



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE - UFS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SUAS TECNOLOGIAS – CCET
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL – DEC

LARISSA OLIVEIRA SANTOS

**ANÁLISE DE VIGAS ANISOTRÓPICAS, FUNCIONALMENTE GRADUADAS E
COMPÓSITAS LAMINADAS APOIADAS EM BASE ELÁTICA WINKLER –
PASTERNAK**

São Cristóvão – SE
Julho/2022

LARISSA OLIVEIRA SANTOS

**ANÁLISE DE VIGAS ANISOTRÓPICAS, FUNCIONALMENTE GRADUADAS E
COMPÓSITAS LAMINADAS APOIADAS EM BASE ELÁSTICA WINKLER –
PASTERNAK**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Engenharia Civil (DEC) da Universidade Federal de Sergipe (UFS), como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. DSc. Fabio Carlos da Rocha.

São Cristóvão – SE
Julho/2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



ATA DE DEFESA

Larissa Oliveira Santos

Análise De Vigas Anisotrópicas, Funcionalmente Graduadas e Compósitas Laminadas Apoiadas Em Base Elástica Winkler – Pasternak

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **7 de julho de 2022**

Banca Examinadora		Nota
Orientador(a): Prof. D.Sc.. Fabio Carlos da Rocha (UFS)	–	10,0
Examinador(a): Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández (UFPEI)	–	10,0
Examinador(a): Prof. Dr. Emerson Figueredo dos Santos (UFS)	–	10,0
Média Final:		10,0

Documento assinado digitalmente



Fabio Carlos da Rocha
Data: 19/07/2022 16:11:02-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. D.Sc. Fabio Carlos da Rocha (UFS)
Assinatura do(a) Orientadora(a)

AGRADECIMENTOS

Início agradecendo ao meu Deus por cuidar dos meus sonhos e pelo Amor incondicional. Sei que o Senhor sempre esteve aqui. Toda a glória seja dada a Ele.

Agradeço aos meus pais. É uma honra poder colocá-los no meu diploma. Me esforço diariamente para ser a filha que vocês merecem e honrá-los. Aprendo com o exemplo de mulher (na maior totalidade que este termo carrega) que a senhora é, minha mãe. Aprendo com o seu carinho e o seu servir ao outro sem esperar absolutamente nada em troca, meu pai. Dia após dia. Deus me abençoou ao me fazer filha de Simone e de Ancelmo.

À minha família, obrigada. Obrigada, meus tios, minhas tias, meus primos, minhas primas e meu avô Luiz. Vocês são a casa onde eu cresci, vivo e sou quem sou. E para onde eu sei que sempre posso voltar. Cito aqui os meus avós Antônio, Márcia, Neide e meu tio padrinho João (*in memoriam*), porque tenho MUITO deles em mim. Em especial, agradeço à minha tia Socorro pelo seu amor materno e a tio Sérgio por ser quem tenho como referência desde que me entendo por gente.

A Vinícius, obrigada pelo amor, pela companhia e por me aproximar de Jesus. Obrigada pelos conselhos, pela força e por acreditar em mim.

Não posso deixar de agradecer ao CEPI, a escola que me ensinou a escrever, a ler e que esteve preocupada em me fazer gente. À Universidade Federal de Sergipe que é, acima de tudo, nossa; e ao corpo de docência do Departamento de Engenharia Civil que produz, compartilha e ensina com tanta excelência.

Ao meu orientador, professor Fabio. Obrigada pela disposição, paciência e pela oportunidade. É perceptível, inspirador e admirável o seu amor pela docência e pela Academia.

À GEOTEC, em especial aos professores Carlos Rezende e Demóstenes, obrigada pela chance de aprender ao observar e ao fazer. Guardarei para sempre a minha admiração por essa equipe que dispensa comentários.

Agradeço à Bruna, Camila, Islena e Nicolle, as amigas que dividiram a graduação comigo, por tornarem tudo mais tranquilo. Deus sabe que não nasci para ser só e me presenteou com vocês. Obrigada por chorarem o mesmo choro e sorrirem o mesmo sorriso. Admiro e amo muito cada uma de vocês.

É como diz João Cabral de Melo Neto, um galo sozinho não tece uma manhã.

RESUMO

Vigas apoiadas em fundações elásticas são amplamente utilizadas em projetos de engenharia. Portanto, a análise dos deslocamentos sofridos por elas quando apoiadas em uma base elástica é de extrema importância. Também é conhecido que vigas compósitas laminadas, assim como vigas funcionalmente graduadas, podem fornecer propriedades desejáveis, como rigidez e resistência. Por isso, o presente trabalho apresenta soluções para a deflexão de vigas anisotrópicas, compósitas laminadas e funcionalmente graduadas sobre fundações elásticas do tipo Winkler-Pasternak, a partir do acoplamento entre estiramento, cisalhamento, flexão e torção. A formulação proposta é baseada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e as equações que descrevem o problema e as condições de contorno são derivadas do princípio do trabalho virtual. O método de integração direta pode ser utilizado para desacoplar as deflexões do deslocamento axial e da torção. Posteriormente, o sistema de equações desacopladas de deflexão em duas direções principais é transformado em um sistema de primeira ordem. A solução deste sistema de equações é obtida através do método de variação de parâmetros, aplicando o conceito de matriz fundamental. A validação dos resultados encontrados para o comportamento de flexão de vigas em fundações elásticas é realizada por meio da comparação com os resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Teoria de Euler-Bernoulli; Vigas compósitas; Vigas Funcionalmente Graduadas; Fundações tipo Winkler-Pasternak.

ABSTRACT

Beams supported on elastic foundations are widely used in engineering projects. Therefore, the analysis of the displacements suffered by them when supported on an elastic base is extremely important. It is also known that laminated composite beams, as well as functionally graded beams, can provide desirable properties such as stiffness and strength. Therefore, the present work presents solutions for the deflection of anisotropic, laminated and functionally graded composite beams on elastic foundations of the Winkler-Pasternak type, from the coupling between stretching, shearing, bending and twisting. The proposed formulation is based on the Euler-Bernoulli beam theory and the equations that describe the problem and the boundary conditions are derived from the principle of virtual work. The direct integration method can be used to decouple the deflections from axial displacement and torsion. Subsequently, the system of deflection equations decoupled in two principal directions is transformed into a first-order system. The solution of this system of equations is obtained through the parameters variation method, applying the fundamental matrix concept. The validation of the results found for the bending behavior of beams on elastic foundations is carried out by comparing them with the results available in the literature.

Keywords: Euler-Bernoulli Theory; Composite Beams; Functionally Graded Beams; Winkler-Pasternak Type Foundations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma do desenvolvimento do trabalho.	14
Figura 2 – Viga sobre uma base elástica de dois parâmetros.	16
Figura 3 – Modelo de fundação do tipo Winkler.	17
Figura 4 – Modelo de fundação do tipo Pasternak.	18
Figura 5 – Um laminado composto por lâminas com diferentes orientações de fibras.	19
Figura 6 – Desenho esquemático da função que descreve uma propriedade de (a) um material homogêneo, (b) da junção de dois materiais e (c) de um FGM.	20
Figura 7 – Cinemática da teoria de Euler-Bernoulli.	21
Figura 8 – Deslocamento transversal (deflexão) na direção y	22
Figura 9 – Deslocamento transversal (deflexão) na direção z	23
Figura 10 – Deslocamento devido à torção na direção y	23
Figura 11 – Deslocamento devido à torção na direção z	24
Figura 12 – Composição do momento interno M_x	25
Figura 13 – Representação do momento interno M_y	25
Figura 14 – Representação do momento interno M_z	26
Figura 15 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $kw = 0$ sob carga uniformemente distribuída.	51
Figura 16 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $kw = 10$ sob carga uniformemente distribuída.	52
Figura 17 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $kw = 100$ sob carga uniformemente distribuída.	52
Figura 18 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $kw = 0$ sob carga uniformemente distribuída.	54
Figura 19 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $kw = 10$ sob carga uniformemente distribuída.	54
Figura 20 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $kw = 100$ sob carga uniformemente distribuída.	54
Figura 21 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $kw = 0$ sob carga pontual na borda livre.	56
Figura 22 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $kw = 10$ sob carga pontual na borda livre.	57
Figura 23 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $kw = 100$ sob carga pontual na borda livre.	57
Figura 24 – Sequências de empilhamento das lâminas das vigas laminadas analisadas.	59
Figura 25 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída senoidal.	63
Figura 26 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída senoidal.	64
Figura 27 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída senoidal.	64
Figura 28 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída senoidal.	65
Figura 29 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída senoidal.	65
Figura 30 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída senoidal.	66

Figura 31 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída senoidal.....	66
Figura 32 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída senoidal.....	67
Figura 33 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída senoidal.	67
Figura 34 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída uniforme.....	71
Figura 35 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída uniforme.	71
Figura 36 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 0$ sob carga distribuída uniforme.	72
Figura 37 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída uniforme.	72
Figura 38 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída uniforme.	72
Figura 39 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 10$ sob carga distribuída uniforme.....	73
Figura 40 – Deslocamento w_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída uniforme.	73
Figura 41 – Deslocamento u_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída uniforme.	73
Figura 42 – Rotação φ_x de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $kw = 100$ sob carga distribuída uniforme.....	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deflexão máxima para viga simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída.	51
Tabela 2 – Deflexão máxima para viga biengastada sob carga uniformemente distribuída. ..	53
Tabela 3 – Deflexão máxima para viga em balanço sob carga pontual na borda livre.	55
Tabela 4 – Deflexão máxima adimensionalizada para viga em balanço com fundação elástica sob carga pontual na borda livre ($l = 160$ e $h = 12$).	56
Tabela 5 – Propriedades da viga compósita laminada em estudo.	58
Tabela 6 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada simétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	60
Tabela 7 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada cross-ply simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	60
Tabela 8 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	61
Tabela 9 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada simétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	62
Tabela 10 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada cross-ply simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	62
Tabela 11 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.	62
Tabela 12 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada simétrica biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.	68
Tabela 13 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada cross-ply biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.	68
Tabela 14 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada assimétrica biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.	68
Tabela 15 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada simétrica biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.	69
Tabela 16 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada cross-ply biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.	70
Tabela 17 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada assimétrica biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.	70
Tabela 18 – Deflexão máxima para viga FGM simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.	75
Tabela 19 – Deflexão máxima para viga FGM simplesmente apoiada em base elástica sob carregamento uniforme.	75

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivos	12
1.1.1.	Objetivo Geral	12
1.1.2.	Objetivos Específicos	12
1.2	Justificativa	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
3	METODOLOGIA	14
4	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	16
4.1	Modelos de Fundação tipo Winkler e tipo Pasternak	16
4.2	Materiais Compósitos Laminados	18
4.3	Materiais Funcionalmente Graduados	19
4.4	Modelo Cinemático para Viga de Euler-Bernoulli	21
4.5	Trabalho Interno, Trabalho Externo e Trabalho Elástico	24
4.6	Sistema de Equações que Descrevem o Problema	29
4.7	Condições de Contorno	35
5	PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	36
5.1	Método de Variação de Parâmetros	37
5.2	Construção das matrizes fundamentais e dos campos de deslocamentos $w(x)$ e $v(x)$ 39	
5.2.1.	Caso em que não há base elástica ($kw = 0$ e $kp = 0$).....	39
5.2.2.	Caso em que a base elástica tem parâmetros $kw = 0$ e $kp \neq 0$	42
5.2.3.	Caso em que a base elástica tem parâmetros $kw \neq 0$ e $kp \neq 0$	44
5.3	Solução do deslocamento $u(x)$ e da rotação $\varphi(x)$	48
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	49
6.1	Viga isotrópica simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída	50
6.2	Viga isotrópica biengastada sob carga uniformemente distribuída	53
6.3	Viga isotrópica em balanço sob carga pontual na borda livre	55
6.4	Vigas compósitas laminadas anisotrópicas sob carregamento distribuído	57
6.4.1	Viga laminada simplesmente apoiada sob carga distribuída senoidal.....	59
6.4.2	Viga laminada biengastada sob carga uniformemente distribuída	67
6.5	Viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída	74
7	CONCLUSÕES	76
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
	APÊNDICE A – MATRIZ DE RIGIDEZ S	79

APÊNDICE B – OBTENÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES QUE DESCREVEM O PROBLEMA	86
APÊNDICE C – PROVA DE QUE A SOLUÇÃO ENCONTRADA PARA CADA CASO DE COMBINAÇÃO DE PARÂMETROS SATISFAZ O RESPECTIVO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO.....	88
APÊNDICE D – EQUAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS DO EXEMPLO NUMÉRICO 6.4.1	91
APÊNDICE E – EQUAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS DO EXEMPLO NUMÉRICO 6.4.2	105
ANEXO A – PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL (REDDY, 2002)	118
ANEXO B – RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA MATERIAIS ISOTRÓPICOS, ORTOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS (JONES, 1999)	120
ANEXO C – CÁLCULO VARIACIONAL (REDDY, 2002).....	129
ANEXO D – REDUÇÃO DE UM SISTEMA GERAL DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A UM SISTEMA NORMAL (PONTRIAGUIN, 1973).....	133
ANEXO E – SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM (ZILL e CULLEN, 2008).....	135

1 INTRODUÇÃO

Hibbeler (2010) define vigas como elementos estruturais projetados para suportar cargas geralmente aplicadas perpendicularmente a seus eixos longitudinais. Devido a essas cargas, são desenvolvidas forças internas de cisalhamento e momento fletor que, em geral, variam de ponto a ponto ao longo do eixo da viga.

Segundo Fontes, Lima e Lima (2003), as deformações excessivas de qualquer que seja o elemento estrutural podem alterar a aparência e a eficiência da estrutura. O maior problema é quando tais deformações geram severas consequências, como fissuração de elementos estruturais e não-estruturais ou rotação excessiva. Portanto, é de fundamental importância estudar e analisar as deformações e deslocamentos a fim de garantir uma utilização confortável e segura dos corpos estruturais.

Pereira (2021) define viga baldrame como o elemento responsável por ligar a infraestrutura à superestrutura. Ou seja, ela tem como principal função transmitir os esforços das paredes e outras partes da estrutura para a fundação. Por isso, visando a importância de inserir os efeitos do solo na análise estrutural, Santos (2015) faz consideração ao meio contínuo sobre o qual a viga se encontra denominado de base elástica. Existem modelos físicos que procuram descrever o comportamento do solo quando submetido a um carregamento, gerando uma formulação matemática, tais como os modelos propostos por Winkler em 1867 e Pasternak em 1954.

De acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021), os materiais compósitos são amplamente utilizados em diferentes campos da engenharia devido às excelentes propriedades do material, como resistência à fadiga. Tradicionalmente, vigas compósitas apoiadas em bases elásticas têm sido analisadas em relação aos diferentes tipos de solo principalmente nos projetos de engenharia de pontes, ferrovias, rodovias, pavimentos, em edifícios altos, entre outros.

Dentre os materiais heterogêneos com grande aplicabilidade e desenvolvimento científico, tem-se os funcionalmente graduados. Segundo Simsek (2009), um material funcionalmente graduado (FG) é um compósito formado pela combinação da microestrutura dos materiais constituintes, de tal forma que suas propriedades variem continuamente dentro do sólido, obtendo melhores propriedades. Desta forma, segundo o autor, análises estáticas e dinâmicas de estruturas de materiais funcionalmente graduados têm sido cada vez mais realizadas, devido às amplas áreas de aplicação.

Diante da importância do elemento de viga na análise estrutural e sobretudo quando apoiada em base elástica, aliado ao avanço dos materiais compósitos laminados e

funcionalmente graduados, o presente trabalho estudará o comportamento estrutural quando considerada ou não base elástica.

1.1 Objetivos

1.1.1. Objetivo Geral

Desenvolver soluções analíticas para estrutura de vigas constituída de material funcionalmente graduado, anisotrópico e formada por compósito laminado quando apoiada ou não em base elástica.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Desenvolver as equações que descrevem o problema e as suas condições de contorno, a partir do Princípio do Trabalho Virtual, para vigas de Euler-Bernoulli com quatro graus de liberdade (flexão em duas direções principais, deslocamento axial e torção). Para tanto foram considerados:

- 1) Dois parâmetros elásticos (Winkler e Pasternak);
- 2) Material isotrópico;
- 3) Material compósito laminado;
- 4) Material funcionalmente graduado;

- Construir solução para as equações diferenciais e condições de contorno que descrevem o problema por meio do método de variação de parâmetros via construção de matrizes fundamentais;

- Validar os resultados obtidos por meio de comparação com exemplos presentes na literatura;

- Analisar a influência dos parâmetros de Winkler e Pasternak da fundação elástica no comportamento de flexão das vigas funcionalmente graduada, anisotrópica ou isotrópica.

- Analisar a influência do sequenciamento de empilhamento do compósito laminado à resposta mecânica da viga anisotrópica.

1.2 Justificativa

As técnicas utilizadas para a análise estrutural dentro da Engenharia Civil foram se modernizando com o passar do tempo. Contudo, ainda existem muitos quesitos a serem melhorados, pois há uma deficiência em associar uma metodologia concisa a um software que alie tecnologia e praticidade na modelagem de estruturas condizentes com a realidade

construída. Isto pode ser exemplificado pela prática rotineira de cálculo estrutural que desconsidera a ação de uma base deformável sob a edificação (Antoniazzi, 2011).

Desta forma, é importante considerar o efeito da interação entre estrutura e solo para a obtenção mais realista do dimensionamento estrutural. Atentar-se a esta análise impacta significativamente não somente na segurança e na durabilidade, mas também na economia (Antoniazzi, 2011).

Motivado por esta deficiência, o presente trabalho analisa o comportamento de flexão, deslocamento axial e torção para vigas, isotrópicas ou anisotrópicas, apoiadas em base elástica constituída por dois parâmetros quando submetidas a diversas condições de contorno.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

De acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021), a análise estrutural de vigas laminadas apoiadas em fundações elásticas atrai bastante atenção e, por isso, há várias soluções analíticas e numéricas do problema na literatura. No entanto, a grande maioria delas é baseada em técnicas de série e limitada a tipos específicos de condições de contorno ou carregamento. Além disso, de acordo com os autores, não havia uma solução disponível para a análise de flexão de vigas anisotrópicas reforçadas com fibras sobre fundações elásticas. Isto porque as equações resultantes da solução envolvem termos do acoplamento entre estiramento, cisalhamento, flexão e torção, levando à complexidade matemática.

A fim de resolver estes problemas, foi proposta uma solução analítica por Doeva, Masjedi e Weaver (2021) para flexão estática de vigas compósitas pela teoria de Euler-Bernoulli apoiadas em bases elásticas de dois parâmetros. Para este objetivo, propôs-se como abordagem a utilização dos princípios variacionais e o uso das matrizes fundamentais. Visto que termos diferenciais de quarta ordem aparecem nas equações que descrevem a flexão, é realizado um agrupamento entre os campos de deslocamentos $w(x)$ e $v(x)$ e um segundo agrupamento composto por $u(x)$ e $\varphi(x)$ com objetivo de reduzir o sistema de equações diferenciais a um de primeira ordem. Assim, é possível construir as matrizes fundamentais para obtenção da solução analítica do método de variação dos parâmetros. Os autores, por fim, comparam seus resultados pelos obtidos através do Método de Colocação de Chebyshev.

Vo e Thai (2012) analisam o comportamento estático de vigas laminadas usando várias teorias refinadas de deformação por cisalhamento. Os resultados numéricos obtidos por eles foram para vigas compósitas simétricas e assimétricas sob carga uniformemente distribuída e

carga concentrada. Algumas das análises são o deslocamento axial, a flexão, o cisalhamento e a torção.

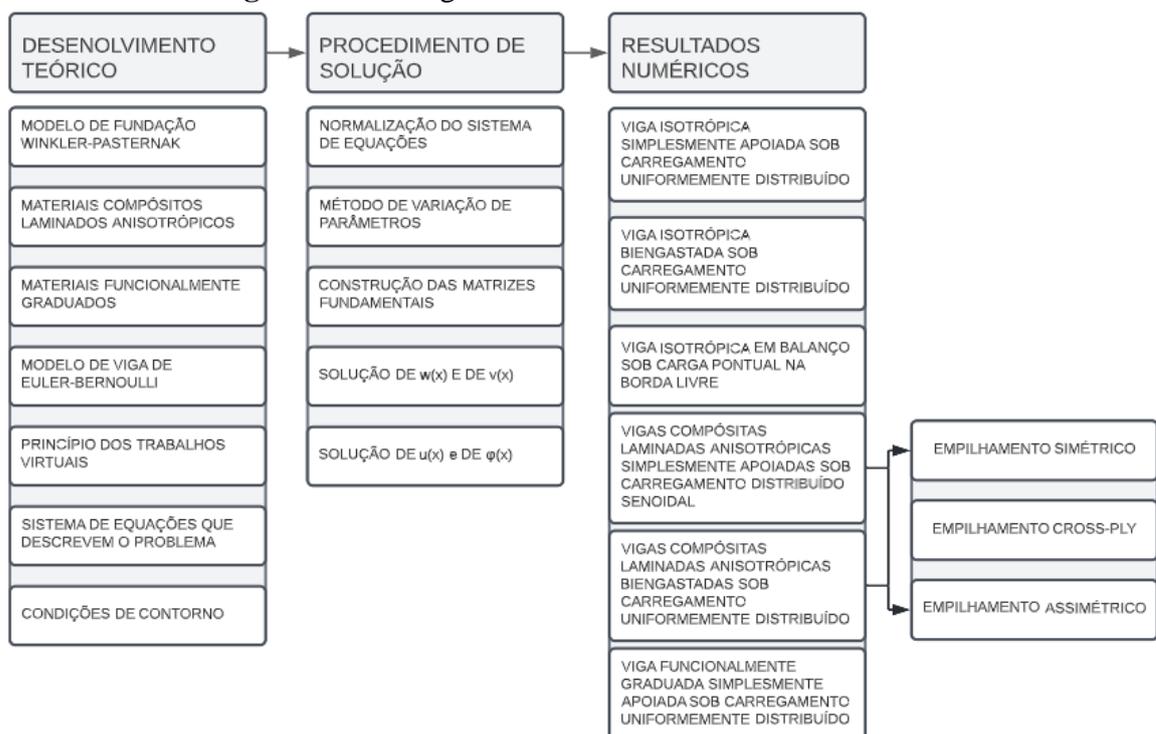
Em Santos (2015), é descrito, em detalhes, os modelos de fundação que são utilizados neste trabalho: o modelo de Winkler e o modelo de Pasternak. O modelo do tipo Winkler conta com um único parâmetro, onde as partículas que compõem a fundação atuam como molas lineares e desconectadas entre si. Como proposta de considerar a interferência que a região carregada opera sobre sua vizinhança, foi proposto por Pasternak um refinamento do modelo de fundação anterior.

Simsek (2019) analisou uma viga simplesmente apoiada funcionalmente graduada sob carga uniformemente distribuída pelo método de Ritz. O autor define vigas funcionalmente graduadas como aquelas cujas propriedades do material variam continuamente na direção da espessura de acordo com a lei de potência. Em suas análises, foram utilizadas as teorias de viga de Timoshenko e a da deformação por cisalhamento de ordem superior.

3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho foi desenvolvida a partir dos tópicos apresentados no fluxograma da Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma do desenvolvimento do trabalho.



Para o desenvolvimento teórico, foram descritos os modelos de base elástica Winkler-Pasternak a partir de Santos (2015). Além disto, os materiais que podem compor a viga em análise foram introduzidos. Para materiais compósitos laminados anisotrópicos, utilizou-se como referência as bibliografias de Reddy (2004) e Jones (1999); e para descrição dos materiais funcionalmente graduados, foram utilizadas as definições de Akshaya, Prakash e Raj (2020), Sharma, Bhandari e Ashirvad (2018) e Jha, Kant e Singh (2013).

O desenvolvimento do modelo cinemático para viga de Euler-Bernoulli foi realizado com base nas explicações de Souza e Cruz (2018), Silva e Silva (2010) e Luo (2008). A partir disso, foram desenvolvidas as equações do trabalho interno, trabalho externo e trabalho elástico da viga, de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021).

A bibliografia de Reddy (2002) foi de extrema importância para a realização deste trabalho, visto que aborda o Princípio do Trabalho Virtual e procedimentos variacionais. Utilizando-os, é possível desenvolver o sistema de equações que descrevem o problema e as condições de contorno de uma viga sobre base elástica com dois parâmetros.

De acordo com o desenvolvimento de Jones (1999), as relações tensão-deformação dos materiais isotrópicos e anisotrópicos foram analisadas. Essa literatura foi de grande importância para a descrição dos coeficientes de rigidez da viga por detalhar a Teoria Clássica de Laminação. Além deste autor, Yu e Hodges (2008) também contribuem de maneira muito significativa por disponibilizarem o equacionamento dos coeficientes de rigidez para vigas anisotrópicas.

A partir do que foi desenvolvido por Doeva, Masjedi e Weaver (2021), são realizadas manipulações matemáticas de modo a desacoplar as deflexões nas direções principais dos deslocamentos axial e rotacional para que seja possível reduzir a ordem do sistema de equações.

Para o procedimento de solução, a bibliografia de Pontriaguin (1973) embasou a redução do sistema geral de equações a um sistema normal ao introduzir novas funções incógnitas x_1 , x_2 , x_3 e x_4 da variável independente x . Com isto, tem-se que o sistema de equações diferenciais torna-se um sistema linear de primeira ordem não-homogêneo. Logo, a partir das explicações de Zill e Cullen (2008), é possível encontrar a solução das deflexões nas direções principais, utilizando o método de Variação de Parâmetros, através de matrizes fundamentais. Obtidas as deflexões, torna-se possível a obtenção do deslocamento axial e da rotação.

Como forma de validar a solução encontrada, são desenvolvidos exemplos numéricos já previstos na literatura para que seja possível comparar os resultados obtidos. Doeva, Masjedi e Weaver (2021) apresentam resultados de deslocamento para vigas isotrópicas simplesmente apoiada e biengastada sob carregamento uniformemente distribuído sobre base elástica

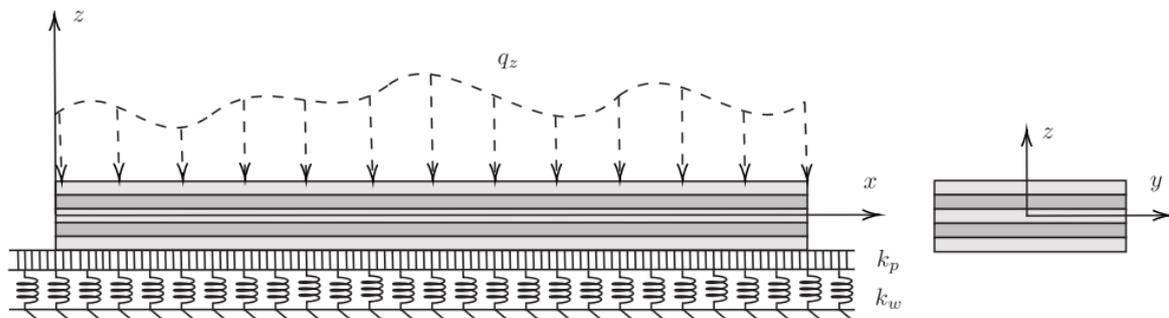
Winkler-Pasternak. Além destes, os autores apresentam também os deslocamentos de vigas compósitas laminadas anisotrópicas simplesmente apoiada e biengastada na base elástica Winkler-Pasternak sob carregamentos distribuídos para diversos tipos de empilhamento de lâminas.

Eisenberger (2003) apresenta a deflexão máxima sofrida por uma viga isotrópica em balanço sob carga pontual na borda livre sem base elástica. Simsek (2009) apresenta os deslocamentos de uma viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído sem base elástica. Nestes dois últimos exemplos, apesar de não ter sido proposto pelos autores, foram realizadas as considerações da base elástica a fim de analisar a influência da mesma nos resultados.

4 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

O objeto de estudo deste trabalho trata-se de uma viga sobre uma fundação elástica de dois parâmetros: k_w e k_p . A viga possui comprimento l na direção x , largura b na direção y e espessura h na direção z , cuja origem do sistema de coordenadas está localizado sobre o eixo da viga, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Viga sobre uma base elástica de dois parâmetros.



Fonte: Doeva, Masjedi e Weaver (2021).

4.1 Modelos de Fundação tipo Winkler e tipo Pasternak

Santos (2015) explica que as vigas podem ser estudadas como estruturas que se encontram em contato com um meio contínuo. Com o objetivo de simplificar as análises, pode-se considerar este meio como uma base elástica. Dois dos modelos que se propõem a isto são o de fundação tipo Winkler e o de tipo Pasternak. Cada modelo demonstra o comportamento do

solo quando submetido a um carregamento e deduz a formulação matemática oriunda do modelo físico.

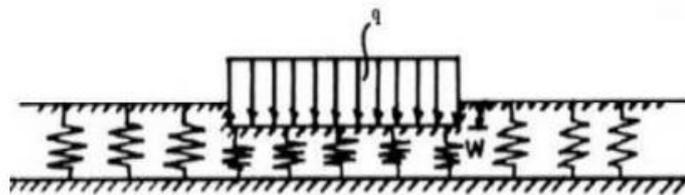
Segundo Santos (2015), o modelo de fundação do tipo Winkler é conhecido como fundação sobre base elástica, porque pressupõe que as partículas que compõem a base se comportam como molas lineares desconectadas entre si para pequenas deformações. Neste modelo, assume-se o solo como um meio contínuo, tornando mais simples a solução da equação diferencial gerada do problema de flexão. A relação entre a força aplicada e o deslocamento sofrido pelo solo para este modelo é linear e está apresentada na Equação (4.1).

$$q = k_w \cdot w \quad (4.1)$$

Onde q é o carregamento linear, k_w é o módulo de elasticidade do solo descrito pelo modelo do tipo Winkler e w é o deslocamento vertical sofrido pelo solo.

A Figura 3 apresenta o esquema do modelo físico de uma fundação do tipo Winkler.

Figura 3 – Modelo de fundação do tipo Winkler.



Fonte: Santos (2015).

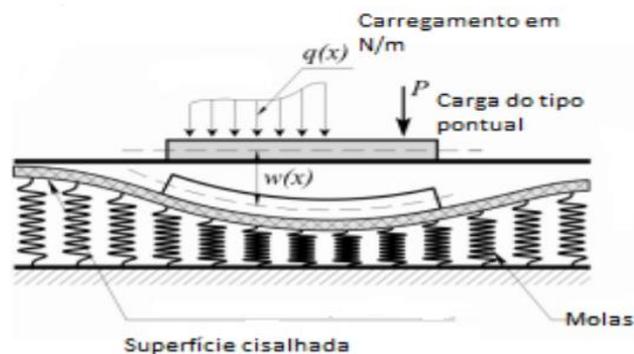
Santos (2015) afirma que a fim de combater a descontinuidade existente na interface entre a região carregada e a não carregada do modelo de Winkler (facilmente perceptível na Figura 3), Pasternak propõe um modelo de fundação que considera a interferência que a região carregada causa na vizinhança. O modelo de Pasternak considera o solo como uma base elástica onde uma das extremidades da mola está fixa a uma camada incompressível e a outra está ligada a uma camada que sofre cisalhamento. Desta forma, a reação do solo sobre a viga é a soma dos efeitos da compressão com a parcela devido ao cisalhamento, conforme Equação (4.2).

$$q = -\frac{d}{dx} \left(k_p \frac{dw}{dx} \right) + k_w \cdot w \quad (4.2)$$

Sendo k_p o coeficiente de rigidez relacionado ao comportamento de cisalhamento do solo.

Para Doeva, Masjedi e Weaver (2021), este modelo representa uma idealização da fundação descrita por uma sequência de molas lineares espaçadas e independentes com rigidez k_w , cujas extremidades são ligadas horizontalmente a uma camada de cisalhamento com parâmetro de interação k_p . A Figura 4 apresenta o esquema do modelo físico de uma fundação do tipo Pasternak.

Figura 4 – Modelo de fundação do tipo Pasternak.



Fonte: Santos (2015).

4.2 Materiais Compósitos Laminados

De acordo com Reddy (2004), um material é dito compósito quando é composto por dois ou mais materiais homogêneos, em escala macroscópica, que juntos produzem propriedades desejáveis que não podem ser alcançadas individualmente. Algumas das propriedades que podem ser melhoradas pela formação de um material compósito são rigidez, resistência, redução de peso, resistência à corrosão, propriedades térmicas, vida útil à fadiga e resistência ao desgaste.

