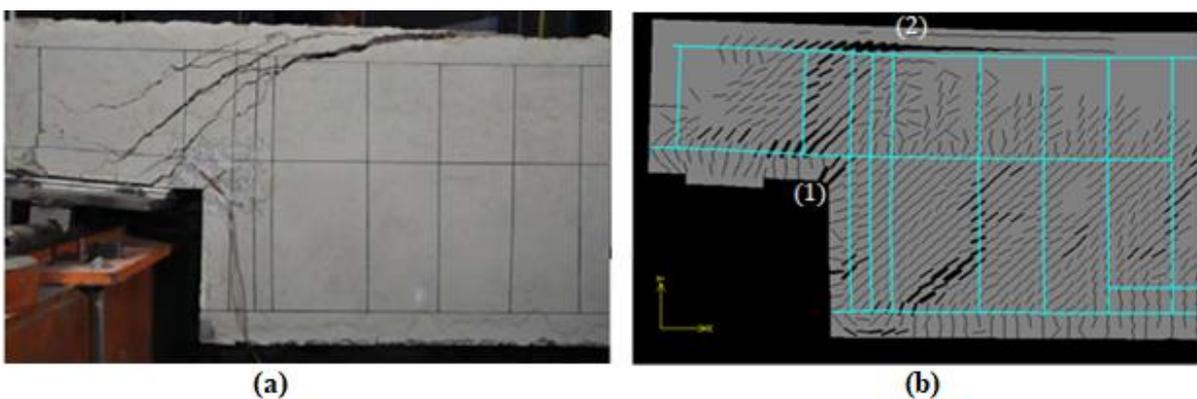
Figura 60 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Falcón-Esp1.6



Fonte: O autor (2021)

Os panoramas de fissuração apresentados pela peça no experimento e na modelagem, no momento da ruptura, são expostos na Figura 61. Em ambos os casos as fissuras se iniciam a partir do canto reentrante (1), desenvolvem-se num ângulo aproximado de 45° até atingir a zona nodal no topo da armadura de suspensão. Conforme a progressão do carregamento ocorre, observa-se que a deformação do concreto na parte superior da armadura de suspensão se intensifica, devido ao fluxo compressivo advindo da biela inclinada, provocando um levantamento do recobrimento acima das armaduras tracionadas (2).

Figura 61- Padrão de fissuração comparativo para o dente Falcón-Esp1.6

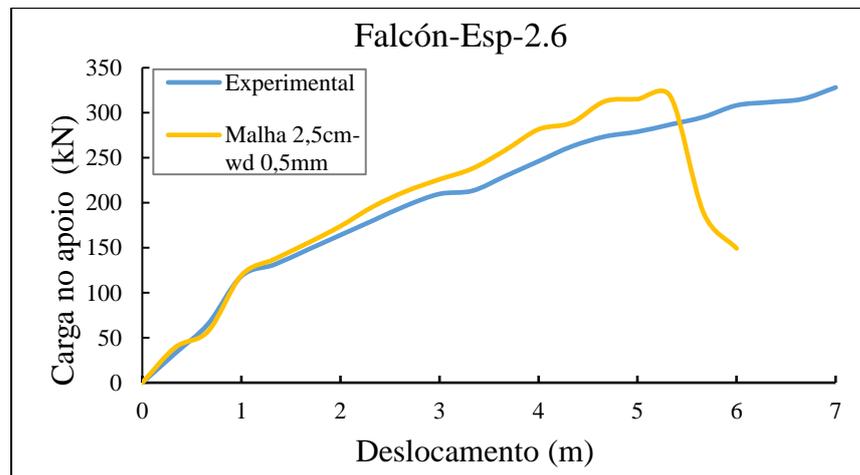


Fonte: (a) FALCÓN (2015); (b) o autor (2021)

O modelo numérico Falcón-Esp 2.6, que possui uma armadura de suspensão vertical e inclinada num ângulo de 47° e uma relação $a/d = 1,40$, atinge um deslocamento máximo de 5,108 mm, até a ruptura no passo 52, com um carregamento no apoio de 317,9 kN. As primeiras fissuras surgem no passo 4, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 71,30 kN, com aberturas de 0,0437 mm. Primeiramente, o modelo começa a atingir o processo de plastificação da armadura de suspensão vertical, com a tensão de 544,10 MPa no passo 45, e no passo seguinte, a armadura inclinada alcança a tensão de escoamento, com uma carga de 306,60 kN no apoio. A falha da peça se dá após o escoamento das armaduras de suspensão, e a armadura do tirante principal do dente não chega ao escoamento, o que indica um possível superdimensionamento.

Analisando-se dados experimentais para o Falcón-Esp 2.6, a curva que relaciona a carga no apoio e o deslocamento no meio do vão mostra deslocamento e carga última, maiores para o ensaio, iguais, respectivamente, a 7,28 mm e 328,09 kN. Comparando-se os modelos numérico e experimental (Figura 62), é possível perceber que, embora os traçados inicialmente sejam coincidentes, a partir do segundo milímetro de deslocamento, o carregamento para o modelo numérico assume valores maiores e rompe de forma mais antecipada, ainda que com carga de ruptura próxima ao experimental.

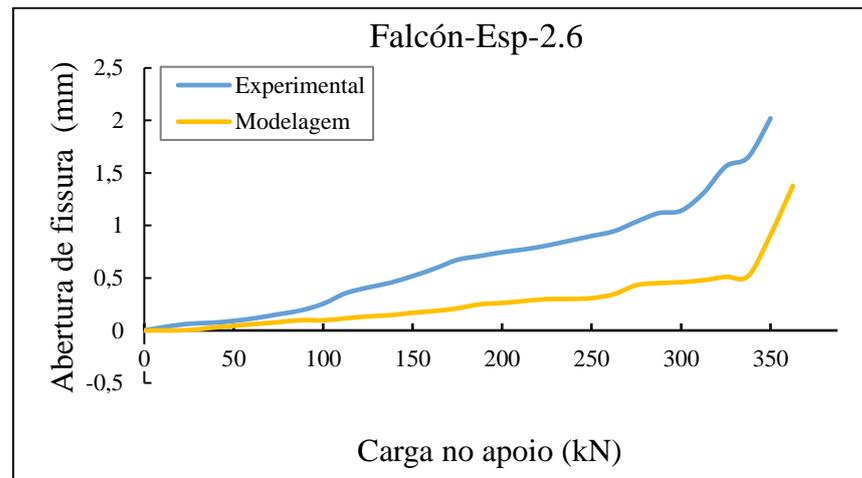
Figura 62 - Curva carregamento *versus* deslocamento do dente Falcón-Esp2.6



Fonte: O autor (2021)

A partir dos dados de abertura de fissura, ilustrados na Figura 63, nota-se que experimentalmente a abertura para a carga máxima de 328,09 kN é de 2,02 mm. A modelagem conserva valores menores, quanto ao tamanho das fissuras, aumentando as dimensões ao se aproximar da carga de ruptura, atingindo uma abertura máxima de 1,377 mm.

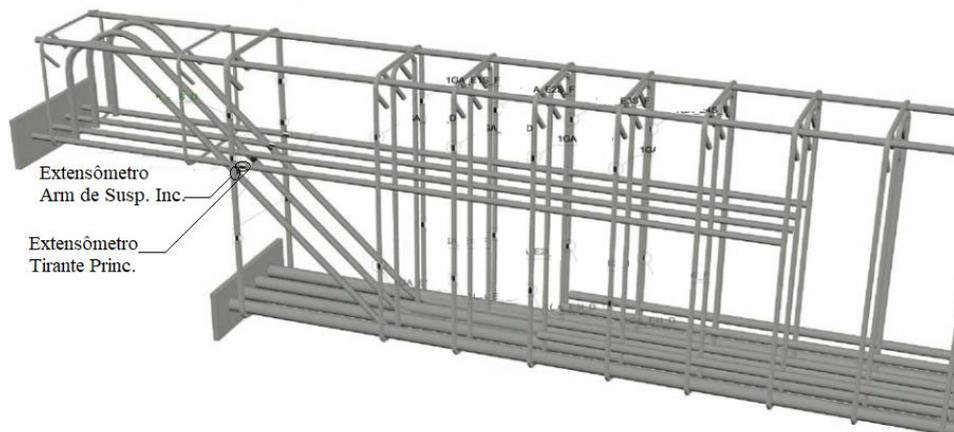
Figura 63 - Curva abertura de fissura *versus* carga no apoio Falcón-Esp2.6



Fonte: O autor (2021)

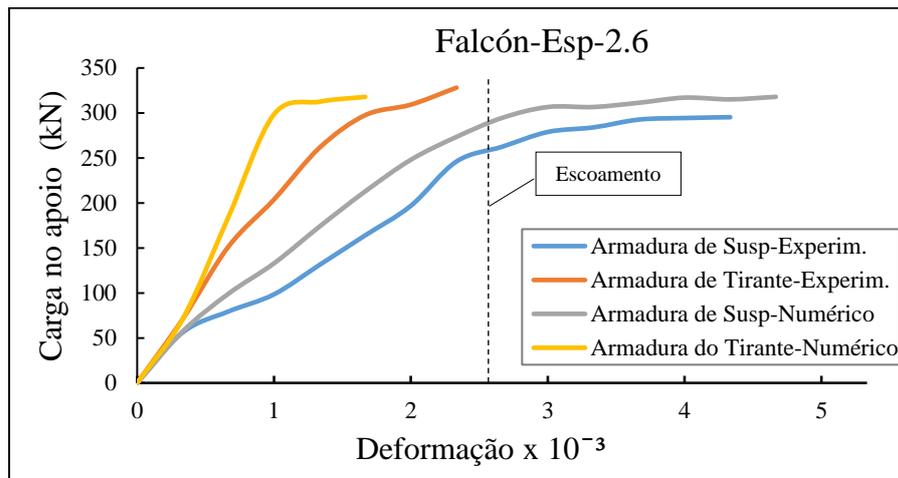
A Figura 64 indica os pontos do dente Falcón-Esp 2.6 onde foram analisadas as deformações nas armaduras de suspensão inclinada e do tirante principal do dente por meio de extensômetros. O comparativo da carga no apoio *versus* as deformações medidas nas armaduras de suspensão e na armadura principal do dente é ilustrado na Figura 65. Nota-se uma relação adequada entre o comportamento das armaduras ensaiadas experimentalmente e as do modelo numérico, sendo que em ambas a armadura do tirante principal apresenta deformações menores. As armaduras inclinadas absorvem bastante tensão, chegando ao escoamento, logo é observada uma deformação considerável. Na simulação, as deformações chegaram a valores máximos de $5,324 \times 10^{-3}$ para a armadura de suspensão e $1,171 \times 10^{-3}$ para o aço no tirante principal do dente, no caso dos ensaios, são encontrados valores de $4,57 \times 10^{-3}$ e $2,2 \times 10^{-3}$, respectivamente.

