Colóquio Internacional
Educação e Contemporaneidade
www.coloquioeducon.com
22 a 24 de setembro de 2021

UFS

Anais, Volume XVI, n. 5, set. 2022
ISSN: 1982-3657 | Prefixo DOI: 10.29380

Eixo 5
Ensino de Matemática e Ciências da Natureza

A GEOMETRIA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

THE GEOMETRY AND SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS IN MATHEMATICS

LUCILENE DAL MEDICO BAERLE

DOI: **http://dx.doi.org/10.29380/2021.15.05.02**
Recebido em: 30/07/2021
Aprovado em: 05/09/2021
Editores responsáveis:
Veleida Anahi Capua da Silva Charlot e Bernard Charlot

A GEOMETRIA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM MATEMÁTICA

THE GEOMETRY AND SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS IN MATHEMATICS

RESUMO

O presente artigo objetiva verificar como a Teoria dos Registros de Representações Semióticas participou da evolução das ideias em geometria. Para tanto, enfatizamos alguns momentos históricos que fizeram parte da construção dessa área da matemática, assim como, apresentamos os teóricos da geometria dessas épocas. Dessa forma, observamos o surgimento e a revolução dos signos (símbolos) em matemática, culminando nos Registros de Representação Semiótica. Para tanto, realizamos uma revisão da literatura na temática, e em seguida, abordamos as concepções de signo em diversas áreas, mostrando as contribuições de Charles Sanders Peirce, Ferdinand de Saussure e Gottlob Frege. Seguidamente, abordamos as concepções de Raymond Duval com a sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica, levando em conta a sua relevância na área de Educação Matemática. Percebemos que a partir da revolução dos signos na matemática, proporcionou grandes avanços tanto para a área da matemática, como também na física e outras áreas afins, além de avanços tecnológicos que ocorreram após esse período.

Palavras-chave: Geometria. Signos. Registros de Representações Semióticas..

ABSTRACT

This paper aims to verify how the Semiotic Representations Records Theory took part in the evolution of the ideas in geometry. In order to do so, some historical moments that played a role in building up this field in mathematics are highlighted and important theorists from these periods are presented. This way, one can observe the appearance and the revolution of signs (symbols) in mathematics, which culminates with the Semiotic Representation Records. With the aim of doing that, a review in the literature of mathematics was made and conceptions of sign from different areas were analysed, demonstrating the contributions from Charles Sanders Peirce, Ferdinand de Saussure and Gottlob Frege. Further on, conceptions from Raymond Duval and his Semiotic Representation Records Theory were examined taking into account its relevance to the area of Mathematical Education. It was possible to realize the revolution of signs prompted great advances for both the areas of mathematics and physics and also other related areas, besides technological advances that took place after this period.

Keywords: Geometry. Signs. Semiotic Representation Records..

INTRODUÇÃO

No início da história das civilizações ocorreram duas grandes revoluções: Revolução Agrícola (século III a. C.) e a Revolução Industrial (século XIX d.C.). A primeira aconteceu por volta de 3.000 a. C., no Egito, China e Oriente Médio. Antes disso os povos viviam como caçadores e coletores. Posteriormente, os homens inventaram a escrita, máquinas e sistemas políticos (EVES, 2004, p. 514). Além daqueles que eram agricultores, havia também soldados, reis, poetas, artesãos, mercadores, cientistas e filósofos.

Com a Revolução Industrial no século XIX, ocorreram mudanças em todo o mundo, marcando uma nova reorganização da civilização humana. Assim, a agricultura deixou de ser o principal meio da economia e os agricultores deixaram de ser a maioria da população. Os operários industriais tornaram-se a grande força de trabalho e a indústria passou a assumir a economia da época (EVES, 2004).

Em relação à matemática, percebe-se que na Grécia não havia sinais de desenvolvimento dessa área de conhecimento durante os séculos V e IV a.C., apenas usavam procedimentos heurísticos e informais, ou seja, um conjunto de regras e procedimentos geométricos para resolução de problemas. Desse modo, a representação da aritmética, e do cálculo era somente de forma geométrica. Segundo (EVES, 2004. p. 384), “para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo”. Assim, pode-se dizer que até a metade do século XVII, não havia nenhum sistema de representação, visto que, não havia publicação nessa época que pudesse realizar uma análise de representações em matemática (FLORES, 2006).

Em torno de 375 a.C., Platão fez uma crítica aos geômetras por não estarem aplicando critérios rigorosos para as práticas matemáticas. Em seguida, surgiu o trabalho de Eudoxo, desenvolvido na academia platônica (ROQUE, 2012. p. 102).