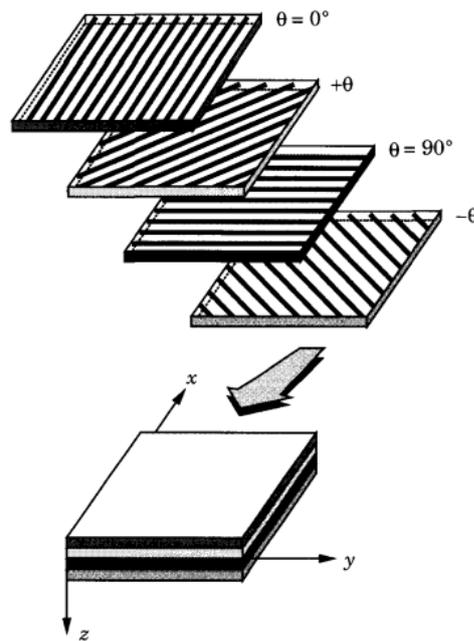
Segundo Jones (1999), uma lâmina é um arranjo, que pode ser plano ou curvo, de fibras unidirecionais ou tecidas em um material matriz de suporte. O conhecimento do comportamento mecânico de uma lâmina é essencial para o entendimento de estruturas laminadas reforçadas com fibras. Isto, porque um material laminado é uma coleção de lâminas empilhadas para atingir a rigidez e a espessura desejadas.

De acordo com Reddy (2004), lâminas reforçadas com fibras unidirecionais podem ser empilhadas de modo que as fibras em cada lâmina sejam orientadas todas na mesma direção ou em direções diferentes. A sequência de várias orientações de uma camada compósita reforçada com fibra em um laminado é denominada de sequência de empilhamento. A forma como o

empilhamento é feito e as propriedades do material das lâminas individuais proporcionam aos projetistas uma liberdade para adaptar a rigidez e a resistência do laminado para corresponder aos requisitos de rigidez e resistência estrutural.

Na Figura 5 é possível visualizar o esquema de um material compósito laminado formado por lâminas com orientações de fibras diferentes.

Figura 5 – Um laminado composto por lâminas com diferentes orientações de fibras.



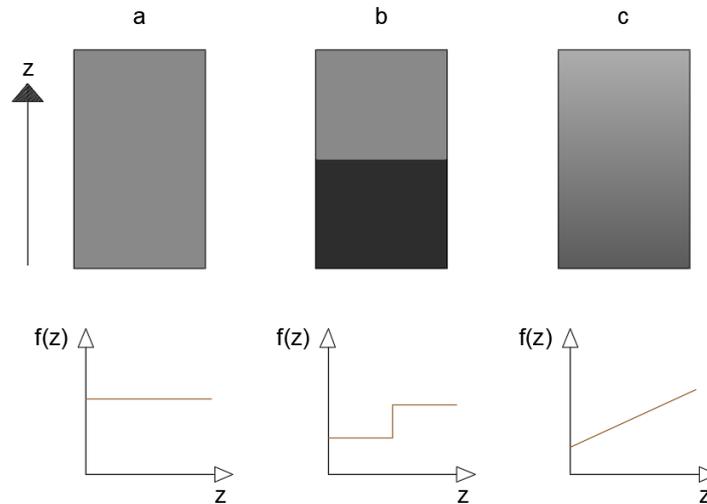
Fonte: Reddy (2004).

4.3 Materiais Funcionalmente Graduados

De acordo com Akshaya, Prakash e Raj (2020), um material é dito funcionalmente graduado quando ele possui propriedades espacialmente variáveis. Este material é projetado para otimizar o desempenho, visto que as propriedades mecânicas, como módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, variam suavemente e continuamente nas direções preferidas. Geralmente, a variação acontece na direção da espessura, em z , e é descrita por uma função $f(z)$.

Sharma, Bhandari e Ashirvad (2018) explicam que esta função é constante em materiais homogêneos. No caso de uma junção de dois materiais homogêneos diferentes, a função $f(z)$ tem uma descontinuidade exatamente na superfície de contato. Já nos materiais funcionalmente graduados, as propriedades desta função mudam continuamente ou quase continuamente ao longo de uma direção. As diferenças do caráter destas funções para cada caso podem ser percebidas e analisadas a partir da Figura 6.

Figura 6 – Desenho esquemático da função que descreve uma propriedade de (a) um material homogêneo, (b) compósito bifásico e (c) de um material funcionalmente graduado.



Fonte: Sharma, Bhandari e Ashirvad (2018) (Adaptado).

Segundo Akshaya, Prakash e Raj (2020), os materiais funcionalmente graduados foram desenvolvidos como um avanço dos materiais compósitos. Eles fornecem excelente capacidade de resistência ao calor e à corrosão e suportam altíssimos gradientes de temperatura. Além disso, eles podem atuar como uma camada que conecta dois materiais incompatíveis de modo a aumentar a resistência de união, diluir a concentração de tensões, controlar as deformações, o desgaste, a corrosão, a resposta dinâmica, entre outros.

De acordo com Akshaya, Prakash e Raj (2020), para determinar as propriedades efetivas do material são utilizados esquemas de homogeneização. Estes esquemas indicam a fração de volume de cada fase e as propriedades efetivas do material, como módulos elásticos, módulos de cisalhamento, densidade, etc. Estão disponíveis na literatura vários modelos de homogeneização com este fim, como a Regra das Misturas (Esquema Voigt), Limites do tipo Hashin-Shtrikman, Modelo do tipo Mori-Tanaka, etc.

Jha, Kant e Singh (2013) apresentam a lei de potência. Ela é uma lei de gradação simples e comumente usada na análise de tensões de materiais funcionalmente graduados. De acordo com esta lei, uma propriedade de material $P(z)$ ao longo da espessura h de uma viga funcionalmente graduada pode ser determinada pela equação abaixo:

$$P(z) = P_b + (P_t - P_b)V_m(z) \quad (4.3)$$

Sendo P_b a propriedade do material na face inferior, P_t na face superior e $V_m(z)$ a fração de volume. Esta última é uma função de z , dada por:

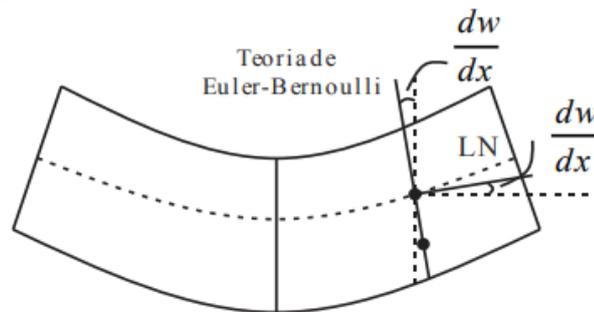
$$V_m(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^K \quad (4.4)$$

Na equação (4.4), K ($0 \leq K < \infty$) é o expoente da fração de volume. Segundo Akshaya, Prakash e Raj (2020), é possível perceber que para $K < 1$, a propriedade do material aumenta rapidamente ao se aproximar da superfície superior; contudo, para $K > 1$, aumenta rapidamente perto da superfície inferior.

4.4 Modelo Cinemático para Viga de Euler-Bernoulli

Sendo viga um dos elementos estruturais mais importantes na Engenharia Civil (Souza e Cruz, 2018), torna-se necessário conhecer as propriedades e o comportamento preciso desta estrutura quando submetida a carregamentos. Na descrição do problema de vigas, uma das teorias que descreve os deslocamentos é o modelo de Euler-Bernoulli, sendo este o mais simples e mais utilizado. A teoria de Euler-Bernoulli, ao adotar um campo de deslocamento, tem como hipótese que uma linha reta e normal à superfície neutra permanecerá reta e normal a esta após a deformação da peça (Silva e Silva, 2010), como apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Cinemática da teoria de Euler-Bernoulli.



Fonte: Silva e Cruz (2018).

De acordo com Luo (2008), o deslocamento de um ponto qualquer na seção transversal consiste no deslocamento do corpo rígido na linha de referência e na rotação da seção transversal da viga. Portanto, é possível descrever o campo de deslocamento conforme as Equações (4.5), (4.6) e (4.7).

$$U_x = u(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x) \quad (4.5)$$

$$U_y = v(x) - z\varphi(x) \quad (4.6)$$

$$U_z = w(x) + y\varphi(x) \quad (4.7)$$

Nas equações (4.5) - (4.7), U_x , U_y e U_z são as componentes do vetor deslocamento; $u(x)$ é o deslocamento axial da viga na direção x ; $v(x)$ e $w(x)$ são os deslocamentos transversais da viga nas direções y e z , respectivamente; e φ , θ_y e θ_z são as rotações da seção transversal da viga em torno de x , y e z , respectivamente.

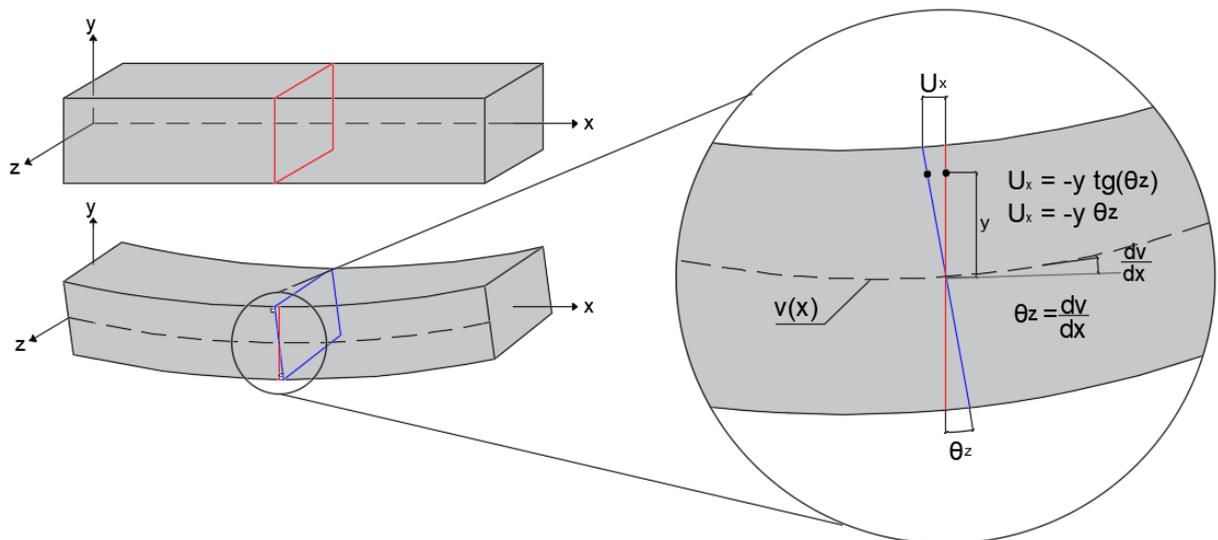
Como já foi citado, visto que na cinemática das vigas de Euler-Bernoulli, seções planas das vigas continuam planas e ortogonais à linha elástica após a deformação, tem-se que:

$$\theta_y = -\frac{dw}{dx} \quad (4.8)$$

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} \quad (4.9)$$

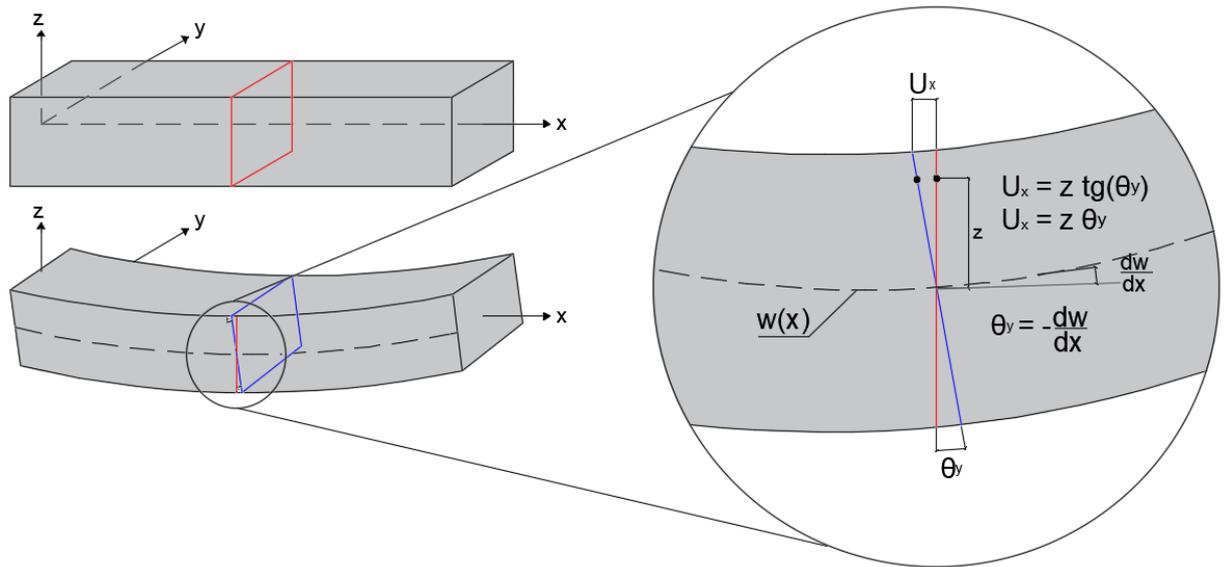
O deslocamento longitudinal U_x é constituído pelas parcelas dos deslocamentos devido à deflexão nas direções y (ver Figura 8) e z (ver Figura 9); além do deslocamento axial no eixo centroidal.

Figura 8 – Deslocamento transversal (deflexão) na direção y .



Fonte: Elaboração própria (2022).

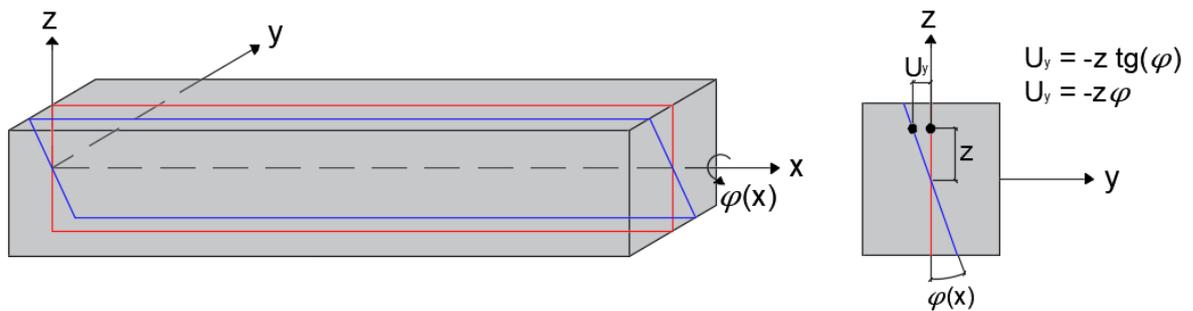
Figura 9 – Deslocamento transversal (deflexão) na direção z.



Fonte: Elaboração própria (2022).

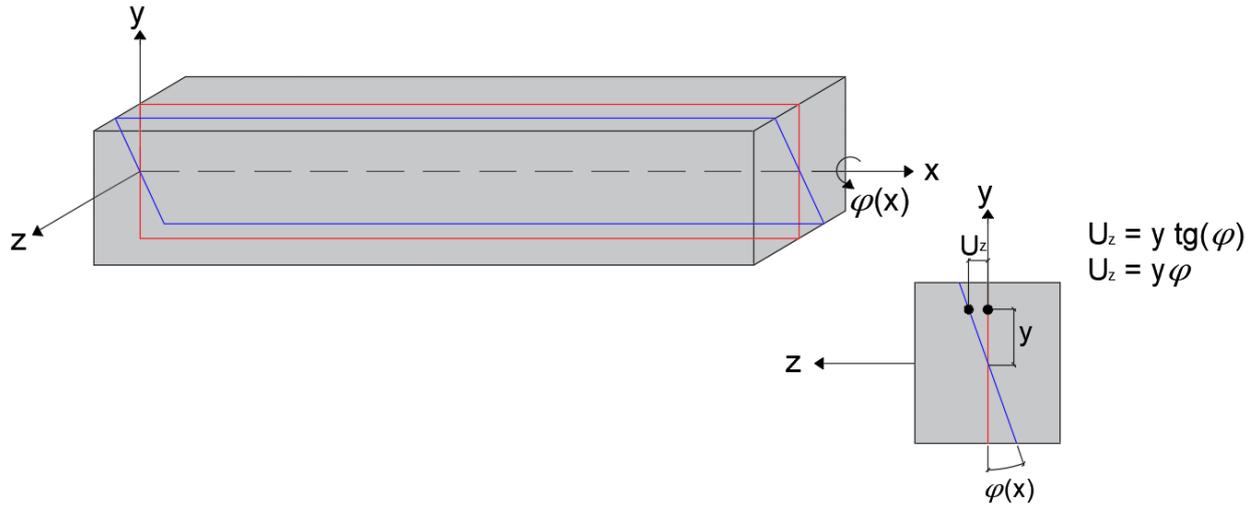
O deslocamento U_y , devido à torção da seção transversal da viga na direção y, está demonstrado na Figura 10, enquanto que o deslocamento U_z na direção z está apresentado na Figura 11.

Figura 10 – Deslocamento devido à torção na direção y.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 11 – Deslocamento devido à torção na direção z.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Segundo Luo (2008), é possível adotar a relação entre deformação e deslocamento como linear ao assumir que as deformações são pequenas. Dessa forma, os campos de deformação da viga podem ser expressos de acordo com as Equações (4.10), (4.11) e (4.12).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\theta'_y - y\theta'_z \quad (4.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = (v' - \theta_z) - z\varphi' = -z\varphi' \quad (4.11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = (w' + \theta_y) + y\varphi' = +y\varphi' \quad (4.12)$$

4.5 Trabalho Interno, Trabalho Externo e Trabalho Elástico

A solicitação à viga em estudo se dá pela flexão em duas direções principais (y e z), pelo deslocamento axial e pela torção. Portanto, de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021), as forças e momentos internos na viga podem ser calculados de acordo com as Equações (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16).

$$F_x = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (4.13)$$

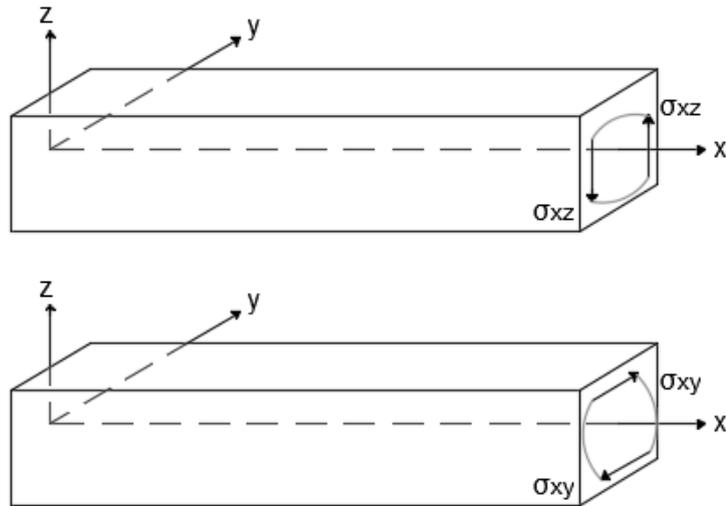
$$M_x = \int_A (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA \quad (4.14)$$

$$M_y = \int_A z\sigma_{xx} dA \quad (4.15)$$

$$M_z = - \int_A y \sigma_{xx} dA \quad (4.16)$$

O momento interno M_x , dado pela Equação (4.14), está representado esquematicamente na Figura 12.

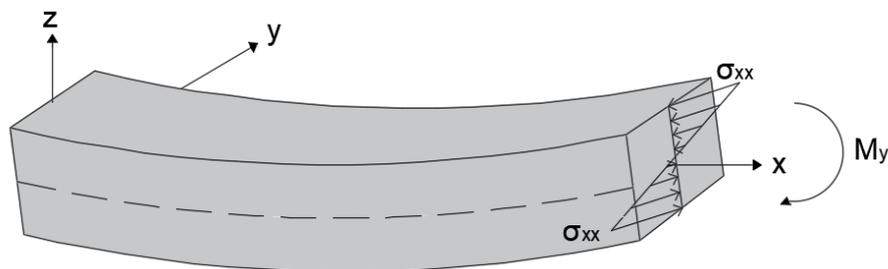
Figura 12 – Composição do momento interno M_x .



Fonte: Elaboração própria (2022).

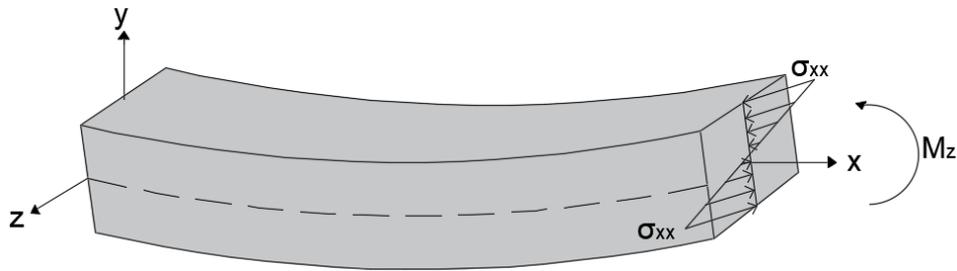
Da mesma maneira, o momento interno M_y , dado pela Equação (4.15), e o M_z , dado pela Equação (4.16), estão representados esquematicamente na Figura 13 e Figura 14 respectivamente.

Figura 13 – Representação do momento interno M_y .



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 14 – Representação do momento interno M_z .



Fonte: Elaboração própria (2022).

Reddy (2002) define trabalho como o produto interno do deslocamento e força. Trata-se de uma grandeza escalar positiva sempre que o deslocamento e a força têm a mesma direção e negativa se estiverem em direções opostas.

A energia interna de deformação elástica para vigas pode ser representada pela Equação (4.17).

$$\int_V W_{int} dV = \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (4.17)$$

Substituindo as Equações (4.10), (4.11) e (4.12) na Equação (4.17) e fazendo uso das Equações (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16), é possível obter a seguinte relação para o trabalho interno da viga:

$$\begin{aligned} \int_V W_{int} dV &= \int_V (\sigma_{xx} u' + \sigma_{xx} z \theta'_y - \sigma_{xx} y \theta'_z - \sigma_{xy} z \varphi' + \sigma_{xz} y \varphi') dV \\ \int_0^l W_{int} dx &= \int_0^l (F_x u' + M_x \varphi' + M_y \theta'_y + M_z \theta'_z) dx \\ \int_0^l W_{int} dx &= \int_0^l (F_x u' + M_x \varphi' - M_y w'' + M_z v'') dx \end{aligned} \quad (4.18)$$

Conforme detalhado no Anexo A, segundo Reddy (2002), o deslocamento virtual é um deslocamento infinitesimal e irreal, que ao ser multiplicado pelas forças reais causadoras deste, resultam no trabalho virtual. Ao impor nulidade ao somatório de todos os trabalhos virtuais que atuam no corpo, é possível determinar a configuração de equilíbrio pelo princípio dos trabalhos virtuais.

Segundo Doeva, Masjedi e Weaver (2021), o princípio do trabalho virtual para uma viga sobre uma fundação elástica conta também com a variação do trabalho elástico δW_f . Portanto, o princípio do trabalho virtual neste caso é expresso conforme Equação (4.19):

$$\int_0^l (\delta W_{int} + \delta W_f - \delta W_{ext}) dx = 0 \quad (4.19)$$

Doeva, Masjedi e Weaver (2021) ainda apresentam a variação do trabalho interno δW_{int} como:

$$\int_0^l \delta W_{int} dx = \int_0^l \delta \epsilon^T N dx = \int_0^l \delta \epsilon^T S \epsilon dx \quad (4.20)$$

Sendo ϵ o vetor de deformações, N o vetor de forças e momentos internos e S a matriz de rigidez definidos abaixo.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ \varphi' \\ -w'' \\ v'' \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} F_x \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{EA} & S_{ET} & S_{EF} & S_{EL} \\ S_{ET} & S_{GJ} & S_{FT} & S_{LT} \\ S_{EF} & S_{FT} & S_{EI_y} & S_{FL} \\ S_{EL} & S_{LT} & S_{FL} & S_{EI_z} \end{bmatrix}$$

Onde S_{EA} é a rigidez extensional, S_{GJ} é a rigidez de torção, S_{EI_y} é a rigidez de flexão fora do plano, S_{EI_z} é a rigidez de flexão no plano, S_{ET} é o acoplamento entre deslocamento axial e torção, S_{EF} é o acoplamento entre flexão fora do plano e deslocamento axial, S_{EL} é o acoplamento entre flexão no plano e deslocamento axial, S_{FT} é o acoplamento entre flexão e torção fora do plano, S_{LT} é o acoplamento entre flexão e torção no plano e S_{FL} é o acoplamento entre a flexão fora do plano e no plano.

Estes coeficientes de rigidez podem ser simplificados e especificados a depender do material que compõe a viga. Por isso, o Apêndice A reúne as equações específicas dos

coeficientes de rigidez para os casos de vigas isotrópicas, vigas funcionalmente graduadas e vigas compósitas laminadas anisotrópicas.

A partir da Equação (4.20), é possível afirmar que a variação do trabalho interno na viga em estudo é correspondente à Equação (4.21).

$$\int_0^l \delta \epsilon^T S \epsilon dx = \int_0^l [\delta u' \quad \delta \varphi' \quad -\delta w'' \quad \delta v''] \cdot \begin{bmatrix} S_{EA} & S_{ET} & S_{EF} & S_{EL} \\ S_{ET} & S_{GJ} & S_{FT} & S_{LT} \\ S_{EF} & S_{FT} & S_{EI_y} & S_{FL} \\ S_{EL} & S_{LT} & S_{FL} & S_{EI_z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u' \\ \varphi' \\ -w'' \\ v'' \end{bmatrix} dx$$

$$\int_0^l \delta \epsilon^T S \epsilon dx = \int_0^l [(S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'') \delta u' + (S_{ET} u' + S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') \delta \varphi' + (-S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - S_{FL} v'') \delta w'' + (S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \delta v''] dx \quad (4.21)$$

Doeva, Masjedi e Weaver (2021) definem a variação do trabalho externo δW_{ext} para a viga em estudo conforme a Equação (4.22).

$$\int_0^l \delta W_{ext} dx = \int_0^l \delta \bar{U}^T Q dx \quad (4.22)$$

O vetor de deslocamentos e torção, \bar{U} , e o vetor de forças externas e torque, Q , estão apresentados abaixo. Neste último, q_x , q_y e q_z são as cargas distribuídas e q_φ corresponde ao torque distribuído, todos podendo variar em x .

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} u(x) \\ \varphi(x) \\ w(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_x(x) \\ q_\varphi(x) \\ q_z(x) \\ q_y(x) \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se que o trabalho externo na viga é dado pela Equação (4.23).

$$\int_0^l \delta W_{ext} dx = \int_0^l [\delta u \quad \delta \varphi \quad \delta w \quad \delta v] \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_\varphi \\ q_z \\ q_y \end{bmatrix} dx$$

$$\int_0^l \delta W_{ext} dx = \int_0^l (\delta u q_x + \delta \varphi q_\varphi + \delta w q_z + \delta v q_y) dx \quad (4.23)$$

Por fim, tem-se que, de acordo com Robinson e Adali (2018), a variação do trabalho elástico para o caso de base elástica de Winkler-Pasternak é dada pela Equação (4.24).

$$\int_0^l \delta W_f dx = \int_0^l (\delta w k_w w + \delta w' k_p w') dx \quad (4.24)$$

Portanto, ao substituir as Equações (4.21), (4.23) e (4.24) na Equação (4.19), tem-se que o princípio do trabalho virtual para uma viga sobre base elástica com dois parâmetros pode ser expresso de acordo com a Equação (4.25).

$$\int_0^l (\delta W_{int} + \delta W_f - \delta W_{ext}) dx = 0$$

$$\int_0^l \left[(S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'') \delta u' + (S_{ET} u' + S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') \delta \varphi' + (-S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - S_{FL} v'') \delta w'' + (S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \delta v'' + (\delta w k_w w + \delta w' k_p w') - (\delta u q_x + \delta \varphi q_\varphi + \delta w q_z + \delta v q_y) \right] dx = 0 \quad (4.25)$$

4.6 Sistema de Equações que Descrevem o Problema

A partir do princípio do trabalho virtual é possível obter o sistema de equações que descrevem o problema por meio dos princípios variacionais. Para maiores detalhes destes princípios, ver Anexo C.

Reddy (2002) demonstra que é possível obter as equações diferenciais e as condições de contorno, que descrevem o problema em análise, por meio da Equação de Euler, e assim construir as Equações (4.26) – (4.35). O procedimento de cálculo de obtenção dessas relações está desenvolvido no Apêndice B.

$$-S_{EA}u'' - S_{ET}\varphi'' + S_{EF}w''' - S_{EL}v''' - q_x = 0 \quad (4.26)$$

$$-S_{ET}u'' - S_{GJ}\varphi'' + S_{FT}w''' - S_{LT}v''' - q_\varphi = 0 \quad (4.27)$$

$$-S_{EF}u''' - S_{FT}\varphi''' + S_{EI_y}w^{(IV)} - S_{FL}v^{(IV)} + k_w w - k_p w'' - q_z = 0 \quad (4.28)$$

$$S_{EL}u''' + S_{LT}\varphi''' - S_{FL}w^{(IV)} + S_{EI_z}v^{(IV)} - q_y = 0 \quad (4.29)$$

$$u = 0 \text{ ou } S_{EA}u' + S_{ET}\varphi' - S_{EF}w'' + S_{EL}v'' = f_x \quad (4.30)$$

$$\varphi = 0 \text{ ou } S_{ET}u' + S_{GJ}\varphi' - S_{FT}w'' + S_{LT}v'' = m_x \quad (4.31)$$

$$w' = 0 \text{ ou } -S_{EF}u' - S_{FT}\varphi' + S_{EI_y}w'' - S_{FL}v'' = -m_y \quad (4.32)$$

$$v' = 0 \text{ ou } S_{EL}u' + S_{LT}\varphi' - S_{FL}w'' + S_{EI_z}v'' = m_z \quad (4.33)$$

$$w = 0 \text{ ou } S_{EF}u'' + S_{FT}\varphi'' - S_{EI_y}w''' + S_{FL}v''' + k_p w' = f_z \quad (4.34)$$

$$v = 0 \text{ ou } -S_{EL}u'' - S_{LT}\varphi'' + S_{FL}w''' - S_{EI_z}v''' = f_y \quad (4.35)$$

Nas equações acima, tem-se que f_x , f_y e f_z são cargas concentradas de contorno nas direções x , y e z , respectivamente. Além disso, m_x é o torque e m_y e m_z são os momentos de contorno em relação aos eixos y e z , respectivamente.

Conforme feito por Doeva, Masjedi e Weaver (2021), é possível realizar manipulações e escrever o sistema de equações que descrevem o problema na forma vetorial e matricial. Sejam:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$W = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} q_x \\ q_\varphi \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$Q_z = \begin{bmatrix} q_z \\ q_y \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$F_x = \begin{bmatrix} f_x \\ m_x \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$F_z = \begin{bmatrix} f_z \\ f_y \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$M_y = \begin{bmatrix} -m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$A = \begin{bmatrix} S_{EA} & S_{ET} \\ S_{ET} & S_{GF} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_{EF} & -S_{EL} \\ S_{FT} & -S_{LT} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$D = \begin{bmatrix} S_{EIy} & -S_{FL} \\ -S_{FL} & S_{ELz} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$K_w = \begin{bmatrix} k_w & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

A partir disso, é possível escrever o sistema de equações presente nas Equações (4.26) – (4.29) como segue:

$$-AU'' + BW''' = Q_x \quad (4.48)$$

$$-B^T U''' + DW^{(IV)} + K_w W - K_p W'' = Q_z \quad (4.49)$$

Já o sistema das condições de contorno das Equações (4.30) – (4.35) pode ser escrito da seguinte forma:

$$AU' - BW'' = F_x \quad (4.50)$$

$$-B^T U' + DW'' = M_y \quad (4.51)$$

$$B^T U'' - DW''' + K_p W' = F_z \quad (4.52)$$

Esta forma de apresentação das equações diferenciais é importante pois possibilita reduzir o sistema de equações diferencial em um sistema normal, conforme estabelecido pelo teorema de existência e unicidade para sistemas gerais de Pontriaguin (1973).