Figura 64 - Localização dos extensômetros para o Falcón-Esp2.6



Fonte: FALCÓN (2015) adaptado pelo autor (2021)

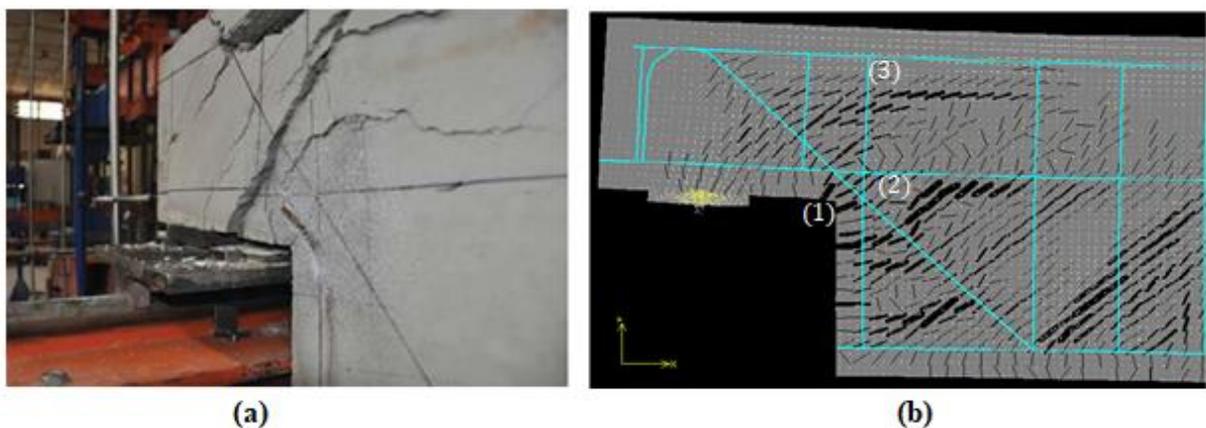
Figura 65 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Falcón-Esp2.6



Fonte: O autor (2021)

Os panoramas de fissuração apresentados pela peça no experimento e na modelagem, no momento da ruptura, são expostos na Figura 66. Comparando-se com o espécime anterior, é observado que as fissuras também se iniciam a partir do canto reentrante (1), porém a armadura diagonal resiste de uma forma mais adequada à propagação das mesmas, sendo a fissuração retardada e atingindo grandezas menores, como é exposto na curva da Figura 63. Após se alinhar ao tirante horizontal (2), com a progressão do carregamento, a fissuração é desviada pela armadura inclinada e obedece uma tendência paralela às armaduras dos porta estribos superiores (3).

Figura 66 - Padrão de fissuração comparativo para Falcón-Esp2.6



Fonte: (a) FALCÓN (2015); (b) o autor (2021)

O resumo dos resultados para os modelos simulados a partir dos dados de FALCÓN *et al.* (2019) são apresentados na Tabela 23. Verifica-se que os modelos onde a armadura de

suspensão foi disposta inclinada com 47° registraram uma carga de ruptura superior, bem como a resistência à compressão do concreto mais elevada, no caso do Falcón-Esp2.6, contribuiu para uma maior capacidade de suporte. Essas simulações, com a armadura na diagonal, também apresentaram uma fissuração com progresso de abertura mais moderado, mostrando uma redistribuição mais adequada das tensões.

Tabela 23 - Resumo dos resultados para FALCÓN *et al* (2019)

Mod.	f'_c (MPa)	Relação a/d	Arm. suspensão	Carga máx. Modelag em (kN)	Carga máx. Exp. (kN)	Abertura de fissura máx. Modelagem (mm)	Abertura de fissura máx. Exp. (mm)	Modo de ruptura
Falcón- Esp1.6	31	1,12	Vertical	282,7	250,9	2,159	1,651	Escoamento da Arm. de Susp. e <i>spalling</i> do concreto
Falcón- Esp2.6	38,3	1,40	Diagonal	317,9	328	1,377	2,021	Escoamento da Arm. de Susp.

Fonte: O autor (2021)

4.2 Modelos simulados considerando os normativos nacionais

Como visto na seção 2.51 deste trabalho, as normas brasileiras que norteiam o projeto e execução de dentes de concreto são as NBR's 9062 (2017) e 6118 (2014). É orientado que para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$) se proceda o dimensionamento segundo o modelo de bielas e tirantes e para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$) o dimensionamento é feito pelo modelo de atrito-cisalhamento, supondo a ruptura ao longo do plano de ligação do dente com a viga. Com o objetivo de aprofundar as análises frente às recomendações normativas nacionais, foram dimensionados e modelados oito espécimes, utilizando-se como suporte os dados das vigas ensaiadas por FALCÓN *et al* (2015). Neste caso, foram mantidas as alturas das vigas e dos dentes ensaiados pelo autor e variou-se o comprimento do dente, atingindo quatro relações a/d distintas (0,25; 0,5; 0,75 e 1), essas quatro geometrias foram dimensionadas tanto pelo modelo de escoras e tirantes quanto por atrito-cisalhamento, transpondo as orientações normativas, com o propósito de verificar a adequação dos resultados.

Os modelos foram dimensionados considerando a ação de uma força vertical F_d de 280 kN e um valor de resistência à compressão do concreto de 35 MPa. Utilizou-se para o modelo de atrito-cisalhamento o coeficiente de atrito $\mu = 1,4$ e foram assumidos valores de f_{yd} iguais a 435 MPa. As Tabela 24 e 25 trazem o dimensionamento das áreas de aço requeridas,

conforme as orientações das normas para os modelos de atrito-cisalhamento e bielas e tirantes, respectivamente.

Tabela 24 - Dimensionamento da armadura pelo modelo atrito-cisalhamento

Modelos	Geometria do dente				Ação		Atrito-cisalhamento								
	a (mm)	d (mm)	a/d	ℓ (mm)	F_d (kN)	H_d (kN)	A_{sv} (mm ²)	$A_{s,tir}$ (mm ²)	$u > 0,04$	$A_{s,sus}$ (mm ²)	$2/3 d$ (mm)	s (mm)	$A_{s,cost\ min}$ (mm ² /mm)	$A_{s,cost}$ (mm ²)	$A_{s,trans}$ (mm ²)
a/d0.25AC	62,5	250	0,25	160	280	44,8	367,82	491,46	0,09	643,68	166,67	55,56	0,38	40,87	225
a/d0.5AC	125,0	250	0,50	220	280	44,8	367,82	491,46	0,09	643,68	166,67	55,56	0,38	40,87	225
a/d0.75AC	187,5	250	0,75	282,5	280	44,8	367,82	491,46	0,09	643,68	166,67	55,56	0,38	40,87	225
a/d1AC	250,0	250	1,00	370	280	44,8	367,82	491,46	0,09	643,68	166,67	55,56	0,38	40,87	225

Fonte: O autor (2021)

Tabela 25 - Dimensionamento da armadura pelo modelo de escoras e tirantes

Modelos	Geometria do dente				Ação		Escoras e tirantes								
	a (mm)	d (mm)	a/d	ℓ (mm)	F_d (kN)	H_d (kN)	A_{sv} (mm ²)	$A_{s,tir}$ (mm ²)	$u > 0,04$	$A_{s,sus}$ (mm ²)	$2/3 d$ (mm)	s (mm)	$A_{s,cost\ min}$ (mm ² /mm)	$A_{s,cost}$ (mm ²)	$A_{s,trans}$ (mm ²)
a/d0.25BT	62,5	250	0,25	160	280	44,8	270,48	394,13	0,07	643,68	166,67	55,56	0,38	24,04	225
a/d0.5BT	125	250	0,5	220	280	44,8	463,68	587,33	0,10	643,68	166,67	55,56	0,38	41,22	225
a/d0.75BT	187,5	250	0,75	282,5	280	44,8	656,88	780,53	0,13	643,68	166,67	55,56	0,38	58,39	225
a/d1BT	250	250	1	370	280	44,8	850,08	973,73	0,17	643,68	166,67	55,56	0,38	75,56	225

Fonte: O autor (2021)

O comprimento de ancoragem do tirante, especificado pela NBR 6118 (2014), é obtido por meio da Eq. (13), onde $f_{bd} = 0,7(0,3f_{ck}^{\frac{2}{3}})/1,4$. Para barras nervuradas e condição de má aderência, utilizam-se os coeficientes η_1 e η_2 iguais, respectivamente, a 2,25 e 0,7. Logo:

$$\ell_b = 16 \frac{435}{4 \times 3,2064} = 543 \text{ mm} \quad (67)$$

O início da ancoragem do tirante é suposto afastado do primeiro estribo uma distância igual a diferença ($d_{vig} - d$), neste caso 300 mm. Para a armadura de costura, a ancoragem é calculada como sendo $1,5\ell_b$, totalizando 814mm, disposta a partir do canto reentrante. As armaduras do corpo das vigas foram simuladas conforme os Espécimes 1.6 e 2.6 de FALCÓN *et al* (2015). Sendo assim, este detalhamento pode ser conferido na Tabela 20 deste trabalho.

Nos dentes dimensionados mediante as orientações da NBR 9062 (2017) para o modelo de atrito-cisalhamento, a verificação do concreto foi procedida em função dos limites de referência da tensão de cisalhamento indicados na Equação (7), onde se observou $\tau_{wd} = 4,48 \text{ MPa}$, $\tau_{wu} = 6,079 \text{ MPa} \leq 7,714 \leq 8 \text{ MPa}$. Para os modelos concebidos via escoras e tirantes, a tensão de compressão na biela inclinada foi calculada conforme a seguinte equação:

$$\sigma_{cd} = \frac{F_d}{bd} 5,55 \sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \quad (68)$$

Limitando-se o valor da tensão na biela em $0,85f_{cd}$, conforme a indicação da NBR 9062 (2017) para cargas indiretas, e colocando a equação (68) em termos da tensão de referência, obtém-se a tensão última de cisalhamento, dada por:

$$\tau_{wu} = \frac{0,153f_{cd}}{\sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} \quad (69)$$

Logo, para os espécimes dimensionados por meio do método de escoras e tirantes, a verificação do esmagamento da biela pode ser examinada na Tabela 26, onde constata-se que o modelo a/d1BT, com relação $a/d = 1$, não alcançou a verificação prescrita em norma quanto ao esmagamento do concreto.

