UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Rodrigo Souza de Melo

Análise Estática de Vigas Compósitas Laminadas de Alta Ordem Funcionalmente Graduadas e Porosas: Uma Abordagem via MEF Espectral

São Cristóvão - SE
2022

Rodrigo Souza de Melo

Análise Estática de Vigas Compósitas Laminadas de Alta Ordem Funcionalmente Graduadas e Porosas: Uma Abordagem via MEF Espectral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador(a): Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha

São Cristóvão - SE

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ATA DE DEFESA

Rodrigo Souza de Melo

Análise Estática de Vigas Compósitas Laminadas de Alta Ordem Funcionalmente Graduadas e Porosas: Uma Abordagem via MEF Espectral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito para o título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **1 de setembro de 2022**

Banca Examinadora		**Nota**
Orientador(a): Prof. D.Sc.. Fabio Carlos da Rocha (UFS)	–	10,0
Examinador(a): Prof. Dr. Dorival Piedade Neto (USP)	–	9,5
Examinador(a): Prof. Dr. Jesús Daniel Villalba Morales (PUJ/Colômbia)	–	9,5
	Média Final:	**9,7**

Documento assinado digitalmente
FABIO CARLOS DA ROCHA
Data: 02/09/2022 22:07:32-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. D.Sc. Fabio Carlos da Rocha (UFS)
Assinatura do(a) Orientadora(a)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre atender aos meus pedidos por proteção, paz e sabedoria.

À minha família que, sempre esteve ao meu lado, me dando todo o amor e suporte que tanto precisei. Em especial à minha mãe, para quem não tenho nem palavras para expressar toda a minha gratidão. Por tudo. Por ser tudo. Obrigado.

Aos meus amigos, tanto os que estão comigo desde o início como os que chegaram há pouco tempo - amigos da escola, colegas de curso e tantos outros com quem compartilhei e compartilho momentos. Sou grato pelos momentos de descontração, e também pelos momentos de apoio mútuo. Sou feliz por vê-los conquistando seus sonhos e por fazê-los feliz ao conquistar os meus. Não vivo sem vocês, e espero que mesmo com qualquer distância que nos assole, continuemos juntos.

Ao meu orientador, por me acompanhar desde praticamente o início da minha graduação, me dar recursos para evoluir em pesquisa acadêmica e me direcionar tão bem para seguir adiante rumo ao meu sonho. Agradeço por ter confiado tanto em meu potencial.

E por fim, agradeço à Universidade Federal de Sergipe, com toda a sua estrutura, recursos e pessoas, por ser palco de tantas experiências boas, fomentando aprendizado e crescimento pessoal. Viva a universidade pública! Viva o ensino público gratuito e de qualidade!

RESUMO

Alguns dos mais recentes desenvolvimentos da Engenharia dos Materiais, fortemente associada à Engenharia Civil, são novos tipos de materiais compósitos, como os laminados e os funcionalmente graduados (FGMs, da sigla em inglês). Nesses materiais, as propriedades variam continuamente ao longo da espessura e evitam efeitos indesejáveis de descontinuidade nos campos de tensão que podem provocar descolamentos entre lâminas. Devido à crescente importância dos FGMs, torna-se essencial uma melhor compreensão e modelagem mecânica do comportamento das estruturas constituídas por esses materiais. No presente trabalho, é desenvolvida a formulação numérica via método dos elementos finitos (MEF), com aproximação espectral, para análise estática de vigas laminadas de alta ordem com consideração de porosidade e FGM. A implementação computacional é realizada na linguagem Fortran, e diversos exemplos da literatura são testados para a sua validação.

Palavras-chave: Materiais compósitos. Materiais compósitos laminados. Materiais funcionalmente graduados. Modelos de porosidade. Teorias de vigas de alta ordem. Teorias de camada única equivalente para vigas. Método dos elementos finitos aplicado a vigas.

ABSTRACT

Some of the most recent developments in Materials Engineering, a field strongly associated with Civil Engineering, are new types of composite materials, such as laminate and functionally graded materials (FGMs). In these materials, the properties vary continuously through the thickness, avoiding undesired discontinuity effects in the stress fields which may cause delamination between layers. Due to the growing importance of FGMs, it's essential to strive for better comprehension and mechanical modelling of the behavior of structures composed of these materials. In the present work, the numeric formulation via finite element method (FEM) with spectral approximations for the static analysis of high order laminated beams with porosity and FGM considerations is developed. The computational implementation is done in the programming language Fortran, and various examples from literature are tested for its validation.

Keywords: Composite materials. Laminate composite materials. Functionally graded materials. Porosity models. High order beam theories. Equivalent single layer theories for beams. Finite element method for beams.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - COMPORTAMENTO DA PROPRIEDADE CONSTITUTIVA COM FUNÇÃO POSITIVA E NEGATIVA 17
FIGURA 2 - POLINÔMIOS DE LOBATTO DE GRAUS 1 A 5 24
FIGURA 2 - DIAGRAMA LÓGICO DO ALGORITMO 27
FIGURA 4 - ESQUEMA DE VIGA SANDUÍCHE FUNCIONALMENTE GRADUADA 30
FIGURA 5 - COMPORTAMENTO DA PROPRIEDADE MATERIAL NA CONFIGURAÇÃO 1-2-1 31
FIGURA 6 - MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE POROSIDADE 33
FIGURA 7 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORME COM $L/h = 20$ ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL 35
FIGURA 8 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORME COM $e0 = 0,5$ E ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL 35
FIGURA 9 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO PONTUAL COM $L/h = 20$ E ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL 36
FIGURA 10 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO PONTUAL COM $e0 = 0,5$ E ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL 36
FIGURA 11 - TENSÃO NORMAL NO MEIO DO VÃO E-E SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $L/h = 20$ E ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL 37
FIGURA 12 - TENSÃO NORMAL NO MEIO DO VÃO S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $e0 = 0,75$ E $L/h = 20$ 38
FIGURA 13 - TENSÃO CISALHANTE NA EXTREMIDADE DO VÃO S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $e0 = 0,75$ E $L/h = 20$ 38
FIGURA 14 - ANÁLISE PARAMÉTRICA DO DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DE VIGA S-S COM $L/h = 100$ 39
FIGURA 15 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DE VIGA S-S COM $p = 10$ E $e0 = 0,15$ COM ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL 40

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - FUNÇÕES DE FORMA DE CISALHAMENTO PROPOSTAS.....15
TABELA 2 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DE MEIO DE CAMADA EM VIGA S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME 32
TABELA 3 - TENSÃO NORMAL EM $x = L/2, z = h/2$ EM VIGA S-S COM CONFIGURAÇÃO 1-2-1 SOB CARREGAMENTO UNIFORME 32
TABELA 4 - TENSÃO NORMAL EM $x = L/2, z = h/2$ EM VIGA S-S COM CONFIGURAÇÃO 2-1-1 SOB CARREGAMENTO UNIFORME 33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ESL	*Equivalent Single Layer*
FGM	*Functionally Graded Material*
MEF	Método dos Elementos Finitos
TEV	Teoria Elementar de Vigas
TDPO	Teoria de Deformação de Primeira Ordem
WMAPE	*Weighted Mean Absolute Percentage Error*

LISTA DE SÍMBOLOS

e_0	-	Índice de porosidade
E	-	Módulo de Young
g	-	Grau da interpolação de Gauss-Legendre
$H_n(x)$	-	Função interpoladora de Hermite de grau n
H_i	-	i-ésima função interpoladora de Hermite de ordem de derivação 0
K_i	-	i-ésima função interpoladora de Hermite de ordem de derivação 1
$L_n(x)$	-	Função interpoladora de Lagrange de grau n
L_i	-	i-ésima função interpoladora de Lagrange
$Lo_n(x)$	-	Polinômio de Lobatto de grau n
m	-	Número de camadas da viga
M	-	Resultante de momento fletor
$\widehat{M}$	-	Resultante de momento fletor de alta ordem
n	-	Número de nós do elemento ou grau de aproximação do elemento
N	-	Resultante de esforço normal
p	-	Índice da lei da gradação
$P_n(x)$	-	Polinômio de Legendre de grau n
$q(x)$	-	Carregamento transversal
Q_{11}	-	Propriedade constitutiva axial
Q_{55}	-	Propriedade constitutiva transversal
u	-	Deslocamento axial
u_0	-	Deslocamento axial no meio da altura da seção
w	-	Deslocamento transversal
γ_{xz}	-	Deformação cisalhante
ε_x	-	Deformação axial
ν	-	Coeficiente de Poisson
σ_x	-	Tensão normal
τ_{xz}	-	Tensão de cisalhamento
ϕ	-	Rotação devido ao cisalhamento
Ψ_G	-	Lei de gradação de materiais funcionalmente graduados
Ψ_P	-	Lei de distribuição de poros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10
1.1 OBJETIVOS 11
1.1.1 GERAIS 11
1.1.2 ESPECÍFICOS 11
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 12
3 METODOLOGIA 14
3.1 CINEMÁTICA E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS 14
3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO 18
3.3 FORMULAÇÃO INTEGRAL 22
3.4 ELEMENTOS FINITOS 23
3.5 IMPLEMENTAÇÃO EM FORTRAN 26
3.5.1 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS-LEGENDRE 27
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO 29
4.1 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA 29
4.2 MODELO DE FGM PARA VIGAS SANDUÍCHE 30
4.3 MODELO DE POROSIDADE TRIGONOMÉTRICO 33
4.4 MODELO DE FGM E POROSIDADE CONSTANTE 39
5 CONCLUSÕES 42
6 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS 43
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 44
APÊNDICE - MANUAL DE USO DO PROGRAMA 46

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia Civil é uma ciência milenar, e uma das, senão a primeira ciência a estar fortemente associada ao estudo da Resistência dos Materiais. Desde a construção das primeiras habitações até as grandes obras da antiguidade, como as pirâmides do Egito e Muralhas da China, faz-se necessário o estudo do comportamento dos materiais quando sujeitos aos carregamentos característicos de uma construção. Com o tempo, materiais mais resistentes e eficientes foram desenvolvidos, e embora o ramo de construção civil esteja, em geral, confortável com a tríade concreto-aço-madeira, áreas como a aviação exigem materiais cada vez mais leves e resistentes.

É dentro desse contexto que surgem, dentre vários outros avanços, os materiais compósitos laminados. Um compósito é a combinação de dois ou mais materiais, que juntos alcançam propriedades físicas superiores aos seus componentes. O exemplo mais famoso de material compósito é o próprio concreto, cujas características por muito superam as da areia, brita e cimento que o compõem. Um laminado parte de um princípio similar: trata-se de fibras imersas em uma matriz que podem estar dispostas como lâminas, de modo que as propriedades do material final são mais significativas em determinada direção a depender de como as fibras estão orientadas.

Ainda acerca dos desenvolvimentos no campo de materiais compósitos, surgem os materiais funcionalmente graduados (FGMs, da sigla em inglês), que são compósitos cujo teor de cada constituinte é feito variar continuamente em sua fabricação. Como consequência, as propriedades do material final obedecem a funções contínuas através do volume da estrutura. Um exemplo são vigas de FGMs cujas propriedades materiais são graduadas através da seção transversal. No processo de fabricação desses materiais, devido à grande diferença entre as temperaturas de fusão dos materiais constituintes, é comum o surgimento de poros, que podem se apresentar de maneira uniforme na estrutura ou obedecer a uma determinada distribuição.

Descrever o comportamento estático destes novos tipos de materiais requer teorias mais refinadas. A teoria elementar de vigas (TEV) é aplicável para boa parte dos problemas convencionais da Engenharia Civil, mas a literatura mostra que essa teoria não descreve apropriadamente vigas muito espessas (com baixa relação comprimento/largura) e não captura os efeitos do cisalhamento. Isso se dá devido à consideração de que seções transversais planas permanecem planas no estado de deformação. Estas duas limitações representam um problema para compósitos laminados em muitas de suas aplicações.

Visto isso, foram desenvolvidas diversas teorias que buscam sanar essas deficiências. A teoria de deformação de primeira ordem (TDPO), desenvolvida na década de 1920, foi uma das primeiras a introduzir um termo de primeira ordem para descrever a não planicidade da seção transversal carregada, tornando possível a caracterização da tensão de cisalhamento, embora com a necessidade de fatores de correção. Desde então, foram propostas diversas teorias de alta ordem que descrevem os campos de deformação e tensão de vigas, sejam delgadas ou espessas, de forma condizente com a realidade.

Neste trabalho, é apresentada uma teoria unificada de vigas, que permite a obtenção de resultados tanto através dos modelos clássicos como dos de alta ordem, onde são introduzidos termos que descrevem o comportamento funcionalmente graduado do material, além de modelos de porosidade.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 GERAIS

Desenvolver uma teoria unificada de vigas compósitas laminadas de alta ordem integrando modelos de gradação e porosidade e validá-lo numericamente através de um programa por meio do método dos elementos finitos.

1.1.2 ESPECÍFICOS

a) Realizar uma revisão bibliográfica acerca dos seguintes temas: modelos de vigas de materiais funcionalmente graduados; modelos de vigas com porosidade; teorias de alta ordem para vigas; teorias de camada única equivalente para vigas compósitas laminadas; método dos elementos finitos aplicado em vigas.
b) Desenvolver relações constitutivas para vigas integrando modelos de gradação, porosidade e múltiplas camadas;
c) Desenvolver teoria de vigas a partir da cinemática unificada e das relações constitutivas integrando modelos de gradação, porosidade e múltiplas camadas;
d) Desenvolver formulação de elementos finitos, com aproximação espectral, a partir da teoria de vigas desenvolvida;
e) Aplicar a formulação de elementos finitos em um programa em Fortran;
f) Validar a aplicação da teoria no programa com exemplos comparativos da literatura.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Thai e Vo (2012), materiais funcionalmente graduados são uma classe de compósitos cujas propriedades materiais variam de uma superfície para outra, eliminando as concentrações de tensões encontradas nas interfaces entre camadas de compósitos laminados. Introduzidos por pesquisadores japoneses na década de 1980, esses materiais foram aplicados em diversas áreas da engenharia e indústria desde então, e o estudo de seu comportamento é alvo de uma grande gama de pesquisas (Vinh, 2021). Tipicamente, FGMs são feitos de uma mistura de um material cerâmico, que resiste a elevadas temperaturas, e um metal, que pode reduzir as tensões que ocorrem no estágio de resfriamento durante a concepção do material (Thai e Vo, 2012).