A partir da metodologia proposta por Doeva, Masjedi e Weaver (2021), é possível derivar a Equação (4.48) para obter U''' e posteriormente substituí-la na Equação (4.49). Com isso, obtém-se que:

$$\begin{aligned} -AU''' + BW^{(IV)} &= Q'_x \\ U''' &= A^{-1}BW^{(IV)} - A^{-1}Q'_x \end{aligned} \quad (4.53)$$

Substituindo a Equação (4.53) na (4.49):

$$\begin{aligned} -B^T(A^{-1}BW^{(IV)} - A^{-1}Q'_x) + DW^{(IV)} + K_w W - K_p W'' &= Q_z \\ -B^T A^{-1} B W^{(IV)} + B^T A^{-1} Q'_x + DW^{(IV)} + K_w W - K_p W'' &= Q_z \\ (D - B^T A^{-1} B) W^{(IV)} &= +K_p W'' - K_w W + Q_z - B^T A^{-1} Q'_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{(IV)} &= (D - B^T A^{-1} B)^{-1} K_p W'' - (D - B^T A^{-1} B)^{-1} K_w W \\ &\quad + (D - B^T A^{-1} B)^{-1} Q_z - (D - B^T A^{-1} B)^{-1} B^T A^{-1} Q'_x \end{aligned} \quad (4.54)$$

Define-se B_1 , B_2 e B_3 como:

$$B_1 = (D - B^T A^{-1} B)^{-1} K_p \quad (4.55)$$

$$B_2 = (D - B^T A^{-1} B)^{-1} K_w \quad (4.56)$$

$$B_3 = (D - B^T A^{-1} B)^{-1} Q_z - (D - B^T A^{-1} B)^{-1} B^T A^{-1} Q'_x \quad (4.57)$$

Desta forma, é possível reescrever a Equação (4.54) como:

$$W^{(IV)} = B_1 W'' - B_2 W + B_3 \quad (4.58)$$

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, obtém-se que as matrizes B_1 , B_2 e B_3 são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} m(x) \\ n(x) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= k_p [S_{EL}^2 S_{GJ} + S_{ELz} (S_{ET}^2 - S_{EA} S_{GJ}) - 2 S_{EL} S_{ET} S_{LT} + S_{EA} S_{LT}^2] / [-S_{ET}^2 S_{FL}^2 + \\ & S_{EA} S_{ELz} S_{FT}^2 - S_{EL}^2 S_{FT}^2 + S_{EF}^2 S_{ELz} S_{GJ} - 2 S_{EF} S_{EL} S_{FL} S_{GJ} + S_{EA} S_{FL}^2 S_{GJ} + 2 S_{EF} S_{EL} S_{FT} S_{LT} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + \\
& S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big] \\
& c = k_p [S_{ET}^2S_{FL} + S_{EF}S_{EL}S_{GJ} - S_{EA}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FT}S_{LT} - S_{ET}(S_{EL}S_{FT} + S_{EF}S_{LT})] / \\
& \Big[-S_{ET}^2S_{FL}^2 + S_{EA}S_{EI_z}S_{FT}^2 - S_{EL}^2S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{EI_z}S_{GJ} - 2S_{EF}S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FL}^2S_{GJ} + \\
& 2S_{EF}S_{EL}S_{FT}S_{LT} - 2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + \\
& S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big] \\
& b = k_w [S_{EL}^2S_{GJ} + S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2] / \Big[-S_{ET}^2S_{FL}^2 + \\
& S_{EA}S_{EI_z}S_{FT}^2 - S_{EL}^2S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{EI_z}S_{GJ} - 2S_{EF}S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FL}^2S_{GJ} + 2S_{EF}S_{EL}S_{FT}S_{LT} - \\
& 2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + \\
& S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big] \\
& d = k_w [S_{ET}^2S_{FL} + S_{EF}S_{EL}S_{GJ} - S_{EA}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FT}S_{LT} - S_{ET}(S_{EL}S_{FT} + S_{EF}S_{LT})] / \\
& \Big[-S_{ET}^2S_{FL}^2 + S_{EA}S_{EI_z}S_{FT}^2 - S_{EL}^2S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{EI_z}S_{GJ} - 2S_{EF}S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FL}^2S_{GJ} + \\
& 2S_{EF}S_{EL}S_{FT}S_{LT} - 2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + \\
& S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big] \\
& m(x) = \{ [S_{ET}^2S_{FL} + S_{EF}S_{EL}S_{GJ} - S_{EA}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FT}S_{LT} - S_{ET}(S_{EL}S_{FT} + \\
& S_{EF}S_{LT})] q_y(x) + [S_{EL}^2S_{GJ} + S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2] q_z(x) + \\
& [-S_{EI_z}S_{ET}S_{FT} + S_{EF}S_{EI_z}S_{GJ} - S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{ET}S_{FL}S_{LT} + S_{EL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}S_{LT}^2] q'_x(x) + \\
& [-S_{EF}S_{EI_z}S_{ET} + S_{EL}S_{ET}S_{FL} + S_{EA}S_{EI_z}S_{FT} - S_{EL}^2S_{FT} + S_{EF}S_{EL}S_{LT} - S_{EA}S_{FL}S_{LT}] q'_\phi(x) \} / \\
& \Big[-S_{ET}^2S_{FL}^2 + S_{EA}S_{EI_z}S_{FT}^2 - S_{EL}^2S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{EI_z}S_{GJ} - 2S_{EF}S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FL}^2S_{GJ} + \\
& 2S_{EF}S_{EL}S_{FT}S_{LT} - 2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + \\
& S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big] \\
& n(x) = \{ [-2S_{EF}S_{ET}S_{FT} + S_{EA}S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{GJ}S_{EI_y}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})] q_y(x) + [S_{ET}^2S_{FL} + \\
& S_{EF}S_{EL}S_{GJ} - S_{EA}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FT}S_{LT} - S_{ET}(S_{EL}S_{FT} + S_{EF}S_{LT})] q_z(x) + [-S_{ET}S_{FL}S_{FT} + \\
& S_{EL}S_{FT}^2 - S_{EI_y}S_{EL}S_{GJ} + S_{EF}S_{FL}S_{GJ} + S_{EI_y}S_{ET}S_{LT} - S_{EF}S_{FT}S_{LT}] q'_x(x) + [S_{EI_y}S_{EL}S_{ET} - \\
& S_{EF}S_{ET}S_{FL} - S_{EF}S_{EL}S_{FT} + S_{EA}S_{FL}S_{FT} + S_{EF}^2S_{LT} - S_{EA}S_{EI_y}S_{LT}] q'_\phi(x) \} / [-S_{ET}^2S_{FL}^2 + \\
& S_{EA}S_{EI_z}S_{FT}^2 - S_{EL}^2S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{EI_z}S_{GJ} - 2S_{EF}S_{EL}S_{FL}S_{GJ} + S_{EA}S_{FL}^2S_{GJ} + 2S_{EF}S_{EL}S_{FT}S_{LT} -
\end{aligned}$$

$$2S_{EA}S_{FL}S_{FT}S_{LT} - S_{EF}^2S_{LT}^2 + 2S_{ET}(-S_{EF}S_{EI_z}S_{FT} + S_{EL}S_{FL}S_{FT} + S_{EF}S_{FL}S_{LT}) + S_{EI_y}(S_{EL}^2S_{GJ}S_{EI_z}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) - 2S_{EL}S_{ET}S_{LT} + S_{EA}S_{LT}^2) \Big]$$

As matrizes B_1 , B_2 e B_3 podem ser simplificadas e reescritas a depender do material da viga. Isto acontece porque alguns dos coeficientes de rigidez da matriz constitutiva são nulos, como apresentado no Apêndice A.

Logo, tem-se que para vigas isotrópicas, as matrizes B_1 , B_2 e B_3 são formadas por:

$$a = \frac{k_p}{EI_y} \quad (4.62)$$

$$c = 0 \quad (4.63)$$

$$b = \frac{k_w}{EI_y} \quad (4.64)$$

$$d = 0 \quad (4.65)$$

$$m(x) = \frac{q_z(x)}{EI_y} \quad (4.66)$$

$$n(x) = \frac{q_y(x)}{EI_z} \quad (4.67)$$

Já para vigas funcionalmente graduadas, as matrizes B_1 , B_2 e B_3 são compostas por:

$$a = \frac{k_p S_{EA}}{-S_{EF}^2 + S_{EA}S_{EI_y}} \quad (4.68)$$

$$c = 0 \quad (4.69)$$

$$b = \frac{k_w S_{EA}}{-S_{EF}^2 + S_{EA}S_{EI_y}} \quad (4.70)$$

$$d = 0 \quad (4.71)$$

$$m(x) = \frac{-S_{EA}q_z(x) + S_{EF}q'_x(x)}{S_{EF}^2 - S_{EA}S_{EI_y}} \quad (4.72)$$

$$n(x) = \frac{q_y(x)}{S_{EI_z}} \quad (4.73)$$

Para vigas compósitas laminadas anisotrópicas, as matrizes B_1 , B_2 e B_3 são formadas por:

$$a = \frac{k_p(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})}{-2S_{EF}S_{ET}S_{FT} + S_{EA}S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{GJ} + S_{EI_y}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})} \quad (4.74)$$

$$c = 0 \quad (4.75)$$

$$b = \frac{k_w(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})}{-2S_{EF}S_{ET}S_{FT} + S_{EA}S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{GJ} + S_{EI_y}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})} \quad (4.76)$$

$$d = 0 \quad (4.77)$$

$$m(x) = \frac{(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})q_z(x) + (-S_{ET}S_{FT} + S_{EF}S_{GJ})q'_x(x) + (-S_{EF}S_{ET} + S_{EA}S_{FT})q'_\varphi(x)}{-2S_{EF}S_{ET}S_{FT} + S_{EA}S_{FT}^2 + S_{EF}^2S_{GJ} + S_{EI_y}(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})} \quad (4.78)$$

$$n(x) = \frac{q_y(x)}{S_{EI_z}} \quad (4.79)$$

4.7 Condições de Contorno

Para uma extremidade simplesmente apoiada da viga, tem-se que as condições de contorno, apresentadas anteriormente nas Equações (4.30) – (4.35), que devem ser aplicadas no ponto são:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \\ \varphi = 0 \\ m_y = 0 \\ m_z = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

Da mesma forma, as condições de contorno que uma extremidade engastada precisa obedecer são:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \\ \varphi = 0 \\ w' = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \quad (4.81)$$

Para uma extremidade livre, tem-se que as condições de contorno no ponto são dadas por:

$$\begin{cases} f_x = \bar{f}_x \\ f_y = \bar{f}_y \\ f_z = \bar{f}_z \\ m_x = \bar{m}_x \\ m_y = \bar{m}_y \\ m_z = \bar{m}_z \end{cases} \quad (4.82)$$

Portanto, uma viga simplesmente apoiada possui como condições de contorno das duas extremidades, em $x = 0$ e $x = l$, as apresentadas na Equação (4.80). Por sua vez, uma viga biengastada possui em ambas as extremidades as condições de contorno reunidas na Equação (4.81). Já uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra (em balanço), possui em uma das extremidades as condições de contorno da Equação (4.81) e na outra as da Equação (4.82).

5 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

De acordo com Pontriaguin (1973), ao supor que uma função é contínua no intervalo e que as suas derivadas parciais também são contínuas, é possível reduzir um sistema geral de equações a um sistema normal, conforme detalhado no Anexo D. Ao introduzir novas funções incógnitas x_1 , x_2 , x_3 e x_4 da variável independente x , definidas como:

$$x_1 = W \quad (5.1)$$

$$x_2 = W' \quad (5.2)$$

$$x_3 = W'' \quad (5.3)$$

$$x_4 = W''' \quad (5.4)$$

É possível afirmar que:

$$x_1' = W' = x_2 \quad (5.5)$$

$$x_2' = W'' = x_3 \quad (5.6)$$

$$x_3' = W''' = x_4 \quad (5.7)$$

$$x_4' = W^{(IV)} = B_1 x_3 - B_2 x_1 + B_3 \quad (5.8)$$

Portanto, conforme realizado por Doeva, Masjedi e Weaver (2021), pode-se reescrever o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem de oito dimensões já definidos em (5.5) – (5.8) como

$$X' = Mx + f \quad (5.9)$$

Onde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I \\ -B_2 & 0_{2 \times 2} & B_1 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Uma vez que x_1, x_2, x_3 e x_4 são vetores 2×1 , tem-se que $0_{2 \times 2}$ é uma matriz nula de dimensão 2×2 , $0_{2 \times 1}$ é uma matriz nula de dimensão 2×1 e I é uma matriz identidade de dimensão 2×2 . M é chamada de matriz complementar.

5.1 Método de Variação de Parâmetros

Uma vez que a Equação (5.9) é um sistema linear de primeira ordem não-homogêneo, é possível encontrar sua solução utilizando o método de Variação de Parâmetros, através do conceito de matriz fundamental. O desenvolvimento desta metodologia pode ser feito de acordo com Zill e Cullen (2008), cujos detalhes estão presentes no Anexo E.

Segundo Zill e Cullen (2008), a solução geral do sistema linear de primeira ordem não-homogêneo pode ser dada pela seguinte expressão (ver Anexo E):

$$X = \phi(x)C + \phi(x) \int \phi^{-1}(x) f(x) dx \quad (5.10)$$

Na equação acima, tem-se que ϕ é a matriz fundamental e C é um vetor coluna de oito componentes de constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. A matriz fundamental é constituída, em sua coluna, pelos vetores solução do sistema homogêneo equivalente, que pode ser obtido por meio de um problema de autovalor-autovetor (Zill e Cullen, 2008).

De acordo com o Teorema 8.2.1 proposto por Zill e Cullen (2008), a solução geral para sistemas homogêneos é dada por:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n \quad (5.11)$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 X_1 &= K_1 e^{\lambda_1 x} \\
 X_2 &= K_2 e^{\lambda_2 x} \\
 &\vdots \\
 X_n &= K_n e^{\lambda_n x}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores reais distintos da matriz de coeficientes M do sistema homogêneo $X' = MX$ e K_1, K_2, \dots, K_n são os autovetores correspondentes.

Ainda de acordo com Zill e Cullen (2008), diz-se que um autovalor tem multiplicidade m se ele for gerado m vezes. Caso haja apenas um autovetor correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m , é possível encontrar m soluções linearmente independentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= K_{11} e^{\lambda_1 x} \\
 X_2 &= K_{21} x e^{\lambda_1 x} + K_{22} e^{\lambda_1 x} \\
 X_3 &= K_{31} \frac{x^2}{2!} e^{\lambda_1 x} + K_{32} x e^{\lambda_1 x} + K_{33} e^{\lambda_1 x} \\
 &\vdots \\
 X_m &= K_{m1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 x} + K_{m2} \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 x} + \dots + K_{mm} e^{\lambda_1 x}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Sendo K_{ij} vetores colunas, que podem ser determinados de maneira que:

$$\begin{aligned}
 X_1: & (A - \lambda_1 I) K_{11} = 0 \\
 X_2: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{21} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{22} = K_{21} \end{cases} \\
 X_3: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{31} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{32} = K_{31} \\ (A - \lambda_1 I) K_{33} = K_{32} \end{cases} \\
 & \vdots \\
 X_m: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{m1} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{m2} = K_{m1} \\ \vdots \\ (A - \lambda_1 I) K_{mm} = K_{m(m-1)} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Uma vez construída a solução do sistema homogêneo, é possível montar a matriz fundamental da seguinte forma:

$$\phi(x) = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m] \quad (5.15)$$

A partir da matriz fundamental, obtém-se a solução do sistema linear não-homogêneo das equações que descrevem o problema por meio da Equação (5.10).

5.2 Construção das matrizes fundamentais e dos campos de deslocamentos $w(x)$ e $v(x)$

As combinações dos parâmetros de fundação $k_w = 0$ e $k_p = 0$; $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$; e $k_w \neq 0$ e $k_p \neq 0$, geram matrizes fundamentais diferentes e, conseqüentemente, soluções diferentes. Isto acontece porque cada uma destas combinações modifica a característica da matriz complementar M . Diante do exposto, este trabalho apresenta o desenvolvimento das matrizes fundamentais e das soluções do sistema linear proposto para os seguintes casos:

- 1) Viga sem base elástica ($k_w = 0$ e $k_p = 0$);
- 2) Viga sobre base elástica com $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$;
- 3) Viga sobre base elástica com $k_w \neq 0$ e $k_p \neq 0$;

5.2.1. Caso em que não há base elástica ($k_w = 0$ e $k_p = 0$)

Neste primeiro caso, em que $k_w = 0$ e $k_p = 0$, tem-se que as matrizes B_1 e B_2 se tornam nulas independentemente do material da viga. Logo, a matriz complementar M é impactada e passa a ter a seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, é possível encontrar os autovalores λ e autovetores K da matriz M . Como resultado, obtém-se um autovalor $\lambda = 0$ de multiplicidade 8 que gera dois autovetores linearmente independentes:

$$K_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.16)$$

$$K_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.17)$$

Para elaboração da matriz fundamental, é possível encontrar as soluções linearmente independentes através do procedimento expresso na Equação (5.13). Para isto, calculam-se os vetores base a partir da Equação (5.14). Como resultado, obtém-se que:

$$K_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.18)$$

$$K_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.19)$$

$$K_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.20)$$

$$K_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (5.21)$$

$$K_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (5.22)$$

$$K_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (5.23)$$

Assim, tem-se que as colunas da matriz fundamental $\phi(x)$ para este caso são

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= K_1 \\ \phi_{12} &= K_2 \\ \phi_{13} &= K_1 x + K_3 \\ \phi_{14} &= K_2 x + K_4 \\ \phi_{15} &= \frac{K_1 x^2}{2} + K_3 x + K_5 \\ \phi_{16} &= \frac{K_2 x^2}{2} + K_4 x + K_6 \\ \phi_{17} &= \frac{K_1 x^3}{6} + \frac{K_3 x^2}{2} + K_5 x + K_7 \\ \phi_{18} &= \frac{K_2 x^3}{6} + \frac{K_4 x^2}{2} + K_6 x + K_8 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Desta forma, ao substituir a matriz fundamental encontrada e a matriz f em (5.10), é possível desenvolver a solução do problema para o caso em que k_w e k_p são iguais a zero. Contudo, as constantes derivadas da matriz C somente serão encontradas ao aplicar as condições de contorno do problema.

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, obtém-se como solução que:

$$x_1 = W = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(6 C_1 + 6 C_3 x + 3 C_5 x^2 + C_7 x^3 + FF1(x)) \\ \frac{1}{6}(6 C_2 + 6 C_4 x + 3 C_6 x^2 + C_8 x^3 + FF2(x)) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$x_2 = W' = \begin{bmatrix} w' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2 C_3 + 2 C_5 x + C_7 x^2 + FF3(x)) \\ \frac{1}{2}(2 C_4 + 2 C_6 x + C_8 x^2 + FF4(x)) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$x_3 = W'' = \begin{bmatrix} w'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 + C_7 x + FF5(x) \\ C_6 + C_8 x + FF6(x) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$x_4 = W''' = \begin{bmatrix} w''' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_7 + FF7(x) \\ C_8 + FF8(x) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Onde:

$$FF1(x) = x^3 \int m(x)dx - 3x^2 \int x m(x)dx + 3x \int x^2 m(x)dx - \int x^3 m(x)dx \quad (5.29)$$

$$FF2(x) = x^3 \int n(x)dx - 3x^2 \int x n(x)dx + 3x \int x^2 n(x)dx - \int x^3 n(x)dx \quad (5.30)$$

$$FF3(x) = x^2 \int m(x)dx - 2x \int x m(x)dx + \int x^2 m(x)dx \quad (5.31)$$

$$FF4(x) = x^2 \int n(x)dx - 2x \int x n(x)dx + \int x^2 n(x)dx \quad (5.32)$$

$$FF5(x) = x \int m(x)dx - \int x m(x)dx \quad (5.33)$$

$$FF6(x) = x \int n(x)dx - \int x n(x)dx \quad (5.34)$$

$$FF7(x) = \int m(x)dx \quad (5.35)$$

$$FF8(x) = \int n(x)dx \quad (5.36)$$

No Apêndice C (item a) é mostrado que a solução construída satisfaz o sistema da expressão (5.9).

5.2.2. Caso em que a base elástica tem parâmetros $k_w = \mathbf{0}$ e $k_p \neq \mathbf{0}$

O caso em que $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$ implica que a matriz B_2 , apresentada na Equação (4.60), seja nula. Logo, a matriz complementar tem a seguinte configuração:

$$M = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & B_1 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Para conhecer os autovalores λ e autovetores K da matriz complementar M para o atual caso também se utilizou o software *Wolfram Mathematica 11.0*. Os autovalores com seus respectivos autovetores obtidos estão listados abaixo.

a) $\lambda_i = 0; \quad i = 1, 2, 3, 4, 6, 8:$

$$K_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.37)$$

$$K_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.38)$$

b) $\lambda_5 = -\sqrt{a}$:

$$K_5 = \left[-\frac{1}{a^{3/2}} \ 0 \ \frac{1}{a} \ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{a}} \ 0 \ 1 \ 0 \right]^T \quad (5.39)$$

c) $\lambda_7 = \sqrt{a}$:

$$K_7 = \left[\frac{1}{a^{3/2}} \ 0 \ \frac{1}{a} \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{a}} \ 0 \ 1 \ 0 \right]^T \quad (5.40)$$

Nota-se que existe um autovalor 0 de multiplicidade 6 com apenas 2 autovetores referentes a ele. Desta forma, para a elaboração da matriz fundamental, calculam-se os vetores base a partir da Equação (5.14). Como resultado, obtém-se que:

$$K_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.41)$$

$$K_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.42)$$

$$K_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (5.43)$$

$$K_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (5.44)$$

Logo, pode-se escrever as colunas da matriz fundamental gerada para o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= K_1 \\ \phi_{12} &= K_2 \\ \phi_{13} &= K_1 x + K_3 \\ \phi_{14} &= K_2 x + K_4 \\ \phi_{15} &= K_5 e^{\lambda_5 x} \\ \phi_{16} &= \frac{K_2 x^2}{2} + K_4 x + K_6 \\ \phi_{17} &= K_7 e^{\lambda_7 x} \\ \phi_{18} &= \frac{K_2 x^3}{6} + \frac{K_4 x^2}{2} + K_6 x + K_8 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Desta forma, ao substituir a matriz fundamental encontrada e a matriz f em (5.10), é possível desenvolver a solução do problema para o caso em que $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$. Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, obtém-se que

$$x_1 = W = \begin{bmatrix} W \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a^{3/2}C_1 + 2a^{3/2}C_3x - 2C_5e^{x\lambda} + 2C_7e^{-x\lambda} + FF1(x)}{2a^{3/2}} \\ \frac{1}{6}(6C_2 + 6C_4x + 3C_6x^2 + C_8x^3 + FF2(x)) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$x_2 = W' = \begin{bmatrix} W' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2aC_3 + 2C_5e^{x\lambda} + 2C_7e^{-x\lambda} + FF3(x)}{2a} \\ \frac{1}{2}(2C_4 + 2C_6x + C_8x^2 + FF4(x)) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$x_3 = W'' = \begin{bmatrix} W'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-x\lambda}(-2C_5e^{2x\lambda} + 2C_7 + FF5(x))}{2\sqrt{a}} \\ C_6 + C_8x + FF6(x) \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$x_4 = W''' = \begin{bmatrix} W''' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-x\lambda}(2C_5e^{2x\lambda} + 2C_7 + FF7(x))}{2} \\ C_8 + FF8(x) \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Onde:

$$\lambda = -\sqrt{a} \quad (5.50)$$

$$FF1(x) = -2\sqrt{a} x \int m(x)dx - e^{x\lambda} \int e^{-x\lambda} m(x)dx + e^{-x\lambda} \int e^{x\lambda} m(x)dx + 2\sqrt{a} \int x m(x)dx \quad (5.51)$$

$$FF2(x) = x^3 \int n(x)dx - 3x^2 \int x n(x)dx + 3x \int x^2 n(x)dx - \int x^3 n(x)dx \quad (5.52)$$

$$FF3(x) = -2 \int m(x)dx + e^{x\lambda} \int e^{-x\lambda} m(x)dx + e^{-x\lambda} \int e^{x\lambda} m(x)dx \quad (5.53)$$

$$FF4(x) = x^2 \int n(x)dx - 2x \int x n(x)dx + \int x^2 n(x)dx \quad (5.54)$$

$$FF5(x) = -e^{2x\lambda} \int e^{-x\lambda} m(x)dx + \int e^{x\lambda} m(x)dx \quad (5.55)$$

$$FF6(x) = x \int n(x)dx - \int x n(x)dx \quad (5.56)$$

$$FF7(x) = e^{2x\lambda} \int e^{-x\lambda} m(x)dx + \int e^{x\lambda} m(x)dx \quad (5.57)$$

$$FF8(x) = \int n(x)dx \quad (5.58)$$

No Apêndice C (item b) é mostrado que a solução construída satisfaz o sistema da expressão (5.9).

5.2.3. Caso em que a base elástica tem parâmetros $k_w \neq 0$ e $k_p \neq 0$

Para o caso em que a viga é isotrópica, funcionalmente graduada ou compósita laminada e está sobre uma base elástica que possui valores diferentes de zero para os dois parâmetros k_w e k_p , a matriz complementar M conta com os termos a e b das matrizes B_1 e B_2 , respectivamente, e, portanto, se torna mais complexa.

De maneira similar aos casos anteriores, utilizou-se o software *Wolfram Mathematica 11.0* para encontrar os autovalores λ e autovetores K da matriz complementar M . Os autovalores com seus respectivos autovetores obtidos estão listados abaixo.

$$a) \lambda_1 = -\frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-4b}}}{\sqrt{2}};$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}}}{a(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) + 2b} \\ 0 \\ \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2b} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$\text{b) } \lambda_3 = \frac{\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}}}{\sqrt{2}};$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}}}{a(a - \sqrt{a^2 - 4b}) - 2b} \\ 0 \\ \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2b} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\text{c) } \lambda_5 = -\frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4b}}}{\sqrt{2}};$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4b}}}{a(a + \sqrt{a^2 - 4b}) - 2b} \\ 0 \\ \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2b} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4b}}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$d) \lambda_7 = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}}}{\sqrt{2}}.$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}}}{a(a+\sqrt{a^2-4b})-2b} \\ 0 \\ \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2b} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}}}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$e) \lambda_i = 0; \quad i = 2, 4, 6, 8:$$

$$K_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.63)$$

O autovalor 0 de multiplicidade 4 gera apenas um autovetor linearmente independente. Desta forma, para a elaboração da matriz fundamental, é possível escrever as respectivas parcelas da solução utilizando os seguintes vetores base, obtidos a partir da Equação (5.14):

$$K_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.64)$$

$$K_6 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.65)$$

$$K_8 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (5.66)$$

Com isso, é possível escrever as colunas da matriz fundamental gerada de modo que:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= K_1 e^{\lambda_1 x} \\ \phi_{12} &= K_2 \\ \phi_{13} &= K_3 e^{\lambda_3 x} \\ \phi_{14} &= K_2 x + K_4 \\ \phi_{15} &= K_5 e^{\lambda_5 x} \\ \phi_{16} &= \frac{K_2 x^2}{2} + K_4 x + K_6 \\ \phi_{17} &= K_7 e^{\lambda_7 x} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\phi_{18} = \frac{K_2 x^3}{6} + \frac{K_4 x^2}{2} + K_6 x + K_8$$

Ao substituir a matriz fundamental encontrada e a matriz f em (5.10), encontra-se a solução do problema para o caso em que k_w e k_p são diferentes de zero. Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, obtém-se que a solução é dada por:

$$x_1 = W = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{a-\sqrt{a^2-4b}} e^{-\lambda_1 x} (C_3 - C_1 e^{2\lambda_1 x})}{2\sqrt{2} a (a-\sqrt{a^2-4b})-4\sqrt{2}b} + \frac{4\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}} e^{-\lambda_5 x} (C_7 - C_5 e^{2\lambda_5 x})}{2\sqrt{2} a (a+\sqrt{a^2-4b})-4\sqrt{2}b} + \frac{FF1(x)}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6} (6 C_2 + 6 C_4 x + 3 C_6 x^2 + C_8 x^3 + FF2(x)) \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$x_2 = W' = \begin{bmatrix} w' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-x(\lambda_1+\lambda_5)} [C_1 e^{(2\lambda_1+\lambda_5)x} j + C_3 e^{\lambda_3 x} j + C_5 e^{(\lambda_1+2\lambda_5)x} k + C_7 e^{\lambda_1 x} k + FF3(x)]}{2b\sqrt{a^2-4b}} \\ \frac{1}{2} (2 C_2 + 2 C_4 x + C_6 x^2 + FF4(x)) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$x_3 = W'' = \begin{bmatrix} w'' \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4C_3 e^{-x\lambda_1} - 4C_1 e^{x\lambda_1}}{2\sqrt{2}\sqrt{a-\sqrt{a^2-4b}}} + \frac{4C_7 e^{-x\lambda_5} - 4C_5 e^{x\lambda_5}}{2\sqrt{2}\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}}} + \frac{FF5(x)}{2\sqrt{2}} \\ C_4 + C_6 x + FF6(x) \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$x_4 = W''' = \begin{bmatrix} w''' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4C_3 e^{-x\lambda_1} + 4C_1 e^{x\lambda_1} + 4C_5 e^{-x\lambda_5} + 4C_7 e^{x\lambda_5} + FF7(x)}{4} \\ C_8 + FF8(x) \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Onde:

$$j = a^2 + a\sqrt{a^2 - 4b} - 4b \quad (5.72)$$

$$k = -a^2 + a\sqrt{a^2 - 4b} - 4b \quad (5.73)$$

$$FF1(x) = \frac{(a-\sqrt{a^2-4b})^{\frac{3}{2}}(e^{-x\lambda_1} \int e^{x\lambda_1} m(x) dx - e^{x\lambda_1} \int e^{-x\lambda_1} m(x) dx)}{\sqrt{a^2-4b}(-a^2+a\sqrt{a^2-4b}+2b)} + \frac{(a+\sqrt{a^2-4b})^{\frac{3}{2}}(e^{-x\lambda_5} \int e^{x\lambda_5} m(x) dx - e^{x\lambda_5} \int e^{-x\lambda_5} m(x) dx)}{\sqrt{a^2-4b}(a^2+a\sqrt{a^2-4b}-2b)} \quad (5.74)$$

$$FF2(x) = x^3 \int n(x) dx - 3x^2 \int x n(x) dx + 3x \int x^2 n(x) dx - \int x^3 n(x) dx \quad (5.75)$$

$$FF3(x) = -be^{x(2\lambda_1+\lambda_3)} \int e^{-x\lambda_1} m(x) dx - be^{x\lambda_5} \int e^{x\lambda_1} m(x) dx + be^{x(\lambda_1+2\lambda_5)} \int e^{-x\lambda_5} m(x) dx + be^{x\lambda_1} \int e^{x\lambda_5} m(x) dx \quad (5.76)$$

$$FF4(x) = x^2 \int n(x) dx - 2x \int x n(x) dx + \int x^2 n(x) dx \quad (5.77)$$

$$FF5(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}} \left[\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4b}} (e^{x\lambda_1} \int e^{-x\lambda_1} m(x) dx - e^{-x\lambda_1} \int e^{x\lambda_1} m(x) dx) + \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4b}} (e^{-x\lambda_5} \int e^{x\lambda_5} m(x) dx - e^{x\lambda_5} \int e^{-x\lambda_5} m(x) dx) \right] \quad (5.78)$$

$$FF6(x) = x \int n(x) dx - \int x n(x) dx \quad (5.79)$$

$$FF7(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}} \left[(a - \sqrt{a^2 - 4b}) (-e^{x\lambda_1} \int e^{-x\lambda_1} m(x) dx - e^{-x\lambda_1} \int e^{x\lambda_1} m(x) dx) + (a + \sqrt{a^2 - 4b}) (e^{-x\lambda_5} \int e^{x\lambda_5} m(x) dx + e^{x\lambda_5} \int e^{-x\lambda_5} m(x) dx) \right] \quad (5.80)$$

$$FF8(x) = \int n(x) dx \quad (5.81)$$

No Apêndice C (item c) é mostrado que a solução construída satisfaz o sistema da expressão (5.9).

5.3 Solução do deslocamento $u(x)$ e da rotação $\varphi(x)$

Ao desenvolver a solução do sistema linear obtém-se como um dos resultados o x_2 (matriz W') e, conseqüentemente, a primeira derivada da deflexão $w(x)$ e do deslocamento transversal $v(x)$. Os resultados da matriz U , ou seja, do deslocamento transversal $u(x)$ e da rotação $\varphi(x)$ são obtidos ao integrar duas vezes o termo U'' da Equação (4.48) (Dovea, Masjedi e Weaver, 2021). Assim, tem-se que:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = A^{-1}BW' - \iint A^{-1}Q_x dx dx + C_9x + C_{10} \quad (5.82)$$

Na equação (5.82), as constantes de integração C_9 e C_{10} são matrizes da ordem 2×1 e podem ser facilmente encontradas a partir das condições de contorno do problema.

