



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

SÃO CRISTÓVÃO, SE
2022

EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Federal de Sergipe.

Orientador: Prof. Dr. João Paulo Attie

SÃO CRISTÓVÃO, SE
2022

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Nascimento, Evelyn dos Santos
N244a Argumentação no ensino de operações com números inteiros /
Evelyn dos Santos Nascimento; orientador João Paulo Attie. – São
Cristóvão, SE, 2022.
156 f.; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3.
Argumentação. I. Attie, João Paulo, orient. II. Título.

CDU 5:37

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGEICIMA**

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM
29 DE ABRIL DE 2022



PROF. DR. JOÃO PAULO ATTI



PROFA. DRA. MARTA ELID AMORIM MATEU



PROF. DR. EDSON JOSE WARTH

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu Pai Celestial, a quem sustentou e sustenta-me em todos os momentos da minha vida. A fé que carrego em Tuas promessas é o combustível principal para seguir em frente.

Ao meu pai Gilberto e à minha mãe Lucy. Obrigada por serem minha base, por entenderem minhas ausências e sempre estarem incentivando meus projetos. Eu os amo incondicionalmente.

Agradeço aos meus irmãos, Jamily e Lucas, que vivenciaram de perto esse processo e estiveram sempre comigo.

Meu muito obrigada ao meu orientador, João Paulo Attie, pela acolhida desde a graduação, por todos os ensinamentos, incentivo, paciência e compreensão, eles foram basilares para essa consecução. No ensejo, agradeço, também, aos professores do programa que, com suas sugestões e ensinamentos durante as disciplinas, contribuíram para o amadurecimento acadêmico.

Agradeço aos familiares e amigos que sempre estiveram na torcida: minhas madrinhas Si, Teresinha e Cristiana, Tia Maria e minhas primas Mariana e Marina.

Agradeço à equipe do Colégio Monteiro Lobato, aos diretores Dona Cleuza e Seu Roberto pela oportunidade, aos colegas professores e demais funcionários pela acolhida e convivência. E, também, aos meus alunos, os quais ensinaram e ensinam-me muito, todos os dias.

Obrigada aos colegas do curso que compartilharam essa experiência comigo, desde os momentos mais tensos àqueles de descontração, ainda que virtualmente: Narinha, Matheus, Monize – que acompanham-me desde a graduação – e Thiago – apresentado pelo mestrado.

Aos membros da banca examinadora, professora Marta e professor Edson, muito obrigada pela disponibilidade, atenção e cuidado na correção deste trabalho, suas sugestões tanto na qualificação como na defesa foram extremamente importantes para este produto final.

Agradeço também, aos professores que aceitaram participar dessa pesquisa e compartilharam um pouco de suas experiências.

Meu fraterno OBRIGADA a todos!

Resumo: Ao considerarmos o desempenho em avaliações externas, como o PISA, por exemplo, percebemos um enorme contingente de estudantes que não estão conseguindo atingir o nível desejado de proficiência em matemática. Acreditamos não ser possível apontar exclusivamente um responsável por tal situação. No presente trabalho, destacamos duas variáveis fundamentais no processo de ensino, que exercem forte influência na aprendizagem do aluno, que são o professor e o livro didático. O professor, sendo o responsável em mediar o conhecimento a ser ensinado ao aluno e o livro didático, recurso de consulta tanto do aluno como do docente, devem apresentar um sólido conhecimento não abarcando, exclusivamente, conceitos e fórmulas, como também procedimentos e formas de raciocínio que possam justificá-los. Nessa perspectiva, atribuímos à argumentação no ensino de matemática um papel de grande relevância para esse fim, considerando-a como a expressão do raciocínio, além de contribuir para a compreensão dos conhecimentos matemáticos. Na educação matemática, a argumentação pode ser classificada, segundo Sales (2010) e Attie (2016), em duas categorias, explicativa e justificativa e é partir desta caracterização que delineamos o presente estudo. Desse modo, a presente pesquisa tem por objetivo identificar os tipos de argumentos utilizados no ensino das operações fundamentais com números inteiros, a partir de discursos de professores da educação básica e de textos de livros didáticos, indicados pelo Guia do Plano Nacional do Livro e Material Didático, o PNLD, de 2020. Quanto à metodologia, consideramos que nossa pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, com aspectos exploratório e descritivo. Nosso processo de coleta dos dados foi realizado em duas partes, inicialmente com a busca e análise das obras didáticas, em um total de onze livros, e com a posterior aplicação de um questionário e realização de entrevistas semiestruturadas, individualmente e de forma remota, com quatro professores da rede pública de ensino e atuantes no nível do Ensino Fundamental. A partir da análise dos dados coletados, de acordo com a técnica da Análise de Conteúdo, constatamos que, em sua maioria, os autores dos livros didáticos, apesar de apresentarem recursos mínimos para uma argumentação justificativa, mostram uma escassez de repertório em relação à apresentação do conteúdo. Já em relação aos dados obtidos com os professores, observamos dois cenários distintos diante da classe dessas operações. Para a adição e subtração, apontamos que o foco maior está na argumentação justificativa, através do uso de situações contextualizadas para significar tais operações, enquanto que, na multiplicação, há uma inversão nesta postura, em que a concentração reside na argumentação explicativa, atestada pela recorrência diretamente às regras e da falta de uma fundamentação para os procedimentos.

Palavras-chave: Argumentação Justificativa; Ensino de Matemática; Operações com Números Inteiros.

Abstract: When considering performance in external assessments, such as PISA, for example, we notice a huge number of students who are not achieving the desired level of proficiency in mathematics. We believe it is not possible to single out one person responsible for such a situation. In the present work, we highlight two fundamental variables in the teaching process, which have a strong influence on student learning, which are the teacher and the textbook. The teacher, being responsible for mediating the knowledge to be taught to the student and the textbook, a resource for consultation for both the student and the teacher, must present a solid knowledge not exclusively covering concepts and formulas, but also procedures and forms of reasoning that can justify them. In this perspective, we attribute a very important role to argumentation in mathematics teaching for this purpose, considering it as the expression of reasoning, in addition to contributing to the understanding of mathematical knowledge. In mathematics education, argumentation can be classified, according to Sales (2010) and Attie (2016), into two categories, explicative and justificative, and it is from this characterization that we outline the present study. In this way, the present research aims to identify the types of arguments used in the teaching of fundamental operations with integers, from speeches of basic education teachers and texts from textbooks, indicated by the Guide to the National Book and Teaching Material Plan, PNLD, 2020. As for the methodology, we consider that our research can be characterized as qualitative, with exploratory and descriptive aspects. Our data collection process was carried out in two parts, initially with the search and analysis of the didactic works, in a total of eleven books, and with the subsequent application of a questionnaire and semi-structured interviews, individually and remotely, with four teachers from the public school system working at the Elementary School level. From the analysis of the data collected, according to the technique of Content Analysis, we found that, for the most part, the authors of textbooks, despite having minimal resources for a justificative argumentation, show a shortage of repertoire in relation to the presentation of the content. In relation to the data obtained with the teachers, we observed two different scenarios in front of the class of these operations. For addition and subtraction, we point out that the main focus is on the justificative argumentation, through the use of contextualized situations to signify such operations, while in the multiplication, there is an inversion in this posture, in which the concentration resides in the explicative argumentation, attested by the recurrence directly to the rules and the absence of a logic validation for the procedures.

Keywords: Justificative Argumentation; Mathematics Teaching; Operation with Integers.

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEP – Comitê de Ética e Pesquisa

COVID – *Corona Vírus Disease* (Doença do Corona Vírus)

MMM – Movimento da Matemática Moderna

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PIBIC – Programa Institucional de Bolsas de Inciciação Científica

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PNLD – Plano Nacional do Livro e do Material Didático

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UFS – Universidade Federal de Sergipe

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Notação chinesa do número -10724	22
Figura 2: Padrão de Argumento Proposto por Toulmin.....	50
Figura 3: Reta Numérica dos Números Inteiros.....	71
Figura 4: Operação $-6+3$ na Reta Numérica.....	75
Figura 5: Operação $-6-3$ na Reta.....	76
Figura 6: Operação $(-5)+(-4)$ na Reta.....	76
Figura 7: Adição de Números Inteiros na Reta Numérica.....	87
Figura 8: Subtração na Reta Numérica.....	88
Figura 9: Multiplicação entre Números Negativos.....	89
Figura 10: Subtração de Números Inteiros.....	91
Figura 11: Justificativa Formal para o Produto de Dois Números Negativos.....	92
Figura 12: Multiplicação entre dois Números Negativos.....	94
Figura 13: Subtração de Números Inteiros.....	96
Figura 14: Adição a partir de uma Movimentação Financeira.....	98
Figura 15: Adição de Inteiros na Reta Numérica.....	98
Figura 16: Subtração entre Números Negativos na Reta Numérica.....	99
Figura 17: Regras de Sinais da Multiplicação.....	99
Figura 18: Adição de Números Inteiros na Reta Vertical.....	100
Figura 19: Subtração de Números Inteiros.....	101
Figura 20: Adição/Subtração de Inteiros na Reta Numérica.....	103
Figura 21: Multiplicação com Termos Negativos.....	104
Figura 22: Formas de Tratar a Adição com Números Inteiros.....	105
Figura 23: Formas de efetuar Subtração entre Número Inteiros.....	106
Figura 24: Tabela de Multiplicações.....	106
Figura 25: Regra de Sinais na Multiplicação de Números Inteiros.....	107
Figura 26: Diferença entre Números Inteiros na Reta Numérica.....	108
Figura 27: Marcação de Pontos na Reta Numérica.....	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Trabalhos Acadêmicos Analisados.....	30
Quadro 2: Obras Didáticas Analisadas.....	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Multiplicação entre Números Inteiros.....	78
Tabela 2: Multiplicação entre Números Inteiros.....	78

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
SEÇÃO I: SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS.....	21
1.1 – Panorama Histórico	21
1.2 – Dificuldades do Ponto de Vista Educacional	29
1.2.1 – Resultado do Levantamento	31
SEÇÃO II: ARGUMENTAÇÃO	41
2.1 – Retórica, Dialética e Persuasão	41
2.2 – Argumentação e o Modelo de Toulmin.....	49
2.3 – Argumentação, Prova e Demonstração	51
2.4 – Argumentação Explicativa e Argumentação Justificativa.....	56
2.5 – Argumentação nos Documentos Oficiais	58
2.6 – Argumentação no Ensino e na Aprendizagem	64
2.7 – Justificativas para as Operações com os Números Inteiros.....	71
2.7.1 – Adição e Subtração.....	74
2.7.2 – Multiplicação e Divisão	77
SEÇÃO III: METODOLOGIA	80
SEÇÃO IV: RESULTADOS E DISCUSSÕES	86
4.1 – Análise dos Livros Didáticos	86
4.1.1 – Geração Alpha (OLIVEIRA; FUGITA, 2018).....	87
4.1.2 – Convergências (CHAVANTE, 2018).....	90
4.1.3 – Matemática Essencial (PATARO; BALESTRI, 2018)	93
4.1.4 – Trilhas da Matemática (SAMPAIO, 2018)	95
4.1.5 – Apoema (LONGEN, 2018)	97
4.1.6 – A Conquista da Matemática (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018).....	100
4.1.7 – Matemática: Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018)	103
4.1.8 – Teláris (DANTE, 2018).....	105
4.1.9 – Bianchini (BIANCHINI, 2018).....	107
4.1.10 – Araribá Mais (GAY; SILVA, 2018).....	110
4.1.11 – Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2018)	113
4.2 – Acerca das Entrevistas	116
4.2.1 – Impasses dos Estudantes	118

4.2.2 – Argumentos dos Professores para as Operações	119
CONSIDERAÇÕES FINAIS	128
REFERÊNCIAS	134
APÊNDICES.....	141
Apêndice A.....	141
Apêndice B.....	144
Apêndice C.....	145
Apêndice D.....	146
Apêndice E	147
Apêndice F	149
Apêndice G.....	150
ANEXO.....	151

INTRODUÇÃO

Para iniciar esta introdução, opto por utilizar a primeira pessoa do singular a fim de fazer uma breve exposição pessoal, referente à minha formação acadêmica até a entrada no curso de mestrado, bem como do conhecimento com a temática do presente estudo, ou seja, a argumentação no ensino da matemática.

Formada em Matemática Licenciatura, no ano de 2020, pela Universidade Federal de Sergipe – UFS, foi somente neste decurso que ocorreu o primeiro contato com o tema da argumentação no ensino da matemática e esse conhecimento, a partir da inserção no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC. Apesar de desde o primeiro período da graduação ter tido contato com provas e demonstrações de resultados matemáticos, o que era algo novo até então, o trabalho com provas e argumentações voltadas para o ensino básico foram vistos em poucas disciplinas voltadas para a área, com aprofundamento somente naquele programa.

O interesse por tal temática aflorou, principalmente, por encontrar na mesma uma via para responder indagações sobre procedimentos matemáticos que muitas vezes foram, e são, ocultados durante o período escolar e que, até como estudante, também, não tive a curiosidade em buscá-los. Questionamentos acerca do porquê de modos de resolução, que podem torná-la mais compreensível e menos “mágica”.

Em relação ao ensino de matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1998, p. 19) afirmam que há uma “excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão”. Cordeiro e Oliveira (2015), ao analisarem as principais características do processo de ensinar matemática chegam a conclusões semelhantes, ao notarem que ainda predomina uma prática pedagógica baseada na transmissão e na consequente reprodução em exercícios de fixação, pelos alunos, do que foi ditado por seu professor, mesmo que sem atribuição de significados por aqueles.

A despeito das tentativas de parte dos professores e pesquisadores na superação desse modelo, baseado na memorização e na repetição, continuamos imersos em uma cultura de ensino na qual a prática de provar ou justificar é, frequentemente, relegada a segundo plano, com os porquês dos procedimentos matemáticos sendo omitidos e bastando aprender fórmulas e empregá-las nos exercícios para se considerar que se sabe matemática (ao menos a matemática escolar). Além disso, por vezes aparecem alegações de que a demonstração dos

processos já foi realizada por pessoas a quem compete tal função, os pesquisadores em matemática.

Por este ângulo, não é exagerado afirmarmos que a sustentação dos procedimentos realizados, frequentemente, fica por incumbência da autoridade que o professor tem na sala de aula, pois este é considerado o detentor do saber. Logo, sua palavra, se não desperta confiança ao aluno, certamente possui uma força notável. Em relação ao estudante, este muitas vezes dispensa ou não se interessa em aprofundar o conteúdo, e buscar por informações que possam ancorar eventuais argumentos, satisfeitos com dados que mostram que “funcionam”.

De acordo com Nasser e Tinoco (2003), após o Movimento da Matemática Moderna houve o abandono total do raciocínio e das demonstrações no ensino na Educação Básica. Segundo as autoras, a maioria das escolas adota um modelo de ensino onde o aluno é levado a resolver extensivas listas de exercícios repetitivos, que para ele não têm significado algum, os quais consistem em aplicações diretas de fórmulas ou na repetição de técnicas apresentadas pelo professor (CALDATO; UTSUMI; NASSER, 2017, p.75).

Durante o Movimento da Matemática Moderna¹ – MMM – bem como em períodos anteriores, o ensino da matemática foi influenciado² por tendências formalistas, em que o conhecimento dessa área deveria estar assentado em demonstrações lógicas, seja com ênfase no Modelo Euclidiano – conhecida como *Formalista Clássica*, preponderante ao menos até a década de 1950, suas teorias eram expressas e sistematizadas a partir de elementos primitivos, a saber, axiomas, postulados, definições – ou nas Estruturas Algébricas – denominada de *Formalista Moderna*, com influência inicial marcadamente a partir do final da década de 1950, e que valorizava a linguagem, o rigor e a precisão na formalização das propriedades matemáticas (FIORENTINI, 1995).

Em relação aos processos escolares, esse movimento recebeu críticas, pois, ao tentar aproximar a matemática escolar da matemática acadêmica, proporcionava um tratamento mais próximo à teoria que à prática, deixando de considerar que suas propostas estariam distantes do alcance dos alunos da educação básica, principalmente das séries iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1998).

Embora com a tendência formalista as afirmações e propriedades matemáticas não fiquem desprovidas de bases que as validem, segundo Baraldi (1999), ela é exteriorizada, no

¹ Com início após 1950, este movimento internacional é marcado pelas intensas mudanças no currículo da matemática, principalmente para atender as demandas do pós II Guerra Mundial, visto que o ensino dessa disciplina (acrescido das ciências) era visto como fundamental para o progresso científico e tecnológico.

² Concomitantemente à influência dessas tendências, como fala Matheus (2016), importantes e hegemônicas no ensino da matemática, emergiram outras. Como salienta Fiorentini (1995, p. 07), o ensino clássico era privilégio de pessoas intelectual e economicamente “bem dotadas”, enquanto que as classes menos favorecidas recebiam um ensino mais mecânico e pragmático.

ensino de matemática, pela supervalorização de demonstrações rigorosas de teoremas e fórmulas, incitando à manipulação e repetição dessas últimas, como meio de trabalhar com conhecimentos matemáticos, enquanto que a criatividade e as oportunidades para fazer conjecturas e elaborar estratégias alternativas para solução de um problema acabavam sendo inibidas. Assim, quando uma demonstração emerge no contexto da sala de aula, é a visão formalista delas que predomina, com foco na verificação de afirmações e dificilmente associada a “funções que promovam a compreensão de seu significado, seu propósito e utilidade” (DeVILLIERS, *apud* ALFARO-CARVAJAL *et al*, 2019, p.70, tradução nossa).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, a BNCC (BRASIL, 2018), é no Ensino Fundamental que o aluno precisa desenvolver capacidades que lhes permitam identificar oportunidades de empregar conceitos e procedimentos matemáticos para obter soluções de problemas e interpretá-los conforme seu contexto. Nessa conjuntura, esta etapa escolar deve comprometer-se com o desenvolvimento do Letramento Matemático,

definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2018, p. 266).

Conforme Tenreiro-Vieira e Vieira (2013), *raciocinar* envolve a exploração do problema, com a colocação de questões e o conhecimento acerca de suas respostas e também a compreensão e o tratamento com os limites e alcances de conceitos matemáticos; *representar* abrange a interpretação, codificação/descodificação, tradução de situações e objetos matemáticos, de acordo com os contextos e propósitos; *comunicar* integra diferentes formas de expressar e compreender afirmações, sejam em suas formas escrita ou oral; *argumentar* inclui o conhecimento sobre provas matemáticas e a construção, expressão e avaliação de argumentos matemáticos; *formular e resolver problemas* abarca a elaboração de problemas e delineamento de estratégias para solucionar diferentes tipos de questões matemáticas; *usar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas* (o que os autores chamam de *usar ajudas e ferramentas*) refere-se à busca e capacidade para utilizar diferentes recursos nas atividades matemáticas e, além disso, reconhecer suas limitações.

Nesse panorama, o objetivo é alcançar uma aprendizagem com compreensão, isto é, em que os significados dos objetos matemáticos sejam de fato apreendidos e que possam ser efetivamente aplicados tanto na própria matemática, como em situações cotidianas ou em outras áreas do conhecimento. Para além desse aspecto, que os alunos possam envolver-se pessoalmente com essa disciplina, de modo que possam apreciá-la (TENREIRO-VIEIRA;

VIEIRA, 2013) e, também, tentar dissipar a imagem a ela atribuída, como parte de uma produção solitária, realizada por “gênios” e para “gênios”.

Além disso, se levarmos em conta as finalidades para o ensino da matemática citadas, chegamos à conclusão de que a mera reprodução, sem compreensão, torna-se insuficiente. Ratificamos nossa posição, entre outros motivos, a partir do desempenho dos estudantes, materializado nos resultados em avaliações de larga escala, como, por exemplo, no Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA – desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico, OCDE, no qual o letramento matemático é um dos domínios avaliados. Afinal, espera-se que os alunos reconheçam “o papel que a Matemática desempenha no mundo [...] e possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias” (BRASIL, 2019b, p. 98).

A despeito do fato de que uma organização de desenvolvimento econômico se ocupe de uma avaliação educacional, fato que, por si só, já mereceria uma discussão, na última edição do PISA, no ano de 2018, o Brasil ocupou a 71ª posição, dentre os 79 países participantes, obtendo uma média inferior, em 108 pontos, à média dos países da OCDE. Esse cenário revela que,

68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área (INEP, 2019).

Historicamente, os dados dessa avaliação revelam que esse cenário não foi muito diferente em anos anteriores, pois, analisando o período compreendido de 2003 a 2018, o Brasil sempre esteve abaixo do desempenho³ médio dos países participantes (OCDE, 2019).

Através dos resultados dessa avaliação, divulgados em relatórios, a OCDE tem por objetivo fornecer indicadores do cenário do sistema educacional, mostrando problemas que os assolam e possíveis soluções para seu enfrentamento. Esses dados ainda deveriam servir de subsídio aos governos para o desenvolvimento de políticas públicas, com vistas a promover uma educação de qualidade. Retomando uma questão que já ressaltamos, o discurso proveniente da OCDE afirma que a atenção dada à educação reflete a consideração de que esta desempenha um papel-chave para o desenvolvimento e bem-estar econômico e social de

³ Hypolito e Jorge (2020), reforçam a preocupação de Villani e Oliveira (2018), para a análise dos dados dos resultados relativos ao Brasil, pois deve-se levar em consideração a diversidade escolar brasileira, bem como a discrepância cultural e econômica, entre os estados e os próprios municípios.

um país através da aquisição de conhecimentos, competências e atitudes essenciais a tal. Assim, a OCDE afirma que

dá destaque à educação quando vê nesta uma forma de valorização do capital humano, com vistas a “[...] desenvolver as competências e as atitudes que são essenciais para o crescimento econômico, a promoção individual e a redução das desigualdades” (OCDE, 2001). Essa afirmação evidencia a importância dada à educação enquanto um instrumento que está diretamente ligado ao desenvolvimento econômico de um país, permitindo que o investimento feito tenha um retorno com alta rentabilidade (MAUÉS, 2011, p. 77).

Se os exames avaliativos podem ser um meio pelo qual o desempenho dos estudantes é aferido, é em termos desses exames que o trabalho do professor é acompanhado, não somente ele, mas também as próprias escolas e os sistemas educacionais. Conforme Hypolito e Jorge (2020), essas avaliações consistem em um instrumento de regulação do trabalho desse profissional, no qual os mesmos são responsabilizados pela aprendizagem dos estudantes.

Dessa forma, para além da atribuição do professor sobre a aprendizagem do aluno, não seria equivocado estabelecermos uma relação de influência entre o ensino propagado por um e a aprendizagem do outro, já que o docente tem a incumbência de mediar a relação entre o saber, o conhecimento matemático e o aluno. Mas isso não suprime o fato de que ele não é o único, pois questões econômicas, emocionais, cognitivas, de interesses pessoais e, até, aquelas inerentes ao próprio conhecimento matemático (HELIODORO, 2002), por exemplo, interferem na escala dos processos de ensino e de apropriação do conhecimento.

Em consonância com os PCN de matemática (BRASIL, 1998, p. 36), para o exercício do seu papel de mediador, o professor “precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área [...] e a concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis”, pondo em relevância o domínio não só de conceitos e fórmulas, como também de procedimentos e de argumentos que possam fundamentar os conhecimentos matemáticos.

Nesta perspectiva, colocamos em evidência o trabalho com a argumentação no contexto escolar e por isso, delineamos como objetivo do presente estudo identificar os tipos de argumentos utilizados para o ensino das operações com os números inteiros. Para tanto, investigaremos a mediação da argumentação em ambientes escolares, a partir da figura do professor e nas obras didáticas.

Para Leitão (2011), a argumentação abrange a exposição de um ponto de vista mais sua respectiva fundamentação, como também o exame e resposta de opiniões divergentes das nossas, ou seja, os contra-argumentos. De acordo ainda com a autora, recorreremos à argumentação tanto em situações públicas (ou interpessoais) – quando estamos diante de um

público defendendo nossos pontos de vista – como em situações privadas (ou intrapessoais) – quando precisamos tomar decisões e/ou dialogamos internamente com os prós e os contras de uma determinada questão. Em um contexto público, a argumentação configura-se como uma importante ferramenta social, na medida em que um bom argumento pode ter força suficiente para interferir em escolhas, construir e modificar concepções.

A fim de justificarmos nossa escolha também pelo livro didático, argumentamos que este consiste em outra variável fundamental no panorama do ensino e da aprendizagem na educação básica. Depositário de conteúdos e importante veículo de comunicação do saber, esse instrumento didático torna-se igualmente relevante tanto para os alunos quanto para o professor. Para os primeiros, porque constitui-se em um recurso de busca de acesso gratuito e, disponível a todo momento⁴, sendo muitas vezes até o único. Para os professores, frequentemente é a principal fonte de apoio para a organização, o planejamento e a execução de suas aulas, assumindo-os, por muitas vezes, como um manual a ser seguido, o que pode configurar, de acordo com Mateus (2015), uma ênfase dada aos temas como uma escolha do autor e não do docente.

Igualmente, em relação aos conhecimentos do professor, defendemos a importância de que os livros didáticos disponham de conteúdos relevantes, confiáveis e bem fundamentados, com linguagem acessível, principalmente para o aluno, e que, de modo geral, possam promover a compreensão dos conteúdos.

No que concerne ao conteúdo escolhido – operações com números inteiros – destacamos duas justificativas para essa escolha, que consideramos interligadas. A primeira diz respeito à importância atribuída às operações com esses números (juntamente com o conhecimento prévio dos números naturais), visto que são bases para a aprendizagem de conteúdos posteriores além de sua presença em nosso cotidiano. O segundo envolve as dificuldades apresentadas por alunos, durante e até depois da educação básica em compreender seus significados e em operar com esses números, demonstrando uma carência na aprendizagem de alguns aspectos em relação a esse conjunto. A respeito desse último ponto, apresentamos alguns desses embaraços, em uma das seções deste trabalho, apontados por pesquisadores em investigações acerca dessa temática. Além disso, iremos ver que, mesmo historicamente, houve dificuldades na compreensão e aceitação desse conjunto e dessas operações, principalmente, a multiplicação entre dois números negativos.

⁴ A expressão “disponível a todo momento”, funda-se na perspectiva que todos os alunos da escola pública recebem esse material didático no início do ano letivo, como assegura a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996).

Isto posto, enfatizamos que nosso objetivo no presente estudo é responder aos seguintes questionamentos:

Quais os tipos de argumentos são utilizados no ensino das operações com números inteiros por professores de matemática do Ensino Fundamental?

Quais os tipos de argumentos apresentados por autores de livros didáticos, indicados pelo Guia do Plano Nacional de Livro e do Material Didático (PNLD), no que concerne ao conteúdo das operações com números inteiros?

A fim de responder ao primeiro questionamento, realizamos uma pesquisa com professores do Ensino Fundamental, para tentarmos identificar em seus discursos quais argumentos dispunham acerca das operações com os números inteiros. A fim de fazer a mesma identificação nas obras didáticas, para o segundo questionamento, analisamos aquelas indicadas pelo Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD – de 2020.

Para apresentação de nossas propostas, nosso estudo encontra-se dividido em quatro seções, além desta Introdução, das Considerações Finais, das Referências Bibliográficas, dos Apêndices e Anexo.

A seção I foi fragmentada em duas subseções. Na primeira, apresentamos o processo histórico da aceitação dos números inteiros, de modo a destacar essa difícil caminhada e a consolidação da justificativa para as regras de sinais que regem as operações com esses números. Na segunda, expomos algumas dificuldades com as operações, apresentadas por alunos da educação básica e apontadas por pesquisadores em trabalhos acadêmicos.

Na seção II, dividida em sete subseções, apresentamos nosso referencial teórico. Iniciamos com um percurso histórico a respeito da argumentação, desde suas primeiras práticas até a consolidação de teorias que tornaram-se importantes linhas de pesquisa. Posteriormente, buscamos por autores que fizeram apontamentos acerca das relações ou distinções entre termos que são relacionados à prática de fundamentação dos conhecimentos matemáticos, tais como *argumentação*, *prova* e *demonstração* expondo em seguida nossa posição a respeito dos mesmos. Logo após, apresentamos distinções acerca dos conceitos de *Explicação* e *Justificação*, no contexto do ensino da matemática, visto que é a partir dessas diferenças que Sales (2010) e Attie (2016) chegam às categorias de *Argumentação Explicativa* e *Argumentação Justificativa*, que serão utilizadas para a classificação dos dados obtidos em nossa investigação. Apresentamos, também, alguns apontamentos acerca da imersão da argumentação nos documentos oficiais e no contexto do ensino e da aprendizagem da matemática, salientando suas potencialidades, assim como os conhecimentos e fatores de

influência no discurso do professor. Finalizando esta seção, expomos alguns possíveis argumentos justificativos para a abordagem das operações fundamentais com os números inteiros.

Na seção III, descrevemos nossas opções metodológicas e o percurso que foi adotado para a realização da presente investigação, adiantando que a coleta de dados com os professores ocorreu através da realização de questionários e, principalmente, de entrevistas semiestruturadas, individuais e de forma remota, e com os livros, a partir das recomendações do Guia do PNLD de 2020. Nos dois casos, nossa apreciação foi realizada a partir da técnica da Análise de Conteúdo (Bardin, 2016).

No espectro deste estudo é relevante mencionar o contexto de sua construção. Além da realização da coleta dos dados de forma remota (a qual detalhamos mais à frente), todo o curso do mestrado foi realizado de tal forma, algo que não estava previsto, visto que o mesmo foi projetado para sua realização presencial. Após a primeira semana de aula, devido à pandemia da doença do novo corona vírus – Covid-19 – e consequente fechamento de escolas, universidades e diversos estabelecimentos, vivenciamos a necessidade de mudanças e reinvenções para conseguirmos dar prosseguimento às nossas atividades, inclusive acadêmicas.

Na seção IV fazemos a apresentação da identificação das categorias de argumentação tanto nas análises dos livros didáticos quanto em relação às entrevistas e questionários realizados com os professores participantes da pesquisa.

Por fim, apresentamos nossas Considerações Finais acerca da presente investigação, as Referências Bibliográficas, os Apêndices e o Anexo do trabalho.

SEÇÃO I: SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS

Temos por pretensão, na presente seção, elencar fatos que compõem o enredo histórico dos números negativos, desde suas primeiras aparições até a sua real aceitação como uma entidade matemática, o que demandou um longo período. Ademais, destacamos dificuldades percebidas em estudantes da educação básica, seja em testes ou situações didáticas, salientadas em pesquisas que tem tal conteúdo como foco.

O conhecimento acerca da história envolta nos conteúdos matemáticos torna-se pertinente ao professor, não só para melhor compreendê-los, como também para obter indícios de possibilidades para sua inserção em sala de aula, seja pelo emprego da própria história como uma metodologia de ensino, para construção dos porquês matemáticos e/ou para a elaboração de materiais (PONTES, 2010). O estudo histórico torna-se relevante, ainda, segundo aponta D'Ambrósio (1989), para ter ciência acerca das dificuldades intrínsecas aos conceitos trabalhados, e, neste caso, pode-se estreitar possíveis vínculos entre as dificuldades que foram enfrentadas por matemáticos anteriores com os embaraços apresentados por alunos em seu processo de aprendizagem (MORAIS, 2010; PONTES, 2010; HILLESHEIM, 2013).

Se, por meio dos erros expostos, temos evidências das interpretações desenvolvidas por discentes (D'AMBRÓSIO, 1989) acerca de determinados temas, é por meio deles que também podemos ter consciência de suas possíveis dificuldades. A familiaridade com estas contribui, outrossim, para que o professor possa direcionar sua prática, na busca por meio de saná-las, visto que nossos esforços precisam estar inclinados, sobretudo, para a promoção de uma aprendizagem efetiva do educando.

1.1 – Panorama Histórico

Consideramos que os conceitos matemáticos não surgiram inadvertidamente, sem uma circunstância que acompanhasse seu desenvolvimento. Essa origem é, em geral, estimulada por necessidades culturais, internas e externas à própria matemática. Ademais, esses conhecimentos nem sempre eram instaurados de forma imediata, isto é, em uma progressão linear, isenta de incertezas e objeções, como pode transparecer ao observarmos seu produto final. O olhar ao processo histórico, portanto, pode fornecer indicações para pôr em questionamento essa ideia comumente associada à imagem de um desenvolvimento histórico unidimensional da matemática e perceber que seu progresso é caracterizado por um constante

processo de idas e vindas. Assim foi o percurso histórico dos números negativos, como salientam Hillesheim e Moretti (2016).

De um lado, consideramos importante apontar algumas aptidões humanas que, de acordo com a visão de alguns historiadores da matemática (EVES, 2011; CARAÇA, 1951; DIEUDONNÉ, 1990) puderam ser as responsáveis por alguns tipos de representação numérica. Assim como a contagem e a medida teriam gerado entre os indivíduos a necessidade de uma representação mais exata das quantidades em questão, consolidando ao longo da história conjuntos como o dos números naturais e o dos racionais, respectivamente, poderíamos atribuir ao aparecimento do comércio e das dívidas a imprescindível necessidade de uma representação quantitativa que pudesse traduzir com precisão os contingentes envolvidos, gerando um novo conjunto numérico.

Em contrapartida, o reconhecimento dos números negativos em problemas algébricos revela outra demanda inerente à matemática para seu surgimento. Neste quesito, até que suas regras fossem fundamentadas, processo custoso e permeado de lacunas, demandou bastante tempo para que esses números fossem aceitos. Evitados por uns e tantos outros que não hesitavam em utilizá-los, muitas vezes não tinham claras ideias a respeito das demonstrações que pudessem fundamentar suas regras.

Acredita-se que foi na China Antiga⁵ que esses números foram registrados pela primeira vez, em matrizes dos coeficientes de sistemas de equações lineares, provindas de problemas referentes ao cotidiano dos matemáticos chineses (STRUICK, 1992 *apud* SÁ; ANJOS, 2011). É nesta civilização que é introduzida, também, uma notação para os negativos. Segundo Eves (2011), Le Yeh, o agente de tal inserção, os representou inserindo-se uma diagonal no último dígito do número escrito, conforme é exemplificado na figura 1, a partir da representação do número **-10724**. Apesar de calcularem com esses números, utilizando-se dois conjuntos de barras, um vermelho e outro preto, para os números positivos e negativos, respectivamente, recusavam-se a aceitá-los como solução das equações (BOYER, 1974; HILLESHEIM; MORETTI, 2016) e não conceberam esses números como entidades matemáticas independentes (FOSSA; ANJOS, 2007).

Figura 1: Notação chinesa do número - 10724



Fonte: EVES, 2011, p. 246.

⁵ O período é incerto, mas segundo Medeiros e Medeiros (1992), os negativos já apareciam na obra chinesa *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, cerca do século III a.C.

Mas é na Grécia, por volta do século III d.C., que emergem pela primeira vez as regras de sinais com os números inteiros, a partir de uma afirmação redigida por Diofanto de Alexandria, em sua *Aritmética*⁶: “o que está *em falta* multiplicado pelo que está *em falta* dá o que é positivo; enquanto que o que está *em falta* multiplicado pelo que é positivo, dá o que está *em falta*” (DIOFANTO *apud* GLAESER, 1985, np, grifos do autor), ainda que tais entidades não sejam mencionadas (HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

A Grécia, reconhecida por seus grandes matemáticos, responsáveis por assentarem tal ciência em uma estrutura axiomática, tornando-a mais abstrata e oferecendo rigorosas demonstrações para seus objetos em estudo, não apresentaram uma demonstração para as regras de sinais ($-x - = +$) e ($-x + = -$), embora tivessem conhecimento e fizessem uso delas. Além disso, Diofanto também não reconhecia os números negativos de forma isolada e, quando esses cálculos eram conduzidos a soluções negativas, elas eram consideradas *falsas raízes* (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992), e somente os números racionais positivos eram admitidos como resposta (EVES, 2011). A falta de uma demonstração geométrica para estes números é apontada como o que impedia que os gregos os considerassem como tais (HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

Na Índia, podemos identificar posições distintas no que tange ao uso e aceitação de tais números. Brahmagupta, por exemplo, exímio matemático indiano do século VII, admitiu todas as soluções de uma equação quadrática, ainda que uma delas fosse negativa; a sistematização aritmética dos números negativos e do zero é vista pela primeira vez em uma de suas obras (BOYER, 1974); e atribui significado aos inteiros, associando-os a fortunas (números positivos) e débitos (números negativos) (SÁ; ANJOS, 2011). Sem apresentar mais detalhes, Medeiros e Medeiros (1992), fundamentados em Kline (1987), afirmam que esta última aplicação é base para a formulação das regras das operações aritméticas com esses números. Esta aceitação, entretanto, parece não ter ocorrido de forma branda por todos os indianos. Bhaskara (1114-1185), por exemplo, mostrou-se resistente diante de uma raiz negativa e a considerava inadequada. Além de levar em conta a não aceitação de muitos indianos em relação às raízes negativas, Bhaskara ainda assume – sem apresentar definições, axiomas ou teoremas – que esses números não podem ser raízes de uma equação por não serem um quadrado (SÁ; ANJOS, 2011).

⁶ Tal obra não consistia em um tratado sobre a álgebra e nem oferecia uma sistematização de suas operações. Com cerca de 150 problemas algébricos resolve-os limitando-se a exemplos numéricos e, talvez, intentava-se generalizar um método. Além de não buscar todas as soluções possíveis de um problema, dentre as raízes positivas encontradas, apenas a maior era considerada (BOYER, 1974).

Os conhecimentos matemáticos dos gregos e dos indianos também chegaram aos árabes, e esses traduziram muitos trabalhos daqueles, contribuindo para que pudessem ser conservados e dos quais teriam se perdido se não fossem essas traduções. Portanto, as regras que norteiam os “números com sinais” (BOYER, 1974, p. 169) eram perceptíveis a eles, o que, entretanto, não significou a aceitação de tais números, rejeitando as raízes e grandezas negativas (BOYER, 1974; HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

No início do século XII, segundo Boyer (1974), para um indivíduo europeu que pretendia ser um verdadeiro matemático, era necessário que dispusesse de um bom conhecimento da língua árabe. Nesse ínterim, a Europa transita em direção a uma nova perspectiva, marcada pela série de traduções de obras para o latim – no início, principalmente das árabes.

As contribuições indianas, inclusive acerca dos números negativos, chegam aos europeus através dos árabes, mas sua disseminação não ocorre de forma tranquila (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992). De fato, a ideia de subtrair um número maior de um menor ainda não estava clara e soava como uma mágica entre as pessoas. Sendo assim, para que esse processo pudesse tornar-se admissível

foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 7 menos 5 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5 (SINGH, 1972 apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, np).

É no *contexto comercial* que registra-se pela primeira vez a utilização dos símbolos de “+” e “-”, especificamente em 1489, na obra *Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, de Johann Widman. A princípio, eram utilizados para indicar os excessos e faltas de medidas nos armazéns. Mais à frente é que é adotado o sentido atual, ou seja, para a realização de operações (BOYER, 1974). Dentre as diferentes explicações atribuídas a essa representação, Eves (2011, p. 298), destaca a possibilidade de ser uma “contração da palavra latina *et*, que era usada frequentemente para indicar adição”, para o primeiro, e “é possível que o segundo desses sinais decorra da abreviação $\overline{m}$ para menos”.

Não obstante a inevitável aparição dos negativos em cálculos algébricos e seu crescente uso, eles ainda não eram admitidos por muitos matemáticos da Idade Média. Adentra-se a Idade Moderna e a aceitação desses números no corpo da matemática ainda encontra-se limitada. Ainda que fossem reconhecidos, sem definições claras acerca de sua natureza, eles eram considerados, entre alguns, como “falsos”, “absurdos”, “irreais”.

O matemático francês Nicolas Chuquet, por exemplo, admitia expoentes, tanto em sua forma positiva, como também na negativa (EVES, 2011) e, pela primeira vez, pode-se vislumbrar um número negativo expresso isoladamente em uma equação algébrica ($4x = -2$) (BOYER, 1974). O algebrista alemão Michael Stifel, conhecia as propriedades concernentes aos números negativos, mas não aceitava-os como raízes de uma equação (HILLESHEIM; MORETTI, 2016). Girolamo Cardano (1501-1576) não deixou os negativos passarem despercebidos ao resolver equações cúbicas, entretanto, ao deparar-se com uma equação em que seu resultado conduziria a um número negativo ou irracional, dizia simplesmente que não era possível resolvê-las (BOYER, 1974). Embora, de alguma forma, os negativos fossem notados por parte desses matemáticos, sua aceitação não era admitida. Chuquet e Stifel os chamavam de *números absurdos* e Cardano de *números fictícios* ou *números falsos*, enquanto que os números naturais, frações positivas e alguns racionais eram os *números verdadeiros* (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Conforme Glaeser (1985), neste decurso (até o fim do século XVIII), os números negativos não haviam conquistado o status de número e, portanto, houve famosos matemáticos que ainda demonstravam-se céticos em relação a eles. Sua inevitável presença nos cálculos fizera com que esses matemáticos se debruçassem com a questão de como “livrar-se” deles, caracterizando o que o autor, chama de *sintoma de evitação*.

René Descartes⁷ (1596-1650) também reputou as “raízes negativas como sendo ‘falsas’, por considerá-las ‘menores que nada’ e desenvolveu a transformação das raízes negativas em positivas” (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, np, destaques do autor). Em sua obra *La géometrie*, ele dedica um espaço para a instrução de como livrar-se dessas raízes falsas (GLAESER, 1985).

Pierre Fermat (1601-1665) demonstra tamanha insatisfação com tais números que solicita ao seu amigo, Jacques de Billy, que compusesse recomendações sobre como proceder diante de soluções negativas em equações diofantinas e apresentar um método para torná-las aceitáveis, pelo menos em alguns casos (GLAESER, 1985).

François Viète (1540-1603) não aceitava que os negativos pudessem ser raízes das equações (HILLESHEIM; MORETTI, 2016) e ainda considerava que esses números não apresentavam significado intuitivo e nem físico (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992). O

⁷ Conforme Glaeser (1985), o sistema de coordenadas cartesianas, que hoje é relacionado a Descartes, não foi representado por ele como o conhecemos, ou seja, com o eixo das abscissas variando de $-\infty$ a $+\infty$, mas como duas retas tomadas separadamente e com sentido oposto (uma para os positivos e outra para os negativos).

símbolo de “-”, que já aparecia em seus trabalhos, era empregado, apenas, em operações entre os números positivos (*Idem*).

O algebrista Thomas Harriot (1560-1621) não só desconsiderava as raízes negativas, mas acreditava ir mais além, ao pensar que tinha provado essa impossibilidade, isto é, que não era possível que esses números pudessem ser raízes (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

No sentido de combate aos números negativos, Jean-le-Rond d’Alembert (1717-1783) afirmou que, quando ocorre de se alcançar uma solução negativa durante a resolução de um problema, isso significa que durante a hipótese foi tomado como verdadeiro o que, na verdade, era falso e seu oposto é que é a solução que se quer encontrar (*Idem*).