De acordo com Fouda et al. (2017), durante a fabricação de FGMs, a grande diferença entre os pontos de fusão dos materiais constituintes pode ocasionar microfissuras ou porosidades nos materiais durante a sintetização. Devido a isso, tem sido do interesse de pesquisadores estudar o comportamento de FGMs porosos. Um dos métodos amplamente utilizado para aplicar a porosidade ao modelo é derivado da regra das misturas (Fouda et al., 2017).

Thai e Vo (2012) afirmam que a aplicação da teoria elementar de vigas (TEV) para FGMs restringe-se às estruturas delgadas, além de superestimar as frequências naturais em corpos mais espessos devido à negligência dos efeitos de cisalhamento. Torna-se, portanto, de interesse para o estudo de FGMs trabalhar com teorias de alta ordem.

Segundo Dahake e Ghugal (2013), teorias refinadas para materiais isotrópicos que incluem efeitos como a rotação cisalhante foram inicialmente desenvolvidas por Bresse, Rayleigh e Timoshenko. A teoria de vigas de Timoshenko (1921), comumente denominada teoria de deformação de primeira ordem (TDPO), introduz à TEV uma nova rotação da seção devido ao cisalhamento. Embora uma melhoria em relação à TEV, uma teoria de primeira ordem ainda implica erroneamente em campo de tensão cisalhante constante através da seção transversal (Ghugal e Shimpi, 2002).

Este problema é mitigado pela elevação da ordem da cinemática. Kruszewski (1909) foi um dos pioneiros ao utilizar polinômios de alta ordem em sua teoria, buscando capturar os efeitos da inércia rotativa. Mais tarde, Levinson (1981) apresentou uma cinemática polinomial de terceiro grau para vigas retangulares, e Reddy (1990) mostrou uma teoria de mesmo grau para placas de espessura moderada. Dentre modelos não polinomiais, valem ser citados

Soldatos (1992) e Akavci (2007), que desenvolveram modelos hiperbólicos para placas ortotrópicas, Touratier (1991), que apresentou um modelo trigonométrico, e Karama et al. (2003), que trabalhou com funções exponenciais. Esses dois últimos trabalhos aplicaram seus modelos a vigas laminadas. Muitos desses autores fizeram parte da revisão de Sayyad (2011), que propôs um modelo unificado, onde qualquer um dos modelos supracitados pode ser aplicado na mesma formulação através de uma função $f(z)$ de distribuição da tensão de cisalhamento.

No contexto de compósitos laminados e estruturas de múltiplas camadas em geral, as teorias de camada única equivalente (ESL, da sigla em inglês) são amplamente utilizadas devido a seu baixo custo computacional, embora o desempenho de teorias mais refinadas com as do tipo LayerWise e ZigZag tenha por vezes se mostrado mais fiel aos resultados da elasticidade (Sayyad e Ghugal, 2017). Nas teorias ESL, uma única expansão das componentes de deslocamento é utilizada através de toda a espessura do laminado, transformando um problema 3D em um problema unidirecional (Reddy, 2004).

Para a formulação numérica via método dos elementos finitos (MEF), tomou-se como base o princípio variacional, descrito por Reddy (2002), e em sua aplicação em placas e cascas laminadas feita por Reddy (2006).

3 METODOLOGIA

Nesta seção será apresentada a formulação analítica unificada de vigas laminadas integrada a modelos de FGMs e de porosidade. Serão apresentadas as relações constitutivas no item 3.1 , e em 3.2 as equações diferenciais do problema serão obtidas utilizando o método variacional. Em 3.3 , será apresentada a formulação integral, base para o item 3.4 , onde será feita a formulação numérica através do método dos elementos finitos (MEF). Por fim, no item 3.5 , será descrita a lógica de um programa desenvolvido na linguagem Fortran 95 utilizando a solução numérica para resolver problemas de vigas com variados carregamentos, vinculações, modelos cinemáticos e modelos de gradação e porosidade.

3.1 CINEMÁTICA E EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Seja um sistema cartesiano de coordenadas xyz, onde x é a direção do comprimento da viga e yz o plano da seção transversal, sendo y e z respectivamente as direções da espessura e altura.

O modelo cinemático proposto nas equações (1) e (2) leva em conta um deslocamento axial u variável através do comprimento da estrutura e da altura da seção, e um deslocamento transversal w constante na seção.

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{dw(x)}{dx} + f(z)\phi(x) \tag{1}$$

$$w(x) = w_0(x) \tag{2}$$

Nestas equações, u_0 é o deslocamento que ocorre no meio da altura da seção, dw/dx é a rotação devido à flexão, que corresponde à derivada da linha elástica, e ϕ é uma rotação adicional devido ao efeito do cisalhamento.

$f(z)$ é a função de forma da deformação cisalhante através da seção e, como será visto adiante, sua derivada $f'(z)$ descreve o comportamento da tensão cisalhante. Se $f(z) = 0$, recupera-se a TEV, e com $f(z) = z$, obtém-se a TDPO. Na TABELA 1 são apresentados diversos modelos de alta ordem desenvolvidos por diferentes teóricos, que foram compilados por Sayyad (2011) neste modelo unificado.

TABELA 1 - FUNÇÕES DE FORMA DE CISALHAMENTO PROPOSTAS

Autor	$f(z)$	$f'(z)$
Kruszewski (1909)	$\frac{5z}{4}\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)$	$\frac{5}{4}\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right)$
Reddy (1990)	$z\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)$	$1-4\frac{z^2}{h^2}$
Touratier (1991)	$\frac{h}{\pi}\sin\pi\frac{z}{h}$	$\cos\pi\frac{z}{h}$
Soldatos (1992)	$z\cosh\frac{1}{2}-h\sinh\frac{z}{h}$	$\cosh\frac{1}{2}-\cosh\frac{z}{h}$
Karama et al. (2003)	$z\exp\left(-2\frac{z^2}{h^2}\right)$	$\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right)\exp\left(-2\frac{z^2}{h^2}\right)$
Akavci (2007)	$\frac{3\pi}{2}\left(h\tanh\frac{z}{h}-z\sec^2\mathrm{h}\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}\left(\sec^2\mathrm{h}\frac{z}{h}-\sec^2\mathrm{h}\frac{1}{2}\right)$

Fonte: Adaptado de Sayyad (2011).

Um aspecto a ser observado nestas funções é que diferentemente do que ocorre da TDPO, a tensão de cisalhamento é naturalmente nula das bordas superior e inferior da estrutura, dispensando a necessidade de fatores de correção.

A partir das equações (1) e (2), infere-se as seguintes relações entre deslocamentos e deformações:

$$\varepsilon_x(x,z)=\frac{du}{dx}=\frac{du_0}{dx}-z\frac{d^2w}{dx^2}+f(z)\frac{d\phi}{dx} \tag{3}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}=f'(z)\phi \tag{4}$$

As tensões atuantes na viga, por sua vez, são associadas às deformações pelas leis constitutivas de Hooke. Porém, para descrever o comportamento funcionalmente graduado do material através da altura da seção, é necessário introduzir uma variação ao módulo de Young na coordenada z.

O módulo de elasticidade do material na camada k obedecerá a lei descrita a seguir:

$$Q_{11}\left(z^{(k)}\right)=Q_{11_b}^{(k)}\left[1+\left(\frac{Q_{11_t}^{(k)}}{Q_{11_b}^{(k)}}-1\right)\Psi_G^{(k)}-\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{11_t}^{(k)}}{Q_{11_b}^{(k)}}+1\right)\Psi_P^{(k)}\right] \tag{5}$$

Na equação acima, $\Psi_G^{(k)}$ é a lei de gradação e $\Psi_P^{(k)}$ é a lei de distribuição de porosidade. A forma dessas funções será apresentada mais adiante.

O módulo de elasticidade ao cisalhamento pode ser obtido diretamente do módulo axial como mostrado abaixo:

$$Q_{55}\left(z^{(k)}\right) = \frac{Q_{11}}{2(1+\nu)} \tag{6}$$

$Q_{11_b}^{(k)}$ e $Q_{11_t}^{(k)}$ são respectivamente os valores finais do módulo de elasticidade na base e no topo da camada, respectivamente. Esses parâmetros são assim denominados para materiais compósitos laminados pois é comum estuda-los em uma condição de ortotropia, onde há parâmetros diferentes para as direções x e y (ou direções 1 e 2), ou seja, $Q_{11} \neq Q_{22}$. Desta forma, pode ser feita a consideração apresentada na equação (7) para laminados isotrópicos partindo de um valor do módulo de Young E.

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{7}$$

Sabe-se que ν é o módulo de Poisson do material, admitido sempre constante nesta formulação.

É importante ressaltar aqui que muitos dos artigos que trabalham com FGMs e modelos de porosidade não fazem nenhuma consideração além da pura isotropia, ou seja, consideram que $Q_{11} = E$. Assim, na seção 4 deste trabalho, onde serão apresentados os resultados comparativos, quando não mencionado que a equação (7) vale, deve-se admitir essa simplificação.

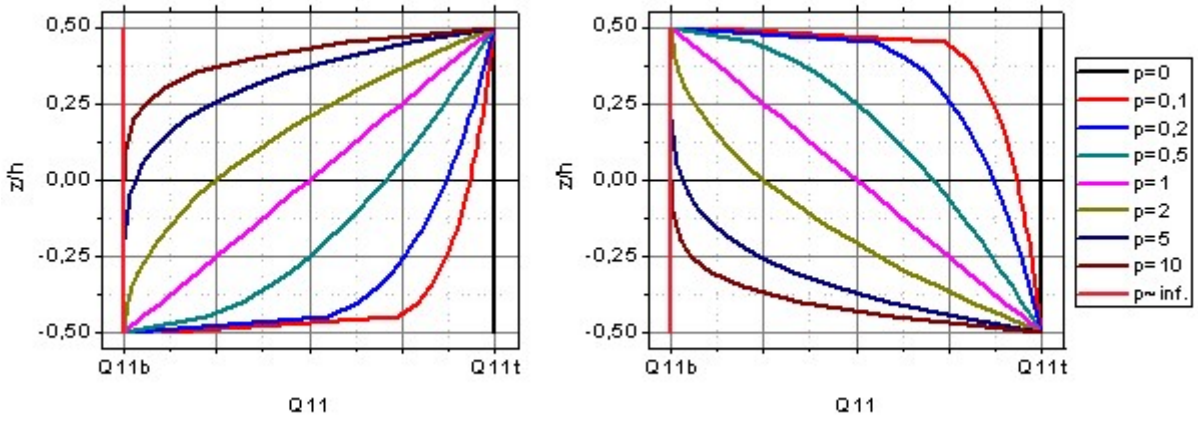
A lei de gradação utilizada é apresentada na equação (8), e aplica-se para uma camada k com um sistema local de coordenadas $z^{(k)}$ com origem no centro da camada.

$$\Psi_G^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{z^{(k)}}{h^{(k)}}\right)^p \tag{8}$$

Na equação acima, $p, p \geq 0$ é o índice da lei de gradação, cujo efeito prático é ilustrado na FIGURA 1. Como pode ser observado, índices inferiores a 1 representam a predominância da propriedade $Q_{11_t}^{(k)}$, e superiores a 1, da propriedade $Q_{11_b}^{(k)}$. O sinal do termo $z^{(k)}/h^{(k)}$ função pode ser positivo ou negativo. Se feito negativo, ocorre a inversão da concavidade da função, implicando que a propriedade chamada de "topo" se encontra, na verdade, na base da camada e vice-versa. Embora contraintuitivo, permitir a descrição de concavidades inversas é útil para descrever determinados tipos de seção transversal com múltiplas camadas e essencial para

determinadas configurações simétricas, como será visto em um dos exemplos de validação deste trabalho.

FIGURA 1 - COMPORTAMENTO DA PROPRIEDADE CONSTITUTIVA COM $+z^{(k)}/h^{(k)}$ E $-z^{(k)}/h^{(k)}$, RESPECTIVAMENTE



Fonte: Autoral.

Já a lei de distribuição de porosidade pode tomar diversas formas a depender do comportamento do material em estudo. Para efeito de comparação com a literatura, serão apresentados neste trabalho dois modelos de distribuição de porosidade, respectivamente nas equações (9) e (10): o modelo constante e um modelo trigonométrico representando maior concentração de poros no meio da seção.

$$\Psi_{P,1}^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = e_0 \tag{9}$$

$$\Psi_{P,2}^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = e_0 \cos\left(\frac{z^{(k)}}{h^{(k)}}\pi\right) \tag{10}$$

Nessas equações, e_0 representa o índice de porosidade do material, $0 \leq e_0 < 1$, $e_0 \in \mathbb{R}$. Como ficará claro mais adiante, adotar $e_0 = 0$ implica na ausência de poros, enquanto um valor mais próximo da unidade corresponde a uma grande prominência de poros.

Note que nesta formulação é trivial adaptar Ψ_P para outras distribuições de poros, com leis de cosseno ou quaisquer outros tipos de funções.