Tabela 26 - Verificação do concreto para do método de escoras e tirantes

Modelo	a/d	σ_{cd} (MPa)	$0,85f_{cd}$ (MPa)	τ_{wd} (MPa)	τ_{wu} (MPa)
a/d0.25BT	0,25	23,22	30,36	4,48	5,73
a/d0.5BT	0,5	25,60	30,36	4,48	5,20
a/d0.75BT	0,75	29,13	30,36	4,48	4,57
a/d1BT	1	33,45	30,36	4,48	3,98

Fonte: O autor (2021)

Após realizado o dimensionamento, para a modelagem do aço e do concreto foram utilizados os mesmos elementos finitos empregados nas simulações anteriores, bem como a malha de 2,5 cm, praticada nos demais casos. Os parâmetros dos materiais, seguindo as especificidades definidas para o caso desta análise, são observados abaixo:

c) Concreto

Modelo constitutivo SBETA;

Resistência cúbica do concreto: $f'_{cu} = 41,17$ MPa;

Resistência à compressão do concreto : $f'_c = 35$ MPa;

Resistência à tração do concreto : $f'_t = 2,86$ MPa;

Módulo de elasticidade : $E_c = 34,41$ GPa;

Coefficiente de poisson: $\nu = 0,2$;

Função de compressão-tração: Linear;

Modelo de fissuração: Fixa;

Fator de redução da resistência do concreto fissurado: $c = 0,8$;

d) Aço

Espécimes 1 e 2: Modelo constitutivo bilinear;

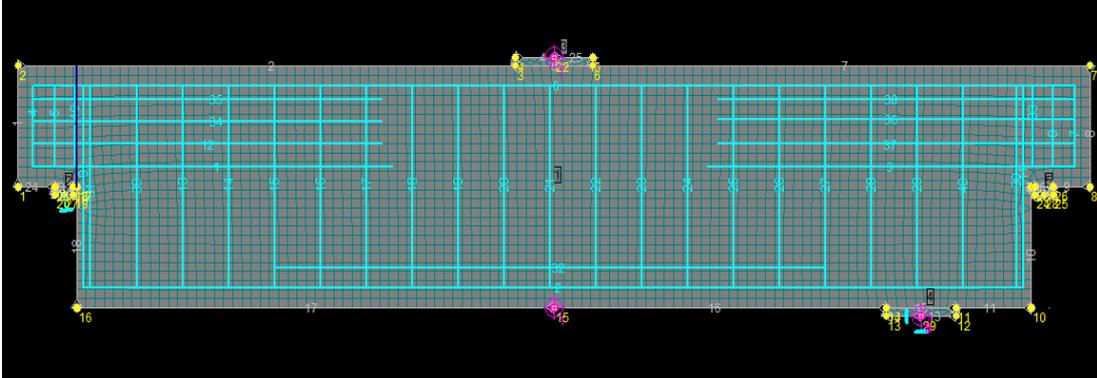
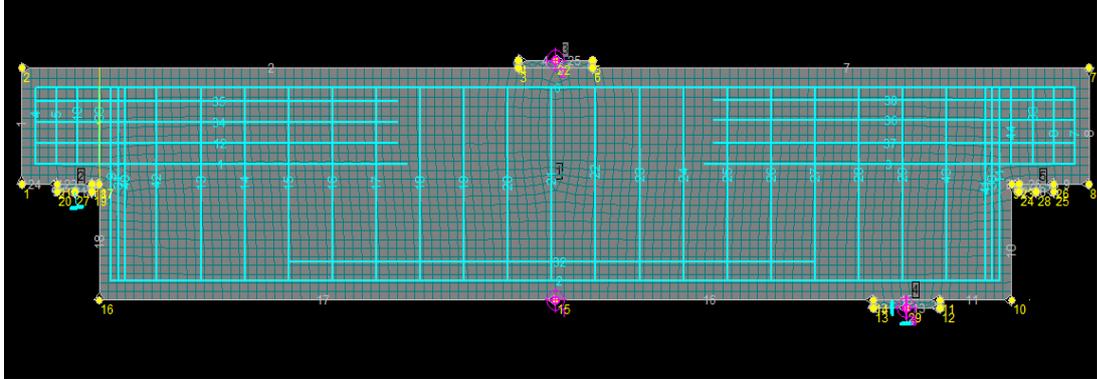
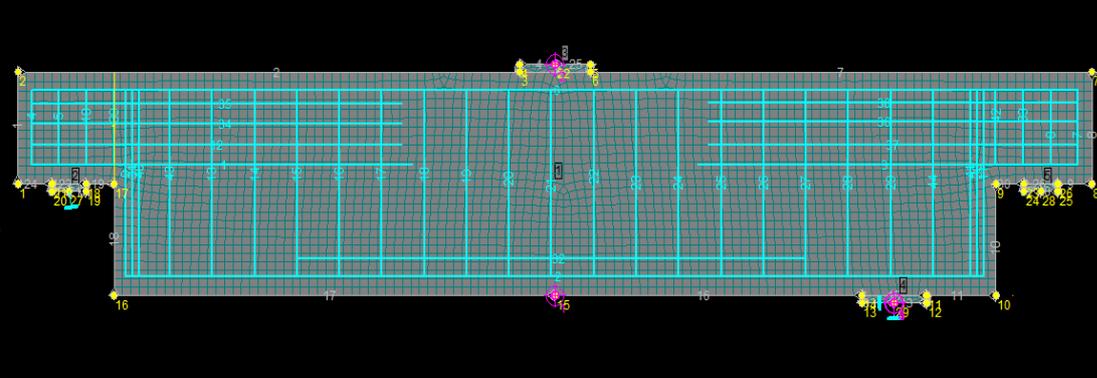
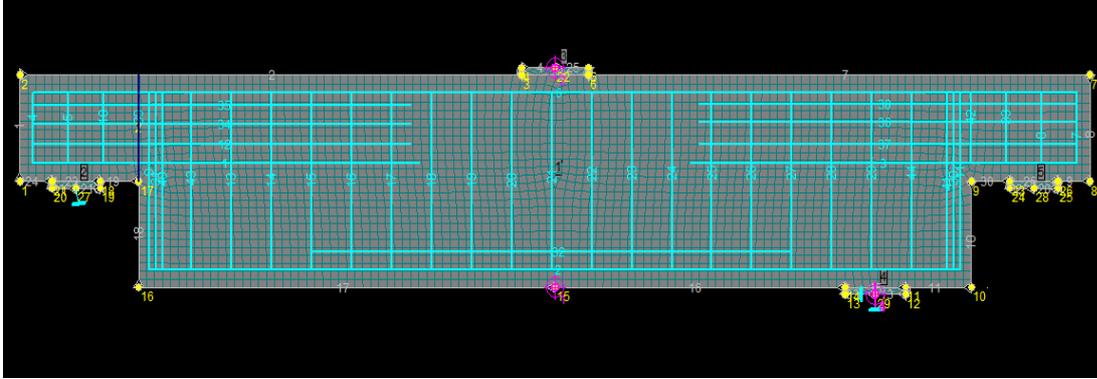
Módulo de elasticidade : $E_c = 210$ GPa;

Tensão de escoamento: $\sigma_y = 435$ MPa.

Para os pontos de aplicação da carga e os pontos de apoio, também foram supostas placas com características elástico-lineares. Além disso, os casos de carregamento da estrutura foram simulados por meio de um deslocamento prescrito no meio do vão e as condições de suporte foram modeladas de modo que as vigas ficassem biapoiadas, com um apoio do segundo gênero e o apoio do dente inclinado $9,09^\circ$, limitando o deslocamento vertical, com o intuito de simular a carga horizontal H_d . O exame das combinações dos casos de carregamento também foi previsto, adotando-se os mesmos critérios das modelagens anteriores, com um limite de 500 interações por passo e 100 passos de análise para os espécimes.

Os pontos de monitoramento de carga foram localizados no ponto de aplicação do deslocamento prescrito, medindo o carregamento, e no apoio inferior da viga, aferindo a reação vertical e horizontal no apoio. De modo que, por meio das equações de equilíbrio, se chegasse a carga F_d . No meio do vão na parte inferior da viga, foi medido o deslocamento para obtenção da curva carregamento *versus* deslocamento. A Figura 67 mostra a geometria dos modelos e os pontos de análise de cada peça.

Figura 67 – Geometria e monitoramento dos modelos simulados

Modelos	Geometria
a/d0.25AC e a/d0.25BT	
a/d0.5AC e a/d0.5BT	
a/d0.75AC e a/d0.75BT	
a/d1AC e a/d1BT	

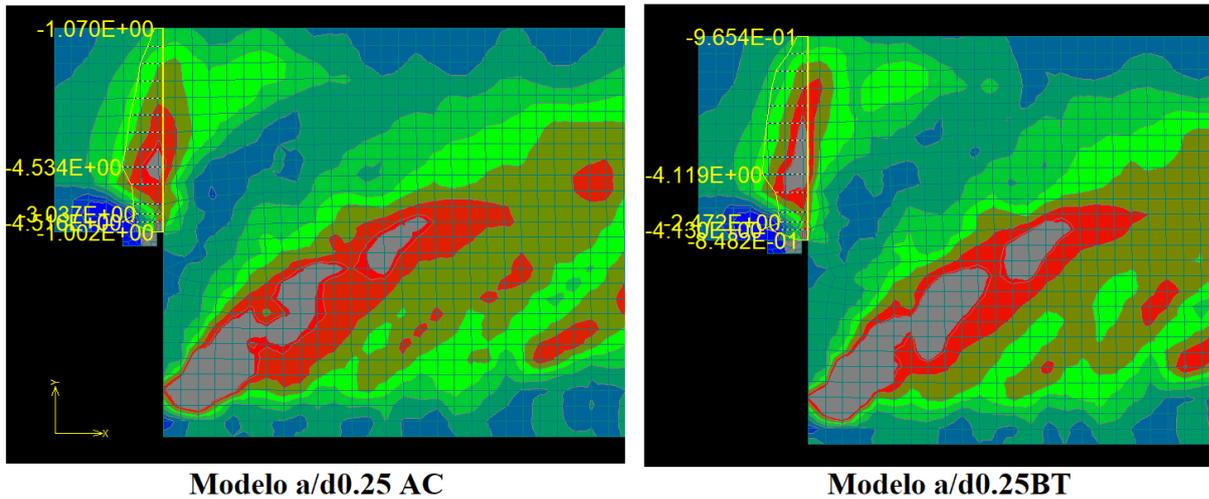
Fonte: O autor (2021)

Para o modelo a/d0.25AC, dimensionado por atrito-cisalhamento e relação $a/d = 0,25$, o deslocamento máximo atingido é de 3,83 mm, até a ruptura no passo 39, com um carregamento no apoio de 288,8 kN. As primeiras fissuras surgem no passo 3, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 67,1 kN, com aberturas de 0,0228 mm. O modelo não chega a atingir a tensão de escoamento da armadura de suspensão ou do tirante principal, atingindo, respectivamente, os valores máximos de 418,7 MPa e 360,2 MPa no passo de ruptura. O modelo a/d0.25BT, de mesma relação a/d , pelo cálculo do modelo de escoras e tirantes foi configurado com uma área de aço do tirante principal menor, totalizando 394,13mm². A peça atingiu a ruptura no passo 37, com um deslocamento no meio do vão de 3,63 mm e uma carga máxima no apoio menor, chegando a 271,7 kN. O panorama de fissuração se equivale com o primeiro modelo, iniciando com abertura de 0,0233 mm para um carregamento de 67,1 kN. As armaduras de suspensão e do tirante principal também não chegam a atingir a tensão de escoamento, alcançando valores de 406,9MPa e 391,3 MPa, respectivamente.