Entre aqueles que hesitaram em relação aos negativos e aqueles que adotaram suas regras de sinais sem compreendê-las ou demonstrá-las – convencidos pela eficácia dos cálculos – é possível destacar matemáticos que empreenderam esforços em busca de argumentos que pudessem esclarecer o conceito e justificar os procedimentos operatórios entre esses números. Embora nem todos obtiveram sucesso desejado nessa tentativa, aos poucos novas concepções iam sendo incorporadas ao uso (SÁ; ANJOS, 2011). Para Hillesheim e Moretti (2016), essa busca foi motivada pelo incômodo que esse assunto estava causando nos matemáticos. Talvez pela falta de provas claras a um conteúdo, que parecia trivial, nos cálculos, mas não em seu caráter isolado.

Simon Stevin (1540-1620) intentou a proposição de uma “explicação” para as regras de sinais, através do produto entre duas diferenças. Entretanto, a mesma está limitada a um exemplo particular e ancorada no próprio dado que se quer justificar, isto é, a regra é empregada transitoriamente na passagem das informações (HILLESHEIM; MORETTI, 2016). Para além desse aspecto, o êxito nos cálculos é suficiente para justificar tais regras e tornar a demonstração verossímil. É como se apenas mostrasse que, “se dá certo para esse exemplo, dará certo com todos!”. Stevin empreende, ainda, uma demonstração geométrica, que pode ter sido, de acordo com Glaeser (1985), passível de ser base para generalizar aquele produto. Todavia, não há um posicionamento desse reputado matemático a respeito dos números negativos isolados, nem como representação de quantidade⁸ e o mesmo apresenta, ainda, um “sintoma de evitação” ao pleitear artifícios para abdicar do uso desses números (GLAESER, 1985).

MacLaurin, em 1748, destaca-se por iniciar uma aceitação dos números negativos. Segundo Glaeser (1985), este matemático não vê as quantidades negativas como menos reais

⁸ Segundo Stevin, número é o que se pode explicar uma quantidade (GLAESER, 1985).

que as positivas, mas tomadas em sentido oposto. Entretanto, não as considera isoladamente, pois sua existência, ainda, só procede por comparação (*Idem*) e fazendo uso da propriedade distributiva em relação à adição, MacLaurin comunica uma justificação para as regras de sinais que regem a operação multiplicativa. Seu raciocínio, em uma direção formalista, revelou-se bem à frente do que se tinha proposto até o momento, mas esse progresso não significou o fim das incompreensões acerca do assunto, pois sua teoria dos números relativos ainda não estava livre de todos os obstáculos que a circuncidavam. Além disso, a obscuridade ainda existente entre o *zero absoluto* e o *zero origem* precisava ser ultrapassada (HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

Leonhard Euler (1707-1783), a fim de fornecer argumentos que pudessem comprovar os cânones impostos, principalmente para os principiantes, adota a metáfora da dívida e a ideia da multiplicação como a soma de parcelas iguais para justificar a multiplicação entre um número positivo e um negativo. Para o caso contrário, emprega a propriedade comutativa. Já a multiplicação entre dois números negativos, do tipo $(-a) \times (-b)$, tem a convicção de “que o valor absoluto é ab . Trata-se, portanto de decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a) \times b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é a de que $(-a) \times (-b) = ab$ ” (GLAESER, 1985, np). Sua argumentação, contudo, não atingiu o rigor buscado pelos matemáticos e é considerada carente de uma base mais sólida. Esse matemático, que representava os números negativos por uma letra precedida do sinal de “-”, não apresentava ideias claras acerca do conceito dos números negativos e não conseguia entendê-los como sendo uma quantidade menor que zero (GLAESER, 1985; HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

De uma perspectiva matemática, a justificação de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) – que apresenta pontos de semelhanças com a de Euler – representa um avanço em relação à deste matemático, visto que “consegue avançar no aspecto referente à demonstração da propriedade distributiva e o desapego a um modelo físico. Mesmo assim, Laplace não consegue propor uma extensão formal para os números relativos” (HILLESHEIM; MORETTI, 2016, p.248).

As primeiras confusões acerca dos sinais de “+” e “-”, com sentidos operatório e predicativo, surgem com Augustin Cauchy (1789-1857). Isso porque ele emprega esses símbolos antes dos números para indicar ações de crescimento ou diminuição entre grandezas, para o primeiro sentido, como também, para denotar o estado de uma quantidade, ora positiva (+) ora negativa (-), na segunda perspectiva. Mas suas próprias definições entraram em dissonância ao tentar justificar as propriedades das regras de sinais com os números relativos, pois as propriedades aditivas e multiplicativas não foram abordadas da mesma forma, sendo

as primeiras assentadas no modelo metafórico e as segundas carentes de um argumento razoável, sendo portanto apresentadas de forma categórica (GLAESER, 1985; HILLESHEIM; MORETTI, 2016).

A superação dos últimos obstáculos inicia-se com os trabalhos de George Peacock (1791-1858) e finda com Hermann Hankel (1839-1873). A partir de Medeiros e Medeiros (1992), pode-se inferir que o caminho tomado pelo primeiro influenciou a mudança nas atitudes e pontos de vista dos matemáticos, pois, afastando-se do interesse em apresentar um modelo concreto, aproxima-se de questões que põem a forma e a estrutura lógica como protótipos.

Essa mudança de perspectivas pode ser compreendida por meio de seu *Princípio de Permanência das Formas Equivalentes*, no qual as regras da *álgebra aritmética* – as operações eram realizadas apenas com os números inteiros positivos – são estendidas para a *álgebra simbólica* – adota-se as regras anteriores, mas suas restrições são removidas. Por esse princípio, em uma aritmética composta pelos números positivos e negativos, as leis fundamentais que valiam para os primeiros deveriam ser preservadas e, assim, valer para os segundos. Essa necessidade de preservação propicia, a partir de então, a compreensão de que as regras de sinais para os números negativos não podem ser provadas (COURANT; ROBBINS *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992), mas sim, justificadas (POMMER, 2010).

Por fim, podemos situar na segunda metade do século XIX a etapa em que pode-se dizer que os entraves que impediam a legitimação dos números inteiros negativos, na comunidade dos matemáticos, são suplantados e ocorre a sua fundamentação e aceitação. Hankel sem intenção, ou ao menos sem intenção direta, estava a contribuir para esclarecer um caso que intrigara os matemáticos há, aproximadamente, uns quinze séculos, em sua obra *Teoria dos Sistemas dos Números Complexos* (1867)⁹.

Conforme Glaeser (1985), ver os números negativos como inventados ou imaginados, e não como descobertos, foi um dos diferenciais de Hankel em relação a outros matemáticos. Além disso, ele afastou-se da busca de soluções na natureza e assumiu uma postura formal, fundamentando as regras de sinais da multiplicação em normas já existentes na matemática, que sucedem-se da perspectiva de manter uma consistência interna da matemática (HILLESHEIM; MORETTI, 2016). Dito de outra forma, ele estendeu as propriedades multiplicativas com $\mathbf{R}^+$ para $\mathbf{R}$, obedecendo sempre a seu *Princípio de Permanência das Leis Formais*, no qual “a estrutura algébrica procurada deve ter boas propriedades” e

⁹ É possível perceber que sua obra não foi dedicada ao estudo dos números relativos e sim, para a formalização dos complexos. Os números relativos foram abordados como tema preliminar do seu conteúdo principal.

fundamentado no seguinte teorema: “a única multiplicação em $\mathbf{R}$, que estende a multiplicação usual em $\mathbf{R}^+$, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais” (GLAESER, 1985, np). Segue sua demonstração:

$$\begin{aligned} 0 &= a \times 0 = a \times (b + \text{op.}b) = a \times b + a \times (\text{op.}b) \\ 0 &= 0 \times (\text{op.}b) = (\text{op.}a) \times (\text{op.}b) = a \times (\text{op.}b) \\ \text{Donde: } (\text{op.}a) \times (\text{op.}b) &= ab \\ \text{Em que, op.}b &= \text{oposto de } b \text{ (GLAESER, 1985, np).} \end{aligned}$$

Se a compreensão da existência de números menores que zero, assim como de suas regras operatórias, demandou um longo tempo para renomados matemáticos, não é insólito que as crianças carreguem dificuldades semelhantes, conforme nossa hipótese na abertura desta seção. Tais dificuldades podem ser apontadas na baixa assimilação desse conteúdo entre os estudantes e pelos desafios com os quais os professores da educação básica deparam-se em seu cotidiano de ensino, na tentativa de promover a abstração desse conteúdo, principalmente de suas operações. Podemos dizer que as dificuldades vivenciadas por aquela comunidade, conforme salienta Pontes (2012), ainda não foram totalmente suplantadas no contexto escolar.

Dessa forma, se foi preciso uma justificativa plausível para que as incompreensões acerca das regras para as operações com os números inteiros chegassem ao fim entre os especialistas, apontamos que o mesmo deve ocorrer nas salas de aulas. Uma vez que os textos, que são seguidos pela maioria dos professores, tendem a fazer uma exposição matemática de forma *limpa, clara e estética*, acabam por ocultar, evitar ou dissimular “um grande número de idéias [*sic*] matemáticas que são de extrema importância para o aprendiz de matemática” (RAUL NETO, 1995, p.08).

À luz das questões citadas anteriormente, na subseção seguinte, apresentamos um levantamento sobre pesquisas que versam sobre os números inteiros, a fim de obter um breve panorama a respeito das dificuldades que mais acometem os estudantes da educação básica a respeito deste conteúdo.

1.2 – Dificuldades do Ponto de Vista Educacional

Em meados do mês de setembro, do ano de 2021, realizamos uma busca na página da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD – com o intuito de conhecer pesquisas produzidas no Brasil que apresentassem dados sobre possíveis dificuldades ou incompreensões, enfrentadas por estudantes, em relação ao conjunto dos números inteiros.

Inicialmente restringimos nossa busca somente ao campo do título e utilizamos os descritores “*números inteiros*”, “*números negativos*” e “*números relativos*”, a fim de identificar uma maior variedade de trabalhos que abordavam o mesmo conteúdo. Em meio a um total de 84 (oitenta e quatro) trabalhos encontrados (57, 14 e 13, respectivamente, com as palavras-chave), a princípio, foram descartados aqueles estudos que, mediante a leitura do título e/ou do resumo, não estavam explicitamente concatenados ao nosso propósito, dentre eles, os relacionados à matemática pura e aplicada, os direcionados a crianças com síndrome de down (um deles), ou à análise de livros didáticos, em que o conteúdo surgia em segundo plano, como também, alguns que não estavam relacionados à matemática ou que apareceram mais de uma vez em meio às buscas, restando 43 (quarenta e três) deles, que mantinham ligações com o Ensino de Matemática ou com a Educação Matemática.

Refinamos ainda mais esses dados encontrados e decidimos por manter apenas os trabalhos que estavam mais próximos do nosso propósito, isto é, que apresentavam indícios de dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação ao conteúdo operações no conjunto dos números inteiros. Assim, excluímos aqueles estudos que não apresentavam essa informação no título, no resumo ou nas considerações finais/conclusão, permanecendo 11 (onze) trabalhos, que encontram-se sintetizados no quadro 1.

Quadro 1: Trabalhos Acadêmicos Analisados

AUTOR/ANO	TÍTULO DA PESQUISA	PROGRAMA DE PESQUISA – INSTITUIÇÃO DE ENSINO	TIPO DO TRABALHO
Renata Siano Gonçalves (2007)	Um estudo com os números inteiros usando o programa <i>Aplusix</i> com alunos de 6ª série do ensino fundamental	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Pontifícia Universidade Católica – São Paulo	Dissertação
Pércio José Soares (2008)	O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Pontifícia Universidade Católica – São Paulo	Dissertação
Anuar Daian de Moraes (2010)	Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Dissertação
Francisco Tavares da Rocha Neto (2010)	Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no Ensino Fundamental	Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Federal do Ceará	Dissertação
Mércia de Oliveira Pontes (2010)	Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números inteiros	Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte	Tese
Evanilson Landim Alves (2012)	Menos com menos é menos ou é mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos de ensino regular e da EJA	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco	Dissertação

Maristela Alves Silva (2012)	Elaboraões de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – Universidade Federal de São Carlos	Dissertação
Selma Felisbino Hillesheim (2013)	Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais	Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – Universidade Federal de Santa Catarina	Dissertação
Cristiano Cardoso Pereira (2014)	Números relativos: uma proposta de ensino	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Dissertação
Francisco Rosiglei do Rêgo (2014)	As dificuldades dos alunos da EEM Virgílio Correia Lima em operações básicas com números naturais, inteiros e racionais	Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal do Ceará	Dissertação
Daniel Fernandes da Silva (2017)	O jogo como recurso pedagógico de ensino: uma proposta para os números relativos	Programa de Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências – Universidade de São Paulo	Dissertação

Fonte: Autora, 2022.

Um fato que nos chamou a atenção durante essa investigação foi o considerável número de trabalhos vinculados a programas de mestrado profissional, que propunham-se a sugerir propostas didáticas para o ensino do presente conteúdo. Concomitantemente a essas intervenções de ensino, há aqueles que utilizaram-se de instrumentos de coleta de dados a priori e/ou a posteriori à elaboração e/ou aplicação. Dentre essas ferramentas, encontravam-se testes diagnósticos e a análise de livros didáticos, que norteiam a prática do professor. Os registros dos alunos e do professor, no decorrer da aplicação também serviram de base para a análise de alguns desses dados. Desse modo, foi possível ver que determinados trabalhos, de alguma forma, catalogavam as informações que procurávamos.

1.2.1 – Resultado do Levantamento

Segue a síntese dos estudos examinados, na qual apresentamos informações acerca do foco da pesquisa, dos sujeitos participantes e das considerações que respondem à nossa problemática, ou seja, as dificuldades de alunos acerca do conteúdo dos números inteiros.

Ao estudar as soluções apresentadas por oito alunos que cursavam a 6ª série do Ensino Fundamental, da Rede Estadual de Ensino de São Paulo, em dois problemas que envolvem as operações de adição e subtração envolvendo os números inteiros, através do programa *Aplusix*¹⁰, **Gonçalves (2007)**, observou de que modo esses alunos os representaram

¹⁰ Ferramenta computacional, que entre suas funções, auxilia na resolução de cálculos numéricos e algébricos. O mesmo auxilia o professor na criação de exercícios, bem como no acompanhamento dos processos percorridos

numericamente e o tratamento a eles conferidos, ou seja, no que concerne aos cálculos com essas operações. Notou-se que os alunos apresentaram melhores desempenhos na representação de um dos problemas¹¹, porque este, possivelmente, fazia alusão a uma temática a eles familiar. No problema, a operação com tais números demonstrou-se mais complexa que a sua conversão para o registro numérico. Dentre os erros cometidos pelos alunos ao operar com os inteiros, a autora destaca a desconsideração dos sinais negativos em expressões numéricas, de modo que, independente do sinal, todos os números são somados. A autora, ao fazer suas considerações, levanta um questionamento acerca das dificuldades enfrentadas por muitos alunos em trabalhar com os números negativos, já que eles “estão tão presentes na vida dos alunos” (GONÇALVES, 2007, p. 82), seja nas temperaturas, nos jogos ou nos saldos bancários. Nesta perspectiva, a mesma compreende que “provavelmente um dos empecilhos é o professor apresentar os Números Inteiros com atividades descontextualizadas, focalizando o ensino nos estudos das operações” (*Idem, Ibidem*).

Soares (2008), teve por objetivos sondar o potencial “de se reintroduzir os números inteiros negativos a partir de uma intervenção de ensino pautada em resolução de problemas, utilizando jogos como recurso didático” e “verificar a compreensão dos alunos sobre as operações (adicionar e subtrair) com números inteiros positivos e negativos, com base no trabalho realizado com o livro didático” (SOARES, 2008, p. 21). Para esse alcance, desenvolveu sua pesquisa com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo, que foram divididos em dois grupos, Grupo Experimental e Grupo Controle, sendo que apenas o primeiro participou de todas as etapas, ou seja, a diagnóstica (pré e pós-testes) e a intervenção de ensino, enquanto que o segundo participou apenas dos testes. O pesquisador aponta a resolução de expressões numéricas que envolvem os números inteiros negativos, principalmente aquelas que envolvem parênteses, como uma persistente dificuldade em ambos os grupos e testes (pré e pós). Após a intervenção didática, Soares (2008), percebe alguns avanços no que concerne ao desempenho dos alunos do Grupo Experimental, como, por exemplo, na representação dos números negativos na reta numérica, na realização das operações citadas anteriormente de forma mais concreta e significativa e no estabelecimento de relações entre a linguagem matemática e situações concretas.

Morais (2010), inicia seu estudo a partir do questionamento de como Objetos Digitais de Aprendizagem podem promover a aprendizagem das operações com os números inteiros.

pelos alunos nestes. Além disso, com seu sistema de autocorreção, o aluno é avisado se, e onde, sua resolução está errada.

¹¹ O primeiro problema estava relacionado a um jogo de cartas, enquanto que o segundo a um painel de elevador.

Para tanto, desenvolve e aplica um experimento – ou uma proposta didática – em duas turmas de 6ª série, em dois momentos¹²: o primeiro em 2008, no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e o segundo em 2010, em uma escola privada no município de Guaíba – RS. Para a execução de tal proposta, as turmas foram divididas em dois grupos, de modo que, enquanto um estava desenvolvendo atividades no laboratório de informática, o outro desenvolvia atividades na sala de aula. Além disso, antes do contato dos alunos com o Objeto Digital de Aprendizagem, dois pré-testes foram desenvolvidos.

Acerca das dificuldades com a comparação dos números inteiros, o autor nota que os alunos não apresentam tantos impasses para determinar qual é o número maior e qual o menor. Suas dúvidas emergem, entretanto, diante da ordenação de números decimais, ou com “números muito grandes”, e dos símbolos que estabelecem ordem, ou seja, $<$ (menor que) e $>$ (maior que). No tocante às operações do Campo Aditivo, a exploração de problemas de transformação, ou pelo esquema de flechas, que requeria o uso da operação inversa, revelou uma redução no desempenho dos alunos, principalmente quando os termos envolvidos não eram simétricos. Em relação à subtração, foi possível detectar que a associação desta operação à ideia de “tirar”, ainda é presente entre alguns alunos e, segundo Moraes (2010), esta acaba por atrapalhar os estudantes em suas resoluções. O envolvimento de números racionais ou “números grandes” nestas operações – adição e subtração – ainda apresenta dificuldades para os alunos. Em relação aos problemas no Campo Multiplicativo, percebe-se que estes apresentam dificuldades para definir o seu invariante conceitual¹³, sobretudo quando aquele é negativo. Por vezes, percebe-se que os alunos conseguem identificar e resolver multiplicações e divisões corretamente, mas frente aos números negativos, cometem alguns erros. Por fim, a união entre os dois campos, aditivo e multiplicativo em um problema ocasiona grandes dificuldades de resolução para os alunos, visto que requer a combinação de diferentes tipos de raciocínio.

Rocha Neto (2010), com o intuito de detectar quais as causas e as dificuldades enfrentadas por alunos do 7º ano do ensino fundamental durante a aprendizagem dos números inteiros, conduz uma pesquisa com estudantes dessa série de ensino em quatro escolas públicas de Fortaleza – CE, aplicando duas avaliações como instrumentos de coleta dos dados.

¹² O autor ressalta que os dados do primeiro momento referem-se a problemas do campo aditivo, enquanto que os do segundo momento são pertinentes ao campo multiplicativo (MORAIS, 2010).

¹³ Os problemas propostos envolviam Tempo x Posição, e esta dificuldade pode ser vista quando são dados uma posição final e o tempo de deslocamento.

O pesquisador identificou e agrupou as dificuldades dos alunos investigados em quatro conjuntos. A primeira assinalada foi relativa às *operações com os números naturais*, que constituem a não compreensão da subtração como inversa da adição e o não domínio da tabuada, dos algoritmos da multiplicação e da divisão e das técnicas de resolução de expressões numéricas. O segundo grupo estava associado às *noções introdutórias* acerca do conjunto dos números inteiros, entre elas, embaraços em entender esse conjunto como uma composição de valores distribuídos em direções opostas a partir de um ponto de origem; comparar os inteiros, sobretudo quando o maior tem menor módulo, quando ambos são negativos ou quando um deles é o zero e também em relação a ordenar os números negativos. Em uma terceira categoria enquadraram-se as dificuldades relacionadas à *aplicação das regras de sinais*, por exemplo, entre dois números negativos, conserva-se o sinal e subtrai o número de menor valor absoluto do de maior, ao invés de somá-los; em adições algébricas, desconsideram-se os sinais que acompanham os valores e realiza-se a operação indicada entre eles com os valores absolutos; e a confusão entre as regras de sinais da adição e da multiplicação e divisão. Por fim, encontram-se os embaraços tocantes às *operações e procedimentos para solucionar expressões numéricas*, em que constata-se a falta de domínio em relação à ordem das operações e dos símbolos, bem como da eliminação destes últimos quando precedidos do sinal negativo, no qual a inversão da operação só é realizada com o primeiro número e não com todos que neles estão inclusos. Em sua conclusão, Rocha Neto (2010, p. 54) aponta que “os procedimentos e métodos usados pelos professores que priorizam o ensino para a memorização de regras e o predomínio de solução de exercícios mais que a compreensão dos conceitos por parte dos alunos” tem, em parte, relações com as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Em sua tese, **Pontes (2010)**, teve como objetivo identificar qual o tipo de justificativa abordada para o ensino da multiplicação entre os números inteiros é melhor compreendida entre os estudantes e se existem elementos nessas – e de que forma – que contribuem para superar os obstáculos presentes nos processos de aprendizagem desse tema. Para isso, a pesquisadora conta com a aplicação de dois testes (A e B) a alunos de três níveis de ensino, da cidade de Natal – RN: fundamental maior (7º ano), médio (1º ano) e superior.

Com base em seis obstáculos¹⁴ apontados por Georges Glaeser, e que foram vivenciados e superados pelos matemáticos do passado, a investigadora identificou quatro

¹⁴ 1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas; 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; 3. Dificuldade em unificar a reta numérica; 4. Ambiguidade dos dois zeros; 5. Estagnação no estágio das operações concretas; 6. Desejo de um modelo unificador.

deles no decorrer de sua análise das respostas dos participantes, de modo geral, no primeiro instrumento de pesquisa: *dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas*, manifestada pela “inconsistência na construção do conceito de número negativo”; *dificuldade em unificar a reta numérica*, com erros relacionados “ao sentido utilizado na marcação dos números negativos”; *ambiguidade dos dois zeros*, “surgida da dificuldade de aceitação ao significado atribuído ao zero relacionado à criação dos números negativos, o zero origem”; e *estagnação no estado das operações concretas*, demarcada pela atribuição apenas do significado operatório para os sinais de + e –, como, também, a apresentação de inconsistências¹⁵ em suas resoluções e justificativas referentes às operações com esses números, inclusive pela sobregeneralização das regras da multiplicação para a adição e subtração (PONTES, 2010, p. 130-132).

O instrumento B visava oferecer à autora subsídios para apreender como as diversas abordagens para as regras de sinais possibilitariam superar alguns desses obstáculos, ainda presentes no processo de aprendizagem dos números inteiros. Dentre as justificativas que contemplam este instrumento, a abordagem dessas regras por meio da observação da sequência padrão de produtos¹⁶ foi a que teve um maior grau de aceitação pelos alunos, por fazer uso de conhecimentos os quais os mesmos já possuíam domínio. No que concerne à contribuição desta justificativa para com a superação dos obstáculos identificados na aprendizagem, Pontes (2010) a aponta como passível de facilitar o entendimento da unificação da reta numérica e em problemas que giram em torno dos significados atribuídos ao zero.

Alves (2012) propôs-se a analisar e comparar a compreensão de estudantes da quarta fase da Educação de Jovens e Adultos – EJA – e do 8º ano do Ensino Fundamental, motivado em identificar competências e dificuldades apresentadas por esses alunos em processos resolutivos de problemas que requerem conhecimentos sobre as operações de multiplicação e divisão com números inteiros. O autor teve como ponto de partida a concepção de que a modalidade de ensino, a idade e a atividade profissional poderiam estar relacionadas às especificidades resolutivas de cada grupo e seus resultados mostraram que “todos os participantes ainda apresentam muitas dificuldades na compreensão do conceito dos números inteiros relativos” (ALVES, 2012, p. 178). Dentre os erros dos estudantes, o mais comum esteve relacionado à presença dos sinais, tanto o negativo como o positivo, nos termos que

¹⁵ Como, por exemplo, dada a operação $(+35) - (-42) = +35 + 42 = +13$. Apesar de realizar a eliminação dos parênteses corretamente, eles cometem um equívoco ao justificar que subtraiu porque a operação era subtração e o resultado é positivo porque os dois termos apresentam sinais iguais (PONTES, 2010).

¹⁶ Na seção II, apresentamos com mais detalhes este argumento.

compõem a multiplicação ou a divisão. Estes podem ser vistos em resoluções em que é realizada a soma ou subtração entre os termos ou, até mesmo, a multiplicação ou divisão seguida da operação de adição ou subtração, conforme o sinal do número em questão. Esses casos podem ser associados à falta de entendimento acerca da função dos sinais de $+$ e $-$, “enquanto característica do número e não indicativo de operação” (*Idem*, p. 124). Embora não exclusivo deste tema, nota-se que há estudantes que ainda apresentam dificuldades com os algoritmos da multiplicação e da divisão em si. O processo de representar um número inteiro na reta numérica demonstrou-se, também, custoso aos alunos, o que pode estar associado à “plena falta de compreensão do sentido de um número inteiro e certo apego à magnitude dos números” (*Idem*, p. 180). A natureza das situações propostas foi considerada um forte fator de influência no rendimento dos alunos, visto que as situações-problemas “que se aproximam de atividades comuns aos estudantes e que podem ser resolvidas sem uma relação imediata com os números relativos, apresentam índices de desempenho mais elevados” (*Idem*, p. 179). Da mesma maneira, a modificação na forma de expor uma situação atua na compreensão, no desempenho e nas estratégias de resolução dos alunos, por exemplo, ao trocar os símbolos ou a posição ocupada pelo termo desconhecido, sendo este uma das partes e não o todo.

No tocante à sua hipótese inicial, seus resultados apontaram para uma direção oposta. O autor não identificou diferenças nos desempenhos dos alunos de cada modalidade de ensino e a atividade profissional destes não influenciou em seus desempenhos durante as resoluções. Uma divergência detectada entre os grupos esteve relacionada às estratégias por eles adotadas, pois, enquanto os adolescentes prendem-se mais vezes aos algoritmos, os adultos recorrem com maior frequência a diferentes formas de resolução.

Ministrar aulas sobre os números inteiros tornou-se uma dificuldade para **Silva (2012)**, ao perceber a falta de entendimento de seus alunos em relação a tal conteúdo. Motivado por essa situação surge a ideia de uma investigação a fim de saber quais as elaborações manifestadas por estudantes enquanto vivenciam as atividades orientadoras de ensino com números inteiros. A pesquisadora, que também é professora da turma, elabora e aplica quatro atividades para o ensino desses números, em uma classe de 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da cidade de Fernandópolis – SP. A partir das elaborações dos alunos, a pesquisadora identifica, a princípio, uma semelhança da visão dos alunos com a de matemáticos antigos, isto é, dos números inteiros como “números absurdos”, ao ignorá-los em seus escritos. Os sinais de negativos, por vezes, não são considerados por esses alunos em suas conclusões e, em outras, mesmo já considerando estes sinais e que as quantidades negativas são menores que as positivas, para a maioria dos alunos não há nada abaixo do zero,

e assim, para ordenar esses números “os negativos ficam após todos os positivos e depois vem o zero” (SILVA, 2012, p. 93). Outro fato, que para a autora impedia o entendimento do conceito de números negativos por esses alunos, era a impossibilidade de operar com quantidades negativas, ou quantidades que não existem, que são menores que nada.

A título de considerações finais, Silva (2012), aponta a complexidade da sala de aula e a exigência que recai sobre o professor. Este, como sujeito conhecedor do ambiente em que leciona, é quem deve planejar, adaptar e aplicar as atividades com seus alunos, reconhecendo as particularidades de cada turma. As elaborações explicitadas pelos alunos são um meio que o professor dispõe para fundamentar suas próximas ações e atividades, reforçando, assim, sua autonomia para não limitar-se “em escolher textos com ideias das apostilas e livros didáticos” (SILVA, 2012, p. 91).

Em sua investigação, **Hillesheim (2013)** tem como objetivo analisar uma sequência didática, pautada no “princípio de extensão¹⁷”, para o ensino das operações com os números inteiros, a saber, adição, multiplicação e subtração, com foco na segunda, bem como, verificar suas possíveis contribuições nos processos de ensino e de aprendizagem. Nessa perspectiva, a sequência foi elaborada¹⁸ e aplicada em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, no município de São José – SC, em que a pesquisadora era, também, a professora.

De uma maneira geral, constatou-se que os alunos apresentam dificuldades em atividades que requerem uma conversão de registros, principalmente em situações indicadas por uma subtração, bem como na resolução destas, que a pesquisadora relaciona à concepção que os alunos carregam desta operação advinda dos números naturais, apenas como uma ação de “tirar”, não ampliando-a para os números relativos, ou seja, como um operador negativo que permite transformações de oposição. Apesar do considerável sucesso na resolução de questões que envolviam a multiplicação, as propriedades desta operação não foram completamente integradas por uma parte do grupo investigado, por encontrarem-se em processo de assimilação destas propriedades. Para além dos embaraços relativos aos números

¹⁷ Nesta intervenção, todas as operações foram introduzidas e conduzidas por diferentes problematizações. Além disso, a adição foi efetuada por meio da reta numérica, as regras de sinais apresentadas por meio da sequência de produtos e pela distributividade em relação à soma/subtração e a subtração empregando-se os conhecimentos aprendidos anteriormente.

¹⁸ Tal sequência foi desenvolvida em três blocos, referentes a cada operação citada e ao final de cada bloco foi aplicado um teste com os alunos participantes, a fim de categorizar ao nível de compreensão desses alunos em relação ao conteúdo, pautando-se na hierarquia das concepções, propostas por Coquin-Viennot: “Nível I - os números relativos são tratados como naturais; Nível II - os negativos são tratados separadamente dos positivos; Nível III - a reta numérica é unificada e os problemas aditivos são resolvidos nos relativos; Nível IV - os problemas multiplicativos são assimilados” (HILLESHEIM, 2013, p. 176). Ao fim de cada bloco, foi aplicado um teste e o mesmo foi realizado em sala de aula.

inteiros, há ainda alunos que apresentaram erros na resolução da multiplicação entre os números naturais.

Vale destacar que esta intervenção foi planejada de modo a conduzir o ensino pela sua via formal e, portanto, afastando-se de exemplos práticos, em especial o modelo comercial. Por fim, o ponto de vista da pesquisadora condiz com a perspectiva de que o ensino das operações da adição e subtração por este meio pode ocasionar obstáculos para o ensino das propriedades multiplicativas, ou seja, as regras de sinais.

Ao questionar-se acerca das incompreensões de alunos sobre o conceito, as aplicações e operações com os números relativos e da possibilidade do desenvolvimento de uma proposta de ensino capaz de promover essa compreensão, **Pereira (2014)** elabora e aplica uma sequência didática em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, na região de Canoas – RS, com o intuito de que pudesse contribuir para o entendimento desses números e das operações de adição e subtração com os mesmos.

Através das respostas obtidas com a implementação da sequência, constataram-se dificuldades em aceitar tais números e o zero como um número neutro, sem relacioná-los à ideia de quantidades – ou à ausência dela. Este fato acabava por contribuir com a perspectiva de que é impossível subtrair um número de maior valor de um menor. A associação dos números a posições também consistiu em um embaraço aos estudantes, seja por erros de contagem ou pela dificuldade em realizar deslocamentos em sentidos opostos mentalmente. A mobilização de conhecimentos aditivos¹⁹ revelou dificuldades para a apresentação de posições finais, após mais de um deslocamento, principalmente quando em sentidos opostos, bem como para identificar transformações realizadas, quando são dados os estados iniciais e finais. Os entraves frente à subtração manifestaram-se com a inversão da operação de adição com os relativos, na reconstituição de estados iniciais desconhecidos ou ao desfazer a composição de transformações e na própria operação, quando há uma combinação de sinais, que requer a inversão de sentidos.

Ao fim de seu trabalho, Pereira (2014), tem um parecer positivo para sua questão norteadora, ao afirmar ser possível “desenvolver uma sequência didática que provoque a aceitação e a construção e do conceito de números relativos e de suas operações: adição e subtração” (p. 179). Além disso, considera que seus objetivos foram atingidos e conceitos e teoremas puderam ser construídos e mobilizados a partir da mesma.

¹⁹ Em composições de transformações, como determinação de saldo de gols e deslocamentos em trilhas, por exemplo.

A dissertação de **Rêgo (2014)** não foca somente no conjunto dos números inteiros, pois, a fim de investigar as principais dificuldades em operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), de alunos ingressantes no 1º ano do Ensino Médio de uma escola no município de Pereiro – CE, o autor faz uma viagem nos conjuntos numéricos, agregando os naturais e os racionais.

Dirigindo o foco para os resultados pertinentes ao conjunto dos números inteiros, o pesquisador compreende que os alunos não apreenderam as regras da adição e subtração com tais números. Com base nos erros assinalados, os alunos ainda não dispõem de uma ideia intuitiva acerca dos significados de positivo e negativo em uma operação, bem como confundem-se entre os sinais da operação com os sinais predicativos dos termos. Destes, há casos em que essas operações são realizadas “como se os números com sinais opostos tenham resultado negativo e números com sinais iguais dê [sic] o resultado positivo” (RÊGO, 2014, p. 49). No que toca à multiplicação e à divisão com os números inteiros, verificou-se falhas advindas da falta de domínio dos algoritmos dessas operações (incluindo-se a tabuada multiplicativa) ou das regras de sinais, ao não conseguirem determinar o sinal da resposta final. Além disso, a soma (ou subtração) foi realizada ao invés da multiplicação (ou da divisão), por não identificarem as operações sugeridas. Para o autor “essas confusões com as operações são apresentadas porque os alunos não dominam a contento as operações fundamentais da matemática” (*Idem*, p. 51). Em situações-problemas que envolvem essas operações, há alunos que não conseguem desenvolver estratégias corretas de resolução ou quando isso acontece, não conseguem lograr os cálculos com êxito.

A título de considerações finais, Rêgo (2014) reitera a deficiência acerca dos conhecimentos básicos em Matemática com que os alunos adentram no Ensino Médio. A esse respeito, o autor salienta que a formação – ou melhor, a falta de formação adequada – de professores do Ensino Fundamental menor (1º ao 5º ano) e maior (6º ao 9º ano), o extenso currículo dessa disciplina e sua pequena carga horária são alguns dos fatores que podem contribuir para esse déficit de aprendizagem da matemática.

Silva (2017) teve como objetivo em seu trabalho examinar os processos de ensino e de aprendizagem, além de avaliar a eficiência de um jogo matemático como recurso de intervenção pedagógica sobre o conteúdo dos números relativos. Para tanto, realizou essa pesquisa com estudantes de três²⁰ turmas do Ensino Fundamental (5º, 7º e 8º anos) de uma

²⁰ A escolha de diferentes séries se deu pelo intuito de realizar uma análise por diferentes perspectivas: “preconização de conteúdos (5º ano), parte da grade curricular (7º ano) e revisão de habilidades não assimiladas ou recuperação (8º ano)” (SILVA, 2017, p. 16).

escola na cidade de Taubaté – SP. Esses alunos foram convidados a responder testes diagnósticos antes e depois²¹ da confecção e aplicação da intervenção de ensino, a fim de obter dados para que pudessem ser comparados e apontar eventuais indícios de aprendizagem.

De modo geral, tanto em alunos que já haviam tido contato com o conteúdo, como com aqueles em que não haviam recebido aulas do tema, as maiores dificuldades identificadas pelo pesquisador estiveram relacionadas à resistência de se considerar que existe um número menor que zero, de modo que não conseguiam realizar a subtração de um número maior de um menor, recorrentemente surgindo como respostas para essas situações o zero ou o valor absoluto da subtração entre o maior e o menor número, e, em situações de comparação entre valores positivos, negativos e o zero, este último era, de forma recorrente, a referência para o menor número. As dificuldades mostraram-se presentes, também, para determinar a distância entre um número positivo e um negativo, considerando-se a distância entre eles como sendo entre os valores absolutos. A soma de números inteiros entra nesse quadro, ao ser realizada, equivocadamente, apenas com os valores absolutos, não havendo uma separação entre números positivos e negativos.

Por fim, o autor chega à conclusão de que o jogo aplicado, chamado de "Compra Monte", pode auxiliar a aprendizagem dos números inteiros negativos, contanto que seja sistematicamente planejado e adaptado. De uma maneira geral, este pesquisador compreende o jogo, nos processos de ensino e de aprendizagem, quando este possui seus objetivos delineados, pondo o aluno em um papel ativo e o professor como mediador da situação, como uma possibilidade para romper com o ensino tradicional, comumente presente nas escolas brasileiras. Assim, a posição em que o aluno é colocado nesse processo “faz com que a sua aprendizagem profunda e significativa, tornando a matemática útil para a sua vida e aplicável em outros segmentos que não seja somente no ambiente escolar” (SILVA, 2017, p. 119).

Após as nossas considerações acerca dos números negativos, do ponto de vista histórico – desde os contextos base para seu surgimento até a consolidação de uma fundamentação para seus preceitos operatórios – e do aspecto educacional – especificamente no que tange às dificuldades enfrentadas por alunos da educação básica, em relação a tal conteúdo – na seção que segue, trazemos nossa fundamentação teórica, com ponderações acerca da argumentação, desde seus primeiros estudos, em um contexto mais geral, a teorias específicas no ensino da matemática.

²¹ Além desses testes, o pesquisador aplicou uma atividade, no ano seguinte, somente com os alunos do Cenário 1, ou seja, que eram do 5º ano e passaram para o 6º ano do Ensino Fundamental, com o propósito de verificar se ocorreu uma aprendizagem efetiva.

SEÇÃO II: ARGUMENTAÇÃO

Sem nos limitarmos apenas ao contexto cotidiano, consideramos que o processo argumentativo, isto é, a ação de elaborar e/ou emitir afirmações acrescidas de alegações que possam lhe conferir razoabilidade, pode ser visto nos mais diversos campos de estudo, embora possa apresentar suas particularidades em cada meio que está inserido.

Conforme Menezes (2001), a quantidade de noções relacionadas à argumentação é proporcional à quantidade de teorias que estão empenhadas em seu estudo. Mas que, sobretudo, afigura-se como um fenômeno que compreende o pensamento, o raciocínio e o discurso como elementos de suas atividades (*Idem*).

No tocante em específico ao caso da matemática, o termo pode ocasionar diferentes interpretações e dúvidas. Quando falamos em *Argumentação Matemática*, talvez uma das primeiras noções que possam emergir é associá-la à validação de suas proposições ou ao estabelecimento de suas verdades e, ainda, imediatamente àquelas cadeias de inferências lógicas estritamente rigorosas (SÁ, 2021).

Não é foco deste estudo, tratar a esse respeito, isto é, da Argumentação Matemática em um aspecto mais geral, mas debruçamo-nos, especificamente, sobre a Argumentação no Ensino de Matemática. Por isso, intentamos na presente seção abordar algumas referências que dedicaram-se aos estudo dessa temática e que serviram de fundamentos para a construção e sustentação deste estudo. Isto posto, iniciamos com um breve percurso histórico desde o seu surgimento, até a constituição de algumas correntes teóricas modernas que tratam da argumentação. Além disso, perpassamos por teóricos que trataram desse assunto, especificamente no campo do ensino de matemática e, assim, evidenciamos nossa opção por uma delas, adotada no presente estudo.

2.1 – Retórica, Dialética e Persuasão

Ao buscarmos sobre a aurora da argumentação, como teoria – ou melhor, teorias – de estudo, independente de sua área, é sobre a retórica que ela encontra respaldo. Com as primeiras elaborações que remontam ao período da Antiguidade Clássica, o sistema retórico foi discutido, reformulado e complementado a partir de então. Originária no contexto jurídico, ao longo do tempo seus aspectos não ficaram a ele restrito, e logo foram expandidos para

outros campos, como o político, filosófico, literário, publicitário, sendo que, até a atualidade eles permeiam nos mais diversos contextos, formais e informais.

Abrimos parênteses nesta menção para explicitar nosso entendimento acerca do sentido à expressão “origem” da argumentação, ou da retórica, que associamos à gênese dos estudos ou sistematização desse campo. De fato,

a retórica é anterior à sua história, e mesmo a qualquer história, pois é inconcebível que os homens não tenham utilizado a linguagem para persuadir. Pode-se, aliás, encontrar retórica entre hindus, chineses, egípcios, sem falar dos hebreus. Apesar disso, em certo sentido, pode-se dizer que a retórica é uma *invenção grega*, tanto quanto a geometria, a tragédia, a filosofia (REBOUL, 2004, p. 01, grifo do autor).

Por volta de 465 a.C., os cidadãos da região da Sicília grega, revoltados e ávidos em reaver seus bens – subtraídos por tiranos e redistribuídos com membros do exército, em troca de apoio político-militar (MENEZES, 2001) – entram em embates jurídicos a fim de recuperá-los. Na ausência de um especialista que pudesse lhes representar diante dos tribunais, os próprios litigantes defendiam suas causas, em alguns casos, carecendo de bons e persuasivos argumentos para resolver seus conflitos e, para isso, contavam com uma “coletânea de preceitos práticos que continha exemplos para uso de pessoas que recorressem à justiça”, denominado de Arte Oratória (REBOUL, 2004, p. 02) ou Arte Retórica. O primeiro método de argumentação foi composto por Córax²², juntamente com seu discípulo Tísias. Com a retórica sendo vista como “a criadora da persuasão”, tinha-se a máxima de que o domínio das técnicas retóricas seria “capaz de convencer qualquer pessoa de qualquer coisa” (*Idem, Ibidem*).

A retórica expande-se e alcança outras cidades gregas, por intermédio, inclusive, de sábios itinerantes, que ensinavam sobre as técnicas da retórica e da oratória, conhecidos como *Sofistas*. Estes, saíam de cidade em cidade divulgando seus conhecimentos a jovens interessados em pagar altos preços por seus serviços (CASTRO, 2013). Considerados os primeiros professores, o ensino proposto por eles não tinha finalidade religiosa, profissional ou atlética, mas sim, para formação pessoal – no que concerne a questões domésticas – e pública – de modo a serem cidadãos críticos e participativos, dotados de “recursos retóricos que deveriam ser utilizados, em qualquer situação, da maneira mais persuasiva possível” (OLIVEIRA, 2002, p. 215).