Eudoxo foi um matemático, médico, astrônomo e filósofo grego que viveu entre 408 e 355 a.C. Contemporâneo do filósofo Platão, foi o inventor das esferas celestes e um dos primeiros a descrever os movimentos dos planetas e das estrelas. Seu primeiro trabalho histórico foi sobre o cálculo mais exato do ano solar, sendo que o valor que atribuiu foi de 365 dias e seis horas. Esse calendário foi introduzido inicialmente na Grécia e o valor adotado pelo calendário juliano. Assim, pelo seu grande domínio das técnicas da geometria vigente, tornou-se um dos mais conhecidos matemáticos da sua época, estudou também área de superfícies, na qual chamou de Método da Exaustão, sendo que articulou os conceitos dos infinitésimos, o conceito de Soma Superior (Sup) e Soma Inferior (Inf), que contribuiu posteriormente para os criadores do Cálculo Integral. Na matemática, Eudoxo também criou fórmulas que até hoje são usadas para calcular o volume dos cones e das pirâmides. Além de utilizar seu talento para estabelecer a relação entre números, elaborou a teoria das proporções, incluindo pela primeira vez os números irracionais.

No âmbito da geometria, elencamos Euclides de Alexandria, um dos mais importantes matemáticos da Antiguidade, que viveu por volta de 325 a. C. a 265 a.C. A obra de maior relevância chamada de *Os Elementos é* formada por treze livros escritos por volta do ano 300 a.C., divididos em três partes: Geometria Plana (Livros I-VI), Aritmética (Livros VII-IX) e Geometria Espacial (Livros XI-XIII). Esses livros representam “o resultado dos esforços de formalização da matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que se aplique a grandezas quaisquer, comensurável ou incomensurável” (ROQUE, 2012, p. 102). Conforme Thom (1971 apud MACHADO, 2012, p. 146), a “geometria euclidiana constitui o primeiro exemplo de transcrição de um processo espacial bi ou tri dimensional para a linguagem unidimensional escrita”.

Ao estudar a historiografia, constata-se um grande salto nos livros da história da matemática, entre os séculos III a.C. de quando viveu Euclides até o século XV, quando voltou o desenvolvimento da matemática na Europa. No século IX, destacou-se pela relevância no desenvolvimento da álgebra o matemático árabe *Al-Khwavarizmi*. O povo árabe tinha o papel de ensinar a matemática grega, no entanto, a história mostra que esta era marcada pela geometria. Esse fato foi intrigante, pois como os árabes poderiam ter conhecimentos algébricos tão significativos? (ROQUE, 2012)

Os legados deixados pela escrita árabe, influenciadas pelas traduções das obras gregas, não foram reconhecidas somente por terem difundido a matemática utilizada na Grécia antiga. Vai além das importantes contribuições do que hoje é chamado de álgebra e envolve também a geometria, a astronomia e a trigonometria.

Nesse período, também se destacou pelas invenções do Grego Arquimedes. Os estudos de Arquimedes também se deram na mecânica. “Por essa razão a mecânica foi tornada inteiramente distinta da geometria, e tendo sido durante longo tempo ignorado pelos filósofos, acabou sendo vista como uma das artes militares” (ROQUE, 2012, p. 175). Arquimedes, segundo Hessen (2009), referindo-se às ideias da época, defendia que o intelectualismo, mesmo sendo contrário às ideias do racionalismo e do empirismo, acreditava que os dois contribuem para a formação do conhecimento e que a experiência e o pensamento constituem o conhecimento humano.

Desse modo, foi no início do século XVII, que o pensamento para de se mover no elemento da semelhança, afirma Foucault (1992). Então, foi no final do Renascimento que a questão da representação iniciou enquanto conceito e passou a influenciar o conhecimento ocidental. Também, o homem começa a ser o sujeito do conhecimento e opõe-se a fé e razão, pois:

> O homem passa a ser o responsável pelo conhecimento do mundo em que ele vive e pelo conhecimento dele mesmo. Assim, ele ordena e classifica todo o tipo de conhecimento, ou seja, a política, a economia, as línguas, os seres vivos, o que implica na representação dos objetos do conhecimento e, portanto, na problematização da representação enquanto expressão iconográfica da relação entre o sujeito do conhecimento e o objeto dado a conhecer, criando princípios da representação sob o aspecto de fundamento teórico, epistemológico (FLORES, 2006, p. 83).