Comparando-se o comportamento da biela comprimida, é observado que em ambos os modelos a/d0.25AC e a/d0.25BT as tensões se concentram próximo ao canto reentrante, e na parte no canto inferior do dente (Figura 68). No último passo de carga, o modelo a/d0.25AC atinge a tensão de cisalhamento de 4,534 MPa, na faixa de ligação entre o corpo da viga e o dente. O modelo a/d0.25BT alcança uma tensão limite menor, chegando a 4,13 MPa. O padrão de fissuração é semelhante para ambos os modelos, no entanto o modelo a/d0.25BT exhibe maiores aberturas na junção da peça, como pode ser observado na Figura 69. O primeiro modelo apresenta uma abertura máxima de fissura de 0,615 mm, na região 1, enquanto para a segunda simulação esta grandeza é superior e perfaz um valor de 0,768 mm, localizada no canto reentrante.

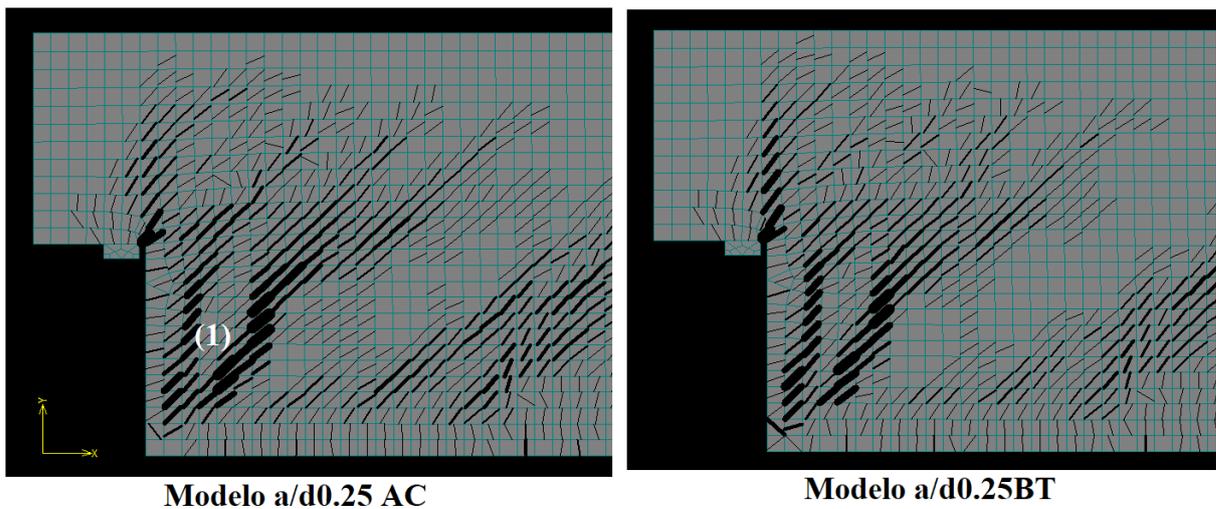
Observando-se os mapas de calor, os padrões de fissuração e o comportamento das armaduras, nota-se que as peças chegam a ruína segundo o mesmo modo, em virtude da tensão diagonal que se origina na parte inferior da viga, evidenciando-se que a segunda simulação não alcança a carga de projeto de $F_d = 280$ kN.

Figura 68 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d0.25AC e a/d0.25BT



Fonte: O autor (2021)

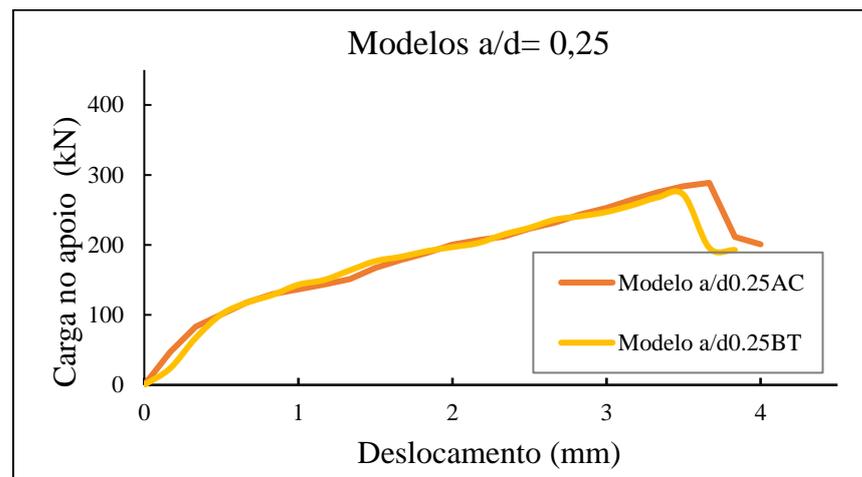
Figura 69 - Padrão de fissuração modelos a/d0.25AC e a/d0.25BT



Fonte: O autor (2021)

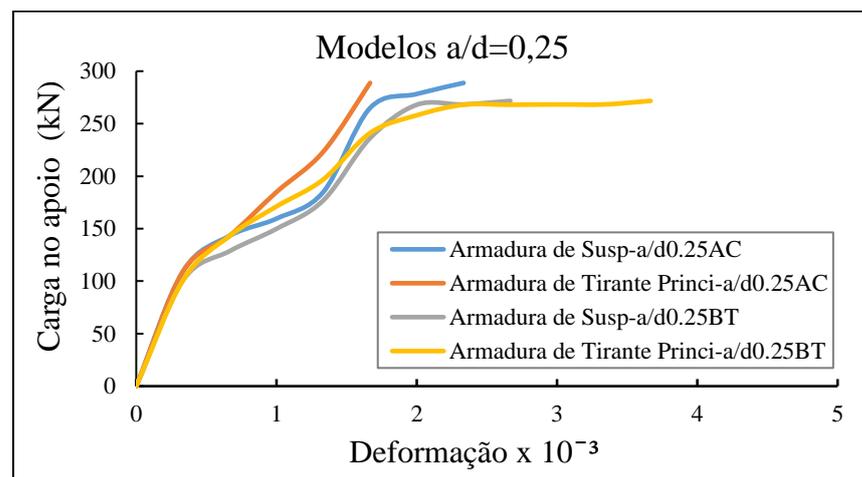
Como pode ser analisado na Figura 70, a curva de carga no apoio *versus* deformação, para os modelos de relação $a/d = 0,25$, demonstra considerável concordância. Todavia, o modelo a/d0.25AC, dimensionado por atrito-cisalhamento, manifesta um melhor desempenho, atingindo valores superiores tanto de carga quanto de deslocamento. A Figura 71 apresenta a curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos a/d0,25, onde se observa comportamentos próximos sem o escoamento de nenhuma delas.

Figura 70 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos a/d0,25



Fonte: O autor (2021)

Figura 71 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos a/d0,25



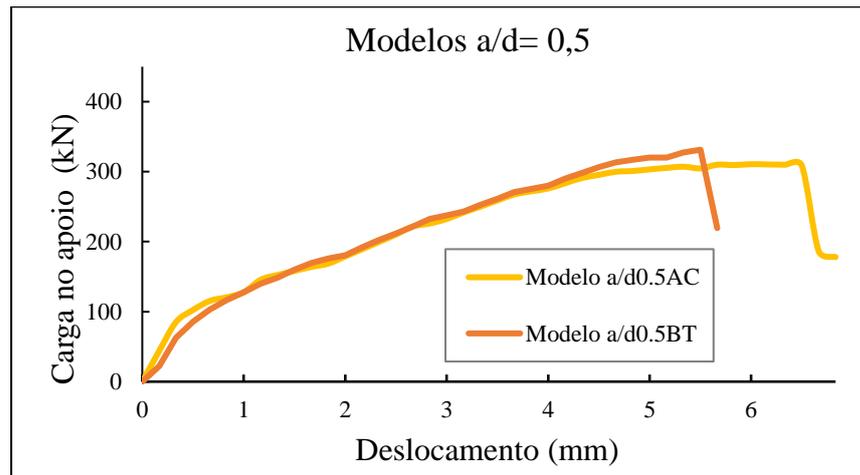
Fonte: O autor (2021)

O modelo a/d0.5AC obteve o deslocamento máximo de 6,519 mm, até a ruptura no passo 66, com um carregamento no apoio de 308,8 kN, e a fissuração se inicia no passo 3, a partir do canto reentrante, para um carregamento de 62,8 kN, com aberturas de 0,0756 mm. A primeira camada da armadura de suspensão atinge a tensão de escoamento no passo 30, com o carregamento F_d no apoio de 225,9kN, já a armadura do tirante principal alcança a tensão de escoamento de 435 MPa no passo 45, quando a carga no elemento é de 291 kN.

Conforme pode ser notado na curva carga no apoio *versus* deformação, ilustrada na Figura 72, o dimensionado pelo método de escoras e tirantes, atinge resultados similares ao modelo anterior até a carga de projeto. Contudo é observado que o modelo a/d0.5BT rompe no passo 56 com um deslocamento máximo de 5,515 mm e para a carga de 331,4kN. Neste caso,

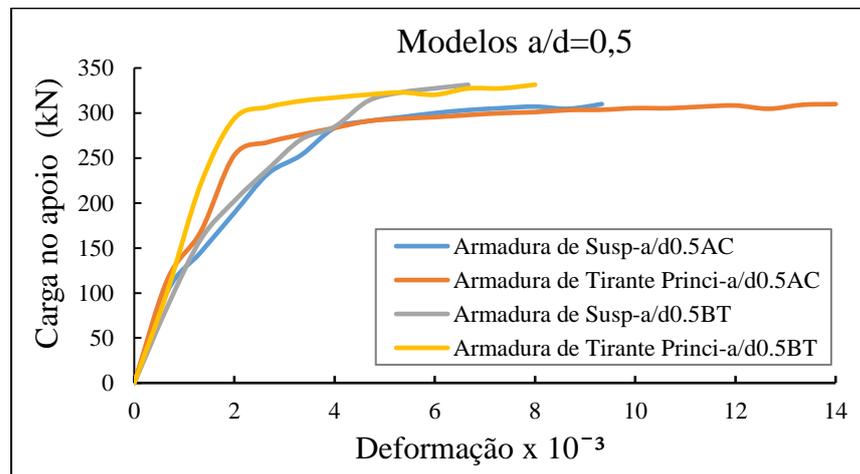
a fissuração é registrada inicialmente no passo 3 com 0,0724mm, também para um carregamento de 62,8kN. A armadura do tirante principal atinge a tensão de escoamento no passo 52, quando o carregamento no dente é de 322,8kN, e no caso da armadura de suspensão a tensão de escoamento é atingida no passo 32 para um carregamento de 237,5 kN, conforme ilustrado na Figura 73.