Por fim, pela lei de Hooke, as tensões normal e de cisalhamento atuando na k-ésima camada da viga são dadas pelas equações (11) e (12), respectivamente.

$$\sigma_x^{(k)}\left(x, z^{(k)}\right) = Q_{11}^{(k)}\varepsilon_x \tag{11}$$

$$\tau_{xz}^{(k)}\left(x, z^{(k)}\right) = Q_{55}^{(k)}\gamma_{xz} \tag{12}$$

Vale ser feita uma análise nas equações (4) e (12) em particular, ressaltando a importância da alta ordem do modelo cinemático. Se for adotada a TDPO, a tensão de cisalhamento será invariável através da altura das seções transversais, ao passo que se adotada a TEV, ela se anulará completamente. Sabe-se que nenhum desses dois comportamentos corresponde à realidade. É ainda por essas equações que se observa, como mencionado anteriormente, que $f(z)$ e $f'(z)$ ditam diretamente o comportamento do deslocamento devido ao cisalhamento e da tensão cisalhante, respectivamente.

3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

As equações diferencias governantes e condições de contorno do problema serão desenvolvidas utilizando o princípio variacional. Sabe-se que a soma das energias interna e externa de um corpo deve ser igual a zero. Pelo princípio, infere-se que uma pequena variação na energia interna através do volume Ω do corpo corresponde a uma pequena variação na energia interna através do comprimento L. Para aplicar este princípio, explicitam-se os variacionais de energia interna, calculados pelas tensões e deformações em cada uma das camadas k do laminado (totalizando m camadas), e externa, obtidos a partir de um carregamento transversal $q(x)$ nas equações (13) e (14) respectivamente.

$$\delta U = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega^{(k)}} \left(\sigma_x^{(k)}\delta\varepsilon_x + \tau_{xz}^{(k)}\delta\gamma_{xz}\right) dV \tag{13}$$

$$\delta V = -\int_L q(x)\delta w dx \tag{14}$$

Substitui-se na equação (13) as expressões das deformações ε_x e γ_{xz} em (3) e (4), e os operadores variacionais são distribuídos para as deformações. Além disso, admite-se que a largura da viga é constante e igual a b, e a integral reduz-se a comprimento L e às alturas $h^{(k)}$ de cada camada no plano xz. Estas operações resultam em

$$\delta U = b\sum_{k=1}^{m}\int_{L}\int_{h^{(k)}}\left[\sigma_x^{(k)}\delta\frac{du_0}{dx} - \sigma_x^{(k)}z^{(k)}\delta\frac{d^2w}{dx^2} + \sigma_x^{(k)}f\left(z^{(k)}\right)\delta\frac{d\phi}{dx} + \tau_{xz}^{(k)}f'\left(z^{(k)}\right)\delta\phi\right]dz^{(k)}\,dx \tag{15}$$

Em seguida, é feito um processo de redução de ordem da derivada nos termos de deformação. Deseja-se que as variáveis u_0 e ϕ não possuam exigência de derivação na formulação, ao passo que w exija apenas sua primeira derivada, que representa a rotação devido à flexão. Para este fim, utiliza-se de uma inversão da regra da cadeia para manipular os termos da equação (15) associados aos variacionais $\delta du_0/dx$ e $\delta d\phi/dx$ da seguinte forma:

$$\sigma_x^{(k)}\delta\frac{du_0}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sigma_x^{(k)}\delta u_0\right) - \frac{d\sigma_x^{(k)}}{dx}\delta u_0$$

$$\sigma_x^{(k)}f\left(z^{(k)}\right)\delta\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sigma_x^{(k)}f\left(z^{(k)}\right)\delta\phi\right] - \frac{d\sigma_x^{(k)}}{dx}f\left(z^{(k)}\right)\delta\phi$$

Para o termo associado a $d^2\delta w/dx^2$, o processo é feito duas vezes:

$$-\sigma_x^{(k)}z^{(k)}\delta\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\sigma_x^{(k)}z^{(k)}\delta\frac{dw}{dx}\right) + \frac{d\sigma_x^{(k)}}{dx}z^{(k)}\delta\frac{dw}{dx}$$

$$-\sigma_x^{(k)}z^{(k)}\delta\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\sigma_x^{(k)}z^{(k)}\delta\frac{dw}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{d\sigma_x^{(k)}}{dx}z^{(k)}\delta w\right) - \frac{d^2\sigma_x^{(k)}}{dx}z^{(k)}\delta w$$

Substituindo as expressões acima em (15) e unindo-a com (14), valendo da condição de que $\delta U + \delta V = 0$, isolando os somatórios e integrais na altura aos termos pertinentes e manipulando os termos de modo que os associados a cada um dos deslocamentos variacionais esteja unido, obtém-se:

$$\int_L\left\{-\frac{dN}{dx}\delta u_0 + \left[-\frac{d^2M}{dx^2} - q(x)\right]\delta w + \left(-\frac{d\widehat{M}}{dx} + \widehat{V}\right)\delta\phi\right\}dx + N\delta u_0\Big|_{x=x_a}^{x=x_b} - M\delta\frac{dw}{dx}\Big|_{x=x_a}^{x=x_b} + \frac{dM}{dx}\delta w\Big|_{x=x_a}^{x=x_b} + \widehat{M}\delta u_0\Big|_{x=x_a}^{x=x_b} = 0 \tag{16}$$

Sendo definidas as seguintes grandezas:

$$N = \sum_{k=1}^{m}\int_{h^{(k)}}\sigma_x^{(k)}dz^{(k)} \tag{17}$$

$$M = \sum_{k=1}^{m}\int_{h^{(k)}}\sigma_x^{(k)}z^{(k)}dz^{(k)} \tag{18}$$

$$\widehat{M} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} \sigma_x^{(k)} f\left(z^{(k)}\right) dz^{(k)} \tag{19}$$

$$\widehat{V} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} \tau_{xz}^{(k)} f'\left(z^{(k)}\right) dz^{(k)} \tag{20}$$

Note que as grandezas acima, chamadas resultantes de tensão, que representam forças (N e $\widehat{V}$) e momentos (M e $\widehat{M}$) por unidade de comprimento, não são discretizadas por camada. Essa abordagem é uma aplicação do método da camada única equivalente (ESL, da sigla em inglês) e reduz drasticamente a complexidade da solução analítica e o custo computacional da solução numérica. Nomeia-se respectivamente N, $\widehat{V}$, M e $\widehat{M}$ como resultante de esforço normal, resultante de esforço cortante de alta ordem, resultante de momento fletor e resultante de momento fletor de alta ordem.

Pelo princípio variacional, a equação (16) deve valer para quaisquer pequenas variações δu_0, δw, $\delta w'$ ou $\delta \phi$. Assim, para garantir a nulidade da equação, os termos adjacentes aos variacionais devem ser nulos. Tomando os termos dentro da integral no comprimento, são obtidas as equações diferenciais governantes do problema:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q(x) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d\widehat{M}}{dx} - \widehat{V} = 0 \tag{23}$$

E tomando os termos avaliados nos limites do domínio $L = [x_a, x_b]$ da viga, infere-se que as condições de contorno naturais e essenciais são:

$N(x_a, x_b)$ ou $u_0(x_a, x_b)$ prescritos;

$M(x_a, x_b)$ ou $w'(x_a, x_b)$ prescritos;

$M'(x_a, x_b)$ ou $w(x_a, x_b)$ prescritos;

$\widehat{M}(x_a, x_b)$ ou $\phi(x_a, x_b)$ prescritos.

Ainda, é possível escrever as equações (17) a (20) em termos dos deslocamentos e de propriedades materiais conhecidas, se as tensões dentro das integrais são substituídas pelas equações (11) e (12) e as deformações pelas equações (3) e (4):

$$N = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} \left[u_0 - z^{(k)} \frac{dw}{dx} + f\left(z^{(k)}\right)\phi \right] dz^{(k)} \tag{24}$$

$$M = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} \left[z^{(k)} u_0 - \left(z^{(k)}\right)^2 \frac{dw}{dx} + z^{(k)} f\left(z^{(k)}\right)\phi \right] dz^{(k)} \tag{25}$$

$$\widehat{M} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} \left\{ f\left(z^{(k)}\right) u_0 - z^{(k)} f\left(z^{(k)}\right) \frac{dw}{dx} + \left[f\left(z^{(k)}\right)\right]^2 \phi \right\} dz^{(k)} \tag{26}$$

$$\hat{V} = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{55}^{(k)} \left[f'\left(z^{(k)}\right)\right]^2 \phi dz^{(k)} \tag{27}$$

As equações (24) a (26) podem ainda ser escritas na forma matricial a seguir:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ \widehat{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & B_0 \\ A_1 & A_2 & B_1 \\ B_0 & B_1 & D_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w' \\ \phi \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Da equação anterior, definem-se:

$$A_0 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} dz^{(k)} \tag{29}$$

$$A_1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} z^{(k)} dz^{(k)} \tag{30}$$

$$A_2 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} \left(z^{(k)}\right)^2 dz^{(k)} \tag{31}$$

$$B_0 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} f\left(z^{(k)}\right) dz^{(k)} \tag{32}$$

$$B_1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} z^{(k)} f\left(z^{(k)}\right) dz^{(k)} \tag{33}$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{11}^{(k)} \left[f\left(z^{(k)}\right)\right]^2 dz^{(k)} \tag{34}$$

Do mesmo modo, a equação (28) pode ser reescrita como:

$$\hat{V} = Y_0 \phi \tag{35}$$

Definindo:

$$Y_0 = \sum_{k=1}^{m} \int_{h^{(k)}} Q_{55}^{(k)} \left[f'\left(z^{(k)}\right) \right]^2 dz^{(k)} \tag{36}$$

A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, D_0 e Y_0 são as propriedades constitutivas baseadas em propriedades materiais conhecidas das camadas do laminado, aplicando-as ao princípio da ESL.

3.3 FORMULAÇÃO INTEGRAL

No item anterior, a formulação teve o objetivo de demonstrar com clareza as equações diferenciais governantes, condições de contorno e resultantes de tensão do problema. Para viabilizar o uso do MEF, é necessário realizar uma formulação integral, substituindo nas equações de diferencial de energia (13) e (14) as tensões pelas relações constitutivas (11) e (12). Deste modo, obtém-se equações integrais em termos apenas dos deslocamentos e dos seus variacionais.

Equivale a esta formulação tomar as equações diferenciais (21) a (23) e multiplica-las, respectivamente, pelas funções peso μ, ω e ψ, associadas, respectivamente, aos seus variacionais de deslocamento originários δu_0, δw e $\delta \phi$, e integra-las novamente no comprimento L. As resultantes de tensão são colocadas em termos das propriedades materiais e dos deslocamentos utilizando-se das equações (28) e (35). Fazendo uma redução da ordem das derivadas, as equações integrais tomam a forma:

$$0 = A_0 \int_L \frac{d\mu}{dx}\frac{du_0}{dx} dx - B_1 \int_L \frac{d\mu}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2} + B_0 \int_L \frac{d\mu}{dx}\frac{d\phi}{dx} dx - \mu N|_{x_a}^{x_b} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} 0 = -A_1 \int_L \frac{d\omega}{dx}\frac{du_0}{dx} dx + A_2 \int_L \frac{d\omega}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2} - B_1 \int_L \frac{d\omega}{dx}\frac{d\phi}{dx} dx \\ - \int_L \omega q dx - \omega \frac{dM}{dx}\bigg|_{x_a}^{x_b} + \frac{d\omega}{dx} M\bigg|_{x_a}^{x_b} \end{aligned} \tag{38}$$

$$0 = B_0 \int_L \frac{d\psi}{dx}\frac{du_0}{dx} dx - B_1 \int_L \frac{d\psi}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2} + D_0 \int_L \frac{d\psi}{dx}\frac{d\phi}{dx} dx \tag{39}$$

$$+Y_0 \int_L \psi\phi dx - \psi\widehat{M}\Big|_{x_a}^{x_b}$$

3.4 ELEMENTOS FINITOS

A formulação em elementos finitos consiste em substituir as incógnitas do sistema de equações (37) a (39) por funções aproximadoras. Opta-se por funções polinomiais, especificamente as funções interpoladoras de Lagrange e Hermite.

As funções de Lagrange são polinômios de grau n construídos para interpolar $n+1$ pontos em um plano de coordenadas. São da forma $L(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \cdots + L_n(x)y_n$. Cada uma das funções $L_i(x)$ é construída tal que $L_i(x_i) = 1$ e $L_i(x) = 0 \; \forall \; x \in (x_0, x_1, \dots, x_n) \backslash \{x_i\}$.

Por sua vez, as funções de Hermite são polinômios de grau $2n-1$ que de modo similar aos de Lagrange são construídos para interpolar $n+1$ pontos, mas cuja primeira derivada é conhecida. Sua forma é $H(x) = H_0(x)y_0 + K_0(x)y_0' + H_1(x)y_1 + K_1(x)y_1' + \cdots + H_n(x)y_n + K_n'(x)y_n$. Cada uma das funções H_i é construída tal que $H_i(x_i) = 1$, $H_i(x) = 0 \; \forall \; x \in (x_0, x_1, \dots, x_n) \backslash \{x_i\}$ e $H_i'(x) = 0 \; \forall \; x \in (x_0, x_1, \dots, x_n)$. De maneira análoga, as funções K_i são tal que $K_i(x) = 0 \; \forall \; x \in (x_0, x_1, \dots, y_n)$, $K_i'(x_i) = 1$ e $K_i(x) = 0 \; \forall \; x \in (x_0, x_1, \dots, x_n) \backslash \{x_i\}$.

Em um elemento, o conjunto de pontos no domínio utilizados por uma interpolação para aproximar determinada variável é chamado de base. Nos elementos finitos unidimensionais do presente trabalho, um único elemento pode possuir n nós, $n \geq 2$, exigindo grau n da base interpoladora.