Nesse sentido, surge uma nova forma de pensar, de ver, de conhecer o mundo, de se relacionar com esse mundo e representá-lo. Isso demonstra a relevância da ordem, de estabelecer coisas, mesmo que não sejam mensuráveis, mas que tenham uma sucessão ordenada e agora, por intermédio dos signos. Portanto, o signo assume um papel diferente do que tinha anteriormente, pois até então, sua escrita era estritamente retórica e foi somente no final do século XVI, início do século XVII, que o signo (símbolo) foi introduzido por Viète e Descartes. Desse modo:

> A pintura e o mapa são considerados como exemplos primeiros de um signo. Um signo que passa a estabelecer uma relação binária, pois ele dá a ver aquilo que não está presente aos olhos. Portanto, o signo é um objeto que representa um outro objeto. Assim, da mesma forma que acontece com a pintura de uma cena, de um retrato, o mapa manifesta uma verdadeira relação entre a coisa e sua representação, a tal ponto que nos leva a pensar que um mapa é a cidade, o país ou o globo (FLORES, 2006, p. 84).

Assim, essa forma de representar teve muitas mudanças em todo o mundo, principalmente para o pensamento ocidental, isso se deve pela relevância dada aos signos (Foucault, 1992). Já que nesse momento, ele assume a forma binária, isto é, “[...] uma ligação entre aquilo que ele significa (o significado) e aquilo a que se refere (o referente, o objeto)” (FLORES, 2006, p. 84). Isto significa que o signo tem uma teoria de significados que regem seu conteúdo, implicando em uma teoria geral e universal dos signos que impõe a ordem do pensamento (FOUCAULT, 1992).

Entretanto, foi no final dos séculos XVI, com François Viète, que iniciou o primeiro sistema de signos constituído de letras que revolucionou o conhecimento da matemática e das ciências. Neste sistema, Viète “[...] introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes” (EVES, 2004, p. 309). Dessa forma, a escrita e o cálculo voltaram-se em torno de uma convenção universal de interpretação, a qual anteriormente, era voltada à geometria e à retórica.

Contudo, Viète, ainda oscilava entre a retórica e a simbologia. Foi quando surgiu Descartes que deu continuidade a esse trabalho fazendo a distinção entre o significante e o significado, levando o pensamento matemático para uma função de abstração. Assim deu-se “o surgimento da duplicidade dos objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento e objetos representados” (FLORES, 2006, p. 86).

No século XVII, o desenvolvimento da matemática foi muito produtivo e se deu por meio de várias áreas de pesquisa que nela se abriram, como a invenção do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção, a matemática passou para um plano superior e encerrou o ciclo da matemática elementar (EVES, 2014). Isso só foi possível porque já possuíam a nova linguagem simbólica e das regras do cálculo, que possibilitou Leibniz a inventar o método de cálculo infinitesimal com as operações de derivação e de integração. Portanto, foi somente com Leibniz que ocorreu a real abstração, já que “[...] foi o primeiro a compreender o extraordinário poder (do simbólico) e desenvolver aí, num registro verdadeiramente moderno, aplicações propriamente inconcebíveis por seus dois antecessores” (SERFATI, 1997, p. 373 apud FLORES, 2006, p. 86).

Portanto, no decorrer deste trabalho, pretendemos apresentar os avanços que ocorreram na matemática, como na Geometria não Euclidiana e também como iniciou a Semiótica e os Registros de Representações Semióticas. Com esse intuito, faremos uma breve exposição sobre a concepção de alguns autores que tratam sobre esses assuntos.

A libertação da Geometria

A descoberta das geometrias não-euclidiana, aconteceu quando descobriram que a solução final sobre o problema secular do postulado das paralelas, mostrou-se independente das outras suposições da geometria euclidiana, não podendo ser deduzido como um teorema, mostrando assim, que havia erro no postulado (EVES, 2004).

Contudo, a chegada da geometria não-euclidiana ocorreu na metade do século XIX, na qual aconteceram dois desenvolvimentos matemáticos notáveis e revolucionários, sendo que a primeira descoberta foi de uma geometria autoconsistente (1829) e diferente da usada por Euclides. E, a segunda descoberta (1843) foi de uma álgebra também diferente da que já era usada nos números reais (EVES, 2004).

Segundo Eves (2004, p. 544) "uma consequência de alcance muito maior foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais". Dessa forma, tornou-se possível abrir caminhos para vários outros sistemas geométricos, em que para os matemáticos, os postulados da geometria tornaram-se hipóteses, "[...] cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si" (ibidem). Assim:

> Com a possibilidade de inventar geometrias puramente 'artificiais', tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados da geometria, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, como as leis de uma ciência física" (EVES, 2004, p. 544 - grifo do autor).

Nesse sentido, a geometria criada por Lobachesky “[...] não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a matemática como um todo. A matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos” (EVES, 2004, p. 545).