Conforme foi detalhado no Apêndice A, tem-se que para vigas isotrópicas os coeficientes S_{EL} , S_{LT} , S_{FL} , S_{FT} , S_{ET} e S_{EF} são todos iguais a zero. Como consequência, a matriz B , apresentada na Equação (4.44), torna-se nula. Assim, obtém-se a partir da Equação (5.82) que as funções $u(x)$ e $\varphi(x)$ de uma viga isotrópica são respectivamente dadas por:

$$u(x) = C_{10,1} + C_{9,1}x - \frac{\iint q_x(x) dx dx}{EA} \quad (5.83)$$

$$\varphi(x) = C_{10,2} + C_{9,2}x - \frac{\iint q_\varphi(x) dx dx}{GJ} \quad (5.84)$$

Por sua vez, as vigas compósitas laminadas apresentam coeficientes S_{EL} , S_{LT} e S_{FL} iguais a zero. A partir da Equação (5.82) é possível obter as funções $u(x)$ e $\varphi(x)$ para viga anisotrópica conforme descritas pelas Equação (5.85) e Equação (5.86), respectivamente.

$$u(x) = [(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})(C_{10,1} + C_{9,1}x) - \iint (-S_{GJ}q_x(x) + S_{ET}q_\varphi(x)) dx dx + (S_{ET}S_{FT} - S_{EF}S_{GJ})w'(x)] / (S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) \quad (5.85)$$

$$\varphi(x) = [(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})(C_{10,2} + C_{9,2}x) - \iint (S_{ET}q_x(x) - S_{EA}q_\varphi(x)) dx dx + (S_{EF}S_{ET} - S_{EA}S_{FT})w'(x)] / (S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) \quad (5.86)$$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir da metodologia apresentada anteriormente, é possível encontrar os resultados dos deslocamentos e das rotações da seção transversal de uma viga. Este tópico visa apresentá-los e compará-los a resultados de referência na literatura e, com isso, realizar uma análise da influência dos parâmetros de base elástica k_w e k_p .

Foram analisados os seguintes casos:

- 1) viga isotrópica, simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída;
- 2) viga isotrópica, biengastada submetida a carga uniformemente distribuída;

- 3) viga isotrópica, engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a carga pontual na borda livre;
- 4) viga compósita laminada, anisotrópica, simplesmente apoiada submetida a carregamento senoidal para diferentes arranjos de empilhamento;
- 5) viga compósita laminada, anisotrópica, biengastada submetida a carregamento uniformemente distribuído para diferentes arranjos de empilhamento;
- 6) viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído.

Conforme realizado por Doeua, Masjedi e Weaver (2021), os parâmetros de base elástica foram adimensionalizados da seguinte forma:

$$\bar{k}_w = \frac{k_w l^4}{EI_y} \quad (6.1)$$

$$\bar{k}_p = \frac{k_p l^2}{EI_y} \quad (6.2)$$

6.1 Viga isotrópica simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída

Este tópico apresenta a deflexão de uma viga isotrópica simplesmente apoiada sob ação de uma carga uniformemente distribuída q_z . Esta investigação foi realizada para três tipos de combinações de parâmetros de fundação elástica, a saber $k_w = 0$ e $k_p = 0$ (ou seja, sem base elástica); $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$ e k_w e k_p ambos diferentes de zero.

Conforme Doeua, Masjedi e Weaver (2021), adimensionalizou-se a deflexão transversal $w(x)$ da seguinte forma:

$$\bar{w}(x) = \frac{w(x)EI_y}{q_z l^4} \quad (6.3)$$

Os resultados de deflexão máxima desta viga isotrópica simplesmente apoiada podem ser encontrados para combinações de \bar{k}_w e \bar{k}_p . Estes foram reunidos e podem ser comparados com os valores previstos por Doeua, Masjedi e Weaver (2021) na Tabela 1.

Tabela 1 – Deflexão máxima para viga simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho	Dovea, Masjedi, Weaver (2021)
\bar{k}_w	\bar{k}_p	$\bar{w}(l/2)$	$\bar{w}(l/2)$
0	0	0,013021	0,013021
	10	0,006448	0,006448
	25	0,003661	0,003661
10	0	0,011804	0,011804
	10	0,006133	0,006133
	25	0,003556	0,003556
100	0	0,006400	0,006400
	10	0,004256	0,004256
	25	0,002828	0,002828

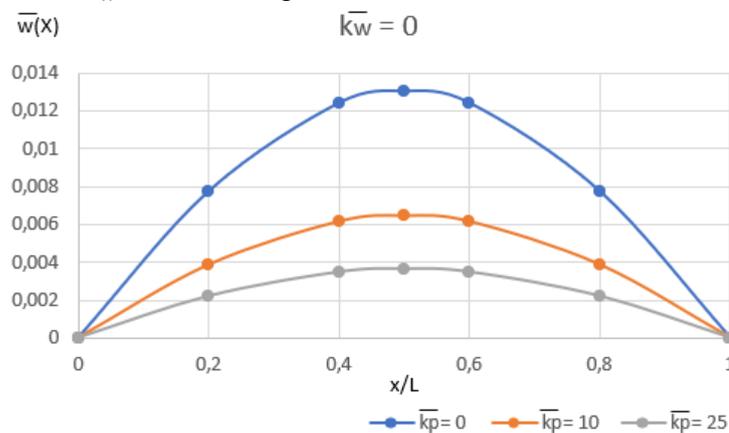
Fonte: Elaboração própria (2022).

Percebe-se que os três conjuntos de resultados obtidos para os diferentes valores de parâmetros elásticos de fundação estão em concordância com os valores de referência.

Ao analisar os resultados, pode-se visualizar que, ao fixar o \bar{k}_w e aumentar o \bar{k}_p , a deflexão tende a diminuir; ou seja, como já era previsto, a camada cisalhante da fundação de Pasternak atua como um redutor dos deslocamentos gerados pela flexão. Além disso, é possível notar que, ao fixar o \bar{k}_p e aumentar o \bar{k}_w , ou seja, aumentar o coeficiente de rigidez elástica do solo (Winkler), a deflexão também diminui.

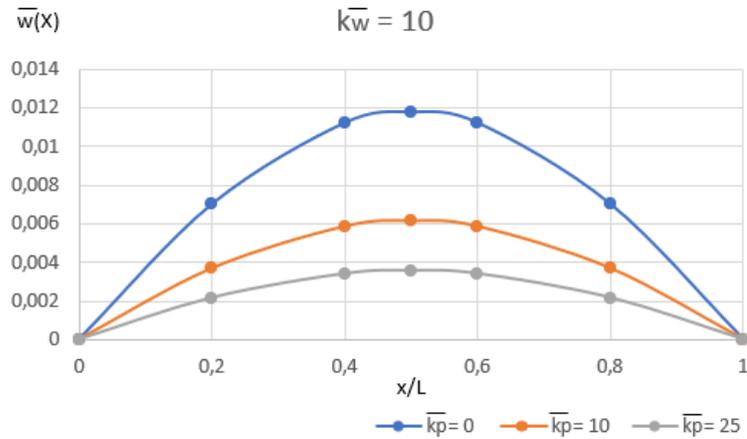
Para uma análise da deflexão quando variam os parâmetros da base elástica ao longo do eixo da viga, pode-se observar os gráficos da Figura 15, Figura 16 e Figura 17.

Figura 15 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga uniformemente distribuída.



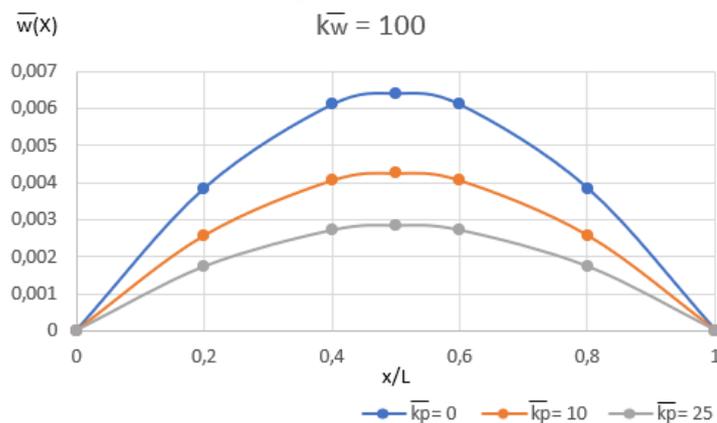
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 16 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga uniformemente distribuída.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 17 – Deflexão normalizada de uma viga simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga uniformemente distribuída.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Nota-se que ambos os parâmetros contribuem na diminuição da deflexão, mas que o parâmetro \bar{k}_p tem uma maior atuação do que o \bar{k}_w . Esta afirmação pode ser confirmada ao comparar os resultados encontrados para as combinações em que os dois parâmetros são iguais a zero (não há a consideração da contribuição da fundação) com os resultados referentes a $\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 10$ e a $\bar{k}_w = 10$ e $\bar{k}_p = 0$. Percebe-se que houve uma redução da deflexão de aproximadamente 50,48% para $\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 10$ e uma redução de 9,35% para o caso em que $\bar{k}_w = 10$ e $\bar{k}_p = 0$.

6.2 Viga isotrópica biengastada sob carga uniformemente distribuída

Este tópico apresenta a deflexão máxima de uma viga isotrópica biengastada sob ação de uma carga uniformemente distribuída q_z . De maneira similar, as análises foram realizadas para três tipos diferentes de parâmetros de fundação elástica: $k_w = 0$ e $k_p = 0$; $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$; e k_w e k_p ambos diferentes de zero. A adimensionalização destes parâmetros segue a apresentada nas Equações (6.1) e (6.2).

É possível encontrar os resultados de deflexão máxima desta viga isotrópica biengastada para combinações de k_w e k_p e também compará-los com os valores previstos por Doeva, Masjedi e Weaver (2021), através da Tabela 2 apresentada abaixo.

Tabela 2 – Deflexão máxima para viga biengastada sob carga uniformemente distribuída.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho	Doeva, Masjedi, Weaver (2021)
\bar{k}_w	\bar{k}_p	$\bar{w} (l/2)$	$\bar{w} (l/2)$
0	0	0,002604	0,002604
	10	0,002085	0,002085
	25	0,001607	0,001607
10	0	0,002553	0,002553
	10	0,002051	0,002051
	25	0,001587	0,001587
100	0	0,002165	0,002165
	10	0,001792	0,001792
	25	0,001426	0,001426

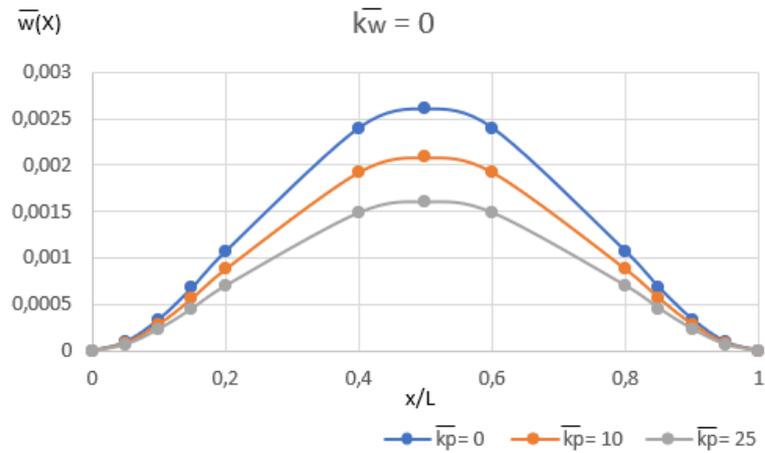
Fonte: Elaboração própria (2022).

Assim como aconteceu no exemplo anterior, percebe-se que, para o caso em estudo, os três conjuntos de resultados obtidos para os diferentes valores de parâmetros elásticos de fundação estão em estreita concordância com os resultados apresentados por Doeva, Masjedi e Weaver (2021).

Novamente pode-se visualizar que, ao fixar o \bar{k}_w e aumentar o \bar{k}_p , a deflexão diminui, visto que a camada cisalhante da fundação de Pasternak atua como um redutor dos deslocamentos gerados pela flexão. Nota-se também que ao fixar o \bar{k}_p e aumentar o \bar{k}_w , ou seja, aumentar o coeficiente de rigidez elástica do solo, a deflexão diminui.

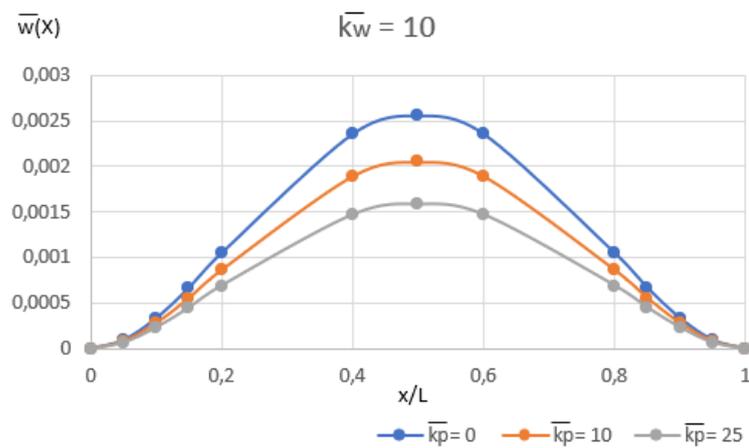
As deflexões normalizada em z para cada caso de fundação das vigas biengastadas estão apresentadas na Figura 18, Figura 19 e Figura 20.

Figura 18 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga uniformemente distribuída.



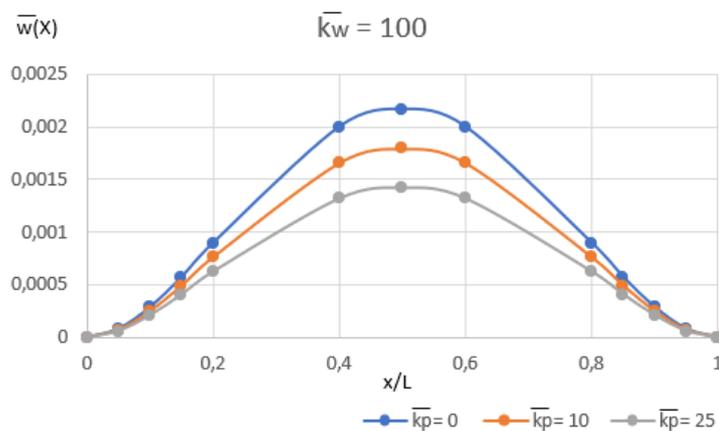
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 19 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga uniformemente distribuída.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 20 – Deflexão normalizada de uma viga biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga uniformemente distribuída.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Similar ao exemplo anterior, é possível concluir que ambos os parâmetros contribuem na diminuição da deflexão, mas que o parâmetro $\overline{k_p}$ tem uma maior atuação do que o $\overline{k_w}$. Isto pode ser percebido porque houve uma redução do deslocamento de aproximadamente 19,95% para $\overline{k_w} = 0$ e $\overline{k_p} = 10$ e uma redução de 1,98% para o caso em que $\overline{k_w} = 10$ e $\overline{k_p} = 0$, ambos com relação ao caso em que $\overline{k_w} = 0$ e $\overline{k_p} = 0$.

6.3 Viga isotrópica em balanço sob carga pontual na borda livre

Eisenberger (2003) apresenta como um dos seus exemplos numéricos a deflexão máxima sofrida por uma viga de Euler-Bernoulli em balanço sob carga pontual na borda livre sem base elástica. Neste exemplo, as unidades são todas compatíveis e serão omitidas. As propriedades do material da viga são $E = 29000$ e $\nu = 0,3$. Neste exemplo, as deflexões foram analisadas para uma viga de base 1, de altura fixada em 12, com comprimentos 12, 40, 80 e 160 e para um carregamento de $f_z = 100$.

Com isto, é possível encontrar os resultados de deflexão máxima desta viga para cada comprimento l e também compará-los com os valores previstos por Eisenberger (2003), através da Tabela 3 apresentada abaixo.

Tabela 3 – Deflexão máxima para viga em balanço sob carga pontual na borda livre.

Dados (Sem base elástica)		Presente Trabalho	Eisenberger (2003)
l	h	$w(l)$	$w(l)$
12	12	0,013793	0,013793
40	12	0,510856	0,510855
80	12	4,086800	4,086800
160	12	32,694800	32,694800

Fonte: Elaboração própria (2022).

É possível notar que os resultados encontrados neste trabalho estão em concordância com os previstos por Eisenberger (2003) para uma viga em balanço sem base elástica.

Não foram encontrados na literatura exemplos que se propõem a considerar a base elástica para uma viga isotrópica em balanço e submetida a carga concentrada. Porém, a fim de analisar a influência da fundação, são apresentados na Tabela 4 os resultados da deflexão máxima desta viga em estudo para diferentes combinações de $\overline{k_w}$ e $\overline{k_p}$.

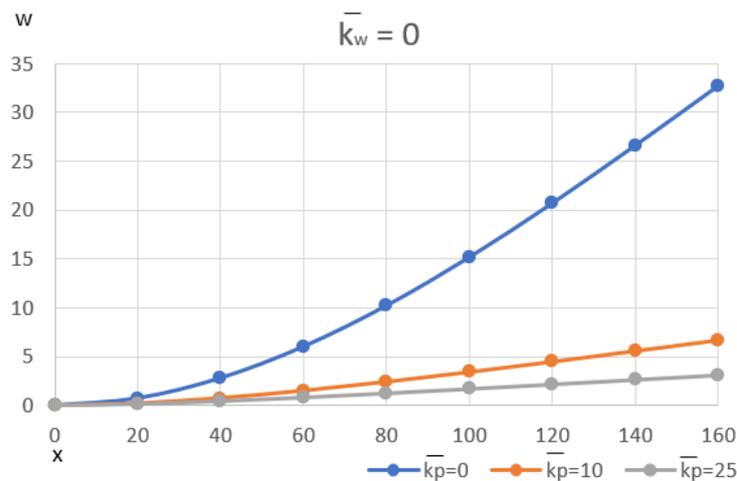
Tabela 4 – Deflexão máxima adimensionalizada para viga em balanço com fundação elástica sob carga pontual na borda livre ($l = 160$ e $h = 12$).

Parâmetros da Fundação		Deflexão Máxima
\bar{k}_w	\bar{k}_p	$w(l)$
0	0	32,6948
	10	6,7178
	25	3,1388
10	0	18,4863
	10	5,7206
	25	2,8869
100	0	4,3092
	10	2,6427
	25	1,7481

Fonte: Elaboração própria (2022).

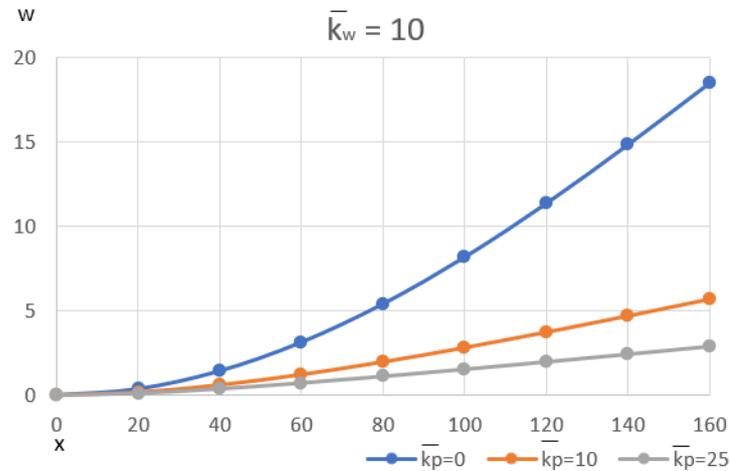
Ao analisar os dados apresentados na Tabela 4, é possível concluir novamente que ambos os parâmetros \bar{k}_w e \bar{k}_p contribuem significativamente na diminuição do deslocamento, mas que o segundo tem uma maior influência do que o primeiro. As deflexões da viga em balanço com carga pontual atuando na borda livre para diferentes combinações de parâmetros k_w e k_p estão apresentadas na Figura 21, Figura 22 e Figura 23.

Figura 21 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga pontual na borda livre.



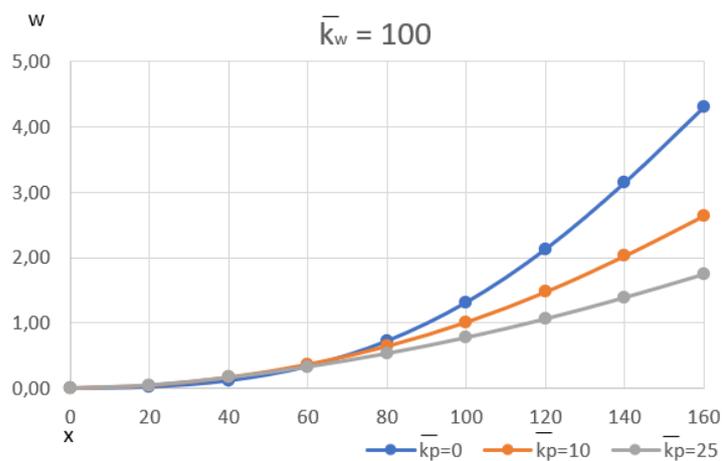
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 22 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga pontual na borda livre.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 23 – Deflexão de uma viga em balanço em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga pontual na borda livre.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Com relação ao caso em que não há base elástica ($\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 0$), houve uma redução do deslocamento de aproximadamente 79,45% para $\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 10$ e uma redução de 43,49% para o caso em que $\bar{k}_w = 10$ e $\bar{k}_p = 0$. Logo, nota-se que houve uma maior influência do parâmetro \bar{k}_p quando comparado ao \bar{k}_w .

6.4 Vigas compósitas laminadas anisotrópicas sob carregamento distribuído

A fim de comprovar a eficiência da solução para vigas compósitas laminadas, foram reproduzidos os exemplos numéricos apresentados por Doeva, Masjedi e Weaver (2021). Em

todos os exemplos, considerou-se uma viga laminada de seção transversal retangular cujas propriedades estão expostas na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades da viga compósita laminada em estudo.

Base (b)	0,0023 m
Número de camadas	6
Espessura de cada camada	0,000125 m
Altura da viga (h)	0,00075 m
Comprimento da viga (l)	120 h m
E_{11}	135,64 GPa
E_{22}	10,14 GPa
G_{12}	5,86 GPa
ν_{12}	0,29

Fonte: Adaptado de Doeva, Masjedi e Weaver (2021).

A adimensionalização dos deslocamentos indicada por Doeva, Masjedi e Weaver (2021) para esses exemplos são:

$$\bar{u}(x) = u(x) \frac{bh}{q_z l^2} E_{22} \quad (6.4)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) \frac{bh^3}{q_z l^3} G_{12} \quad (6.5)$$

$$\bar{w}(x) = w(x) \frac{bh^3}{q_z l^4} E_{22} \quad (6.6)$$

Os exemplos a serem verificados são: viga laminada simplesmente apoiada sob carregamento senoidal e viga laminada biengastada sob carregamento uniformemente distribuído. Para cada um dos dois exemplos, foram analisados três arranjos de empilhamento. São eles: lâminas simétricas $[45_3]_s$, cross-ply $[0_3/90_3]$ e assimétricas $[60_3/30_3]$. Estas distribuições podem ser melhor compreendidas através da Figura 24.

Figura 24 – Sequências de empilhamento das lâminas das vigas laminadas analisadas.

45°	[45 ₃] _s
45°	
45°	
45°	
45°	
45°	
90°	[0 ₃ /90 ₃]
90°	
90°	
0°	
0°	
0°	
30°	[60 ₃ /30 ₃]
30°	
30°	
60°	
60°	
60°	

Fonte: Elaboração própria (2022).

As matrizes de rigidezes obtidas para as configurações simétrica, cross-ply e assimétrica para material anisotrópico estão apresentadas respectivamente a seguir.

$$S_{[45_3]_s} = \begin{bmatrix} 126067,1 & 0 & -20,349269 & 0 \\ 0 & 0,00189534 & 0 & 0 \\ -20,3493 & 0 & 0,0059094 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0555746 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$S_{[0_3/90_3]} = \begin{bmatrix} 25333,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,004058 & -0,001356 & 0 \\ 0 & -0,00136 & 0,0016430 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01116795 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$S_{[60_3/30_3]} = \begin{bmatrix} 37667,4 & -3,632072 & 3,6846792 & 0 \\ -3,632072 & 0,0038343 & -0,001659 & 0 \\ 3,68468 & -0,001659 & 0,0023226 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,016605 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

6.4.1 Viga laminada simplesmente apoiada sob carga distribuída senoidal

Neste exemplo, considera-se uma viga laminada simplesmente apoiada em uma base elástica com parâmetros k_w e k_p . A viga encontra-se submetida a uma carga distribuída senoidal $q_z(x) = q_0 \text{sen}(\pi x/l)$.

Os resultados numéricos para as deflexões máximas adimensionalizadas de vigas que têm empilhamentos simétricos $[45_3]_s$, cross-ply $[0_3/90_3]$ e assimétricos $[60_3/30_3]$ são apresentados respectivamente nas Tabela 6, Tabela 7 e Tabela 8.

Tabela 6 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Dovea, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada simétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Dovea, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	-	1,5153E-02	6,6537E-02	-	1,0891E-02	6,6537E-02
	50	-	2,1826E-03	1,0292E-02	-	5,1593E-03	3,2088E-02
	75	-	1,5039E-03	7,2298E-03	-	4,0664E-03	2,5484E-02
10	0	-	1,3646E-02	5,9935E-02	-	1,0760E-02	6,5735E-02
	50	-	2,1457E-03	1,0119E-02	-	5,1290E-03	3,1900E-02
	75	-	1,4859E-03	7,1438E-03	-	4,0474E-03	2,5365E-02
100	0	-	7,1932E-03	3,1659E-02	-	9,7048E-03	5,9304E-02
	50	-	1,8621E-03	8,7880E-03	-	4,8715E-03	3,0303E-02
	75	-	1,3416E-03	6,4534E-03	-	3,8840E-03	2,4344E-02

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 7 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Dovea, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada cross-ply simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Dovea, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	9,1453E-01	-	2,1683E-02	6,5731E-01	-	2,1683E-02
	50	1,0292E-01	-	2,9284E-03	4,8028E-01	-	1,6080E-02
	75	6,8665E-02	-	2,0424E-03	4,2234E-01	-	1,4239E-02
10	0	8,1078E-01	-	1,9236E-02	6,5473E-01	-	2,1598E-02
	50	1,0114E-01	-	2,8783E-03	4,7888E-01	-	1,6034E-02
	75	6,7826E-02	-	2,0178E-03	4,2124E-01	-	1,4202E-02
100	0	3,9973E-01	-	9,5400E-03	6,3243E-01	-	2,0866E-02
	50	8,7479E-02	-	2,4939E-03	4,6663E-01	-	1,5626E-02
	75	6,1130E-02	-	1,8207E-03	4,1166E-01	-	1,3881E-02

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 8 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Dovea, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Dovea, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	6,23E-01	1,36E-02	4,89E-02	4,48E-01	9,80E-03	4,89E-02
	50	8,44E-02	1,85E-03	7,33E-03	2,46E-01	5,38E-03	2,73E-02
	75	5,76E-02	1,26E-03	5,14E-03	2,00E-01	4,38E-03	2,24E-02
10	0	5,59E-01	1,22E-02	4,39E-02	4,44E-01	9,72E-03	4,84E-02
	50	8,30E-02	1,82E-03	7,20E-03	2,45E-01	5,36E-03	2,72E-02
	75	5,69E-02	1,25E-03	5,08E-03	1,99E-01	4,36E-03	2,23E-02
100	0	2,90E-01	6,35E-03	2,50E-02	4,11E-01	9,00E-03	4,49E-02
	50	7,19E-02	1,58E-03	6,25E-03	2,34E-01	5,13E-03	2,60E-02
	75	5,14E-02	1,13E-03	4,58E-03	1,92E-01	4,20E-03	2,15E-02

Fonte: Elaboração própria (2022).

Observa-se que os resultados obtidos neste trabalho são diferentes dos disponibilizados por Dovea, Masjedi e Weaver (2021), exceto para \bar{w} quando $k_w = k_p = 0$. Contudo, fora verificado que a solução desenvolvida neste trabalho satisfaz as equações governantes e as condições de contorno, o que justifica ser solução do problema (ver Apêndice D). Portanto, é de se imaginar que os resultados dos autores não estão de acordo com a adimensionalização indicada por eles.

Para evitar situações com singularidades quando a adimensionalização é dividida pelo q_z , propõe-se outra forma de adimensionalizar estas deflexões. Sejam:

$$\overline{u(x)} = u(x)/q_0 \quad (6.10)$$

$$\overline{\varphi(x)} = \varphi(x)/q_0 \quad (6.11)$$

$$\overline{w(x)} = w(x)/q_0 \quad (6.12)$$

Assim, obtém-se como resultados das deflexões da viga simplesmente apoiada para cada arranjo de empilhamento das lâminas os valores apresentados nas Tabela 9, Tabela 10 e Tabela 11.

Tabela 9 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada simétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	-	1,3737E-03	4,4370E-04
	50	-	1,9787E-04	6,8629E-05
	75	-	1,3634E-04	4,8211E-05
10	0	-	1,2371E-03	3,9967E-04
	50	-	1,9452E-04	6,7475E-05
	75	-	1,3471E-04	4,7638E-05
100	0	-	6,5211E-04	2,1111E-04
	50	-	1,6881E-04	5,8602E-05
	75	-	1,2163E-04	4,3034E-05

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 10 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada cross-ply simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	2,9946E-07	-	1,4459E-04
	50	3,3701E-08	-	1,9528E-05
	75	2,2484E-08	-	1,3619E-05
10	0	2,6549E-07	-	1,2827E-04
	50	3,3118E-08	-	1,9193E-05
	75	2,2210E-08	-	1,3455E-05
100	0	1,3089E-07	-	6,3617E-05
	50	2,8645E-08	-	1,6631E-05
	75	2,0017E-08	-	1,2141E-05

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 11 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído senoidal.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	2,04E-07	1,24E-03	3,26E-04
	50	2,76E-08	1,68E-04	4,89E-05
	75	1,89E-08	1,14E-04	3,43E-05
10	0	1,83E-07	1,11E-03	2,93E-04
	50	2,72E-08	1,65E-04	4,80E-05
	75	1,86E-08	1,13E-04	3,38E-05
100	0	1,40E-07	5,76E-04	1,52E-04
	50	2,36E-08	1,43E-04	4,17E-05
	75	1,68E-08	1,02E-04	3,06E-05

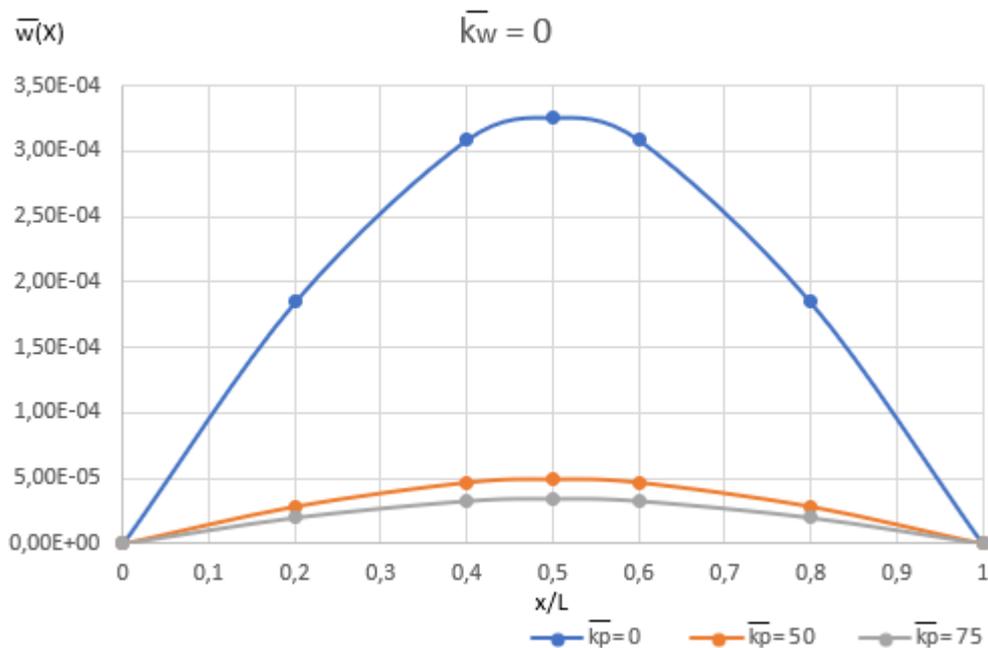
Fonte: Elaboração própria (2022).

Quanto à distribuição da orientação das lâminas, é possível notar que as deflexões transversais $w(x)$ foram maiores para a viga de distribuição cross-ply do que para a de distribuição assimétrica; tendo ambas deflexões menores que as de empilhamentos simétricos. É possível visualizar isto ao comparar os valores resultantes de cada tipo de viga para uma mesma configuração de fundação.