A importância da dotação de princípios retóricos encontra proficuidade na *pólis* grega, principalmente em Atenas – importante centro político, econômico e cultural – devido ao

²² Há autores que atribuem a Empédocles de Agrigento, filósofo pré-socrático do século V a.C. e mestre de Córax, o mérito pela invenção da retórica (NUNES, 2015).

sistema político que lá vigorava, a saber, o democrático (PAULINELLI, 2014). Em um local em que, aos cidadãos, era reconhecido o direito de discutir e opinar em decisões sobre aspectos importantes da vida em sociedade (*Idem*), tornava-se necessário que dispusessem de habilidades para elaborar e encadear argumentos e ter um desempenho satisfatório em debates, a fim de justificar e sustentar ideias, bem como alcançar a persuasão.

Importando-se apenas com a eficácia do discurso, ou seja, em sua potencialidade em ser convincente, ao ponto de vencer qualquer debate e abster o interlocutor de uma resposta, a retórica dos sofistas não prende-se à verdade e nem ao verossímil (REBOUL, 2004). Sua verdade é resultado de um acordo entre interlocutores e não era necessário ser um especialista para argumentar sobre um assunto, mas sim, ter o poder de empregar bem as palavras e falar em público de forma persuasiva (*Idem*). Assim, “a retórica ou arte oratória está aqui apenas ao serviço do convencimento possível e não de um convencimento racional ou rigoroso” (MATEUS, 2018, p. 64).

O préstimo da sofística para o desenvolvimento da retórica é inegável, não só em questões políticas e judiciais, mas para os discursos de modo geral e para a educação, por exemplo. Foram os sofistas os primeiros a intercederem pela liberdade de expressão, a pôr em evidência a necessidade do encantamento retórico – ou seja, a seleção e emprego certo das palavras para despertar o interesse do público – e a fundar uma educação formal no Ocidente, visto que abriram espaço para que mais pessoas, além da nobreza, tivesse acesso ao seu ensino (CASTRO, 2013).

Suas idiossincrasias, entretanto, foram alvo de críticas implacáveis, como, por exemplo, as de Platão, considerado um grande adversário desses mestres da linguagem (CASTRO, 2013). Para esse filósofo, a persuasão sofística não passava de uma “falsa adulação” (REBOUL, 2004, p.19) e era vulnerável a todo tipo de manipulação (SOUZA, 2001). Desconhecendo a verdade, seus discursos não estavam orientados a ela. Para este filósofo, a verdade das coisas era o objetivo a ser alcançado e, dessa forma, ao rejeitar a retórica dos sofistas, o filósofo propõe a dialética como método “único que permitia alcançar o absoluto” (REBOUL, 2004, p. 34).

A dialética consistia em um método de argumentação que almejava a verdade de uma afirmação, através de um jogo de perguntas e respostas entre pessoas que apresentavam ideias diversas sobre determinado tema (COSTA, 2019).

A nova racionalidade proposta por Platão, como também as ideias de Aristóteles, aliando-se à extensão e consequências da Guerra do Peloponeso²³ (431 a 404 a.C.), são fatores que contribuíram para que a sofística – e, consequentemente, também a retórica – conhecesse um período de crise em seu modelo e reduzisse a sua influência (MENEZES, 2001).

Embora Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) houvesse sido discípulo de Platão, o mesmo não condena a retórica inteiramente como o seu mestre. Para aquele, sua plena renúncia implicaria em negligenciar uma das virtudes atribuída ao ser humano, sua capacidade racional, para proceder integralmente em transações públicas e privadas (MATEUS, 2018). Assim, como “técnica de persuasão”, ou “ferramenta com que a razão se dota para discursar publicamente”, não é a retórica que será classificada como boa ou má, mas sim, a forma com a qual ela é empregada que é categorizada como benéfica ou prejudicial (*Idem*, p.69). Sua objeção reside no tratamento relativo conferido à retórica pelos sofistas e a seu desprezo pela verdade, quando equipara a “*Arte Oratória*” desses, a uma “*Arte da Enganação*” (MENEZES, 2001, p.183).

Aristóteles, entretanto, nivela à retórica e a dialética e entende que “ambas se ocupam de questões ligadas ao conhecimento e não correspondem a nenhuma ciência específica” (COSTA, 2019, p. 357). Vale ressaltar que não se trata da mesma disciplina, pois “a dialética é um jogo intelectual que, entre suas possíveis aplicações, comporta a retórica. Esta é a técnica do discurso persuasivo que, entre outros meios de convencer, utiliza a dialética como instrumento intelectual” (REBOUL, 2004, p. 39).

Responsável por reabilitar a retórica e o primeiro a desenvolver um trabalho de codificação e sistematização da mesma, este filósofo compreende-a como um “conjunto de técnicas racionais” (SOUZA, 2001, p. 162) que argumenta em nome da verdade e da justiça (COSTA, 2019). Com uma definição mais modesta, segundo Reboul (2004), sua retórica não encontra-se mais restrita a persuadir, dedicando-se também a explorar o aspecto persuasivo existente em cada caso, com o fim de buscar meios mais eficazes para a elaboração de discursos, de forma raciocinada, em conformidade com cada situação e não com receitas prontas a serem aplicadas a qualquer questão.

É na busca por uma conduta sistemática do pensamento que Aristóteles dedica-se ao estudo e ao desenvolvimento da Lógica. Neste campo, a noção de argumento sobressai, sobretudo, pela ênfase dada à sua construção, no que diz respeito ao seu aspecto estrutural (SÁ, 2021), possibilitando distinguir argumentos válidos dos não válidos. O argumento, nesta

²³ Luta entre Atenas e Esparta por controle de cidades gregas. Com a derrota de Atenas, há um regresso ao regime oligárquico, ainda que por pouco tempo.

perspectiva, pode ser compreendido como o agrupamento de proposições estritamente relacionadas, em uma estrutura em que são dadas as premissas – suposições iniciais – conduzidas a uma conclusão, obedecendo a três princípios básicos: da identidade, da não-contradição e do terceiro excluído (ATTIE, 2021).

Quando a argumentação segue um processo de inferência específico, de modo que é composto por duas premissas (maior e menor) e que emerge em uma conclusão (proposição diferente das anteriormente apresentadas), esta é denominada de *silogismo*. A partir dessa definição, Aristóteles distingue dois tipos de silogismos ou raciocínios. O primeiro é o *silogismo demonstrativo* (ou ainda, científico, ou analítico), que apresenta como ponto de partida premissas verdadeiras, seguindo uma cadeia de inferência válida e coercitiva e atinge uma conclusão, necessariamente, verdadeira. O segundo é o *silogismo dialético*, em que, busca-se apenas o assentimento de teses, partindo-se, por sua vez, de premissas prováveis ou aceitas, ora por todos, ora pela maioria das pessoas e não é, em seu todo, necessariamente constituído por inferências formais e válidas. Dessa forma, os silogismos demonstrativos são impessoais e almejam a verdade, enquanto que nos silogismos dialéticos o argumento está sujeito à opinião humana e visa à persuasão (NUNES, 2015).

Para Aristóteles, o domínio retórico não é o mesmo da verdade científica, certa e única, ou seja, a retórica não é demonstrativa. O filósofo concorda, no entanto, que ela encontra-se no plano do verossímil, “possível em certo mundo” e passível de acontecer de outras formas, própria para situações em que não é possível discursar através de demonstrações rigorosas (REBOUL, 2004, p. 40). Assim, a retórica

é a arte de defender-se argumentando em situações nas quais a demonstração não é possível, que a obriga a passar por “noções comuns”, que não são opiniões vulgares, mas aquilo que cada um pode encontrar por seu bom senso, em domínios nos quais nada seria menos científico do que exigir respostas científicas (REBOUL, 2004, p. 27).

Consideramos importante apontar que Aristóteles não coloca os raciocínios dialéticos e demonstrativos em uma hierarquia, ou seja, não estabelece uma ordem de importância entre eles (COELHO *apud* REZENDE, 2010), entendendo que cada um tem sua relevância dentro de seu contexto de uso.

Atentar-se ao aspecto lógico presente nos discursos é um dos pilares compreendidos por Aristóteles para a consecução da persuasão, mas este não foi o único. Para além do âmbito racional, em sua retórica o âmbito afetivo também é posto em evidência como um meio para o alcance desse determinado fim. Dessa forma,

as provas de persuasão fornecidas pelo discurso são de três espécies: umas residem no carácter moral do orador (*ethos*); outras, no modo com que se dispõe o ouvinte (*pathos*); e outras, no próprio discurso (*logos*), pelo que este demonstra ou parece demonstrar (ARISTÓTELES *apud* COSTA, 2019, p. 358, grifos do autor).

Para além da civilização grega, a retórica alcançou outros espaços. No século II a.C., por exemplo, é possível ver a presença de retóricos gregos em Roma. Embora inicialmente os romanos tivessem demonstrado resistência à arte oratória, mesmo cientes da capacidade das palavras para conquistar as pessoas (OLIVEIRA, 2002), suas ideias acabam conquistando um espaço de primazia na educação e na vida pública de Roma, sendo essencial para a preparação daqueles que futuramente pretendiam ocupar cargos públicos (NUNES, 2015).

Dentre os filósofos que seguiram a tradição retórica grega em Roma, destacam-se Marco Túlio Cícero – um eminente orador e, também, advogado, político e escritor – e Marco Fábio Quintiliano – orador, professor e advogado. Cícero, no século I a.C., publica importantes tratados retóricos, como *De Inventione*, manual de retórica em latim mais antigo, e sua obra definitiva *De Oratore* (OLIVEIRA, 2002). Mas, é com Quintiliano, no século I d.C., que o pensamento retórico atinge seu ápice com a obra *Institutio Oratoria*, em que sistematiza o pensamento de Cícero vinculado à tradição grega clássica (COSTA, 2019).

Com o advento do Cristianismo há quem identifique um princípio de ofuscamento da retórica, perdendo, conforme Paulinelli (2014), o prestígio que foi alcançado em Aristóteles. Segundo Reboul (2004), o problema na relação entre a retórica e a nova religião, pode ser explicada por uma divergência entre essas culturas, pois a primeira é associada pelos cristãos a uma “cultura pagã, idólatra e imoral, que só poderia afastar a redenção” e é justamente essa redenção que importava para a religião (REBOUL, 2004, p.77). Ainda que muitos a rejeitassem, logo a língua e a retórica dos ditos pagãos foram aceitas, para o que podem ser apontadas duas razões principais: a retórica era um meio de persuasão proveitoso em seu papel missionário e para a compreensão da Bíblia (*Idem*).

Nesse mesmo período a retórica revela sua importância ao compor, juntamente com a gramática e a lógica, as matérias do *Trivium*, que, aliado ao *Quadrivium* (composto pela aritmética, música, geometria e astronomia) constituíam as *Sete Artes Liberais*²⁴, base da educação liberal da Idade Média. Reunindo aspectos relacionados à mente, o *trivium* “oferecia ferramentas ao aperfeiçoamento do intelecto” (JOSEPH, 2008, p. 17). Assim, temos que a

Gramática: prescreve como combinar palavras de modo a formar corretamente as frases. Retórica: prescreve como combinar frases em parágrafos e estes numa

²⁴ A Alta Idade Média foi o período em que o *Trivium* e o *Quadrivium* ganharam essa forma, mas seu ensino foi delineado já no currículo do Período Clássico, tendo seguido até a Baixa Idade Média e o Pós-Renascença (JOSEPH, 2008).

composição completa, que apresente unidade, coerência e a ênfase desejada, bem como clareza, vigor e beleza. Lógica: prescreve como combinar conceitos em juízos e estes em silogismos e cadeias de raciocínio de modo a obter a verdade (JOSEPH, 2008, p. 28).

Se, por um lado, no período que corresponde ao Renascimento, há uma volta às diretrizes antigas, de modo que a retórica ainda vista como essencial no ensino, por outro, é nesse mesmo período que a retórica começa a conhecer uma nova fase de decadência, marcada pela separação de dois componentes essenciais que a sustentam: o argumentativo e o oratório (REBOUL, 2004). Os valores estimados nesse período tais como, a ascensão do método científico, o enaltecimento da razão humana e das provas na busca do conhecimento, podem ser vinculados a esse declínio.

No século XVI, com o humanista Pedro Ramus, o princípio dessa fragmentação ocorre quando a parte racional da argumentação é separada da parte “estética”, ou seja, a dialética da retórica, esta sendo diretamente associada “ao estudo dos meios de expressão ornados e agradáveis” (REBOUL, 2004, p. 79).

No século XVII a retórica é posta em prova diante das ideias do racionalista René Descartes. Para quem a verdade deve ser evidente, clara e única, apresentada analogamente a uma demonstração matemática, censura à retórica por considerar falso tudo que provem e oferece o verossímil (REBOUL, 2004). A partir desse filósofo, e, especialmente de Leibniz, a lógica tende a ser identificada, cada vez mais como uma lógica formal e, portanto, com o silogismo demonstrativo de Aristóteles, banindo todo o saber proveniente da dialética (NUNES, 2015).

Empiristas, como John Locke, que têm por filosofia que a verdade advém da experiência dos sentidos, também criticaram a retórica, por considerarem que seus artifícios verbais afastam-se desse eixo, fazendo desta a “arte da mentira” (REBOUL, 2004, p. 81). Embora adeptos de correntes filosóficas opostas, Descartes e Locke aproximam-se na condenação à retórica por a verem “como um anteparo artificial entre o espírito e a verdade. Ambos desconfiam da linguagem, que só vale como veículo neutro de uma verdade independente dela, de uma verdade que nada tem a ver com as controvérsias da dialética” (REBOUL, 2004, p. 81).

No século XIX, é possível, ainda, ver mais sinais da diminuição da vitalidade da retórica, e o positivismo e o romantismo – duas novas correntes do pensamento – contribuem para essa degenerescência em prol da verdade científica e da sinceridade, respectivamente. Nesse período, a retórica é excluída do ensino francês, sendo substituída por outras disciplinas, como filologia e história científica das literaturas (REBOUL, 2004).

Essa substituição não significou exatamente uma ausência definitiva da retórica, mas sim, nas palavras de Reboul (2004, p. 82), “uma falsa saída de cena”, pois, conforme o mesmo, apesar de seu acentuado declínio, a retórica sobrevive sob novas configurações, em discursos políticos, jurídicos e no próprio ensino da literatura.

A partir da década de 1950, a retórica é revigorada, diante do desenvolvimento dos meios de comunicação de massa, do fortalecimento de ideias democráticas (PAULINELLI, 2014) e da crise das ciências (MONTEIRO, 2013). Esse período é demarcado pelo surgimento de correntes modernas que puseram a argumentação como seu foco. Dentre elas, destaca-se os nomes de Chaïm Perelman, que juntamente com Lucie Olbrechts-Tyteca publicam o livro *Traité de l'argumentation: La nouvelle rhétorique*, e de Stephen Toulmin, com a obra *The uses of argument*, ambas em 1958.

O tratado proposto por Perelman e Olbrechts-Tyteca, marca do surgimento da *Nova Retórica*, retoma os estudos retóricos resgatando os princípios aristotélicos, mas não como uma reprodução exata como foi com aquele filósofo e nem prescindindo-se por completo de seus fundamentos, já que encontra suas raízes, principalmente, no raciocínio dialético proposto por ele.

Tendo como pilares essenciais a comunicação, o diálogo e a discussão (PAULINELLI, 2014), a argumentação é, por si, conflituosa, ou, melhor dizendo, os problemas são solucionados mediante a apresentação e discussão de ideias contraditórias, estando à mercê, portanto, de multiplicidades, ambiguidades e incertezas (SOUZA, 2001; MATEUS, 2018). Assim, o *verossímil*, o *plausível* e o *provável* são os domínios no qual as premissas e as conclusões inserem-se. Surgida de um *acordo* entre orador e interlocutores, sua verdade enquadra-se no campo do razoável e não da imposição de algo antecedente, independente destes (MATEUS, 2018).

Assim, nesta teoria, segundo Perelman e Olbrechts-Tyteca, a retórica é definida como “o estudo das técnicas discursivas, permitindo provocar ou intensificar a adesão dos espíritos às teses que lhe são apresentadas” (SOUZA, 2001, p.164). Neste prisma, é em torno dos “espíritos”, isto é, do auditório, que centra-se a argumentação, logo, é em função dele que o orador deve desenvolver seu discurso, para que atinja a persuasão e o convencimento daqueles.

A persuasão aqui não deve ser entendida como um fim a ser atingido a qualquer preço, independente da sua correspondência com o que é justo e que possa ser usada a serviço da enganação do outro. Com efeito, para Perelman, o êxito por essa via afasta o diálogo da esteira do que prega a filosofia (REZENDE, 2010). Além disso, a noção de justo tem uma

função balizadora na argumentação. A fim de que esteja compatível com a razão, “a regra de justiça em Perelman, em conformidade com Aristóteles, fundamenta e reforça a racionalidade argumentativa” (SOUZA, 2001, p. 165).

2.2 – Argumentação e o Modelo de Toulmin

Ao considerar que os argumentos podem pertencer a domínios diferentes, Toulmin critica o absolutismo lógico por instaurar padrões que, por vezes, não são condizentes a serem aplicados em qualquer contexto. Um exemplo é considerar seu desenvolvimento dentro dos moldes da Matemática Pura e em situações práticas do dia a dia, evidentemente, os princípios morais de uma e outra serão diferentes e o que é relevante na primeira, pode não fazer sentido na segunda.

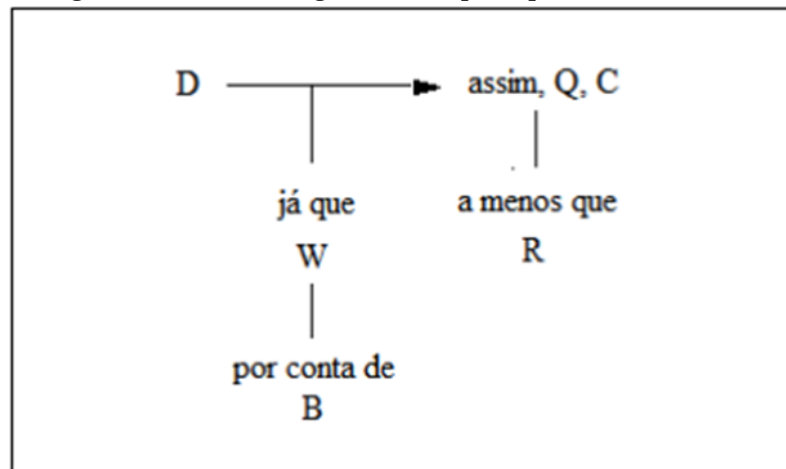
Dessa forma, ao dar atenção a aspectos presentes nos argumentos, que podem transmutar conforme o campo que está circunscrito, Toulmin sublinha em sua teoria da argumentação a noção de *campos de argumentos*, ou seja, “diferentes espécies de problemas aos quais os argumentos podem estar dedicados” (TOULMIN *apud* SÁ, 2021, p. 79). Portanto, aqueles elementos que não mudam sejam qual for o campo em que se encontram, são chamados de *campo-invariáveis*, enquanto os que variam conforme seu campo são denominados de *campo-variáveis* (REZENDE, 2010).

A necessidade de justificar asserções e de fornecer razões a fim de fortalecê-las, levou Toulmin a dedicar com mais atenção e enaltecer em sua obra, uma categoria de argumento particular, a saber, os argumentos justificatórios (REZENDE, 2010), no qual estabelece uma semelhança entre estes e os argumentos jurídicos, já que

tais argumentos [jurídicos], por exemplo, apresentam três fases: a fase inicial, na qual se apresenta um problema, formulando uma questão com clareza (onde a acusação e a defesa devem ser formuladas de forma clara); na fase seguinte, há a exposição dos indícios, e deve haver a oitiva das testemunhas tanto da defesa quanto da alegação; e há a fase final, na qual se pronuncia a sentença (2006: p. 22-3). Segundo Toulmin, essa estrutura geral do argumento jurídico pode ser percebida como a estrutura dos argumentos justificatórios em geral (REZENDE, 2010, p.105-106).

Dessa forma, Toulmin reconhece que os argumentos dispõem de elementos essenciais, independentes ao seu campo de manifestação. Ao reunir esses componentes, ele estabelece uma conexão entre eles e propõe uma estrutura que pode ser comum aos argumentos e passível de analisá-los, como pode ser visto na figura 2.

Figura 2: Padrão de Argumento Proposto por Toulmin



Fonte: SÁ, 2021, p. 83.

Em sua versão completa esse padrão é composto por seis elementos, sendo três formais – compõem a estrutura em sua forma simplificada – e três opcionais. A primeira tríade, isto é, os elementos formais de um argumento, é composta pelos *Dados* (D), fatos que nos servem de fundamentos para a alegação ou conclusão; *Garantias* (W), justificativas que sustentam a conclusão e que fornece os princípios de inferência que permite a relação entre a conclusão e os dados; e *Conclusão* (C), alegação que se almeja convencer e que terá seu valor estabelecido. Os três elementos acessórios são: *Qualificador Modal* (Q), exprime o grau de força da garantia, utilizando-se termos modais, como “possivelmente”, “presumivelmente”, “quase certo que”, para qualificar a conclusão; *Refutação* (R), condições em que a justificativa/garantia é inválida ou insuficiente para sustentar a conclusão e que, portanto, não podem ser consideradas; e *Backing* (B), ou *Apoios das Garantias*, afirmação categórica que suporta as garantias e justifica o porquê dessas serem aceitas como tais, além disso, estão baseados em alguma autoridade, como uma lei (REZENDE, 2010; MONTEIRO, 2013).

Esse padrão possibilita a estruturação e avaliação de argumentos de forma metódica, logo pode constituir-se como uma importante ferramenta na compreensão de processos argumentativos, desfrutado em diversos campos do conhecimento e contextos, inclusive no contexto da sala de aula.

Após esse percurso, iniciado com a retórica, perpassando pelas teorias da argumentação, encontramos um termo que emerge nesse entremeio, que o de *demonstração*. Ambos mantendo certas relações com a lógica, em um momento puderam a ser reduzidos a uma coisa só, a demonstração formal. Até que teorias argumentativas põem essa sinonímia “em cheque” e reascendem aspectos que outrora houvessem diminuído.

Tendo em vista os significados e o tratamento desses termos – e também o de prova – no contexto do ensino da matemática, prosseguimos com nosso estudo apresentando a posição de alguns teóricos em relação aos mesmos.

2.3 – Argumentação, Prova e Demonstração

No cerne da matemática e de seu ensino, as noções de *argumentar*, *provar* e *demonstrar*, empregadas, de modo geral, como meios de assentar os enunciados matemáticos, são tão relevantes para essa área, que torna-se quase impossível dissociá-las desta. Mas, as concepções atreladas a esses termos geraram, e podemos dizer que ainda geram, controvérsias, ora por não fazerem distinções, ora por assumir uma essência diversa em cada contexto específico.

Balacheff (2000), ao posicionar-se em relação aos termos *Explicar*, *Provar* e *Demonstrar* admite haver diferenças entre tais, mas afirma que, por vezes, isso não ocorre na prática no ensino da matemática. Encará-los como análogos, em seu ponto de vista, pode consistir em um obstáculo, por não considerar a existência de diferentes níveis cognitivos nas atividades desenvolvidas por essas ações.

Lexicalmente, os significados²⁵ dos termos citados, por vezes, convergem para sentidos semelhantes, ou seja, para um meio de justificar ou comprovar uma determinada assertiva ou posição que julga-se verídica.

Alfaro-Carvajal *et al* (2019), ao realizarem um estudo sobre o significado que a demonstração abrange dentro da matemática, pactuam com o entendimento de que seu conceito, de modo geral, abarca diferentes acepções, utilizados em situações informais – em referência a sentimentos, habilidades ou funcionamento de algo – e situações formais – incidindo-se sobre o lógico, a garantia de proposições. Ademais, apontam que *argumentação*, *explicação*, *prova* e *raciocínio* são expressões que são comumente associadas à demonstração.

Em seu texto, Balacheff (2000) chama de *Prova* toda explicação que foi aceita e reconhecida por uma comunidade, que assegura a validade de proposições matemáticas, e cujo significado está ao nível do interlocutor. Duas características que podem ser destacadas através da caracterização de Balacheff (2000), para esse meio de validação, é o seu estatuto não definitivo, pois pode mudar, à medida em que os saberes que lhes respaldam

²⁵ Ao consultar os significados dos três termos no dicionário (MICHAELIS, 2021) deparamo-nos com mais de um significado para eles, três definições para o termo “argumentação”, quinze para “prova” e nove para “demonstração”.

desenvolvem-se, também não é, necessariamente, universal, pois enquanto pode ser aceita por uma determinada comunidade, a mesma prova pode ser refutada por outra²⁶.

A *demonstração* designa o processo de validação de uma afirmação, por meio da concatenação de enunciados, que atende a um conjunto de regras bem definidas. Considerada uma importante “ferramenta de prova”, com uma estrutura particular, a demonstração é reputada como tal, quando aceita por uma comunidade de especialistas, no caso, a de matemáticos. Amparada em um corpo de conhecimento institucionalizado, ou em teorias formalizadas, a essência desse método de validação está em seu rigor (*Idem*).

Esta definição é condizente com a atividade realizada por matemáticos, mas, como aponta este educador, a forma como a demonstração é ensinada no meio científico não pode ser a mesma que na sala de aula, sujeitando-se, portanto, a uma transposição didática, para que converta-se em um conteúdo passível deste segundo ambiente (BALACHEFF, 2000).

Com atenção especial ao aluno, Nicolas Balacheff supõe que estes podem produzir/construir provas para enunciados matemáticos, mesmo que não apresentem domínio de capacidades demonstrativas. A partir da investigação com estudantes franceses, em situações que requerem validação e decisão na resolução de problemas, ele compreende que as provas matemáticas escolares podem ser classificadas em dois tipos: *Pragmáticas* e *Intelectuais*, de acordo, singularmente, com a complexidade e conteúdo base:

O que garante a prova pragmática é a singularidade do evento que a constrói. Esta prova fornece também elementos contingentes: ferramentas imprecisas e imperfeições de funcionamento.

A prova intelectual implica um significado contra outro, uma pertinência contra outra, uma racionalidade contra outra (BALACHEFF, 2000, p. 25, tradução nossa).

No nível pragmático, na tentativa de validação das ideias matemáticas incluem-se verificações empíricas, desenhos, uma busca por regularidades (AGUILAR JR, 2012). Já as provas intelectuais apresentam um aspecto mais geral e racional, pois afastam-se de constatações práticas, da ação, e requerem um raciocínio mais elaborado, com a formulação e articulação de propriedades matemáticas.

Enquadradas nessa categorização, Balacheff (2000), divisa quatro tipos de provas:

O *empirismo ingênuo*, que apela à garantia dos enunciados por meio da verificação de poucos e simples casos. Baseando-se em Piaget, Balacheff (2000) compreende-o como “rudimentar” e “insuficiente” quando o objetivo é validar. A *experiência crucial*, no mesmo

²⁶ Balacheff (2000) cita como exemplo o “Teorema das Quatro Cores”, no qual a prova proposta por Appel e Haken, não é uma demonstração, em seu sentido clássico mas que, no entanto é aceita por certos matemáticos, como Swart e refutada por outros, como Tymoczko.

plano, diferencia-se por intentar uma generalização através de casos não recorrentes. Para Balacheff (2000, p. 27), seu processo é regido pela expressão “se funciona agora, então funciona para sempre”. O terceiro tipo é o *exemplo genérico*, cuja validação ocorre através de um exemplo pontual, porém, com a oportunidade de uma generalização a partir dele. Por fim, na *experiência mental*, a prova encontra-se em um quadro mais geral, sustentada em uma teoria e não mais em casos particulares.

Uma prova do tipo experiência mental, o nível mais elevado que um aluno pode atingir nas aulas de matemática, não pode ser igualada a uma demonstração, nos moldes já assinalados. Essa, por sua vez, requer mais que um certo grau de conhecimento, estando em níveis mais avançados que aquela prova (BALACHEFF, 2000). Os quatro tipos de provas que podem ser apresentadas por alunos, podem consistir em etapas iniciais para o alcance de demonstrações, conforme o mesmo, elas têm lugar de relevo na gênese cognitiva da demonstração.

Sob a lente de Duval (1993)²⁷, a *demonstração* é entendida como um raciocínio válido que tem por foco o estabelecimento da verdade. Esta instituição ocorre por um processo dedutivo, em que relacionam-se premissas e conclusão, construídas e/ou obtidas previamente dentro de um quadro teórico – são as definições, hipóteses, axiomas, postulados, teoremas. Assim sendo, para esse autor, o valor epistêmico desse raciocínio encontra-se vinculado ao status teórico das proposições, que, esteadas em conhecimentos consolidados, são precisos e não são passíveis de discussões ou contestações.

A *argumentação*, por sua vez, é designada como um raciocínio natural, segundo a perspectiva de Toulmin e Perelman, e sua ideia emerge atrelada à necessidade de justificar afirmações (DUVAL, 1993). O argumento tende a seguir contenções próximas de situações discursivas²⁸ espontâneas, de modo que, a linguagem natural é o seu meio de expressão e na prática, questões opostas são passíveis de discussão e defesa. Nesta perspectiva, o valor epistêmico do que se propõe como justificativa reside na compreensão do conteúdo dessa proposta, resultando, portanto, na possibilidade de haver divergências desse valor, de acordo com a variação dos indivíduos, das circunstâncias do conhecimento ou do ambiente de discussão (*Idem*).

De acordo com Sales (2010), a *argumentação* é um artifício que visa esclarecer ou convencer sobre um determinado processo ou produto. Por meio da articulação, coesa e

²⁷ Em seu trabalho *Argumenter, Démontrer, Expliquer: Continuite ou Rupture Cognitive?* (Argumentar, Demonstrar e Explicar: Continuidade ou Ruptura Cognitiva?), o autor propõe-se a fazer uma distinção entre esses termos e uma análise comparativa do funcionamento cognitivo subjacente a eles.

²⁸ Em tempo real ou em tempo adiado, isto é, situações de conversão ou situações de escrita.

coerente, de argumentos, se busca estabelecer a verdade, sem que, necessariamente, se tenha como ponto de partida “um compromisso com a verdade, se entendermos a verdade como algo já construído” (p. 85), e o rigor na articulação das regras. A *prova*, é uma argumentação aceita por algum grupo social e tem propriedade para convencer, não precisa ser rigorosa, nem universal, basta que seu valor seja reconhecido para esse grupo e a *demonstração*, é a prova que foi aceita por matemáticos. Definida e sustentada por requisitos básicos dessa comunidade, seu valor não pode ser questionado e não admite meio termo, é certa ou errada.

Entendemos a argumentação como um raciocínio, e no contexto, da sala de aula, reputamos como possível aproximar o aluno a um “fazer matemática²⁹”, não idêntico ao que faz o matemático da academia, mas conceder um tratamento mais didático a suas sequências, de acordo com seu nível cognitivo.

Em relação ao termo *raciocínio*, o mesmo pode ser entendido sob duas acepções, como “a atividade intelectual do indivíduo, ou da produção de sua explicação” (BALACHEFF, 2000, p. 13, tradução nossa). Entenderemos o raciocínio sob essa segunda perspectiva, ou seja, como o processo empregado para ilustrar o meio que fundamenta as ações e fatos declarados, pela articulação de informações e artifícios.

A prova apresentará um avanço em relação à argumentação por adquirir um status entre algum grupo social, seja de educadores, seja de matemáticos. Logo, pode compreender um aspecto formal, quando associamos as provas ditas rigorosas, ou não. Quando apresentar esse rigor, defendido pela academia, tratar-se-á de uma demonstração. Entendemos que nossa perspectiva em relação a esta, compreende um aspecto mais formalista, quando empreendida por proposições tomadas como verdadeiras ou certificadas como tais seguindo um processo de inferência.

Para Duval (1993), argumentação e demonstração não são iguais, pois entre as duas há uma ruptura cognitiva, de modo que não é possível passarmos de uma para a outra sem muitos esforços. Além disso, aceitar que é possível passar da primeira para a segunda é admitir que a demonstração pode ser descoberta através de um contexto natural, em meio à discussão em que podem haver diferentes pontos de vista e não considerar essa passagem é, portanto, reconhecer o distanciamento entre os raciocínios empregados na argumentação e na demonstração, em que a primeira contribui para manter ou reforçar “mal-entendidos” (*Idem*, p. 43).

²⁹ “uma atividade que consiste em desenvolver uma ação justificada por um discurso fundamentado na teoria” (SALES, 2010, p. 52).

Essa posição de Duval foi notada por autores que, em uma direção oposta, apontam outros pontos de vista. Para Sales (2010), por exemplo, esse pensamento não é aplicável a todo tipo de raciocínio. Pedemonte (2002 *apud* BOAVIDA, 2005), mesmo reconhecendo as diferenças existentes entre os produtos de atividades argumentativas e demonstrativas, não deixa de advogar pela proximidade entre essas atividades. Neste prisma, a proposição de situações que instiguem ao aluno desenvolver conjecturas e a respectiva análise de sua veracidade, poderá conduzi-los a “identificarem argumentos e encadear dedutivamente na produção de demonstrações”, facilitando “a aprendizagem da demonstração e o reconhecimento da sua importância e necessidade” (BOAVIDA, 2005, p. 58).

A argumentação, no contexto da sala de aula, ganha destaque, sobretudo, pela sua proximidade com a linguagem do aluno, pois assegura as afirmações matemáticas por um meio compreensível àquele. A demonstração, por sua vez, apesar de validá-las, não garante esse convencimento já que seu alto grau de abstração pode torná-la complexa pra esse público.

Com efeito, embora a validade de um enunciado seja assegurada por uma demonstração, este facto nem sempre é evidente para os alunos que frequentemente não se apercebem desta validade. Assim, “a argumentação, mais próxima da linguagem do aluno, pode ajudá-lo a ver a verdade do enunciado. E esta visão que a argumentação traz é, no fundo, um preliminar à entrada numa prática da demonstração” (Pedemonte, 2002, pp. 19-20) (BOAVIDA, 2005, p. 58).

Concordamos com Duval (1993), a respeito da importância atribuída à argumentação no contexto do ensino de matemática, para ensinar raciocínios e procedimentos dessa área, sem, necessariamente, recorrer aos cálculos desenvolvidos pela lógica formal. A atividade argumentativa estende-se, também, por abrir possibilidades a trabalhos em grupos, fomentando a interação entre aluno-professor e, principalmente aluno-aluno, bem como a permissão de envolver estes em situações que os levem a examinar seus argumentos e a consideração de contradições (*Idem*).

Ao tratarmos da argumentação em uma perspectiva de ensino, para fins de nossa investigação, mais dois termos merecem atenção e, portanto, uma delimitação, principalmente, pela sinonímia a eles atribuída. Estamos referindo-nos a *Explicação* e *Justificação*, que conduzirão para a categorização da argumentação em explicativa e justificativa.

2.4 – Argumentação Explicativa e Argumentação Justificativa

Indo ao encontro da perspectiva de Sales (2010) e Attie (2016) reputamos que uma argumentação pode apresentar duas intencionalidades, ora apenas informar sobre um procedimento ou situação, ora, além de informar, torná-los compreensíveis. Dessa forma, os autores apontam aspectos tanto explicativos como justificativos, relacionados às finalidades, esclarecer e/ou convencer. É a partir dessas diferenças que a argumentação no ensino da matemática pode ser classificada em duas categorias, a *Argumentação Explicativa* e a *Argumentação Justificativa*.

No próprio contexto de ensino, há autores que não fazem a distinção conceitual entre essas expressões, e Sales (2010) aponta Arsac e Olerón, por exemplo, que consideram explicar como o mesmo que justificar. Attie (2016), entretanto, chega às definições de argumentação explicativa e argumentação justificativa, a partir das diferenças existentes entre os conceitos de explicação e justificação, apresentados por autores como Duval e Balacheff.

Na perspectiva de Duval (1993), a argumentação leva, necessariamente, ao ato de *justificar* que, por sua vez, compreende duas possibilidades para realizar sua ação, sendo elas, a produção de argumentos e seu exame de aceitabilidade³⁰. A produção dos argumentos incube-se de responder aos “porquês” das questões. As respostas aos questionamentos do tipo “*Por que afirmas que ...?*”, ou “*Por que você responde que ...?*” requerem apenas, uma explicação; enquanto que as respostas para “*Por que esse fenômeno acontece?*”, ou “*Por que obtemos tal resultado?*” demandam por um avanço nos argumentos, que necessitam de valor sobre as afirmações que lhes suportam (DUVAL, 1993, p.38-39, tradução nossa). Nessa perspectiva, a justificação atende ao requisito de ir além de respostas com simples afirmações, mas fornecendo e articulando razões para elas. Já o exame de aceitabilidade ou não, de um argumento, baseia-se em dois critérios: o da relevância – leva em consideração o conteúdo da afirmação, bem como da justificativa – e da força – referindo-se à sua resistência a contra-argumentos e à positividade de seu valor epistêmico, em relação ao auditório (DUVAL, 1993).

O autor acrescenta que

uma **explicação** dá uma ou mais razões para tornar compreensível um dado (um fenômeno, um resultado, um comportamento, ...). Mas essas razões na realidade têm uma função quase descritiva: ajudam a apresentar o sistema de relações (mecânico,

³⁰ Na perspectiva de Duval (1993), a primeira operação, ou seja, a produção de argumentos ou razões, encontra-se em um nível mais próximo da explicação (quando limita-se a uma mera produção, sem uma articulação de suas proposições, supomos), já o exame de aceitabilidade está mais relacionado ao raciocínio.

teórico, teleológico, ...) dentro do qual o dado para ser explicado ocorre ou encontra seu lugar. E como em qualquer descrição, o valor epistêmico das razões declaradas não desempenha nenhum papel (DUVAL, 1993, p.40, tradução nossa, grifo do autor).

Reforça-se o entendimento acerca da explicação aproximando-a de uma declaração sem a evidência de seu valor epistêmico, ou seja, não é possível ver a convicção de quem a emite, deixando-a carente de razões mais fundamentadas, que lhe emitam força. A explicação não tem como fim a determinação do valor de verdade, mas, mais a descrição de um sistema, apenas a sua explicitação.

Para Balacheff (2000), a *explicação*, situada no nível de quem a profere, tem por finalidade tornar inteligível ao espectador a verdade de uma proposição que já foi adquirida por aquele primeiro. O discurso explicativo tem por base a linguagem natural, e a validade de uma proposição é estabelecida e garantida através dos conhecimentos do locutor e de sua delimitação acerca da verdade (*Idem*).

Isto posto, podemos conceituar os tipos de argumentação, principalmente, a partir da classificação e caracterização proposta por Sales (2010) e Attie (2016).

A argumentação explicativa expõe o funcionamento de um processo sem emitir valores ou estabelecer relações significativas para tal. Supondo um discurso prático, pretende assegurar a verdade de uma proposição por via da constatação. Compreendendo-a como uma síntese de ideias, seu escopo reside no esclarecimento.

A argumentação justificativa, além de mostrar os passos do processo realizado, evidencia as razões que os asseguram. Por conseguinte, as ideias apresentadas são preliminarmente delineadas e sustentadas por fundamentos lógico, capazes de legitimar propriedades e procedimentos. A finalidade dessa categoria é, para além do esclarecimento, tornar compreensível uma declaração ou uma ação e, assim, alcançar o convencimento.

Concordamos com Sales (2010), ao declarar que toda argumentação busca explicar, mas nem todas vêm assistidas de justificativas, e assim, a explicação nem sempre é sinônimo de convencimento. Contrariamente, quem se prontifica a justificar, tem de recorrer a uma explicação e, de modo indispensável, visa defender uma ideia ou uma ação.

Associando-as ao contexto de ensino da matemática, de um lado temos a argumentação explicativa, vinculada à práticas que privilegiam a apresentação de conteúdos de forma estanque, com fórmulas prontas, sem contextualizações históricas e/ou justificativas plausíveis, corriqueiramente empregada como ferramenta para resolução de tarefas simples e diretas. Nesse caso, muitas vezes, a incumbência do aluno limita-se à mera reprodução das etapas realizadas pelo professor. Em contrapartida, a argumentação justificativa apresenta

razões que garantem a validade e fundamenta conceitos e procedimentos matemáticos. Logo, a credibilidade de um processo não fica à mercê, somente, da crença que o aluno tem na autoridade do docente.

Dessa forma, consideramos que, ao adotar a argumentação justificativa em seu procedimento didático, o professor não limita a sua aula a uma mera imitação de procedimentos. Ao contrário, ele busca clarificar os processos matemáticos e suas características, alicerçando os mesmos em justificativas válidas, que podem ser assimiladas pelos alunos e os conduzir para a aprendizagem e compreensão dos conhecimentos matemáticos, além de poder contribuir para que os alunos desenvolvam suas capacidades argumentativas.

Ainda sobre esta última categoria, a despeito de estarmos considerando-a em um contexto escolar, não deixamos de considerar sua possibilidade em dialogar com aspectos mais formais em seu processo de justificação, mesmo porque, sendo a matemática uma ciência, por natureza, hipotético-dedutiva (BRASIL, 2018), é importante que os alunos familiarizem-se com essa perspectiva também. Por outro lado, compreendemos que neste nível de ensino, a formalização matemática não será plenamente submetida a eles. Sob o ponto de vista em que enquadra diferentes justificativas, essa argumentação pode contribuir para uma aproximação com meios de autenticação de resultados, com linguagens, enunciados e processos matemáticos.

Consideramos importante ressaltar que existe uma relação entre estas duas categorias de argumentação, pois entendemos que a Argumentação Justificativa compreende a Explicativa, em um sentido de inclusão, pois a primeira é, necessariamente, composta pela segunda mais as razões que lhes fundamenta. O valor justificativo de uma argumentação acende-se ao buscar, além do “como” se resolve determinado problema (ao que se propõe a explicação), responder também aos “porquês” de se resolver daquela maneira.

Enfim, parafraseando e complementando Sales (2010), a racionalidade e intencionalidade empregadas nos processos argumentativos é que irão distinguir e caracterizar cada categoria de argumentação – Explicativa ou Justificativa.

2.5 – Argumentação nos Documentos Oficiais

É patente que o ensino brasileiro é norteado por documentos oficiais, que visam, de modo geral, subsidiar o planejamento e a prática pedagógica, de modo a supostamente atender

às necessidades futuras dos estudantes. Tentando alinhar essa realidade aos nossos objetivos, consideramos relevante prestar um olhar sobre como a argumentação nas aulas de matemática emerge nestes textos. Dentre aqueles presentes no sistema educacional, aqui serão considerados os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). De imediato destacamos que nenhum deles tem a finalidade e, conseqüentemente, não ditam como o professor deve conduzir suas aulas. Mas foram, e são, importantes na elaboração de currículos, na formação inicial e na produção de livros e materiais didáticos.