No decorrer da história da aplicação do MEF com funções aproximadoras polinomiais, percebeu-se a recorrência de erros quando se trabalhava com geometrias complexas ou carregamentos de intensidade rapidamente variável dependendo da ordem polinomial e da base aplicada. Diversos estudos demonstraram que bases construídas a partir de zeros de funções ortogonais eliminam parcial ou totalmente efeitos oscilatórios indesejados que podem surgir em uma base igualmente espaçada, por exemplo.

Uma base igualmente espaçada de grau n no domínio $\xi \in [-1, 1]$ pode ser construída com a seguinte fórmula (com $k = 1, \dots, n+1$):

$$\xi_k = -1 + \frac{2}{n}(k-1) \tag{40}$$

No presente trabalho, optou-se por trabalhar com a base espectral de Lobatto, considerada ótima para interpolações 1D, de modo a contornar esses possíveis problemas oscilatórios. Segundo Pozrikidis (2005), os polinômios de Lobatto podem ser obtidos pela seguinte fórmula de recorrência:

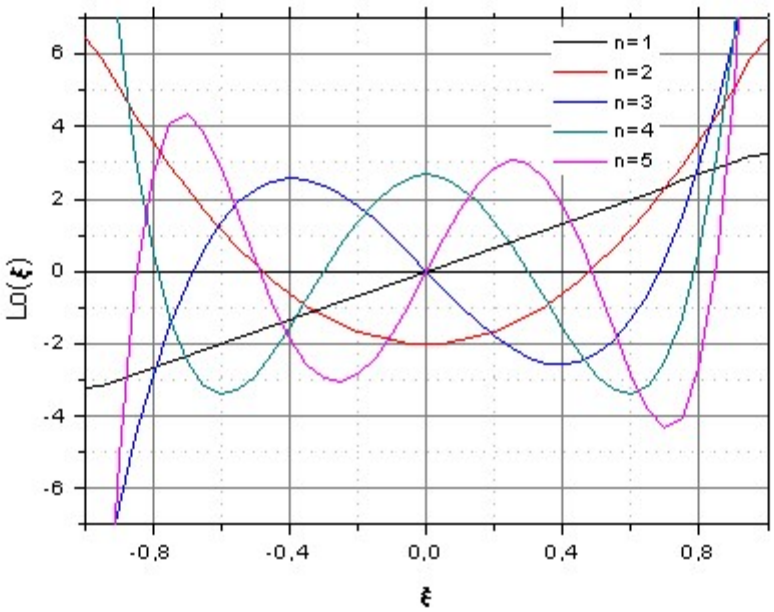
$$Lo_n(x) = \frac{1}{x^2 - 1}[(n+1)xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)], \qquad n \geq 0 \tag{41}$$

$P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$ são os polinômios de Legendre, sendo $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \qquad n \geq 1 \tag{42}$$

Ainda segundo Pozrikidis (2005), a interpolação nodal sempre irá variar na amplitude $[-1, 1]$ independente da ordem polinomial utilizada, propriedade que suprime os efeitos oscilatórios chamados efeitos de Runge. Na FIGURA 2, mostra-se o comportamento dos polinômios até o grau 5 e suas intersecções com o eixo $y = 0$, que constituem as bases.

FIGURA 2 - POLINÔMIOS DE LOBATTO DE GRAUS 1 A 5



Fonte: Autoral.

No que diz respeito às incógnitas do problema, u_0 e ϕ são variáveis cuja derivada não precisa ser descrita, portanto funções de continuidade C_0 como os polinômios de Lagrange são suficientes para aproxima-las. Por sua vez, w exige que se conheça também sua primeira derivada (que corresponde à rotação devido à flexão), portanto funções de continuidade C_1 como os polinômios de Hermite são necessárias.

Assim, seja um elemento finito com n nós, $n \geq 2$. As variáveis u_0, w e ϕ são aproximadas pelas seguintes funções polinomiais:

$$u_0 \approx \sum_{i=1}^{n} L_i(x) a_i \tag{43}$$

$$w \approx \sum_{i=1}^{n} H_i(x) t_i + K_i(x) r_i \tag{44}$$

$$\phi \approx \sum_{i=1}^{n} L_i(x) s_i \tag{45}$$

Denominam-se a_i, t_i, r_i e s_i, respectivamente, os valores nodais dos deslocamentos axial e transversal e rotações devido à flexão e ao cisalhamento.

Substituindo os deslocamentos e suas funções peso correspondente pelas aproximações definidas nas equações (43) a (45), as equações (37) a (39) são rearranjadas no seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle a \rangle \\ \langle d \rangle \\ \langle s \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle 0 \rangle \\ \langle q \rangle \\ \langle 0 \rangle \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \langle F_1 \rangle \\ \langle F_2 \rangle \\ \langle F_3 \rangle \end{Bmatrix} \tag{46}$$

Definem-se as matrizes e vetores:

$$K_{11_{ij}} = A_0 \int_L \frac{dL_i}{dx} \frac{dL_j}{dx} dx \tag{47}$$

$$K_{12_{ij}} = K_{21_{ji}} = -A_1 \int_L \frac{dL_i}{dx} \frac{d^2 H_j}{dx^2} dx \tag{48}$$

$$K_{13_{ij}} = K_{31_{ji}} = B_0 \int_L \frac{dL_i}{dx} \frac{dL_j}{dx} dx \tag{49}$$

$$K_{22_{ij}} = A_2 \int_L \frac{d^2 H_i}{dx^2} \frac{d^2 H_j}{dx^2} dx \tag{50}$$

$$K_{23_{ij}} = K_{32_{ji}} = -B_1 \int_L \frac{dL_i}{dx} \frac{d^2 H_j}{dx^2} dx \tag{51}$$

$$K_{33_{ij}} = D_0 \int_L \frac{dL_i}{dx} \frac{dL_j}{dx} dx + Y_0 \int_L L_i L_j dx \tag{52}$$

$$d_i = \begin{cases} t_{\frac{i+1}{2}}, & \text{mod } 2 = 0 \\ r_{\frac{i}{2}}, & \text{mod } 2 \neq 0 \end{cases} \tag{53}$$

$$q_i = \int_L L_i q(x) dx \tag{54}$$

$$F_{1_i} = L_i(x_b) N(x_b) - L_i(x_a) N(x_a) \tag{55}$$

$$F_{2_i} = H_i(x_b) M'(x_b) - H_i(x_a) M'(x_a) - H_i'(x_b) M(x_b) + H_i'(x_a) M(x_a) \tag{56}$$

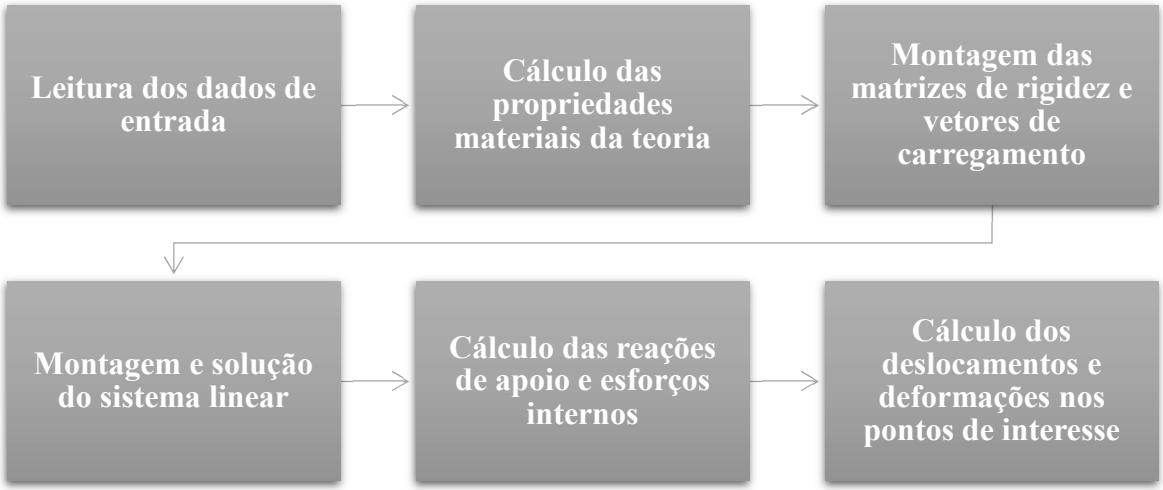
$$F_{3_i} = L_i(x_b) \widehat{M}(x_b) - L_i(x_a) \widehat{M}(x_a) \tag{57}$$

Resolvida a equação (46), ressaltando que todas as matrizes e vetores descritos nas equações (47) a (57) advém dos dados de entrada do problema, se tornam conhecidos os deslocamentos e consequentemente todas as funções de resposta da viga.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO EM FORTRAN

Para implementar a formulação em MEF apresentada no item anterior, cabe ao programa, de maneira resumida, extrair os dados de entrada, processa-los e estrutura-los na forma da equação (46), resolve-la e por fim apresentar os dados de saída, fazendo um pós-processamento para obter variáveis adicionais como resultantes de tensão e deformações. Na FIGURA 3, a ordem das operações do programa é apresentada de forma mais detalhada, e no apêndice deste trabalho se encontra um manual de utilização do programa.

FIGURA 3 - DIAGRAMA LÓGICO DO ALGORITMO



Fonte: Autoral.

Em sucessão, no item 3.5.1 , será descrito o método de integração numérica de Gauss-Legendre, pelo qual foram executadas as integrações necessárias ao pré-processamento dos dados.

3.5.1 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS-LEGENDRE

Em determinadas seções do programa, é necessário realizar integrações de forma numérica. O cálculo das propriedades A_0, A_1, etc. apresentado nas equações (29) a (34) e (36), por exemplo, é a integração do produto de diferentes funções que mudam a depender do modelo de porosidade adotado, e implementar ao programa todas as possíveis combinações de maneira analítica seria uma tarefa árdua e que elevaria em muito a complexidade da futura implementação de novos modelos. Do mesmo modo, as componentes da matriz K nas equações (47) a (52) não são trivialmente integráveis analiticamente, visto que a ordem dos polinômios aproximadores e consequentemente sua forma depende de quantidade de nós adotada.

A integração numérica de Gauss-Legendre consiste em aproximar uma integral definida em um domínio adimensional $\xi = [-1, 1]$ da seguinte forma:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{g} w_i f(\xi_i) \tag{58}$$

Na expressão acima, ξ_i são pontos dentro do domínio adimensional chamados pontos de Gauss, e w_i são os pesos de Gauss. g é a ordem da integração numérica, e também o número de pontos e seus pesos correspondentes. Uma rotina nativa ao Fortran retorna os pontos e pesos de Gauss para qualquer ordem de integração desejada, cabendo ao programa avaliar o integrando nestes pontos, multiplica-los aos pesos correspondentes e realizar o somatório.

É necessário ressaltar a necessidade tanto de trabalhar em um domínio adimensional para a função integrando como de converter os limites de integração para $[-1, 1]$. Devido à prominência das integrações numéricas, o programa trabalha majoritariamente com funções convertidas a esse domínio adimensional. Já a conversão dos limites de integração genérico $[\xi_a, \xi_b]$ para o limite mencionado pode se dar da seguinte forma:

$$\int_{\xi_a}^{\xi_b} f(\xi) d\xi = \frac{\xi_b - \xi_a}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \frac{\xi_b - \xi_a}{2} \sum_{i=1}^{g} w_i f(\xi_i) \tag{59}$$

No que diz respeito a integrandos polinomiais, seja o polinômio de ordem n, a integração numérica de Gauss-Legendre obtém valores exatos para $g \geq 2n - 1$. Para funções de outros tipos, como trigonométricas, é pertinente realizar uma análise de convergência para definir o número de pontos necessário para alcançar resultados satisfatórios.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados resultados comparativos com outros artigos para validar diferentes aspectos da teoria apresentada neste trabalho e sua implementação numérica. Será também avaliado o desempenho dos diversos modelos cinemáticos de alta ordem implementados, comparando-os entre si e com as teorias de baixa ordem (TEV e TPDO).

No item 4.1 , se dissertará sobre o estudo de convergência para definir o número de elementos, nós e pontos para integração de Gauss necessário para alcançar resultados satisfatórios nas análises. Nos itens 4.2 , 4.3 e 4.4 serão apresentados estudos comparativos com outros trabalhos acerca de modelos teóricos de vigas que tratam de, respectivamente: vigas sanduíche funcionalmente graduadas; vigas com modelos de porosidade trigonométricos; e vigas funcionalmente graduadas e com porosidade constante.

4.1 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA

Por se tratar de um método numérico, é importante antes de qualquer análise fazer um estudo de convergência dos resultados variando o grau da aproximação. É esperado que graus muito baixos de aproximação se traduzam em resultados inconsistentes, especialmente quando se lida com teorias cuja ordem é elevada.

Foi selecionado como exemplo base uma das configurações de viga porosa de Chen et al. (2015), trabalho analisado com afinco no item 4.4 . Foram feitas análises nos campos de resposta de deslocamento e deformação à medida que foram variados tanto o grau da aproximação quanto a quantidade de elementos. Admitiu-se convergência nos campos de análise quando ocorreu variação inferior a 0,05% entre duas análises consecutivas.

Inicialmente, fixou-se um único elemento e variou-se neste elemento o número de nós, correspondente ao grau da aproximação. Notou-se que, a partir de 3 nós, já não ocorreu nenhuma variação no campo de deslocamento, enquanto na deformação as variações foram da ordem de 10^{-5}%. Fixando a análise em 5 nós, percebeu-se o mesmo padrão de invariabilidade em ambos os campos ao aumentar o número de elementos.

Uma segunda análise foi feita fixando em 2 o grau da aproximação e variando o número de elementos. Avaliando o deslocamento, a variação nos resultados foi de 0,25% a partir de 2 elementos e de 0,03% a partir de 4 elementos.