Quanto ao deslocamento axial $u(x)$, percebe-se que a configuração de lâminas simétricas é a única que impede o deslocamento. Entre a cross-ply e a assimétrica, a segunda fornece maior resistência a este deslocamento. Em contrapartida, a cross-ply impede totalmente a rotação $\varphi(x)$. Entre a simétrica e assimétrica, a segunda é a que produz maior resistência à torção.

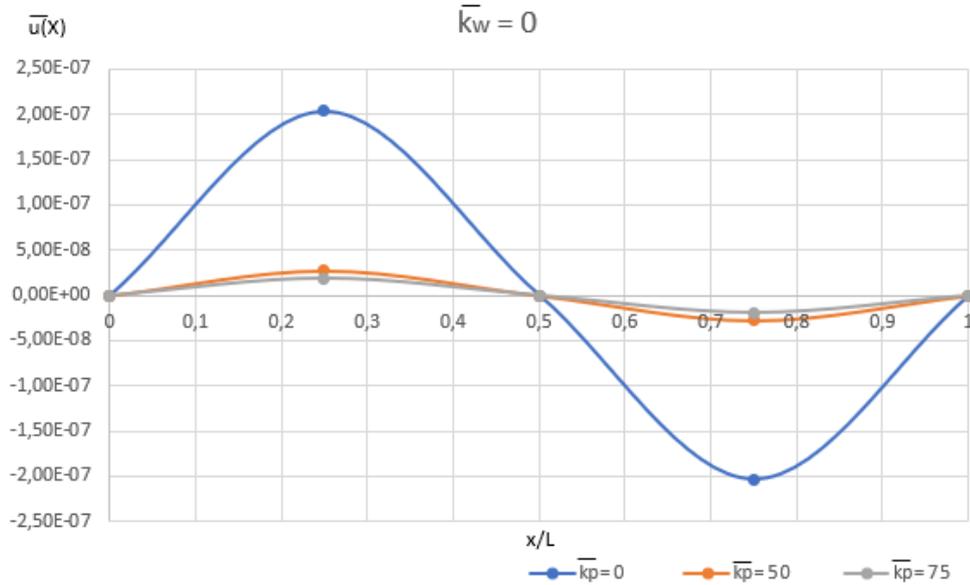
Além disso, é possível pontuar mais uma vez que os deslocamentos sofrem maiores alterações a partir das variações na fundação Pasternak do que na fundação Winkler. Esta conclusão pode ser confirmada através da Figura 25 a Figura 33, que apresentam as deflexões da viga laminada anisotrópica assimétrica para diferentes valores de parâmetros elásticos de fundação.

Figura 25 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída senoidal.



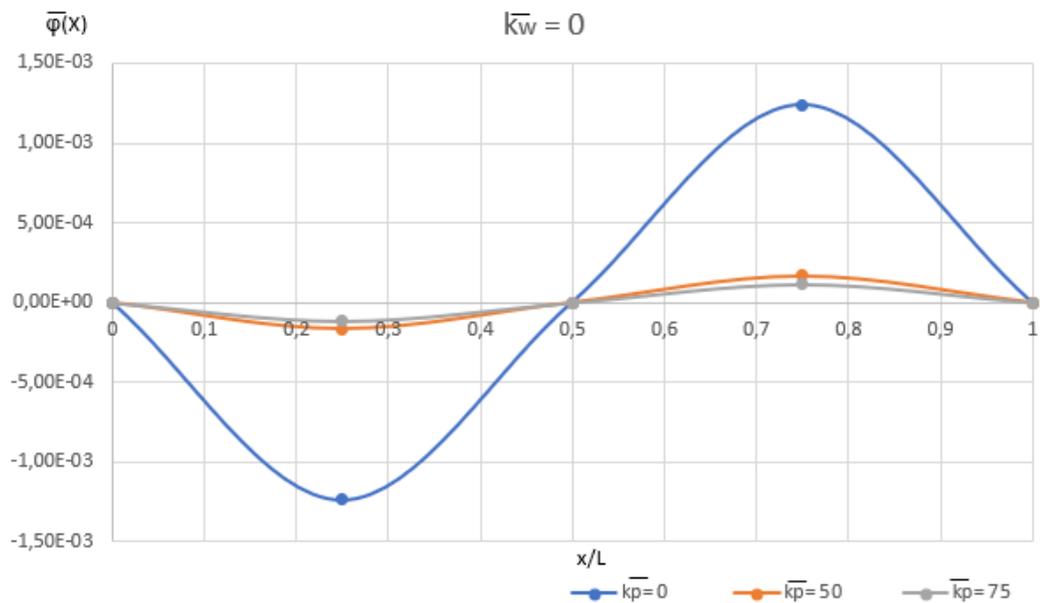
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 26 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída senoidal.



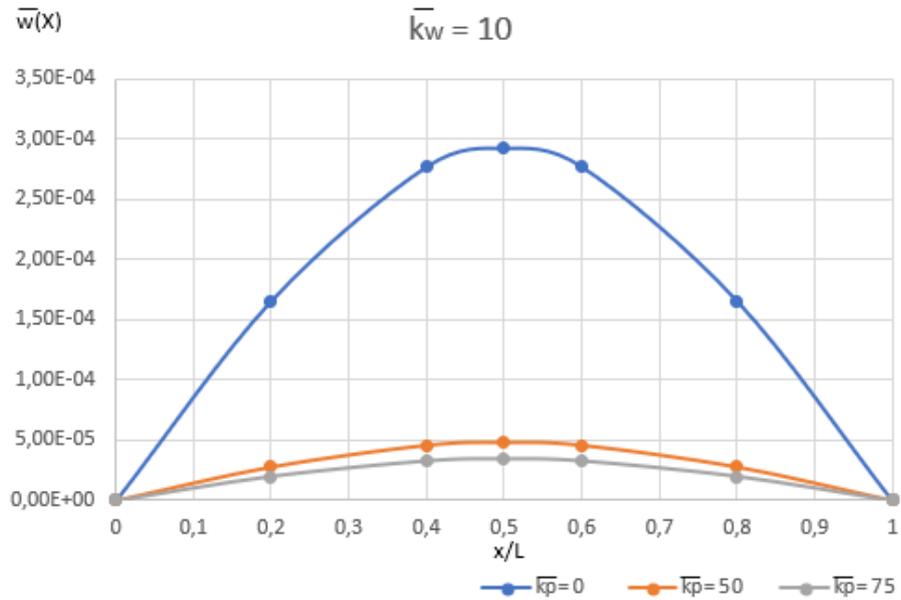
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 27 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída senoidal.



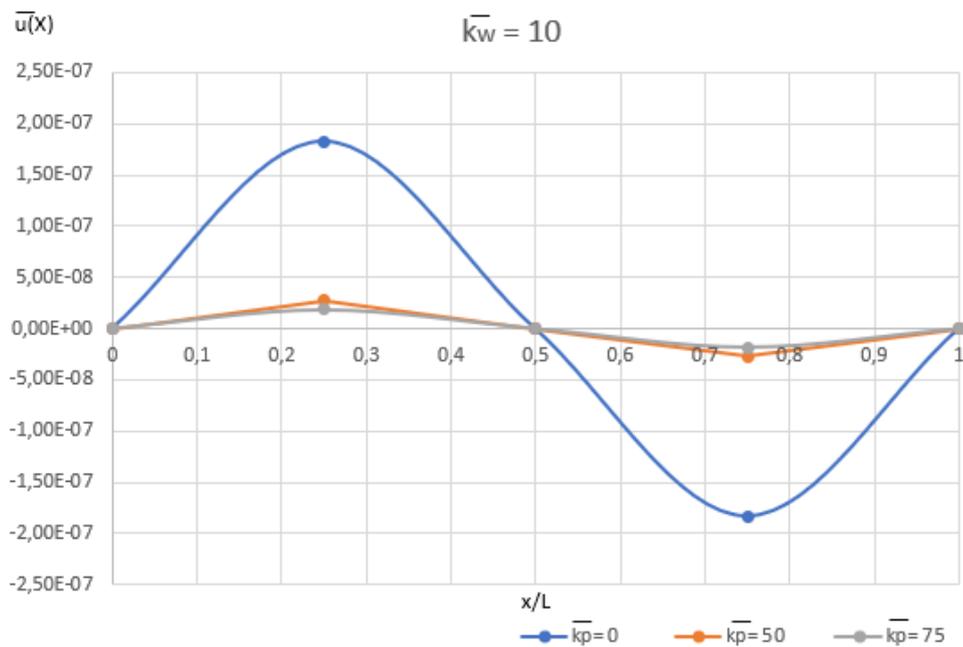
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 28 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída senoidal.



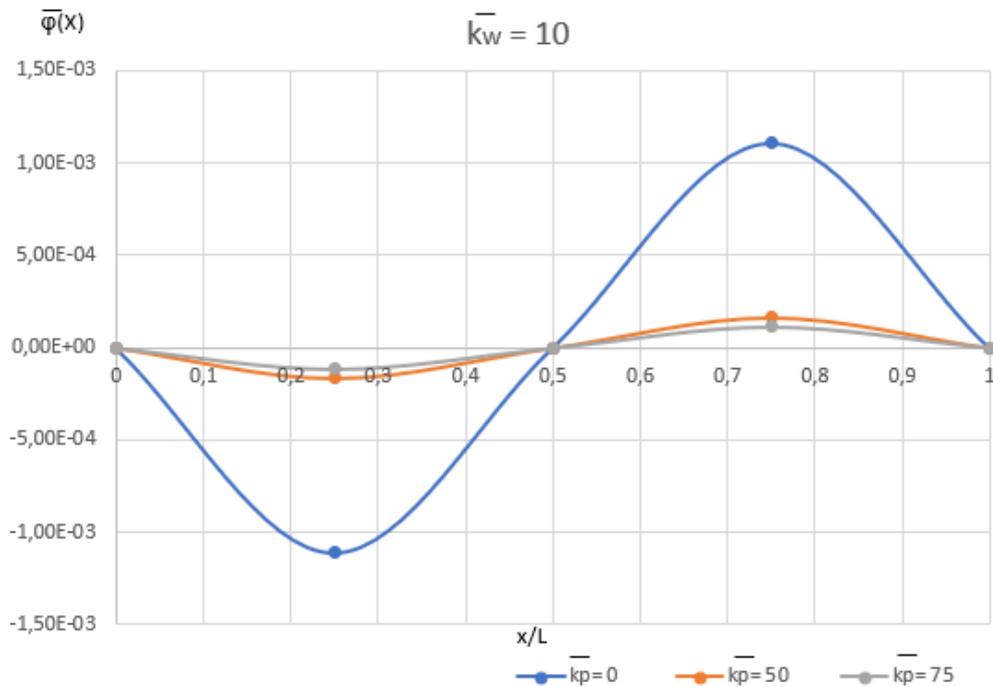
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 29 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída senoidal.



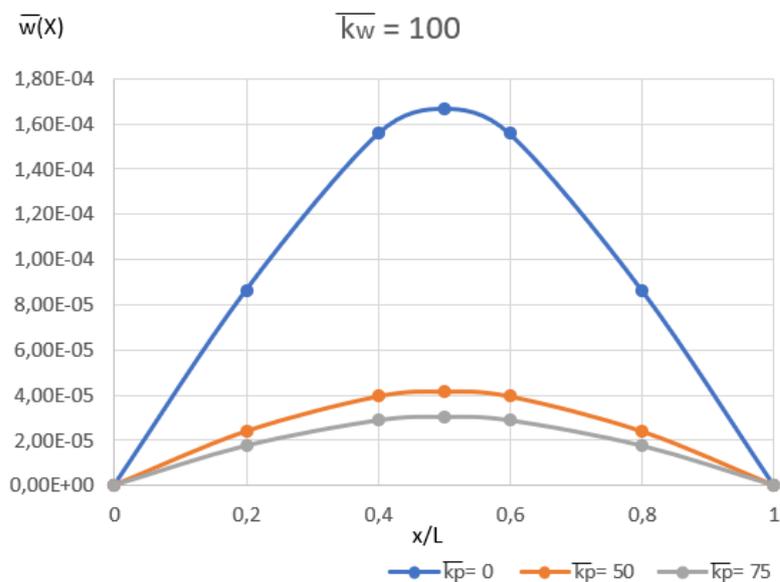
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 30 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída senoidal.



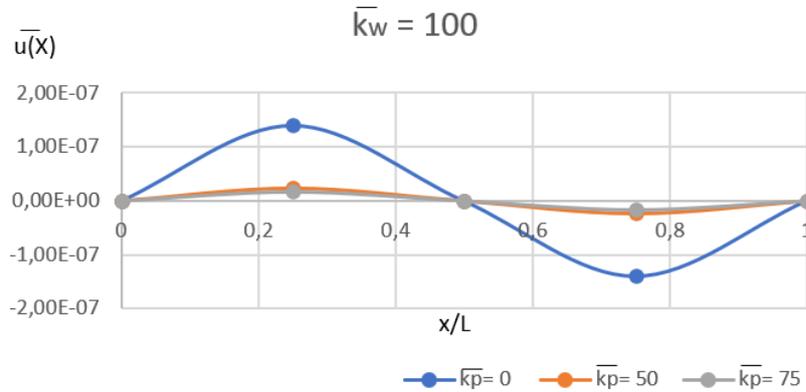
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 31 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída senoidal.



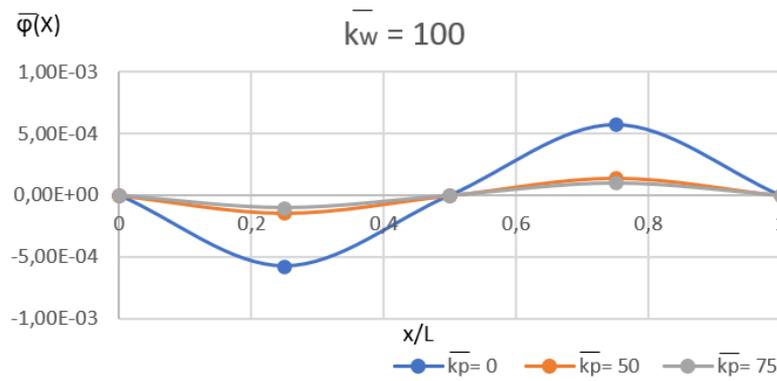
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 32 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída senoidal.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 33 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica simplesmente apoiada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída senoidal.



Fonte: Elaboração própria (2022).

6.4.2 Viga laminada biengastada sob carga uniformemente distribuída

Neste exemplo, considera-se uma viga laminada biengastada em uma fundação de parâmetros k_w e k_p sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q_z(x) = q_0$. As Tabela 12, Tabela 13 e Tabela 14 apresentam respectivamente os resultados numéricos para as deflexões máximas adimensionalizadas da viga com sequências de empilhamento simétrico $[45_3]_s$, cross-ply $[0_3/90_3]$ e assimétrico $[60_3/30_3]$.

Tabela 12 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada simétrica biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Doeva, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	-	1,2863E-02	2,1576E-02	-	1,2863E-02	2,1576E-02
	50	-	4,7188E-03	7,9927E-03	-	9,6167E-03	1,6112E-02
	75	-	3,7428E-03	6,1094E-03	-	8,5519E-03	1,4310E-02
10	0	-	1,1285E-02	2,0989E-02	-	1,2823E-02	2,1510E-02
	50	-	4,9137E-03	7,9084E-03	-	9,5945E-03	1,6075E-02
	75	-	3,7135E-03	6,0597E-03	-	8,5343E-03	1,4281E-02
100	0	-	1,0026E-02	1,6850E-02	-	1,2477E-02	2,0928E-02
	50	-	4,3534E-03	7,2221E-03	-	9,3992E-03	1,5745E-02
	75	-	3,4692E-03	5,6456E-03	-	8,3796E-03	1,4019E-02

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 13 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada cross-ply biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Doeva, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	7,7630E-01	-	9,7620E-03	7,7630E-01	-	9,7620E-03
	50	2,0318E-01	-	2,6087E-03	6,7304E-01	-	8,4611E-03
	75	1,5992E-01	-	1,9233E-03	6,3129E-01	-	7,9338E-03
10	0	7,4258E-01	-	9,3369E-03	7,7524E-01	-	9,7484E-03
	50	2,1115E-01	-	2,5762E-03	6,7223E-01	-	8,4508E-03
	75	1,5852E-01	-	1,9055E-03	6,3058E-01	-	7,9247E-03
100	0	5,3327E-01	-	6,6983E-03	7,6562E-01	-	9,6271E-03
	50	1,9062E-01	-	2,3159E-03	6,6497E-01	-	8,3592E-03
	75	1,4695E-01	-	1,7583E-03	6,2419E-01	-	7,8440E-03

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 14 – Deflexões máximas adimensionalizadas de acordo com Doeva, Masjedi e Weaver (2021) de uma viga laminada assimétrica biengastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho			Doeva, Masjedi, Weaver (2021)		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	5,2864E-01	1,1579E-02	1,7383E-02	5,2865E-01	1,1579E-02	1,7383E-02
	50	1,7816E-01	3,9022E-03	5,9295E-03	4,1547E-01	9,0998E-03	1,3651E-02
	75	1,3338E-01	2,9214E-03	4,4851E-03	3,7568E-01	8,2283E-03	1,2333E-02
10	0	5,1236E-01	1,1222E-02	1,6846E-02	5,2734E-01	1,1550E-02	1,7340E-02
	50	1,7618E-01	3,8589E-03	5,8638E-03	4,1465E-01	9,0820E-03	1,3624E-02
	75	1,3223E-01	2,8978E-03	4,4471E-03	3,7501E-01	8,2137E-03	1,2311E-02
100	0	4,0092E-01	8,7811E-03	1,3173E-02	5,1581E-01	1,1298E-02	1,6960E-02
	50	1,6013E-01	3,5072E-03	5,3315E-03	4,0748E-01	8,9249E-03	1,3387E-02
	75	1,2280E-01	2,6897E-03	4,1320E-03	3,6914E-01	8,0850E-03	1,2116E-02

Fonte: Elaboração própria (2022).

De maneira similar ao exemplo anterior, percebe-se que os resultados obtidos neste trabalho são diferentes dos disponibilizados por Dovea, Masjedi e Weaver (2021), exceto para quando $k_w = k_p = 0$. Contudo, novamente fora verificado que a solução desenvolvida neste trabalho satisfaz as equações governantes e as condições de contorno, indicando que a proposição é solução do problema (ver Apêndice E). Portanto, conclui-se que os resultados dos autores não estão de acordo com a adimensionalização indicada por eles, visto que não são a solução do problema.

Novamente, propõe-se outra forma de adimensionalizar estas deflexões, conforme Equações (6.10) – (6.12).

Assim, como resultados das deflexões da viga biengastada para cada arranjo de empilhamento das lâminas, obtém-se os valores apresentados na Tabela 15, Tabela 16 e Tabela 17.

Tabela 15 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada simétrica biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	\bar{w} (L/2)
0	0	-	1,6491E-03	1,4388E-04
	50	-	6,0499E-04	5,3298E-05
	75	-	4,7986E-04	4,0740E-05
10	0	-	1,5536E-03	1,3996E-04
	50	-	6,1464E-04	5,2737E-05
	75	-	4,7610E-04	4,0408E-05
100	0	-	1,2855E-03	1,1236E-04
	50	-	5,5814E-04	4,8160E-05
	75	-	4,4478E-04	3,7647E-05

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 16 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada cross-ply biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	3,5949E-07	-	6,5097E-05
	50	9,4087E-08	-	1,7396E-05
	75	7,4058E-08	-	1,2826E-05
10	0	3,4388E-07	-	6,2262E-05
	50	9,7781E-08	-	1,7179E-05
	75	7,3408E-08	-	1,2707E-05
100	0	2,4695E-07	-	4,4667E-05
	50	8,8272E-08	-	1,5443E-05
	75	6,8049E-08	-	1,1725E-05

Fonte: Elaboração própria (2022).

Tabela 17 – Deflexões máximas adimensionalizadas corrigidas de uma viga laminada assimétrica biengastada sujeita a carregamento distribuído uniforme.

Parâmetros da Fundação		Presente Trabalho		
\bar{k}_w	\bar{k}_p	\bar{u}	$\bar{\varphi}$	$\bar{w} (L/2)$
0	0	2,4480E-07	1,4845E-03	1,1592E-04
	50	8,2504E-08	5,0030E-04	3,9540E-05
	75	6,1767E-08	3,7455E-04	2,9908E-05
10	0	2,3726E-07	1,4388E-03	1,1234E-04
	50	8,1587E-08	4,9474E-04	3,9102E-05
	75	6,1232E-08	3,7152E-04	2,9655E-05
100	0	1,8566E-07	1,1258E-03	8,7841E-05
	50	7,4152E-08	4,4965E-04	3,5552E-05
	75	5,6868E-08	3,4484E-04	2,7553E-05

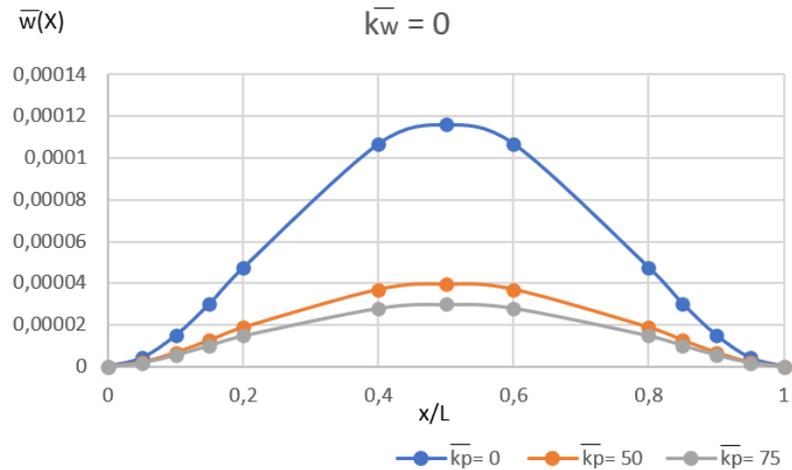
Fonte: Elaboração própria (2022).

Como no exemplo anterior, é possível notar que as deflexões transversais $w(x)$ foram maiores para a viga de distribuição cross-ply do que para a de distribuição assimétrica; tendo ambas deflexões menores que as de empilhamentos simétricos. É possível visualizar isto ao comparar os valores resultantes de cada tipo de viga para uma mesma configuração de fundação.

Quanto ao deslocamento axial $u(x)$, percebe-se novamente que a configuração de lâminas simétricas é a única que impede o deslocamento; e que a assimétrica fornece maior resistência a este deslocamento do que a cross-ply. Em contrapartida, a cross-ply impede totalmente a rotação $\varphi(x)$. Entre a simétrica e assimétrica, a segunda é a que produz maior resistência à torção.

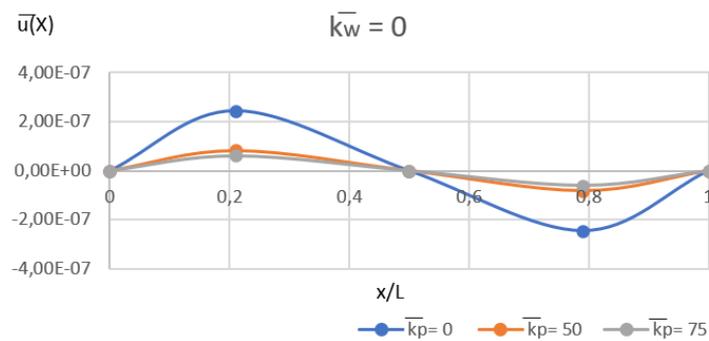
Novamente, é perceptível que os deslocamentos diminuem à medida que os valores dos parâmetros de fundação aumentam. Isto pode ser visualizado através da Figura 34 a Figura 42, que apresentam os deslocamentos da viga laminada assimétrica para diferentes valores de parâmetros elásticos de fundação.

Figura 34 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída uniforme.



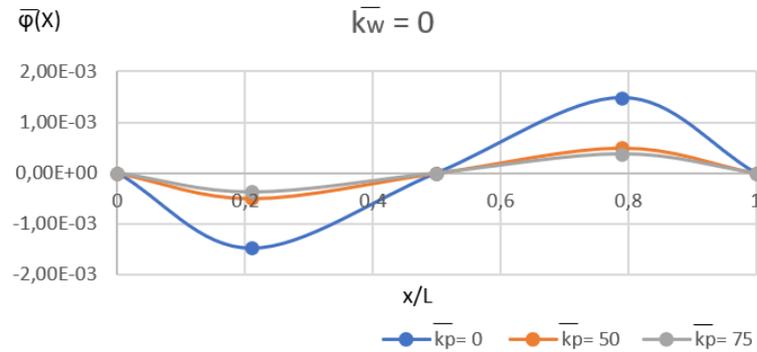
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 35 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída uniforme.



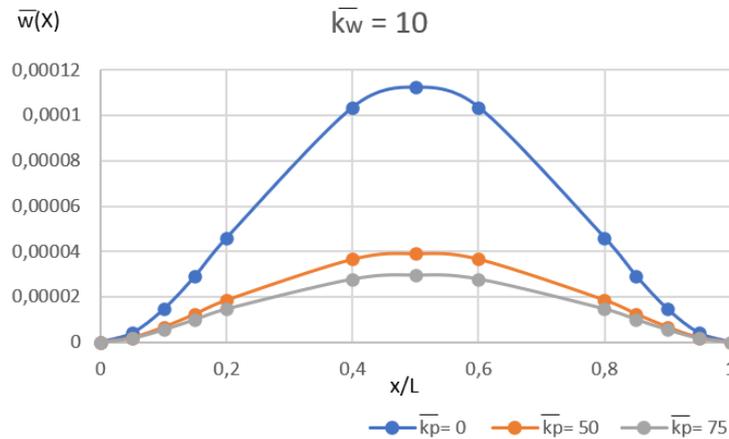
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 36 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 0$ sob carga distribuída uniforme.



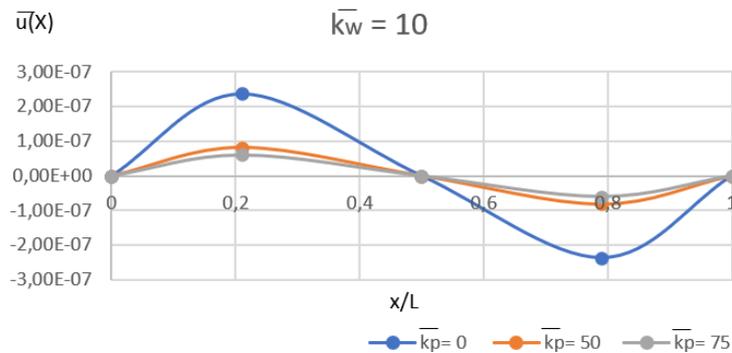
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 37 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída uniforme.



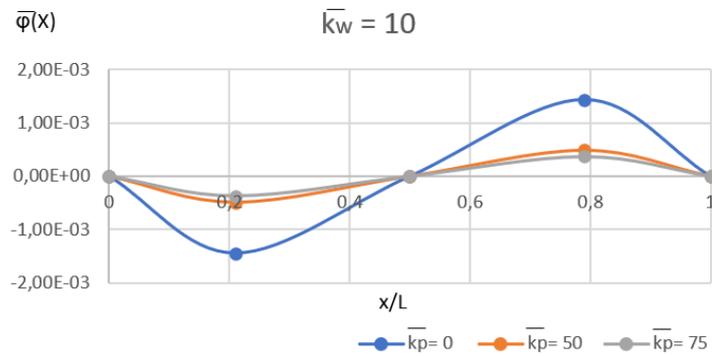
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 38 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída uniforme.



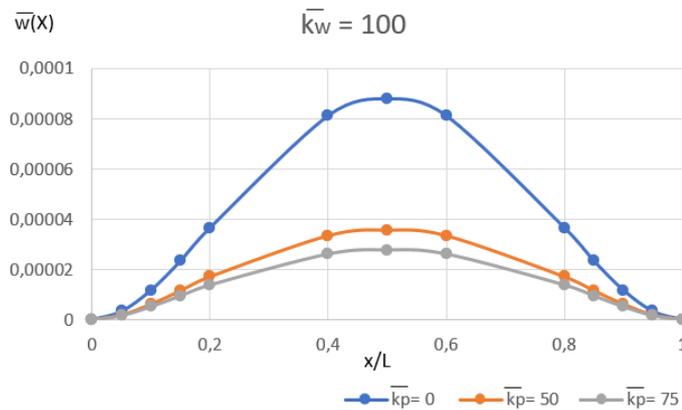
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 39 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 10$ sob carga distribuída uniforme.



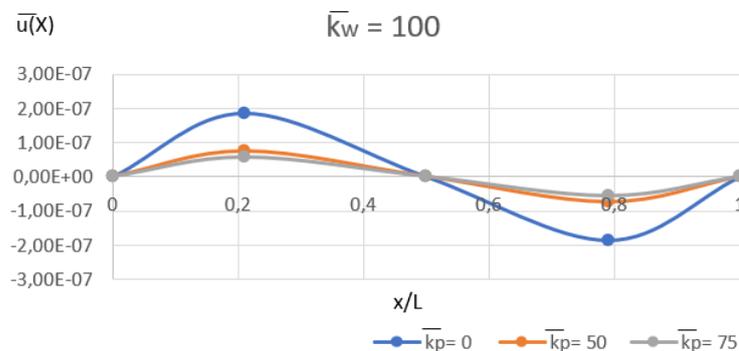
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 40 – Deslocamento $\bar{w}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída uniforme.



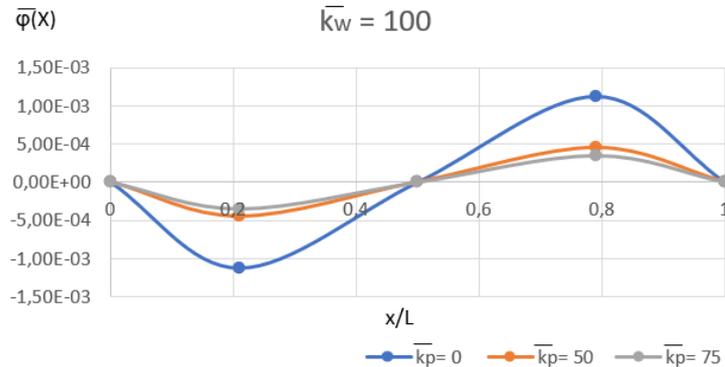
Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 41 – Deslocamento $\bar{u}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída uniforme.



Fonte: Elaboração própria (2022).

Figura 42 – Rotação $\bar{\varphi}(x)$ de uma viga laminada assimétrica biengastada em fundação com $\bar{k}_w = 100$ sob carga distribuída uniforme.



Fonte: Elaboração própria (2022).

6.5 Viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída

Simsek (2009) apresenta como um dos seus exemplos numéricos a deflexão máxima sofrida por uma viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carregamento uniforme $q_z = q$ sem base elástica.

A viga é composta por alumínio (Al ; $E_t = 70 \text{ GPa}$, $\nu_t = 0,3$) e zircônio (ZrO_2 ; $E_b = 200 \text{ GPa}$, $\nu_b = 0,3$) e as propriedades mudam continuamente na direção da espessura de acordo com a Lei de Potência. A superfície inferior da viga é de zircônio puro, enquanto a superfície superior da viga é de alumínio puro. Quanto à geometria, a largura e a espessura da viga são mantidas constantes como $b = 0,1 \text{ m}$ e $h = 0,1 \text{ m}$, respectivamente. O comprimento da viga é considerado $l = 1,6 \text{ m}$.

O autor normalizou a deflexão da seguinte maneira:

$$\bar{w}(x) = w(x) \frac{384 E_t I_y}{5 q l^4} \quad (6.13)$$

Diante dos resultados de Simsek (2009) foi possível comparar os valores de deflexão máxima da viga para diferentes valores do expoente K da Lei da Potência, previamente expressa nas Equações (4.3) e (4.4). Na Tabela 18 é apresentada a deflexão máxima para uma viga com relação $l/h = 16$ (esbelta) à medida que varia o índice de gradação K .

Tabela 18 – Deflexão máxima para viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.

L/h = 16	Presente Trabalho	Simsek (2009)	
	Euler-Bernoulli	TBT	HOSDT
0	1,00000	1,00812	1,00975
0,2	0,72963	0,75595	0,75737
0,5	0,60032	0,63953	0,64065
1	0,52720	0,56615	0,56699
2	0,47909	0,50718	0,50780
5	0,43201	0,44391	0,44442

Fonte: Elaboração própria (2022).

Destaca-se que as teorias de viga utilizadas na análise dos deslocamentos por Simsek (2009) foram a Teoria de Viga de Timoshenko (TBT) e a Teoria da Deformação por Cisalhamento de Ordem Superior (HOSDT). Apesar dos resultados encontrados neste trabalho serem próximos aos apresentados por Simsek (2009), existem pequenas diferenças consequentes da deformação por cisalhamento não considerada pela teoria clássica. Portanto, era esperado que as deflexões calculadas a partir da Teoria de Euler-Bernoulli realmente fossem menores que as geradas pela TBT e HOSDT.