Como é o caso do postulado de Euclides, que ao interpretar o espaço real, se defronta com a mesma validade da lei de queda livre dos corpos de Galileu. Nesse viés, em que a geometria aplicada no espaço é uma ciência experimental, vai ao encontro da teoria do espaço de Kant (1724-1804), que foi filósofo e dominava o pensamento da época com sua teoria Kantiana quando Lobachevsky fez sua descoberta da geometria. “A teoria kantiana sustentava que o espaço é uma estrutura já existente no espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre esse espaço” (EVES, 2004, p. 545).

Assim, Kant afirmou que de forma ativa, todos humanos deveriam ter essa experiência, e não apenas porque os conceitos mentais refletem a realidade. Descartes e Kant defendiam que a experiência era de extrema importância e que a mente humana era a condição essencial para qualquer experiência. Desse modo, “[...] as tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos nove “axiomas” e “postulados” ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos e culminaram em alguns desenvolvimentos de maior alcance da matemática moderna” (EVES, 2004, p. 539-540). Na qual, fizeram muitas “demonstrações” do postulado, mostrando que cada uma era baseada numa suposição equivalente a ele.

Outro matemático que ganhou destaque nesta época foi Carl Friedrich Gauss, que sobressaiu nos séculos XVIII e XIX com seu impressionante talento. A obra prima de Gauss foi sobre a teoria das superfícies. Sendo que em 1812, Gauss fez a sua primeira investigação sistemática sobre convergência de séries, num artigo sobre séries hipergeométricas.

Desse modo, retomando para o conceito dos signos, que é o foco deste trabalho, Flores (2006) afirma que a partir dos avanços que com a matemática e a descoberta dos signos, ocasionou uma nova forma de representação dos objetos matemáticos, sendo possível para o ponto de vista formal e um pensamento matemático formado pela linguagem convencional e formalizada. “Quanto às figuras geométricas, estas ganharam um novo modo de representação a partir da instauração de uma nova forma de olhar e de representar o espaço, um espaço em perspectiva" (FLORES, 2006 p. 94).

Conforme a análise de Foucault (1992), a mudança que ocorreu no início da metade do século XVII foi em todo o regime dos signos. Sendo assim, o signo ganha uma relevância sobre a forma de conhecer e também, passa a ser uma extensão universal para o estudo da representação. Contudo, a teoria binária dos signos inicia a ciência geral do signo, que tem como base a relação de ligação entre o significante (signo) com um significado (referência), que está no fundamento do pensamento moderno. Sendo que, a partir desse momento, as teorias semióticas são elaboradas e vão sendo estudadas.

Na próxima seção, especificaremos o conceito de signos e a visão de alguns autores que contribuíram ao longo da história ou que ainda estão contribuindo, como é o caso de Raymond Duval.

A Semiótica e os Registros e Representações Semiótica

Em relação ao conhecimento matemático, ocorreram mudanças muito significativas, nos séculos XIX e XX, em que começou a revolução da álgebra e da análise, tendo uma enorme expansão, iniciando o estudo da *Semioses*.

Segundo Santaella (2017), a palavra "semiótica" vem do grego antigo e a palavra "seméion" significava "signo". Assim, semiótica ou semiologia, desde o século XVIII, eram termos utilizados para a mesma ciência dos signos em diversas línguas europeias. Para uma definição inicial de semiótica, Santaella (2017) afirma que:

> a semiótica é a ciência dos sistemas e dos processos sígnicos na cultura e na natureza. Ela estuda as formas, os tipos, os sistemas de signos e os efeitos do uso dos signos, sinais, indícios, sintomas ou símbolos. Os processos em que os signos desenvolvem o seu potencial são processos de significação, comunicação e interpretação (SANTAELLA, 2017, p.7).

Nesse sentido, ao conceituar a semiótica a autora explica os diferentes nomes e significados para os signos e sua forma de comunicação. Também, em Santaella (2002) percebemos que existem duas ciências que surgiram no século XX, a primeira delas é a linguística, na qual se destaca por ser diferente da língua porque se refere como ciência da linguagem verbal. E a segunda, a Semiótica, se refere à ciência de toda e qualquer linguagem. A diferença entre elas, é que a língua é usada para a comunicação, isto é, para ouvir, falar e ler. Já a linguagem verbal, considerada mais complexa, estabelece toda a forma de comunicação, não sendo apenas a forma verbal, como a interação, inclusive os movimentos e vários outros (BRANDT; MORETTI, 2014).

Segundo Duval (2011, p. 37) a revolução semiótica aconteceu quando iniciou a rápida predominância das equações algébricas, das fórmulas utilizadas na física e de outras representações gráficas que permitiram explorar as novas curvas, como por exemplo, as curvas mecânicas. Isso também foi percebido pela escrita simbólica que Descartes introduziu e que começou a chamar de "a linguagem matemática", em que permite estudar a natureza.