Com base nesses estudos e adotando uma margem de segurança mínima de 3 vezes o ponto de convergência, optou-se por fixar para todas as análises subsequentes um único elemento de 10 ou 11 nós, optando-se por este último quando se fez necessário descrever um carregamento pontual no meio do vão, pois o programa exige que haja nós em pontos de aplicação de carga concentrada.

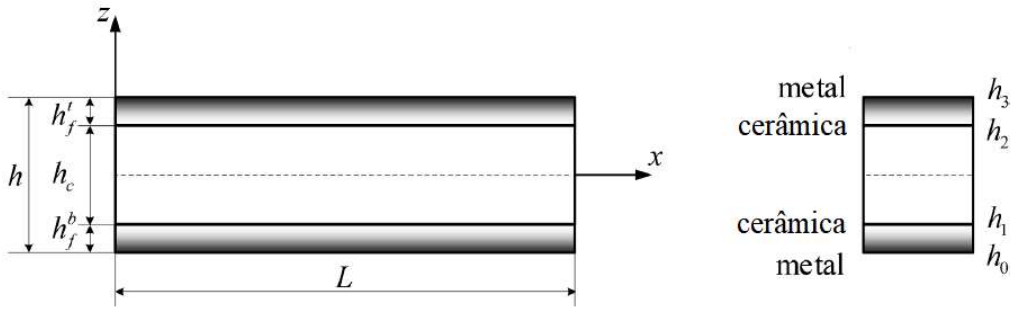
Além da ordem da aproximação, o programa também permite definir a quantidade g de pontos de integração numérica para as quadraturas de Gauss-Legendre. Como visto no item 3.5.1 , para integrandos polinomiais de grau n a integração atinge a exatidão se $g \geq 2n - 1$. A depender dos parâmetros adotados, o programa lida com integrandos trigonométricos e até exponenciais. Contudo, notou-se que mesmo nesses casos, a partir de $g = 2n - 1$ o subsequente aumento do número de pontos seguiu o mesmo padrão que as demais análises: campo de deslocamento transversal invariável e campos de tensão com variação abaixo da tolerância. Assim, adotando uma margem de segurança mínima de 2 vezes o ponto de convergência neste caso, foi fixado o número de pontos de Gauss em 50.

4.2 MODELO DE FGM PARA VIGAS SANDUÍCHE

Vinh (2021) estuda o comportamento de vigas sanduíche de 3 camadas com diferentes proporções de altura, sendo a camada externa cerâmica pura e as camadas externas um FGM cerâmico na interface com a camada intermediária e metálico nas bordas externas. A FIGURA 4 esquematiza o modelo proposto.

O artigo trabalha com a cinemática da TDPO e modelo de gradação equivalente ao do presente trabalho. O autor validou seus resultados pelos de Vo et al. (2015), que utilizou um modelo quasi-3D para obter os campos de resposta deste mesmo corpo.

FIGURA 4 - ESQUEMA DE VIGA SANDUÍCHE FUNCIONALMENTE GRADUADA



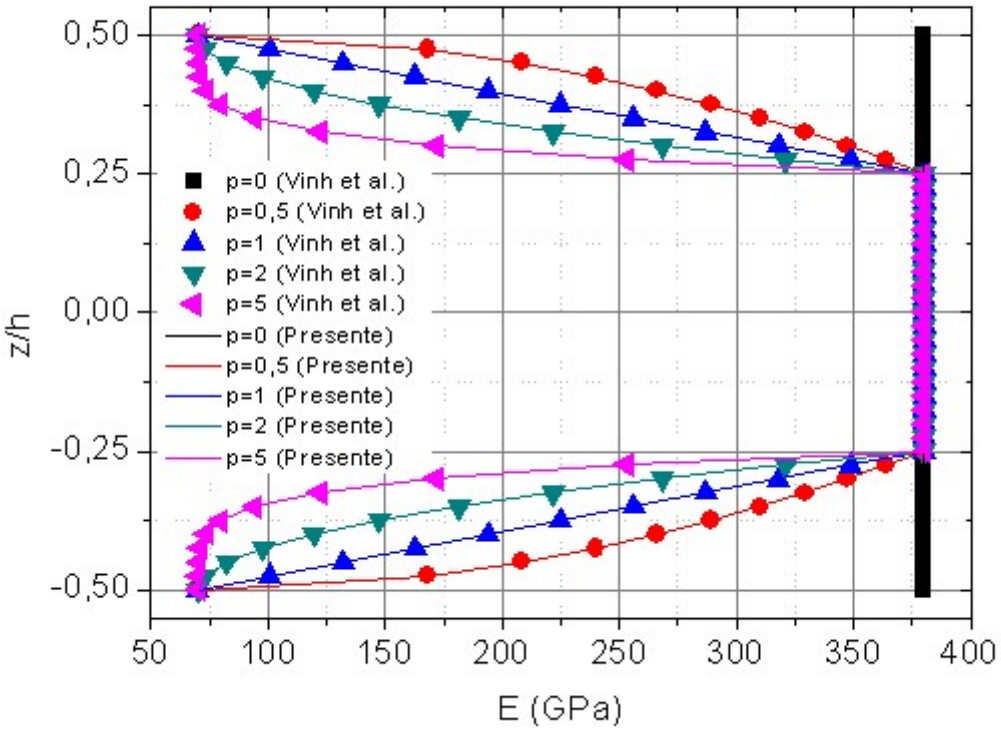
Fonte: Adaptado de Vinh (2021).

O material cerâmico (Al_2O_3) tem $E_c = 380\ GPa$ e $\nu_c = 0{,}3$, e para o metal (Al) tem-se $E_m = 70\ GPa$ e $\nu_m = 0{,}3$.

O autor testa diversas proporções entre as alturas de cada camada (h_f^b-h_c-h_f^t). Para as comparações realizadas, foram selecionadas as configurações 1-2-1, simétrica ($h_1 = -h/4$ e $h_2 = h/4$) e 2-1-1, assimétrica ($h_1 = 0$ e $h_2 = h/4$). Note que $h_0 = -h/2$ e $h_3 = h/2$.

Para recuperar o comportamento de FGM descrito pelo artigo de referência, é necessário usar a função $\Psi_G^{(k)}$ negativa na camada de topo, pois sua concavidade é invertida em relação à camada de base. Como explicado no item 3.1 , nas camadas em que ocorre essa especificidade Q_{11_b} e Q_{11_t} devem ser invertidos na entrada do programa, ou seja, $Q_{11_b}^{(3)} = E_m$ e $Q_{11_t}^{(3)} = E_c$. Na FIGURA 5, é possível avaliar a concordância entre o módulo efetivo obtido neste trabalho e o proposto por Vinh (2021) para a configuração 1-2-1.

FIGURA 5 - COMPORTAMENTO DA PROPRIEDADE MATERIAL NA CONFIGURAÇÃO 1-2-1



Fonte: Vinh (2021).

Para validação, foi estudada uma viga simplesmente apoiada (S-S) sob um carregamento uniforme $q = q_0$. O deslocamento transversal em $x = L/2$ e a tensão normal em $x = L/2,\ z = h/2$ são comparados com os dois trabalhos de referência que utilizam a cinemática da TDPO. Os resultados adimensionalizados, $\overline{w} = 100E_m h^3 w/q_0 L^4$ e $\bar{\sigma}_x = h\sigma_x/qL$, são apresentados nas tabelas TABELA ***2*** a TABELA ***4***.

TABELA 2 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL ADIMENSIONAL DE MEIO DE CAMADA EM VIGA S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME

Configuração	Vo et al. (2015)	Vinh (2021)	Presente
1-2-1	6,8003	6,8003	6,8003
2-1-1	8,9597	8,9599	8,9599

Fonte: Autoral.

TABELA 3 - TENSÃO NORMAL ADIMENSIONAL EM $x = L/2, z = h/2$ EM VIGA S-S COM CONFIGURAÇÃO 1-2-1 SOB CARREGAMENTO UNIFORME

	$L/h = 5$			$L/h = 20$		
p	Vo et al. (2015)	Vinh (2021)	Presente	Vo et al. (2015)	Vinh (2021)	Presente
0	3,7500	3,7451	3,7500	15,0000	14,9805	15,0000
1	1,2192	1,2176	1,2192	4,8766	4,8703	4,8766
2	1,5373	1,5353	1,5373	6,1493	6,1413	6,1493
5	1,9538	1,9513	1,9538	7,8152	7,8051	7,8153
10	2,1656	2,1628	2,1656	8,6623	8,6510	8,6623

Fonte: Autoral.

TABELA 4 - TENSÃO NORMAL ADIMENSIONAL EM $x = L/2, z = h/2$ EM VIGA S-S COM CONFIGURAÇÃO 2-1-1 SOB CARREGAMENTO UNIFORME

p	$L/h = 5$			$L/h = 20$		
	Vo et al. (2015)	**Vinh (2021)**	**Presente**	**Vo et al. (2015)**	**Vinh (2021)**	**Presente**
0	3,7500	3,7451	3,7500	15,0000	14,9805	15,0000
1	1,3730	1,3713	1,3730	5,4922	5,4850	5,4922
2	1,8296	1,8272	1,8296	7,3183	7,3087	7,3183
5	2,3864	2,3833	2,3864	9,5457	9,5333	9,5457
10	2,6075	2,6042	2,6076	10,4302	10,4166	10,4302

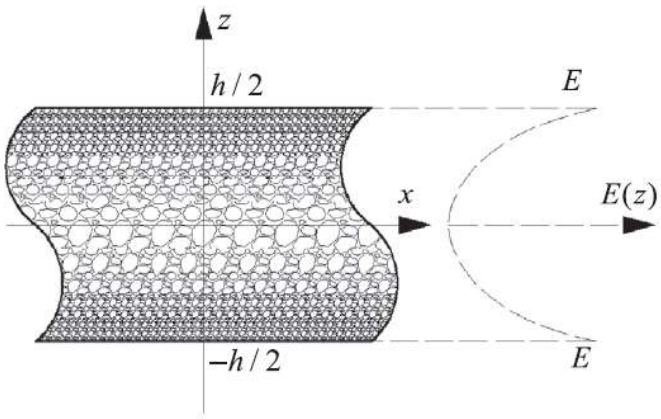
Fonte: Autoral.

Foi observada excelente convergência com os resultados de Vo et al. (2015), com notável melhoria em relação aos de Vinh (2021) nas tensões normais.

4.3 MODELO DE POROSIDADE TRIGONOMÉTRICO

Chen et al. (2015) propõem em seu trabalho dois modelos trigonométricos de gradação de poros. O primeiro deles é um modelo de concentração maior de poros no centro e menor nas bordas, equivalente ao apresentado na equação (10) e ilustrado na FIGURA 6. O artigo desenvolve o modelo de porosidade utilizando a TDPO, e resolve a viga com diversos parâmetros através do método numérico de Ritz, avaliando, dentre outros parâmetros, o comportamento do deslocamento transversal e a tensão normal.

FIGURA 6 - MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE POROSIDADE



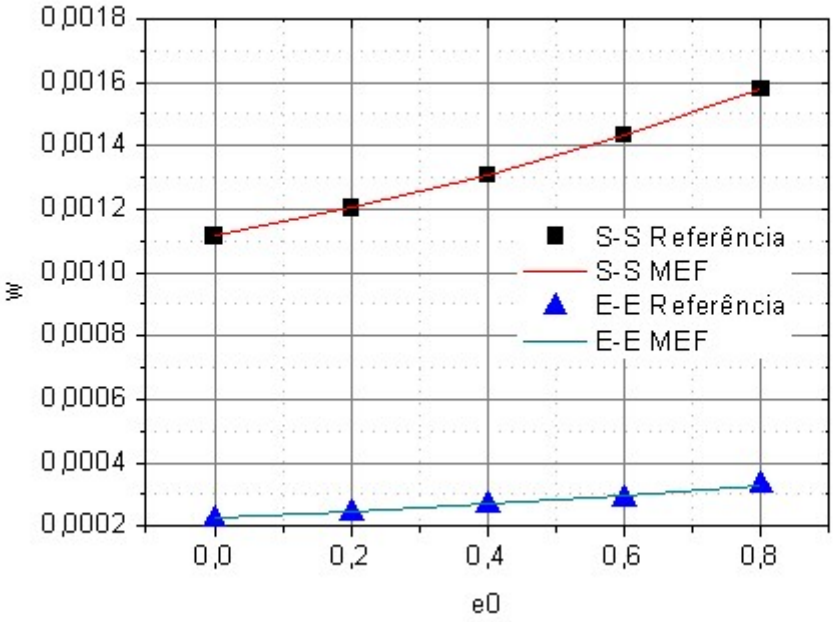
Fonte: Adaptado de Chen et al. (2015).

Uma particularidade observada no procedimento teórico deste artigo é que ao expressar a energia interna U do corpo, não é feita a integração da tensão e deformação em todo o volume, mas apenas através do plano xz, e notou-se que isso ocasiona que a teoria se limita a vigas de largura b unitária. Assim, embora o artigo tenha especificado em seus exemplos um valor de $b = 0{,}1\ m$, adotou-se $b = 1{,}0\ m$ ao reproduzir os exemplos por ele apresentados.

O material em estudo é uma espuma de aço com $E = 200\ GPa$ e $\nu = 1/3$. Neste artigo, a propriedade constitutiva Q_{11} é calculada pela equação (7). É fixada a altura de $h = 0{,}1\ m$ para uma viga que receberá dois tipos de carregamento: um distribuído uniforme, com $q_0 = 10\ kN/m$, e um pontual no centro do vão, com $F = 10\ kN$. Os valores de deslocamento transversal e tensões são apresentados nas formas adimensionais $\overline{w} = w/h$ e $\bar{\sigma} = \sigma h/10q_0L$, esta última adaptada em ocasião à particularidade da largura da seção mencionada no parágrafo anterior. Nos estudos conduzidos, os parâmetros variáveis foram: índice de porosidade, esbeltez da seção (fator L/h) e condições de apoio da viga.