Apesar de ser um texto mais recente a BNCC³¹ não substitui os PCN, os dois coexistem no âmbito educacional. O primeiro, de caráter normativo e obrigatório, pretende nivelar a educação básica por meio da proposição de conteúdos mínimos a serem ensinados em cada etapa escolar, bem como aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas por todos os estudantes ao longo da educação básica, que devem concorrer para o desenvolvimento de dez competências gerais. Os PCN de matemática, mesmo não sendo um texto tão recente e não obrigatório, ainda trazem discussões e referências fundamentais, sobre os objetivos a serem alcançados em cada ciclo e os conteúdos que contribuirão para tal, além de possíveis abordagens metodológicas a fim de potencializar a aprendizagem da matemática.

Ao considerar o Ensino Fundamental Anos Finais³², os PCN de matemática o separa em terceiro (6º e 7º anos) e quarto (8º e 9º anos) ciclos do Ensino Fundamental. Nesse documento, o ofício desta área do conhecimento é ilustrado na sua designação como um instrumento para compreender e atuar no mundo. Fruto da construção humana, por intermédio de sua interação com o meio em que vive, a matemática não restringe-se à visão de um corpo imutável e que compete ao aluno assimilá-la. Contrariamente, é uma “ciência viva”, presente no cotidiano, nas universidades, centros de pesquisas e útil para solucionar problemas científicos e tecnológicos (BRASIL, 1998, p. 24).

Apesar de, em ambientes escolares e em livros didáticos, a divulgação do conhecimento matemático ainda resguardar a sua forma lógico-dedutiva, compreendida por um sistema de axiomas, o documento ressalta o exercício não só da dedução, como também da indução em Matemática, por serem importantes no desenvolvimento de capacidades

³¹ Devido às circunstâncias com a qual foi elaborada e implementada, esta Base foi alvo de diversas críticas, as quais aqui não serão consideradas. Nosso interesse parte do papel a ela atribuída na educação e que comunga diretamente com o nosso estudo, visto que evidenciamos o trabalho do professor e do livro didático, que por sua vez, devem estar legalmente alinhados a este documento.

³² A partir de agora faremos referência a esta etapa apenas por Ensino Fundamental, portanto dispensaremos os termos “Anos Finais”, por estar clara que é o período tratado neste estudo.

essenciais ao aprendizado dessa ciência, como formular e testar conjecturas, generalizar e desvendar regularidades (BRASIL, 1998).

No que concerne ao ensino e à aprendizagem específicos para o Terceiro Ciclo, os PCN de matemática reconhecem que é neste ciclo que “ampliam-se as capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas, para tomar algumas decisões, para abstrair significados e idéias [sic] de maior complexidade, para argumentar expressando idéias [sic] e pontos de vista com mais clareza” (BRASIL, 2018, p.62). Ao dialogar acerca dos conteúdos propostos para este ciclo, reforça-se a importância do trabalho com a resolução de situações-problemas, a fim de incitar a construção e análise de diferentes processos de resolução e, conseqüentemente, a necessidade de construir argumentos plausíveis por partes dos alunos.

De forma mais explícita, ainda nesta seção, a argumentação é ressaltada como uma capacidade a ser desenvolvida no Terceiro Ciclo, com a expectativa de “que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las” (BRASIL, 1998, p.71), embasando as justificativas em conteúdos matemáticos e que, se possível, sejam capazes de responder a contra-argumentos ou réplicas, com o argumento tornando-se pertinente e, portanto, aceito (*Idem*). Assim, “a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la” (*Idem*, p. 70).

Esse documento compreende que o trabalho com a argumentação no Terceiro Ciclo, favorece o avanço para que no Quarto Ciclo, os alunos reconheçam a importância de demonstrações em Matemática e possam compreender a prova de alguns teoremas (BRASIL, 1998). Além disso, o texto aponta que ainda que por vezes, assemelhem-se por empregarem conectivos lógicos iguais, a demonstração exige uma formalidade maior, que não é obrigatória na argumentação (BRASIL, 1998, p.86). Depreende-se, dessa forma, a existência de diferenças entre esses dois processos, argumentação e demonstração, mas, como em nosso entendimento, há uma continuidade entre elas.

A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro, ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração (BRASIL, 1998, p. 70).

Chegando-se ao Quarto Ciclo, especialmente no assunto de Geometria, podem surgir as primeiras oportunidades para o contato com os raciocínios dedutivos, mas para as séries em

questão, isso não significa que acontecerá um estudo absolutamente formal e axiomático, até porque preconiza-se que o uso deste raciocínio não limite-se apenas a este tema e que o trabalho com argumentação perdure nesse ciclo, visto sua importância para a compreensão de demonstrações, o mesmo sendo defendido para as verificações empíricas, essenciais para produção de conjecturas e compreensão de conceitos (BRASIL, 1998).

No decorrer de todo o ensino fundamental, as aprendizagens a serem desenvolvidas encontram-se estruturadas em oito objetivos gerais. Mencionamos esse fato por considerarmos relevante apontar três deles, que, embora não façam referência explícita ao termo argumentação, possuem uma relação com ela.

- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (BRASIL, 1998, p. 48).

Para o último, sua relação, de forma mais evidente, emerge ao esperar que o aluno seja capaz de elaborar, apresentar e defender suas presunções de forma precisa e por diferentes representações. Para o primeiro, entendemos que a produção e avaliação de informações, de forma crítica e significativa, sobressaem à capacidade argumentativa, quando requer a compreensão de um conjunto de dados devidamente analisados e coerentes para garantir a pertinência dessas informações. Por fim, raciocínio, processos matemáticos, validação, são termos que apontamos relações diretas com a argumentação. Logo, entendemos que a argumentação está no segundo objetivo citado, com a necessidade de raciocinar matematicamente para desenvolver estratégias alternativas, assim como buscar meios para determinar sua legitimidade, em outras palavras, construir argumentos plausíveis.

Matheus (2016), também reconhece a presença da argumentação no texto, mas sente falta de um detalhamento mais direto sobre o trabalho pedagógico que envolva argumentação e prova matemática. Ao referenciar um dos participantes na elaboração do documento, Ruy Cesar Pietropaolo, assevera sua posição, pois o mesmo declara que essa temática e suas potencialidades não eram foco das discussões, logo não ocorreu um debate mais acentuado a esse respeito. O pouco quantitativo de pesquisas na época de sua elaboração, é um dos motivos apontados para esse fato.

Com referência à BNCC, a argumentação sobressai como a sétima competência³³ geral definida neste documento, o que significa que, ao trabalhar com a matemática, ou em qualquer outra disciplina, os esforços pedagógicos devem estar direcionados para desenvolver, também, esta capacidade. Assim, ao fim da educação básica, dentre outras competências, os estudantes devem,

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta (BRASIL, 2018, p. 09).

Pretende-se, dessa forma, que os alunos que sejam capazes de selecionar, construir e sustentar ideias embasadas em elementos que transmitam credibilidade e que seus conhecimentos possam impulsionar assuntos relevantes, que proporcionem o bem comum, individual, social e ambientalmente falando.

Além das competências gerais mencionadas, outras oito são definidas específicas da área da matemática para o ensino fundamental. Destas, listamos três, por apresentarem vínculos implícitos com a argumentação:

- 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
[...]
- 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
[...]
- 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Consideramos que, para estimular a produção de argumentos convincentes, não basta apresentar uma afirmação, é essencial que esteja acompanhada de justificativas que lhes deem respaldo, para que assim, as ideias possam ser organizadas, articuladas e esclarecidas. Além disso, interpretar e avaliar informações exige dos alunos conhecimentos mais aprofundados de procedimentos, conceitos e signos matemáticos. Da mesma forma, representar informações e resultados valendo-se de múltiplos meios vai além do conhecimento exclusivo de fórmulas, se

³³ De acordo com este documento, “competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 08).

não se conseguir estabelecer significados para tais. Por fim, consideramos que investigar ou enfrentar situações-problemas em diferentes contextos requer o reconhecimento e o uso dos conhecimentos matemáticos, suas definições, propriedades e procedimentos, para a elaboração de conjecturas, estratégias e a busca por uma solução plausível e fundamentada.

Ainda que o documento tenha sido e ainda seja alvo de diversas críticas, é importante admitirmos sua aplicabilidade na sociedade contemporânea, e uma potencialidade para formar cidadão críticos e responsáveis. A BNCC destaca a necessidade de que o conhecimento matemático esteja acessível a todos os estudantes da educação básica e que seus sistemas abstratos, vinculados ou não ao mundo físico, possibilitam compreender os diferentes fenômenos, construir representações e argumentações consistentes em variados contextos (BRASIL, 2018).

Para além da elaboração dos argumentos, nesta etapa de ensino os alunos, paulatinamente, devem ser iniciados a analisar, compreender e avaliar argumentações matemáticas, através da leitura de textos dessa área e estímulo ao senso crítico dos argumentos neles contidos (BRASIL, 2018).

A despeito do rigor característico inerente a esta área do conhecimento, caracterizada como uma “ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados”, esta base não exclui seu “papel heurístico das experimentações na aprendizagem” (BRASIL, 2018, p. 265) ressaltando assim o trabalho com argumentação (AGUILAR JR; CALDATO, 2020), pois, à medida em que o aluno é conduzido a investigar, explorar os objetos matemáticos, suas verdades são construídas e os resultados que lhes desejava ensinar são descobertos. Neste decurso, são levados a conjecturar e a buscar evidências em noções já conhecidas para suportar suas proposições.

Apesar de percebermos que aspectos relacionados à argumentação, a demonstrações mais formais e a validação de conjecturas, por exemplo, estarem mais acaloradas nas competências específicas do Ensino Médio, no qual não entraremos com mais detalhes, a BNCC destaca que nos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos já podem ser estimulados a deduzir algumas propriedades e verificar conjecturas, a partir de outras (BRASIL, 2018).

Assim, de modo geral, entendemos que a argumentação é tratada como uma capacidade ou uma competência a ser desenvolvida em estudantes ao longo da educação básica, ainda que os documentos assinalados não forneçam maiores informações de como esse trabalho deve ocorrer.

Ao fim da nossa leitura, conseguimos encontrar pontos em que aparece, implícita ou explicitamente, a defesa da inserção da argumentação na educação básica. Neste enredo, não deixamos de notar a presença da demonstração, um aspecto que os alunos podem desenvolver antes de adentrar no ensino médio, não de forma brusca e imediata, mas dentro de um processo gradual.

Arelada a esses anseios, importa que os objetos matemáticos sejam apreendidos de forma significativa. Portanto, para que a argumentação seja produto no processo de aprendizagem, é interessante que se faça presente no processo de ensino, seja nos textos dos livros didáticos, no discurso do professor ou em suas habilidades para instigá-la.

2.6 – Argumentação no Ensino e na Aprendizagem

Finalizamos anteriormente com o tratamento da argumentação como uma competência a ser desenvolvida em estudantes, desde seu período na educação básica, assim como um meio de ensino. Consideramos que essa ideia encontra relações com uma inquietação apresentada por Vigo e citada por Sales (2010, p. 100): “a demonstração é um tema, uma prática ou uma habilidade a ser desenvolvida, dentro do currículo?”. Reformulando-a questionamos: a argumentação é uma prática ou uma competência a ser desenvolvida dentro do contexto educacional?

Em nossa visão apontamos serem os dois, que estão intrinsicamente relacionadas, pois, como prática, deve incumbir-se em oferecer significado aos objetos matemáticos e promover a interação da comunidade estudantil com os conhecimentos e, portanto, espera-se que conduza ao desenvolvimento e aperfeiçoamento de competências argumentativas.

Nessa questão encontramos semelhanças com as finalidades apontadas por Leitão (2011), para a introdução da argumentação em situações de ensino e de aprendizagem, interligadas e igualmente relevantes, a saber: “argumentar para aprender” e “aprender a argumentar”.

Numa primeira, a argumentação é vista como atividade cognitivo-discursiva que possibilita uma melhor apropriação de temas curriculares pertencentes a diferentes campos de conhecimento (história, ciências, línguas, matemática etc.) [...]
Numa segunda direção de estudo, a argumentação é vista como uma atividade que demanda competências cognitivo-discursivas particulares (de identificação, produção e avaliação de argumentos) a serem, elas próprias, adquiridas e desenvolvidas através de práticas educacionais específicas (LEITÃO, 2011, p. 15-16).

Assim, como estratégia metodológica, a argumentação surge associada ao desencadeamento da construção do conhecimento e do exercício da reflexão (LEITÃO, 2011). Tomando um sentido apontado por essa autora, construção entendida como um processo que viabiliza ao indivíduo interpretar, compreender e formular conceitos e pontos de vista, como, também, entender e dominar procedimentos de diversos campos do conhecimento e assim, dar sentido à realidade que o cerca. O processo reflexivo é compreendido como a capacidade de pensar, não só no objeto de estudo, mas ponderar as ideias a respeito desse objeto, levando-se em consideração as bases que as sustentam e as limitações que as demarcam. Esse processo de pensar sobre as próprias ideias decorre da necessidade, além da produção e da avaliação de argumentos, de responder a contra-argumentos, e tal conflito leva o sujeito a ponderar suas ideias, revisá-las e a tomar suas decisões a respeito de sua posição inicial (se a mantém ou a transforma) (*Idem*).

As ideias até aqui evidenciadas nos permitem enxergar potencialidades expressivas da argumentação para alcançar objetivos e competências primordiais na aprendizagem (LEITÃO, 2011; LIN, 2018; NUNES e ALMOULOU, 2013a). Dentre elas, podemos destacar: a melhor compreensão dos temas em estudo ao invés da memorização de tópicos específicos; o florescimento de habilidades de raciocínio, ou seja, da elaboração e da emissão de razões que justifiquem uma assertiva (a utilização dos conhecimentos para argumentar); o amadurecimento de capacidades reflexiva, crítica e comunicativa, de modo a propiciar que os alunos possam analisar, selecionar e avaliar seus argumentos e de seus pares e lidar com opiniões controversas, além da contribuição para o desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno, para que este possa tomar partido e escolher seus caminhos conscientemente, sabendo o porquê da opção de um procedimento e não outro.

O valor atribuído à argumentação nos processos de ensino e de aprendizagem transparece na crescente discussão entre pesquisadores do campo educacional. Entretanto, a pouca expressividade dessa prática nas salas de aulas, demonstrando certa dissonância entre os dois campos, é notada por alguns autores (BOAVIDA, 2005; LEITÃO, 2011; NUNES e ALMOULOU, 2013b; LIN, 2018). De acordo com Lin (2018), uma das causas de lentidão para essa inserção é a complexidade do processo argumentativo, revestido de desafios, tanto para os alunos como para os professores. Se, por um lado, existe a dificuldade dos estudantes de diferentes níveis, em justificar as soluções apresentadas e ainda o fato de que

os alunos não compreendem a necessidade da prova, não lhe reconhecem valor, não se apercebem do poder explicativo que pode ter e, frequentemente, não conseguem encontrar sentido nos raciocínios demonstrativos, que surgem aos seus olhos como algo de estranho e obscuro (BOAVIDA, 2005, p. 05).

Por outro lado, temos que

os professores que nunca estudaram argumentação quando eram crianças podem se sentir despreparados para ensiná-la (Gabel; Dreyfus, 2013; Reid; Zack, 2011). Muitos professores de Ensino Fundamental não acham que possuem formação suficiente em matemática para ensinar argumentação ou nem mesmo uma ideia clara de como a argumentação seria. Muitas vezes, os próprios professores enfrentam dificuldades similares às daquelas de seus estudantes em termos de argumentação (LIN, 2018, p. 1172).

Esse excerto, principalmente, nos fez refletir acerca dos fatores que podem exercer influência no desenvolvimento da argumentação do professor, nas perspectivas aqui assinaladas, considerando que sob este sujeito recai uma grande responsabilidade para legitimar conhecimentos e raciocínios específicos (LEITÃO, 2011) e uma condução que favoreça o desenvolvimento, aperfeiçoamento e articulação dos argumentos emitidos pelos estudantes. Além dos dois aspectos destacados, isto é, a formação inicial do docente e sua formação enquanto aluno da educação básica, a concepção que o docente porta sobre essa área do conhecimento, é, por nós, considerada uma influenciadora, também, em sua argumentação e, consequentemente, na adoção de práticas argumentativas em suas aulas. Concordamos que

mesmo aquelas práticas docentes criticadas, acabam, de certa forma, sendo inconscientemente internalizadas e parcialmente reproduzidas, pois o aluno, para poder obter êxito na disciplina, deve se sujeitar àquela forma de ensinar e aprender. É assim que se constitui a tradição pedagógica, a qual, apesar dos avanços das pesquisas em Educação Matemática, tem feito com que as práticas escolares pouco pareçam evoluir.

[...]

Nesse contexto da tradição pedagógica, o conceito de uma aula didaticamente perfeita é aquela, cujo contrato didático prevê que o professor apresente e conduza a aula e os raciocínios de forma clara, lógica e mais precisa possível, cabendo aos alunos acompanharem, fixarem os ensinamentos através de exercícios repetitivos e devolvê-los depois na prova (FIORENTINI, 2005, p. 111).

Neste tipo de processo de ensino, a oportunidade para questionar ou desenvolver argumentos alternativos tornam-se escassos. Desse modo, subentende-se a dificuldade de pessoas que não tiveram contato com práticas que pusessem a argumentação como um meio e um fim de aprendizagem³⁴, em instaurar atividades argumentativas em suas aulas de matemática.

Igualmente, como se é de esperar, as situações experienciadas no decurso da *formação inicial*, também influirão na constituição da prática do futuro professor. Embora sejam as

³⁴ Sobre as possíveis variáveis na argumentação de estudantes, recomendamos uma leitura no trabalho de Sá (2021), no qual a mesma aponta alguns desses fatores, tais como a Interação Social/Trabalho em Grupo, o Professor, as Metodologias e os Tipos de Atividades, as Concepções acerca da Matemática, tanto dos alunos como do professor, o Conhecimento Prévio e Cotidiano e a Interpretação/Vocabulário.

disciplinas de cunho didático-pedagógicas as que estão focadas nos estudos relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática, elas não são as únicas que contribuirão para a *práxis* do futuro professor. Por certo, conforme salienta Fiorentini (2005, p. 110), os professores das disciplinas específicas da Matemática, para além de conteúdos, “ensinam também um jeito de ser pessoa e professor”.

Ao dar-se conta do ensino ofertado por essas disciplinas específicas, que tendem a ser a maioria da grade curricular do curso de licenciatura em Matemática, nota-se o predomínio de traços das tendências formalistas, em que se privilegiam demonstrações formais, rigorosas e precisas para validar enunciados matemáticos. Para a formação de um matemático isto deve ser essencial e talvez o bastante, mas para a formação de um professor de matemática da educação básica esse aspecto é evidentemente necessário, mas insuficiente. Ao enfatizar essa ideia, Shulman (2017 *apud* FIORENTINI, 2005) não considera que isto signifique que a Matemática para o licenciando seja inferior ou mais simples que aquela apresentada para o bacharel, sua compreensão diz respeito às diferenças ao exercício de cada um.

Nessa perspectiva, orientações, discussões e convívio com práticas que estimulem e explorem o ensino e a aprendizagem, voltados para a argumentação matemática, ao nível da educação básica, tornam-se reduzidos e o impacto no exercício profissional, com esse tipo de formação, pode transparecer através de práticas que privilegiam a apresentação de fórmulas e algoritmos, incentivando a memorização e a reprodução. Essa ideia é reforçada por Sales (2010), que afirma que os professores que são moldados sob a perspectiva formalista se encaminham para o desenvolvimento de práticas tecnicistas. Além disso, diante de situações avaliativas que diligenciam por justificativas, há uma forte inclinação dos professores por argumentos que se aproximam da prova formal, mesmo diante de outras argumentações potencialmente convincentes, pois “a preferência pelos argumentos mais técnicos parece estar relacionada à influência da formação acadêmica (KNUTH, 2002, JONES, 1997, HANNA, 1990, 1995) pelo rigor na construção e encadeamento lógico dos argumentos” (AGUILAR JR, 2012, p. 119).

Para D’Ambrósio (1993, p. 38), “difícilmente um professor de Matemática formado em um programa tradicional estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares”, o que contraria a própria Resolução do Conselho Nacional da Educação, Conselho Pleno – CNE/CP 01/2002 e diversos educadores, para os quais “o curso de licenciatura deve estar orientado para o desenvolvimento de competências para o docente atuar na Educação Básica” (MATEUS, 2015, p.28), e reforçando a velha e recorrente discussão acerca da segregação entre a formação docente e as demandas da educação escolar.

Autores como D’Ambrósio (1993) e Fiorentini (2005) preconizam que as disciplinas específicas da Matemática poderiam ser aprendidas por modelos didáticos alternativos, já que os saberes matemáticos podem ser problematizados e explorados em suas diversas dimensões, conceituais, procedimentais, epistemológicas e históricas, “de modo que o aluno se constitua em sujeito de conhecimento, isto é, no principal protagonista do processo de aprender” (FIORENTINI, 2005, p. 112). Da mesma forma, as demonstrações e provas poderiam ganhar relevo não só nas disciplinas específicas, mas também naqueles referentes à área de ensino (MATEUS, 2015).

Outro aspecto para o qual tecemos relações com a prática pedagógica, conseqüentemente, com o trabalho com a argumentação, refere-se às *concepções* que o docente tem acerca da matemática. Conforme Ponte (1992), as nossas concepções pertencem ao campo do cognitivo, constituídas pela forma que organizamos e vemos o mundo e são formadas a partir de nossas experiências, bem como da interação com o outro. Em suas palavras,

as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão.

As concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros) (PONTE, 1992, p. 01).

Utilizadas como um meio de direcionar caminhos e fundamentar decisões, nossas concepções acabam influenciando em nossas práticas, ainda que essas estejam vinculadas a diversos fatores. Além disso, essas práticas “levam naturalmente à geração de concepções que com elas sejam compatíveis e que possam servir para as enquadrar conceptualmente” (PONTE, 1992, p. 10). No ensino de matemática, ainda que não seja simples relacionar concepções, decisões e ações (THOMPSON *apud* PONTE, 1992), a concepção que o professor apresenta da Matemática, do seu ensino e de sua aprendizagem, é um fator sutil, mas importante, na determinação do seu modo de ensinar (PONTE, 1992; FIORENTINI, 1995; AGNE e HARRES, 2015).

Por exemplo, o professor que concebe a Matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente sendo construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais.

Da mesma forma, o professor que acredita que o aluno aprende Matemática através da memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que

entende que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático (FIORENTINI, 1995, p. 04-05).

Assim, o professor que tem a concepção na perspectiva da matemática que podemos chamar de tradicional tem forte tendência para não valer-se da argumentação no ensino dos raciocínios matemáticos, bem como não priorizar o desenvolvimento dessa capacidade nos estudantes. Por outra via, aquele que leva em consideração a essência histórica e social do conhecimento matemático, bem como da aprendizagem como um processo em construção e reflexivo, tem uma maior propensão para aceitar e utilizar a argumentação em sua prática pedagógica.

Do mesmo modo que nossas concepções influem em nossa prática, a recíproca também é válida. Logo, nossas experiências no decorrer da formação acadêmica influenciam as concepções e práticas no ser professor (CURY, 1999; FIORENTINI, 2005; AGUILAR JR. e NASSER, 2012), como já tratamos anteriormente.

Entendemos que os fatores citados não são os únicos, ao passo que diversas circunstâncias podem estar atreladas ao nosso desenvolvimento como profissionais, além de que, nossa constituição como professor é contínua, logo estamos sempre em processos de construção, desconstrução e reconstrução.

Neste enredo a respeito da argumentação no ensino da matemática, consideramos pertinente destacar a ideia, de modo geral, acerca dos conhecimentos necessários ao professor ao adotar esta prática. Incumbido de estabelecer o elo entre os objetos matemáticos e o aluno, para além de *conhecimentos específicos* dos conteúdos matemáticos, que fazem referência à organização do conhecimento, a mesma requer do docente, *conhecimentos pedagógicos* sobre tais conteúdos, que vão "além dos assuntos de conhecimento da matéria em si, para dimensão da essência do conhecimento da matéria para ensinar" (SILVA; BARROS, 2017, p. 06). Além desses, uma terceira vertente compõe os conhecimentos necessários à ação docente, o *conhecimento curricular*, que "refere-se aos conhecimentos de todos os conteúdos ensinados, nos distintos anos de escolaridade, e os materiais didáticos empregados para promover a aprendizagem" (*Idem, Ibidem*).

Consequentemente, consideramos importante que o docente disponha de um repertório didático diversificado, com exemplos, representações e argumentos, para os diferentes ritmos e processos de aprendizagem. O ato de ensinar demanda por práticas que possibilitem ao aluno desenvolver sua criatividade, seu raciocínio lógico e que os conteúdos curriculares possam transformar-se em conhecimento para ele (PONTES, 2018). Até, a partir de um

exercício, o docente pode propiciar o momento para despontarem situações argumentativas, pois

tão importante como a tarefa, são os meios que o professor usa para fazer surgir contribuições dos alunos. É, também, o modo como lida com estas contribuições e a capacidade de improvisar intervenções que, enraizando-se no que ouve, incentivem a expressão de ideias e ajudem os alunos a avançar na compreensão da Matemática. É, ainda, importante a gestão do poder avaliativo e do controle dos discurso da aula, se não forem partilhados com os alunos, dificilmente estes se envolverão em actividades de argumentação. Em contrapartida, como diz uma das professoras, actividades de carácter argumentativo podem surgir mesmo no âmbito da resolução de exercícios, se o professor estiver atento aos acontecimentos da aula e os rentabilizar incentivando a apresentação de explicações e justificações e delegando nos alunos a responsabilidade de avaliarem ideias que surgem e de se posicionarem relativamente a elas (BOAVIDA, 2005, p. 895-896).

Enquanto em aulas tradicionais, o professor detém um maior controle de suas variáveis, as mesmas podem seguir diferentes direções das imaginadas por aquele, “pois ensinar envolve relações entre pessoas e a imprevisibilidade faz parte da natureza humana” (BOAVIDA, 2005, p. 893). Isso nos leva a ponderar o complexo trabalho ao qual o professor é posto em sua prática de ensino, exigindo-lhe competências para seu desenrolar e evidenciando a importância da constante reflexão sobre sua prática docente.

Na perspectiva deste estudo, baseamo-nos nas ideias apresentadas e situamos o nosso relativo às categorias de argumentação, Justificativa e Explicativa. Consideramos relevante destacar acerca da nossa opção por este modelo e não pelo Modelo de Toulmin ou da tipologia de provas de Balacheff. Embora, tenha-se intensificado a utilização do primeiro no meio educacional, as potencialidades dele evidenciadas se mostram mais apropriadas, basicamente, à utilização em processos de comunicação de ideias, onde há uma interação em que os indivíduos discutem sobre um determinado tema para sustentar/chegar a uma conclusão, por exemplo, na relação professor-aluno ou aluno-aluno. Outrossim, os tipos de provas propostas por Balacheff, nos pareceram mais condizentes para a classificação de argumentos emitidos por estudantes. Em nosso caso, por sua vez, a proposta escolhida volta-se, essencialmente, para o livro didático e para um único indivíduo, o professor, bem como os processos de validação por ele utilizado no conteúdo definido.

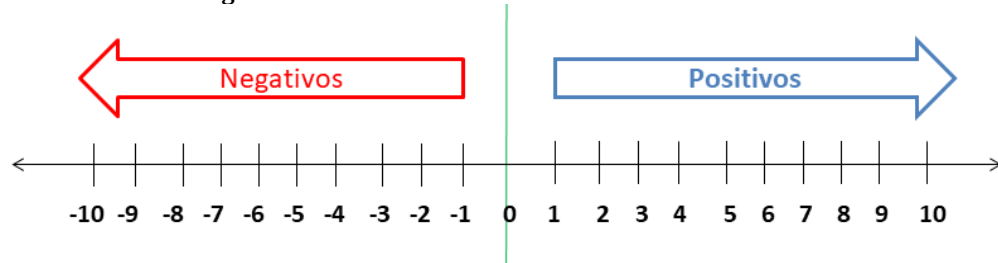
Ao adotarmos as categorias para análise de nossos dados, além de entrarmos em defesa para a presença da argumentação justificativa no ensino da matemática, a seguir apresentamos possíveis argumentos que podem ser empregados para justificar as operações com os números inteiros, a saber, adição, subtração, multiplicação e divisão.

2.7 – Justificativas para as Operações com os Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é composto pelos números naturais agregando-se os novos elementos, os números negativos. Simbolizado por $\mathbb{Z}$, em alusão a palavra *Zahl* (número, em alemão), tem-se que $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$.

Considerando-se sua representação na reta numérica, os números positivos e os números negativos encontram-se ordenados em sentidos opostos, separados por um ponto de origem, que, nesse caso, é o zero. À direita deste número estão os primeiros e à sua esquerda, os segundos. Nessa perspectiva, entende-se um novo significado atribuído ao zero, não mais, apenas, para indicar ausência de quantidade.

Figura 3: Reta Numérica dos Números Inteiros



Fonte: Autora, 2022

Caraça (1951, p. 97), define os números relativos como a diferença $a - b$, sendo a e b números reais quaisquer, “que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$ ”, respectivamente.

Se for $a > b$ o número relativo (positivo) coincidirá com o resultado que, nos campos numéricos anteriores, aprendemos a determinar; se for $a < b$, o número relativo (negativo) tomar-se-á como igual à diferença $b - a$, precedida do sinal – (menos) (CARAÇA, 1951, p. 97).

Conforme salienta Pontes (2010), não só os números adquirem novos significados, mas as operações neste novo conjunto, também, têm seus conceitos ampliados. Os sinais de mais e menos, antes vistos apenas como apenas operatórios, indicando acréscimos e retiradas (ou diferenças) respectivamente, são vistos por outra perspectiva. Em uma soma, por exemplo, é possível obter situações de decréscimos ou resultados zero. A subtração é empregada como uma transformação de oposição, pondo em evidência sua definição de operação inversa à adição. À multiplicação são, também, anexadas novas ideias, pois utilizar o conceito de somar um número, quantas vezes um operador multiplicativo indicar, como era feito com os números naturais, funciona até certo ponto com os inteiros, mas pode encontrar empecilhos quando se tem dois termos negativos (*Idem*).

Segundo a BNCC, é no 7º ano do Ensino Fundamental que deve ocorrer o primeiro contato formal dos alunos com os números inteiros, englobando sua história, usos, operações, ordenação e associação na reta numérica. Os PCN de Matemática, indicam a início do estudo dos números inteiros no terceiro ciclo, estendendo-se ao quarto, de modo que os alunos possam reconhecê-los em contextos cotidianos e históricos, bem como explorar situações-problemas que envolvem falta, diferença, orientação e deslocamento.

Este último documento propõe que o presente conteúdo manifeste-se como uma ampliação do campo aditivo, a partir de situações em que seja clara a presença desses números. Além disso, atenta-se para as noções intuitivas que os alunos dispõem acerca dos inteiros, advindas do seu cotidiano – relações financeiras (créditos e débitos), perdas e ganhos em jogos, variações de temperaturas –, como um meio para sua introdução, permitindo-lhes as primeiras comparações e significados para o mesmo. Mas, no mesmo passo, alerta que o ensino não pode prender-se a esse aspecto, de modo que, também, incorpore “situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais”. (BRASIL, 1998, p. 66).

Dentre os recursos³⁵ recomendados pelos PCN, encontra-se a reta numérica, para explorar diversos pontos acerca do conteúdo, desde a introdução, para compreender conceitos, como visualizar o zero como origem, identificar um número e o seu respectivo oposto, ordenar e comparar e até mesmo para inferir as regras que regem as operações de adição e subtração. Outro meio proposto para o ensino destas operações é através do ábaco de inteiros, composto por duas varetas verticais, pregadas em um bloco, que receberão argolas de cores diferentes, que indicam quantidades positivas e negativas. Este recurso permite ao aluno, além de visualizar valores positivos, negativos e o conceito de zero, construir as regras para o cálculo daquelas operações (BRASIL, 1998).

Para o ensino da multiplicação e divisão, o documento aponta o estudo de um problema histórico, a partir do cálculo da área de um retângulo e por meio da construção de uma tabela com a multiplicação entre números positivos e positivos, positivos e negativos e negativos e negativos. A inferência das regras de sinais a partir desta proposta ocorreria através da observação de regularidades em uma série numérica.

Além de documentos oficiais, muitos autores têm direcionado esforços para propor alternativas didático-pedagógicas para um ensino mais proveitoso sobre o conjunto dos

³⁵ A utilização da reta numérica e da tabela multiplicativa para a realização das operações com os números inteiros serão apresentadas mais adiante, em nossas sugestões de argumentações para esse ensino.

números inteiros, incluindo suas operações, que escapem de um tratamento puramente repetitivo, impositivo e, por vezes, até distante dos conhecimentos dos alunos.

Bruno (1997), por exemplo, compreende que o conhecimento numérico envolve vários aspectos e, portanto, é relevante que seu ensino não esteja restrito apenas a um deles. Desses, ele chama a atenção para três, que denomina de *dimensões abstrata, reta e contextual*. Igualmente, salienta o envolvimento de transferências entre essas dimensões, reconhecendo que o conhecimento dado em uma dimensão pode ser expresso em outras.

Na *dimensão abstrata* estão localizados os conhecimentos referidos aos sistemas numéricos, como estruturas matemáticas e as formas de escrita dos números.

Na *dimensão da reta* se localiza a representação dos números sobre uma reta, baseada na identificação dos números reais com os pontos da reta e com vetores na mesma.

Na *dimensão contextual* se encontram as utilidades e os usos dos números (BRUNO, 1997, p. 06, grifos do autor, tradução nossa).

A variedade e a combinação de dimensões no ensino possibilita um equilíbrio entre elas, de modo que uma não sobressaia em detrimento da outra. Além disso, elas podem complementar-se, ou seja, noções que não foram bem compreendidas em um campo, podem ser melhor entendida a partir de outro. Concordamos que “a diversidade de situações das quais partem os problemas, desde que não levem a reproduções mecânicas, favorecem a abstrações tanto quanto possibilitam que o dado abstraído se generalize, permitindo reconstruções diante de novos problemas” (TEIXEIRA, 1993 *apud* PONTES, 2010, p. 25).

Segundo os PCN, assim como o ensino não pode estar apoiado exclusivamente em situações concretas, por elas, muitas vezes, não conseguirem dar o significado aos conceitos matemáticos, é crucial que ele não enverede por um tratamento unicamente formal, pois “corre-se o risco de reduzir seu estudo a um formalismo vazio, que geralmente leva a equívocos e é facilmente esquecido” (BRASIL, 1998, p. 100).

Quando trata-se do ensino das operações com os números inteiros por intermédio de situações contextualizadas, controvérsias emergem entre pesquisadores e professores, às quais consideramos importante esclarecer.

Uma situação-problema recorrentemente utilizada é das relações financeiras, também chamadas de modelo comercial. Neste, os valores positivos são diretamente associados a ganhos e posses, enquanto que os negativos a perdas e dívidas. Autores, como Glaeser (1985), Moretti (2012) e Hillesheim (2013), argumentam que esse modelo pode auxiliar e ser profícuo em problemas referentes ao campo aditivo, entretanto, essas ideias podem configurar-se como obstáculos e causar prejuízos na compreensão das propriedades multiplicativas, já que a multiplicação entre positivos e até entre positivo e negativo ainda é sustentável, pois podemos

estender a concepção carregada das operações com números naturais e escrevê-la como uma soma repetida³⁶. Entretanto, as oposições surgem diante da multiplicação entre dois números negativos e são exteriorizadas diante de questionamentos, como: *Como a multiplicação de duas dívidas pode resultar em um crédito?*

Entendemos a interrogativa e concordamos, pois, de fato, não faz sentido e não há explicação lógica para tal situação, nessa perspectiva. Porém, ponderamos que essa situação pode ser facilmente contornada, se alguns cuidados forem tomados. Além disso, também consideramos que o abandono da dimensão contextual no ensino desses números, tenderia a deixá-los sem significados na vida real³⁷.

Na conjuntura apresentada, os termos envolvidos são grandezas de mesma natureza, ou seja, referem-se a dinheiro (*débito x débito*). Retificamos esse fato, ao salientar que ao realizar uma multiplicação, as grandezas envolvidas podem pertencer tanto à mesma natureza, quanto a naturezas distintas, como por exemplo, o cálculo da área de um retângulo (*base x altura*), ou da força (*massa x aceleração*), e, no caso do modelo comercial, a multiplicação entre dois débitos não faz sentido, mas se considerarmos grandezas de naturezas diferentes, como dinheiro e tempo, afirmamos que será possível uma contextualização satisfatória.

Com base nas considerações relatadas, apresentamos nossas sugestões de argumentos que podem justificar as regras utilizadas no ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números inteiros.

Salientamos que tais propostas não são imposições, sequer sequências de ensino prontas, logo esse repertório pode ser adaptado e aplicado conforme for a conveniência e a especificidade de cada sala de aula. No entanto, acreditamos em suas potencialidades para dar significado lógico e convencer o discente dos processos que estão realizando.

2.7.1 – Adição e Subtração

A primeira sugestão argumentativa para o ensino da adição e subtração enquadra-se na dimensão contextual – juntamente com a dimensão abstrata –, conforme Bruno (1997), e envolve o enredo de *relações financeiras*. Associando-se os números positivos a posses,

³⁶ Por exemplo, $3.4 = 4+4+4$ (soma de três créditos de R\$ 4,00) ou $3.(-4) = -4-4-4$ (soma de três débitos de R\$ 4,00).

³⁷ É do nosso entendimento o rigor próprio da matemática e que nem sempre é possível tratá-la com exemplos práticos do cotidiano, nem que a mesma deve estar reduzida a eles. Mas, acreditamos também que sua associação a noções concretas e já conhecidas ao aluno tende a facilitar sua compreensão.

lucros de certa quantia em dinheiro e os números negativos a défices financeiros, compreendemos que:

Se eu tenho cinco reais e devo oito, então, ao pagar aquele valor, ainda devo três, matematicamente representamos por $+5 - 8 = -3$.

Ou, *se eu devo 6 reais e ganho dez, ainda fico com quatro reais*, em termos numéricos $-6 + 10 = 4$.

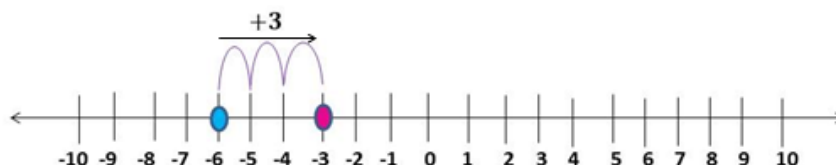
Assim, dispor de uma quantia maior que uma dívida, resulta em um saldo positivo (+), da mesma forma que, se o valor de uma dívida for maior que o valor disponível, o saldo, conseqüentemente, será negativo (-). Nesta mesma linha de raciocínio, diante de duas dívidas, o saldo continuará negativo (-) e em meio a dois créditos o saldo final é positivo (+).

A proximidade com a situação do *ter* e *dever*, tão presente no cotidiano das pessoas, a torna oportuna para introduzir o presente conteúdo. Além disso, problemas do campo aditivo põem em evidência o trabalho com essa dimensão, ao passo que no decorrer da resolução, as operações de soma e subtração podem ser identificadas e suas propriedades serem inferidas (BRUNO, 1997).

A segunda proposta de argumentação justificativa utiliza a *reta numérica* para realizar tais operações. A princípio, é importante que já se compreenda a ordenação dos números sobre ela. Assim, dada uma operação, sua resolução ocorre através de deslocamentos sobre a reta. Nesse contexto, o primeiro termo – o número acompanhado de seu respectivo sinal – indica o ponto de partida e o segundo, o tamanho da locomoção que será realizada, enquanto que o sentido será determinado pelo sinal que aparece entre os dois termos, de modo que o sinal *negativo* aponta que o deslocamento seguirá para a esquerda, enquanto que o *positivo* direciona para a direita. O número representado pelo ponto de chegada, após o movimento, revela o resultado da operação.

Se quisermos realizar a operação $-6 + 3$, devemos marcar o número seis negativo, como posição inicial (marcação azul) e deslocar-se três unidades à direita (sinal positivo). Desse modo,

Figura 4: Operação $-6+3$ na Reta Numérica



Fonte: Autora, 2022.

A parada no ponto -3 (marcação rosa) revela o resultado da operação, logo $-6+3 = -3$.

Se a operação for $-6 - 3$, temos como ponto inicial o 6 negativo e uma locomoção de 3 unidades para a esquerda (sinal negativo), resultando em -9 :

Figura 5: Operação $-6-3$ na Reta



Fonte: Autora, 2022.

Uma situação que merece atenção concerne às adições algébricas, ou seja, expressões que contêm somente adições e subtrações, mas que são tratadas e calculadas como uma única operação. A reunião de diversos símbolos, como visto anteriormente, tendem a contribuir para o aumento de confusões durante sua resolução, por não haver, supomos, uma abstração das regras de sinais e sua correta aplicação.

Nessa conjuntura é que propomos os seguintes argumentos, a fim de possibilitar a interpretação e a conversão dessas operações mais complexas em algo já familiar, para que o aluno possa empregar os meios já conhecidos de resolução.

Quando a operação é aditiva, os estados, positivo ou negativo, dos números mantêm-se. Simultaneamente, pode-se utilizar tanto a proposta do *tenho* e *devo* como a da reta numérica. Assim, *se tenho dez reais e devo oito, pago minha dívida e ainda tenho dois reais*, ou seja, $(+10) + (-8) = +10 - 8 = +2$. Ou, *partindo-se do ponto cinco negativo e realizando-se um deslocamento de quatro unidades à esquerda, paramos no ponto nove negativo*, ou seja, $(-5) + (-4) = -5 - 4 = -9$.

Figura 6: Operação $(-5)+(-4)$ na Reta



Fonte: Autora, 2022.

No caso da subtração, é sabido que o sinal indicativo do estado, do termo posterior ao sinal operatório inverte-se, isto é, o que é positivo torna-se negativo e vice-versa. Mas, essa inversão pode ser justificada a partir da noção e notação de *oposto* de um número. Por exemplo, em $-(+8) = -8$, pois o *oposto de oito positivo é oito negativo* ou em $-(-8) = +8$, já que o *oposto de oito negativo é oito positivo*. Portanto, $(-2) - (+8) = -2-8$, assim como $(+2) - (-8) = +2+8$.