Figura 72 - Curva carga no apoio *versus* deslocamento para modelos de relação $a/d = 0,5$



Fonte: O autor (2021)

Figura 73 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos $a/d = 0,5$

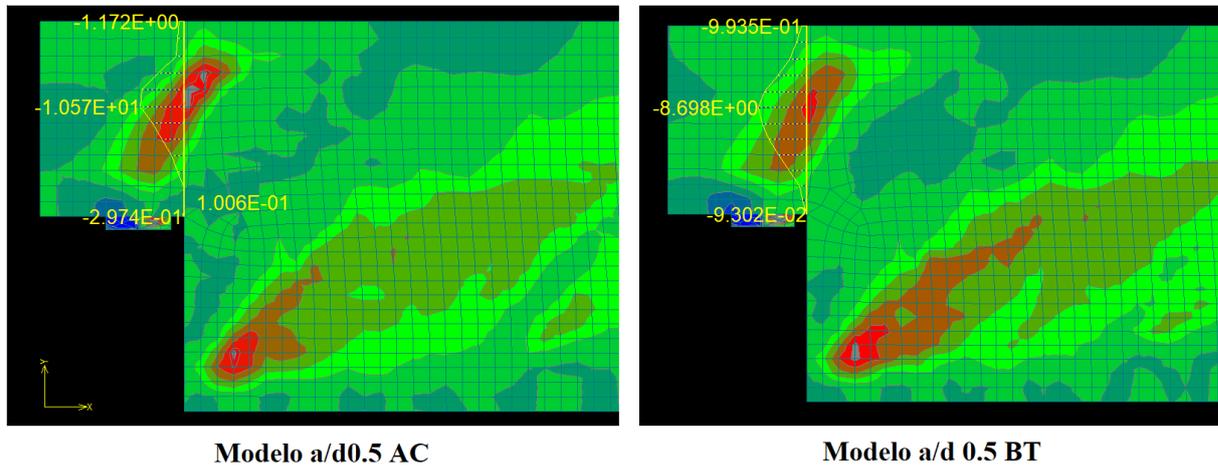


Fonte: O autor (2021)

A ruptura dos dentes se dá devido à tensão diagonal no dente acarretando um esforço excessivo e o escoamento nas barras do tirante. A tensão de cisalhamento na interface é localizada mais acima do canto reentrante e chega a um valor de 10,57 MPa, para o modelo

a/d0.5AC e de 8,69 MPa para o modelo a/d0.5BT, que retarda o processo de ruptura devido a diferença de área de aço empregada no tirante (Figura 74).

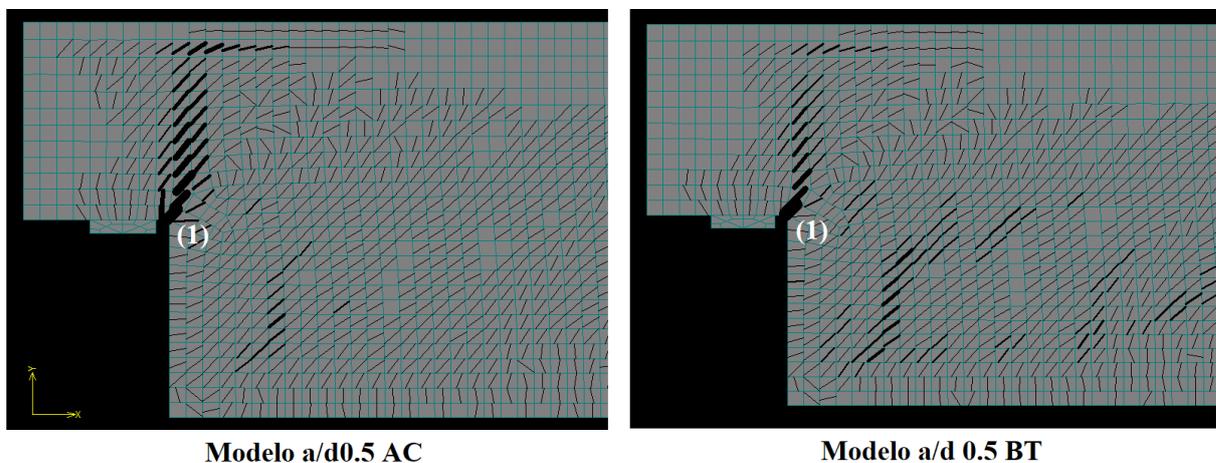
Figura 74 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos dos modelos a/d0.5AC e a/d0.5BT



Fonte: O autor (2021)

A fissuração é propagada de maneira similar para ambos os modelos, iniciando com a angulação de aproximadamente 45° e seguindo verticalmente na ligação do elemento com a viga. Os valores de abertura de fissura são maiores para o primeiro modelo, chegando a 4,237 mm, para o modelo a/d0.5BT o máximo atingido é de 2,664 mm. A fissura de maior grandeza está localizada no ponto 1 das simulações, exatamente no canto reentrante da peça, junção do dente com a viga, como é demonstrado na Figura 75.

Figura 75 - Padrão de fissuração modelos a/d0.5AC e a/d0.5BT

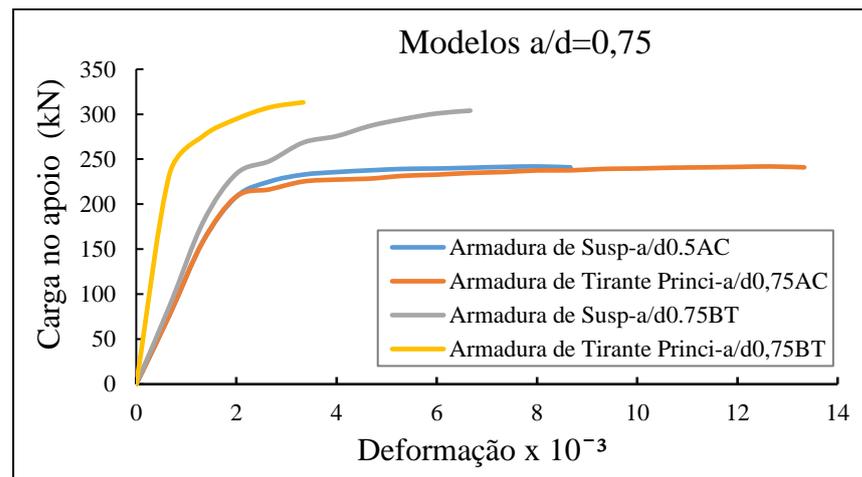


Fonte: O autor (2021)

Os modelos a/d0.75AC e a/d0.75BT possuem relação $a/d = 0,75$, sendo assim as normas brasileiras indicam o dimensionamento pelo método de escoras e tirantes. Neste estudo, o modelo a/d0.75AC, dimensionado pelo modelo de atrito-cisalhamento, atingiu o deslocamento máximo de 4,934 mm, rompendo no passo 51, com um carregamento máximo no apoio de 241,9 kN. Por volta do carregamento de 56,4 kN surgem as primeiras fissuras, com aberturas de 0,068 mm a partir do canto reentrante. O modelo atinge a tensão de escoamento da armadura de suspensão no passo 42, com um carregamento de 235,7 kN, a armadura do tirante principal atinge a tensão de escoamento de 435 MPa, no passo 35, quando o carregamento na peça é de 221,1 kN.

O modelo a/d0.75BT, concebido conforme a NBR 9062 (2017) pelo modelo de bielas e tirantes, foi calculado com uma área de aço do tirante principal maior. A peça atingiu a ruptura no passo 58, com um deslocamento no meio do vão de 5,714 mm e uma carga máxima no apoio de 313 kN. O início da fissuração se assemelha com o modelo anterior, iniciando com abertura de 0,0448 mm para um carregamento de 59,7 kN. A armadura de suspensão alcança a tensão de escoamento no passo 44, quando o carregamento no apoio é de 268,5 kN, e a tensão no tirante principal atinge a tensão de escoamento no passo 56, com a carga de 307,6 kN, já próxima ao carregamento de ruptura. As deformações verificadas nas armaduras são retratadas na Figura 76.

Figura 76 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos a/d 0,75

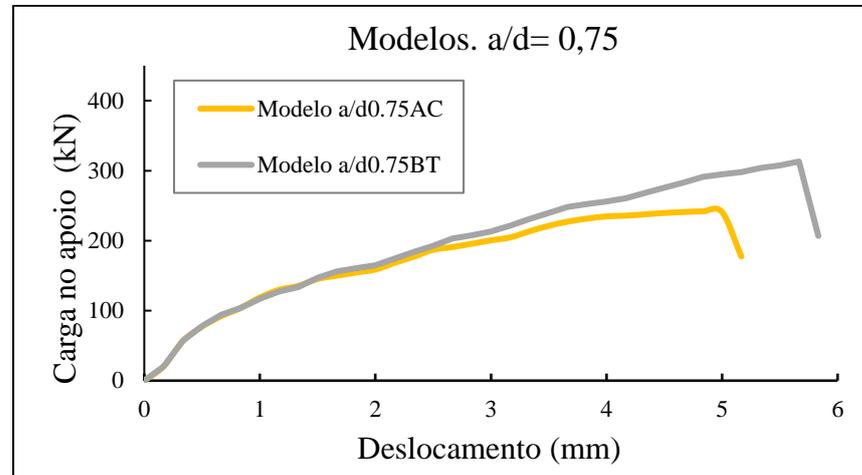


Fonte: O autor (2021)

A Figura 77 expõe os comportamentos dos modelos de $a/d = 0,75$ para as duas abordagens estudadas. Observa-se que, inicialmente há uma compatibilidade de desempenho,

mas, posteriormente, o modelo a/d0.75BT, dimensionado pelo método de escoras e tirantes, detêm uma curva com maiores valores de carga e com um maior grau de deslocamento.

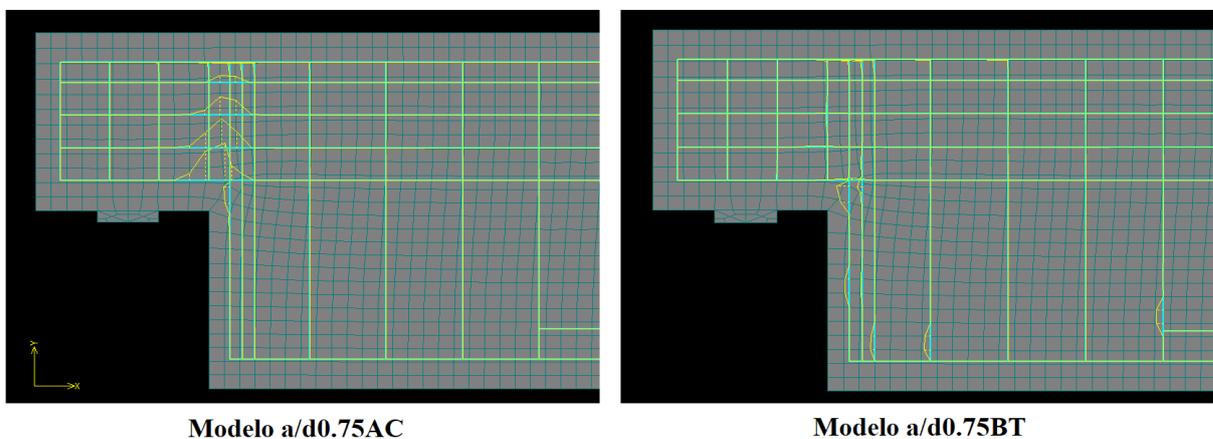
Figura 77 - Curva carga no apoio *versus* deslocamento para modelos de relação a/d = 0,75



Fonte: O autor (2021)

As simulações demonstraram que as armaduras do modelo a/d0.75AC totalizam deformações plásticas consideravelmente maiores do que o modelo dimensionado pelo método de escoras e tirantes. Observando o comportamento da armadura de suspensão, verifica-se que no último passo, a armadura do primeiro modelo, chega a deformar plasticamente $5,934 \times 10^{-3}$, enquanto o modelo a/d0.75BT deforma $5,592 \times 10^{-3}$. Já para o tirante principal, o modelo a/d0.75AC deforma $3,404 \times 10^{-2}$, enquanto o modelo a/d0.75BT $9,0 \times 10^{-4}$, como visto na Figura 78.