Apesar de não ser uma consideração de Simsek (2009), foi realizada a análise da flexão sofrida por esta mesma viga quando apoiada em uma fundação elástica. Para esta análise, fixou-se o expoente da Lei de Potência em $K = 0,2$. Assim, para diferentes combinações dos parâmetros k_w e k_p , obteve-se as deflexões máximas. Os resultados estão expostos na Tabela 19.

Tabela 19 – Deflexão máxima para viga FGM simplesmente apoiada em base elástica sob carregamento uniforme.

Parâmetros da Fundação		Deflexão Máxima
kw	kp	w (L/2)
0	0	0,72963
	10	0,36009
	25	0,20414
10	0	0,66104
	10	0,34244
	25	0,19831
100	0	0,35743
	10	0,23738
	25	0,15764

Fonte: Elaboração própria (2022).

Ao analisar os dados apresentados na Tabela 19, como já esperado, conclui-se novamente que ambos os parâmetros \bar{k}_w e \bar{k}_p contribuem significativamente na diminuição do deslocamento. Com relação ao caso em que não há base elástica ($\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 0$), houve uma redução do deslocamento de aproximadamente 50,6% para $\bar{k}_w = 0$ e $\bar{k}_p = 10$ e uma redução de 9,4% para o caso em que $\bar{k}_w = 10$ e $\bar{k}_p = 0$. Portanto, pode-se considerar que o parâmetro k_p tem uma influência maior na resistência à flexão que o k_w .

7 CONCLUSÕES

Este trabalho se propôs a desenvolver soluções analíticas para estrutura de vigas constituída por materiais compósitos laminados anisotrópicos e materiais funcionalmente graduado, quando apoiada ou não em base elástica Winkler-Pasternak. As equações que descrevem o problema e as condições de contorno foram derivadas usando o princípio do trabalho virtual sob os pressupostos da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. A solução do sistema de equações foi realizada através de técnicas de integrações diretas e do método de variação de parâmetros.

A fim de validar a metodologia desenvolvida, foram analisados os seguintes casos: viga isotrópica simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída; viga isotrópica biengastada sob carga uniformemente distribuída; viga isotrópica em balanço sob carga pontual na borda livre; viga laminada anisotrópica simplesmente apoiada sob carregamento senoidal para diferentes arranjos de empilhamento; viga laminada anisotrópica biengastada sob carregamento uniformemente distribuído para diferentes arranjos de empilhamento; viga funcionalmente graduada simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída. Assim, os resultados encontrados foram comparados com outros presentes na literatura quando existentes.

Analisando numericamente os resultados das deflexões máximas obtidas, verificou-se que com o aumento dos valores de rigidez de fundação, os deslocamentos de flexão diminuem. Além disso, pôde-se concluir que o efeito do parâmetro de rigidez de Pasternak (k_p) no deslocamento é maior que o parâmetro de rigidez de Winkler (k_w).

Para os exemplos analisados de vigas laminadas com diferentes empilhamentos, foi possível notar que as deflexões transversais $w(x)$ foram maiores para a viga de distribuição cross-ply do que para a de distribuição assimétrica, tendo ambas deflexões menores que as de empilhamentos simétricos. Percebeu-se que a configuração de lâminas simétricas é a única que

impede o deslocamento axial $u(x)$, e que a assimétrica fornece maior resistência a este deslocamento do que a cross-ply. Em contrapartida, a cross-ply impede totalmente a rotação $\varphi(x)$, e a simétrica produz maior resistência à torção que a assimétrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTONIAZZI, Juliana Pippi. **Interação solo-estrutura de edifícios com fundações superficiais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, p. 139. 2011.

AKSHAYA, S. L.; PRAKASH, A.; RAJ, J. B. Applications of Functionally Graded Materials in Structural Engineering – A Review. *In*: DASGUPTA, Kaustubh; et al. **Proceedings of SECON 2020**. Springer. Volume 97. p. 553 – 566. 2020.

DOEVA, Olga. **New Analytical and Semi-Analytical Solutions for Static Deflection of Composite Beams**. Tese de Doutorado – University of Limerick. Limerick, p. 316. 2021.

DOEVA, Olga; MASJEDI, Pedram Khaneh; WEAVER, Paul M. Closed form solutions for an anisotropic composite beam on a two-parameter elastic foundation. **European Journal of Mechanics / A Solids**. Elsevier Masson SAS. 2021.

EISENBERGER, Moshe. An exact high order beam element. **Computers & Structures**. Pergamon. Volume 81 (3). p. 147 – 152. 2003.

FONTES, Cíntia M. A.; LIMA, José M. F.; LIMA, Paulo R. L. Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado. *Sitientibus*, n. 28, p. 91-108. Feira de Santana. 2003.

HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. Ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2010.

JHA, D. K.; KANT, T.; SINGH, R. K. A critical review of recente research on functionally graded plates. *In*: **Composite Structures**. Volume 96. p. 833 – 849. 2013.

JONES, Robert M. **Mechanics of Composite Materials**. 2. Ed. Taylor & Francis. 1999.

LUO, Yunhua. An efficient 3D Timoshenko beam element with consistent shape functions. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 1, 2008, no. 3, 95 – 106.

PEREIRA, Caio. **Viga baldrame: o que é e como executar**. Escola Engenharia. 2021. Disponível em: <<https://www.escolaengenharia.com.br/viga-baldrame/>>. Acesso em: 15 abr. 2022.

PONTRIAGUIN, L. S. **Equaciones diferenciales ordinarias**. Aguilar. Madri, 1973.

REDDY, J. N. **Energy principles and variational methods in applied mechanics**. Department of Mechanical Engineering. Texas A&M University. 2 ed. John Wiley. 2002.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. Second Edition. CRC Press LLC. 2004.

ROBINSON, M. T. A.; ADALI, S. Buckling of nonuniform and axially functionally graded nonlocal Timoshenko nanobeams on Winkler-Pasternak foundation. *Compos. Struct.* 206, 95-103. 2018.

SANTOS, Marcelo Borges. **Estimativas dos momentos estáticos para o problema de flexão estocástica de viga em uma fundação Pasternak**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e de Materiais) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, p. 105. 2015.

SHARMA, N. K.; BHANDARI, M.; ASHIVARD. Applications of Functionally Graded Materials (FGMs). **International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)**. Volume 2. 2018.

SILVA, Sebastião S.; SILVA, William T. M. Estudo de pórticos planos utilizando um elemento finito de viga unificado em um programa de análise linear. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, Santa Fe, v. XXIX, n. 17, p. 1803-1815, nov. 2010.

SIMSEK, M. Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz Method. **International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)**. Volume 1, Seção 3. 2009.

SOUZA, Calebe Paiva Gomes de; CRUZ, Gustavo Guimarães. Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab. **Revista Tecnologia**, Fortaleza, v. 39, n. 1, p.1-12, jun. 2018.

VO, Thuc P. THAI, Huu-Tai. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. **Composite Structures**. Elsevier. 2012.

YU, Wenbin. HODGES, Dewey. Best strip-beam properties derivable from classical lamination theory. **49th AIAA journal**. P. 1719-1724. 2008.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. *Diferential Equations with Boundary-Value Problems*. 7 ed. Brooks/Cole, Cengage Learning. Belmont. 2008.

APÊNDICE A – MATRIZ DE RIGIDEZ S

Este apêndice apresenta a matriz de rigidez S para vigas isotrópicas, compósitas laminadas anisotrópicas e funcionalmente graduadas.

1) Coeficientes de rigidez para vigas isotrópicas

Nos materiais isotrópicos, os módulos de elasticidade E_1 , E_2 e E_3 são iguais entre si nas direções 1, 2 e 3. Os coeficientes de Poisson ν_{ij} e os módulos de cisalhamento G_{23} , G_{31} e G_{12} também são iguais em todas as direções. Logo, a partir de Jones (1999), tem-se que:

$$Q_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{AA.1})$$

$$Q_{55} = Q_{66} = G \quad (\text{AA.2})$$

Ao assumir que o efeito Poisson é pequeno, pode-se considerar que $\nu \cong 0$. Desta forma, tem-se que a relação tensão-deformação para a viga isotrópica de apenas uma camada é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{AA.3})$$

Onde:

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x = E \varepsilon_x$$

$$\sigma_{xy} = Q_{66} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{zx} = Q_{55} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx}$$

Logo, tem-se que os coeficientes de rigidez que compõe a matriz S para o caso de viga isotrópica são:

$$S_{EA} = \int_A E \, dA = EA \quad (\text{AA.4.a})$$

$$S_{ET} = 0 \quad (\text{AA.4.b})$$

$$S_{EF} = \int_A E \, z \, dA = E y \frac{z^2}{2} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{AA.4.c})$$

$$S_{EL} = - \int_A E y dA = -Ez \frac{y^2}{2} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0 \quad (\text{AA.4.d})$$

$$S_{GJ} = G \left(\int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \right) = G(I_z + I_y) = GJ \quad (\text{AA.4.e})$$

$$S_{FT} = 0 \quad (\text{AA.4.f})$$

$$S_{LT} = 0 \quad (\text{AA.4.g})$$

$$S_{EI_y} = E \int_A z^2 dA = EI_y \quad (\text{AA.4.h})$$

$$S_{FL} = - \int_A E zy dA = -E \frac{z^2}{2} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^2}{2} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0 \quad (\text{AA.4.i})$$

$$S_{EI_z} = E \int_A y^2 dA = EI_z \quad (\text{AA.4.j})$$

Ou seja, para vigas isotrópicas, a matriz de rigidez S é reduzida a

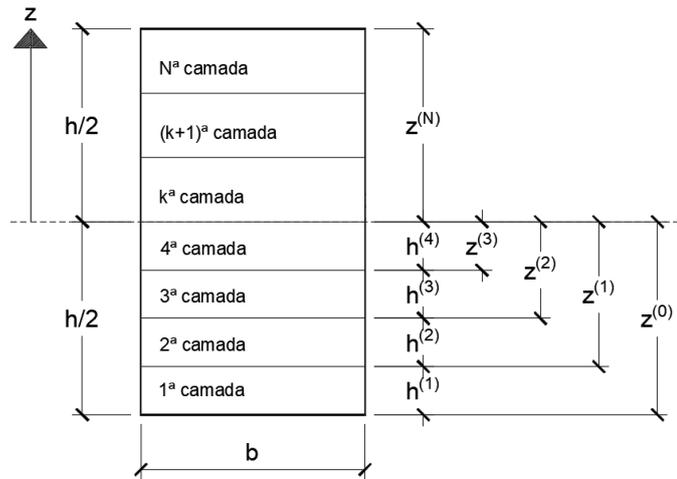
$$S = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix} \quad (\text{AA.5})$$

Onde EA é a rigidez extensional, GJ é a rigidez de torção, EI_y é a rigidez de flexão fora do plano e EI_z é a rigidez de flexão no plano.

2) Coeficientes de rigidez para vigas compósitas laminadas

Por sua vez, os coeficientes de rigidez das vigas laminadas de múltiplas camadas passam a ter dependência em z , devido à possibilidade de diferentes arranjos das lâminas. Isto é, estes coeficientes se tornam dependentes da rotação θ em relação às direções principais de cada camada.

É possível visualizar as camadas da viga laminada na Figura AA.1.

Figura AA.1 – Geometria da viga laminada.

Fonte: Elaboração própria (2022).

Sendo N o número de camadas, é possível escrever as seguintes ordenadas:

$$z^{(0)} = -\frac{h}{2} \quad (\text{AA.6.a})$$

$$z^{(1)} = -\frac{h}{2} + h^{(1)} \quad (\text{AA.6.b})$$

$$z^{(2)} = z^{(1)} + h^{(2)} \quad (\text{AA.6.c})$$

$$\vdots$$

$$z^{(k)} = z^{(k-1)} + h^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{AA.6.d})$$

$$\vdots$$

$$z^{(N)} = \frac{h}{2} \quad (\text{AA.6.e})$$

De acordo com Jones (1999), a Teoria Clássica de Laminação impõe suposições simplificadoras eficazes e razoavelmente precisas que permitem reduzir um complicado problema de elasticidade tridimensional a um problema bidimensional. A partir dela, tem-se que as parcela que compõe a rigidez extensional, a rigidez ao acoplamento flexão-extensão e a rigidez à flexão de materiais compósitos laminados são respectivamente:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (\text{AA.7})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (\text{AA.8})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (\text{AA.9})$$

Sendo:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \quad (\text{AA.10})$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (\text{AA.11})$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4(\theta) \quad (\text{AA.12})$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (\text{AA.13})$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{26} = & (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} \\ & + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{AA.14})$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (\text{AA.15})$$

Onde θ é o ângulo do eixo x ao eixo 1.

A partir de Yu e Hodges (2008), obtém-se que as componentes da matriz de rigidez S de uma viga compósita laminada são dadas por:

$$S_{EA} = b \left(\bar{A}_{11} - \frac{\bar{B}_{12}^2}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.16})$$

$$S_{GJ} = 4b \left(\bar{D}_{66} - \frac{\bar{D}_{26}^2}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.17})$$

$$S_{EI_y} = b \left(\bar{D}_{11} - \frac{\bar{D}_{12}^2}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.18})$$

$$S_{EI_z} = \frac{b^2 S_{EA}}{12} \quad (\text{AA.19})$$

$$S_{ET} = -2b \left(\bar{B}_{16} - \frac{\bar{B}_{12} \bar{D}_{26}}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.20})$$

$$S_{EF} = b \left(\bar{B}_{11} - \frac{\bar{B}_{12} \bar{D}_{12}}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.21})$$

$$S_{FT} = -2b \left(\bar{D}_{16} - \frac{\bar{D}_{12} \bar{D}_{26}}{\bar{D}_{22}} \right) \quad (\text{AA.22})$$

$$S_{EL} = S_{LT} = S_{FL} = 0 \quad (\text{AA.23})$$

Onde:

$$\bar{A}_{11} = A_{11} + \frac{A_{16}^2 A_{22} - 2A_{12} A_{16} A_{26} + A_{12}^2 A_{66}}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.24})$$

$$\bar{B}_{11} = B_{11} + \frac{A_{12} A_{66} B_{12} + A_{16} A_{22} B_{16} - A_{26} (A_{16} B_{12} + A_{12} B_{16})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.25})$$

$$\bar{B}_{12} = B_{12} + \frac{A_{12} A_{66} B_{22} + A_{16} A_{22} B_{26} - A_{26} (A_{16} B_{22} + A_{12} B_{26})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.26})$$

$$\bar{B}_{16} = B_{16} + \frac{A_{12} A_{66} B_{26} + A_{16} A_{22} B_{66} - A_{26} (A_{16} B_{26} + A_{12} B_{66})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.27})$$

$$\bar{D}_{11} = D_{11} + \frac{A_{66} B_{12}^2 - 2A_{26} B_{12} B_{16} + A_{22} B_{16}^2}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.28})$$

$$\bar{D}_{12} = D_{12} + \frac{A_{66} B_{12} B_{22} + A_{22} B_{16} B_{26} - A_{26} (B_{16} B_{22} + B_{12} B_{26})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.29})$$

$$\bar{D}_{22} = D_{22} + \frac{A_{66} B_{22}^2 - 2A_{26} B_{22} B_{26} + A_{22} B_{26}^2}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.30})$$

$$\bar{D}_{16} = D_{16} + \frac{A_{66} B_{12} B_{26} + A_{22} B_{16} B_{66} - A_{26} (B_{16} B_{26} + B_{12} B_{66})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.31})$$

$$\bar{D}_{26} = D_{26} + \frac{A_{66} B_{22} B_{26} + A_{22} B_{26} B_{66} - A_{26} (B_{26}^2 + B_{22} B_{66})}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.32})$$

$$\bar{D}_{66} = D_{66} + \frac{A_{66} B_{26}^2 - 2A_{26} B_{26} B_{66} + A_{22} B_{66}^2}{A_{26}^2 - A_{22} A_{66}} \quad (\text{AA.33})$$

Resumidamente, a matriz de rigidez S para vigas compósitas laminadas tem a forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_{EA} & S_{ET} & S_{EF} & 0 \\ S_{ET} & S_{GJ} & S_{FT} & 0 \\ S_{EF} & S_{FT} & S_{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{EI_z} \end{bmatrix} \quad (\text{AA.34})$$

Onde S_{EA} é a rigidez extensional, S_{GJ} é a rigidez de torção, S_{EI_y} é a rigidez de flexão fora do plano, S_{EI_z} é a rigidez de flexão no plano, S_{EF} é o acoplamento entre flexão fora do plano e deslocamento axial, S_{ET} é o acoplamento entre deslocamento axial e torção e S_{FT} é o acoplamento entre flexão fora do plano e torção.

3) Coeficientes de rigidez para vigas funcionalmente graduadas

Quando a viga é composta de um material funcionalmente graduado, tem-se que os coeficientes de rigidez efetivos variam de acordo com a Lei de Potência, conforme Equações (4.3) e (4.4). Neste caso, os coeficientes de rigidez também são funções dependentes da variável z . Portanto, tem-se que:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (\text{AA.35})$$

$$Q_{12}(z) = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (\text{AA.36})$$

$$Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = G(z) \quad (\text{AA.37})$$

Visto que não há rotação em relação às direções principais, tem-se que:

$$\overline{Q}_{11}(z) = Q_{11}(z) \quad (\text{AA.38})$$

$$\overline{Q}_{12}(z) = Q_{12}(z) \quad (\text{AA.39})$$

$$\overline{Q}_{22}(z) = Q_{22}(z) \quad (\text{AA.40})$$

$$\overline{Q}_{16} = 0 \quad (\text{AA.41})$$

$$\overline{Q}_{26} = 0 \quad (\text{AA.42})$$

$$\overline{Q}_{66} = 0 \quad (\text{AA.43})$$

Ao aplicar a Teoria Clássica de Laminação, obtém-se que:

$$A_{ij} = \overline{Q}_{ij}(z_1 - z_0) \quad (\text{AA.44})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \overline{Q}_{ij}(z_1^2 - z_0^2) \quad (\text{AA.45})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \overline{Q}_{ij}(z_1^3 - z_0^3) \quad (\text{AA.46})$$

A partir disto, calcula-se as componentes da matriz de rigidez S para viga funcionalmente graduada da mesma forma como para viga compósita laminada, conforme indicado por Doeva (2021), de acordo com as Equações (AA.16) – (AA.23).

Para este caso, devido à nulicidade dos termos \overline{Q}_{16} , \overline{Q}_{26} e \overline{Q}_{66} , a matriz de rigidez S tem a forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_{EA} & 0 & S_{EF} & 0 \\ 0 & S_{GJ} & 0 & 0 \\ S_{EF} & 0 & S_{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{EI_z} \end{bmatrix} \quad (\text{AA.47})$$

Onde S_{EA} é a rigidez extensional, S_{GJ} é a rigidez de torção, S_{EI_y} é a rigidez de flexão fora do plano, S_{EI_z} é a rigidez de flexão no plano e S_{EF} é o acoplamento entre flexão fora do plano e deslocamento axial.

APÊNDICE B – OBTENÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES QUE DESCREVEM O PROBLEMA

Reddy (2002) demonstra que é possível solucionar a Equação (4.25), derivada do Princípio dos Trabalhos Virtuais, realizando a integração por partes. Desta forma, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left\{ \left[-\frac{d}{dx} (S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'') - q_x \right] \delta u + \left[-\frac{d}{dx} (S_{ET} u' + \right. \right. \\
 & S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') - q_\varphi \left. \right] \delta \varphi + \left[-\frac{d}{dx} \left(-S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - \right. \right. \\
 & S_{FL} v'' \left. \right) + k_p w' \left. \right] \delta w' + \left[-\frac{d}{dx} (S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \right] \delta v' + \\
 & (k_w w - q_z) \delta w - q_y \delta v \left. \right\} dx + [(S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'') \delta u]_0^l + \\
 & [(S_{ET} u' + S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') \delta \varphi]_0^l + \left[\left(-S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - \right. \right. \\
 & S_{FL} v'' \left. \right) \delta w' \left. \right]_0^l + [(S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \delta v']_0^l
 \end{aligned} \tag{AB.1}$$

Repetindo o processo de integração por partes para os termos da integral que contém $\delta w'$ e $\delta v'$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left\{ \left[-\frac{d}{dx} (S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'') - q_x \right] \delta u + \left[-\frac{d}{dx} (S_{ET} u' + \right. \right. \\
 & S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') - q_\varphi \left. \right] \delta \varphi + \left\{ -\frac{d}{dx} \left[-\frac{d}{dx} \left(-S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + \right. \right. \right. \\
 & S_{EI_y} w'' - S_{FL} v'' \left. \right) - \frac{d}{dx} (k_p w') \left. \right] + k_w w - q_z \left. \right\} \delta w + \left\{ -\frac{d}{dx} \left[-\frac{d}{dx} (S_{EL} u' + \right. \right. \\
 & S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \left. \right] - q_y \left. \right\} \delta v \left. \right\} dx + [(S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + \\
 & S_{EL} v'') \delta u]_0^l + [(S_{ET} u' + S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'') \delta \varphi]_0^l + \left[\left(-S_{EF} u' - \right. \right. \\
 & S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - S_{FL} v'' \left. \right) \delta w' \left. \right]_0^l + \left[(S_{EF} u'' + S_{FT} \varphi'' - S_{EI_y} w''' + S_{FL} v''' + \right. \\
 & k_p w') \delta w \left. \right]_0^l + [(S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'') \delta v']_0^l + \left[\left(-S_{EL} u'' - \right. \right. \\
 & S_{LT} \varphi'' + S_{FL} w''' - S_{EI_z} v''' \left. \right) \delta v \left. \right]_0^l
 \end{aligned} \tag{AB.2}$$

De acordo com Reddy (2002), é possível obter o minimizador de um funcional a partir das equações de Euler, conforme detalhado no ANEXO C – CÁLCULO VARIACIONAL

(REDDY, 2002). Estas correspondem ao sistema de equações que descrevem o problema. Logo, ao recolher os coeficientes δu , $\delta \varphi$, δw e δv , tem-se que:

$$-S_{EA}u'' - S_{ET}\varphi'' + S_{EF}w''' - S_{EL}v''' - q_x = 0 \quad (\text{AB.3})$$

$$-S_{ET}u'' - S_{GJ}\varphi'' + S_{FT}w''' - S_{LT}v''' - q_\varphi = 0 \quad (\text{AB.4})$$

$$-S_{EF}u''' - S_{FT}\varphi''' + S_{EI_y}w^{(IV)} - S_{FL}v^{(IV)} + k_w w - k_p w'' - q_z = 0 \quad (\text{AB.5})$$

$$S_{EL}u''' + S_{LT}\varphi''' - S_{FL}w^{(IV)} + S_{EI_z}v^{(IV)} - q_y = 0 \quad (\text{AB.6})$$

As condições de contorno, em $x = 0$ e em $x = l$, são dadas por:

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad S_{EA} u' + S_{ET} \varphi' - S_{EF} w'' + S_{EL} v'' = f_x \quad (\text{AB.7})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad S_{ET} u' + S_{GJ} \varphi' - S_{FT} w'' + S_{LT} v'' = m_x \quad (\text{AB.8})$$

$$w' = 0 \quad \text{ou} \quad -S_{EF} u' - S_{FT} \varphi' + S_{EI_y} w'' - S_{FL} v'' = -m_y \quad (\text{AB.9})$$

$$v' = 0 \quad \text{ou} \quad S_{EL} u' + S_{LT} \varphi' - S_{FL} w'' + S_{EI_z} v'' = m_z \quad (\text{AB.10})$$

$$w = 0 \quad \text{ou} \quad S_{EF} u'' + S_{FT} \varphi'' - S_{EI_y} w''' + S_{FL} v''' + k_p w' = f_z \quad (\text{AB.11})$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad -S_{EL} u'' - S_{LT} \varphi'' + S_{FL} w''' - S_{EI_z} v''' = f_y \quad (\text{AB.12})$$

APÊNDICE C – COMPROVAÇÃO DE QUE A SOLUÇÃO ENCONTRADA PARA CADA CASO DE COMBINAÇÃO DE PARÂMETROS SATISFAZ O RESPECTIVO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO

Este apêndice apresenta a comprovação de que as soluções encontradas para cada caso de combinação de parâmetros satisfazem os sistemas não homogêneos correspondentes. Para isto, foi utilizado o software *Wolfram Mathematica 11.0*.

Da Equação (5.9), tem-se que a expressão abaixo precisa ser obedecida.

$$X' - MX - f = 0 \quad (\text{AC.1})$$

a) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

Figura C.1 – Comprovação de que a solução encontrada para $k_w = 0$ e $k_p = 0$ satisfaz o sistema de equações que descrevem o problema.

```

In[6]:= MatrixForm[f =  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m[x] \\ n[x] \end{pmatrix}$ ];

In[6]:= solucao =  $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} (6 C1 + 6 C3 x + 3 C5 x^2 + C7 x^3 + x^3 \int m[x] dx - 3 x^2 \int x m[x] dx + 3 x \int x^2 m[x] dx - \int x^3 m[x] dx) \\ \frac{1}{6} (6 C2 + 6 C4 x + 3 C6 x^2 + C8 x^3 + x^3 \int n[x] dx - 3 x^2 \int x n[x] dx + 3 x \int x^2 n[x] dx - \int x^3 n[x] dx) \\ \frac{1}{2} (2 C3 + 2 C5 x + C7 x^2 + x^2 \int m[x] dx - 2 x \int x m[x] dx + \int x^2 m[x] dx) \\ \frac{1}{2} (2 C4 + 2 C6 x + C8 x^2 + x^2 \int n[x] dx - 2 x \int x n[x] dx + \int x^2 n[x] dx) \\ C5 + C7 x + x \int m[x] dx - \int x m[x] dx \\ C6 + C8 x + x \int n[x] dx - \int x n[x] dx \\ C7 + \int m[x] dx \\ C8 + \int n[x] dx \end{pmatrix}$ ;

In[7]:= FullSimplify[MatrixForm[ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .solucao - f]];

Out[7]/MatrixForm=  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

```

Fonte: Elaboração própria (2022).

b) $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$:

Figura C.2 – Comprovação de que a solução encontrada para $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$ satisfaz o sistema de equações que descrevem o problema.

$$\text{MatrixForm}\left[\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m[x] \\ n[x] \end{pmatrix}\right];$$

$$\text{solucao} = \begin{pmatrix} \frac{2a^{3/2} C1 + 2C7 e^{-x\lambda} - 2C5 e^{x\lambda} + 2a^{3/2} C3 x - 2\sqrt{a} x \int n[x] dx - e^{x\lambda} \int e^{-x\lambda} m[x] dx + e^{-x\lambda} \int e^{x\lambda} m[x] dx + 2\sqrt{a} \int x m[x] dx}{2a^{3/2}} \\ \frac{1}{6} (6 C2 + 6 C4 x + 3 C6 x^2 + C8 x^3 + x^3 \int n[x] dx - 3 x^2 \int x n[x] dx + 3 x \int x^2 n[x] dx - \int x^3 n[x] dx) \\ \frac{2a C3 + 2C7 e^{-x\lambda} + 2C5 e^{x\lambda} - 2 \int n[x] dx + e^{x\lambda} \int e^{-x\lambda} m[x] dx + e^{-x\lambda} \int e^{x\lambda} m[x] dx}{2a} \\ \frac{1}{2} (2 C4 + 2 C6 x + C8 x^2 + x^2 \int n[x] dx - 2 x \int x n[x] dx + \int x^2 n[x] dx) \\ \frac{e^{-x\lambda} (2C7 - 2C5 e^{2x\lambda} - e^{2x\lambda} \int e^{-x\lambda} m[x] dx + \int e^{x\lambda} m[x] dx)}{2\sqrt{a}} \\ C6 + C8 x + x \int n[x] dx - \int x n[x] dx \\ \frac{1}{2} e^{-x\lambda} (2 (C7 + C5 e^{2x\lambda}) + e^{2x\lambda} \int e^{-x\lambda} m[x] dx + \int e^{x\lambda} m[x] dx) \\ C8 + \int n[x] dx \end{pmatrix};$$

$$\text{FullSimplify}\left[\text{MatrixForm}\left[\partial_x \text{solucao} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{solucao} - \mathbf{f}\right] /. \lambda \rightarrow -\sqrt{a}\right]$$

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fonte: Elaboração própria (2022).

c) $k_w \neq 0$ e $k_p \neq 0$:

APÊNDICE D – EQUAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS DO EXEMPLO NUMÉRICO 6.4.1

Este apêndice apresenta as constantes das deflexões $w(x)$ e $v(x)$, do deslocamento axial $u(x)$ e da rotação $\varphi(x)$ para vigas compósitas anisotrópicas laminadas simplesmente apoiadas sob carregamento senoidal do exemplo numérico 6.4.1.

Das Equações (5.85) e (5.86) respectivamente, tem-se que os deslocamentos axial e de rotação podem ser calculados por:

$$u(x) = \left[(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})(C_{10,1} + C_{9,1}x) - \int \int -S_{GJ}q_x(x) + S_{ET}q_\varphi(x) dx + (S_{ET}S_{FT} - S_{EF}S_{GJ})w'(x) \right] / (S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) \quad (\text{AD.1})$$

$$\varphi(x) = \left[(S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ})(C_{10,2} + C_{9,2}x) - \int \int (S_{ET}q_x(x) - S_{EA}q_\varphi(x)) dx + (S_{EF}S_{ET} - S_{EA}S_{FT})w'(x) \right] / (S_{ET}^2 - S_{EA}S_{GJ}) \quad (\text{AD.2})$$

A deflexão na direção y , $v(x)$, é dada pela Equação (AD.3) independentemente da combinação de parâmetros da base elástica, conforme percebe-se nas Equações (5.25), (5.46) e (5.68).

$$v(x) = \frac{1}{6} (6 C_2 + 6 C_4 x + 3 C_6 x^2 + C_8 x^3 + x^3 \int n(x) dx - 3x^2 \int x n(x) dx + 3x \int x^2 n(x) dx - \int x^3 n(x) dx) \quad (\text{AD.3})$$

Para $k_w = 0$ e $k_p = 0$, de acordo com a Equação (5.25), a solução da deflexão transversal em z é:

$$w(x) = \frac{1}{6} (6 C_1 + 6 C_3 x + 3 C_5 x^2 + C_7 x^3 + x^3 \int m(x) dx - 3x^2 \int x m(x) dx + 3x \int x^2 m(x) dx - \int x^3 m(x) dx) \quad (\text{AD.4})$$

Para $k_w = 0$ e $k_p \neq 0$, de acordo com a Equação (5.46), sabe-se que a deflexão transversal em z é dada por:

$$w(x) = \left(2a^{\frac{3}{2}}C_1 + 2a^{\frac{3}{2}}C_3x - 2C_5e^{x\lambda} + 2C_7e^{-x\lambda} - 2\sqrt{a}x \int m(x)dx - e^{x\lambda} \int e^{-x\lambda} m(x)dx + e^{-x\lambda} \int e^{x\lambda} m(x)dx + 2\sqrt{a} \int x m(x)dx \right) / 2a^{\frac{3}{2}} \quad (\text{AD.5})$$

Por fim, tem-se que a deflexão transversal em z para $k_w \neq 0$ e $k_p \neq 0$, conforme Equação (5.68), é:

$$w(x) = \frac{4\sqrt{a-\sqrt{a^2-4b}} e^{-\lambda_1 x} (C_3 - C_1 e^{2\lambda_1 x})}{2\sqrt{2} a (a-\sqrt{a^2-4b}) - 4\sqrt{2}b} + \frac{4\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b}} e^{-\lambda_3 x} (C_7 - C_5 e^{2\lambda_3 x})}{2\sqrt{2} a (a+\sqrt{a^2-4b}) - 4\sqrt{2}b} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{(a-\sqrt{a^2-4b})^{\frac{3}{2}} (e^{-x\lambda_1} \int e^{x\lambda_1} m(x)dx - e^{x\lambda_1} \int e^{-x\lambda_1} m(x)dx)}{\sqrt{a^2-4b}(-a^2+a\sqrt{a^2-4b}+2b)} + \frac{(a+\sqrt{a^2-4b})^{\frac{3}{2}} (e^{-x\lambda_3} \int e^{x\lambda_3} m(x)dx - e^{x\lambda_3} \int e^{-x\lambda_3} m(x)dx)}{\sqrt{a^2-4b}(a^2+a\sqrt{a^2-4b}-2b)} \right) \quad (\text{AD.6})$$

Onde a pode ser calculado pela Equação (4.74), b pela Equação (4.76), $m(x)$ pela Equação (4.78), $n(x)$ pela Equação (4.79), λ pela Equação (5.50), λ_1 pela Equação (5.59) e, por fim, o λ_3 pela Equação (5.60).