2.7.2 – Multiplicação e Divisão

A primeira sugestão argumentativa para a abordagem da multiplicação entre números inteiros, também, revela-se na dimensão contextual, utilizando as relações *financeiras*. De modo a contornar a impossibilidade de multiplicarmos créditos por débitos, por exemplo, utilizaremos grandezas de naturezas distintas. Dessa forma, relacionaremos o primeiro termo à grandeza *tempo* e, aquela que for representada pelo sinal *positivo* faz menção ao futuro (*daqui a alguns dias*), enquanto os valores representados pelo sinal de *negativo*, serão associados ao passado (*há alguns dias*). O segundo termo da operação, será correlacionado à grandeza *dinheiro* e serão indicativos de *economias*, quando ligados ao sinal de *positivo* e de *gastos* se unidos ao sinal *negativo*. Assim, consideremos o seguinte enredo:

- Seguindo um padrão de economia de R\$20,00 por dia, isto é, (+20 a cada dia),
Daqui a três dias (+3) eu estaria R\$ 60,00 mais rico, ou, em termos numéricos: $(+ 3) \cdot (+ 20) = + 60$; enquanto que há três dias (-3) eu teria R\$ 60,00 a menos que hoje, ou então: $(- 3) \cdot (+ 20) = - 60$.
- Agora, se considerarmos gastos de R\$ 30,00 por dia, ou seja, (-30 a cada dia),
Daqui a três dias (+3), eu estaria com R\$ 90,00 a menos que hoje, ou, numericamente: $(+ 3) \cdot (- 30) = - 90$, enquanto que, há três dias (-3), estaria com R\$ 90,00 a mais que hoje, ou, numericamente: $(- 3) \cdot (- 30) = + 90$.

Após a passagem da língua natural para a linguagem simbólica dos enunciados, as regras de sinais podem ser percebidas e inferidas.

A segunda proposta, consideramo-la como uma *extensão da tabuada de multiplicação* com os números naturais, englobando, agora, os negativos. As regras de sinais são inferidas a partir de um padrão de generalização, formado pelos múltiplos de um dado valor. Segundo Hillesheim (2013), nesta sugestão, as regras de sinais para a multiplicação são ensinadas por uma via mais formal, que pode levar os discentes a compreender que tais regras visam atender às consistências próprias da matemática.

Para tanto, fixa-se o valor de um dos fatores da multiplicação e se escreve o outro em uma sequência que diminui, ou aumenta, de um em um. O resultado obtido da multiplicação entre esses números aumentará, ou diminuirá, na proporção do valor fixo adotado. Os conhecimentos acerca da adição e subtração com os números inteiros serão importantes na construção da sequência dos resultados e é a partir desta sucessão e do padrão por ela formada que as regras de sinais podem ser observadas e justificadas

Por exemplo, fixando o valor **4** e variando o segundo termo de **3** a **-3**, inicialmente realiza-se a multiplicação entre o **4** e os números não negativos, ou seja, do **3** ao **0**. De posse dos resultados, pode-se perceber que estes diminuem de 4 em 4. Assim, seguindo-se este padrão, completaria-se o restante da tabela:

Tabela 1: Multiplicação entre Números Inteiros

Operação	Resultado
4 x 3	12
4 x 2	8
4 x 1	4
4 x 0	0
4 x (-1)	- 4
4 x (-2)	- 8
4 x (-3)	- 12

Fonte: Autora, 2022.

Ao completar a tabela, o aluno poderia chegar à conclusão que a multiplicação entre termos positivos resulta em um produto de valor positivo – como já era conhecido – e que a multiplicação entre termos com sinais opostos resulta em um valor negativo.

Agora, mantendo-se constante o valor **- 4**, e variando novamente o segundo termo da operação de **3** a **-3** e empregando os conhecimentos sobre adição e subtração com os números inteiros e os resultados obtidos com a tabela anterior, realiza-se a multiplicação entre **- 4** e os valores de **3** a **0**. Pode-se observar que os resultados aumentam de 4 em 4 e, da mesma forma, completaria-se o restante da tabela.

Tabela 2: Multiplicação entre Números Inteiros

Operação	Resultado
-4 x 3	-12
-4 x 2	-8
-4 x 1	-4
-4 x 0	0
-4 x (-1)	4
-4 x (-2)	8
-4 x (-3)	12

Fonte: Autora, 2022.

Por fim, após o preenchimento da tabela, seria possível chegar à conclusão que a multiplicação entre dois números negativos resulta em um valor positivo.

Por fim, as regras de sinais na divisão entre os números inteiros procedem das regras obtidas com a multiplicação, por essas operações serem inversas.

Tanto no campo da adição e subtração, como no da multiplicação e divisão, seguindo-se uma linha mais contextualizada ou mais formal, os argumentos expostos possibilitam a inferência das regras de sinais de forma não impositiva ao aluno, de modo que os próprios possam construí-las e tirar suas próprias conclusões, além de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Esse processo pode lhes permitir dar significado a essas regras, justificando seus processos e ajudar a desconstruir ideias equivocadas e superar obstáculos em sua aprendizagem.

Finalizando-se nossa fundamentação, temos aparatos para partimos para a análise de nossos dados. Antes disso, explicitamos o caminho percorrido para a coleta dos mesmos, bem como as opções metodológicas adotadas para essa análise.

SEÇÃO III: METODOLOGIA

Nesta seção, apresentamos nossas opções metodológicas, bem como o planejamento da pesquisa, no que se refere aos seus processos técnicos de coleta e análise dos dados.

O nosso estudo enfocou o professor de matemática como sujeito da investigação. Desse conjunto, a partir do conteúdo matemático escolhido, as operações com os números inteiros, consideramos apropriado selecionar aqueles que atuassem na rede básica de ensino, no nível II do Ensino Fundamental (ou seja, do 6º ao 9º Ano), conforme a BNCC (BRASIL, 2018).

Sendo o livro didático, também, objeto de estudo, analisamos aqueles referentes ao 7º ano, série em que o presente conteúdo é introduzido na educação básica (BRASIL, 2018).

Para que possamos descrever o caminho percorrido, convém apresentarmos os objetivos que almejamos compreender ao fim da investigação. Além disso, foi em virtude deles que classificamos nossa pesquisa e delineamos as etapas a serem efetivadas para o alcance dessa compreensão.

Os objetivos aqui apresentados foram estabelecidos a partir da seguinte questão central da pesquisa: *Quais argumentos são utilizados, por professores e em livros didáticos, no ensino das operações com números inteiros?* Assim, tivemos como fins principais

- Identificar e classificar os argumentos apresentados por professores do ensino fundamental, acerca das operações com os números inteiros;
- Identificar e classificar os argumentos presentes em livros didáticos indicados pelo Guia do Plano Nacional do Livro Didático, sobre as operações com os números inteiros;

As opções metodológicas adotadas no presente estudo foram pensadas a fim de alinhar-se com os objetivos propostos. Portanto, não empenhados em privilegiar resultados numéricos³⁸, nem tampouco fazer mensurações, preferimos por uma abordagem de caráter qualitativo, visto que pleiteamos por uma melhor compreensão acerca de argumentos emitidos por professores e, também, presentes em livros didáticos.

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja,

³⁸ Apesar de no questionário solicitarmos respostas quantitativas, como tempo de atuação profissional, esses dados não tiveram implicações diretas nos efeitos dos resultados, pois consistem em informações que nos permitiram situar os participantes.

ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 2001, p. 21-22).

Além disso, de acordo com Bogdan e Biklen (1982 *apud* LUDKE; ANDRE, 1986, p. 13), a pesquisa qualitativa “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”, e assim, o pesquisador precisa conferir atenção especial ao significado que eles atribuem ao problema de investigação.

Ainda caracterizamos a nossa pesquisa como descritiva, na medida em que buscamos descrever características de um determinado fenômeno, neste caso, a identificação das categorias de argumentação presentes no discurso de professores e em livros didáticos.

Além disso, nosso estudo pode ser classificado como do tipo exploratório, com vista a uma “maior familiaridade com o problema”, de modo “a torná-lo mais explícito” (GIL, 2002, p. 41). Ou seja, levantamos informações acerca do tema em estudo e, assim, nos aproximamos dele, para compreender melhor o objeto investigado. Em nosso caso, obtivemos evidências acerca dos tipos de argumentos que manifestam-se no processo de ensino das operações com os números inteiros, seja no discurso do professor ou nos textos dos livros didáticos.

A base para essa construção contou com a realização de entrevistas com professores do ensino fundamental, e com um levantamento bibliográfico nos livros didáticos (GIL, 2002).

A entrevista configura-se como uma conversa entre o pesquisador e o participante, em uma relação de interatividade, marcada por “uma atmosfera de influência recíproca entre quem pergunta e quem responde” (LUDKE; ANDRE, 1986, p. 33). Especificamente, adotamos as entrevistas do tipo semiestruturadas, que consistem em uma conversa orientada, em que há a elaboração prévia de um roteiro, contendo os tópicos principais do que se deseja ser abordado e está baseada em hipóteses e teorias concernentes ao tema da pesquisa.

Dessa forma, privilegiamos por esse meio de coleta de dados, como método principal, pois,

ao mesmo tempo que valoriza a presença do investigador, oferece todas as perspectivas possíveis para que o informante alcance a liberdade e a espontaneidade necessárias, enriquecendo a investigação.

Podemos entender por entrevista semi-estruturada [*sic*], em geral, aquela que parte de certos questionamentos básicos, apoiados em teorias e hipóteses, que interessam à pesquisa, e que, em seguida, oferecem amplo campo de interrogativas, fruto de novas hipóteses que vão surgindo à medida que se recebem as respostas do informante. Desta maneira, o informante, seguindo espontaneamente a linha de seu pensamento e de suas experiências dentro do foco principal colocado pelo

investigador, começa a participar na elaboração do conteúdo da pesquisa (TRIVIÑOS, 1987, p. 146).

Para a interpretação das informações coletadas, adotamos o método de análise de conteúdo, de Laurence Bardin (2016), o qual está organizado, basicamente, em três polos, que encontram-se dispostos em ordem cronológica: a *pré-análise* (fase de sistematização das ideias iniciais, partindo-se de uma leitura flutuante do material investigado); a *exploração do material* (momento da análise propriamente dita, com os textos recortados em unidades de registro comparáveis, para que seja possível categorizá-las); e o *tratamento dos resultados* (com os resultados obtidos na fase anterior sendo sintetizados, de modo a torná-los significativos e, assim, efetuar interpretações à luz do referencial teórico).

Na sequência do nosso percurso metodológico, a seguir descreveremos os procedimentos adotados na realização da coleta e análise dos dados.

Em relação à coleta das evidências nos livros didáticos, fomos à busca das obras recomendadas no Guia do PNLD em vigor, ou seja, o Guia do PNLD 2020 (BRASIL, 2019a). Para o componente curricular de matemática, onze livros foram recomendados. Identificados tais livros, analisamos o(s) capítulo(s) que abordavam o conteúdo em questão, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros. Essa exploração teve por finalidade a identificação e classificação da argumentação explicativa/justificativa expostas na apresentação dessas operações. Seguindo as etapas de análise de conteúdo proposta por Bardin (2016), realizamos uma leitura do material e organizamos as ideias iniciais, exploramos o mesmo, identificando e sistematizando elementos pertinentes à nossa questão e passíveis para serem descritos e, assim, esses dados puderam ser sintetizados e classificados à luz do nosso referencial e com vista a atender um de nossos objetivos.

É oportuno justificar a nossa escolha exclusiva por livros que compoñham o Guia do PNLD. Primeiro, por ser um material acessível e direito de todos os estudantes, de forma gratuita, da rede pública de ensino. Segundo, para que sejam integrantes desse guia, os mesmos passam por uma avaliação pedagógica, para verificar se cumprem critérios determinados e

nessa avaliação, que visa garantir o padrão de qualidade dos materiais distribuídos pelo governo federal às escolas públicas, é verificada a observância das obras inscritas aos critérios listados no Decreto 9.099, de 18 de julho de 2017 e aos previstos no Edital 01/2018 – CGPLI, tais como a adequação à Base Nacional Comum Curricular; a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; a correção e a atualização de conceitos (BRASIL, 2019a, p. 01).

Dentre as orientações assinaladas, destacamos e reforçamos a necessidade de que esses livros estejam alinhados ao que preconiza a BNCC. E, como já mencionado, a argumentação encontra-se como uma das competências gerais a ser desenvolvida no decorrer da educação básica, portanto, esta precisa fazer-se presente em tais obras didáticas. Se ela comparece especificamente, em meio ao conteúdo das operações com os números inteiros, é o que nos propomos identificar na seção seguinte.

Em relação às entrevistas, devemos salientar que as etapas concernentes à busca dos participantes, bem como o próprio processo de entrevistas só foram inicializadas após o parecer positivo do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) para o presente projeto. Com a primeira submissão realizada em 14 de abril de 2021, entre os trâmites para adequações, somente em 07 de outubro de 2021 esta instância emitiu sua aprovação.

Posteriormente à aprovação do CEP, enviamos um quantitativo de, aproximadamente, oitenta *e-mails* para professores de diferentes cidades de Sergipe, convidando-os³⁹ para participarem do presente estudo. Esses endereços eletrônicos foram obtidos através do banco de dados do Projeto “Oficinas de Matemática”, que teve uma duração de aproximadamente cinco anos (2014-2018), cujo público alvo era, exatamente, professores de matemática das redes públicas no Estado de Sergipe.

O projeto “Oficinas de Matemática” teve por objetivo principal contribuir para a capacitação e desenvolvimento de professores de Matemática, atuantes nas redes públicas de ensino, de graduandos e pós-graduandos em Matemática e/ou Pedagogia/Educação, por meio da realização de eventos, que ofertaram um compilado de atividades não tradicionais, que pudessem ser empregadas em salas de aula como alternativas didáticas à mera apresentação de definições presentes nos livros didáticos. Os cursos tiveram como unidade proponente o Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS) e eram ministrados por professores do departamento em conjunto com estudantes do curso de Matemática Licenciatura da mesma instituição. Os eventos foram realizados tanto no *campus* da universidade, como nos próprios municípios sergipanos, tendo o apoio das Secretarias Estadual e Municipais de Educação de algumas cidades (ATTIE, 2017).

Dos *e-mails* enviados, obtemos a devolução de onze deles, disponibilizando-se para ser um participante, sendo que um deles ainda não havia concluído o curso de graduação. Dessa forma, continuamos o contato com os outros dez professores.

³⁹ No momento do convite, explicitamos a proposta de nossa investigação e uma das nossas perguntas, referia-se ao nosso critério de inclusão, ou seja, se os mesmos estavam atuando no Ensino Fundamental II.

Antes de definirmos o meio de coleta por entrevistas semiestruturadas, outras opções surgiram para essa concretização. A primeira, que foi sugerida em nosso exame de qualificação, foi a partir da análise de vídeos gravados por esses professores, durante o período das aulas *online*, sobre o conteúdo em questão. Entretanto, nem todos dispunham desse material. A segunda opção consistiu na realização de um grupo focal de forma remota e, em consenso com as datas viáveis para a maioria desses professores, o encontro foi marcado para o dia 05 de novembro de 2021. Ao definirmos a data e antes da realização das entrevistas, enviamos àqueles o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE – e o Termo de Autorização de Uso de Imagem e Depoimentos, via *e-mail*. No dia marcado, entretanto, apenas uma participante compareceu, o que nos fez tomar outro caminho, sobre o qual já havíamos ventilado, a entrevista semiestruturada, realizada individualmente e de forma remota⁴⁰ através de videoconferência, por meio da plataforma *Google Meet*⁴¹. A mesma foi gravada para uma análise mais cuidadosa após seu término.

Tendo em vista essa inexpressividade e ausência de justificativas, pois apenas uma professora notificou antecipadamente sua falta, enviamos um novo *e-mail*, a fim de sondarmos a possibilidade de realizarmos outras entrevistas em dias e horários ajustados à disponibilidade dos participantes. Com esse novo contato, recebemos o retorno de cinco professores, dos quais conseguimos completar o processo com três. Os outros dois, apesar de marcarem, não comparecerem no dia combinado, e, só uma justificou a ausência. Logo, totalizamos nossa coleta de evidências com quatro professores, com encontros realizados em dias e horários distintos.

A conversa com esses professores tinha em vista um melhor entendimento sobre sua visão acerca da relação dos alunos com o tema, sua perspectiva a respeito do ensino do conteúdo, tal como a identificação e classificação dos argumentos utilizados por esses professores no decorrer de suas aulas, bem como diante da eventual necessidade de justificar os procedimentos empregados nas operações com esses números.

⁴⁰ Devido à pandemia da Covid-19, muitas atividades, antes realizadas presencialmente, tiveram de ser suspensas, como medidas protetivas de disseminação do vírus e foram adaptadas para sua realização virtualmente. Embora, muitas delas aos poucos já estejam voltando à normalidade, programamos nossa pesquisa para ser desenvolvida em plataformas digitais, devido às instabilidades. Além disso, essa modalidade nos permite estreitar distâncias e poder abranger um quantitativo maior do público, por nos permitir contato com pessoas de diferentes lugares sem precisar de longos deslocamentos.

⁴¹ Aplicativo desenvolvido pelo *Google* e oferece serviço de comunicação por vídeo e que também conta com as ferramentas de chat, que permite enviar mensagens instantâneas durante a chamada, bem como a possibilidade de projeção da tela, por exemplo.

Além das entrevistas, enviamos um questionário semiaberto, construído no aplicativo *Google Forms*⁴² e que tinha por objetivo obter informações acerca do perfil acadêmico e profissional, bem como obter indícios da utilização do livro didático adotado pela escola.

Assim como a primeira entrevista realizada, todas as outras foram gravadas e posteriormente transcritas. Na seção seguinte apresentamos e discutimos essas informações. Convém salientar, desde já, que as falas dos professores participantes foram representadas em “*itálico e entre aspas*”, para indicar sua fiel transcrição.

A fim de manter o sigilo da identidade dos professores participantes, os mesmos foram distinguidos por códigos, que consistem na letra P seguida de um número que varia de 1 a 4.

Novamente, a análise do conteúdo seguiu o método proposto por Laurence Bardin (2016). Iniciamos com a leitura da transcrição das entrevistas e sistematização das ideias iniciais, identificamos elementos pertinentes aos nossos objetivos e com eles sintetizamos nossos resultados, de modo a classificá-los e agrupá-los de acordo com os tipos de argumentação, de acordo com as categorias Explicativa e Justificativa.

Desenhado o percurso metodológico, em seguida apresentamos os dados colhidos com os professores e nos livros didáticos, fazendo a discussão dos mesmos conforme as categorias de argumentação já mencionadas.

⁴² Aplicativo lançado pelo grupo do *Google* e que permite a coleta de informações e gerenciamento de pesquisas.

SEÇÃO IV: RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente seção é destinada para a apresentação e discussão dos resultados obtidos por meio da investigação nos livros didáticos e nas entrevistas realizadas com os professores participantes de nossa pesquisa. Com já exposto na seção anterior, as análises foram efetivadas com base nas ideias veiculadas por Sales (2010) e Attie (2016), com as categorias de argumentação, Explicativa e Justificativa, sob a perspectiva que essa classificação pode permitir melhor compreender o propósito desses argumentos. No processo de ensino dos tópicos matemáticos, compreendemos que o discurso do professor e as ideias expostas nos livros didáticos consistem em argumentos, mas consideramos que esses podem, de modo geral, apresentar objetivos distintos em relação à aprendizagem – resolver os exercícios ou, além disso, compreender a resolução. É com base nessa ideia que procuramos identificar o(s) tipo(s) de argumento(s) presente(s) nos discursos e textos desses sujeitos e nestes objetos didáticos, no que tange às operações fundamentais – adição, subtração, multiplicação e divisão – com números inteiros.

4.1 – Análise dos Livros Didáticos

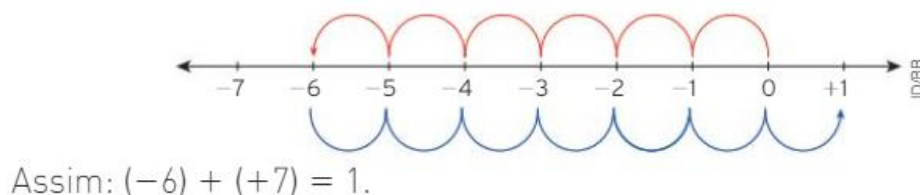
Para a análise que segue, além de examinarmos o conteúdo propriamente dos livros didáticos que são entregue aos alunos, optamos por sondar também o manual disponível ao professor, a fim de detectarmos se neste, há presença de abordagens alternativas que possam propiciar argumentos justificativos para as operações em questão.

Em todos os onze livros, no manual do professor, além da reprodução das páginas do livro do aluno, há orientações gerais no início das obras – como a visão geral acerca da obra destinada ao aluno, informações sobre a proposta teórico-metodológica, relação entre os conteúdos e as competências e habilidades propostas pela BNCC, propostas interdisciplinares, sugestões de livros e *site* – e, também, conteúdos específicos ao professor diagramados em “formato U” nas laterais daquela reprodução (BRASIL, 2019b), conforme ordena o edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação das obras didáticas.

4.1.1 – Geração Alpha (OLIVEIRA; FUGITA, 2018)

Nesta obra, de Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita, o conteúdo dos números inteiros encontra-se exposto ao longo de dois capítulos. No primeiro, este conjunto é introduzido a partir de situações nas quais os números negativos podem estar presentes, a exemplo da representação de altitudes, medidas de temperaturas e transações bancárias. No capítulo seguinte, destinado às operações com tais números, a adição é introduzida, brevemente, a partir de algumas situações e seu processo de resolução é apresentado através dessas situações – em diferentes contextos – em que são reescritas como uma soma algébrica e resolvidas com o auxílio da reta numérica, como mostra a figura 7. Neste caso, o deslocamento inicia-se a partir do ponto zero, o número indica o deslocamento a ser realizado e o sinal o sentido a ser percorrido, isto é, positivo à direita e negativo à esquerda.

Figura 7: Adição de Números Inteiros na Reta Numérica



Fonte: OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 22.

Por meio de quatro situações, os autores apresentam a adição de números inteiros, e, ao fim de cada caso, concluem que,

Em uma adição de dois números inteiros positivos, a soma é positiva. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números.

Em uma adição de dois números inteiros negativos, a soma é negativa. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números.

Em uma adição de dois números inteiros com sinais diferentes, a soma terá o sinal do número de maior módulo. Para encontrar essa soma, devemos calcular o módulo da diferença do módulo desses números.

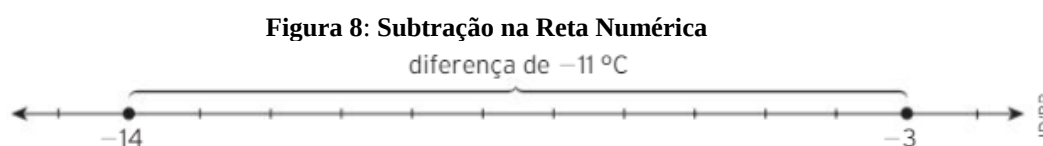
Na adição de dois números simétricos, a soma é igual a zero (OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 21-22).

Na seção denominada “(IN)FORMAÇÃO”, destinada ao professor, os autores retratam os novos significados que são atribuídos aos sinais de “+” e “-” neste novo conjunto, não limitados, unicamente, ao sentido operatório, de “acrescentar” e de “tirar”, respectivamente, mas apontam que a soma é vista como uma associação ou composição e que a subtração deve ser vista como operação inversa da adição, ou ainda, refere-se a trabalharmos com “números que operam com transformações de oposição”, como por

exemplo em “ $-7 - (-2) = -7 + 2$ ” (TEIXEIRA, 1993 *apud* OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 23).

Seguindo a mesma proposta de apresentação de situações-problemas, as subtrações são, predominantemente, escritas fundamentadas na transformação dessa operação em uma adição do primeiro operador com o oposto do segundo operador sendo reescritas imediatamente sem os parênteses e resolvidas. Como regra para resolver a subtração entre números inteiros, os autores declaram que “a diferença de dois números inteiros é igual à soma do primeiro número com o oposto do segundo” (OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 26).

Uma subtração entre dois números negativos é exposta por meio da distância entre dois pontos sobre a reta numérica (Figura 8).



Fonte: OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p.26.

A partir desses dados, consideramos que os autores até dispõem de argumentos passíveis de justificar as operações de adição e subtração, conforme a classificação de Sales (2010) e Attie (2016), pois, para as duas operações, os argumentos pautam-se na reta numérica. No caso específico da subtração, os autores utilizam a ideia de oposto de um número e em um dos casos, representam-na, também, na reta numérica. Apesar da menção sobre o uso de situações contextualizadas, estas foram empregadas apenas para enunciar os problemas e não como meio de legitimar os procedimentos realizados nas operações. Consideramos que a utilização da contextualização poderia robustecer as justificativas para as operações. Como a base lógica para as operações é unicamente o caso da reta, observamos uma limitação em relação ao repertório, e uma renúncia às possibilidades de uma argumentação justificativa mais forte, sendo predominante a preocupação com as regras.

Nas informações exclusivas do manual do professor, apesar de reforçarem a forma prática de se resolver o sinal negativo antes dos parênteses, isto é, inverter os sinais que estão dentro deste, e também a necessidade do docente certificar-se de que os alunos consigam “inferir as regras de sinais sem que seja necessário decorá-las” (OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 30), não fornecem mais elementos (além do uso da reta numérica) para que essa inferência aconteça.

A ideia da soma de parcelas iguais é empregada para introduzir a multiplicação entre dois números positivos ou de sinais diferentes. Partindo-se diretamente de exemplos

numéricos, esta operação é transcrita como uma adição, em que o primeiro valor determina quantas vezes o segundo será somado. No caso em que o primeiro é negativo e o segundo é positivo, antes de adotar esse argumento, emprega-se a ideia de oposto, como por exemplo, em “ $(-3) \cdot (+4) = -[(+3) \cdot (+4)] = -[3 \cdot (+4)] = -[(+4) + (+4) + (+4)] = -[+12] = -12$ ” (OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 30). Ao fim de cada caso, a regra de sinais é enunciada em destaque e, no segundo caso, essa regra é definida de uma maneira supostamente inovadora: “Quando multiplicamos dois números inteiros com sinais diferentes, o sinal do produto é negativo. Depois, multiplicamos os módulos dos números” (*Idem, Ibidem*).

Para a multiplicação entre dois números negativos, além do procedimento a partir da transformação do operador negativo e, em seguida, a realização de uma soma de termos iguais, outra proposta diz respeito à observação de uma tabela progressiva, em que constam os resultados da multiplicação entre um determinado número negativo e uma sequência numérica e, a partir da regularidade observada na sequência dos resultados, é possível completar o quadro, o que levaria o aluno a descobrir o valor das multiplicações, como mostra a figura 9.

Figura 9: Multiplicação entre Números Negativos

×	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
-3	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9

Fonte: OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p.31.

Deixamos um comentário acerca da construção dessa tabela, no que tange a ordenação dos números na primeira linha, visto que os mesmos foram representados em ordem contrária, ou seja, os números positivos antes do número zero, enquanto que os negativos encontram-se posteriormente a este número. Apesar de não estarmos tratando de uma reta numérica, a importância dessa correta representação diz respeito à precaução com possíveis equívocos que podem levar aos leitores, no caso os alunos, a cometerem.

Ao professor, sugerem que também possa ser utilizada a ideia do oposto de um número, como em “ $(-8) \cdot (-2) = -[(+8) \cdot (-2)] = -[-16] = +16$ ” (OLIVEIRA; FUGITA, 2018, p. 31). Por fim, os autores enunciam a regra: “quando multiplicamos dois números negativos, o sinal do produto é positivo. Depois, multiplicamos os módulos dos números” (*Idem, Ibidem*). E mais exemplos são sugeridos.

No manual do professor, reforça-se a necessidade da reconstrução do significado do operador multiplicativo, já que podem surgir obstáculos quando este for negativo. O operador,

ou o multiplicador, indicará a quantidade de vezes que o outro número será repetido, e simultaneamente ocasionar transformações de aumentos ou diminuições, apontando que esta operação não está limitada a operação com números em uma mesma região (quando o operador é positivo), mas esse resultado pode ser transformado e mudado de região (quando o operador é negativo) (TEIXEIRA, 1993 *apud* OLIVEIRA; FUGITA, 2018).

O ensino da divisão é pautado na enunciação de suas regras e aplicação em exemplos. No manual do professor, os autores ressaltam que os sinais resultantes decorrem da multiplicação, visto que essas operações são inversas.

Assim como nas operações anteriores, para a multiplicação os autores não apresentam as regras de imediato, sugerindo, nesse caso, ao menos duas formas de justificar as regras de sinais. Embora exposta apenas no último exemplo, a tabela multiplicativa parece ser, de fato, uma experiência efetiva que poderia levar a uma argumentação justificativa, pois contribui para complementar essa atribuição de sentido a essas regras. Percebe-se a preocupação dos autores em alertar ao professor para que estabeleça significados às regras e que não priorize pela simples memorização. Entretanto, como no caso da adição e da subtração, consideramos que seria fundamental a utilização da contextualização, que forneceria ao professor (e ao aluno) mais sustentação para justificar as regras de sinais. Assim, ratificamos a convicção de que o repertório poderia ser amplificado, trazendo a possibilidade de uma argumentação justificativa mais forte.

4.1.2 – Convergências (CHAVANTE, 2018)

Neste livro didático, Eduardo Chavante dedica o capítulo 2 para a apresentação dos números positivos e negativos e seus conceitos iniciais, e o capítulo 3 para as operações com esses números. Os números negativos são apresentados a partir de situações cotidianas em que os números positivos e o zero não são suficientes para expressar as quantidades dadas, a exemplo das medidas de temperatura, altitudes e extratos bancários.

A adição entre números inteiros é introduzida a partir de problemas que envolvem movimentações financeiras⁴³ e sua resolução é efetuada com o auxílio da reta numérica⁴⁴, indicando-se que o lado esquerdo da reta representa um deslocamento no sentido negativo e o

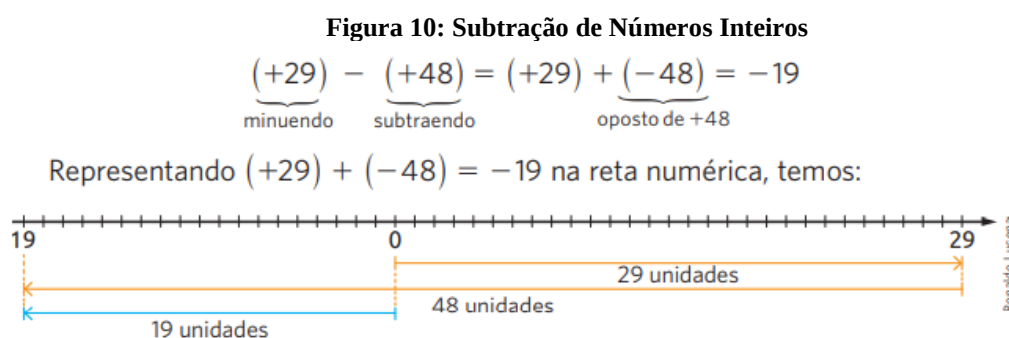
⁴³ Anterior à proposição dos problemas, o autor explica o funcionamento das movimentações financeiras realizadas em bancos, inclusive que o saldo é positivo quando uma pessoa tem dinheiro no banco, e que o saldo é negativo se ela deve dinheiro ao banco.

⁴⁴ Como na coleção anterior, o deslocamento sobre a reta inicia-se no ponto zero.

lado direito ao positivo. Por fim, esta operação é reescrita como uma adição algébrica e é apresentado o resultado.

Uma das atividades sugeridas para o professor faz uso de fichas representadas por sinais de positivo e negativo, cada uma representa uma unidade, anulando-se ao juntar uma de cada tipo.

Ao adotar os dados de uma tabela de campeonato de futebol, a subtração é empregada como meio para o cálculo da diferença entre os saldos de gols de dois times, indicando que “adicionamos o minuendo ao oposto do subtraendo” (CHAVANTE, 2018, p. 36). Dessa forma, a subtração é transformada em uma adição. A reta numérica também é utilizada para representar esta operação (Figura 10), como um meio de confirmar o resultado.



Fonte: CHAVANTE, 2018, p.36.

A respeito desta representação geométrica, salientamos a omissão do sinal de “-” antes do número 19, o que sugerimos ser um erro gráfico, visto que nos cálculos precedentes o mesmo foi representado corretamente.

O autor observa, ao fim deste tópico, que a diferença entre dois números pode ser determinada, também, marcando-se tais pontos na reta e calculando a distância entre eles. Na seção destinada ao professor, o autor sugere que, se necessário, o professor retome a definição de números opostos: “dois números são opostos quando estão em sentidos opostos na reta numérica e à mesma distância da origem” (CHAVANTE, 2018, p. 36). Um único exercício proposto apresenta uma situação referente às finanças, com o crédito equivalendo a valores positivos e débito a valores negativos.

Consideramos, no caso deste livro, que é apresentada uma ampla argumentação justificativa, com a utilização da reta numérica, da utilização do oposto e da contextualização. Entretanto, apontamos que a quantidade de exemplos e exercícios apresentados é insuficiente e pode causar generalizações equivocadas, pois o aluno pode inferir, por exemplo, a partir de um único caso, que o sinal do resultado será sempre aquele em qualquer subtração.

A multiplicação entre dois números positivos e entre um positivo e um negativo – nesta ordem – é retratada a partir da ideia da soma de parcelas iguais. A reta numérica é novamente utilizada, somente para mostrar essa adição. Num cenário em que o primeiro fator é negativo e o segundo positivo, a sugestão é aplicar a propriedade comutativa, visto que “a multiplicação entre números inteiros tem todas as propriedades da multiplicação entre números naturais” (CHAVANTE, 2018, p. 39). Outra recomendação é a substituição do primeiro fator, negativo, pelo oposto do número positivo. Este mesmo procedimento é realizado, de modo um tanto mais direto, para encontrar o produto entre dois números negativos. Esse tópico é encerrado com um quadro, que contém as regras de sinais da operação:

Em uma multiplicação de dois fatores em que eles possuem o mesmo sinal, o produto será um número positivo.

Em uma multiplicação de dois fatores em que eles possuem sinais diferentes, o produto será um número negativo (CHAVANTE, 2018, p.40).

Ao professor, o autor sugere a abordagem da multiplicação entre dois números negativos, a partir da ideia de uma tabela progressiva com resultados da multiplicação entre um determinado número negativo e uma sequência numérica com o objetivo de que o aluno, a partir da regularidade observada na progressão, possa descobrir o valor das multiplicações. Além dessa, é exposta uma justificativa mais formal (Figura 11), na seção denominada “Um texto a mais”, com a utilização de variáveis, de números simétricos e da propriedade distributiva. Do nosso ponto de vista, este argumento é importante para o conhecimento do professor, mas não condizente ao nível de abstração de alunos do ensino fundamental, que até então, não tiveram ainda o ensino de uma álgebra inicial.

Figura 11: Justificativa Formal para o Produto de Dois Números Negativos

Um texto a mais		
• O texto a seguir apresenta uma justificativa mais formal a respeito do produto de números negativos. [...] Nossa discussão tem lugar no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros (relativos), onde cada elemento a possui um simétrico (ou inverso aditivo) $-a$, o qual cumpre a condição $-a + a = a + (-a) = 0$. Daí resulta que o simétrico $-a$ é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se $b + x = 0$, então $x = -b$, como se	vê somando $-b$ a ambos os membros. Em particular, como $-a + a = 0$, concluímos que $a = -(-a)$, ou seja, que o simétrico de $-a$ é a. Uma primeira consequência da distributividade da multiplicação é o fato de que $a \cdot 0 = 0$, seja qual for o valor de a. Com efeito, $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0$. Assim, $a + a \cdot 0 = a + 0$, logo $a \cdot 0 = 0$. Agora podemos mostrar que $(-1) \cdot a = -a$ para todo número a.	Com efeito, $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1)a = [1 + (-1)] \cdot a = 0 \cdot a = 0$, logo $(-1) \cdot a$ é o simétrico de a, ou seja, $(-1) \cdot a = -a$. Em particular, $(-1)(-1) = -(-1) = 1$. Daí resulta, em geral, que $(-a)(-b) = ab$, pois $(-a) \cdot (-b) = (-1)a \cdot (-1)b = (-1)(-1)ab = ab$. [...] LIMA, Elon Lages. Meu professor de Matemática e outras histórias. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 152-153. (Coleção do Professor de Matemática).

Fonte: CHAVANTE, 2018, p.40.

Para a resolução da divisão, o autor aponta que esta é a operação inversa da multiplicação, e que, portanto deve-se pensar em um número, que quando multiplicado pelo

divisor resulta no dividendo. Após alguns exemplos o tópico é encerrado com um quadro sintetizando o algoritmo da divisão com números inteiros.

A caracterização da multiplicação como a adição de fatores iguais, a transformação de operadores negativos com base na ideia de oposto, a utilização de uma tabela numérica e, também, o emprego da propriedade comutativa, foram os recursos principais para justificar a multiplicação no conjunto dos números inteiros. Mesmo considerando que o autor poderia utilizar-se de situações contextualizadas para isso, o que daria mais força ao argumento, podemos apontar a presença da argumentação justificativa nesta obra, inclusive no caso da divisão como operação inversa da multiplicação.

4.1.3 – Matemática Essencial (PATARO; BALESTRI, 2018)

Os autores, Patricia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri, abordam o conjunto dos números inteiros ao longo do capítulo 5, denominado de “Números Positivos e Números Negativos”, no qual exibem situações do cotidiano, envolvendo saldos bancários, medidas de temperaturas e altitudes.

A partir daí, apresentam a reta numérica e, nela, os conceitos de módulo e de oposto ou simétrico. Em seguida, a adição é abordada a partir de um problema no qual aparecem várias transações em uma conta bancária. O cálculo é realizado com o auxílio da reta numérica. Após a solução de alguns problemas aditivos, os autores apresentam as seguintes regras:

Nas adições cujas parcelas têm o mesmo sinal, adicionamos os valores absolutos dessas parcelas e conservamos o sinal das parcelas. [...]
 Nas adições cujas parcelas têm sinais contrários, subtraímos os valores absolutos dessas parcelas e conservamos o sinal do número de maior valor absoluto”
 (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 107).

A subtração é contextualizada por meio da variação das medidas de temperaturas e, nos cálculos, a operação é convertida em uma adição, já que “efetuar uma subtração é o mesmo que adicionar o minuendo ao oposto do subtraendo” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 113). Além disso, a operação (depois de convertida em adição) é representada na reta numérica, após a solução aritmética.

Apesar do uso da reta numérica para realização do cálculo de adições e da transformação da subtração em adição, através da ideia de oposto, serem considerados argumentos justificativos – de acordo com Sales (2010) e Attie (2016), pois não explicitam de imediato as regras de resolução sem fundamento algum – apontamos um repertório limitado,

sendo excessiva a preocupação com as regras. Consideramos que parte dessa limitação se deve à utilização de situações contextualizadas apenas para enunciar os problemas e não para a significação das operações.

Para a multiplicação entre dois números positivos é evidenciado que a multiplicação é uma soma, do segundo fator, quantas vezes o primeiro indicar, abordagem retratada também na reta numérica. Para o caso da multiplicação entre números de sinais opostos, os autores, salientam que basta resolver a multiplicação entre os valores absolutos e conservar o sinal de menos, utilizando a ideia do oposto, pois, por exemplo, “o produto $4 \cdot (-3)$ tem o mesmo resultado de $-(4 \cdot 3)$, pois *[sic]* $-(4 \cdot 3) = -12$ ” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 115).

Para definir a multiplicação cujos fatores são negativos, os autores mencionam que aplica-se o mesmo procedimento anterior, recaindo-se em uma multiplicação entre um fator positivo e outro negativo. Notamos que nos dois últimos casos mencionados, que em passagens do tipo $-(+6) = -6$, por exemplo, são realizadas a partir da ideia do oposto, sem, no entanto, apontar porque isso acontece⁴⁵, como mostrado na figura 12.

Figura 12: Multiplicação entre dois Números Negativos

Substituímos -3 por $-(+3)$, pois $+3$ é o oposto de -3 , e efetuamos o cálculo.

$$(-3) \cdot (-4) = -\underbrace{(+3) \cdot (-4)}_{-12} = -(-12) = 12$$

Fonte: PATARO; BALESTRI, 2018, p. 116.

Para finalizar, os autores apresentam um quadro com a regra de sinais:

Em uma multiplicação de dois fatores, em que:

- ambos têm o mesmo sinal, o resultado é sempre um número positivo;
- um fator é positivo e outro negativo, o resultado é sempre negativo (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 116).

A divisão é tratada como operação inversa da multiplicação e, após a exposição de alguns exemplos, os autores enunciam suas regras e ressaltam que “a regra de sinais da divisão é a mesma da multiplicação” (PATARO; BALESTRI, 2018, p. 121).

Para a regra dos sinais aplicada para a multiplicação e, por extensão, para a divisão de números inteiros, foi tentada uma justificativa por meio da ideia empregada para a representação de oposto de um número. Entretanto, apontamos aqui uma limitação do repertório, que poderia apresentar também as ideias de sequência e do uso do contexto, por exemplo. Assim, revela-se a escassez no leque de opções ao aluno, pois o desenvolvimento

⁴⁵ Pelo emprego da subtração como uma transformação de oposição, pondo em evidência sua definição de operação inversa à adição (PONTES, 2010).

apresentado nos exemplos, que serviriam para essa fundamentação, revela mais o apego à utilização das regras de sinais que a preocupação em justificar suas causas.

4.1.4 – Trilhas da Matemática (SAMPAIO, 2018)

O autor, Fausto Arnoud Sampaio aborda o conteúdo dos números inteiros, no decorrer dos dois primeiros capítulos do livro. No primeiro, são apresentadas situações do dia-a-dia em que eles estão presentes, a exemplo das medidas de temperaturas, extratos bancários e fusos horários, além da representação dos inteiros na reta numérica e do conceito de módulo. Já o segundo capítulo é destinado à abordagem das operações e, neste capítulo, a adição é introduzida a partir de um jogo, composto por cartas com duas cores, uma para representar valores positivos e outra para os negativos, com a adição dos números das cartas determinando a pontuação do jogador.

Dessa forma, as operações são realizadas, inicialmente, a partir da contagem dessas cartas e representadas como uma adição algébrica. Posteriormente, o autor sinaliza a necessidade de aplicar estratégias para o cálculo da adição com números inteiros, apresentando um modo de realizar esse cálculo através da reta numérica. Após alguns exemplos, apresenta as regras de sinais:

- em uma adição de números inteiros com parcelas de mesmo sinal, o resultado terá o mesmo sinal das parcelas e módulo correspondente à soma dos módulos das parcelas;
- em uma adição de números inteiros com parcelas de sinais contrários, o resultado terá o sinal da parcela de maior módulo e módulo correspondente à diferença entre os módulos das duas parcelas (SAMPAIO, 2018, p. 21).