Figura 78 - Deformação plástica da armadura no passo de ruptura



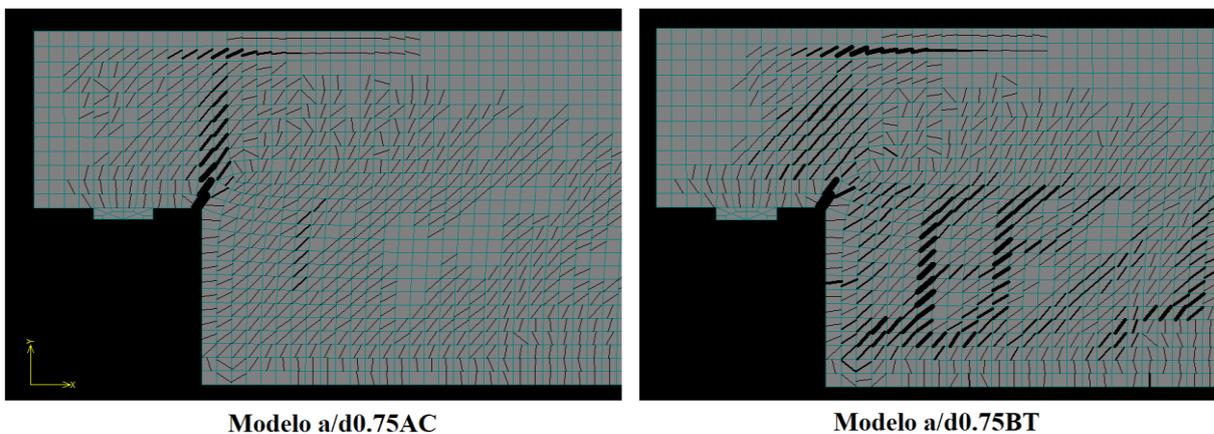
Modelo a/d0.75AC

Modelo a/d0.75BT

Fonte: O autor (2021)

Os esquemas das fissuras dos modelos de relação $a/d = 0,75$ no momento da ruptura se apresentam bem distintos. O modelo dimensionado por atrito-cisalhamento concentrou as fissuras na ligação do dente com o corpo da viga, com aberturas importantes na parte superior. O modelo dimensionado pelo método de escoras e tirantes também contou com fissuras acima da armadura de suspensão, porém o padrão de fissuração foi mais uniforme e melhor distribuído, com maiores valores de aberturas na junção do canto reentrante, conforme ilustrado na Figura 79. O modelo $a/d0.75AC$ apresenta uma abertura máxima de 4,274 mm, já o modelo $a/d0.75BT$ apresenta valores consideravelmente inferiores, chegando à medida máxima de 1,403 mm.

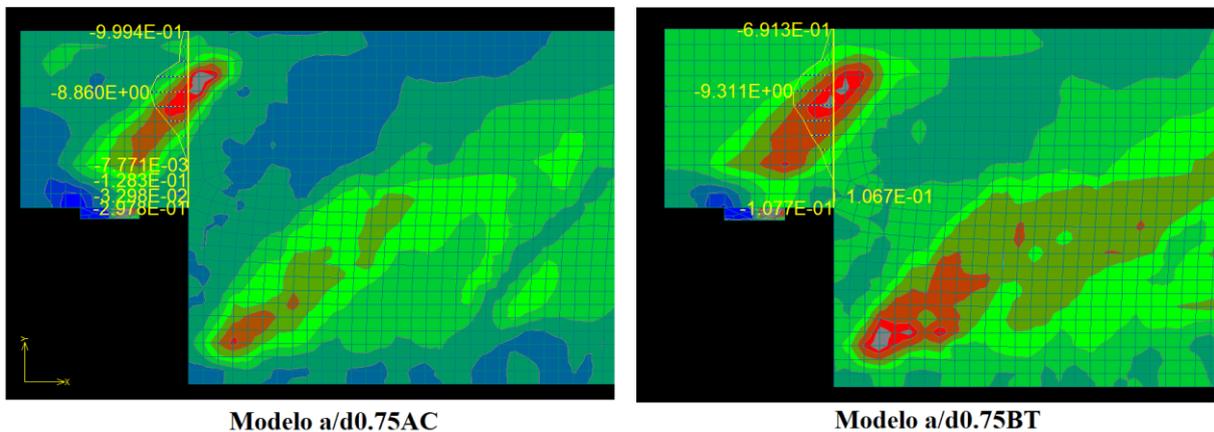
Figura 79 - Padrão de fissuração modelos $a/d0.75AC$ e $a/d0.75BT$



Fonte: O autor (2021)

Observando o traçado das tensões por meio dos mapas de calor dos modelos $a/d = 0.75$, e comparando com os espécimes vistos até então, nota-se uma biela de compressão mais inclinada, que corta a ligação dente-viga numa posição mais elevada (Figura 80). A tensão de cisalhamento máxima na junção dente-viga é maior para o modelo $a/d0.75BT$, alcançando o valor de 9,31 MPa, já o modelo $a/d0.75AC$ entra em colapso em uma tensão cisalhante na ligação dente-viga de 8,86 MPa. O primeiro modelo entra em colapso devido à deformação excessiva da armadura do tirante, levando ao esmagamento do concreto na parte superior do dente. Já o segundo modelo, devido ao escoamento da armadura de suspensão associado ao aumento do lascamento (*spalling*) do concreto. De forma geral o modelo calculado por escoras e tirantes apresenta desempenho manifestadamente melhor, suportando um maior carregamento com uma menor abertura de fissura.

Figura 80 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d0.75AC e a/d0.75BT

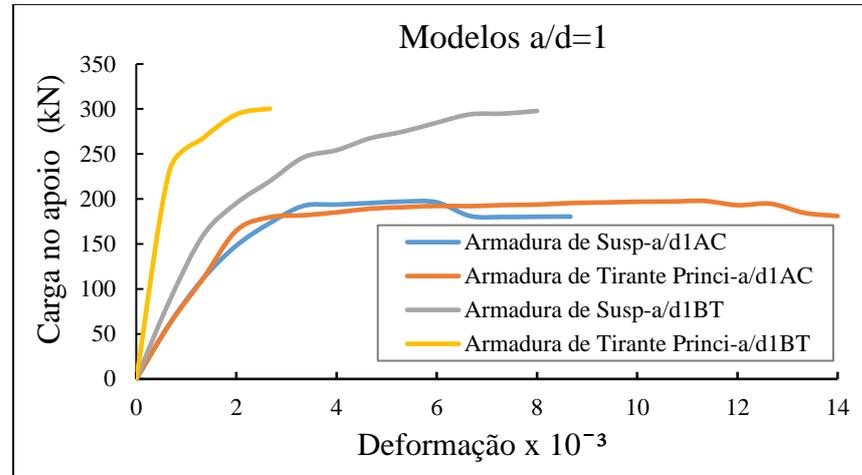


Fonte: O autor (2021)

Os últimos modelos simulados possuem relação $a/d = 1$, desta forma estão no limite superior da NBR 9062 (2017) para dimensionamento via modelo de escoras e tirantes, a partir dessa razão é indicado o cálculo considerando o dente como uma viga em balanço. O modelo a/d1AC, dimensionado pelo modelo de atrito-cisalhamento da NBR 9062 (2017), deslocou no meio do vão um total de 7,845 mm, atingindo a ruptura no passo 80. No último passo, o carregamento no apoio é de 165,1 kN, embora a carga máxima atingida tenha sido de 197,7 kN no passo 52. As primeiras fissuras surgem no canto reentrante com 0,0658 mm para o carregamento de 50,8 kN. Para este modelo a armadura do tirante principal entra em regime de escoamento no passo 34, quando a carga no apoio é de 187,5 kN, posteriormente a armadura de suspensão também atinge sua tensão de escoamento, para uma carga de 196,2 kN, no passo 44.

O modelo a/d1BT, dimensionado com o modelo de bielas e tirantes da NBR 9062 (2017), alcançou o carregamento máximo de 300,5kN, apresentando um deslocamento máximo no meio do vão de 6,32 mm. A fissuração começa a ser evidenciada quando a carga no apoio é de 52kN, com uma abertura de fissura igual a 0,0488 mm. Para esta peça a armadura do tirante principal não chega a atingir a tensão de escoamento de 435 MPa, apresentando uma tensão máxima de 415,9 MPa no passo 64, quando ocorre a ruptura. Por outro lado, a armadura de suspensão alcança a tensão de escoamento no passo 44, quando a carga no apoio é de 246,3 kN. A Figura 81 ilustra as curvas de deformação das armaduras estudadas para os modelos em questão.

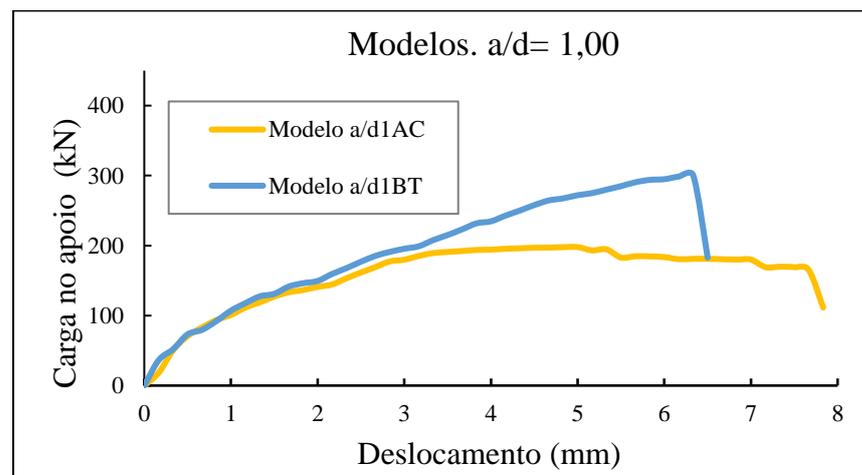
Figura 81 - Curva carga no apoio *versus* deformação da armadura Modelos a/d 1



Fonte: O autor (2021)

As curvas comparativas da Figura 82 apresentam os desempenhos dos modelos de $a/d = 1$ para as duas abordagens em estudo. Nota-se que nos carregamentos iniciais as curvas são aderentes, e a partir da carga de 140 kN o modelo dimensionado por atrito-cisalhamento, começa a manifestar maiores deslocamentos para pouco carregamento, o qual não chega à magnitude dimensionada de 280 kN. O modelo de escoras e tirantes apresenta uma carga de ruptura mais elevada, conforme estimado, com um deslocamento correspondente um pouco menor, quando comparado com o modelo a/d1AC.