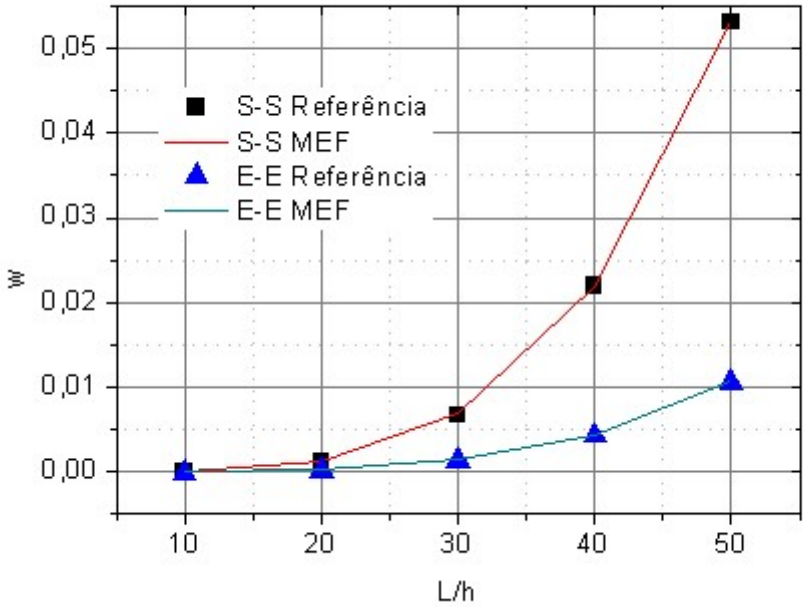
Nas figuras FIGURA **7** a FIGURA **10**, são apresentados gráficos comparando os deslocamentos transversais máximos (no meio do vão) do artigo com os obtidos pelo programa via MEF, utilizando o modelo cinemático da TDPO (Timoshenko, 1922), sob ambos os tipos de carregamento e com duas condições de apoio: simplesmente apoiado (S-S) e engastado (E-E). Na FIGURA 11, a tensão normal é estudada no meio do vão de uma viga E-E com fator $L/h = 20$, verificando o efeito da variação do índice de porosidade. Em todos os casos, observou-se excelente concordância entre os dados obtidos e os do artigo.

FIGURA 7 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORME COM $L/h = 20$ ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL



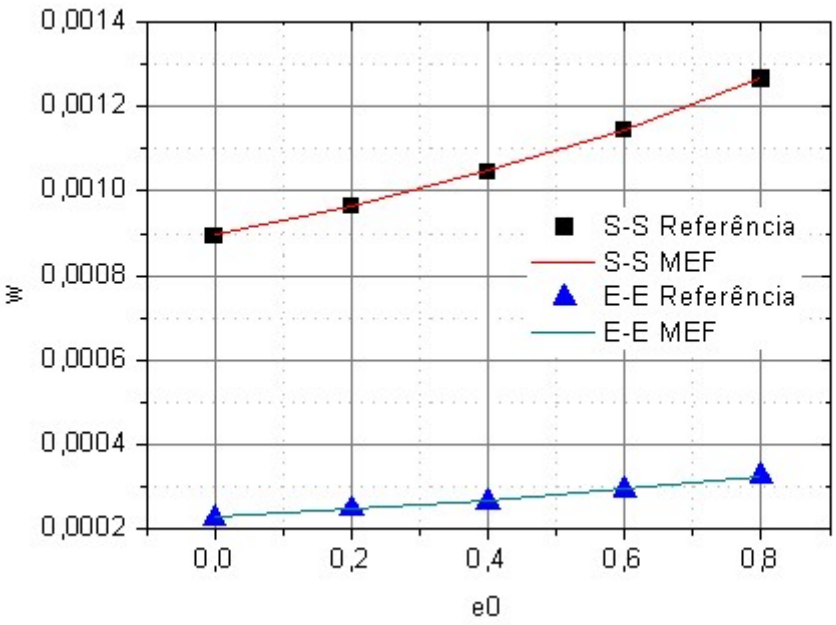
Fonte: Chen et al. (2015).

FIGURA 8 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORME COM $e_0 = 0,5$ E ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL



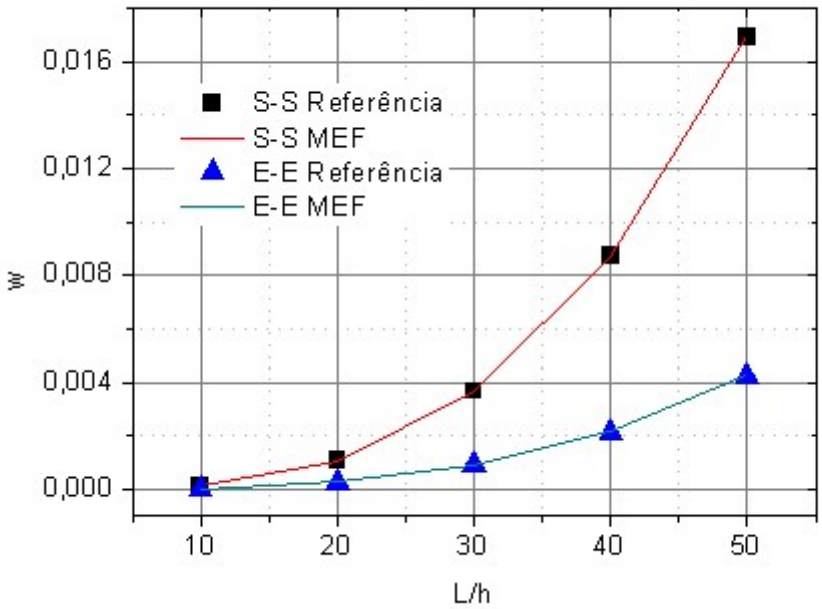
Fonte: Chen et al. (2015).

FIGURA 9 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO PONTUAL COM $L/h = 20$ E ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL



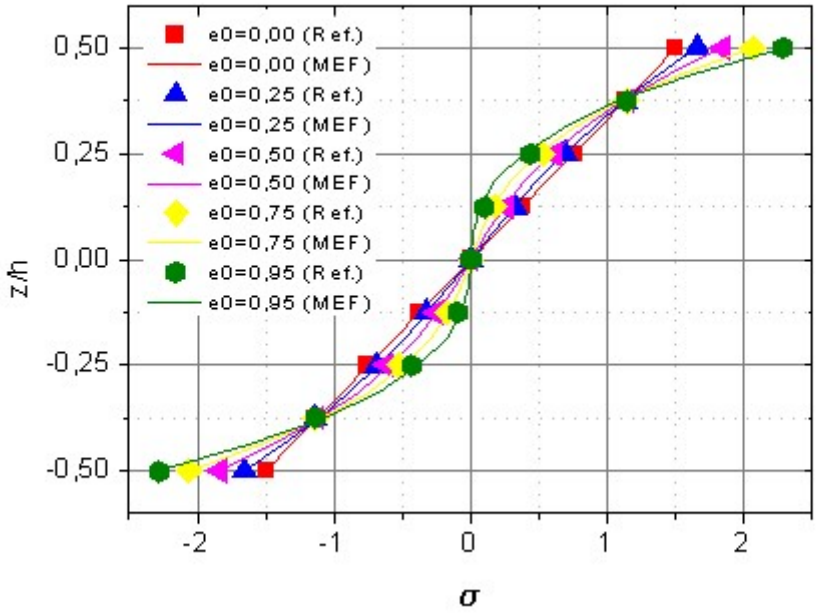
Fonte: Chen et al. (2015).

FIGURA 10 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL SOB CARREGAMENTO PONTUAL COM $e_0 = 0,5$ E ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL



Fonte: Chen et al. (2015).

FIGURA 11 - TENSÃO NORMAL NO MEIO DO VÃO E-E SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $L/h = 20$ E ÍNDICE DE POROSIDADE VARIÁVEL

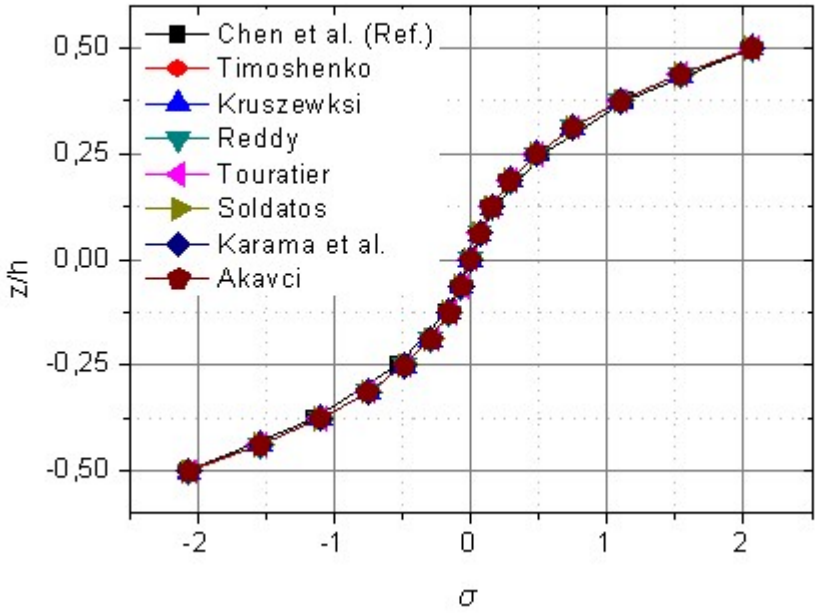


Fonte: Chen et al. (2015).

Além da cinemática da TDPO, avaliou-se a performance das demais cinemáticas de alta ordem na descrição dos campos de tensão. As figuras FIGURA **12** e FIGURA **13** apresentam, respectivamente, os campos de tensão normal no meio do vão e tensão cisalhante na extremidade do vão em uma viga S-S sob carregamento uniforme obtidos a partir de cada um dos modelos cinemáticos. No caso da tensão cisalhante, não há dados de referência no artigo e, como mencionado em 3.1 após a apresentação da equação (12), a cinemática da TDPO desenvolvida pela teoria unificada do presente trabalho gera um campo de tensão cisalhante invariável e, portanto, de pouco interesse prático.

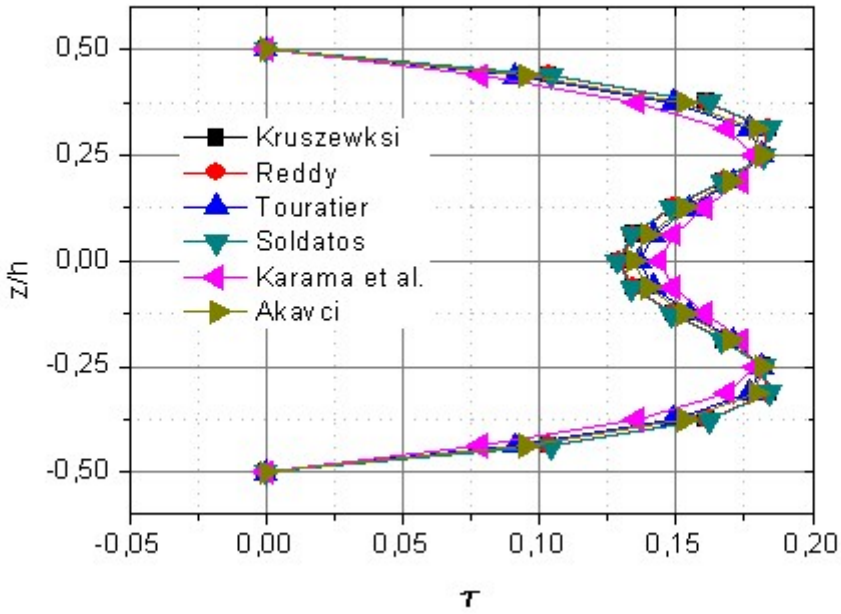
Concluiu-se desta análise que a tensão normal sofre pouca variação com a mudança da cinemática adotada, ao passo que é possível notar diferenças na tensão cisalhante. A cinemática de Karama et al. (2003), por exemplo, notavelmente resulta em tensões maiores que as demais no meio da seção da viga, ponto de concentração dos poros. Já as cinemáticas de Kruzsewski (1909), Reddy (1990) e Soldatos (1992) apontam um pico de tensão levemente maior que as demais cinemáticas a aproximadamente 25% e 75% da altura da viga.

FIGURA 12 - TENSÃO NORMAL NO MEIO DO VÃO S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $e_0 = 0,75$ E $L/h = 20$



Fonte: Chen et al. (2015).