O autor indica, na seção destinada ao professor, que atividades e/ou jogos podem contribuir no desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problemas e sugere que recursos como esses sejam utilizados sempre que o professor achar conveniente.

O contexto da variação de temperaturas é empregado para inserir a resolução da subtração entre números inteiros, determinada pela diferença entre a medida final e a medida inicial. Essas diferenças são calculadas após sua verificação na imagem de um termômetro (Figura 13), com a distância entre os pontos marcados no termômetro indicando o valor da variação. O exemplo também é resolvido através da transformação de oposição do termo antecedido pelo sinal de menos e, diferentemente dos livros anteriores, a subtração não é convertida para uma adição do tipo algébrica, pois os parênteses são logo “descartados” após a explicitação da ideia de oposto, e a nova operação é resolvida sem mais detalhes.

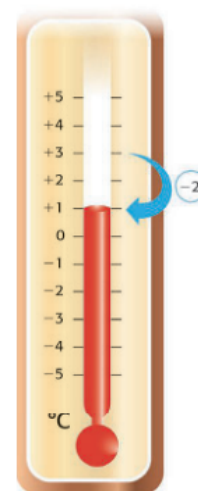
Figura 13: Subtração de Números Inteiros

- Da 1 hora às 3 horas:
A medida da temperatura à 1 hora era de 3 °C e às 3 horas era de 1 °C.
Podemos verificar no termômetro que houve uma queda de 2 °C.
Veja o registro dessa subtração:

$$(+1) - (+3) = -2$$

Ou seja, a medida da temperatura diminuiu 2 °C nesse intervalo.
Observe como Luciana calculou a variação da medida da temperatura entre 1 hora e 3 horas:

Banco de imagens/ Arquivo da editora	
	$(+1) - (+3) = +1 - 3 = -2$
	<i>o oposto de +3 é -3</i>



Fonte: SAMPAIO, 2018, p. 26.

Segundo o autor, na seção destinada ao professor, os cálculos com as situações contribuem para que os alunos possam atribuir significado às operações, e “é possível que neste momento alguns alunos percebam algum padrão e passem a enunciar e a usar espontaneamente as regras de sinais” (SAMPAIO, 2018, p. 26).

Acerca dessas operações, adição e subtração, a utilização de situações contextualizadas, da reta numérica e da noção do oposto, revela um leque de opções para fundamentar os procedimentos, conseguindo assim utilizar argumentos justificativos (SALES, 2010; ATTIE, 2016). Apesar de sugerir ao professor outras possibilidades, como empregar situações contextualizadas, para que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a resolução desta operação, o autor não exemplifica como proceder.

A multiplicação foi principiada, também, pelo enredo de um jogo, no qual o deslocamento a ser realizado pelos peões é dado pela multiplicação dos números obtidos com o lançamento de dois dados, com números positivos e negativos. Assim, a partir de quatro situações surgidas no decorrer do jogo o autor expõe seu procedimento de resolução. O princípio da multiplicação como soma de parcelas iguais foi a ideia empregada quando o primeiro fator é positivo. Nos casos em que a multiplicação começa com um número negativo, o conceito de número oposto é empregado e a operação recai nas respectivas situações anteriores, sendo resolvidas diretamente e não detalhadas na forma de adição. Por fim, reforça esta mesma ideia para a eliminação dos parênteses para encontrar o resultado. O tópico é finalizado com a apresentação de uma regra para a multiplicação entre números inteiros diferentes de zero:

I. multiplicar os módulos (ou valores absolutos) dos números, e

II. indicar o sinal do produto de acordo com os sinais dos fatores: positivo se os dois fatores tiverem sinais iguais, ou negativo se os dois fatores tiverem sinais contrários (SAMPAIO, 2018, p. 30).

Partindo da ideia de que, nos números naturais, a divisão consiste na operação inversa da multiplicação, o autor propõe estender essa ideia para os números inteiros. Portanto, após mostrar alguns exemplos, são enunciados os algoritmos para resolução dessa operação neste conjunto – quando os sinais são iguais, quando são diferentes e em divisões de zero por um número inteiro e diferente de zero.

Consideramos que a utilização unicamente dessas duas ideias – multiplicação como adição de parcelas iguais e o conceito do oposto, ou simétrico – apesar de serem argumentos justificativos, revelam um escasso repertório para fundamentar a operação de multiplicação. A ampliação desse leque poderia se dar pelo uso de situações contextualizadas e pela utilização da ideia da sequência numérica, que certamente aumentariam as possibilidades de aprendizagem.

4.1.5 – Apoema (LONGEN, 2018)

O livro é de autoria de Adilson Longen e o conteúdo é apresentado ao longo de quatro capítulos. Os números negativos aparecem inicialmente a partir de situações em que os “números naturais não são suficientes para representá-las” (LONGEN, 2018, p. 08), a exemplo dos saldos financeiros de empresas e pessoas, das medidas de temperatura, saldos de gols e os andares de um prédio.

Em relação às operações de adição e subtração, o ponto de partida para a exposição é o modelo financeiro, com algumas ponderações do autor, como por exemplo, a de que uma retirada maior que um depósito é o mesmo que fazer uma retirada da diferença entre esses valores, bem como duas retiradas equivalem a uma retirada no valor da soma das duas (Figura 14). Com base nas observações do movimento financeiro, o autor afirma que o mesmo procedimento da adição de números naturais deve ser utilizado na adição de números positivos.

Figura 14: Adição a partir de uma Movimentação Financeira

- Em 22/4, Júlia fez uma retirada de R\$ 400,00 e um depósito de R\$ 100,00. Isso equivale a fazer uma retirada de R\$ 300,00.

$$-400 + 100 = -300$$

- Em 24/4, ela fez duas retiradas, uma de R\$ 800,00 e outra de R\$ 350,00. Isso é o mesmo que fazer uma única retirada de R\$ 1.150,00.

$$(-800) + (-350) = -1150$$

No exemplo de Júlia, podemos perceber que, em determinadas situações, é preciso adicionar tanto números positivos quanto números negativos. Observe que, na adição de números positivos, é possível recorrer aos mesmos procedimentos utilizados para a adição de números naturais.

$$750 + 250 = 1000 \text{ ou } +750 + 250 = +1000$$

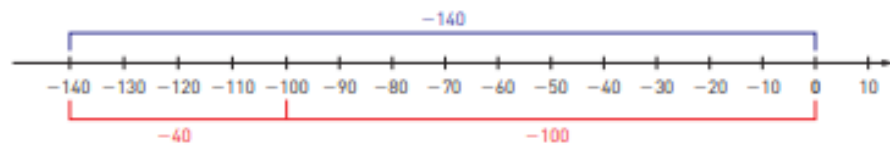
Fonte: LONGEN, 2018, p. 20.

Para uma adição com a presença de números negativos, além dos argumentos anteriores, a reta numérica é utilizada como recurso auxiliar. Observamos que o autor não oferece muitos detalhes acerca da movimentação na reta numérica e isto é feito apenas com o auxílio de cores diferentes nas demarcações na reta, como mostra a figura 15.

Figura 15: Adição de Inteiros na Reta Numérica

$$(-100) + (-40) = -140$$

Podemos interpretar essa situação com o auxílio da reta numérica:



Fonte: LONGEN, 2018, p.21.

Em quadros à parte, o autor apresenta as regras de sinais:

Adição de números inteiros negativos: Adicionamos os valores absolutos desses números e damos, ao resultado obtido, o sinal negativo.

Adição de números inteiros de sinais contrários: Na adição de um número inteiro negativo com um número inteiro positivo, subtraímos os valores absolutos e damos, ao resultado, o mesmo sinal daquele número com maior valor absoluto.

Na adição de dois números inteiros opostos (ou simétricos), o resultado é zero (LONGEN, 2018, p. 21).

Em outra parte da seção destinada ao professor, o autor reitera que “ao pensar em débitos e créditos, lucros e prejuízos, as adições e subtrações com números inteiros ganham significado e as regras para efetuar-las surgem naturalmente” (*Idem*, p. 20). Este contexto é aconselhado não apenas para propor problemas, mas também para justificar essas operações.

O registro de medidas de temperaturas máximas e mínimas é o contexto utilizado para introduzir a subtração entre números inteiros, com a utilização tanto da reta numérica como meio de encontrar esse resultado (Figura 16) quanto da ideia de oposto de um número, transformando a subtração em adição e calculando diretamente. Após alguns exemplos, o

autor indica a regra: “a subtração de dois números inteiros é efetuada adicionando-se o primeiro número ao oposto do segundo” (LONGEN, 2018, p. 25).

Figura 16: Subtração entre Números Negativos na Reta Numérica



Fonte: LONGEN, 2018, p. 25.

Neste livro, podemos considerar que a argumentação justificativa foi utilizada, pois, além do aspecto contextual ter sido empregado não somente para enunciar os problemas, mas também para dar significado às operações de adição e de subtração, apontamos o uso tanto da reta numérica quanto da transformação das subtrações em adições. Um detalhe que destacamos, entretanto, concerne aos exemplos propostos, pois em todos eles o resultado era positivo, podendo gerar o equívoco de se pensar que isso sempre irá ocorrer.

A multiplicação, juntamente com a divisão, são assuntos abordados no capítulo quatro deste livro. Para introduzir a primeira operação, lança-se mão da tabela com uma sequência numérica, incompleta, que levaria o aluno a induzir os resultados provenientes da multiplicação entre um número positivo e outro negativo. O mesmo recurso é apresentado na multiplicação entre dois números negativos, com o complemento da ideia do oposto de um número. Em seguida, o autor apresenta as regras de sinais, que, além de serem enunciadas, também são sintetizadas de forma algébrica, como mostra a figura 17:

Figura 17: Regras de Sinais da Multiplicação

Concluindo, podemos dizer que, se a e b são números inteiros:

- $-(-a) = a$
- $[-a] \cdot [b] = -[a \cdot b]$
- $[a] \cdot [-b] = -[a \cdot b]$
- $[-a] \cdot [-b] = -[a] \cdot [-b] = -(-a \cdot b) = a \cdot b$

Fonte: LONGEN, 2018, p.28.

As regras de sinais da divisão entre números inteiros são estabelecidas conforme determinadas na multiplicação, baseando-se na ideia de que essas operações são inversas, o que podemos considerar como uma justificativa aceitável.

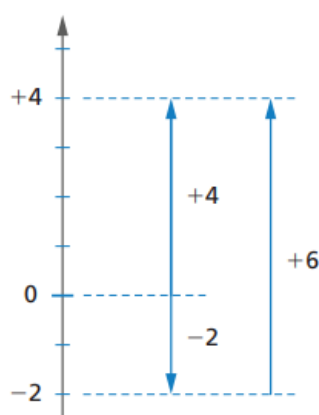
Mais uma vez, apesar de considerarmos que o uso da sequência numérica e da noção do oposto de um número são argumentos justificativos, apontamos para a possibilidade de ampliação do repertório com a introdução da contextualização, o que reforçaria a fundamentação em relação à operação de multiplicação.

4.1.6 – A Conquista da Matemática (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018)

Este livro foi escrito por José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci e o conteúdo dos números inteiros aparece, com a proposta de um jogo no qual utilizam-se dois dados de cores distintas e cada um indica a direção e a quantidade de casas a serem andadas. Em seguida, a ideia de números inteiros é explorada a partir de situações como tabelas de campeonatos de futebol, uma reta com acontecimentos históricos, medidas de temperatura e altitudes. A reta numérica é apresentada, bem como os conceitos de módulo e de oposto (ou simétrico) de um número. Na seção destinada ao professor, os autores sugerem que se proponha em sala de aula a dramatização de uma situação de operação bancária, com situações de depósitos e retiradas.

A adição é abordada por meio de problemas contextualizados, como pontos em torneios de handebol, deslocamentos em elevadores e variação de temperaturas. Após alguns exemplos com a solução sendo apresentada por adições algébricas e com o auxílio da reta numérica (também em posição vertical, como exemplificado na figura 18).

Figura 18: Adição de Números Inteiros na Reta Vertical.



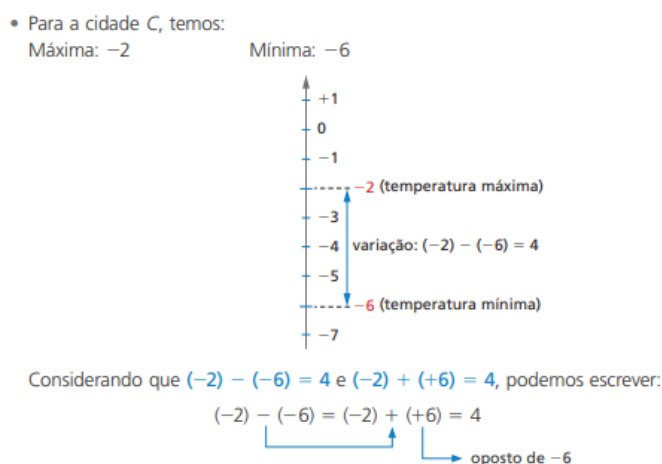
Fonte: GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p.47.

Ao fim de exemplos propostos para cada caso, os autores apontam as regras de sinais:

Quando adicionamos números inteiros com mesmo sinal, a soma é obtida adicionando seus módulos e mantendo o sinal.

Quando adicionamos dois números inteiros de sinais diferentes, a soma é obtida efetuando-se a diferença entre seus módulos e mantendo o sinal do número que está mais distante da origem (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 46; 48).

A subtração com os números inteiros é apresentada a partir o cálculo da variação de temperaturas, com a reta numérica e também na forma aritmética, por meio da transformação daquela operação em uma adição (Figura 19).

Figura 19: Subtração de Números Inteiros

Fonte: GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 52.

Os autores salientam, ainda, a ampliação que o conjunto dos inteiros proporciona, em relação à propriedade do fechamento, no caso da subtração. Após a resolução de alguns outros exemplos, de modo mais “rápido”, os autores afirmam que “de modo geral [*sic*], subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo” (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 53).

Dentro desta unidade, um capítulo ainda é destinado para tratar das adições algébricas, adição e subtração com números inteiros, operações que são reconhecidas como uma só neste conjunto, assim, “toda expressão numérica que contém somente as operações de adição, ou subtração, ou ambas, representa uma adição algébrica” (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 55). Sabendo-se que uma adição algébrica pode ser escrita com ou sem parênteses,

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal $+$, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses **com o seu próprio sinal**.

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal $-$, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses **com o sinal trocado** (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 55, grifos do autor).

O uso da reta numérica, para fundamentar a adição e a subtração, assim como a aplicação da transformação da subtração em adição, empregando o oposto de um número e também a utilização de um contexto financeiro sinalizam a presença de uma argumentação justificativa, em relação às operações. Apontamos duas ressalvas, entretanto, sendo uma delas o fato de que a representação na reta trouxe apenas a indicação da distância entre dois pontos e assim, em todos os exemplos os resultados foram positivos, podendo induzir os alunos a um equívoco. Outra questão é a abordagem das adições algébricas, que apresenta diretamente o algoritmo de resolução, indicando uma argumentação explicativa.

A introdução da multiplicação é feita com um relato sobre a dificuldade histórica na aceitação dos números negativos e, principalmente a compreensão desta operação com esses números. São apresentados três casos possíveis e, em cada um deles, apenas um exemplo é considerado suficiente pelos autores para enunciarem as regras de sinais:

A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo.

A multiplicação de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um número inteiro negativo.

A multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 59-60).

No caso de dois fatores positivos, o resultado é apresentado diretamente, após a eliminação dos parênteses. No caso de sinais diferentes, tanto se utiliza a multiplicação como soma de fatores iguais quanto à troca de um dos fatores pelo seu oposto. No caso dos fatores serem ambos negativos, os autores fazem uso de uma tabela da multiplicação, com a indução de um padrão que faria os alunos perceberem que a multiplicação de dois números negativos daria um produto positivo. Em seguida, os autores apontam que os mesmos resultados seriam obtidos usando o oposto de um número inteiro. Por fim, apresentam mais uma regra para a operação:

Para determinar o produto de dois ou mais números inteiros (diferentes de zero), calculamos o produto dos módulos dos fatores e:

- se a quantidade de fatores negativos é par, o produto é um número positivo;
 - se a quantidade de fatores negativos é ímpar, o produto é um número negativo
- (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 60).

A divisão é inicialmente abordada a partir de exemplos com números naturais e são propostas algumas divisões com números negativos, com seus resultados sendo encontrados a partir da multiplicação, isto é, procurando-se um número – que no caso é o quociente – que ao ser multiplicado pelo divisor resulte no dividendo. Assim, apontam que

de modo geral [*sic*] quando efetuamos uma divisão exata entre dois números inteiros não nulos, o quociente será um número inteiro positivo se o dividendo e o divisor tiverem mesmo sinal; caso contrário, o quociente será um número inteiro negativo (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 64).

Novamente, podemos dizer que os autores poderiam dispor de mais elementos para uma argumentação justificativa mais forte. A utilização do oposto em um caso e da sequência numérica em outro, mas sempre com um único exemplo, e o fato de que não é dado nenhum exemplo contextualizado para as operações revelam uma preocupação em chegar logo às regras de sinais. Os autores até mesmo sugerem, na seção destinada ao professor, que o mesmo ressalte “o fato de que: • se os dois fatores têm mesmo sinal, o produto é positivo; • se

os dois fatores têm sinais contrários, o produto é negativo” (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2018, p. 60). Com referência à divisão, há uma referência à sua justificativa, novamente com apenas um exemplo para cada caso, e não o emprego imediato das suas regras.

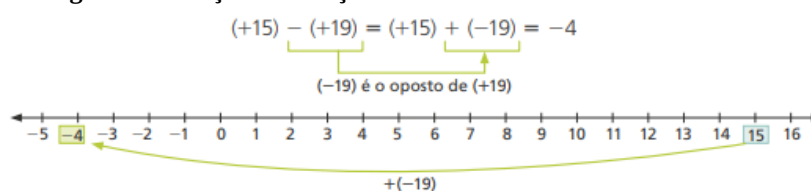
4.1.7 – Matemática: Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018)

O livro de Joamir Roberto de Souza aborda os números inteiros através de exemplos de situações cotidianas nas quais estes números estão presentes, como em medidas de temperaturas, altitudes, representação de saldos de gols e de saldos bancários. Em seguida, são apresentadas a reta numérica e o conceito de módulo ou valor absoluto.

A adição aparece como pano de fundo das regras de um jogo, no qual os pontos são calculados por esta operação. Para as resoluções, o autor utiliza a reta numérica e a ideia de transformar uma adição com um número negativo em uma subtração com o número oposto.

A variação nas medidas de temperaturas é o contexto empregado para a abordagem da subtração entre números inteiros. Ao explicitar que a subtração de um número é equivalente à adição do seu oposto, a operação recai em uma situação já conhecida e a reta numérica também é empregada para mostrar esta soma (Figura 20). Na seção destinada ao professor, o autor sugere que esta operação pode ser trabalhada a partir da ideia de que a subtração e adição são operações inversas e assim, se quisermos calcular $(-3) - (-9)$, temos que determinar um número que, ao ser adicionado a -9 , resulta em -3 (SOUZA, 2018).

Figura 20: Adição/Subtração de Inteiros na Reta Numérica



Fonte: SOUZA, 2018, p. 52.

A representação da soma e da subtração na reta numérica, assim como a transformação da subtração em uma adição com o oposto são argumentos justificativos para as operações. Entretanto, novamente percebemos a escassez de repertório, com as situações contextualizadas sendo empregadas apenas como exemplos.

A multiplicação é explorada a partir da situação de uma brincadeira em que a pontuação de cada jogador é obtida através dessa operação, entre inteiros. Com fatores positivos, a resposta é imediatamente exibida. A multiplicação entre fatores de sinais diferentes é resolvida de duas maneiras, com a adição de parcelas iguais e com a reta

numérica. Quando o primeiro fator é negativo, ou quando ambos são negativos, é empregada a notação de oposto de um número, mas sem fazer essa referência – que é feita apenas nas orientações ao docente, explicitando-se que o oposto de um número pode ser indicado com o sinal de menos precedido de um número entre parênteses – e posteriormente essa substituição é realizada diretamente, como mostra a figura 21.

Figura 21: Multiplicação com Termos Negativos

$$\bullet (-7) \cdot (-4)$$

Como $(-7) = -(+7)$, temos:

$$(-7) \cdot (-4) = -(+7) \cdot (-4) = -(-28)$$

Temos também que $-(-28) = (+28)$. Assim:

$$(-7) \cdot (-4) = -(+7) \cdot (-4) = -(-28) = 28$$

Fonte: SOUZA, 2018, p. 55.

Além disso, um quadro chama a atenção para a possibilidade de aplicar a propriedade comutativa da multiplicação, para encontrar o produto resultante entre um número negativo e outro positivo e depois aplicar a ideia da soma de parcelas iguais, como o caso anteriormente exposto. Assim, a partir de um único exemplo para cada caso, o tópico é finalizado com um quadro que apresenta as regras de sinais: “o **produto** de dois números inteiros, diferentes de zero, com **sinais iguais** é um **número positivo**. O **produto** de dois números inteiros, diferentes de zero, com **sinais diferentes** é um **número negativo**” (SOUZA, 2018, p. 55, grifos do autor).

O tópico da divisão é iniciado lembrando que esta operação é a inversa da multiplicação, e essa ideia é utilizada para resolver seus cálculos, de modo a determinar um número que multiplicado pelo divisor resulta no dividendo. Após a exibição de um exemplo para cada caso, o autor apresenta as regras de sinais: “o **quociente** de dois números inteiros, diferentes de zero, com **sinais iguais** é um número **positivo**. O **quociente** de dois números inteiros, diferentes de zero, com **sinais diferentes** é um número **negativo**” (*Idem, Ibidem*, grifos do autor).

Consideramos que o livro, apesar de apresentar argumentos justificativos para a multiplicação, a utilização da reta e a ideia do oposto, é bastante contido nessa questão. Os objetivos de aprendizagem parecem ser mais a memorização das regras que a compreensão. A utilização de sequências numéricas e de situações contextualizadas certamente ofereceria mais possibilidades aos alunos. Em relação à divisão, ainda que fundamentada na ideia de

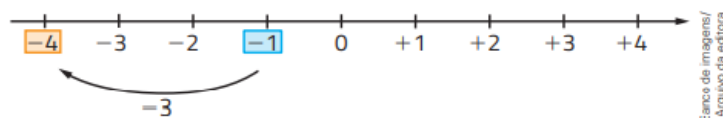
determinar um número que satisfaça a operação inversa, antes das regras, apresenta apenas um exemplo.

4.1.8 – Teláris (DANTE, 2018)

O autor, Luiz Roberto Dante, aborda o conteúdo dos números inteiros explorando alguns exemplos de situações do cotidiano, como as medidas de temperaturas, as altitudes, o fuso horário, valores monetários e saldo de gols em campeonatos esportivos. Além disso, na seção “Um pouco de história”, a partir da relação entre o ato de contar e o conceito de número natural, o autor aponta também a relação entre o conjunto dos números inteiros e o surgimento das dívidas. Como nos outros livros examinados, neste também são apresentados a reta numérica e os conceitos de módulo e de oposto ou simétrico.

Para tratar da operação de adição com números inteiros, é ressaltado que existem vários recursos disponíveis e os exemplos são apresentados com diferentes formas de resolução, entre as quais encontram-se a reta numérica e a transformação de subtração em adição do oposto, sempre a partir de uma situação contextualizada, como podemos observar na figura 22. Na seção destinada ao professor é sugerido que o mesmo trabalhe com outros tipos de situação, como por exemplo, com o uso do dinheiro.

- Figura 22: Formas de Tratar a Adição com Números Inteiros**
- Adição de -1 e -3 .
Um mergulhador estava a 1 metro abaixo do nível do mar (-1) e desceu 3 metros (-3), ficando a 4 metros abaixo do nível do mar (-4).
Também podemos usar uma reta numerada: partindo do -1 e andando 3 unidades para a esquerda (-3), vamos parar no -4 .



Indicamos essa adição assim: $(-1) + (-3) = -4$ ou $-1 - 3 = -4$.

Fonte: DANTE, 2018, p. 23.

Em relação à subtração com os números inteiros, o autor também se utiliza de diferentes situações-problemas, como a variação de temperaturas e a diferença entre andares de um prédio, com suas soluções sendo encontradas por meio da operação inversa. Em todos os exemplos, também é apresentado outro modo de resolução, com o uso da ideia de oposto, como podemos ver na figura 23.

Figura 23: Formas de efetuar Subtração entre Números Inteiros

- Que movimentação deve ser feita em uma conta bancária para passar de um saldo negativo de R\$ 85,00 para um saldo positivo de R\$ 48,00?
Para responder a essa questão, precisamos calcular o saldo final menos o saldo inicial, ou seja, efetuar a subtração $(+48) - (-85)$. Usando a operação inversa, podemos descobrir qual é o número cuja adição com (-85) resulta em $(+48)$.
Esse número é o $+133$, pois $(+133) + (-85) = +48$. Logo, $(+48) - (-85) = +133$ e, então, deve ser feito um depósito de R\$ 133,00.
Analise a subtração efetuada, agora pelo processo prático.

$$(+48) - (-85) = +48 + 85 = +133$$

Oposto de -85 ,
que é $+85$.

Fonte: DANTE, 2018, p. 26.

A partir de alguns exemplos, o autor aponta que

subtrair um número é o mesmo que adicionar o oposto ou o simétrico desse número [...] as situações que acabamos de ver mostram que o resultado de uma subtração de números inteiros pode ser obtido por meio da adição do primeiro número com o oposto do segundo (DANTE, 2018, p. 27).

Ao abordar as operações de adição e de subtração, observamos que o autor, além de utilizar vários exemplos, aponta vários tipos de maneiras de solucioná-los, como a reta numérica, a utilização do número oposto e da operação inversa, sempre partindo de situações contextualizadas. Assim, identificamos a presença da argumentação justificativa, de acordo com (SALES, 2010; ATTIE, 2016), não deixando que a apresentação ficasse apenas nos algoritmos e regras.

A operação de multiplicação é abordada a partir de uma tabela de multiplicações, que deverá ser completada pelos alunos (Figura 24), a fim de que descubram alguma regularidade e possam concluir sobre os sinais dos produtos.

Figura 24: Tabela de Multiplicações

Tabela de multiplicações							
×	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
+3	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9
+2	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6
+1	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
-2	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6
-3	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9

Ativar o Windows
para obter mais dicas.

Fonte: Dante, 2018, p. 30.

Depois de várias perguntas aos alunos, mais uma tabela é exposta (Figura 25), com uma síntese dos sinais dos produtos e, por fim, o autor apresenta a regra de sinais da multiplicação: “O produto de 2 números inteiros com sinais iguais tem sempre sinal positivo. O produto de 2 números inteiros com sinais diferentes tem sempre sinal negativo” (DANTES, 2018, p. 30).

Figura 25: Regra de Sinais na Multiplicação de Números Inteiros

Primeiro número	Segundo número			
	×	+	0	−
	+	+	0	−
	0	0	0	0
	−	−	0	+

Fonte: Dante, 2018, p. 30.

A relação existente entre multiplicação e divisão, como operações inversas, é o tratamento empregado para esta última operação. A partir de exemplos com os números naturais, a ideia é estendida para os números inteiros.

As regras de sinais praticadas na multiplicação foram justificadas unicamente a partir da sequência numérica, renunciando à utilização da ideia do oposto e da contextualização, esta última apresentada de forma elogiável nas operações anteriores. Aparece, de certa forma, uma ruptura no tratamento dado pelo autor, pois no caso da adição e da subtração, na seção destinada ao professor, é até defendido que se disponha de um momento na aula em que os alunos compartilhem as estratégias utilizadas, já que “a escolha do recurso a ser utilizado pelos alunos é pessoal” (DANTE, 2018, p. 24). No entanto, para o caso da multiplicação, não se oferece essa possibilidade, pois apenas um modo de resolver é apresentado. No caso, da divisão, esta é justificada por meio da utilização da operação inversa, com vários exemplos, para depois questionar aos alunos se “as regras de sinais da divisão envolvendo só números inteiros positivos e números inteiros negativos são as mesmas da multiplicação” (*Idem*, p. 32).

4.1.9 – Bianchini (BIANCHINI, 2018)

A partir da relação entre a ideia de número natural e a necessidade de contar e registrar quantidades, o livro de Edwaldo Bianchini aponta que o surgimento dos números negativos

também ocorre pela necessidade humana de registrar os resultados de subtrações em que o minuendo é menor que o subtraendo. O autor se utiliza de várias situações cotidianas, tais como as altitudes em relação ao nível do mar, as medidas de temperaturas, extratos bancários e dos saldos de gols em disputas de futebol, para mostrar exemplos de números negativos. Em seguida, apresenta a reta numérica e os conceitos de módulo, ou valor absoluto e oposto, ou simétrico.

A adição de números inteiros é apresentada com o suporte da reta numérica, mas antes que qualquer exemplo, situação ou problema fosse proposto, o autor exhibe um algoritmo para a operação:

Partindo do zero, em primeiro lugar, andamos as unidades indicadas na primeira parcela e, em seguida, andamos as indicadas na segunda parcela. Chegamos, então, a um ponto cuja abscissa é a soma dos números dados.

Vamos estabelecer que o deslocamento será:

- para a direita, se o número for positivo;
- para a esquerda, se o número for negativo (BIANCHINI, 2018, p. 20).

Após apresentar apenas uma situação contextualizada e dois exemplos numéricos para os casos de sinais iguais e sinais diferentes, o autor apresenta as regras de sinais para a adição:

A soma de dois ou mais números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando o sinal comum.

A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos e dando ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso esses números sejam opostos, a soma será igual a zero (BIANCHINI, 2018, p. 21).

A variação entre as medidas de temperatura também é o único exemplo de uma situação contextualizada, empregado para apresentar a subtração entre números inteiros. Representada na reta numérica, esta operação é entendida como a distância entre dois de seus pontos, como mostra a figura 26.

Figura 26: Diferença entre Números Inteiros na Reta Numérica

Veja como podemos representar a diferença entre a temperatura registrada em Viena (-12°C) e a registrada em Londres (-3°C) na reta numérica.



Analisando a reta numérica, concluímos que na viagem de Londres para Viena a temperatura diminuiu 9°C .

A operação que representa essa situação é a subtração: $(-12) - (-3) = -9$.

Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 27.

Em seguida, a operação é representada por meio de três exemplos diretos, sendo efetuada em sua forma aditiva, utilizando a ideia de oposto. Ao fim dos exemplos, o autor

indica que “a subtração de dois números inteiros é calculada adicionando-se o primeiro número ao oposto do segundo” (BIANCHINI, 2018, p. 28).

O autor também apresenta expressões formadas somente por adições e subtrações de números inteiros e aponta, novamente sem justificção, mais duas regras, que ele denomina critérios, para a eliminaçção dos parênteses: “quando o sinal que precede os parênteses for mais, conservamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses [...] quando o sinal que precede os parênteses for menos, trocamos os sinais dos números” (BIANCHINI, 2018, p. 29). Na seçção destinada ao professor, é sugerido ao mesmo usar uma analogia entre as sentenças numéricas com os sinais dos números e frases para eliminaçção dos parênteses nas adições algébricas.

Por exemplo, considerando que o sinal “+” corresponde ao “lado direito” de uma blusa e o sinal “-” corresponde ao “lado avesso” de uma blusa, temos:

- “O avesso do avesso é o lado direito” $- (-8) = +8$.
- “O avesso do direito é o lado avesso” $- (+8) = -8$.
- “O direito do avesso é o lado avesso” $+ (-8) = -8$.
- “O direito do direito é o lado direito” $+ (+8) = +8$ (BIANCHINI, 2018, p. 29).

Apesar do autor iniciar sua abordagem com a correta relaçção entre o surgimento dos números negativos com a necessidade humana de representar um certo tipo de quantidades, o que observamos no livro, a partir daí, é a predominância da apresentaçção das regras em detrimento da fundamentaçção lógica para o uso destas. A utilizaçção da reta numérica, para a adiçção, ainda que possa legitimar esta operaçção, é a única alternativa para uma argumentaçção justificativa. Para a subtraçção, além da utilizaçção da reta numérica, que aparece em apenas um exemplo, há também o uso do oposto, o que podemos considerar como argumentos justificativos. Entretanto, consideramos que o livro apresenta um repertório frágil, com apenas uma situaçção contextualizada e poucos exemplos para cada caso. Consideramos positivo, entretanto, a sugestão ao professor de uma analogia com a situaçção cotidiana dos lados “avesso” e “direito”, que pode auxiliar o aluno a dar significaçção ao processo de eliminaçção dos parênteses.

O conceito da multiplicaçção como soma de parcelas iguais, oriundo do conjunto dos números naturais, é utilizado para mostrar, em exemplos, os casos em que o primeiro fator é positivo e a notaçção do oposto de um número é a abordagem para resolver os casos em que o primeiro fator é negativo. Depois de um exemplo para cada situaçção, o autor apresenta as regras de sinais para a multiplicaçção:

Em qualquer multiplicaçção de números inteiros diferentes de zero, temos:
- o produto de dois números de mesmo sinal é um número positivo;

- o produto de dois números de sinais diferentes é um número negativo (BIANCHINI, 2018, p. 32).

A divisão é justificada como uma operação inversa da multiplicação e é indicado que:

em uma divisão entre dois números inteiros, com o divisor diferente de zero, temos:

- quociente positivo quando esses números (dividendo e divisor) são de mesmo sinal;
- quociente negativo quando esses números (dividendo e divisor) são de sinais diferentes (BIANCHINI, 2018, p. 36).

Consideramos que as justificativas utilizadas para a multiplicação de números inteiros, a soma de parcelas iguais, unicamente para quando o primeiro fator é positivo e a utilização do oposto, quando o primeiro fator é negativo, revela um reduzido repertório. Ainda que válidas, as justificativas poderiam ser ampliadas com a utilização da contextualização e das sequências numéricas. Além disso, consideramos que o autor utiliza uma quantidade limitada de exemplos, trazendo o risco de levar o aluno a conclusões equivocadas. Em relação à divisão, mesmo justificando a regra de sinais, o autor repete o posicionamento de apresentar poucos exemplos.

4.1.10 – Araribá Mais (GAY; SILVA, 2018)

Na obra dos autores Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva, os números inteiros são apresentados por meio de situações como as medidas de temperaturas, os extratos bancários, as tabelas de campeonatos de futebol e a representação de altitudes. Em seguida, são apresentados a reta numérica e os conceitos de valor absoluto (módulo) e oposto ou simétrico.

Os autores apontam que a adição de números inteiros pode ser observada em diferentes situações e é a partir de algumas delas que a operação é apresentada. Com a ajuda de figuras ilustrativas, como termômetros, andares de um edifício e mergulhadores no fundo do mar, as situações são interpretadas como uma reta numérica em posição vertical, e fundamenta-se os cálculos desta operação, que também é representada através da adição dos termos de “maneira simplificada”, sem os parênteses. Posteriormente, após uma série de exemplos e exercícios, os autores propõem uma atividade em grupo para que, de forma cooperativa, os alunos

observem algumas regularidades ao adicionar números inteiros [...] e a partir das ideias do outro, irá pensar com criticidade sobre suas próprias ideias [...] e dessa forma, eles próprios poderão deduzir as regras de sinais através da generalização dos movimentos realizados, possibilitando uma nova forma de compreender a operação de adição com números inteiros (GAY; SILVA, 2018, p. 39).

Assim, os autores não explicitam as regras de sinais da adição apostando que os alunos poderão inferi-las a partir da realização das atividades.

A subtração é trabalhada sob duas perspectivas, a reta numérica, com apenas um exemplo e a transformação da operação em adição do número oposto, com dois exemplos. No caso da reta numérica, a subtração é interpretada como a distância entre os dois pontos. Em relação à utilização do oposto, os autores apresentam a regra, dividida em três casos, para a eliminação dos parêntesis:

Não há sinal antecedendo os parênteses (eliminam-se os parênteses, e conserva-se o sinal do número).

Sinal de subtração antecedendo os parênteses (eliminam-se os parênteses, e troca-se o sinal do número).

Sinal de adição antecedendo os parênteses (eliminam-se os parênteses, e conserva-se o sinal do número) (GAY; SILVA, 2018, p. 44).

Consideramos positivo o fato dos autores apresentarem uma série de processos exemplificando as resoluções tanto para a adição como para a subtração, além de uma atividade destinada a levar os alunos a deduzirem eles mesmos as regras de sinais, ao invés do próprio livro apresentá-las. Alguns pontos, entretanto, mereceram nossa atenção, em relação à argumentação utilizada na subtração. Um deles diz respeito ao uso da reta numérica, entendida como a distância entre dois pontos, o que poderia levar o aluno à conclusão equivocada de que o resultado seria sempre positivo. Outro ponto é relativo à abordagem da eliminação dos parêntesis, no qual a ênfase maior é dada às regras, configurando uma argumentação explicativa.

Em relação à multiplicação com os números inteiros, os autores iniciam com uma situação-problema, resolvida a partir da soma de parcelas negativas iguais, logo reescrita como uma multiplicação. Após essa introdução, casos numéricos de multiplicação são apresentados e divididos em casos. A ideia da multiplicação como soma de parcelas iguais é empregada quando o primeiro fator é positivo. Já para o caso em que os sinais são diferentes, com o primeiro fator negativo, os autores recorrem à ideia de oposto de um número, reescrevendo a operação e simplificando os parêntesis, sem explicitar, por vezes, qualquer argumento para esta redução. A multiplicação entre dois números negativos é justificada a partir de uma sequência de multiplicações conhecidas que deve ser completada para se chegar ao sinal do produto entre dois negativos e, além disso, também se exibe a resolução mediante a notação do oposto de um número. Ao fim de todos os casos, apresentam as regras de sinais: só em um balão resume as possibilidades de multiplicação entre números inteiros e suas respostas, quanto ao sinal: “Resumindo, na multiplicação de dois números inteiros: se os

fatores têm mesmo sinal, o produto é positivo; se os fatores têm sinais diferentes, o produto é negativo; se um dos fatores é zero, o produto é igual a zero. ” (GAY; SILVA, 2018, p. 47).

Consideramos relevante destacar a discussão presente no manual do professor da presente obra, em que são abordadas possíveis “explicações sobre as ‘regras de sinais’”. A princípio, relata-se um “truque”, que é comum sua presença nas aulas de matemática:

- 1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, $(+)(+) = +$;
- 2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)(-) = -$;
- 3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, $(-)(+) = -$; e, finalmente,
- 4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa $(-)(-) = +$ (GAY; SILVA, 2018, p. XIX).

Do ponto de vista dos autores, os argumentos consistiam em bons artifícios didáticos, embora nem todos concordassem com todas essas filosofias, principalmente, a quarta, pois “podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si” (*Idem, Ibidem*).

Os autores continuam a discussão apresentando uma demonstração⁴⁶ mais rigorosa da regra de sinais para a multiplicação, especificamente “ $(-) \cdot (-) = +$ ” e, sobre a mesma, apontam que ela poderia não ter efeito didático para os alunos, apresentando uma sugestão, a partir do livro de Morris Kline "O Fracasso da Matemática Moderna", página 191:

Um ganho será representado por um número positivo e a perda por um número negativo. Igualmente, o tempo no futuro será representado por um número positivo e no passado por um número negativo. ... Se perde 5 dólares por dia, então daqui a 3 dias terá perdido 15 dólares... $(- 5).(+ 3) = - 15$... se perde 5 dólares por dia, então há 3 dias atrás estava 15 dólares mais rico... $(- 5).(- 3) = + 15$ (GAY; SILVA, 2018, p. XIX).

Os autores acrescentam que “a sugestão é muito boa. Pode ser utilizada com êxito, inclusive porque contribui para que os alunos entendam melhor o uso de números negativos em problemas concretos” (GAY; SILVA, 2018, p. XX).

Para o estudo do sinal do quociente entre dois números negativos, retoma-se a ideia da divisão como operação inversa da multiplicação. A partir da proposição de uma atividade aos alunos, que estimula o emprego desta última operação, espera-se que os alunos concluam a relação entre as regras de sinais da multiplicação com as da divisão.

No tocante às regras de sinais para a multiplicação, apontamos a presença da argumentação justificativa, com a utilização de um amplo repertório, que pode proporcionar várias possibilidades para a compreensão dos alunos. Em relação à divisão, além da exploração da operação como uma inversa da multiplicação, salientamos a postura diferente e positiva de propor uma atividade aos alunos para que os mesmos possam chegar às regras de

⁴⁶ Não vem ao caso aqui voltar à essa discussão, mas, em outro parágrafo, os autores também chamam essa demonstração de prova.

sinais sem que o livro as apresente. Novamente, ressaltamos o cuidado dos autores em priorizar as justificativas, sem, no entanto, negligenciar a necessidade das regras.

4.1.11 – Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2018)

Ênio Silveira aborda os números inteiros registrando sua presença nas medidas de temperaturas, em dois exemplos. Depois de apresentar uma seção, “Um pouco de história”, relacionando o conjunto dos inteiros a uma aritmética comercial, o autor exibe outras situações em que os números negativos se fazem presentes, como nos extratos bancários, saldos de gols e na representação de altitudes. Em seguida, o autor discorre sobre a reta numérica e expõe os conceitos de módulo (valor absoluto) e oposto ou simétrico.

O autor inicia a discussão acerca da adição entre números inteiros, com a proposição de três situações-problemas com base no contexto financeiro, com a resolução sendo apontada na reta numérica.

Depois da primeira situação apenas, após a resolução na reta numérica, aparece a regra, “em adições cujas parcelas têm o mesmo sinal, adicionamos os valores absolutos dessas parcelas e mantemos o sinal” (SILVEIRA, 2018, p. 23) e alguns exemplos aritméticos, sem nenhuma justificativa da resolução, a não ser o uso da regra.