Foi somente no final do século XIX que os modelos de análises dos signos surgiram de forma independente (DUVAL, 2011). Então, três grandes estudiosos iniciaram esse trabalho, quase ao mesmo tempo: Peirce (1890-1910), Saussure (1916) e Frege (1848-1925). Todavia, todos os trabalhos que surgiram após essas publicações, foram realizados com a contribuição desses autores. Os três trabalhos, trazem concepções muito diferentes para a análise dos signos, pois Peirce aborda nas ciências de forma mais geral e na lógica, já Saussure emprega a linguística e Frege baseia-se na matemática, principalmente na aritmética (DUVAL, 2011).

Charles Sanders Peirce **(**1839-1914), natural dos Estados Unidos, filho de Benjamin Pierce que foi um notável matemático de Harvard. Peirce, fez graduação em química e escreveu vários trabalhos que deixaram grandes contribuições para muitas áreas, tais como: física, matemática, lógica, biologia, sociologia, história, astronomia, psicologia, linguística e outras. Além de ter sido cientista, motivo pelo qual interessou-se por diversas áreas do conhecimento, havia também um enorme interesse sobre a Lógica das ciências porque queria entender seus métodos de raciocínio. Peirce não teve nenhum reconhecimento do seu trabalho em vida, nem como lógico ou filosófico (BRANDT; MORETTI, 2014).

Assim, a definição de signo para Peirce (2000):

> Um signo ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto, não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia (PEIRCE, 2000, p. 46 – grifo do autor).

Nesse sentido, afirmar que um signo representa um objeto sugere dizer que ele afeta a mente do sujeito de forma imediata e determina nela algo proveniente desse objeto. Então, fica claro dizer que o signo não é o próprio objeto ao qual quer representar. Essa distinção é, portanto, muito relevante ao analisar a produção dos conhecimentos em matemática.

Também para Peirce (2000), o signo tem dois objetos e três intérpretes. Os objetos são chamados de "dinâmicos" e de "imediato". Nesses casos, no objeto imediato sua representação pode ser pela aparência de um desenho e também pela aparência gráfica ou acústica de uma palavra. Já no objeto dinâmico, a representação desse signo está condicionada à natureza e o potencial do signo que pode interpretar em uma e em outra. Assim sendo, segundo Santaella (2002), um interpretante dinâmico, pode ser por meio de três níveis: o interpretante dinâmico emocional; o interpretante dinâmico energético e por último o interpretante em si, na qual para cada mente pode reagir de um modo, uma vez que este último tem um caráter lógico. Assim, o primeiro pode produzir sentimentos ao ouvir uma música e o segundo é capaz de produzir uma ação concreta e real que pode ser através de uma ordem (BRANDT; MORETTI, 2014, p. 215).

Após essa divisão lógica dos signos, Peirce (2000) definiu signo em uma relação triádica (de três em três), em que faz uma correspondência a cada *símbolo*, com seu signo ou significante, uma *referência* que é seu conceito ou significado e um *referente* que é o objeto. Assim, a relação existente entre as representações com seus referentes é chamada de termos de referência, isto é, o que duas representações diferentes de um mesmo objeto têm em comum é a referência. Como exemplo, a forma da escrita algébrica em matemática e as novas formas de representar as figuras. Estas novas representações com seus referentes são chamadas de referência, isto é, o que duas representações diferentes de um mesmo objeto têm em comum é chamado de referência.

Isso levou a apontar diversos níveis de hierarquia dos signos. Uma vez, que aqui está sendo considerado, conforme Duval (2011), o que mais se utiliza para analisar a aquisição dos conhecimentos matemáticos pelos alunos e a partição tricotômica e das suas representações.

Assim, essa tricotomia não é exatamente uma classificação, contudo, uma justaposição que segue dois critérios: “a similaridade entre o conteúdo de uma representação dada e o objeto representado, seja uma relação de causalidade entre a ocorrência de um fenômeno e o que pode ser a causa” (DUVAL, 2011, p. 33). Dessa forma, esses dois critérios servem para distinguir as representações e como interpretá-las, já que na matemática, não se deve confundir os enunciados da língua natural, com as definições ou enunciados dos problemas, ou com as expressões simbólicas, como por exemplo, as equações e as fórmulas ou também os enunciados da língua formal. Para isso, deve-se às palavras de uma língua e os sinais de operações, bem como os algarismos da escrita de um número.

Ainda, segundo Peirce (2000), em relação à tricotomia dos signos, afirma que um signo pode ser designado por Ícone, Índice ou Símbolo. Assim:

> Um Ícone é um signo que se refere ao Objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, caracteres que ele igualmente possui quer um tal Objeto realmente exista ou não. (...)
>
> Um Índice é um signo que se refere ao Objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por esse Objeto. Portanto, não pode ser um Qualissigno, uma vez que as qualidades são o que são independentemente de qualquer outra coisa.
>
> Um Símbolo é um signo que se refere ao Objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o Símbolo seja interpretado como se referindo àquele Objeto (PEIRCE, 2000, p. 52).