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, verificou-se que as equações apresentadas acima de fato satisfazem o sistema de equações (4.26) - (4.29) que descrevem o problema.

As condições de contorno, dadas anteriormente na Equação (4.80) para as duas extremidades, para uma viga simplesmente apoiada também foram satisfeitas. As constantes para cada caso de base elástica estão apresentadas abaixo.

1) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Simétrico

$$1.1) \quad k_w = 0 \text{ e } k_p = 0:$$

$$C_1 = 0 \quad (\text{AD.7})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.8})$$

$$C_3 = -0.00548877q_0 \quad (\text{AD.9})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.10})$$

$$C_5 = 0.121973 q_0 \quad (\text{AD.11})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.12})$$

$$C_7 = 0 \quad (\text{AD.13})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.14})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.15})$$

$$C_{9,2} = -0.106535 q_0 \quad (\text{AD.16})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.17})$$

$$C_{10,2} = 0.0047941 q_0 \quad (\text{AD.18})$$

1.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.000002258867213238166 q_0 \quad (\text{AD.19})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.20})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.21})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.22})$$

$$C_5 = -1.7824205510243698 q_0 \quad (\text{AD.23})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.24})$$

$$C_7 = 0.00043534758256727 q_0 \quad (\text{AD.25})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.26})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.27})$$

$$C_{9,2} = -0.016850253907843008 q_0 \quad (\text{AD.28})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.29})$$

$$C_{10,2} = 0.0007582614258529354 q_0 \quad (\text{AD.30})$$

1.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -0.000001063987773961437 q_0 \quad (\text{AD.31})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.32})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.33})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.34})$$

$$C_5 = -1.542704358736431 q_0 \quad (\text{AD.35})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.36})$$

$$C_7 = 0.000058115378683380065 q_0 \quad (\text{AD.37})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.38})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.39})$$

$$C_{9,2} = -0.011905390481357563 q_0 \quad (\text{AD.40})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.41})$$

$$C_{10,2} = 0.0005357425716610904 q_0 \quad (\text{AD.42})$$

1.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.5706245093195872 - 0.9265711367108705i)q_0 \quad (\text{AD.43})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.44})$$

$$C_3 = (0.2618587771875748 + 0.09408785020370872i)q_0 \quad (\text{AD.45})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.46})$$

$$C_5 = (-0.570624509319587 - 0.9265711367108704i) q_0 \quad (\text{AD.47})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.48})$$

$$C_7 = (0.261858777187575 - 0.09408785020370843i)q_0 \quad (\text{AD.49})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.50})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.51})$$

$$C_{9,2} = (-0.09597218952053967 - 1.387778780781445 \times 10^{-17}i)q_0 \quad (\text{AD.52})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.53})$$

$$C_{10,2} = (0.004318748528424284 - 3.252606517456514 \times 10^{-19}i)q_0 \quad (\text{AD.54})$$

1.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.00016795459881400503q_0 \quad (\text{AD.55})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.56})$$

$$C_3 = -0.00010732164378775284q_0 \quad (\text{AD.57})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.58})$$

$$C_5 = -1.7550369604188112q_0 \quad (\text{AD.59})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.60})$$

$$C_7 = 0.00043386314983462414q_0 \quad (\text{AD.61})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.62})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.63})$$

$$C_{9,2} = -0.016567219208980022q_0 \quad (\text{AD.64})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.65})$$

$$C_{10,2} = 0.0007455248644041009q_0 \quad (\text{AD.66})$$

1.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.00004163833312895781q_0 \quad (\text{AD.67})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.68})$$

$$C_3 = -0.00002889410852193117q_0 \quad (\text{AD.69})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.70})$$

$$C_5 = -1.5253761644226693q_0 \quad (\text{AD.71})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.72})$$

$$C_7 = 0.00005784051536654077q_0 \quad (\text{AD.73})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.74})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.75})$$

$$C_{9,2} = -0.011764073316812295q_0 \quad (\text{AD.76})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.77})$$

$$C_{10,2} = 0.0005293832992565534q_0 \quad (\text{AD.78})$$

1.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.7832120285473 - 0.8871971270128455i)q_0 \quad (\text{AD.79})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.80})$$

$$C_3 = (-0.0007080016292797947 + 0.10469310009482505i)q_0 \quad (\text{AD.81})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.82})$$

$$C_5 = (-0.7832120285472992 - 0.887197127012844i)q_0 \quad (\text{AD.83})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.84})$$

$$C_7 = (-0.0007080016292797114 - 0.10469310009482513i)q_0 \quad (\text{AD.85})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.86})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.87})$$

$$C_{9,2} = (-0.050729018658651925 + 1.387778780781445 \times 10^{-17}i)q_0 \quad (\text{AD.88})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.89})$$

$$C_{10,2} = (0.002282805839639337 - 2.168404344971009 \times 10^{-19}i)q_0 \quad (\text{AD.90})$$

1.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.0067284957591708895q_0 \quad (\text{AD.91})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.92})$$

$$C_3 = -0.0016009291022920568q_0 \quad (\text{AD.93})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.94})$$

$$C_5 = -1.5469927602859141q_0 \quad (\text{AD.95})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.96})$$

$$C_7 = 0.0004280954174051292q_0 \quad (\text{AD.97})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.98})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.99})$$

$$C_{9,2} = -0.014391950551659862q_0 \quad (\text{AD.100})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.101})$$

$$C_{10,2} = 0.0006476377748246936q_0 \quad (\text{AD.102})$$

1.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.001600154773812676q_0 \quad (\text{AD.103})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.104})$$

$$C_3 = -0.0005004784365014545q_0 \quad (\text{AD.105})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.106})$$

$$C_5 = -1.3865683353950264q_0 \quad (\text{AD.107})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.108})$$

$$C_7 = 0.00005582663418115256q_0 \quad (\text{AD.109})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.110})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AD.111})$$

$$C_{9,2} = -0.010628750669493323 q_0 \quad (\text{AD.112})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AD.113})$$

$$C_{10,2} = 0.00047829378012719957 q_0 \quad (\text{AD.114})$$

2) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Cross-ply

2.1) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = 0 \quad (\text{AD.115})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.116})$$

$$C_3 = -0.004979113689745566q_0 \quad (\text{AD.117})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.118})$$

$$C_5 = 0.11064697088323477 q_0 \quad (\text{AD.119})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.120})$$

$$C_7 = 0 \quad (\text{AD.121})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.122})$$

$$C_{9,1} = -0.000014271493192897677 q_0 \quad (\text{AD.123})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.124})$$

$$C_{10,1} = 6.422171936803955 \times 10^{-7} q_0 \quad (\text{AD.125})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.126})$$

2.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.000001169073989155718 q_0 \quad (\text{AD.127})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.128})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.129})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.130})$$

$$C_5 = -1.9153814545265087 q_0 \quad (\text{AD.131})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.132})$$

$$C_7 = 0.00004724673865260092 q_0 \quad (\text{AD.133})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.134})$$

$$C_{9,1} = -0.000002095661872745077 q_0 \quad (\text{AD.135})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.136})$$

$$C_{10,1} = 9.430478427352849 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.137})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.138})$$

2.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -5.533101393871814 \times 10^{-7} q_0 \quad (\text{AD.139})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.140})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.141})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.142})$$

$$C_5 = -1.6654382049009124 q_0 \quad (\text{AD.143})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.144})$$

$$C_7 = 0.000003784834629738521 q_0 \quad (\text{AD.145})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.146})$$

$$C_{9,1} = -0.00000148778132137862 q_0 \quad (\text{AD.147})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.148})$$

$$C_{10,1} = 6.695015946203794 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.149})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.150})$$

2.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.6286607815333954 - 0.9686048182566607i)q_0 \quad (\text{AD.151})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.152})$$

$$C_3 = (0.2116050665685996 + 0.12833897015466564i)q_0 \quad (\text{AD.153})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.154})$$

$$C_5 = (-0.6286607815333938 - 0.968604818256659i)q_0 \quad (\text{AD.155})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.156})$$

$$C_7 = (0.21160506656859948 - 0.12833897015466608i) q_0 \quad (\text{AD.157})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.158})$$

$$C_{9,1} = (-0.000012665373898089983 - 1.6940658945086 \times 10^{-21}i) q_0 \quad (\text{AD.159})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.160})$$

$$C_{10,1} = (5.699418254140492 \times 10^{-7} - 4.764560328305439 \times 10^{-22}i) q_0 \quad (\text{AD.161})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.162})$$

2.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.00008655324800817332q_0 \quad (\text{AD.163})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.164})$$

$$C_3 = -0.00005532073025896399q_0 \quad (\text{AD.165})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.166})$$

$$C_5 = -1.8844192516240403q_0 \quad (\text{AD.167})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.168})$$

$$C_7 = 0.00004692415420483356 q_0 \quad (\text{AD.169})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.170})$$

$$C_{9,1} = -0.000002059943772920008 q_0 \quad (\text{AD.171})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.172})$$

$$C_{10,1} = 9.269746978151003 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.173})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.174})$$

2.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.00002161249627525104q_0 \quad (\text{AD.175})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.176})$$

$$C_3 = -0.000014998931194420881q_0 \quad (\text{AD.177})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.178})$$

$$C_5 = -1.6461370254366856q_0 \quad (\text{AD.179})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.180})$$

$$C_7 = 0.000003760232069333648 q_0 \quad (\text{AD.181})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.182})$$

$$C_{9,1} = -0.00000146995699886676 q_0 \quad (\text{AD.183})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.184})$$

$$C_{10,1} = 6.614806494893993 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.185})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.186})$$

2.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.7684890584172668 - 0.811009602202249i)q_0 \quad (\text{AD.187})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.188})$$

$$C_3 = (-0.02516412908487362 + 0.06768467286985533i)q_0 \quad (\text{AD.189})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.190})$$

$$C_5 = (-0.7684890584172671 - 0.8110096022022484i)q_0 \quad (\text{AD.191})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.192})$$

$$C_7 = (-0.025164129084873376 - 0.06768467286985524i) q_0 \quad (\text{AD.193})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.194})$$

$$C_{9,1} = (-0.000006300572323135048 + 8.470329472543003 \times 10^{-22}i) q_0 \quad (\text{AD.195})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.196})$$

$$C_{10,1} = (2.835257545410772 \times 10^{-7} + 1.323488980084844 \times 10^{-23}i) q_0 \quad (\text{AD.197})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.198})$$

2.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.0033245684672869535q_0 \quad (\text{AD.199})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.200})$$

$$C_3 = -0.0007978424880310349q_0 \quad (\text{AD.201})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.202})$$

$$C_5 = -1.6479963828234483q_0 \quad (\text{AD.203})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.204})$$

$$C_7 = 0.00004476615132972426 q_0 \quad (\text{AD.205})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.206})$$

$$C_{9,1} = -0.000001786120768680684 q_0 \quad (\text{AD.207})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.208})$$

$$C_{10,1} = 8.03754345905655 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.209})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.210})$$

2.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.0008159034202122259q_0 \quad (\text{AD.211})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.212})$$

$$C_3 = -0.0002559475238562224q_0 \quad (\text{AD.213})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.214})$$

$$C_5 = -1.4914267139239012q_0 \quad (\text{AD.215})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.216})$$

$$C_7 = 0.000003569642405571282 q_0 \quad (\text{AD.217})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.218})$$

$$C_{9,1} = -0.00000132693393446892 q_0 \quad (\text{AD.219})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AD.220})$$

$$C_{10,1} = 5.971202705133171 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.221})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AD.222})$$

3) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Assimétrico

3.1) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = 0 \quad (\text{AD.223})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.224})$$

$$C_3 = -0.00582807154688247q_0 \quad (\text{AD.225})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.226})$$

$$C_5 = 0.12951270104183268 q_0 \quad (\text{AD.227})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.228})$$

$$C_7 = 0 \quad (\text{AD.229})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.230})$$

$$C_{9,1} = 0.000013886029948390036 q_0 \quad (\text{AD.231})$$

$$C_{9,2} = -0.08420419405614402 q_0 \quad (\text{AD.232})$$

$$C_{10,1} = -6.248713476775516 \times 10^{-7} q_0 \quad (\text{AD.233})$$

$$C_{10,2} = 0.00378918873252648 q_0 \quad (\text{AD.234})$$

3.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.000002067571682571011 q_0 \quad (\text{AD.235})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.236})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.237})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.238})$$

$$C_5 = -1.9831201214093868 q_0 \quad (\text{AD.239})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.240})$$

$$C_7 = 0.00027699885280100796 q_0 \quad (\text{AD.241})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.242})$$

$$C_{9,1} = 0.000002156216577881611 q_0 \quad (\text{AD.243})$$

$$C_{9,2} = -0.013075189944557806 q_0 \quad (\text{AD.244})$$

$$C_{10,1} = -9.70297460046725 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.245})$$

$$C_{10,2} = 0.0005883835475051012 q_0 \quad (\text{AD.246})$$

3.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -9.748487036157908 \times 10^{-7} q_0 \quad (\text{AD.247})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.248})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AD.249})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.250})$$

$$C_5 = -1.717967557275025 q_0 \quad (\text{AD.251})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.252})$$

$$C_7 = 0.000032642349396161014 q_0 \quad (\text{AD.253})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.254})$$

$$C_{9,1} = 0.000001524966428043473 q_0 \quad (\text{AD.255})$$

$$C_{9,2} = -0.009247320473406099 q_0 \quad (\text{AD.256})$$

$$C_{10,1} = -6.86234892619563 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.257})$$

$$C_{10,2} = 0.0004161294213032743 q_0 \quad (\text{AD.258})$$

3.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.6380232154509529 - 1.023676462017043i)q_0 \quad (\text{AD.259})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.260})$$

$$C_3 = (0.2720942500779818 + 0.1135589964881085i)q_0 \quad (\text{AD.261})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.262})$$

$$C_5 = (-0.6380232154509529 - 1.0236764620170433i) q_0 \quad (\text{AD.263})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.264})$$

$$C_7 = (0.27209425007798166 - 0.1135589964881086i) q_0 \quad (\text{AD.265})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.266})$$

$$C_{9,1} = (0.00001246752987620913 + 1.376428539288238 \times 10^{-21}i) q_0 \quad (\text{AD.267})$$

$$C_{9,2} = (-0.07560248026246007 - 9.540979117872439 \times 10^{-18}i) q_0 \quad (\text{AD.268})$$

$$C_{10,1} = (-5.610388444294107 \times 10^{-7} - 1.323488980084844 \times 10^{-23}i) q_0 \quad (\text{AD.269})$$

$$C_{10,2} = (0.003402111611810703 + 1.626303258728256 \times 10^{-19}i) q_0 \quad (\text{AD.270})$$

3.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.00015352480806496384q_0 \quad (\text{AD.271})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.272})$$

$$C_3 = -0.00009810893172463388q_0 \quad (\text{AD.273})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.274})$$

$$C_5 = -1.9521766553362667 q_0 \quad (\text{AD.275})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.276})$$

$$C_7 = 0.0002757760126493866 q_0 \quad (\text{AD.277})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.278})$$

$$C_{9,1} = 0.000002119859098644498 q_0 \quad (\text{AD.279})$$

$$C_{9,2} = -0.012854720001136253q_0 \quad (\text{AD.280})$$

$$C_{10,1} = -9.539365943899966 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.281})$$

$$C_{10,2} = 0.0005784624000511065 q_0 \quad (\text{AD.282})$$

3.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.00003812735387479347 q_0 \quad (\text{AD.283})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.284})$$

$$C_3 = -0.000026458493165471852 q_0 \quad (\text{AD.285})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.286})$$

$$C_5 = -1.6984862292970568 q_0 \quad (\text{AD.287})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.288})$$

$$C_7 = 0.000032470992017147504 q_0 \quad (\text{AD.289})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.290})$$

$$C_{9,1} = 0.000001506820233687586 q_0 \quad (\text{AD.291})$$

$$C_{9,2} = -0.00913728285454734 q_0 \quad (\text{AD.292})$$

$$C_{10,1} = -6.780691051591265 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.293})$$

$$C_{10,2} = 0.0004111777284544516 q_0 \quad (\text{AD.294})$$

3.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = -(0.8537022228825629 - 0.9472281134987262i)q_0 \quad (\text{AD.295})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.296})$$

$$C_3 = (-0.010104087814956983 + 0.10362997843112112i)q_0 \quad (\text{AD.297})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.298})$$

$$C_5 = (-0.8537022228825607 - 0.9472281134987246i) q_0 \quad (\text{AD.299})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.300})$$

$$C_7 = (-0.010104087814957675 - 0.10362997843112082i) q_0 \quad (\text{AD.301})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.302})$$

$$C_{9,1} = (0.000006498581649058392 + 2.421984833555265 \times 10^{-21}i) q_0 \quad (\text{AD.303})$$

$$C_{9,2} = (-0.039407075478074496 - 3.794707603699265 \times 10^{-18}i) q_0 \quad (\text{AD.304})$$

$$C_{10,1} = (-2.924361742076275 \times 10^{-7} + 5.087160767201121 \times 10^{-23}i) q_0 \quad (\text{AD.305})$$

$$C_{10,2} = (0.0017733183965133524 - 4.065758146820641 \times 10^{-19}i) q_0 \quad (\text{AD.306})$$

3.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.006068435737901949q_0 \quad (\text{AD.307})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.308})$$

$$C_3 = -0.001447862976159102q_0 \quad (\text{AD.309})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.310})$$

$$C_5 = -1.7165567548683325 q_0 \quad (\text{AD.311})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.312})$$

$$C_7 = 0.00026937443020692354 q_0 \quad (\text{AD.313})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.314})$$

$$C_{9,1} = 0.000001840615052422511 q_0 \quad (\text{AD.315})$$

$$C_{9,2} = -0.011161398011734243 q_0 \quad (\text{AD.316})$$

$$C_{10,1} = -8.282767735901519 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.317})$$

$$C_{10,2} = 0.0005022629105280611 q_0 \quad (\text{AD.318})$$

3.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.0014570055033899607q_0 \quad (\text{AD.319})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AD.320})$$

$$C_3 = -0.00045613649138071736q_0 \quad (\text{AD.321})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AD.322})$$

$$C_5 = -1.542372118163222 q_0 \quad (\text{AD.323})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AD.324})$$

$$C_7 = 0.00003118699227316228 q_0 \quad (\text{AD.325})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AD.326})$$

$$C_{9,1} = 0.000001361083259245299 q_0 \quad (\text{AD.327})$$

$$C_{9,2} = -0.008253541099508096 q_0 \quad (\text{AD.328})$$

$$C_{10,1} = -6.124874666607885 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AD.329})$$

$$C_{10,2} = 0.0003714093494781828 q_0 \quad (\text{AD.330})$$

APÊNDICE E – EQUAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS COMPÓSITAS LAMINADAS ANISOTRÓPICAS DO EXEMPLO NUMÉRICO 6.4.2

Este apêndice apresenta as constantes das deflexões $w(x)$ e $v(x)$, do deslocamento axial $u(x)$ e da rotação $\varphi(x)$ para vigas compósitas laminadas biengastadas sob carregamento uniformemente distribuído do exemplo numérico 6.4.2.

Foram vistos no Apêndice D as equações dos deslocamentos e que elas satisfazem o sistema de equações (4.26) - (4.29) que descrevem o problema.

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 11.0*, obteve-se que as soluções também satisfazem às condições de contorno, dadas na Equação (4.81) para ambas extremidades, para uma viga compósita laminada anisotrópica biengastada. As constantes para cada combinação de parâmetros da base elástica analisada estão apresentadas abaixo.

1) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Simétrico

1.1) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = 0 \quad (\text{AE.1})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.2})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AE.3})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.4})$$

$$C_5 = 0.5684122962436914 q_0 \quad (\text{AE.5})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.6})$$

$$C_7 = -37.89415308291276 q_0 \quad (\text{AE.7})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.8})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.9})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.10})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.11})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.12})$$

1.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.00003649015605278615 q_0 \quad (\text{AE.13})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.14})$$

$$C_3 = 0.004436990630314315 q_0 \quad (\text{AE.15})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.16})$$

$$C_5 = -37.90341080733506 q_0 \quad (\text{AE.17})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.18})$$

$$C_7 = 0.009257724422299843 q_0 \quad (\text{AE.19})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.20})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.21})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.22})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.23})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.24})$$

1.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -0.000021005111319836453 q_0 \quad (\text{AE.25})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.26})$$

$$C_3 = 0.0029579937535428764 q_0 \quad (\text{AE.27})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.28})$$

$$C_5 = -37.8955806513302 q_0 \quad (\text{AE.29})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.30})$$

$$C_7 = 0.001427568417439655 q_0 \quad (\text{AE.31})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.32})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.33})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.34})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.35})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.36})$$

1.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-18.34452372013529 - 4.845200449045035i) q_0 \quad (\text{AE.37})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.38})$$

$$C_3 = (-0.24818918564531156 + 4.845200449045025i) q_0 \quad (\text{AE.39})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.40})$$

$$C_5 = (-18.344523720135278 + 4.845200449045022i) q_0 \quad (\text{AE.41})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.42})$$

$$C_7 = (-0.2481891856453129 - 4.845200449045029i) q_0 \quad (\text{AE.43})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.44})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.45})$$

$$C_{9,2} = (4.440892098500626 \times 10^{-16} - 1.110223024625156 \times 10^{-15}i)q_0 \quad (\text{AE.46})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.47})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.48})$$

1.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.30384711939005316 q_0 \quad (\text{AE.49})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.50})$$

$$C_3 = -0.19415587631195358 q_0 \quad (\text{AE.51})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.52})$$

$$C_5 = -37.73079211752385 q_0 \quad (\text{AE.53})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.54})$$

$$C_7 = 0.009327439070291044 q_0 \quad (\text{AE.55})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.56})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.57})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.58})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.59})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.60})$$

1.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.15877442915344622 q_0 \quad (\text{AE.61})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.62})$$

$$C_3 = -0.11017841594011751 q_0 \quad (\text{AE.63})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.64})$$

$$C_5 = -37.72420647408032 q_0 \quad (\text{AE.65})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.66})$$

$$C_7 = 0.0014304586601822317 q_0 \quad (\text{AE.67})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.68})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.69})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.70})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.71})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.72})$$

1.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-15.038394361261087 - 0.8190586976395293i)q_0 \quad (\text{AE.73})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.74})$$

$$C_3 = (-1.0508821306693719 + 0.8190586976395009i)q_0 \quad (\text{AE.75})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.76})$$

$$C_5 = (-15.038394361261076 + 0.8190586976394817i)q_0 \quad (\text{AE.77})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.78})$$

$$C_7 = (-1.0508821306693945 - 0.8190586976395009i)q_0 \quad (\text{AE.79})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.80})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.81})$$

$$C_{9,2} = (1.665334536937734 \times 10^{-16} + 1.665334536937734 \times 10^{-16}i)q_0 \quad (\text{AE.82})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.83})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.84})$$

1.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 1.4681401181940452 q_0 \quad (\text{AE.85})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.86})$$

$$C_3 = -0.3493185290536769 q_0 \quad (\text{AE.87})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.88})$$

$$C_5 = -36.437059617118905 q_0 \quad (\text{AE.89})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.90})$$

$$C_7 = 0.010083135902363233 q_0 \quad (\text{AE.91})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.92})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.93})$$

$$C_{9,2} = -3.979169216350442 \times 10^{-10} q_0 \quad (\text{AE.94})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.95})$$

$$C_{10,2} = 8.135939838505024 \times 10^{-13} q_0 \quad (\text{AE.96})$$

1.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.697094286042768 q_0 \quad (\text{AE.97})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.98})$$

$$C_3 = -0.21802932062921673 q_0 \quad (\text{AE.99})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.100})$$

$$C_5 = -36.320424960644004 q_0 \quad (\text{AE.101})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.102})$$

$$C_7 = 0.001462349181132857 q_0 \quad (\text{AE.103})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.104})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.105})$$

$$C_{9,2} = 2.965077466887678 \times 10^{-8} q_0 \quad (\text{AE.106})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.107})$$

$$C_{10,2} = -4.690922997263591 \times 10^{-12} q_0 \quad (\text{AE.108})$$

2) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Cross-ply

2.1) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = 0 \quad (\text{AE.109})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.110})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AE.111})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.112})$$

$$C_5 = 0.2571728289022886 q_0 \quad (\text{AE.113})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.114})$$

$$C_7 = -17.144855260152575 q_0 \quad (\text{AE.115})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.116})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.117})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.118})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.119})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.120})$$

2.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.000008492282168970343 q_0 \quad (\text{AE.121})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.122})$$

$$C_3 = 0.001233628785275522 q_0 \quad (\text{AE.123})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.124})$$

$$C_5 = -17.14527818294716 q_0 \quad (\text{AE.125})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.126})$$

$$C_7 = 0.00042292279458041167 q_0 \quad (\text{AE.127})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.128})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.129})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.130})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.131})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.132})$$

2.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -0.000004819386673612379 q_0 \quad (\text{AE.133})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.134})$$

$$C_3 = 0.0008224191901836814 q_0 \quad (\text{AE.135})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.136})$$

$$C_5 = -17.14489422322499 q_0 \quad (\text{AE.137})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.138})$$

$$C_7 = 0.000038963072414401955 q_0 \quad (\text{AE.139})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.140})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.141})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.142})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.143})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.144})$$

2.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-7.998645324386985 - 1.7247485696624443i) q_0 \quad (\text{AE.145})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.146})$$

$$C_3 = (-0.3171795658234804 + 1.7247485696624463i) q_0 \quad (\text{AE.147})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.148})$$

$$C_5 = (-7.998645324386985 + 1.72474856966246i) q_0 \quad (\text{AE.149})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.150})$$

$$C_7 = (-0.31717956582348095 - 1.7247485696624458i) q_0 \quad (\text{AE.151})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.152})$$

$$C_{9,1} = (3.008335218537517 \times 10^{-20} - 1.295820109417387 \times 10^{-20}i)q_0 \quad (\text{AE.153})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.154})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.155})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.156})$$

2.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.08410884150429922 q_0 \quad (\text{AE.157})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.158})$$

$$C_3 = -0.05375838157655563 q_0 \quad (\text{AE.159})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.160})$$

$$C_5 = -17.022884709448306 q_0 \quad (\text{AE.161})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.162})$$

$$C_7 = 0.00042388893365979106 q_0 \quad (\text{AE.163})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.164})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.165})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.166})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.167})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.168})$$

2.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.04404764773477042 q_0 \quad (\text{AE.169})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.170})$$

$$C_3 = -0.030568779713998465 q_0 \quad (\text{AE.171})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.172})$$

$$C_5 = -17.0433366181161 q_0 \quad (\text{AE.173})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.174})$$

$$C_7 = 0.00003893169278042146 q_0 \quad (\text{AE.175})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.176})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.177})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.178})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.179})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.180})$$

2.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-6.337181405792054 - 0.1514480732715442i) q_0 \quad (\text{AE.181})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.182})$$

$$C_3 = (-0.3806771256919772 + 0.1514480732715464i) q_0 \quad (\text{AE.183})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.184})$$

$$C_5 = (-6.337181405792056 + 0.15144807327154375i) q_0 \quad (\text{AE.185})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.186})$$

$$C_7 = (-0.3806771256919762 - 0.15144807327154505i) q_0 \quad (\text{AE.187})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.188})$$

$$C_{9,1} = (-5.00859465593278 \times 10^{-24} + 3.225410535505323 \times 10^{-24}i) q_0 \quad (\text{AE.189})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.190})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.191})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.192})$$

2.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.3894501786280605 q_0 \quad (\text{AE.193})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.194})$$

$$C_3 = -0.09346172369165384 q_0 \quad (\text{AE.195})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.196})$$

$$C_5 = -16.063163530839837 q_0 \quad (\text{AE.197})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.198})$$

$$C_7 = 0.00043633955568817933 q_0 \quad (\text{AE.199})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.200})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.201})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.202})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.203})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.204})$$

2.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.1895097067419973 q_0 \quad (\text{AE.205})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.206})$$

$$C_3 = -0.0594488747052352 q_0 \quad (\text{AE.207})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.208})$$

$$C_5 = -16.210382990571496 q_0 \quad (\text{AE.209})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.210})$$

$$C_7 = 0.000038798601374084364 q_0 \quad (\text{AE.211})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.212})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.213})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.214})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.215})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.216})$$

3) Viga Compósita Laminada De Empilhamento Assimétrico

3.1) $k_w = 0$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = 0 \quad (\text{AE.217})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.218})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{AE.219})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.220})$$

$$C_5 = 0.4579466979916337 q_0 \quad (\text{AE.221})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.222})$$

$$C_7 = -30.529779866108907 q_0 \quad (\text{AE.223})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.224})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.225})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.226})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.227})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.228})$$

3.2) $k_w = 0$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = -0.00002466335469338445 q_0 \quad (\text{AE.229})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.230})$$

$$C_3 = 0.003138756349357436 q_0 \quad (\text{AE.231})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.232})$$

$$C_5 = -30.534044809665446 q_0 \quad (\text{AE.233})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.234})$$

$$C_7 = 0.004264943556541065 q_0 \quad (\text{AE.235})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.236})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.237})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.238})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.239})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.240})$$

3.3) $k_w = 0$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = -0.000014137133770595731 q_0 \quad (\text{AE.241})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.242})$$

$$C_3 = 0.0020925042329049573 q_0 \quad (\text{AE.243})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.244})$$

$$C_5 = -30.530359960111724 q_0 \quad (\text{AE.245})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.246})$$

$$C_7 = 0.0005800940028164869 q_0 \quad (\text{AE.247})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.248})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.249})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.250})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.251})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.252})$$

3.4) $k_w = 10$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-14.631319912581846 - 3.674387911797223i) q_0 \quad (\text{AE.253})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.254})$$

$$C_3 = (-0.309622279486519 + 3.6743879117970413i) q_0 \quad (\text{AE.255})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.256})$$

$$C_5 = (-14.631319912581851 + 3.6743879117967992i) q_0 \quad (\text{AE.257})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.258})$$

$$C_7 = (-0.3096222794865655 - 3.6743879117970684i) q_0 \quad (\text{AE.259})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.260})$$

$$C_{9,1} = (-1.151964808265848 \times 10^{-19} + 8.131516293641283 \times 10^{-20}i)q_0 \quad (\text{AE.261})$$

$$C_{9,2} = (6.661338147750939 \times 10^{-16} - 4.996003610813204 \times 10^{-16}i)q_0 \quad (\text{AE.262})$$

$$C_{10,1} = (1.01643953670516 \times 10^{-20} - 5.929230630780102 \times 10^{-21}i)q_0 \quad (\text{AE.263})$$

$$C_{10,2} = (-5.204170427930421 \times 10^{-17} + 2.775557561562891 \times 10^{-17}i)q_0 \quad (\text{AE.264})$$

3.5) $k_w = 10$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 0.2146578832 q_0 \quad (\text{AE.265})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.266})$$

$$C_3 = -0.13717558706847705 q_0 \quad (\text{AE.267})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.268})$$

$$C_5 = -30.371872217457593 q_0 \quad (\text{AE.269})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.270})$$

$$C_7 = 0.004290510244652844 q_0 \quad (\text{AE.271})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.272})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.273})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.274})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.275})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.276})$$

3.6) $k_w = 10$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.112244 q_0 \quad (\text{AE.277})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.278})$$

$$C_3 = -0.07789 q_0 \quad (\text{AE.279})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.280})$$

$$C_5 = -30.38 q_0 \quad (\text{AE.281})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.282})$$

$$C_7 = 0.0005809 q_0 \quad (\text{AE.283})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.284})$$

$$C_{9,1} = -4.181 \times 10^{-10} q_0 \quad (\text{AE.285})$$

$$C_{9,2} = 0.0000025355 q_0 \quad (\text{AE.286})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.287})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.288})$$

3.7) $k_w = 100$ e $k_p = 0$:

$$C_1 = (-11.9101191462834 - 0.5422832422461394i)q_0 \quad (\text{AE.289})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.290})$$

$$C_3 = (-0.8084828696385506 + 0.5422832422460816i) q_0 \quad (\text{AE.291})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.292})$$

$$C_5 = (-11.910119146283417 + 0.5422832422460289i) q_0 \quad (\text{AE.293})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.294})$$

$$C_7 = (-0.8084828696385512 - 0.5422832422460818i) q_0 \quad (\text{AE.295})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.296})$$

$$C_{9,1} = (0. - 4.235164736271502 \times 10^{-21}i) q_0 \quad (\text{AE.297})$$

$$C_{9,2} = (0. + 4.163336342344337 \times 10^{-17}i) q_0 \quad (\text{AE.298})$$

$$C_{10,1} = (2.541098841762901 \times 10^{-21} + 1.27054942088145 \times 10^{-21}i)q_0 \quad (\text{AE.299})$$

$$C_{10,2} = (-6.938893903907228 \times 10^{-18} - 5.204170427930421 \times 10^{-18}i)q_0 \quad (\text{AE.300})$$

3.8) $k_w = 100$ e $k_p = 50$:

$$C_1 = 1.023625054145q_0 \quad (\text{AE.301})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.302})$$

$$C_3 = -0.24422584029525465 q_0 \quad (\text{AE.303})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.304})$$

$$C_5 = -29.12793141051089 q_0 \quad (\text{AE.305})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.306})$$

$$C_7 = 0.00457096446393697 q_0 \quad (\text{AE.307})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.308})$$

$$C_{9,1} = 0 \quad (\text{AE.309})$$

$$C_{9,2} = 0 \quad (\text{AE.310})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.311})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.312})$$

3.9) $k_w = 100$ e $k_p = 75$:

$$C_1 = 0.489776181 q_0 \quad (\text{AE.313})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{AE.314})$$

$$C_3 = -0.153331465461046 q_0 \quad (\text{AE.315})$$

$$C_4 = 0 \quad (\text{AE.316})$$

$$C_5 = -29.144480732192513 q_0 \quad (\text{AE.317})$$

$$C_6 = 0 \quad (\text{AE.318})$$

$$C_7 = 0.0005893056697886791 q_0 \quad (\text{AE.319})$$

$$C_8 = 0 \quad (\text{AE.320})$$

$$C_{9,1} = 6.754260875047344 \times 10^{-14} q_0 \quad (\text{AE.321})$$

$$C_{9,2} = -4.097009327410308 \times 10^{-10} q_0 \quad (\text{AE.322})$$

$$C_{10,1} = 0 \quad (\text{AE.323})$$

$$C_{10,2} = 0 \quad (\text{AE.324})$$

ANEXO A – PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL (REDDY, 2002)

De acordo com Reddy (2002), deslocamentos virtuais são gerados quando um corpo sofre variações em sua configuração de equilíbrio. Estes deslocamentos são chamados de virtuais, porque são pensados para ocorrer com as cargas reais atuando em seus valores fixos, independentemente dos deslocamentos reais. Nos problemas em que as condições geométricas são especificadas, tem-se que os deslocamentos virtuais são sempre iguais a zero nos pontos de fronteira do problema, independentemente dos valores especificados.