FIGURA 13 - TENSÃO CISALHANTE NA EXTREMIDADE DO VÃO S-S SOB CARREGAMENTO UNIFORME COM $e_0 = 0,75$ E $L/h = 20$



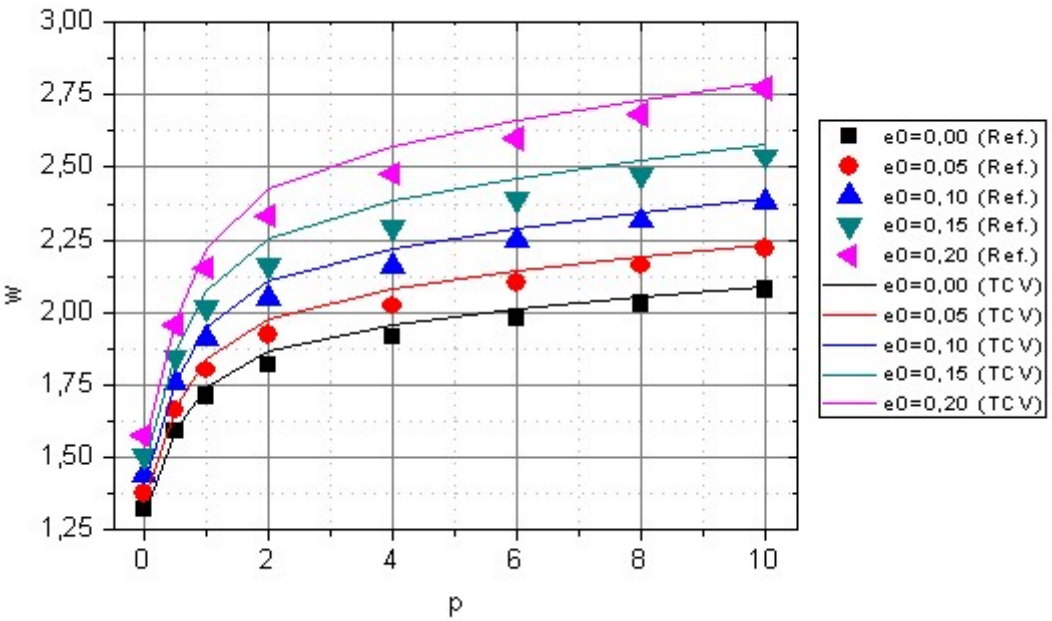
Fonte: Autoral.

4.4 MODELO DE FGM E POROSIDADE CONSTANTE

Fouda et al. (2017) trabalham com vigas isotrópicas que agregam simultaneamente o modelo de FGM e um modelo de porosidade constante como o apresentado na equação (9). A análise paramétrica do deslocamento transversal com a variação dos índices p e e_0 realizada nesse artigo com a TEV é usada como resultado de referência no presente trabalho.

Na FIGURA 14, a análise paramétrica do artigo, realizada em uma viga delgada ($L/h = 100$) com gradação de aço ($E_m = 210\ GPa$, $\nu_m = 0{,}3$) a alumina ($E_c = 310\ GPa$, $\nu_m = 0{,}3$) é reproduzida utilizando a TEV. A viga é simplesmente apoiada (S-S) e as dimensões adotadas da seção são $b = 1\ m$ e $h = 0{,}1\ m$. Analisa-se o deslocamento transversal no meio do vão na forma adimensional $\overline{w} = 100E_c bh^3 w/12q_0L^4$.

FIGURA 14 - ANÁLISE PARAMÉTRICA DO DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DE VIGA S-S COM $L/h = 100$



Fonte: Fouda et al. (2017).

Percebeu-se pela FIGURA 14 que a teoria do presente trabalho superestima, em relação ao artigo de referência, os valores de deslocamento, em especial para índices de gradação intermediários ao intervalo $[1, 10]$. Uma análise de erro adicional foi feita usando o

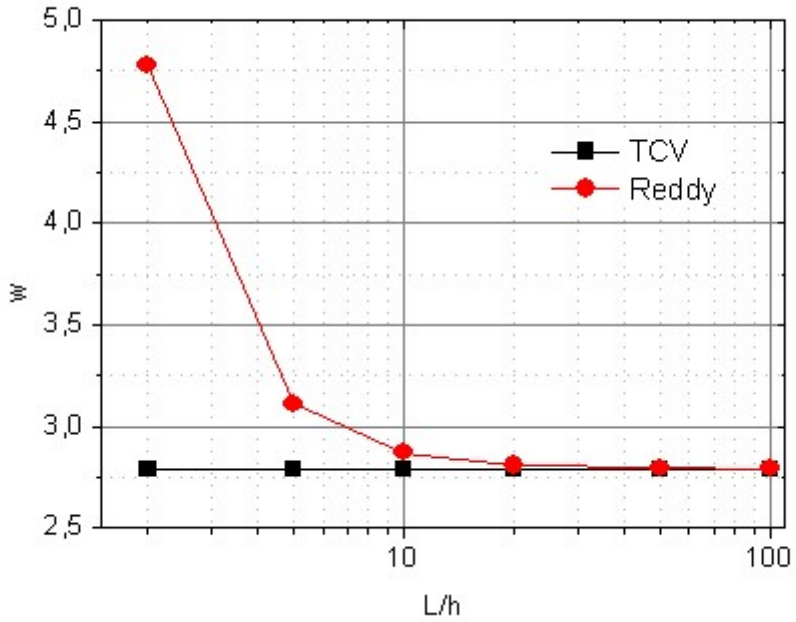
método do erro percentual absoluto médio ponderado (WMAPE, da sigla em inglês), na qual a diferença entre uma série de l valores atuais x_j e seus valores de referência $x_{j,ref}$ é medido pela seguinte expressão:

$$WMAPE(\%) = 100\frac{\sum_{j=1}^{l}\left|x_{j,ref} - x_j\right|}{\sum_{j=1}^{l}\left|x_{j,ref}\right|} \tag{60}$$

Constatou-se por esse método que a diferença entre os resultados é da ordem de 2,25%. Este valor pode ser justificado pela diferença de métodos numéricos utilizados e pela possível diferença na quantidade de elementos e grau de aproximação, uma vez que o artigo de referência não relata as condições numéricas em que foram obtidos os seus resultados.

Por estar trabalhando com a TEV, é intuitivo que o autor tenha optado por um índice L/h elevado, pois a literatura indica que o comportamento de vigas esbeltas não é bem descrito por teorias de baixa ordem. Para constatar esse fato, fixando $p = 10$ e $e_0 = 0{,}15$, avaliou-se o comportamento do deslocamento transversal à medida que o parâmetro de esbeltez da viga L/h é variado. Na FIGURA 15 é apresentado o comportamento da teoria de alta ordem para vigas sob essa análise, aqui exemplificado pela cinemática de Reddy (1990).

FIGURA 15 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DE VIGA S-S COM $p = 10$ E $e_0 = 0,15$ COM ESBELTEZ DA SEÇÃO VARIÁVEL



Fonte: Autoral.

Observa-se que a teoria de alta ordem aqui numericamente desenvolvida está ausente do efeito de travamento por cisalhamento denominado *shear locking*. A teoria de alta ordem tende a recuperar a TEV à medida que a viga se torna mais delgada, uma vez que o efeito do cisalhamento é dissipado.

5 CONCLUSÕES

A partir dos exemplos de validação, foi possível verificar excelente concordância com todas as referências adotadas, seja quando foi variado o índice de porosidade e o índice de gradação, seja quando foi considerado FGM, seja considerando vigas sanduíche.

Para as vigas sanduíche de Vinh (2021), validou-se a formulação de FGMs proposta pelo presente trabalho, e atestou-se que a teoria ESL consegue descrever com acurácia os comportamentos de deslocamento transversal e tensão normal alcançados por Vo et al. (2015) para FGMs de múltiplas camadas simétricas e assimétricas em sua teoria quasi-3D. Notou-se inclusive melhoria na convergência da tensão normal em relação ao trabalho de Vinh.

Todos os resultados de deslocamento e tensão normal de Chen (2015) para um dos seus modelos de distribuição de porosidade foram fielmente recuperados pela presente teoria para todos os índices de porosidade e valores de esbeltez da seção transversal testados, validando a implementação de modelos de porosidade não constantes. Notou-se que para essas grandezas que a TDPO, utilizada pelo artigo de referência, se aproximou das demais cinemáticas de ordem mais elevada. Introduzindo a análise à tensão de cisalhamento, as diferenças entre as cinemáticas se tornaram mais evidentes. Foi observado que determinadas cinemáticas apontam para concentrações de tensões de maior ou menor magnitude em diferentes posições da seção, embora os formatos da distribuição sejam semelhantes.

A análise de Fouda et al. (2017) com a TEV de uma viga de FGM e com porosidade constante também foi recuperada, validando o funcionamento simultâneo de ambas as implementações. Com o exemplo proposto por esse artigo, também foi verificado o fato atestado pela literatura que a TEV subestima deslocamentos transversais para vigas esbeltas em relação a teorias de alta ordem, cujas respostas se aproximam mais da realidade.

Conclui-se que a presente teoria, unificando diversos atributos observados nas aplicações mais recentes de materiais compósitos laminados, tem desempenho satisfatório nas diversas aplicações para as quais se propõe.

6 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Em sua versatilidade, a teoria apresentada tem um número elevado de aplicações. Pretende-se analisar novos exemplos, não presentes na literatura, tais como vigas laminadas funcionalmente graduadas com porosidade, e propor novos exemplos caracterizados como *benchmarks*.

Uma das grandes vantagens da teoria é a possibilidade de integrar a ela novas cinemáticas e modelos de distribuição de porosidade com facilidade. Também é trivial integrar novos modelos de distribuição de gradação para FGMs, embora modelos que não sejam a forma potencial fortemente presente na literatura e implementada neste trabalho não sejam de conhecimento do autor. Assim, é de interesse expandir o escopo deste trabalho para uma maior gama de modelos.

A evolução que provavelmente é a mais pertinente para este trabalho é implementar de fato a anisotropia dos materiais compósitos laminados, fugindo da atual limitação da isotropia. Até onde é de conhecimento do autor, há uma escassez na literatura de trabalhos que integrem formulações de FGMs e modelos de porosidade a compósitos laminados.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAVCI, S. S. Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, Vol 26, No. 18, p 1907–1919, 2007.

CHEN, D., YANG, J., KITIPOMCHAI, S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. **Composite Structures**, v. 133, p. 54–61, 2015.

DAHAKE, A. G., GHUGAL, Y. P. A trigonometric shear deformation theory for flexure and free vibration of isotropic thick beams. **Procedia Engineering**, v. 51, p. 1–7, 2013.

FOUDA, N., EL-MIDANY, T., SADOUN, A. M. Bending, buckling and vibration of a functionally graded porous beam using finite elements. **Journal of Applied and Computational Mechanics**, v. 3(4), p. 274–282, 2017.

GHUGAL, Y. P., SHIMPI, R. P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 21, n. 9, p. 775–813, 2002.

KAPURIA, S., BHATTACHARYYA, M., KUMAR, A. N. Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation. **Composite Structures**, v. 82, p 390–402, 2008.

KARAMA, M., AFAQ, K. S., MISTOU, S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity**. International Journal of Solids and Structures**, v. 40, p. 1525–1546, 2003.

KRUSZEWSKI, E. T. Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam. **National Advisory Committee for Aeronautics**, 1909.

LEVINSON, M. A new rectangular beam theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 74 (1),
p. 81–87, 1981.

POZRIKIDIS, C. **Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using Matlab**. Chapman & Hall/CRC, 2005.

REDDY, J. N., A general non-linear third order theory of plates with moderate thickness. **International Journal of Non-linear Mechanics**, v. 25 (6), p. 677–686, 1990.

REDDY, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. Second Edition. CRC Press LLC, 2004.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. Third Edition. McGraw-Hill Corporation, 2006.

SAYYAD, A. S. Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams. **Applied and Computational Mechanics**, v. 5, p. 217–230, 2011.

SAYYAD, A. S., GHUGAL, Y. M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. **Composite Structures**, v. 171, p. 486–504, 2017.

SOLDATOS, K. P. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. **Acta Mechanica**, v. 94, p 195–220, 1992.

THAI, H., VO, T. P. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 25 (6), p. 217–230, 2012.

TIMOSHENKO, S. P.; On the transverse vibrations of bar of uniform cross section. **Philosophical Magazine**. v. 43, p. 125–131, 1922.

TOURATIER, M. An efficient standard plate theory. **International Journal of Engineering Science**, v. 29, n. 8, p. 901–916, 1991.

VINH, P. V. Static bending analysis of functionally graded sandwich beams using a novel mixed beam element based on first-order shear deformation theory. **Forces in Mechanics**, v. 4, 2021.

VO, T. P., THAI, H. T., NGUYEN, T. K., INAM, F., LEE, J. Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. **Composites: Part B**, v. 68, p. 59–74, 2015.

APÊNDICE - MANUAL DE USO DO PROGRAMA

O programa em Fortran trabalha com o arquivo de entrada `entrada.txt`, onde devem ser inseridos os parâmetros do problema a ser rodado, e o arquivo de saída `saida.txt`, onde os resultados são impressos.