Desse modo, quando se tem uma relação de semelhança, tem-se um signo chamado “*ícone*” , na qual ele chama o objeto ausente. Por exemplo, o desenho de um carro representa um ícone quando existe semelhança com sua forma. Se a relação é de causa e efeito, existe uma relação que afeta a existência do objeto ou é por ela afetada, portanto, tem-se um signo do tipo “*índice*”. Desse modo, a chuva pode ser representada pelo signo inicial nuvem, que é a causa da chuva ou o chão molhado que é a consequência da chuva. Assim, os índices indicam o objeto representado e se essa relação é eventual, gerida apenas por convenção e por fim, tem-se o “*símbolo*”, em que as palavras são o melhor exemplo de símbolo (DENARDI, 2019).

A segunda concepção de signo que abordaremos será a de Ferdinand de Saussure, na qual fez uma análise da estrutura dos sistemas semióticos. Ferdinand de Saussure (1857-1913), foi o fundador da linguística moderna e apresentou na sua teoria linguística, alguns princípios que influenciaram o desenvolvimento da estrutura semiótica e da filosofia. Sendo que, sua principal contribuição para a semiótica foi através de seu projeto de teoria de sistemas de signos, chamado por ele de "Semiologia". Sua carreira acadêmica foi bem sucedida e ele lecionou na Universidade de Genebra (1891-1912).

Foram muitos anos de estudo e produção de trabalhos na área da linguística no final do século XIX, no entanto, suas contribuições para a semiótica apareceram quando Saussure ministrou três cursos durante os anos de 1907 e 1911, o curso de Linguística Geral. Desse curso "desenvolveu suas ideias sobre a teoria geral da linguagem e dos sistemas sígnicos" (Brandt; Moretti, 2014, p. 217). Porém, nas suas disciplinas participaram em torno de 11 alunos por turma. Infelizmente, muitos manuscritos desses cursos foram eliminados por Saussure, todavia, através das anotações de sete alunos seus, foi possível publicar o livro: "Curso de Linguística Geral" em 1916.

A proposta de Saussure para a definição de signo foi revolucionária, pois leva a substituir a noção de sistema semiótico pela de signo. Sendo que essa definição tem duas preposições, que são as seguintes: "(1) Os signos não têm nenhuma realidade material. Eles são os invariantes de ocorrências que mudam sensivelmente. (2) Os signos são constituídos por suas relações de oposição aos outros, no interior de um sistema" (DUVAL, 2011, p. 30).

O último dos autores Gottlob Frege (1848 -1925), de origem alemã, foi matemático e filósofo. Publicou quatro livros, dentre os principais foram "Sobre o sentido e a referência" (1892) e "O pensamento" (1918), além de diversos artigos científicos. A produção de alguns esboços de artigos de Frege, também estão presentes com outros filósofos e matemáticos da sua época, já que se comunicavam por meio de correspondência. Porém, esses trabalhos não chegaram a ser publicados (BRANDT; MORETTI, 2014).

A obra de Frege é considerada fundamental para o desenvolvimento da filosofia no século XX, ela pode ser considerada o marco inicial da filosofia analítica. Sendo que, o artigo mais famoso de Frege é "Sobre o sentido e a referência", publicado em 1892. Em consonância com o autor, nessa obra Frege faz uma reflexão sobre a linguagem que está relacionada com problemas presentes em outras obras, como por exemplo, na Conceitografia. Ainda, o artigo começa com a exposição de um enigma sobre a relação de igualdade (identidade) e apresenta a solução desenvolvida naquela obra e passa então a criticá-la segundo Miranda (2011 apud BRAND; MORETTI, 2014, p. 220).

Segundo Duval (2011), Frege não propôs definição para os signos. Diferente de Saussure e Peirce, “ele se interessou diretamente pelo modo da produção semiótica que possa ter valor ao mesmo tempo de prova e de descoberta em matemática” (DUVAL, 2011, p. 34). Frege fez suas contribuições respondendo à questão que Kant formulou em como explicar um raciocínio matemático que seja logicamente rigoroso e cientificamente produtor de um novo conhecimento? Então, Frege retoma essa questão e a reformula a partir da oposição de duas escritas literárias. Sendo que, para explicar essa possibilidade, faz a distinção entre sentido de uma expressão e a diferença entre significante e significado. Assim:

> Duas expressões podem ter dois sentidos diferentes, mas se referirem ao mesmo objeto: *3+ 9, 3 x 4, 242,144, etc*. É sobre a distância entre essas duas faces que se fundamenta o processo de substituição que permite o cálculo; “a” e “b” têm cada um sentido diferente, ou apresentam conteúdos muito diferentes, mas eles representam o mesmo objeto, por exemplo, o número (DUVAL, 2011, p. 35).