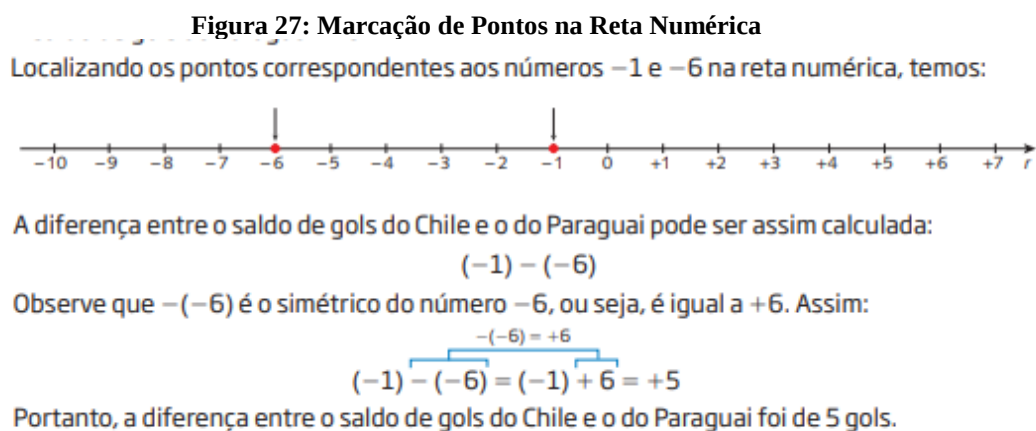
O mesmo acontece depois das outras duas situações, em que os exemplos são apresentados da mesma maneira, depois das resoluções das situações apenas na reta numérica e da indicação da regra: “em adições cujas parcelas têm sinais contrários, subtraímos os valores absolutos dessas parcelas e mantemos o sinal do número de maior valor absoluto” (SILVEIRA, 2018, p. 24).

Em meio às três situações apresentadas, há um balão que relaciona a adição das parcelas com a ideia de lucros e prejuízos, antecipando os sinais das somas: “quando junto dois prejuízos, obtenho um prejuízo. Quando junto dois lucros, obtenho um lucro. Quando junto um prejuízo com um lucro... aí depende do valor absoluto de cada um” (*Idem*, p. 23).

Para a subtração, o autor apresenta uma tabela de saldos de gols e solicita vários cálculos a partir dela. Nos exemplos, adota a ideia de números simétricos e elimina os parêntesis, apontando que

quando, antes dos parêntesis, o sinal for “+” (que pode não estar explícito, ou seja, pode não aparecer), mantemos os sinais dos números que estão no interior dos parêntesis [...] Quando o sinal que antecede os parêntesis for “-”, trocamos os sinais dos números que estão no interior dos parêntesis (SILVEIRA, 2018, p. 27).

A reta numérica se faz presente a princípio, porém é explorada somente para localizar os pontos da operação, e não para realizá-la, como podemos observar na figura 27.



Fonte: SILVEIRA, 2018, p.27.

Podemos considerar alguns pontos sobre a abordagem do autor em relação às operações de adição e subtração. No caso da adição, é louvável a utilização tanto da reta numérica quanto do contexto financeiro, este último como ponto de partida e como fundamento para os resultados. Apontamos a utilização da argumentação justificativa, apesar da reduzida quantidade de exemplos. Em relação à subtração, entretanto, o autor se utiliza de um único exemplo contextualizado e, a partir deste, quase que unicamente da ideia do oposto, renunciando a outras abordagens que poderiam auxiliar na justificativa, tais como o contexto financeiro e a reta numérica, explorada apenas para situar onde os pontos se encontram e não para realizar a operação.

Em relação à multiplicação de números inteiros, o autor apresenta dois casos, quando primeiro fator é positivo e quando o primeiro fator é negativo. No primeiro caso, indica a reescrita da multiplicação como adição de parcelas iguais e no segundo caso, antes de adotar essa mesma ideia, reescreve o primeiro fator como o negativo do seu oposto, sem fazer qualquer referência ao porque desse procedimento, apenas empregando-a nos cálculos. Em seguida, são apresentadas as regras de sinais: “em multiplicações de dois números inteiros de mesmo sinal, o resultado é um número positivo [...] em multiplicações de dois números inteiros de sinais diferentes, o resultado é um número negativo” (SILVEIRA, 2018, p. 30). Na seção destinada ao professor, o autor aponta que “é importante usar exemplos que permitam aos alunos compreender o fundamento das regras de sinais para evitar que sejam memorizadas sem qualquer significado” (*Idem, Ibidem*), apesar do livro não trazer nenhum desses exemplos.

A relação entre a multiplicação e a divisão como operações inversas é a justificativa empregada para essa operação no conjunto dos números inteiros, pois, na divisão, será preciso encontrar um número que “multiplicado pelo divisor, tem como resultado o dividendo” (SILVEIRA, 2018, p. 32). Após apresentar um único exemplo para cada caso, o autor indica as regras de sinais: “em uma divisão, se o dividendo e o divisor tiverem os mesmos sinais, o quociente será um número positivo. Em uma divisão, se o dividendo e o divisor tiverem os sinais contrários, o quociente será um número negativo” (SILVEIRA, 2018, p. 33).

Neste livro, consideramos que, apesar de conseguirmos identificar a presença de um único argumento que possa justificar as regras de sinais para a multiplicação, a omissão de suas referências revela uma preocupação maior com a utilização da regra em si e não com a possível fundamentação da mesma. Assim, pode ser evidenciada uma argumentação explicativa (SALES, 2010; ATTIE, 2016). Acrescentamos que uma ampliação do repertório, como a apresentação de uma situação contextualizada e também de uma sequência numérica a ser completada poderia auxiliar os alunos na compreensão das regras de sinais, apesar da afirmação de que “A compreensão efetiva dessas regras é fundamental” (SILVEIRA, 2018, p. 33). Em relação à divisão, a apresentação da mesma como operação inversa da multiplicação pode ser considerada como uma justificativa para as regras de sinais.

A fim de oferecermos uma visão panorâmica em relação às obras didáticas analisadas, no que tange aos nomes de tais coleções, seus autores e as categorias de argumentação detectadas na abordagem das referidas operações apresentamos o quadro 2:

Quadro 2: Obras Didáticas Analisadas

Livro	Autor(es)	Argumentação Explicativa	Argumentação Justificativa
Geração Alpha	Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita.	Divisão	Adição, Subtração e Multiplicação
Convergências	Eduardo Chavante	—	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Matemática Essencial	Patricia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri	—	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Trilhas da Matemática	Fausto Arnoud Sampaio	—	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Apoema	Adilson Longen	—	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão

A Conquista da Matemática	José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci	–	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Matemática: Realidade & Tecnologia	Joamir Roberto de Souza	–	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Teláris	Luiz Roberto Dante	–	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Bianchini	Edwaldo Bianchini	–	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Araribá Mais	Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva	–	Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão
Compreensão e Prática	Ênio Silveira	Multiplicação	Adição, Subtração e Divisão

Fonte: Autora, 2022

Salientamos que os dados apresentados, referentes ao tipo de argumentação empregada na abordagem de cada operação, foram dispostos de uma maneira geral, ou seja, apenas identificamos a presença de argumentos justificativos – desconsiderando a limitação no repertório dos argumentos e a quantidade de exemplos apresentados. Vale lembrar que, mesmo diante de argumentos justificativos, no decorrer de nossa análise alguns livros valeram-se de observações em relação aos mesmos.

Apresentados os dados obtidos com a análise das obras didáticas, passamos para a apresentação das informações catalogadas com os questionários e entrevistas realizadas com os docentes participantes.

4.2 – Acerca das Entrevistas

Para referirmo-nos aos professores participantes, utilizaremos os códigos P1, P2, P3 e P4. Como nossa busca não ocorreu em uma única escola ou uma cidade específica, nossos participantes atuam em diferentes municípios, além disso, o tempo de experiência profissional de cada é variável. A fim, de traçar o perfil acadêmico e profissional desses, fazemos uma breve apresentação a esse respeito⁴⁷.

A professora **P1** formou-se no ano de 2019, mas atua em sala de aula há quinze anos, e é pós-graduada em Psicopedagogia e em Metodologia do Ensino de Matemática. No período

⁴⁷ As informações destacadas referem-se ao mês de novembro de 2021, período de aplicação dos questionários.

de aplicação dos questionários, lecionava em dois municípios, Tomar do Geru – SE e Rio Real – BA. Questionada acerca da utilização do livro didático em suas aulas, confirma o uso do mesmo, como um “recurso complementar” (P1).

P2 completou a graduação em 2011 e atua como professora desde então, contando dez anos em exercício docente. É pós-graduada em Metodologia para o Ensino da Matemática e naquele momento era funcionária pública no município de Itabaiana – SE. Sobre o uso do livro didático adotado pela escola, afirma que utiliza-o “selecionando algumas atividades de cada assunto abordado” (P2).

A docente **P3**, obteve o título de licenciada em matemática no ano de 2018, trabalha em sua área de formação há três anos e estava atuante no município de Umbaúba –SE. Como complemento de sua graduação, fez pós-graduação em Metodologia Matemática. Ao responder o questionamento acerca da utilização do livro didático adotado pela escola, apenas confirma, mas sem explicitar como esta é realizada.

Formado desde 2008, mas com tempo de atuação anterior a esse período, **P4** é professor há vinte anos, e é pós-graduado em Metodologia do Ensino da Matemática e estava em exercício no município de Itabaianinha – SE. Em suas aulas, os livros didáticos são utilizados para acompanhar “problemas introdutórios, definições, explicações, situações correlatas, abordagens históricas, imagens”, além de, deles serem retirados exercícios de “fixação e aprimoramento” (P4). O mesmo ainda salienta que essa abordagem não é realizada com todos os conteúdos, só com alguns selecionados, que julga prioritário.

Antes da apresentação dos dados obtidos em nossa investigação, que visam responder outra parte de nossas questões, consideramos ser conveniente trazer alguns aspectos gerais a respeito dos impasses de estudantes ao operar com os números inteiros, que foram observados por esses professores. Justificamos nossa escolha pelo fato de que esse assunto foi a mola propulsora de nossas conversas. Além disso, consideramos que nossos esforços, enquanto pesquisadores e professores, devem estar direcionados para propiciar uma maior compreensão na aprendizagem e, dessa forma, conhecer e entender as dificuldades apresentadas é um dos passos que pode nos conduzir para esse alcance.

Reiteramos aqui, que não tivemos em momento algum, seja no decorrer das conversas, seja na descrição dos resultados, o desígnio de julgar a prática pedagógica desses docentes ou prescrever como devem conduzir suas aulas.

4.2.1 – Impasses dos Estudantes

Todos os professores participantes relataram algum tipo de dificuldade dos alunos associadas às operações fundamentais com os números inteiros, seja na adição e subtração, seja na multiplicação e divisão.

A professora P1 revela que a parte inicial, que consiste em diferenciar tais números ou representá-los na reta numérica, não apresenta complicações para os estudantes. Porém, quando parte-se para as operações, esse cenário muda, ainda mais na multiplicação e na divisão, pois no jogo de sinais *“eles também se perdem muito, muito mais do que quando é adição e subtração”* (P1). Posteriormente, entretanto, quando solicitamos mais dados a respeito dessa maior dificuldade, a resposta é a de que isso ocorre *“quando o sinal do maior não é negativo, né, quando o sinal do maior não é o negativo então isso aí não é o problema. Mas quando é negativo eles a confundem”* (P1).

Em relação à soma e à subtração, P2 associa os embaraços à falta de *“ideia”* dos alunos a respeito, por exemplo, dos significados dessas operações com dois números negativos, já que *“eles não tem noção e, assim, eles estão tão bitolados a fazerem aquelas continhas de mais e de menos, né, aí eles fazem de qualquer jeito, mais e menos, ou, aí, não tem muita atenção a isso”* (P2). Prova disso é quando os alunos se deparam com uma operação do tipo *“ $-7 + 8$ ”* os mesmos já respondem que *“não dá”* (P2).

Em sentido semelhante a essas professoras P4, relata que *“às vezes a maior dificuldade que eles têm é entender as operações com os sinais”* (P4), por sentirem dúvidas de qual operação realizar, somar ou subtrair. Ademais, o jogo de sinal efetuado na multiplicação, divisão e na adição algébrica também causa uma *“uma certa dificuldade”* (P4) nos discentes.

Essas narrativas nos levam a inferir que as dúvidas dos alunos aparecem, principalmente, por não conseguirem atribuir e compreender os diferentes significados que os sinais de *“+”* e *“-”* podem apresentar nesse novo conjunto. Como destacado por P2, eles encontram-se presos às operações de adição e subtração com os números naturais, únicos significados atribuídos a esses símbolos até então, e associá-los a um estado de um número em meio a uma operação acaba tornando-se um obstáculo.

Em relação às observações de P3, destacamos que não foram apresentados muitos detalhes, mas foram expostos dois contextos distintos, nas duas escolas em que lecionava. Inicialmente, em ambas as escolas, os alunos não estavam conseguindo abstrair as regras para as operações de soma e subtração, quando a professora, então, resolve mudar sua abordagem (como veremos adiante). Em uma das escolas, a docente consegue reverter essa situação,

tanto que nota que, ao chegar à multiplicação, não teve tantos problemas, “*porque aí foi trabalhado as dificuldades nas operações de adição e subtração, quando passei pra parte de multiplicação eles, super entenderam*” (P3). Na outra escola, entretanto, essa mudança não surtiu o mesmo efeito, com a participante desabafando que se encontrava “*no marco zero, era pra tá finalizando e eu ainda tô [sic] aqui nos números inteiros e o pior de tudo é que eu tô [sic] com os números inteiros, tanto no 7º, tanto no 8º, quanto no 9º, ninguém sabe fazer nada, tô [sic] aí zerada*” (P3).

Chamamos a atenção ao fato relatado por esta professora, que diz respeito a essas dificuldades estarem presentes ainda em séries posteriores, pois reitera o que já havíamos afirmado. Ocorrências desse tipo foram verificadas por mais dois professores também, P2 e P4, este último sinalizando essas dificuldade até em alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Na adição, com as dificuldades próprias do conteúdo brevemente expostas, P1 e P2 constatam que os alunos chegam ao 7º ano com dúvidas características dessas operações desde os números naturais, pois

Às vezes quando eles têm dificuldades, só com os números naturais, às vezes eles já vêm com dificuldades com os números naturais, multiplicação e na fração (P1).

E assim, divisão meu Deus do céu, é muito triste, é muito triste mesmo [...] O que eu ia falar também era sobre a tabuada, muitos alunos não sabem nada, a gente pergunta quanto é duas vezes zero, eles não sabem (P2).

Segundo um participante, quando o aluno tem “*um bom ensino fundamental menor [...] quando eles sabem fazer as operações*” (P4), isso contribui bastante para a aprendizagem das operações nesse novo conjunto. Esta afirmação sustenta a ideia das operações com números inteiros ter como um de seus pilares as operações com os números naturais.

Conhecendo-se um pouco acerca dos embaraços mais comuns entre alunos da educação básica no que concerne à aprendizagem das operações com números inteiros, passamos para a identificação dos tipos de argumentos que foram emitidos pelos docentes para o ensino delas.

4.2.2 – Argumentos dos Professores para as Operações

Ao expressarem as dificuldades apresentadas por seus alunos, metade dos participantes (P2 e P3) relatam brevemente como trabalham as operações com os números inteiros, mais especificamente, as operações de soma e subtração. Em suas abordagens, notamos que estas recorrem a situações concretas a fim de que seus alunos consigam

estabelecer sentido às essas operações e resolvê-las, associando os números negativos a *dívidas*, ou *perdas* e os positivos a *posses*, ou *ganhos*.

olha se você colocar menos dez com menos dez, é como se você vai perder e perder [...] preste atenção que é perder e perder [...], então você vai perder, assim, uma coisa e outra coisa, essas coisas vão se juntarem, vai ser uma perda que vai se juntar (P2).

imagine você devendo e você tendo tanto para pagar, aí eu mostrava, né, que é aí, você ia fazer uma conta de menos, e aí você vai ver, né, de acordo com o valor do maior, que é o maior módulo, né, a gente fala assim, mas a gente percebe que eles não entendem muito, né. Eu digo assim, o maior valor, se ele não tivesse o sinal, qual seria o maior número? [...] olhem o maior valor, porque quando vocês têm mais negativo, é porque você está devendo mais do que você tem para pagar. Quando você tem mais positivo, é porque você tem muito e vai pagar o que você deve, então vai sobrar (P2).

vamos lá adotar o que devo e o que tenho, quando adotei essa medida de devo e tenho, coloque aí na mente de vocês como se vocês estivessem mexendo com dinheiro, né, vocês devem 10 reais, então, vocês têm com 10 reais, no caso 10 negativo e vocês pagaram 4 reais, ou seja, vocês têm o 4 como positivo, e aí vocês ficam devendo quanto? ‘Ah professora continua devendo 6’. Pronto, esses 6 seu vai ser um número negativo, você tá com saldo negativo ainda (P3).

Ao realizar essas associações, de acordo com P2, seus alunos começam até a entender, só que, arriscamo-nos a dizer que esse entendimento não parece ser efetivo, pois ao ir para o “concreto, né, pra questão, eles acabam se perdendo” (P2). É interessante apontarmos como o que a participante denomina “concreto” é justamente a questão proposta no livro, que é uma questão meramente numérica, que se distancia de algo efetivamente concreto. A participante ainda relata manipular, também, com materiais manipuláveis, mas o resultado é o mesmo, revelando sentir “muita dificuldade” (P2) para trabalhar esse conteúdo. Uma queixa exposta por essa docente refere-se ao tempo destinado a essa disciplina, considerando-o pouco para um trabalho mais minucioso do presente conteúdo.

No relato desta professora, notamos que, em relação à adição e à subtração dos números inteiros, é utilizada uma Argumentação Justificativa, conforme as categorias de argumentação propostas por Sales (2010) e Attie (2016), pois engloba o aspecto contextual. O argumento mais fortemente utilizado, inclusive, coincide com um dos argumentos que apresentamos na seção 2. Além disso, notamos em sua fala uma forma de levar os alunos a antecipar o estado do resultado, se será negativo ou positivo, bem como, a inferir as regras que regem as operações de adição e subtração, isto é, “quando os sinais dos números são iguais conservamos o sinal e somamos seus valores absolutos e quando os sinais dos números são diferentes, conservamos o sinal do maior e subtraímos o valor de menor módulo do de maior”, sem precisar enunciá-las, assim as mesmas podem ser percebidas através da percepção e não de uma “imposição”. Não foram relatadas, contudo, outras formas de

apresentação dessas operações, tais como a reta numérica ou a ideia de transformar a subtração em adição do número oposto.

Sobre P3, relembramos que foi dela a declaração de que precisou mudar sua abordagem, com o objetivo de alcançar a compreensão dos alunos. Sobre o tratamento inicial concedido às operações de adição e subtração, não temos informações suficientes para afirmar o tipo de argumento empregado pela participante, pois ela apenas informa que começou “*a trabalhar as operações com eles, tanto com os sinais iguais como com sinais contrários*” (P3), revelando, por essa fala, estar preocupada com a utilização das regras. Entretanto, após perceber que seus alunos ainda não estavam conseguindo resolver os exercícios, muda a abordagem, adotando a associação dos sinais com valores, ou seja, os negativos às dívidas e os positivos às posses. Depois disso, em uma das escolas, consegue notar um avanço na aprendizagem de seus alunos e, assim, consegue prosseguir com seu planejamento, enquanto que na outra escola em que leciona não conseguiu ver mudanças (caso anteriormente mencionado).

Podemos observar que, anteriormente, a participante utilizava uma Argumentação Explicativa, segundo a classificação de Sales (2010) e Attie (2016), pois apenas apresentava o algoritmo e esperava que os alunos seguissem a partir daí. Houve, no entanto, uma mudança em direção à Argumentação Justificativa, com a relação feita entre os sinais e o contexto financeiro, havendo, ao menos em uma das escolas, um avanço na aprendizagem. Não percebemos, também nesse caso, a utilização de outros tipos de argumentos justificativos, como a reta numérica ou a oposição das operações de subtração e adição.

Por não conseguirmos identificar nas falas de P1 e P4 com exatidão como seria a abordagem praticada em suas aulas, indagamos os participantes acerca da possibilidade da contextualização de tais operações.

Nesta conjuntura, P1 afirma que, para ensinar as operações, seja da adição, seja da multiplicação, desde logo expõe suas regras. Mas, imediatamente, afirma também, que às vezes trabalha com situações, alegando que “*quando a gente contextualiza, eles também se perdem*” (P1), argumentando os alunos que não veem tal conteúdo no dia a dia. Sem pormenorizar como realiza tal abordagem, essa professora menciona os saldos positivos e negativos de contas bancárias, medidas de temperaturas e saldos de gols, como exemplos de contextualizações utilizados em suas aulas, sendo este último, de acordo com a mesma, o qual os alunos mais participam e entendem, ao passo que às transações bancárias os alunos não dão muita atenção.

Esses comentários levam-nos a ponderar acerca do tipo de situações que o professor leva para a sala de aula, com o objetivo de tornar o conteúdo familiar aos alunos, ao buscar contextos que sejam do cotidiano desses. Isso porque o que pode transparecer ser comum na visão do docente, pode ser desconhecido ou não ser corriqueiro no dia a dia do estudante. Hillesheim (2013, p. 131), por exemplo, aponta a dificuldade de alunos resolverem um problema, por conterem termos a eles desconhecidos, como “depósito, cheque debitado, saldo, saque”, de modo que a resolução só foi lograda depois que os mesmos foram esclarecidos. Concordamos que

os professores geralmente julgam que é bom explorar o “cotidiano”, pois os alunos já têm um conhecimento sobre ele. Isso traz vitalidade às discussões, permitindo explorar melhor as coisas ao nosso redor. No entanto, falta-nos a percepção sobre muitos aspectos deste cotidiano (MEGID, 2003 *apud* GONÇALVES, 2007, p. 77, grifo do autor).

Assim, ao fazer referência a situações contextuais para o ensino daquelas operações e, em parte rejeitá-las por não fazerem parte do cotidiano dos alunos, pode ser que a escolha das situações seja o problema e que haja uma confusão entre uma situação que possua um contexto e uma situação contextualizada. A falta de atenção que os alunos dão ao caso das transações bancárias, por exemplo, pode ser justificada pelo próprio desconhecimento deles em relação aos termos e expressões utilizados. Se, ao invés de “depósito” e “saque”, fossem utilizados os termos “tenho” e “devo”, por exemplo, a ideia seria a mesma e estaria garantida a contextualização. No mais, quando P1 afirma que recorre diretamente às regras dessas operações, percebemos sua forte inclinação em priorizar a Argumentação Explicativa no ensino dessas operações.

Já o participante P4 revela ser possível contextualizar a adição com esses números, citando como exemplo as transações bancárias, “*onde foram feitos depósitos, onde foram feitas retiradas, às vezes o saldo fica negativo, aquilo dali é uma boa contextualização do uso dos números inteiros, na adição de números inteiros*” (P4). Somente com essa referência, não tínhamos condições de apontar se o uso do contexto era empregado apenas para propor situações-problemas ou para também justificar as regras para a operação. Em um momento posterior, quando questionado, este docente explicita que em um cenário de ser preciso justificar as regras empregadas na resolução de somas e subtrações com os números inteiros, utiliza contexto semelhante.

Já houve situações deles perguntarem, por exemplo, por que dois números negativos a soma, aí eu teria que *explicar* que seriam duas dívidas, isso seria o mais comum, por que eu devo somar dois números negativos, o que isso significa (P4, grifo nosso).

Na fala do participante, destacamos o termo “explicar”, pronunciada pelo professor P4, por ser tomada em um sentido que, de acordo com nossas delimitações, teria o significado de “justificar”, visto que sua intencionalidade consiste em exteriorizar e assegurar a veracidade daquela afirmação matemática (ARSAC, 1992 *apud* SALES, 2010).

O fato de recorrer ao contexto financeiro para explicitar o porquê de diante de dois números negativos realizar-se uma soma, por exemplo, indica uma Argumentação Justificativa em relação à adição, ainda que não tenham sido apresentados elementos para outros argumentos, tais como a reta numérica ou a transformação da subtração em adição do número oposto.

Um fato a ser destacado na fala desse professor refere-se à menção sobre os livros didáticos. Ao afirmar ser possível essa contextualização, ele assinala que “*os próprios livros trazem ocasionalmente situações em que eles estão contextualizados*” (P4). Esta colocação reforça a ideia de que o livro didático consiste em uma importante ferramenta que suporta a prática do professor e, portanto, a essencialidade de que disponha de um conteúdo de qualidade para suprir seus objetivos nos processos de ensino e de aprendizagem.

Percebemos que, no caso da adição e da subtração, a contextualização, principalmente o enredo das transações financeiras, é o meio mais comum entre esses professores para propiciar significados essas operações entre números inteiros. Outrossim, é possível identificar nas falas da maioria a relação dos alunos com tal abordagem. P1, por exemplo, considera que essa utilização causa mais confusões entre os alunos, o que consideramos que pode revelar uma confusão entre uma situação com contexto e uma situação contextualizada; P2 nota que seus alunos entendem melhor quando faz essa abordagem, embora pareçam esquecer-las ao resolver questões que P2 chama de concretas, mas que são de fato as que se afastam do significado do termo; e P3 apresenta dois panoramas distintos, pois em uma das escolas em que leciona, a contextualização foi a solução para promover o entendimento das operações, enquanto que, na outra, não percebeu avanços, nem com o uso da contextualização, nem com o uso das regras. Ao questionarmos P4 acerca da diferença quando utiliza situações contextualizadas ou quando utiliza apenas as regras na compreensão dos alunos em relação a essas operações, o participante traz um relato da sua perspectiva sobre o ensino por essas duas vias:

eu acho que é necessário as duas coisas, tanto as regras são necessárias, eu ainda fui talhado como professor naquele modo um pouco, assim, tradicional, né, de definições, de dar exemplos, exercícios, eu acho que eu ainda me identifico muito com esse, com essa formação, mas eu tento trazer sim sempre que possível, para aplicação prática, para situações onde isso pode ser visto e exemplos desse tipo, de

saldos bancários eu mesmo já utilizei, eu acho interessante também, eu acho que as duas coisas são necessárias para consolidar o aprendizado, tanto as regras, como também o uso dele no dia a dia. Eu acho que se nós trabalhássemos apenas com o aspecto contextualizado, a demanda de tempo seria bem maior, e às vezes alguns aspectos não são trazidos à atenção, podem ser deixados de lado e a teoria ela formaliza isso, né, que ela evita deixar brechas, ela evita deixar exceções e o contexto do dia a dia a gente tá trabalhando ali com as ideias com a aplicação prática, mas nem sempre eles abarcam as exceções que a teoria traz né. Então eu acho que as duas coisas são necessárias e que elas se complementam (P4).

Ao identificar-se e seguir um modo de ensino no qual foi instruído, este docente reforça a ideia de que o professor tende a reproduzir práticas de seus professores, contribuindo para perpetuar o que Fiorentini (2005) chama de tradição pedagógica, como o mesmo define, nos moldes “tradicionais”, e que associamos à Argumentação Explicativa. Neste modelo, o ensino tende a ocorrer de modo unilateral, restando ao aluno uma atitude passiva, que requer receber todo o conteúdo já interpretado pelo docente, observar, reter e seguir todos os passos, que a eles foi apresentado em listas de exercício. Por esta via de ensino, a prioridade recai sobre a memorização e repetição, em que basta a exposição do “como” se resolve determinado problema (ao que se propõe a explicação), tendo por finalidade apenas um esclarecimento e, nem sempre, o convencimento lógico (ATTIE, 2016). O valor justificativo de uma argumentação, ao contrário, se mostra ao buscar responder, além do “como”, também aos “porquês” de se resolver daquela maneira.

Sua visão, entretanto, ao abordar o conteúdo por dois caminhos distintos, encontra pontos de semelhança com as ideias dos PCN de matemática, assim como de autores, como González *et al* (1995 *apud* SOARES, 2007), que recomendam tanto uma abordagem concreta quanto abstrata para o ensino das operações com números inteiros e de suas propriedades. É importante considerar também que o ensino desses conteúdos “inicialmente no plano formal também tem o perigo de reduzi-los a um formalismo vazio, prestes a ser esquecido, e causar erros e confusões” (GONZÁLEZ *et al*, 1995 *apud* SOARES, 2007, p. 58).

No desdobrar de nossas conversas, questionamos acerca da curiosidade dos alunos em relação aos procedimentos inerentes às operações com os números inteiros, isto é, o porquê de serem realizadas daquela forma, o porquê de suas regras. Enquanto P2 afirma que eles “*perguntam bastante*”, P1 e P3 afirmam nunca terem recebido esse tipo de pergunta e P4 diz não se lembrar com exatidão, mas que, “*se ocorreu, foi muito raro*” (P4).

No ensejo dessa questão, solicitamos os participantes qual ou quais seriam bons argumentos que pudessem esclarecer e/ou convencer logicamente os alunos acerca das regras de sinais que são efetuadas na resolução de multiplicações e divisões, principalmente a mais controversa, ou seja, “*por que menos com menos dá mais?*”.

Como é evidente, ao levantarmos esse questionamento esperávamos por respostas que pudessem justificar o procedimento e não uma simples informação, ou uma mera descrição da regra, conforme a perspectiva assinalada por Duval (1993). Tampouco requeríamos desses docentes uma justificativa no plano formal, com o rigor preconizado pela comunidade de matemáticos e praticado na academia. Mas, tendo em conta a atmosfera escolar, estávamos em busca de argumentos razoáveis e convincentes, do ponto de vista didático, que pudessem tornar a afirmação e regra compreensível e aceitável. Com exceção de P4, todas as outras docentes, não apresentaram uma Argumentação Justificativa para essa questão.

Gente, aí até eu iria ficar pensando, eita [sic] aí agora me pegou. Eu nunca me deparei com essa pergunta e nem nunca pensei nisso, né, nunca pensei, então eu iria dizer ‘vamos tirar a dúvida, vou pesquisar pra dar a resposta para vocês’ [risos]. A gente tem que ser humilde (P1).

Deixe eu pensar assim, no momento assim eu não teria uma *explicação*, o porquê disso [risos] eu ia dizer a eles que ia pesquisar e trazer, até eu assim no branco, eu sei que tem como provar, mas... (P3, grifo nosso).

Novamente destacamos o mesmo termo, explicação, desta vez, expresso por P3. O “porquê” ao qual se refere requer, mais que elucidar, um fundamento para o processo, capaz de convencer. Além disso, quando revela ter ciência que existe uma justificativa para o procedimento, reafirma a concepção sobre a matemática que dispõe de conhecimentos precisos e previamente demonstrados.

Consideramos positiva a transparência das participantes para com seus alunos e a disposição para saírem em busca dessa resposta, pois, conforme salientam Attie e Krpan (2020, p. 08), é recorrente o uso de respostas do tipo “é por definição”, “assim dá certo” ou “os matemáticos provaram”, por professores de matemática quando são questionados do porquê de procedimentos ou fórmulas adotados e os mesmos não desfrutam de um fundamento que os tornem válidos. Ainda assim, podemos concluir que, atualmente, única via para o ensino daquela operação é através da Argumentação Explicativa.

Poderíamos ainda, atribuir a experiência com alunos como um possível fator que pode contribuir para o desenvolvimento da práxis e, também, para a argumentação do professor, pois o contato com alunos “curiosos” e questionadores, pode direcionar o professor para um processo de buscas e pesquisas.

Ao relatar um episódio ocorrido em uma de suas aulas, P2, a partir das dúvidas dos alunos sobre a própria operação de divisão (e não sobre as regras de sinais), apresenta um argumento que, claramente, confunde duas operações, divisão e adição.

Quando eles veem que é divisão já trava mesmo, muitos deles já travam, ‘ah professora divisão eu não sei, conta de divisão eu não sei’, ‘mas você não sabe a conta de divisão, né’. Aí às vezes eu fico lá ‘é fácil é só fazer o jogo de sinal, qual é o jogo de sinal?’. Aí eu lembro a eles, ‘olhe pessoal, quando os sinais são diferentes, a gente vai fazer uma conta, vai ser menos, né, e os sinais quando são iguais, é mais’, aí tem uns, até esses dias, tem pouco tempo que eu dei essa aula de inteiros, eu tava [sic] fazendo uma correção da prova, aí eu disse assim, ‘por que que aqui, o que é menos com menos?’, aí o menino disse ‘menos’, aí eu disse ‘menos por quê?’, aí o outro disse ‘não é menos não, é mais’, aí eu perguntei por que e ele não sabia. Aí eu fui e disse, ‘se você está devendo a mim, cinco reais e você está devendo a Betânia cinco reais, o que é que acontece?’ Aí ele lembrou, aí ele disse ‘ah, então eu estou devendo dez reais’. ‘Então, o que foi que a gente aprendeu sobre dívidas? Dívida é o que?’ Aí ele disse ‘menos’. ‘Então, você vai ter que lembrar que quando você tá devendo e devendo, sua conta vai o que? Aumentando, você vai juntar suas dívidas, então por isso que vai ser uma conta de mais. Eu tento levar sempre pro lado do dinheiro que eles se atentam mais (P2).

Podemos perceber que o argumento no final do trecho é condizente para justificar as operações da adição e subtração de números inteiros e não da divisão, que era a dúvida inicial. Mas, nessa mesma fala, percebe-se seu reforço nas regras de sinais, ou no “jogo de sinais”, para esta última operação, enfatizando, portanto, uma preponderância da Argumentação Explicativa na apresentação desse conteúdo, a despeito do uso da contextualização.

P2 e P3, professoras que relataram uma abordagem contextualizada, condizente com uma Argumentação Justificativa em relação à adição e à subtração, ao versar a multiplicação, modificam sua postura e apresentam a operação de forma impositiva, pois ao aluno é mostrada uma regra que é preciso seguir, mesmo sem que se estabeleça um significado para a mesma, configurando uma Argumentação Explicativa, para o caso da multiplicação.

Ainda que não faça uso de situações contextualizadas em relação à multiplicação, o participante P4 mostra duas formas que são compatíveis para legitimação das regras de sinais da operação, apresentando uma Argumentação Justificativa, conforme o entendimento de Sales (2010) e Attie (2016), como pode ser constatado no trecho seguinte:

Então, aí é importante trabalhar nesse caso, as ideias relacionadas com a multiplicação, que é uma soma de parcelas iguais, uma das ideias associadas à multiplicação, então quando eu tenho, por exemplo, $(-5) \times (-4)$, eu daria essa explicação para eles, eu teria uma parcela de, transformo o -5 em $-(+5)$, $5 \times (-4)$, uma soma de -4 e depois eu aplico, o menos do menos 5 , transformando aquele -20 em $+20$. Ou então, uma outra forma que eu achei muito interessante, é um livro, não sei se é o livro a Conquista da Matemática ou foi outro livro, onde ele fazia o seguinte, ele tinha uma tabela, então se eu multiplico, por exemplo -3 por -5 dá -15 , oh desculpe, $3 \times (-5)$ que dá -15 , $2 \times (-5)$, -10 , vai caindo, -5 , -10 , chega em zero, então a lógica agora seria ir subindo agora obtendo um número positivo (P4, grifo nosso).

Mais uma vez, observamos que o docente P4 faz referência aos livros didáticos, ao mencionar a visualização de um de seus argumentos em um deles. A obra por ele citada,

consta em nossa análise anterior, então confirmamos a presença deste recurso na mesma. Além disso, seu primeiro argumento também está presente na mesma obra.

Outra das nossas indagações para os participantes foi referente às possibilidades de uma confusão entre as regras que são empregadas na resolução de adições/subtrações com as regras empregadas em multiplicações/divisões, ou seja, a uma possível ambiguidade quando se juntam dois números negativos, pois na operação de adição, o resultado será positivo, enquanto na operação de multiplicação, o resultado será positivo. A resposta de todos foi positiva para esse questionamento, ratificando o exposto por muitos daqueles autores, de que, após a o estudo destas últimas operações, há uma tendência para que essas diferentes regras sejam tomadas como equivalentes e, portanto generalizadas.

É, é comum sim. Eles colocam. E geralmente às vezes, quando eles aprendem realmente, eles aplicam certinho as regras. É que a gente não só trabalha com números inteiros, não é só nesse momento, nesse momento aí é só introdução para eles aprenderem o que é os números inteiros e as regras (P1).

Acontece bastante. Quando a gente começa lá falando da adição algébrica, aí a gente faz uma atividadezinha, aprendeu né, vamos dizer. Mas aí quando vai pra multiplicação a gente sempre tem isso, eles sempre fazem isso mesmo. Aí quando a gente fala da multiplicação aí que embaralha tudo né, eles ficam aí sem saber né, eles vão fazer isso né, quando eles vão pegar uma conta da adição, ou uma adição algébrica lá, $-7 + (-3)$, eles vão fazer menos com menos, menos, aí já coloca o menos lá, porque quando eu falo da multiplicação eu já digo, “olha só precisa fazer o jogo do sinal”. A gente tem que sempre tá, eu sempre fico batendo na tecla, ‘olha pessoal, preste atenção, multiplicação e divisão é só o jogo de sinal e a conta, né, mas na adição algébrica vocês precisam primeiro descobrir qual é a conta e depois saber qual é o sinal’, aí alguns, assim, que são mais atentos, acabam pegando, mas tem outros, infelizmente, que eles trocam mesmo, vão fazer tudo assim, aí acabam tudo, se eles aprenderam alguma coisinha já foi, tchau, volta pro mais com menos, menos e vai lá (P2).

Ah sim, no início principalmente, agora não que eles já estão acostumados, mas no início era uma troca, eu ia pegar as atividades pra corrigir, ‘por que aqui tá menos?’, ‘oh professora, a senhora falou que quando os sinais fossem iguais, não era menos’, ‘mas agora estamos na multiplicação, lembre o jogo de sinais, menos com menos é mais’ e aí aquele bolo, mas agora. Mas no início teve sim, essa confusão (P3).

Sim, sim, já percebi também (P4).

Assim, a maioria desses fragmentos reforça a consideração de uma postura já assinalada, a de que o principal caminho para o ensino da operação de multiplicação entre os números inteiros é o da Argumentação Explicativa, pela ênfase sempre no “jogo de sinais” para alcançar os resultados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tivemos como motivação para a realização deste estudo, por um lado, o débil desempenho dos alunos em avaliações externas, revelando a falta de domínio de conteúdos matemáticos considerados o mínimo para a realização de práticas recorrentes e fundamentais no dia a dia, assim como o desenvolvimento de habilidades importantes na construção de sua cidadania, além das representações da matemática entre a comunidade estudantil como uma disciplina que só tem cálculos, de difícil compreensão e condizentes para as pessoas consideradas superdotadas, mesmo que reconheçam sua importância fora dos ambientes escolares. Por outro lado, o modo como o ensino da matemática tem se efetivado nas escolas, recorrentemente reduzindo-se a apresentação e aplicação de fórmulas prontas, sem um contexto histórico, desvinculadas do dia-a-dia e sem razões que as fundamente.

Em relação ao conteúdo das operações com os números inteiros, não é difícil entender as dificuldades e confusões entre os estudantes, visto que este conteúdo tende a ter uma predisposição para essas, marcado pelo longo processo desde o surgimento dos números negativos, com os matemáticos antigos e modernos, até a concretização de uma justificativa sólida que atingisse o rigor matemático. Além de que, a falta de uma aprendizagem efetiva deste conteúdo, pode implicar em empecilhos para o entendimento e realização de conteúdos posteriores.

Tendo em vista esses apontamentos, preconizamos por abordagens que sejam potenciais para maximizar a aprendizagem desses estudantes. E, assim, salientamos a prática argumentativa no processo de ensino dos conteúdos matemáticos, por valorizar os meios e não exclusivamente os fins, poder favorecer a construção de provas e exemplificar situações de aplicação, por exemplo. Nesta perspectiva, defendemos a necessidade de que professores, e também livros didáticos, desfrutem de um amplo repertório de argumentos e exemplos para os objetos matemáticos.

Nesta direção, encadeamos nosso estudo, a partir do questionamento, *Quais argumentos são utilizados, por professores e em livros didáticos, no ensino das operações com números inteiros?* e norteados pelas ideias, principalmente de Sales (2010) e Attie (2016), com as categorias de argumentação Explicativa e Justificativa. Para tanto, realizamos entrevistas semiestruturadas com professores do Ensino Fundamental II e analisamos livros didáticos indicados pelo Guia do PNLD 2020, a fim de fazer essa identificação e classificação.

Acerca da investigação nos livros didáticos, apontamos que todos dispõem de recursos potenciais para propiciar justificativas para as operações analisadas, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros. Todavia, tais recomendações nem sempre foram exploradas conforme o contexto requeria, seja pela contenção de informações, seja pela pouca expressividade de exemplos empregando-as, ou, ainda, pelo limitado repertório de abordagens, transparecendo, dessa forma, uma pressa pelo uso das regras e, conseqüentemente, despendendo uma ênfase para os argumentos explicativos.

Na adição, a reta numérica foi o recurso mais utilizado para significá-la, estando presente nas onze coleções. Enquanto que na subtração, há um predomínio na transformação da operação, fundamentando-se na ideia de oposto. Embora, houvesse livros que limitaram suas resoluções a apenas um recurso para cada operação, em outros, é possível ver uma agregação da reta na segunda operação. Neste caso, identificamos três formas diferentes desse uso. Na primeira, usa-se a reta após a mudança da operação, ou seja, da subtração para a adição; na segunda, este mecanismo é usado como suporte para marcar pontos e/ou indicar a distância entre eles, o que, do nosso ponto de vista, torna-se frágil por poder provocar generalizações equivocadas, levando-se a pensar que o resultado sempre será positivo; por fim, a menos empregada e a que apontamos ser mais completa, diferencia-se da situação anterior, por haver indicações de como obter, também, o sinal da resposta, apenas em três obras: *Trilhas da Matemática*, *Apoema* e *Bianchini*, nessas duas últimas de uma forma mais contida⁴⁸.

O uso de contextos, principalmente o modelo financeiro, para qual, apontamos como um argumento capaz de legitimar procedimentos, por ser uma das situações que corroborou para o surgimento dos números negativos, além de utilizar de uma linguagem comum, se não a todos, a maior parte dos estudantes, seu aparecimento não foi proporcional a nossas expectativas. Apesar de notarmos o forte uso, não só deste, mas também, de situações que envolvem temperaturas, saldos de jogos, deslocamentos em elevadores, altitudes em relação ao nível do mar, por exemplo, constantemente foram empregados para enunciação de problemas e não, como um meio de significar as resoluções daquelas operações, o que apontamos para uma restrição de suas aptidões argumentativas, para somente a fim de exemplificação.

O quantitativo de obras que dispuseram de um tópico para o tratamento das adições algébricas foi mínimo. Mas nestas, há em comum, a direta explanação dos algoritmos e sua

⁴⁸ Contida pois tal indicação é apenas mostrada na reta de forma sutil e não, também, legendada.

aplicação, mesmo que anteriormente, ao abordar a adição e subtração, tenham apresentado argumentos justificativos, indicando, portanto, um relevo para os argumentos explicativos.

Para a abordagem da multiplicação, a sua definição como a soma sucessiva de um mesmo número, juntamente com a conversão de um número negativo em seu oposto aditivo – quando tem-se o primeiro termo negativo – e, também, da tabela contendo a multiplicação entre um número fixo e outro que varia de um em um e seus produtos são descobertos a partir de uma progressão, corroboraram para indicarmos que os autores desfrutaram de argumentos justificativos. Acerca desse emprego, convém fazermos algumas ponderações. A primeira é que nem todas as obras exibiram todos esses recursos, em algumas delas, apenas um deles foi adotado para resolver todos os casos possíveis de multiplicação entre os números inteiros, logo, expondo apenas um argumento para essa resolução, abordagens alternativas que propiciam a aprendizagem do conteúdo tornaram-se escassas. As outras referem-se à superficialidade com as quais, por vezes, foram apresentadas, que reforçamos a seguir.