Tem-se que o trabalho realizado pelas forças reais através de um deslocamento virtual da configuração atual é chamado de trabalho virtual realizado pelas forças reais. Sendo δu o deslocamento virtual, o trabalho virtual realizado por uma força constante F é dado por:

$$\delta W = F \cdot \delta u \quad (\text{A.1})$$

Ainda de acordo com Reddy (2002), o trabalho virtual realizado por forças reais em movimento através de deslocamentos virtuais em um corpo deformável consiste no trabalho virtual realizado por forças internas, δW_{int} , e no trabalho virtual realizado por forças externas, δW_{ext} . Eles podem ser calculados como discutido a seguir.

Ao considerar um corpo deformável de volume V e área de superfície fechada S , submetido a uma força por unidade de volume $\rho f(x)$ e a uma força de superfície por área unitária $t(s)$ em S_2 da fronteira, tal que $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = 0$; tem-se que o deslocamento virtual $\delta u(x)$ é qualquer função que satisfaz $\delta u = 0$ em S_1 . A partir destas informações, é possível escrever o trabalho virtual realizado pelas forças reais ρf e t , movendo-se através do deslocamento virtual δu , como segue:

$$\delta W_E = - \left(\int_V \rho f \cdot \delta u \, dV + \int_{S_2} t \cdot \delta u \, dS \right) \quad (\text{A.2})$$

Como o trabalho é realizado no corpo, o sinal adotado na equação acima é o negativo.

Sabe-se que o corpo desenvolve forças internas na forma de tensões quando solicitado pelas cargas externas. O trabalho gerado por essas tensões é dissipado pelo atrito, em que o deslocamento virtual δu progride lentamente de zero até seu valor final. Para o caso linear, a deformação virtual se associa ao deslocamento virtual.

Por isso, o trabalho virtual interno armazenado no corpo por unidade de volume é a densidade de energia de deformação virtual, independentemente do comportamento constitutivo. A energia de deformação virtual, δU_0 , pode ser obtida pela equação abaixo, onde σ_{ij} representa o tensor de tensões e $\delta \varepsilon_{ij}$ o de deformações lineares.

$$\delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Logo, o trabalho virtual interno total armazenado no corpo, δW_I , é igual a

$$\delta W_I = \int_V \delta U_0 dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{A.4})$$

A partir destes conceitos, Reddy (2002) explica que o princípio do trabalho virtual afirma que um corpo contínuo está em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual resultante no corpo for igual a zero em um deslocamento virtual. Portanto, o princípio do trabalho virtual pode ser representado pela equação abaixo:

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_E = 0 \quad (\text{A.5})$$

ANEXO B – RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA MATERIAIS ISOTRÓPICOS, ORTOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS (JONES, 1999)

De acordo com Jones (1999), uma lâmina é um arranjo, que pode ser plano ou curvo, de fibras unidirecionais ou tecidas em uma matriz de suporte. O conhecimento do comportamento mecânico de uma lâmina é essencial para o entendimento de estruturas laminadas reforçadas com fibras.

Para os compósitos, a lei de Hooke generalizada que relaciona tensões com deformações pode ser escrita em notação contraída como segue.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.1})$$

Onde σ_i são os componentes de tensão mostrados em um cubo tridimensional em x, y e z, C_{ij} é a matriz de rigidez e ε_j são os componentes de deformação. As deformações são, portanto, definidas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \\ \gamma_{31} &= \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

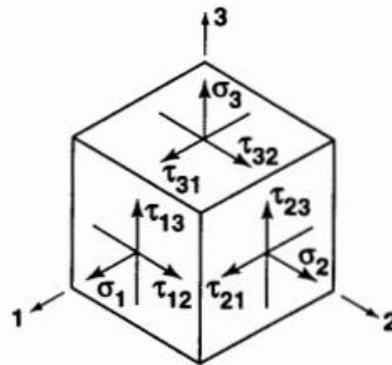
Sendo U_x , U_y e U_z são as componentes do vetor deslocamento nas direções x, y e z (ou direções 1, 2 e 3 respectivamente).

As direções 1 (paralela ao eixo da lâmina), 2 (perpendicular ao eixo da lâmina) e 3 (ortogonal ao plano 1-2) são nomeadas de direções principais. A notação utilizada para tensões e deformações de compósitos pode ser conferida na Tabela B.1 e compreendida através da Figura B.1.

Tabela B.1 – Notação vetorial e contraída das tensões e deformações.

Tensões		Deformações	
Notação Tensorial	Notação Contraída	Notação Tensorial	Notação Contraída
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
σ_{32}	σ_4	γ_{32}	ε_4
σ_{31}	σ_5	γ_{31}	ε_5
σ_{12}	σ_6	γ_{12}	ε_6

Fonte: Jones (1999) (Adaptado).

Figura B.1 – Tensões em um elemento.

Fonte: Jones (1999).

Jones (1999) afirma que $C_{ij} = C_{ji}$. Desta forma, é possível reduzir as 36 constantes independentes para 21. Logo, é possível concluir que a relação tensão-deformação mais geral no âmbito da elasticidade linear se dá por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

A expressão acima faz referência a materiais anisotrópicos, visto que não há planos de simetria para as propriedades do material. Contudo, materiais com mais simetria de propriedades do que os supracitados tem suas relações tensão-deformação simplificadas.

Define-se como materiais ortotrópicos aqueles que possuem dois planos ortogonais de simetria de propriedade. Esta simetria também existirá em relação a um terceiro plano ortogonal. As relações tensão-deformação em coordenadas alinhadas com as direções principais do material são

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

É notório que nos materiais ortotrópicos não há interação entre as tensões normais e as deformações de cisalhamento como ocorre em materiais anisotrópicos. Da mesma forma, não há interação entre tensões de cisalhamento e deformações normais, bem como nenhuma entre tensões de cisalhamento e deformações de cisalhamento em diferentes planos.

A relação deformação-tensão para um material anisotrópico também pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Onde S é o módulo inverso da elasticidade, chamado de módulo de conformidade ou de flexibilidade.

Para um material anisotrópico, ocorre um acoplamento significativo entre a tensão aplicada e as várias respostas de deformação. Esses vários acoplamentos são mostrados para um corpo arbitrariamente tensionado na Figura B.2.

Figura B.2 – Significado físico das relações anisotrópicas deformação-tensão

$$\begin{array}{c}
 \text{Extensão} \\
 \left[\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right] \\
 \text{Cisalhamento}
 \end{array}$$

Acoplamento extensão-extensão
Acoplamento extensão-cisalhamento
Acoplamento cisalhamento-cisalhamento

Fonte: Jones (1999) (Adaptado).

Os termos S_{11} , S_{22} e S_{33} representam a resposta extensional a uma tensão σ_1 , σ_2 e σ_3 , respectivamente, na mesma direção. Os termos S_{44} , S_{55} e S_{66} representam a resposta de tensão de cisalhamento a uma tensão de cisalhamento aplicada no mesmo plano. Os termos S_{12} , S_{13} e S_{23} representam o acoplamento entre tensões normais diferentes e deformações normais (acoplamento extensão-extensão). Os termos S_{14} , S_{15} , S_{16} , S_{24} , S_{25} , S_{26} , S_{34} , S_{35} e S_{36} representam a resposta de deformação normal à tensão de cisalhamento aplicada (acoplamento extensão – cisalhamento). Por sua vez, os termos S_{45} , S_{46} e S_{56} representam a resposta à tensão de cisalhamento aplicada em outro plano (acoplamento cisalhamento-cisalhamento).

Para um material ortotrópico, os componentes da matriz de flexibilidade em termos das constantes de engenharia são:

$$[S_{ij}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \quad (\text{B.6})$$

Onde E_1 , E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade nas direções 1, 2 e 3 respectivamente; ν_{ij} são os coeficientes de Poisson; G_{23} , G_{31} e G_{12} são os módulos de cisalhamentos nos planos 2-3, 3-1 e 1-2 respectivamente.

É importante conhecer que há uma relação recíproca entre os termos de E_1 , E_2 , ν_{12} e ν_{21} dada por:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (\text{B.7})$$

- **Relações tensões-deformações no estado plano de tensões principais para um material ortotrópico**

A lâmina não pode suportar altas tensões em nenhuma direção que não seja a das fibras. Por isso, é coerente tensionar a lâmina apenas no plano 1-2.

No estado plano de tensões, tem-se que a relação deformação-tensão para um material ortotrópico é dada por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Em termos das constantes de engenharia, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

As relações deformação-tensão podem ser invertidas para obter as relações tensão-deformação, onde Q_{ij} são as rigidezes reduzidas para um estado de tensão plano no plano 1-2, conforme apresenta a equação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Estas rigidezes podem ser determinadas pela intervesão da matriz de flexibilidade. Assim, obtém-se que:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

- **Relações tensões-deformações para uma lâmina de orientação arbitrária**

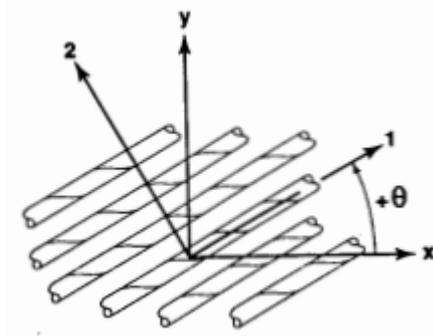
Foram vistas as tensões e deformações nas coordenadas principais do material para um material ortotrópico. Contudo, muitas vezes as direções principais da ortotropia não coincidem com a geometria do problema, a exemplo de vigas laminadas com diferentes lâminas em diferentes orientações. Assim, é necessário um método que relacione as tensões e deformações nas coordenadas principais do material com aquelas nas coordenadas do corpo.

Da regra da transformação da mecânica elementar dos materiais, as tensões no plano 1-2, em termos de tensões em um sistema de coordenadas x-y, são expressas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{B.12}$$

Onde θ é o ângulo do eixo x ao eixo 1, conforme apresenta a Figura B.3.

Figura B.3 – Rotação positiva dos eixos x-y do material para os eixos principais 1-2.



Fonte: Jones (1999).

Nomeia-se de $[T_1]$ esta matriz de transformação. Ou seja,

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Além disso, a fim de realizar manipulações matemáticas, nomeia-se de $[R]$ a seguinte matriz:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

É possível afirmar que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Desta forma, é possível obter as tensões nas coordenadas x-y a partir do seguinte procedimento matemático:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1} [Q] [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1} [Q] [R] [T_1] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1} [Q] [R] [T_1] [R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Visto que $[R][T_1][R]^{-1} = [T_1]^{-T} = [[T_1]^T]^T = [T_1]$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T_1]^{-1}[Q][T_1] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Nomeia-se de $[\bar{Q}]$ a matriz que contém as rigidezes transformadas, onde

$$[\bar{Q}] = [T_1]^{-1}[Q][T_1] \quad (\text{B.18})$$

Logo, as relações tensão-deformação nas coordenadas x-y são:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Por sua vez, a relação tensão-deformação para um material ortotrópico fora do estado plano de tensões principais em uma direção arbitrária é encontrada a partir da seguinte matriz de transformação $[T_2]$:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

De maneira bastante similar ao que já foi visto, sabendo que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = [T_2]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

E que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = [\tilde{Q}] \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

Obtém-se que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} &= [T_2]^{-1}[\tilde{Q}] \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} &= [T_2]^{-1}[\tilde{Q}][T_2] \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Assim, tem-se como rigidezes transformadas a matriz $[\overline{Q}]$, onde:

$$[\overline{Q}] = [T_2]^{-1}[\tilde{Q}][T_2] \quad (\text{B.22})$$

Logo, as relações tensão-deformação nas coordenadas x-y-z fora do estado plano de tensões são:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Neste trabalho, as tensões atuantes na viga são σ_{xx} , σ_{xy} e σ_{xz} . Contudo, apesar de $\sigma_y = 0$, o efeito de Poisson gera uma deformação ε_y que deve ser considerada. Assim, tem-se que os coeficientes de rigidez significativos a este trabalho são:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \quad (\text{B.24})$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \quad (\text{B.25})$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \quad (\text{B.26})$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \quad (\text{B.27})$$

$$\overline{Q}_{55} = Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \quad (\text{B.28})$$

Sendo:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (\text{B.29})$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (\text{B.30})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (\text{B.31})$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (\text{B.32})$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (\text{B.33})$$

$$Q_{55} = G_{31} \quad (\text{B.34})$$

ANEXO C – CÁLCULO VARIACIONAL (REDDY, 2002)

Há uma grande importância do operador variacional δ , cuja função é indicar uma mudança em uma determinada quantidade, nos métodos variacionais. Visto isso, este anexo apresenta propriedades relevantes sobre cálculos variacionais, a partir das ideias de Reddy (2002).

Seja $u = u(x)$ como a configuração de equilíbrio de um corpo, onde $u = \bar{u}$ numa fronteira S_1 da fronteira total S . Sendo $v(x)$ uma função que satisfaz a condição de contorno geométrica (ou seja, $v = 0$ no contorno), tem-se que uma configuração admissível é:

$$\bar{u} = u + \alpha v \quad (\text{C.1})$$

Desta maneira, αv é uma variação da configuração u . Contudo, ela deve ser pequena, de modo que o equilíbrio do sistema não seja prejudicado e que a variação seja compatível com as restrições geométricas do problema. É possível observar que para qualquer v , todas as configurações são reduzidas ao valor real \bar{u} quando α é zero. Portanto, para qualquer x fixo, αv pode ser visto como uma mudança na configuração real u . Esta variação é denotada por δu , chamada de primeira variação de u , sendo:

$$\delta u = \alpha v \quad (\text{C.2})$$

Funções de variáveis dependentes que são elas próprias funções de outros parâmetros são facilmente encontradas nos problemas variacionais e são chamadas de funcionais. Um funcional I é um operador de um espaço vetorial U para o campo de número real \mathbb{R} . Logo, se $u \in U$, então $I(u)$ é um número real. Importante ressaltar que $I(\cdot)$ é um operador e $I(u)$ é um funcional. Para exemplificar, a expressão abaixo apresenta um funcional para funções integráveis e quadradas integráveis $u(x)$ com suas primeiras e segundas derivadas:

$$I(u) = \int_0^L [au(x) + bu'(x) + cu''(x)] dx \quad (\text{C.3})$$

Do cálculo elementar, sabe-se que uma função diferenciável $f(x)$ tem um extremo, um mínimo ou um máximo, em um ponto x_0 no intervalo (a, b) somente se a primeira derivada for

igual a zero. De maneira similar, é possível determinar o mínimo do funcional apresentado abaixo sujeito às condições $u(a) = u_a$ e $u(b) = u_b$.

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (\text{C.4})$$

Existe um conjunto de funções candidatas a minimizar o funcional, chamado de conjunto de funções admissíveis ou concorrentes para o presente caso. As funções do conjunto admissível podem ser vistas como funções suaves passando pelos pontos (a, u_a) e (b, u_b) por serem diferenciáveis duas vezes.

Como visto, qualquer \bar{u} pertencente ao conjunto de funções concorrentes tem a forma $\bar{u} = u + \alpha v$ e deve satisfazer as condições finais especificadas $v(a) = v(b) = 0$. O conjunto de todas as funções v é o conjunto de variações admissíveis. Ao supor que, para cada função admissível \bar{u} , $F(x, u, u')$ existe e é continuamente diferenciável em relação a seus argumentos, $I(\bar{u})$ toma um e apenas um valor real, sendo, portanto, a função particular $u(x)$ a que torna a integral um mínimo.

O minimizador real é determinado definindo $\alpha = 0$. Uma vez que $u(x)$ e $v(x)$ são atribuídos, $I(\bar{u})$ é uma função de α sozinho, logo $\bar{I}(\alpha)$. Uma condição necessária para $I(\bar{u}) = \bar{I}(\alpha)$ atingir um mínimo é que:

$$\frac{d\bar{I}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} [I(u + \alpha v)] = 0 \quad (\text{C.5})$$

Logo, a condição necessária para que $I(\bar{u})$ atinja um mínimo é:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{I}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left[\frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, \bar{u}, \bar{u}') dx \right]_{\alpha=0} = 0 \\ \int_a^b \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \bar{u}'} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} dx &= 0 \\ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u'} v' \right) dx &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Integrando a Equação (C.6) por partes, a fim de transferir a diferenciação de v para u , obtém-se:

$$\int_a^b v \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u'} v \right) \Big|_a^b = 0 \quad (\text{C.7})$$

Visto que $v(a) = v(b) = 0$, o termo de fronteira desaparece. O fato de v ser arbitrário dentro do interno (a, b) , pelo lema fundamental do cálculo de variações, que a expressão entre colchetes é igual a zero. Portanto, em $a < x < b$, tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (\text{C.8})$$

Esta equação é chamada de Equação de Euler do funcional $I(u)$. De todas as funções admissíveis, a solução da equação de Euler (ou seja, a solução de) é o verdadeiro minimizador do funcional I .

De maneira similar, ao considerar o problema de encontrar (u, v) , definido em uma região bidimensional Ω , tal que o funcional a ser minimizado é:

$$I(u, v) = \int_{\Omega} F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) dx dy \quad (\text{C.9})$$

Sendo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Ao assumir que u e v são especificados na fronteira Γ de Ω , o desaparecimento da primeira variação de $I(u, v)$ é escrito como:

$$\delta I(u, v) = \delta_u I(u, v) + \delta_v I(u, v) = 0 \quad (\text{C.10})$$

Visto que δu e δv são variações parciais em relação a u e v respectivamente, tem-se:

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y \right\} dx dy \quad (\text{C.11})$$

Utiliza-se da integração por partes ou do teorema do gradiente no segundo, terceiro, quinto e sexto termos. Adotando o segundo termo para exemplificar:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u \right] dx dy$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u n_x dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u dx dy$$

Realizando os procedimentos para os demais termos e coletando os coeficientes de δu e δv separadamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] \delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial v_y} \right) \right] \delta v \right\} dx dy \\ + \oint_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y \right) \delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} n_y \right) \delta v \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Como (u, v) são especificados em Γ , $\delta u = \delta v = 0$ e conseqüentemente as expressões de contorno desaparecem. Então, como δu e δv são arbitrários e independentes um do outro em Ω , o lema fundamental produz as equações de Euler:

$$\begin{aligned} \delta u: \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) &= 0 \\ \delta v: \quad \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial v_y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Toda a discussão anterior pode ser aplicada ao caso geral de um funcional envolvendo p variáveis dependentes com derivadas parciais de ordem m em relação a n variáveis independentes. Neste caso haverá p equações de Euler envolvendo derivadas de ordem $2m$ em n variáveis independentes.

As condições de contorno podem ser classificadas em duas formas: essenciais e naturais. As condições de contorno essenciais requerem que as variações de v e possivelmente suas derivadas se anulem na fronteira, enquanto que as condições de contorno naturais requerem a especificação dos coeficientes das variações de v e suas derivadas.

No último problema apresentado, é possível identificar as condições de contorno naturais e essenciais com facilidade, visto que em cada um dos pares na fronteira Γ , o primeiro elemento (que não contém variações das variáveis dependentes) constitui a condição natural de fronteira e o desaparecimento do segundo elemento constitui a condição de contorno essencial.

ANEXO D – REDUÇÃO DE UM SISTEMA GERAL DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A UM SISTEMA NORMAL (PONTRIAGUIN, 1973)

Este anexo apresenta a definição de sistema normal e a metodologia para reduzir um sistema geral de equações diferenciais qualquer a um normal.

Os sistemas normais, também chamados de sistemas na forma canônica, são os sistemas de equações diferenciais ordinárias que possuem a forma:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{D.1})$$

Na equação acima, t é a variável independente e x^1, x^2, \dots, x^n são funções desconhecidas desta variável.

Chama-se solução da Equação (D.1) uma função contínua, dada pela Equação (D.2), com variável independente t , definida sobre certo intervalo $r_1 < t < r_2$ (desde que $r_1 \neq -\infty$ e $r_2 \neq +\infty$) e tal que a substituição no lugar de x na Equação (D.1) obtém-se uma identidade em t .

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{D.2})$$

A substituição da Equação (D.2) em (D.1) é possível se, e somente se, a função $\varphi^i(t)$ possui derivadas sucessivas até ordem n em todo seu intervalo de existência $r_1 < t < r_2$.

A partir disso, Pontriaguin (1973) desenvolve o Teorema de Existência e Unicidade para o Sistema Normal de Equações, apresentado abaixo. A demonstração pode ser encontrada na Seção 4-2, p. 177, do livro.

Teorema de Existência e Unicidade: Quaisquer que sejam os valores iniciais $t_0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$, existe sempre uma solução do sistema (D.1) que satisfaz as condições iniciais e que está definida sobre certo intervalo que contenha o ponto t_0 . Quando existem duas soluções que satisfaçam a condições iniciais idênticas $(t_0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, cada uma definida sobre seu próprio intervalo que contém t_0 , tais soluções coincidem sobre a parte comum destes dois intervalos. (PONTRIAGUIN p.21, 1973)

Todo sistema de equações diferenciais de ordem n , resolvido com relação a derivadas de ordem superior, pode ser reduzido a um sistema normal de ordem n . Seja a equação

diferencial de ordem n , apresentada abaixo na Equação (D.3), resolvida com relação à derivada de maior ordem. Neste caso t é a variável independente e y é a função incógnita da variável t .

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}) \quad (\text{D.3})$$

O termo à direita da igualdade é uma função dada, definida em certo intervalo Γ , de $n + 1$ variáveis $t, y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}$. Ao supor que esta função é contínua em Γ e que as suas derivadas parciais também são contínuas, é possível reduzir o sistema geral de equações a um sistema normal. Isto é possível ao introduzir novas funções incógnitas x^1, x^2, \dots, x^n da variável independente t , definidas pela seguinte igualdade:

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x^n = y^{n-1} \quad (\text{D.4})$$

Desta forma, é possível afirmar que a Equação (D.4) é equivalente ao sistema abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= x^3 \\ \dot{x}^{n-1} &= x^n \\ \dot{x}^n &= f(t, x^1, x^2, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Tem-se que para cada ponto $t_o, y_o, \dot{y}_o, \dots, y_o^{n-1}$ do intervalo Γ e devido ao Teorema de Existência e Unicidade que existe uma solução $y = \psi(x)$ da Equação (D.4) que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$\psi^{(k)}(t_o) = y_o^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (\text{D.6})$$

**ANEXO E – SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM (ZILL e CULLEN, 2008)**

Este anexo tem como objetivo apresentar a metodologia de obtenção da solução de um sistema não homogêneo de equações diferenciais, através do método de variação de parâmetros, a partir das ideias de Zill e Cullen (2008). Contudo, é preciso inicialmente revisar a metodologia de obtenção da solução para um sistema homogêneo e os teoremas que surgem com tal propósito.

Sejam X , $A(t)$ e $F(t)$ as seguintes matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

cujo sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem não homogêneo é dado por:

$$X' = AX + F. \quad (\text{E.4})$$

O Teorema 8.1.6 de Zill e Cullen (2008) apresenta que a solução geral de sistemas não homogêneos é dada pela combinação de uma solução particular mais uma solução do problema homogêneo, ou seja:

Seja X_p uma dada solução do sistema não homogêneo $X' = AX + F$ em um intervalo I e seja $X_c = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$ a solução geral no mesmo intervalo do sistema homogêneo associado $X' = AX$. Então a solução geral do sistema não homogêneo no intervalo é $X = X_c + X_p$. A solução geral X_c do sistema homogêneo associado $X' = AX$ é chamada de função complementar do sistema não homogêneo $X' = AX + F$. (ZILL e CULLEN, 2008)

Por isso, para encontrar a solução do sistema não homogêneo é necessário encontrar inicialmente a solução referente ao sistema homogêneo associado.

O Teorema 8.1.2 de Zill e Cullen (2008) define o princípio da superposição de soluções da seguinte forma:

Seja X_1, X_2, \dots, X_k um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo $X' = AX$ em um intervalo I . Então a combinação linear $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k$, onde $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo I . (ZILL e CULLEN, 2008)

Logo, é possível concluir que um múltiplo constante de qualquer vetor solução de um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem $X' = AX$ também é uma solução.

Sendo X_1, X_2, \dots, X_k um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo $X' = AX$ em um intervalo I , diz-se que o conjunto é linearmente dependente do intervalo caso a expressão abaixo seja verdadeira para todo t no intervalo, desde que as constantes $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ não sejam todas iguais a zero.

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0 \quad (\text{E.5})$$

Ou seja, para $k = 2$, os dois vetores de solução X_1 e X_2 são linearmente dependentes se um é um múltiplo constante do outro, e vice-versa. Para $k > 2$, um conjunto de vetores solução é linearmente dependente se pudermos expressar pelo menos um vetor solução como uma combinação linear dos demais vetores.

A independência linear do conjunto solução pode ser verificado por meio do conceito do determinante wronskiano. Para o Wronskiano diferente de zero em todos os pontos do intervalo, tem-se que as funções são linearmente independentes. Logo, o conjunto de vetores solução do sistema homogêneo $X' = AX$ é independente em I se, e somente se, para cada t no intervalo obedece a Equação (E.6):

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{E.6})$$

Tem-se que a forma da solução para o sistema linear homogêneo geral de primeira ordem $X' = AX$ é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = K e^{\lambda t} \quad (\text{E.7})$$

sendo $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ e λ constantes.

Ao substituir a solução em $X' = AX$, é possível desenvolver que:

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ K\lambda e^{\lambda t} &= AK e^{\lambda t} \\ K\lambda &= AK \\ AK - K\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Sabendo que $K = IK$, onde I é a matriz identidade, tem-se que:

$$(A - I\lambda)K = 0 \quad (\text{E.9})$$

A fim de evitar a solução em que $K = 0$, tem-se:

$$\det(A - I\lambda) = 0 \quad (\text{E.10})$$

Essa equação é chamada de equação característica da matriz A , cujas soluções são os autovalores de A . Uma solução em que $K \neq 0$ correspondente a um autovalor λ é chamada de autovetor de A .

Nos casos em que a matriz A possui n autovalores reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, diferentes entre si, então existem n autovetores independentes K_1, K_2, \dots, K_n . A partir disso, é gerada uma série fundamental de solução de $X' = AX$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ da forma:

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}; X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}; \dots; X_n = K_n e^{\lambda_n t} \quad (\text{E.11})$$

No Teorema 8.2.1, Zill e Cullen (2008) definem a solução geral para sistemas homogêneos da seguinte maneira:

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ serem n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes A do sistema homogêneo $X' = AX$ e sejam K_1, K_2, \dots, K_n os autovetores correspondentes. Então a solução geral de $X' = AX$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por $X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$ (ZILL e CULLEN, 2008)

Contudo, existe a possibilidade de que nem todos os n autovalores de uma matriz A $n \times n$ sejam diferentes entre si. Diz-se que um autovalor tem multiplicidade m quando este se repete m vezes.

Para o caso em que uma matriz A $n \times n$ tem m autovetores linearmente independentes K_1, K_2, \dots, K_m correspondentes a um autovalor λ_1 de multiplicidade $m \leq n$, a solução geral do sistema contém a combinação linear $c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m K_m e^{\lambda_1 t}$.

Porém, caso haja apenas um autovetor correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m , então tem-se m soluções linearmente independentes da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= K_{11} e^{\lambda_1 t} \\
 X_2 &= K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t} \\
 X_3 &= K_{31} \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + K_{32} t e^{\lambda_1 t} + K_{33} e^{\lambda_1 t} \\
 &\vdots \\
 X_m &= K_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + K_{mm} e^{\lambda_1 t}
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Sendo K_{ij} vetores colunas. Para determinar os K_{ij} , aplica-se os termos X_i no sistema homogêneo $X' = AX$ de maneira que:

$$\begin{aligned}
 X_1: & (A - \lambda_1 I) K_{11} = 0 \\
 X_2: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{21} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{22} = K_{21} \end{cases} \\
 X_3: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{31} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{32} = K_{31} \\ (A - \lambda_1 I) K_{33} = K_{32} \end{cases} \\
 & \vdots \\
 X_m: & \begin{cases} (A - \lambda_1 I) K_{m1} = 0 \\ (A - \lambda_1 I) K_{m2} = K_{m1} \\ \vdots \\ (A - \lambda_1 I) K_{mm} = K_{m(m-1)} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Uma vez obtida a solução para o sistema homogêneo, necessita-se construir a solução particular da não homogênea. Com esta finalidade, existem dois métodos: método de coeficientes indeterminados e método da variação de parâmetros. Dos dois métodos, a variação de parâmetros é a técnica mais utilizada e, por isso, foi a detalhada e aplicada neste trabalho.

Seja a combinação linear X a solução geral do sistema homogêneo $X' = AX$ em um intervalo I :

$$X = c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \dots + c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

A solução geral pode ser escrita a partir da matriz fundamental do sistema no intervalo, $\phi(t)$, da seguinte forma:

$$X = \phi(t)C \quad (\text{E.15})$$

Onde C é a matriz $n \times 1$ de constantes e $\phi(t)$ é a matriz $n \times n$, cujas colunas consistem nas entradas dos vetores solução do sistema, definida por:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

Das propriedades de matriz fundamental, destacam-se que a matriz $\phi(t)$ não é singular, ou seja, possui determinante diferente de zero e que se $\phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $X' = AX$, então tem-se que:

$$\phi'(t) = A\phi(t) \quad (\text{E.17})$$

A independência linear das colunas de $\phi(t)$ no intervalo I garante que $\det(\phi) \neq 0$ para todo t no intervalo. Como $\phi(t)$ não é singular, a inversa $\phi^{-1}(t)$ existe para todo t no intervalo.

Ao substituir a matriz de constantes C por uma matriz coluna de funções $U(t)$, tem-se que a solução particular do sistema não homogêneo $X' = AX + F(t)$ é dada por:

$$X_p = \phi(t)U(t) \quad (\text{E.18})$$

Onde a matriz $U(t)$ é definida por:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.19})$$

Ao aplicar a regra do produto, obtém-se que a derivada de X_p :

$$X'_p = \phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) \quad (\text{E.20})$$

Visto que X_p é a solução particular de $X' = AX + F$, é possível afirmar que:

$$X'_p = \phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t), \quad (\text{E.21})$$

e usando o fato que $\phi'(t) = A\phi(t)$, é possível escrever:

$$\phi(t)U'(t) + A\phi(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t)$$

$$\phi(t)U'(t) = F(t)$$

$$U'(t) = \phi^{-1}(t)F(t)$$

$$U(t) = \int \phi^{-1}(t)F(t) dt \quad (\text{E.22})$$

Portanto, tem-se que a solução particular X_p é equivalente a:

$$X_p = \phi(t)U(t)$$

$$X_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t) dt \quad (\text{E.23})$$

Logo, a solução geral do sistema $X' = AX + F$ é dada por:

$$X = X_c + X_p$$

$$X = \phi(t)C + \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t) dt \quad (\text{E.24})$$