Dessa forma, um número pode ser representado de diferentes formas sem perder o seu sentido. Segundo Fainguelernt (1999), Frege contribuiu para a criação do logicismo e procurou mostrar em seus trabalhos que as leis matemáticas possuíam como fundamentos as leis da lógica. Também se preocupou com a construção do conhecimento matemático. Para Frege, um conceito se diferencia de uma imagem ou representação, porque o primeiro pertencia ao nível de conhecimento e da ideia, e o segundo se referia ao nível da imaginação. Sendo que ele considerava que um conceito tinha uma natureza lógica, com extensão e denotação.

No entanto, a limitação da contribuição de Frege, foi por ter considerado apenas as escritas simbólicas que são utilizadas na álgebra e em análise como um modelo para todas as representações que é utilizado em matemática, além de não ter visto a relevância dos outros sistemas semióticos nem mesmo para a matemática (Duval, 2011).

Em relação ao estudo de Registros e Representações Semióticas, esse trabalhado será embasado nos estudos de Raymond Duval, francês com formação em Psicologia e Filosofia. Trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) em Estrasburgo - França (1970-1995). Desenvolveu estudos na área da Psicologia Cognitiva, com enfoque na área de aprendizagem em Matemática, que dentre outras publicações, resultou na sua principal obra: “Sémiosis et pensée humaine”. Atualmente é professor emérito da universidade francesa Du Litoral Côrte d’Ópale.

Em suas pesquisas, Duval trata principalmente do funcionamento cognitivo, principalmente, na atividade de matemática e nos problemas dessa aprendizagem. Também, realizou trabalhos específicos sobre a língua materna e sobre os procedimentos matemáticos, estudou as várias representações mobilizadas pela visualização matemática, além de desenvolver um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento sobre as mudanças de registro de representação semiótica que são citados na obra mencionada anteriormente.

Segundo Duval (2011), quando se refere à língua e os registros de representação, ele afirma que:

> A língua não é um código, mas um registro de representação semiótica. A grande variedade de tipos de discursos que ela permite produzir depende de operações irredutíveis a uma gramática ou a regras. A utilização da língua não tem nada a ver com o funcionamento de um sistema formal. Ela repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas e que todo o ato de expressão e de compreensão de um discurso produz mobilizando os diversos graus (DUVAL, 2011, p. 76).

Nesse sentido, por meio da psicologia cognitiva, Duval (2012), sugeriu trocar o nome de objeto ou signo, na qual era chamado, para registros de representação semiótica. Visto que a palavra *Semioses* , que vem do grego, significa a produção ou apreensão de uma representação semiótica e *noesis* que são as ações cognitivas que possibilitam a apreender, o objeto. Segundo Duval (2012):

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada de **"semiose"** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **"noesis"** a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose** (DUVAL, 2012, p. 269 - Tradução Moretti).

Por meio da psicologia cognitiva, essas representações são as ações cognitivas que se aproximam do objeto, como por exemplo o pensamento, a percepção, a imaginação, entre outras que envolvem a compreensão desses conceitos e propriedades. Para Duval (2012), essa forte ligação entre *semiosis* e *noesis*, possibilita o processo de aprendizagem de matemática, constituindo um excelente campo de estudo.

Para Duval (2011) a primeira condição essencial para a evolução do pensamento matemático, é inicialmente observar a história do desenvolvimento da matemática para depois analisar o desenvolvimento das representações semióticas. Porque a relevância das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais: a primeira delas é a possibilidade de tratamento matemático, ou seja, para realizar as operações de um cálculo, precisam do sistema de representação utilizado. A segunda delas é a enorme variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Como por exemplo, os sistemas de numeração, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas, as representações gráficas e a língua natural.

Dessa forma, Duval (2012) sugere que deve haver três atividades cognitivas ligadas à semiose para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Para isso, existem dois registros de representações semióticas que são bem diferentes: o tratamento e as conversões. Segundo Duval (2011):

> - Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registro, por exemplo, resolver um sistema ou um sistema de equação; [...]
>
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registros conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo, passar na escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2011, p. 16).

Assim, observando do ponto de vista matemático, a conversão interfere somente para escolher o registro em que os tratamentos podem ser realizados, pois são mais econômicos para obter um segundo registro. Portanto, uma das principais características da atividade matemática é a diversidade dos registros de representações semióticas que ela pode fazer.