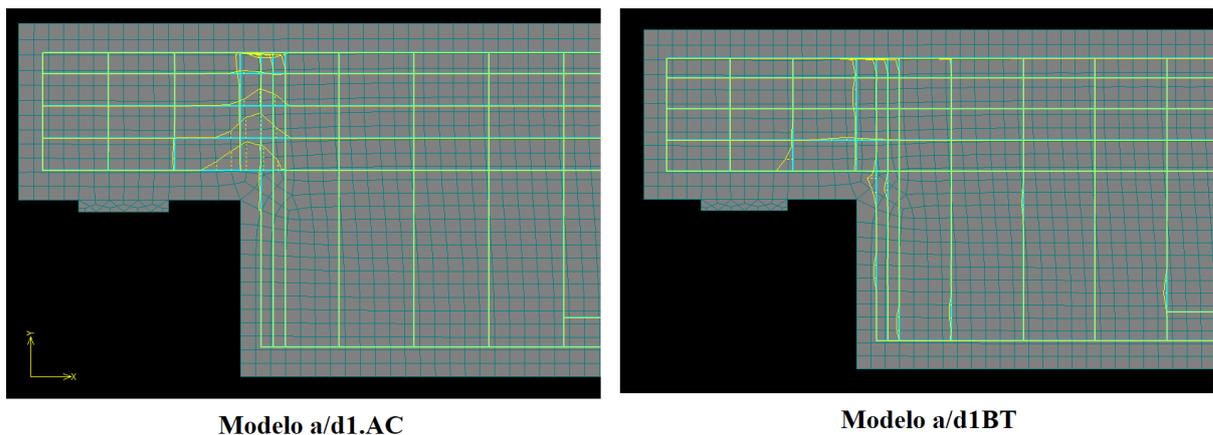
Figura 82 - Curva carga no apoio *versus* deslocamento para modelos de relação a/d = 1



Fonte: O autor (2021)

Com relação às deformações plásticas das armaduras, o monitoramento das simulações demonstra que o modelo a/d1AC totalizou medidas significativamente maiores, chegando a $8,49 \times 10^{-2}$ para a armadura do tirante principal e $7,156 \times 10^{-3}$ para a armadura de suspensão. No modelo a/d1BT verifica-se que os aços do tirante principal, devido a maior área, não chegam a deformar plasticamente e a armadura de suspensão alcança a medida de $6,353 \times 10^{-3}$, os diagramas de deformação plástica são ilustrados na Figura 83.

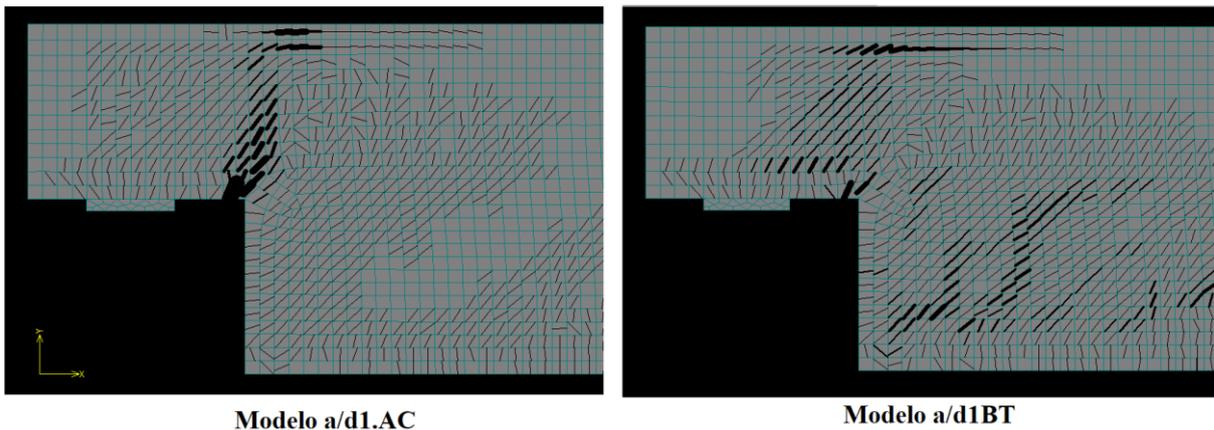
Figura 83 - Deformação plástica da armadura no passo de ruptura



Fonte: O autor (2021)

O padrão de fissuração na ruptura dos modelos de relação $a/d = 1$ variou de maneira considerável (Figura 84). A simulação dimensionada por atrito-cisalhamento, concentrou as fissuras na ligação do dente com o corpo da viga, seguindo a linha potencial de falha por cisalhamento direto na junção do elemento. Enquanto o modelo a/d1BT, calculado pelo método de escoras e tirantes, demonstrou fissuras mais distribuídas, seguindo o traçado da biela de compressão com aberturas em destaque acima da armadura de suspensão e no canto reentrante. O modelo a/d1AC apresenta uma abertura máxima de 11,46 mm, já o modelo a/d1BT apresenta valores notadamente inferiores, chegando no máximo a grandeza de 1,103 mm. Em ambos os casos a abertura máxima está localizada no canto reentrante do dente.

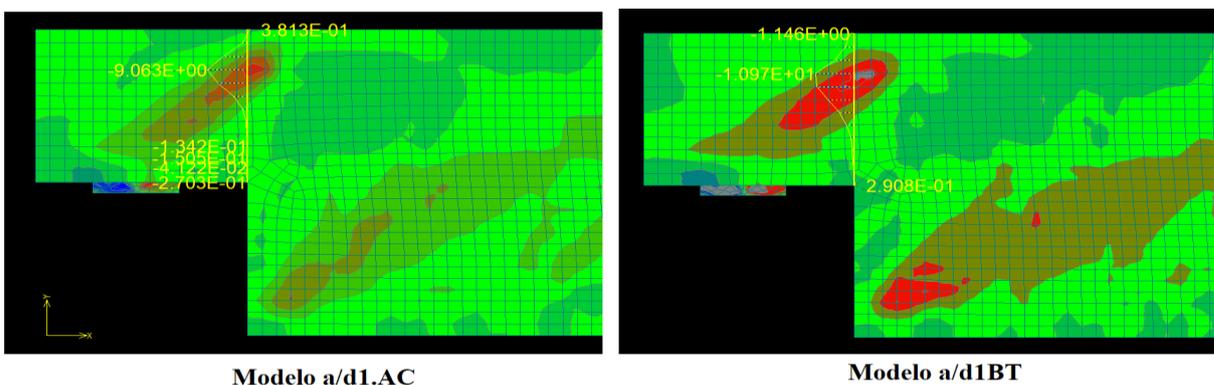
Figura 84 - Padrão de fissuração modelos a/d1AC e a/d1BT



Fonte: O autor (2021)

As bielas de compressão para os dentes de relação $a/d = 1$ se mostram ainda mais inclinadas, quando comparadas as modelos anteriores, e a concentração das tensões se localiza mais afastada do canto reentrante, na parte superior da junção dente viga (Figura 85). A tensão de cisalhamento máxima atingida para o modelo a/d1AC é de 9,063 MPa, já o modelo a/d1BT atinge a tensão cisalhante de 10,97MPa. Em relação aos modos de ruptura, o primeiro modelo entra em colapso em razão do escoamento e da deformação excessiva da armadura do tirante principal e da armadura de suspensão, propiciando a flexão da peça e o esmagamento do concreto na parte superior do dente. Já o último modelo, falha devido à tensão diagonal que promove a compressão do concreto e o escoamento das armaduras de suspensão. O fato do modelo a/d1BT não ter alcançado a verificação quanto ao esmagamento do concreto não foi determinante para que o mesmo atingisse a carga de dimensionamento, porém fica evidente pelo padrão de fissuração e o acompanhamento dos esforços, a falha pelo lascamento, por conta do significativo esforço de compressão atuante no elemento, antes do escoamento da armadura do tirante.

Figura 85 - Análise das tensões de cisalhamento e das tensões principais modelos a/d1AC e a/d1BT



Fonte: O autor (2021)

A Tabela 27 apresenta o resumo dos resultados das simulações numéricas considerando as NBR's 9062 (2017) e 6118 (2014). Entre os dentes muito curtos, com relação $a/d \leq 0,5$, os resultados foram mais próximos. Observou-se que nos modelos com $a/d = 0,25$ as armaduras não entraram em estágio de escoamento e que para o a/d0.25BT foi atingido um desempenho insuficiente para alcance do carregamento calculado, inferior ao modelo da metodologia atrito-cisalhamento, que é, de fato, o procedimento indicado pela NBR 9062 (2017). Já o modelo a/d0.5BT concedeu resultados ligeiramente melhores ao modelo a/d0.5AC, o que sugere que o limite da razão $a/d \leq 0,5$, para o não dimensionamento por escoras e tirantes, esteja um tanto conservador.

Os piores resultados são percebidos nos espécimes de dentes de concreto curtos dimensionados por atrito-cisalhamento. Nesses modelos, tanto a armadura de suspensão quanto a do tirante principal entram em regime de escoamento precocemente, apresentando grandes deformações, os graus de abertura de fissura são maiores e as cargas de ruptura são menores, verificando-se que os modelos a/d0.75AC e a/d1AC não alcançam a carga de projeto de 280 kN. Dentre os dentes curtos apenas no modelo a/d1BT o tirante principal não chega a escoar, demonstrando consonância entre o dimensionamento e os resultados obtidos. Neste caso, as orientações normativas de diferenciação dos métodos de dimensionamento mostram-se pertinentes frente às simulações realizadas, quando contraindicam o dimensionamento por atrito-cisalhamento para elementos com relação $a/d > 0,5$.

Tabela 27 - Resumo dos resultados das simulações considerando os normativos nacionais

Modelo	Método de dimensionamento	Carga máxima (kN)	Deslocamento máximo (mm)	Tensão máxima na armadura de suspensão (MPa)	Tensão máxima no tirante principal (MPa)	Abertura máxima de fissuras (mm)	Tensão máxima de cisalhamento na junção dente-viga (MPa)	Modo de ruptura
a/d0.25AC	Atrito-cisalhamento	288,8	3,83	418,7	360,2	0,615	4,534	Segundo fissura oriunda do canto inferior
a/d0.5 AC		310,7	6,02	435	435	4,237	10,57	Escoamento e deformação excessiva da armadura do tirante principal
a/d0.75AC		241,9	4,934	435	435	4,274	8,86	Escoamento e deformação excessiva da armadura do tirante principal
a/d1 AC		197,9	7,845	435	435	11,46	9,063	Escoamento e deformação excessiva da armadura do tirante principal
a/d0.25BT	Escoras e tirantes	271,7	3,63	406	391,3	0,788	4,13	Segundo fissura oriunda do canto inferior
a/d0.5BT		331,4	5,51	435	435	2,667	8,69	Escoamento e deformação excessiva da armadura do tirante principal
a/d0.75BT		313,0	5,714	435	435	1,403	9,311	Escoamento da armadura de suspensão, escoamento da armadura do tirante principal e lascamento (<i>spalling</i>) do concreto
a/d1BT		300,4	6,447	435	415,9	1,184	10,97	Escoamento da armadura de suspensão e lascamento (<i>spalling</i>) do concreto

Fonte: O autor (2021)

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

O presente trabalho dispôs como objetivo precípua investigar o comportamento dos dentes presentes em vigas de concreto armado, por meio de uma análise paramétrica via elementos finitos. Inicialmente foram abordados como critérios de investigação a resistência à compressão do concreto, relação a/d e o arranjo da armadura de suspensão (inclinada ou vertical), posteriormente o comportamento dos dentes de concreto foram estudados perante os normativos nacionais (NBR's 9062 (2017) e 6118 (2014)), verificando-se a adequação das recomendações normativas, o funcionamento da armadura de suspensão e dos tirantes principais, o comportamento das bielas e as cargas alcançadas pelos modelos.