Abaixo, é apresentado o arquivo de entrada configurado para um dos exemplos de Vinh et al. (2021), visto no item 4.2 deste trabalho, com algumas adaptações para melhor demonstrar as funcionalidades do programa. A apresentação do arquivo será fragmentada em partes para facilitar a explicação.

```
TÍTULO DO EXEMPLO
vinh-adaptado

PARÂMETROS DE FGM E POROSIDADE
-----------------------------------------------------------------------------------------
p   e0
-----------------------------------------------------------------------------------------
2   0

CONFIGURAÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO
-----------------------------------------------------------------------------------------
CINEMÁTICA UTILIZADA
(-1=EB, 0=TIMO, 1=KRUSZ, 2=REDDY, 3=TOURATIER, 4=SOLDATOS, 5=KARAMA, 6=AKAVCI)
-----------------------------------------------------------------------------------------
0
-----------------------------------------------------------------------------------------
MODELO DE POROSIDADE UTILIZADO
(0=CTE., 1=MÁX. CENTRO)
-----------------------------------------------------------------------------------------
0
```

Após definir do título do problema que será impresso no arquivo de saída, na seção "parâmetros de FGM e porosidade" devem ser definidos os parâmetros p e e_0, e na seção "configurações de distribuição", os modelos cinemático e de porosidade dentre os implementados.

```
CONFIGURAÇÕES DAS SEÇÕES
-----------------------------------------------------------------------------------------
# DE CONFIGURAÇÕES DE LÂMINAS (NCONFIG)
-----------------------------------------------------------------------------------------
2
-----------------------------------------------------------------------------------------
C   #L  LARGURA
-----------------------------------------------------------------------------------------
1   3   1
2   3   1
-----------------------------------------------------------------------------------------
C   L   H1  <  H2    Q11b         Q11t         POISSON   CONCAV. FGM
-----------------------------------------------------------------------------------------
1   1   -0.5   -0.25  70000000000 380000000000 0.3       1
1   2   -0.25  0.25  380000000000 380000000000 0.3       1
1   3   0.25   0.5    70000000000 380000000000 0.3       -1
2   1   -0.5    0     70000000000 380000000000 0.3       1
2   2   0      0.25  380000000000 380000000000 0.3       1
2   3   0.25   0.5    70000000000 380000000000 0.3       -1
```

Na seção “configurações da seção”, devem ser definidas quantas configurações de seção transversal se queira. No exemplo acima, são definidas as seções 1-2-1 e 2-1-1 que foram usadas no exemplo. Abaixo do número de configurações, devem ser definidos para cada configuração o número de lâminas (ou camadas) e a largura b da seção. Por fim, para cada configuração, devem ser especificados para cada lâmina as posições de base e topo da camada em relação a um sistema global de coordenadas, as propriedades de base Q_{11_b} e Q_{11_t}, o coeficiente de Poisson ν e se a função de gradação será positiva ou negativa. Os dados devem ser dispostos obrigatoriamente na ordem do exemplo, e as seções devem ser descritas sempre de baixo para cima. No último campo, apenas os valores 1 e -1 são válidos.

```
CONFIGURAÇÕES DA ESTRUTURA
-------------------------------------------------------------------------------------
# DE ELEMENTOS (NELEM)
-------------------------------------------------------------------------------------
2
-------------------------------------------------------------------------------------
# DE NÓS POR ELEMENTO (NNOSEL)
-------------------------------------------------------------------------------------
5
-------------------------------------------------------------------------------------
# DE PONTOS DE GAUSS PARA A INTEGRAÇÃO (NPGAUS)
-------------------------------------------------------------------------------------
50
-------------------------------------------------------------------------------------
BASE (0=IGUALMENTE ESP., 1=LOBATTO)
-------------------------------------------------------------------------------------
1
```

Os próximos trechos do código são parte da seção “configurações da estrutura”. No trecho acima, devem ser definidos o número de elementos, o número de nós por elemento, o número de pontos de Gauss para todas as integrações do programa e a base para geração dos polinômios aproximadores. A quantidade de elementos e de nós por elemento foi adaptada nesta demonstração para 2 elementos de 5 nós cada (totalizando 9 nós, pois os elementos compartilham o nó intermediário da viga) para exemplificar como aplicar múltiplos elementos.

```
-------------------------------------------------------------------------------------
EL  CONFIGURAÇÃO
-------------------------------------------------------------------------------------
1   1
2   1
-------------------------------------------------------------------------------------
NÓ  X     Y     (COORDENADAS)
OBS.: POSICIONAR APENAS OS NÓS LIMITE ENTRE ELEMENTOS
-------------------------------------------------------------------------------------
1   0     0
5   2.5   0
9   5     0
```

Nesse trecho, deve ser associada a cada elemento uma das configurações definidas anteriormente. Aqui, foi associada a configuração 1-2-1 para ambos os elementos. Embora não tenha sido utilizada, o programa inclui esta funcionalidade para que seja possível rodar vigas com diferentes seções transversais através do seu comprimento. Em seguida devem ser definidas as coordenadas dos nós limite dos elementos. Deve-se atentar aos nós que compartilham elementos; neste caso, o nó 5 é tanto o nó final do elemento 1 como o nó inicial do elemento 2.

```
-----------------------------------------------------------------------------------------
# DE CONDIÇÕES DE CONTORNO (NCOND)
-----------------------------------------------------------------------------------------
7
-----------------------------------------------------------------------------------------
NÓ  TIPO COND  (TIPO 1=DESL. AXIAL, 2=DESL. TR., TIPO 3=GIRO FLEXÃO, TIP0 4=GIRO CIS.)
-----------------------------------------------------------------------------------------
9   1    0
1   2    0
1   3    0
9   2    0
9   3    0
1   4    0
9   4    0
```

No trecho acima, devem ser especificadas as condições de contorno da viga. Em geral definem-se aqui deslocamentos iguais a zero para representar as vinculações. No exemplo acima, está representada uma viga engastada (E-E).

Devido à forma que a leitura de dados foi implementada, uma ordem rigorosa deve ser seguida. Primeiro devem ser inseridas todas as restrições de deslocamento axial (tipo 1) em ordem crescente dos nós; em seguida, as restrições de deslocamento axial e de giro devido à flexão (tipos 2 e 3) também em ordem crescente dos nós; e por fim, as restrições de giro devido ao cisalhamento (tipo 4), mais uma vez em ordem crescente dos nós.

```
-----------------------------------------------------------------------------------------
# DE FORÇAS E MOMENTOS NODAIS PRESCRITOS (NF)
-----------------------------------------------------------------------------------------
0
-----------------------------------------------------------------------------------------
NÓ  TIPO FORÇA (TIPO 1=F. AXIAL, 2=F. TRANSV., TIPO 3=MOM., TIPO 4=MOM. ALTA ORDEM)
-----------------------------------------------------------------------------------------

-----------------------------------------------------------------------------------------
# DE PONTOS PARA INTERPOLAR O CARREGAMENTO (NQ)
-----------------------------------------------------------------------------------------
2
-----------------------------------------------------------------------------------------
EL  Q1     Q2     Q3     ... (CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS)
-----------------------------------------------------------------------------------------
1   -10000 -10000
2   -10000 -10000
```

Nesse trecho, devem ser inseridas as forças externas sobre a viga. Neste exemplo não há forças pontuais, mas a lógica a ser seguida é idêntica à lógica das condições de contorno no trecho anterior, inclusive a rigorosa ordem de inserção dos dados a ser seguida. Em seguida, o carregamento distribuído deve ser inserido. O programa pede que sejam inseridos os valores do carregamento sobre cada elemento em uma quantidade de pontos igualmente espaçados a ser definida pelo usuário. Devem ser especificados no mínimo dois pontos por elemento, que já são suficientes para descrever um carregamento uniforme, como é o caso.

```
CONFIGURAÇÕES DE SAÍDA
-----------------------------------------------------------------------------------------
# DE PONTOS DE CONSULTA POR ELEMENTO (NPCONSEL)
-----------------------------------------------------------------------------------------
4
-----------------------------------------------------------------------------------------
#X  #Z  (# DE SEÇÕES POR ELEMENTO, # DE PONTOS POR SEÇÃO) (NSECAOEL,NPSECAO)
-----------------------------------------------------------------------------------------
2   5
```

Na última seção do arquivo de entrada, “configurações de saída”, devem ser especificados quantos pontos por campo de resposta se quer que sejam impressos. O primeiro campo define a quantidade de pontos por elemento em que serão apresentadas variáveis no comprimento, como o deslocamento transversal. No segundo campo, podem ser definidas em quantas seções por elemento devem ser avaliadas variáveis na altura da seção, a saber os campos de tensão e deformação, e quantos pontos na altura de cada seção devem ser impressos.

Com os parâmetros exemplificados acima, o programa gera o arquivo de saída mostrado a seguir. A organização das tabelas foi levemente adaptada de modo a caber na página.

Primeiro, é apresentado o título do exemplo. Em seguida, os campos de deslocamento nos pontos de consulta:

```
TÍTULO DO EXEMPLO
vinh-adaptado

DESLOCAMENTOS
-------------------------------------------------------------------------------
 COORD X;   COORD Y;          W (E-03);   ANG FLEX (E-03);  ANG TOTAL (E-03);
-------------------------------------------------------------------------------
ELEMENTO   1
  0.0000;    0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000;
  0.8333;    0.0000;     -0.0005385818;     -0.0008768326;     -0.0001989952;
  1.6667;    0.0000;     -0.0012069852;     -0.0006420039;     -0.0000997339;
  2.5000;    0.0000;     -0.0014884290;      0.0000000000;      0.0000000000;
ELEMENTO   2
  2.5000;    0.0000;     -0.0014884290;      0.0000000000;      0.0000000000;
  3.3333;    0.0000;     -0.0012069852;      0.0006420039;      0.0000997339;
  4.1667;    0.0000;     -0.0005385818;      0.0008768326;      0.0001989952;
  5.0000;    0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000;
```

Na sequência, são apresentados os esforços internos:

```
ESFORÇOS INTERNOS
-------------------------------------------------------------
 COORD X;   COORD Y;          CORTANTE;            FLETOR;
-------------------------------------------------------------
ELEMENTO   1
  0.0000;    0.0000;            0.0000;        20833.3333;
  0.8333;    0.0000;       -17645.9381;         3472.2222;
  1.6667;    0.0000;        -8843.9262;        -6944.4444;
  2.5000;    0.0000;            0.0000;       -10416.6667;
ELEMENTO   2
  2.5000;    0.0000;            0.0000;       -10416.6667;
  3.3333;    0.0000;         8843.9262;        -6944.4444;
  4.1667;    0.0000;        17645.9381;         3472.2222;
  5.0000;    0.0000;            0.0000;        20833.3333;
-------------------------------------------------------------
 COORD X;   COORD Y; CORTANTE ALT ORD;   FLETOR ALTA ORD
-------------------------------------------------------------
ELEMENTO   1
  0.0000;    0.0000;           0.0000;        20833.3333
  0.8333;    0.0000;      -17645.9381;         3472.2222
  1.6667;    0.0000;       -8843.9262;        -6944.4444
  2.5000;    0.0000;           0.0000;       -10416.6667
ELEMENTO   2
  2.5000;    0.0000;           0.0000;       -10416.6667
  3.3333;    0.0000;        8843.9262;        -6944.4444
  4.1667;    0.0000;       17645.9381;         3472.2222
  5.0000;    0.0000;           0.0000;        20833.3333
```

Em seguida, são apresentadas as reações de apoio nos nós. Espera-se que apenas ocorram reações diferentes de zero nos nós onde foram definidas as condições de contorno.

```
REAÇÕES DE APOIO NOS NÓS
-------------------------------------------------------------------
 NÓ;   COORD X;   COORD Y;          REAÇÃO N;          REAÇÃO F;
-------------------------------------------------------------------
  1;    0.0000;    0.0000;            0.0000;        25000.0000;
  2;    0.6250;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  3;    1.2500;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  4;    1.8750;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  5;    2.5000;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  6;    3.1250;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  7;    3.7500;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  8;    4.3750;    0.0000;            0.0000;            0.0000;
  9;    5.0000;    0.0000;            0.0000;        25000.0000;
-------------------------------------------------------------------
 NÓ;   COORD X;   COORD Y;          REAÇÃO M;  REAÇÃO M ALT ORD
-------------------------------------------------------------------
  1;    0.0000;    0.0000;        20833.3333;       -20052.0833
  2;    0.6250;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  3;    1.2500;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  4;    1.8750;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  5;    2.5000;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  6;    3.1250;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  7;    3.7500;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  8;    4.3750;    0.0000;            0.0000;            0.0000
  9;    5.0000;    0.0000;       -20833.3333;        20052.0833
```

Na sequência, são apresentados os valores de deslocamento axial e deformações axial e transversal. Desses dois últimos, é possível derivar os campos de tensão.

```
DESLOCAMENTOS AXIAIS E DEFORMAÇÕES
-----------------------------------------------------------------
 COORD Z;   DESLOC U (E-03);  DEFORM AX (E-03);  DEFORM TR (E-03)
-----------------------------------------------------------------
      ELEMENTO   1, SEÇÃO   1 (X=  0.0000, Y=  0.0000)
  0.5000;      0.0000000000;      0.0007320644;      0.0000000000
  0.2500;      0.0000000000;      0.0003660322;      0.0000000000
  0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000
 -0.2500;      0.0000000000;     -0.0003660322;      0.0000000000
 -0.5000;      0.0000000000;     -0.0007320644;      0.0000000000
      ELEMENTO   1, SEÇÃO   2 (X=  2.5000, Y=  0.0000)
  0.5000;      0.0000000000;     -0.0003660322;      0.0000000000
  0.2500;      0.0000000000;     -0.0001830161;      0.0000000000
  0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000
 -0.2500;      0.0000000000;      0.0001830161;      0.0000000000
 -0.5000;      0.0000000000;      0.0003660322;      0.0000000000
      ELEMENTO   2, SEÇÃO   1 (X=  2.5000, Y=  0.0000)
  0.5000;      0.0000000000;     -0.0003660322;      0.0000000000
  0.2500;      0.0000000000;     -0.0001830161;      0.0000000000
  0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000
 -0.2500;      0.0000000000;      0.0001830161;      0.0000000000
 -0.5000;      0.0000000000;      0.0003660322;      0.0000000000
      ELEMENTO   2, SEÇÃO   2 (X=  5.0000, Y=  0.0000)
  0.5000;      0.0000000000;      0.0007320644;      0.0000000000
  0.2500;      0.0000000000;      0.0003660322;      0.0000000000
  0.0000;      0.0000000000;      0.0000000000;      0.0000000000
 -0.2500;      0.0000000000;     -0.0003660322;      0.0000000000
 -0.5000;      0.0000000000;     -0.0007320644;      0.0000000000
```

Por fim, são apresentados também os valores das propriedades constitutivas resultantes de cada elemento. O intuito da impressão destas grandezas não é muito prático e serviu mais para fins de conferência da programação.

```
PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS
-------------------------------------------------------------------------------
 EL;                A0;                A1;                A2;                B0;
-------------------------------------------------------------------------------
  1;   276666666666.67;              0.00;    14229166666.67;              0.00;
  2;   276666666666.67;              0.00;    14229166666.67;              0.00;

-------------------------------------------------------------------------------
 EL;                B1;                D0;                Y0;                X0
-------------------------------------------------------------------------------
  1;    14229166666.67;    14229166666.67;    88675213675.21;    88675213675.21
  2;    14229166666.67;    14229166666.67;    88675213675.21;    88675213675.21
```