Porém, essa diversidade, poucas vezes é levada em conta no ensino. Por isso, é necessário analisar as dificuldades de aprendizagem no ensino em matemática e estudar a conversão das representações e não o tratamento, porque do ponto de vista cognitivo, é aquela que conduz para a compreensão dos conteúdos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste estudo, constatamos que durante a Antiguidade e Idade Média, a matemática era escrita de forma retórica, isto é, utilizavam uma metodologia híbrida, na qual utilizava uma mistura de geometria e retórica, sendo que os procedimentos geométricos eram o único meio de resolução. Se utilizavam algum tipo de símbolo, era uma característica momentânea para elaboração de um texto exclusivamente para quem criou.

Desse modo, foi somente com a divulgação da Geometria de Descartes (1637) que ocorreu um sistema de escrita que apresentou novos mecanismos em relação às da matemática grega e medieval, já que anteriormente sua escrita era numa linguagem comum, em que tudo era calculado com palavras, com uma escrita simbólica e sendo necessário decifrar para depois interpretar (SERFATI, 1997 apud FLORES, 2006).

Assim, até meados do século XVII, não havia nenhum tipo de representação em matemática que pudesse ser usada. No sistema matemático antigo percebia-se “que a geometria não fornecia apenas uma notação a aritmética, mas que as figuras geométricas eram consideradas como sendo, de fato, os próprios números” (FLORES, 2006, p. 82). A partir do XVII, com a inserção dos signos em matemática, iniciando por Viète, Descartes e depois por Leibniz, ocorreu um grande avanço na área da matemática, possibilitando assim, Leibniz em criar o cálculo infinitesimal, no qual surgiram novos símbolos e novas formas de representação. Também surgiram as notações de forma mais simples para o Cálculo Diferencial e Integral, que são usadas até hoje nos cursos superiores.

Nesse sentido, como o foco deste trabalho foi sobre a história da geometria e as representações semióticas, Duval (2011) colabora dizendo que existem poucas pesquisas relacionadas ao ensino no que se refere à conversão dos objetos. Pois, para compreender as dificuldades que muitos alunos têm na compreensão da matemática, é necessário desenvolver um método que permita observar os fenômenos cognitivos no que se refere às atividades matemáticas que possibilitem as diversas representações semióticas e também à conversão dessas representações.

Para Duval (2011), no que se refere ao ensino de geometria, afirma que sua aprendizagem consiste em uma atividade cognitiva específica e que não está relacionada com o meio social em que vive e nem depende de pressões internas de um objeto. Muitas vezes, as figuras podem colocar resistências para sua aprendizagem, já que precisam estar próximas da representação figural.

Segundo Duval (2004), “a atividade cognitiva que a geometria requer é mais exigente que as outras áreas do conhecimento, pois exige que os tratamentos discursivos e figurais sejam efetuados de maneira simultânea e de forma interativa (KRUPPEL; BRANDT, 2014, p. 120).

Através deste estudo, percebemos a relevância que consiste no estudo da teoria cognitiva de Duval, sobre os Registros e Representações Semióticas voltado ao estudo da geometria, sendo que já existem algumas pesquisas de mestrado e doutorado sobre esse assunto e que não foi possível acrescentar neste trabalho. Portanto, há possibilidades de fazer um estudo mais específico do que já vem sendo realizado em pesquisas, voltada à sala de aula, envolvendo a Semiótica e o ensino de geometria e de que forma estão contribuindo para o ensino e aprendizagem de matemática.

AGRADECIMENTOS

REFERÊNCIAS

BICUDO, *M. A. V.* **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógica**s. São Paulo: UNESP, 2010.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BOYER, Carl Benjamin & MERZBACH, Uta C. **História da matemática.** Tradução: Helena Castro, 3. ed. Norte-americana. São Paulo: Blucher, 2012. 4º reimpressão - 2018.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula.** Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

DENARDI, Vânia Bolzan. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em matemática.** Orientação Eleni Bisognin; coorientação Silvia Maria de Aguiar Isaia – Santa Maria: Universidade Franciscana – UFN, 2019. 285 f.: il. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática– Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana – UFN

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Org. Tânia M.M. Campus. São Paulo. 2011.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2011, p. 11-33.

________. DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** . Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012, p.266-297.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** *Tradução de Hygino* H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, E. K. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. 1999). Porto Alegre: Artmed, 1999.

FLORES, Cláudia. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem.** Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

FOUCAULT (1992). In: *FLORES,* **Claudia. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem.** Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

HESSEN, J. **Teoria do Conhecimento**. 3. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua** . 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MORETTI, M.T; THIEL, A. A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. Ponta Grossa, PR: Práxis Educativa, 2012.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. Tradução José Teixeira Coelho Neto.

2ª reimpressão da 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2000. 337 p.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.