Foi utilizado o código computacional ATENA (*Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*), para realizar modelagens bidimensionais, empregando o modelo constitutivo *SBETA* para caracterização do concreto, que leva em conta o estado plano de tensões, supondo que as tensões que atuam no eixo z são iguais a zero. Utilizou-se o modelo de fissura distribuída fixa e foi assumida a perfeita aderência entre o concreto e a armadura. Para o aço, aplicou-se a lei bilinear, para o comportamento elasto-plástico perfeito. Como critério de análise não linear, o método Newton-Raphson mostrou-se estável na solução de equações não-lineares, com um limite de 500 interações por passo, configurada a opção de matriz de rigidez tangente e uma tolerância de erro residual em energia de 0,001.

Os modelos foram validados primeiramente por meio de quatro simulações provenientes de dois programas experimentais, os estudos de LU *et al* (2012) e FALCÓN *et al* (2019). Os resultados das peças processadas com dados fornecidos nos ensaios de LU *et al* (2012) mostraram uma boa concordância com os resultados experimentais, com carregamentos e deslocamentos adjacentes, como também deformações das armaduras e modos de falha análogos, observou-se que a capacidade de suporte ao cisalhamento dos dentes de concreto cresceu com a diminuição da relação a/d . Para os resultados obtidos a partir dos modelos simulados com os dados de FALCÓN *et al*. (2019), também verificou-se uma adequada proximidade com os experimentos, com panoramas de fissuração e deformações de armaduras correspondentes. Nos dentes onde a armadura de suspensão foi disposta inclinada com 47° se registrou uma carga de ruptura superior. A armadura de suspensão na diagonal, também possibilitou uma fissuração com abertura mais moderada, mostrando uma redistribuição mais adequada das tensões, comparando-se com o modelo de armadura de suspensão na vertical.

Após a validação dos modelos numéricos, examinou-se os dentes de concreto à vista das NBR's 9062 (2017) e 6118 (2014). Os modelos de dentes muito curtos, $a/d0.25AC$ e

a/d0.25BT falharam em virtude de fissura oriunda do canto inferior, enquanto os espécimes a/d0.5 AC e a/d0.5BT ruíram devido ao esforço excessivo nas barras do tirante, fruto da tensão diagonal. Nessa categoria de dentes muito curtos, observou-se resultados mais próximos, para os dois métodos de dimensionamento, todavia o modelo a/d0.25BT não atingiu a carga de projeto e o modelo a/d0.5BT apresentou uma performance satisfatória, sugerindo que o limite da razão $a/d \leq 0,5$, para o não dimensionamento por escoras e tirantes, possua uma certa margem de segurança.

Os modelos de dentes curtos obtiveram resultados inferiores quando dimensionados por atrito-cisalhamento. Os espécimes a/d0.75AC e a/d1AC romperam devido à deformação excessiva da armadura do tirante principal, enquanto os modelos a/d0.75BT e a/d1BT romperam com escoamento das armaduras de suspensão e do tirante e lascamento (*spalling*) do concreto. À vista disso, os resultados das simulações realizadas mostraram-se compatíveis com as orientações normativas de diferenciação dos métodos de dimensionamento, contraindicando o dimensionamento por atrito-cisalhamento para elementos com relação $a/d > 0,5$.

Com base nos resultados obtidos, é possível afirmar que o estudo do comportamento dos dentes de concreto obteve uma boa representatividade por meio do programa ATENA, onde se pôde descrever bem a resposta do concreto e do aço submetido aos esforços habituais para esse elemento de ligação. Isso posto, sugere-se para trabalhos futuros a modelagem numérica e a análise frente às normas brasileiras do comportamento dos dentes de concreto com razão $a/d > 1,0$, bem como a simulação de modelos tridimensionais de elementos de ligação, que levem em consideração o efeito do confinamento do concreto, e a validação de ensaios experimentais que usem concretos com fibras ou com propriedades distintas.

6. REFERÊNCIAS

- (ABCIC), A. B. (Dezembro 20220). *INDUSTRIALIZAR A CONSTRUÇÃO SERÁ INEXORÁVEL ATÉ 2030*. 43º Newsletter Edição Especial 35.
- ABDEL-MONIEM, A., MADKOUR, H., FARAH, A., & ABDULLAH, A. (2018). Numerical Investigation for External Strengthening of Dapped-End Beams . *International Journal of Civil and Environmental Engineering*, 1017-1027.
- ABNT. (2014). *NBR 6118:2014 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT.
- ABNT. (2017). *NBR-9062:2017 - Projeto e execução de estruturas de concreto*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT.
- AL MUSAWI, H. (2018). *MODELLING OF DAPPED-END BEAMS USING ABAQUS SOFTWARE*. Índia: International Journal of Civil Engineering and Technology, Volume 9.
- ALVES, L. M. (2007). *Métodos dos Elementos Finitos*. Curitiba : Apostila organizada como resultado do estudo das aulas para obtenção de créditos da Disciplina de Método dos Elementos Finitos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná. .
- CERVENKA, V., CERVENKA, J., & JENDELE, L. (January 26, 2018). “*ATENA Program Documentation – Part1, Theory*. Prague: Červenka Consult.
- CERVENKA, V., CERVENKA, J., & PUKL, R. (2002). ATENA - A tool for engineering analysis of fracture in concrete. *Sadhana, Yol.21, Part 4, August, O Printed in India*, 485-492.
- COOK, W. (1987). *Studies of reinforced concrete regions near discontinuities*. Montreal: McGill University, thesis for the degree' of Doctor of Philosophy.
- EI DEBS, M. K. (2000). *Concreto pré-moldado : fundamentos e aplicações*. São Carlos: EESC-USP.
- EL DEBS, M. K. (2017). *Concreto pré-moldado : fundamentos e aplicações* . São Paulo: Oficina de Textos.
- FALCÓN, J. (2015). *Estudio del comportamiento en servicio y rotura de los apoyos a media madera. PhD thesis Spain*:. València: Universitat Politècnica de València.
- FALCÓN, J., PALLARÉS, L., & P.F., M. (2019). Proposal and experimental validation of simplified strut-and-tie models on dapped-end beams. *Engineering Structures*, 594-609.
- INSTITUTE., A. C. (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and Commentary*. Farmington Hills: MI.
- JUNGES, E. (2016). *Modelo de elementos finitos para análise não-linear física e geométrica de pórticos tridimensionais de edifícios de concreto armado* . Florianópolis : Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro tecnológico. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.
- LEONARD, F., & MONNIG, E. (1978). *Construções de concreto: princípios básicos, Volume III*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- LIN, I.-J., LU, I.-J., & YU, H.-W. (2012). *Behaviour of reinforced concrete dapped-end beams*. Magazine of Concrete Research, Volume 64, Issue 9 ICE.

- LYRA, P. H. (2011). *Modelagem numérica de estruturas de concreto armado utilizando o programa ATENA*. São Paulo: Dissertação (Mestrado) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica .
- MATTOCK, A. (2012). *Strut-and-Tie Models for Dapped-End Beams: proposed model is consistent with observations of test beams*. Concrete International, p.35-40.
- MATTOCK, A., & THERYO, T. (1986). *Strength of Members with Dapped Ends*. Tampa, Flórida: PCI Research, Project No. 6, Final Report.
- MATTOCK, A.H.; CHAN, T. C. (1979). *Design and Behavior of Dapped End Beams*. Tampa, Flórida: PCI Journal, V. 24, No. 6, November-December, pp. 28-45.
- MOHAMMED, B., ASWIN, M., & LIEW, M. (2020). Prediction of failure load of RC and R-ECC dapped-end beams. *Prediction of failure load of RC and R-ECC dapped-end beams*, 1-20.
- MORENO, J. Y., & MELI, R. (2014). Experimental study on the structural behavior of concrete dapped-end. *Engineering Structures*, 152-163.
- NAGRODZKA, K., & PIOTRKOWSKI, P. (2012). Experimental Study of Dapped-End Beams Subjected to. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, 11-20.
- NAGY-GYORGY, T., SAS, G., DAESCU, A., BARROS, J., & STOIAN, V. (2012). Experimental and numerical assessment of the effectiveness of FRP-based. *Engineering Structures*, 291-303.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE Chicago: PCI, 2. (2010). *PCI design handbook: precast and prestressed concrete. 7.ed*. Chicago: PCI, 2010.: PCI.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE Chicago: PCI, 2. (2017). *PCI design handbook: precast and prestressed concrete. 8.ed*. Chicago: PCI.
- SANDERS, D. H. (2002). *Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models*. Farmington Hills: American Concrete Institute, p.91-103.. Part 3.
- SANTOS, P., & JULIO, E. (2012). A state-of-the-art review on shear-friction. *Elsevier, Engineering Structures 45 (2012) 435–448*, 14.
- SARGIOUS, M., & TADROS, G. (1970). *Stresses in Prestressed Concrete Stepped Cantilevers under*. Prague: Proceedings, Six Congress of the FIP.
- SILVA, C. C. (2017). *Contribuição ao projeto de dentes de concreto para ligações em estruturas de concreto pré-moldado*. São Carlos: Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de São Carlos da Universidade de São Paulo.
- SILVA, R. C. (1991). *Concreto Armado: Aplicações de Modelos de Bielas e Tirantes*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo,.
- SILVA, R. M. (1996). *Análise não-linear de porticos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - Univerdidade de São Paulo.
- SYED, Z. I., HEJAH, E. S., & MOHAMED, O. A. (2017). *Modelling of Dapped-End Beams under Dynamic Loading*. United Arab Emirates, Abu Dhabi: Abu Dhabi University/ Department of Civil Engineering,.

- SYED, Z., KEWALRAMANI, M., & HEJAH, E. S. (2019). Structural Reliability of Dapped End Beams with Different Reinforcement Layouts under Dynamic Loading. *Journal of Physics: 3rd International Conference on Reliability Engineering*, 1-6.
- WERNER, M. P., & DILGER, W. H. (1973). *Shear Design of Prestressed Concrete Stepped Beams*. Tampa, Florida: PCI Journal, V. 18, No. 4, July-August, pp. 37-49.