Quando há a transformação de um número negativo por seu oposto aditivo, consideramos pertinente que cada um de seus passos, sejam amplamente informados e a falta desta transparência em algumas obras – por exemplo, nas coleções Matemática Essencial, Matemática: Realidade & Tecnologia e Compreensão e Prática, chamou nossa atenção, por apontarmos que os argumentos explicativos parecem sobressair sobre os argumentos justificativos (SALES, 2010; ATTIE, 2016), assim, ao realizar essa troca nos cálculos, omitindo sua referência, exterioriza-se a ideia de que as regras importam mais que o seu porquê. Além do mais, essa rápida apresentação, pode não consistir em um obstáculo para alguém que tenha certo grau de conhecimento, como o professor, mas para quem estar realizando seus primeiros contatos com o conteúdo, como o estudante do 7º ano, pode soar confuso tanto quanto a direta enunciação do algoritmo. É oportuno reforçar que os temas presentes nos livros devem obedecer a uma abordagem direcionada, principalmente, para o aluno, portanto com conteúdos que utilizem de uma linguagem a ele acessível e que possam fomentar sua curiosidade ao passo que consigam suprimi-las.

Sobre a tabela que contem as multiplicações entre números inteiros, favorável para inferir e justificar as regras de sinais desta operação, em todos os seus casos, isto é, quando ambos os termos apresentam o mesmo sinal e quando têm sinais diferentes, atentamos para seu préstimo, eventualmente, limitado a um caso, para encontrar o produto resultante entre dois números negativos. Apenas o professor, podia encontrar a sugestão de estendê-la as outras possibilidades. Novamente, salientamos para a restrição em explorar toda potencialidade desse recurso.

Ao sugerirmos argumentos que são passíveis para justificar as operações aqui assinaladas, colocamo-nos em uma posição a favor do uso do contexto em tais abordagens, seja na adição/subtração, assim como na multiplicação, considerando as restrições para cada caso. Entretanto, em uma situação mais crítica que a mencionada para os casos da adição e subtração, no âmbito multiplicativo, em nenhuma obra destinada ao aluno, este recurso foi adotado para sustentar as “regras de sinais”. Qualquer enredo⁴⁹ emergente era apenas para enunciar problemas. Esta justificativa, através da relação *tempo x dinheiro*, aparece em apenas um livro, no manual do professor, como um comentário.

Em relação à divisão, que tem suas regras provenientes da multiplicação, já que são operações inversas, teve esta ideia divulgada, podemos dizer, em todos os livros, quando não no conteúdo comum ao aluno, como em informação ao professor (um caso, no livro Geração Alpha). Concebemos que a intenção em justificar esteve, principalmente, naqueles livros em que antes de enunciar as suas regras, exemplificações denotaram essa relação. Já aqueles livros em que o foco esteve nesta declaração, para sua posterior aplicação, apontamos que o enfoque estava, em maior grau, na argumentação explicativa.

Em relação aos subsídios obtidos com as entrevistas com os docentes participantes, reforçamos que despendemos nosso foco para os argumentos emitidos para as operações de adição e subtração, assim como as regras de sinais da multiplicação.

No tocante as duas primeiras operações, adição e subtração, identificamos e classificamos os argumentos emitidos por esses(as) participantes, em maior parte como justificativos. Os que enquadraram-se nesta categoria, três dos quatro professores, adotaram a mesma abordagem, isto é, o contexto do modelo financeiro, associando termos positivos a posses e os negativos a dívidas. Assim, o repertório desses professores limitou-se a um único recurso.

Consideramos pertinente, trazer a questão da possibilidade de haver confusões quando adota-se o contexto financeiro, visto que, outros termos podem ser a ele associado, como modelo comercial e sistema bancário, mas a depender dos vocábulos utilizados, o efeito esperado pode não ser o mesmo em todos eles. Por exemplo, as expressões e ações indicadas por *saques*, *débitos*, *créditos*, *cheques*, são mais condizentes com atividades da vida adulta e/ou para aqueles que realizam esse tipo de transação. Logo, é comum que estes não sejam familiares a uma criança e, assim, ao invés de atribuir significado para as operações podem ocasionar mais dificuldades.

⁴⁹ E não exclusivo ao contexto financeiro.

A professora que não identificamos aspectos de argumentos justificativos em suas falas, apesar de mencionar a possibilidade de contextualizar aquelas operações, ao não indiciar como esta ocorre, apontamos que em suas aulas enfatiza o uso das regras, sobretudo, por indicá-las, anteriormente, como passo inicial para o ensino daquelas operações. Além do mais, consideramos que o uso dos contextos por ela citado, estar mais para a proposição de problemas e/ou citar exemplos no cotidiano.

Ao partirmos para a multiplicação esse quantitativo inverte, ou seja, dos quatro professores, apenas um atingiu uma argumentação justificativa, salientamos que este está entre os três que proferiram uma argumentação justificativa para a adição e subtração. Em seus argumentos, o uso da transformação de um número negativo por seu oposto e a tabela multiplicativa foram os recursos empregados. Em contrapartida, o uso do contexto não foi explorado para tratar desta operação.

Entre os participantes que adotaram o modelo comercial para a abordagem da adição e subtração e, ao chegar à multiplicação recorrem ao uso das regras, relembra a posição tomada por Augustin Cauchy, por volta do século XIX, em que adota o modelo metafórico para abordar as propriedades aditivas e desliga-se dele, abordando a multiplicação de forma dogmática.

Ao analisarmos os argumentos dos livros didáticos e intentar possíveis aproximações com os dos professores, percebemos que os recursos mais utilizados, nas obras, para as operações de adição e subtração, ou seja, a reta numérica e a transformação da operação, principalmente na subtrativa, a partir de seu oposto, não foram mencionados por nenhum dos docentes. Contudo, o argumento comum a todos estes que emitiram uma justificativa, compreende o recurso menos abordado nos livros didáticos, isto é, a metáfora das posses e dívidas.

Na multiplicação encontramos semelhanças por situações contextualizadas não serem opções para legitimá-la, tanto nos livros, como nas respostas dos professores. Assim como, ratificamos a presença nos exemplares dos argumentos do docente que demandou justificativas para esta operação. Ainda que não tenhamos aparatos suficientes para estabelecer relações entre os discursos dos professores e os textos dos livros didáticos, salientamos para o fato de que este professor foi o único a mencionar fazer uso do livro didático, não somente para a realização de atividades, como também, para consultar, juntamente com seus alunos, problemas introdutórios, definições, explicações, abordagens históricas.

Por fim, consideramos que a presente discussão pode servir de fomento para que professores possam desenvolver, adquirir e aprimorar seus argumentos e, conseqüentemente, sua prática argumentativa em sala de aula, pela constituição de razões que legitimem os conhecimentos matemáticos. Apesar de limitada a um conteúdo, esta reflexão pode, ainda, ser estendida a outros temas.

Chegamos ao desfecho deste estudo com a perspectiva de que alcançamos respostas para as questões postas, mas assentimos que esta investigação não encerra por aqui. De fato, outras ideias emergiram no decorrer dessa elaboração, que reputamos uma pertinência para a construção de outras investigações, como, a realização de uma pesquisa com alunos, a fim de obter indícios das potencialidades e preferências desses, em relação aos argumentos aqui expostos; estudar possíveis relações entre a prática e discursos de professores com as abordagens de livros didáticos; ou investigar entre esses sujeitos possíveis contribuições, ou ausência delas, durante a formação inicial, na constituição de seus argumentos, voltados para a educação básica.

REFERÊNCIAS

- AGNE, L. S.; HARRES, J. B. S. Modelos e Concepções de Ensino de Matemática. **Revista Thema**, v.12, n.1, 2015.
- AGUILAR JR, C. A. **Postura de Docentes Quanto aos Tipos de Argumentação e Prova Matemática Apresentados por Alunos do Ensino Fundamental**. 2012. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2012.
- _____. Argumentação e Prova em Matemática: Uma Análise dos Itens Públicos do PISA 2012. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v.01, p.01-24, 2020.
- AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando Justificativas e Argumentação Matemática de Alunos do Ensino Fundamental. **Vidya**, Santa Maria, v.32, n.2, p.133-147, 2012.
- _____. Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola. **Bolema**, Rio Claro, v.28, n.50, p.1012-1031, 2014.
- ALVARO-CARVAJAL, C.; FLORES-MARTINEZ, P.; VALVERDE-SOTO, G. La Demostración Matemática: Significado, Tipos, Funciones Atribuidas y Relevancia em el Conocimiento Profesional de los Profesores de Matemáticas. **Uniciencia**, v.33, n.2, p.55-75, 2019.
- ALVES, E. L. **Menos com Menos é Menos ou é Mais?** 2012. 207f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2012.
- ATTIE, J. P. Argumentação no Ensino de Matemática. In: Seminário Internacional de Estudos em Discurso e Argumentação, III, 2016. **Anais [...]**. São Cristóvão, 2016.
- _____. Oficinas de Matemática. Projeto de Extensão. Pró-Reitoria de Extensão. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2017.
- _____. Lógica Matemática e Lógica Jurídica: Aproximações e Considerações para o Ensino. In: SILVA, Rafael Leal da; MELLO, Roger Goulart (Orgs.). **Pesquisas Multidisciplinares em Ciências Exatas**. Rio de Janeiro: e-Publicar, 2021, p. 358-368.
- ATTIE, J. P.; KR PAN, C. M. Argumentação em Livros Didáticos de Matemática. **Interfaces Brasil/Canadá**, v.20, p.1-20, 2020.
- BALACHEFF, N. **Une Étude des Processus de Prueve em Mathématique chez des Élèves de Collège**. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.
- _____. **Procesos de Prueba en los Alumnos de matemáticas**. Una empresa docente, p.200, 2000. Disponível em: [Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas - Archive ouverte HAL \(archives-ouvertes.fr\)](#). Acesso em: 15 de maio de 2021.
- BARALDI, I. M. Refletindo sobre as concepções matemáticas e o ensino do ponto de vista dos alunos. **Mimesis**, Bauru, v. 20, n. 1, p. 07-18, 1999.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2018.

BOAVIDA, A. M. R. **A Argumentação em Matemática: Investigando o Trabalho de Duas Professoras em Contexto de Colaboração**. 2005. 995f. Tese (Doutorado em Educação) - Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996**. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 01 de maio de 2021.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / 5ª a 8ª séries**. Brasília: MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC, 2018.

_____. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2020**. Brasília: MEC, 2019a.

_____. **PISA 2018. Relatório Brasil no Pisa 2018: Versão Preliminar**. Brasília, DF: INEP/MEC, 2019b.

BRUNO, A. La Enseñanza de los Números Negativos: Aportaciones de una Investigación. **Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas**, n.29, p.5-18, 1997.

CALDATO, J.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: A Visão de Alunos e Professores. **Revista Triângulo**, Uberaba, v.10, n.2, p.74-93, 2017.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

CASTRO, R. C. G. Platão Contra os Sofistas: sobre a retórica. **Convenit Internacional**. FEUSP-Universidade do Porto-FIAMFAAM [Brasil/Portugal], Ano 2013, n. 12, maio-ago. 2013. Disponível em: <http://www.hottopos.com/convenit12/05-14Roberto.pdf>. Acesso em: 18 de jul. de 2021.

CHAVANTE, E. R. **Convergências Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Edições SM, 2018.

CORDEIRO, E. M.; OLIVEIRA, G. S. As Metodologias de Ensino Predominantes nas Salas de Aula. In: Encontro de Pesquisa em Educação, VIII, 2015, Uberaba. **Anais [...]**. Uberaba: Universidade de Uberaba, 2015.

COSTA, R. A Retórica na Antiguidade e na Idade Média. **Trans/Form/Ação**, Marília, v. 42, p. 353-390, 2019. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/trans/a/wrCMVbRK9THLXXvKdCz8cxH/?lang=pt>. Acesso em: 18 de jul. de 2021.

CURY, H. N. Concepções e Crenças dos Professores de Matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. **Bolema**, Rio Claro, v.12, n.13, 1999.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como Ensinar Matemática Hoje? **Temas e Debates**, SBEM, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

_____. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio. **Pro-Posições**, v. 4, n.1[10], p.35-41, 1993.

DANTE, L. R. **Teláris. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Ática, 2018.

DIEUDONNÉ, J. **A Formação da Matemática Contemporânea**. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DUVAL, R. Argumenter, Démontrer, Expliquer: Continuïté ou Rupture Cognitive? **Petit X**, n.31, p.37-61, 1992-1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação**, Campinas, n.18, p.107-115, 2005.

_____. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, ano 3, n.4, p.1-38, 1995.

FOSSA, J.; ANJOS, M. F. Sobre a Incompatibilidade dos Números Negativos com o Conceito Grego de Arithmós. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 7, n. 14, p. 163-171, 2007.

GAY, G.; SILVA, W. R. **Araribá mais: Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2018.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: FTD, 2018.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, n.17, 1985. Disponível em: https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/524/1/GEPEM_DASSIE_REZENDE%202010_apresenta%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 05 de set. de 2021.

GONÇALVES, R. S. **Um Estudo com os Números Inteiros Usando o Programa Aplusix com Alunos de 6ª Série do Ensino Fundamental**. 2007. 143f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

HELIODORO, Y. M. L. O Olhar de Alunos e de Professores Sobre a Matemática e o seu Ensino. **Revista Educação: Teorias e Práticas**, Recife, v.2, p. 120-148, 2002.

HILLESHEIM, S. F. **Os Números Inteiros Relativos em Sala de Aula: Perspectivas de Ensino para a Regra de Sinais**. 2013. 216f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2013.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. A Regra dos Sinais: Alguns Elementos Importantes do seu Contexto Histórico. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (orgs.). **Ensinar e Aprender Matemática: Possibilidades para a Prática Educativa** [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, p. 233-254.

HYPOLITO, A. M.; JORGE, T. OECD, PISA e Avaliação em Larga Escala no Brasil: Algumas Implicações. **Sisyphus – Journal of Education**, v.8, n.1, p.10-27, 2020.

JOSEPH, I. M. **O Trivium: as artes liberais da lógica, da gramática e da retórica**. Coleção Educação Clássica. São Paulo: É Realizações Editora, Livraria e Distribuidora LTDA, 2008.

LEITÃO, S. O lugar da argumentação na construção do conhecimento em sala de aula. In: LEITÃO, S.; DAMIANOVIC, M. C. (org.). **Argumentação na escola: o conhecimento em construção**. Campinas: Pontes Editora, 2011, p.13-46.

LIN, P. J. O Desenvolvimento da Argumentação Matemática por Estudantes de uma Turma do Ensino Fundamental. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v.43, n.3, p.1171-1192, 2018.

LONGEN, A. **Apoema: Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MATEUS, M. E. A. **Um Estudo Sobre os Conhecimentos Necessários ao Professor de Matemática para a Exploração de Noções Concernentes às Demonstrações e Provas na Educação Básica**. 2015. 269f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação, Universidade Anhanguera. São Paulo, 2015.

MATEUS, S. **Introdução à Retórica no Séc. XXI**. Covilhã: Editora LabCom.IFP, 2018. 252p.

MATHEUS, A. R. **Argumentação e Prova na Matemática Escolar**. 2016. 146f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2016.

MAUÉS, O. C. A Política da OCDE para a Educação e a Formação Docente. A Nova Regulação? **Educação**, Porto Alegre, v.34, n.1, p.75-85, 2011.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números Negativos: Uma História de Incertezas. **Bolema**. Rio Claro, v. 7, n.8, 1992.

MENEZES, W. A. Faces e Usos da Argumentação. In: MARI, H.; MACHADO, I. L.; MELLO, R. (Orgs.). **Análise do Discurso: Fundamentos e Práticas**. Belo Horizonte: Núcleo de Análise do Discurso, FALE/UFMG, 2001, p. 179-199.

MICHAELIS. Moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2021. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em: 09 de abr. de 2021.

MINAYO, M. C. S. Ciência, Técnica e Arte: O Desafio da Pesquisa Social. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social. Teoria, Método e Criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 09-29.

MONTEIRO, M. R. C. **Práticas Avaliativas da Capacidade de Argumentação Matemática de Alunos do Ensino Secundário: Um Estudo com Professores de Matemática**. 2013. 321f. Tese (Doutorado em Educação) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Lisboa, 2013.

MORAIS, A. D. **Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem para as Operações com Números Positivos e Negativos**. 2010. 223f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

MORETTI, M. T. A Regra dos Sinais para a Multiplicação: Ponto de Encontro com a Noção de Congruência Semântica e o Princípio de Extensão em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v.26, n.42B, p.691-714, 2012.

NUNES, A. Argumentação e Retórica. **Revista Crítica**, [s.l.], 04 jul. 2015. Disponível em: <https://criticanarede.com/anunesargumentacaoeretica.html>. Acesso em: 17 de jul. de 2021.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOU, S. A. O Modelo de Toulmin e a Análise da Prática da Argumentação em Matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.15, n.2, p.487-512, 2013a.

_____. Argumentação no Ensino da Matemática: Perspectiva Metodológica. **REMATEC**, Natal, ano 8, n. 13, p.145-169, 2013b.

OCDE (2019). **Programme For International Student Assessment (PISA) Results From PISA 2018**. Brazil – Country Note – PISA 2018 Results. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf. Acesso em: 10 de abr. de 2022.

OLIVEIRA, C. N. C. ; FUGITA, F. **Geração Alpha: Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Edições SM, 2018.

OLIVEIRA, E. G. A Argumentação na Antiguidade. **SIGNUM: Estudos Linguísticos**. Londrina/PR, v. 5, n. 1, p. 213-225, dez. 2002. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/4d86/2ae897016631611f830a7516a5953ba1f77e.pdf?_ga=2.161746428.1341810783.1626582043-650468953.1626582043. Acesso em: 18 de jul. de 2021.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática Essencial. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Scipione, 2018.

PAULINELLI, M. P. T. Retórica, Argumentação e Discurso em Retrospectiva. **Linguagem em (Dis)curso**. Tubarão/SC, v. 14, n.2, p. 391-409, maio/ago. 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ld/v14n2/1518-7632-ld-14-02-00381.pdf>. Acesso em: 18 de jul. de 2021.

PEREIRA, C. C. **Números Relativos: Uma Proposta de Ensino**. 2014. 224f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

POMMER, W. M. **Diversas Abordagens das Regras de Sinais nas Operações Elementares em Z**. Seminário de Ensino de Matemática. FEUSP, 2010.

PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. **Educação Matemática: temas de investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239, jan. 1992.

PONTES, E. A. S. A Arte de Ensinar e Aprender Matemática na Educação Básica: Um Sincronismo Ideal entre Professor e Aluno. **Psicologia & Saberes**, v.7, n.8, 2018.

PONTES, M. O. Obstáculos Epistemológicos Enfrentados no Ensino da Multiplicação dos Números Inteiros. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, III, 2012. **Anais [...]**. Fortaleza, 2012.

_____. **Obstáculos Superados pelos Matemáticos no Passado e Vivenciados pelos Alunos na Atualidade: A Polêmica Multiplicação de Números Inteiros**. 2010. 158f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2010.

RAUL NETO, F.. Duas ou Três Coisas sobre o “menos vezes menos dá mais”. Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais [...]**. Recife: UFPE, 1995.

REBOUL, O. **Introdução à Retórica**. São Paulo: Martins Fontes, 2004. 252p.

RÊGO, F. R. **As Dificuldades dos Alunos da EEM Virgílio Correia Lima em Operações Básicas com Números Naturais, Inteiros e Racionais**. 2014. 69f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2014.

REZENDE, W. S. Três Grandes Maros do Resgate Retórico: Perelman, Toulmin e Meyer. **Revista Eletrônica de Ciências Sociais**, ano 4, ed.10, 2010.

ROCHA NETO, F. T. **Dificuldades na Aprendizagem Operatória de Números Inteiros no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Coordenação do Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2010.

RODRIGUES, M. O Processo de Demonstrar na aula de Matemática: Um Olhar Sobre a Comunicação Emergente. **Investigação em Educação Matemática**, 2010.

SÁ, E. B. F. **Argumentação de Estudantes da Eja-Ensino Médio no Processo de Aprendizagem de Matemática**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2021.

SÁ, P. F.; ANJOS, L. J. S. Números Negativos: Uma Trajetória Histórica. In: Seminário Nacional de História da Matemática, IX, 2011, Aracaju. **Anais [...]**. Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_S%C3%A1_P_F_N%C3%BA

meros Negativos Uma Trajetória Histórica.pdf. Acesso em: 05 de set. de 2021.

SALES, A. **Práticas Argumentativas no Estudo da Geometria por Acadêmicos de Licenciatura em Matemática**. 2010. 243f. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2010.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da Matemática. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Saraiva, 2018.

SILVA, D. F. **O Jogo como Recurso Pedagógico de Ensino: Uma Proposta para os Números Relativos**. 2017. 141f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências, Universidade de São Paulo. Lorena, 2017.

SILVA, M. A. **Elaborações de Estudantes do 7º Ano do Ensino Fundamental Sobre Números Inteiros e suas Operações**. 2012. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2012.

SILVA, L. S.; BARROS, R. A. Os Saberes Necessários a Ação Docente: Contribuições de Lee Shulman, Maurice Tardif e Clermont Gauthier. **Anais da Especialização em Educação Matemática**, Goiás, v. 01, n. 02, 2017.

SILVEIRA, E. **Matemática: Compreensão e Prática, 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2018.

SOARES, L. H. **Os Conhecimentos Prévios e o Ensino de Números Inteiros**. 2007. 99f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Sociedade) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Sociedade, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2007

SOARES, P. J. **O Jogo como Recurso Didático na Apropriação dos Números Inteiros: Uma Experiência de Sucesso**. 2008. 151f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

SOUZA, J. R. **Matemática Realidade & Tecnologia. 7º ano**. Manual do Professor. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, W. E. Retórica, Argumentação e Discurso. In: MARI, H.; MACHADO, I. L.; MELLO, R. (Orgs). **Análise do Discurso: Fundamentos e Práticas**. Belo Horizonte: Núcleo de Análise do Discurso, FALE/UFMG, 2001, p. 157-177.

TENREIRO-VIEIRA, C.; VIEIRA, R. M. Literacia e Pensamento Crítico: Um Referencial para a Educação em Ciências e em Matemática. **Revista Brasileira de Educação**, v. 18, n.52, jan.-mar. 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação**. São Paulo: Atlas, 1997.

APÊNDICES

Apêndice A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Colega Professor(a):

Neste momento, você está sendo convidado a participar, em caráter voluntário, da pesquisa “ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS”, sob a responsabilidade da pesquisadora Evelyn dos Santos Nascimento, mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe, sob orientação do Prof. Dr. João Paulo Attie.

O objetivo da pesquisa é identificar os argumentos utilizados no processo de ensino do conjunto dos números inteiros.

A realização deste estudo justifica-se pela necessidade de elaborar e divulgar estratégias de ensino que promovam uma melhor compreensão dos conteúdos estudados, como também, o desenvolvimento de habilidades argumentativas no aluno.

Sua participação neste estudo consistirá em responder a um questionário online (via *Google Forms*), com perguntas referentes à sua formação e trajetória docente e planejamento e execução das aulas; e a uma entrevista semiestruturada, com perguntas relacionadas ao ensino do conteúdo dos números inteiros. A entrevista será realizada individualmente, de forma remota, através de videoconferência (via *Google Meet*), em dia e horário que você solicitar e será gravada, se houver seu consentimento.

Essas gravações são para que a pesquisadora observe melhor o desenvolvimento do estudo. A gravação dos vídeos que indique sua participação não será divulgada em hipótese alguma e seu nome também não será divulgado. Para garantir sua confidencialidade, todos os registros serão identificados por códigos ou números, gerando a impossibilidade da revelação das identidades. As informações coletadas serão usadas, única e exclusivamente para finalidade desta pesquisa e os resultados da pesquisa serão publicados, garantindo o seu anonimato.

Durante a realização dessa pesquisa você poderá se sentir cansado psicologicamente e/ou fisicamente por causa das questões do questionário e da entrevista. Caso isso ocorra, poderemos fazer uma pausa ou até mesmo, caso você queira, cancelar sua participação e esse fato não o prejudicará em nada.

Inicialmente e durante todo o processo de coleta de dados, a pesquisadora adotará providências e cautelas a fim de evitar ou reduzir riscos associados à pesquisa. Dentre essas medidas destacam-se: a garantia de acesso aos resultados individuais da pesquisa; minimização de desconfortos, garantindo a liberdade para não responder questões constrangedoras; atenção aos sinais verbais e não verbais de incômodo; e segurança de confidencialidade e a privacidade, a proteção da imagem e a não estigmatização, garantindo a não utilização das informações em prejuízo do participante, inclusive em termos de autoestima, desprestígio e/ou econômico – financeiro.

Os benefícios de sua participação nesta pesquisa podem consistir na integração de conhecimentos e contribuir para a elaboração de estratégias didáticas que possam promover o desenvolvimento da capacidade argumentativa do discente.

Seu nome será mantido em sigilo, garantindo sua privacidade. Você terá livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais que desejar sobre os estudos dessa pesquisa, como também será informado (a) de suas consequências, enfim, tudo o que anseie saber antes, durante e depois da sua participação.

Este termo possui assinatura eletrônica e uma via com sua assinatura também deverá ser enviada a pesquisadora.

Você não terá nenhuma despesa em sua participação na pesquisa, ou seja, não fará nenhum pagamento e, também, não receberá nenhum valor econômico.

Em caso de alguma complicação ou dano comprovado, decorrente da sua participação nesta pesquisa, será proporcionada assistência imediata e/ou integral, conforme o item II.3 que determina a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde.

Em caso de qualquer tipo de dano resultante de sua participação na pesquisa, previsto ou não no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, o participante terá direito à indenização, por parte da pesquisadora, do patrocinador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa, conforme o item IV.3 da Resolução CNS N° 466 de 2012.

O(a) senhor(a) ao aceitar participar da pesquisa deverá assinar eletronicamente o TCLE, disponível no seguinte link:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSf2U2xYfcvGNsGdHZZwLD10EIVaLZQBL7t9JliFAf2HdVK7Eg/viewform?usp=sf_link o qual poderá ser impresso se assim o desejar. Como a coleta de dados ocorrerá em ambiente virtual (*Google Meet* e *Google Forms*), é fundamental que o participante de pesquisa guarde em seus arquivos uma cópia do documento eletrônico.

Eu, _____,
professor(a) do Ensino Fundamental II da rede municipal, fui informado(a) dos objetivos da presente pesquisa e que posso tirar minhas dúvidas sobre a realização dessa pesquisa a qualquer momento. Declaro que concordo em participar dessa pesquisa, que recebi uma via deste termo de consentimento e que me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas. Sei que eu poderei continuar ou desistir na(da) participação dessa pesquisa, se assim desejar.

Aracaju/ SE, ____ de _____ de 2021

Assinatura do(a) Participante de Pesquisa

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária, o Consentimento Livre e Esclarecido deste aluno(a) para o presente estudo. Declaro ainda que me comprometo a cumprir todos os termos aqui descritos.

Assinatura da pesquisadora

Se houver dúvida em relação ao estudo, você poderá entrar em contato com a pesquisadora pessoalmente, por e-mail: xxxxxxxgmail.com ou por telefone (79) 9 zzzz-zzzz, como, também, com o orientador da pesquisa, pelo e-mail: yyyyyy@gmail.com, ou ainda com o Comitê de Ética da Universidade Federal de Sergipe, localizado na Rua Cláudio Batista, s/n, Bairro Sanatório, pelo telefone (79) 3194-7208 ou pelo e-mail: cep@academico.ufs.br.

Desde já, agradeço a sua colaboração.

Apêndice B

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS

Eu _____, CPF _____, RG _____, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos, riscos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, a pesquisadora **Evelyn dos Santos Nascimento**, sob orientação da **Prof.º Dr.º João Paulo Attie** do projeto de pesquisa intitulado “**Argumentação no Ensino de Operações com Números Inteiros**” a realizar as gravações da entrevista que se façam necessárias e/ou a colher meu depoimento, por meio de questionário, sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo, libero a utilização dessas gravações e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências), em favor dos pesquisadores da pesquisa, acima especificados, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990), dos idosos (Estatuto do Idoso, Lei N.º 10.741/2003) e das pessoas com deficiência (Decreto N.º 3.298/1999, alterado pelo Decreto N.º 5.296/2004). Assim, manifesto meu livre consentimento em participar da pesquisa.

O(a) senhor(a) ao aceitar participar da pesquisa deverá assinar eletronicamente o Termo de Autorização de Uso de Imagem e Depoimentos, disponível no seguinte link (https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfxDrCX4ubV-gSwIqKM1B-U3m4qUu64zrmY7ibdtNZ5KI93dw/viewform?usp=sf_link) o qual poderá ser impresso se assim o desejar. Como a coleta de dados ocorreu em ambiente virtual (Google Meet e Google Forms), é fundamental que o participante de pesquisa guarde em seus arquivos uma cópia do documento eletrônico.

Evelyn dos Santos
Nascimento Pesquisadora
Responsável Matrícula:
2020*****

**Comitê de Ética da Universidade Federal de
Sergipe**

Hospital Universitário-UFS
Rua Cláudio Batista, s/n - Sanatório,
Aracaju/ SE, CEP 49060-110, Tel.:
(79)3179- 7208

Apêndice C

TERMO DE COMPROMISSO PARA UTILIZAÇÃO DE DADOS

Os pesquisadores do projeto de pesquisa intitulado “**ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS**” comprometem-se a preservar a privacidade dos dados de imagens e identidade dos participantes, concordam e assumem a responsabilidade de que estas informações serão utilizadas única e exclusivamente para execução do presente projeto. Comprometem-se, ainda, a fazer a divulgação das informações coletadas somente de forma anônima e que a coleta de dados da pesquisa somente será iniciada após aprovação do sistema CEP/CONEP.

Salientamos, outrossim, estarmos cientes dos preceitos éticos da pesquisa, pautados na Resolução 466/12 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde.

Aracaju, 26 de julho de 2021

Assinatura da Pesquisadora Responsável

Assinatura do Pesquisador Orientador

Apêndice D

TERMO DE ANUÊNCIA E EXISTÊNCIA DE INFRAESTRUTURA

Eu, **Fábio dos Santos, Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe**, autorizo a realização do projeto intitulado “**Argumentação no Ensino de Operações com Números Inteiros**” pelos pesquisadores **Evelyn dos Santos Nascimento** (pesquisadora responsável) e **João Paulo Attie** (pesquisador orientador), que envolverá a investigação de aspectos dos argumentos emitidos por professores do Ensino Fundamental em respostas que apresentam a um questionário e a uma entrevista semiestruturada, realizadas de forma remota, e classificar, quando possível, as argumentações emitidas. A Instituição se compromete a permitir o desenvolvimento da pesquisa nesta unidade de ensino autorizando a realização das etapas da mesma, inclusive da realização de uma Oficina de Matemática destinada aos professores participantes. As gravações de áudio e vídeo não serão divulgadas em hipótese alguma. O objetivo das gravações é facilitar a observação e a análise da pesquisadora sobre o desenvolvimento do estudo, de forma minuciosa. E será iniciado após a aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Sergipe (CEP/UFS).

Estamos cientes de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes da pesquisa, dispondo de infraestrutura necessária para desenvolvê-la em conformidade às diretrizes e normas éticas. Ademais, ratifico que não haverá quaisquer implicações negativas aos **professores** que não desejarem ou desistirem de participar do projeto.

Declaro, outrossim, na condição de representante desta Instituição, conhecer e cumprir as orientações e determinações fixadas nas Resoluções nº 466, de 12 de dezembro de 2012, e 510, de 07 de abril de 2016, **[a menção à Resolução nº 510/16 deve ser mantida somente quando nas pesquisas relacionadas às áreas de Ciências Humanas e Sociais]** e Norma Operacional nº 001/2013, pelo CNS.

São Cristóvão-SE, 26 de Julho de 2021.

Assinatura do responsável pelo instituição/organização

Apêndice E

TERMO DE COMPROMISSO E CONFIDENCIALIDADE

Título do Projeto: Argumentação no Ensino de Operações Com Números Inteiros

Pesquisador Responsável: Evelyn dos Santos Nascimento

Instituição/Departamento de Origem do Pesquisador: Universidade Federal de Sergipe/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Telefone para contato: (079) 9 zzzz-zzzz

E-mail: xxxxxx@yyyyy.com

A pesquisadora do projeto acima identificado assume o compromisso de:

- Cumprir os termos da resolução nº 466/12, de 12 de dezembro de 2012 e da resolução nº 510/16, de 07 de abril de 2016 do Conselho Nacional de Saúde, do Ministério da Saúde e demais resoluções complementares à mesma (240/1997, 251/1997, 292/1999, 304/2000, 340/2004, 346/2005 e 347/2005).
- Garantir que a pesquisa só será iniciada após a avaliação e aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Federal de Sergipe
- Zelar pela privacidade e pelo sigilo das informações, que serão obtidas e utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa;
- Garantir que os materiais e as informações obtidas no desenvolvimento deste trabalho serão utilizados apenas para se atingir o(s) objetivo(s) previsto(s) nesta pesquisa e não serão utilizados para outras pesquisas sem o devido consentimento dos participantes;
- Garantir que os benefícios resultantes do projeto retornem aos participantes da pesquisa, seja em termos de retorno social, acesso aos procedimentos, produtos ou agentes da pesquisa;
- Garantir que os resultados da pesquisa serão tornados públicos através de apresentação em encontros científicos ou publicação em periódicos científicos, quer sejam favoráveis ou não, respeitando-se sempre a privacidade e os direitos individuais dos participantes da pesquisa;
- Garantir que o CEP-UFS será comunicado da suspensão ou do encerramento da pesquisa por meio de relatório apresentado anualmente ou na ocasião da suspensão ou do encerramento da pesquisa com a devida justificativa;

- Garantir que o CEP-UFS será imediatamente comunicado se ocorrerem efeitos adversos, resultantes desta pesquisa, com o voluntário;
- Assegurar que os resultados da pesquisa serão anexados na Plataforma Brasil, sob a forma de Relatório Parcial e Relatório Final da pesquisa.

Aracaju, 22 de abril de 2021.

Assinatura da Pesquisadora Responsável

Apêndice F

QUESTIONÁRIO

Questionário a ser utilizado com professores da educação básica na pesquisa
ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS.

Em relação à formação acadêmica e exercício profissional

- 1- Nome:
- 2- Cidade em que atua:
- 3- Ano de formação:
- 4- Fez ou faz Pós-Graduação? Se sim, especifique-a.
- 5- Tempo de atuação como professor:
- 6- Em relação ao uso do livro didático adotado pela(s) escola(s): Faz uso do(s) mesmo(s)? Se sim, como ocorre essa utilização?

Apêndice G

ROTEIRO DE ENTREVISTA

Roteiro a ser usado na entrevista semiestruturada com os professores do ensino fundamental na pesquisa ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS.

- 1- Como é a relação, em geral, dos alunos com esse conteúdo? Considera que eles sentem alguma dificuldade? Qual(is)?
- 2- Se fosse lecionar uma aula sobre operações com números inteiros como seria? Exemplifique. (prestar atenção se contextualiza o conteúdo, se fala das operações e como as aborda)
- 3- Algum aluno já perguntou o porquê dos procedimentos realizados nas operações com números inteiros?
- 4- Se o aluno perguntasse o porquê (das regras de sinais utilizadas nessas operações, por exemplo) o que você responderia?

ANEXO

PARECER CONSUBSTANCIADO (Documento de Aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa)

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Pesquisador: EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 46566621.8.0000.5546

Instituição Proponente: FUNDACAO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.025.418

Apresentação do Projeto:

As informações elencadas nos campos “Apresentação do Projeto”, “Objetivo da Pesquisa” e “Avaliação dos Riscos e Benefícios” foram retiradas do arquivo “Informações Básicas da Pesquisa” (PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1735516.pdf), postado em 14/09/2021.

Introdução:

Analisando os processos de ensino e de aprendizagem, nos deparamos com três elementos que consideramos interligados e de grande relevância para o seu desenvolvimento: o Saber, o Professor e o Aluno. Em nosso estudo, o Saber é a Matemática; o Professor é quem irá conduzir o processo de ensino e o aluno é quem deverá aprender. O docente é o responsável por criar um elo entre essas outras duas variáveis, desempenhando um papel de mediador. Para esse fim, é proveitoso que ele selecione e aplique “metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares...” (BRASIL, 2018, p. 17) e, também, que idealize e ponha “em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos na aprendizagem” (Ibidem), podendo recorrer a documentos pautados na demanda do aluno, como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Segundo os Parâmetros Curriculares de Matemática – PCN (BRASIL, 1998, p.36), o professor “precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área” e ainda a “concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis”. Dessa forma, na medida em que o docente tem domínio, não só dos conceitos e fórmulas, mas também do enredo por trás de todo o processo, pode tornar o saber matemático suscetível de ser compreendido pelos estudantes. Alia-se a esse fato a proposição de aulas em que o aluno seja ativo durante o processo de construção do conhecimento e não consolidando a imagem de que é o único detentor dos saberes da disciplina, o dono de verdades inquestionáveis. Consequentemente, o fruto de seu trabalho poderá ser auspicioso, promovendo, dentre os vários benefícios, o aprimoramento da capacidade dos estudantes de interpretar informações e solucionar

problemas. Além dos papéis do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem, destacamos que o livro didático também possui grande destaque nesse panorama. Apesar da enorme influência da Internet no cotidiano dos indivíduos, o livro didático é, por vezes, o principal material de pesquisa do alunado e de consulta do docente. Assim, consideramos correta a abordagem dos PCN (1998), segundo os quais os conteúdos devem abarcar não só conceitos, como também procedimentos e formas de raciocínio. Consideramos que um dos desafios a serem enfrentados no ensino da matemática está no método pelo qual ele está sendo exercido. Concordamos com Cordeiro e Oliveira (2015), no fato de que o ensino ainda é predominantemente calcado na reprodução, ou seja, o professor chega à sala de aula apresenta a teoria do conteúdo, resolve exemplos e aplica listas de questões para os discentes repetirem tal processo. Assim, os estudantes são levados a acreditar que saber matemática é conseguir decorar e empregar fórmulas, ser hábil em resolver contas. Porém, tal metodologia de ensino pode acabar prejudicando o desenvolvimento intelectual dos alunos, deixando-os restritos ao uso de técnicas, sem haver uma compreensão do que está sendo realizado e assim, quando forem colocados diante de contextos matemáticos (ou não) diferentes do qual estão habituados, que precisem de um raciocínio mais aprimorado, podem acabar fracassando e não conseguirem resolver o que achavam dominar. Segundo Cordeiro e Oliveira (2015), essa metodologia de ensino, marcada pela repetição e memorização de fórmulas é adotada por muitos profissionais, e se demonstra ineficaz, sendo um dos elementos que cooperam para o baixo desempenho dos discentes verificado nas avaliações matemáticas mais gerais, como, por exemplo, o SAEB e PISA. Seja por comodismo, desmotivação, falta de alternativas didáticas, independente do motivo que os leve a desenvolver tal prática pedagógica, consideramos que a mesma incentiva uma passividade por parte dos alunos no seu processo de aprendizagem, e não estimula a criatividade dos mesmos, que tendem a ficar acomodados e aceitar o que é dito pelo docente sem contestações. Além do mais, pode promover uma baixa popularidade da matemática entre a comunidade estudantil, por ser considerada uma matéria de difícil compreensão e, conseqüentemente, de ser aprendida. Assentimos que o ensino de matemática necessita estar voltado para a formação de alunos mais independentes, que entendam o procedimento que estão realizando durante a resolução dos exercícios e a lógica por trás dos algoritmos que são utilizados e, portanto, compreender o processo irá colaborar para melhor interpretar e legitimar seus resultados. Assim, atribuímos ao processo de argumentação no ensino de matemática um papel de grande relevância para proporcionarmos uma aprendizagem significativa ao aluno. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ratifica esse fato, quando aponta que uma das competências a ser alcançada na educação básica é “argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns” (BRASIL, 2018, p. 09). Segundo Sales (2011) a argumentação tem suas origens na filosofia e no direito, dessa forma ela não é um objeto da matemática. No entanto, seja qual for a área do conhecimento, esse autor nos diz que ela “é toda expressão do raciocínio podendo ser uma simples explicação ou uma tentativa de convencer” (SALES, 2011, p. 02). Tomamos como referência a categorização de argumentação no ensino de matemática – argumentação explicativa e argumentação justificativa – proposta, em especial, por Sales (2011) e Attie (2016), no qual foram desenvolvidas a partir da conceitualização de Balacheff (1988). Conforme esse último autor, enquanto que o termo explicação “supõe um discurso com o objetivo de tornar inteligível um resultado” o conceito de justificativa “compreende uma exposição das razões que os legitimam” (ATTIE, 2016, p.2262). Nesse contexto, a Argumentação Explicativa tem a finalidade apenas de esclarecer, sem emissão de juízo de valor, enquanto que na Argumentação Justificativa há uma elaboração prévia das ideias, tendo o objetivo não somente de elucidar

como, também, de convencer o interlocutor (SALES, 2011; ATTIE, 2016). Dessa forma, justificamos a presente pesquisa com a visão da necessidade de superar um ensino fundamentado na memorização e na repetição, que como dito anteriormente não contribui para a formação do aluno crítico e reflexivo, podendo constituir-se também com um possível obstáculo para a compreensão desses conteúdos matemáticos. Isso nos leva a necessidade de investigar os usos da argumentação no ensino de matemática a partir da análise de práticas pedagógicas na educação básica, investigando a mediação da argumentação em materiais didáticos e ambientes escolares. Consideramos ainda que uma das chaves para essa superação é a elaboração e divulgação de atividades didáticas não tradicionais em que, ou o papel da argumentação seja determinante, ou que incentivem a sua utilização. No contexto do conjunto dos números inteiros, destacamos duas justificativas para essa escolha, que consideramos interligadas. A primeira diz respeito à importância atribuída às operações com esses números (juntamente com o conhecimento prévio dos números naturais), visto que são bases para a aprendizagem de conteúdos posteriores e de sua utilidade em nosso cotidiano e outras áreas do conhecimento, como nas ciências exatas. O segundo envolve as dificuldades apresentadas por alunos, durante e até após a educação básica, em compreender seus significados, operar com esses números e empregá-los em um contexto, demonstrando uma carência na aprendizagem de aspectos relevantes desse conjunto. Meister (2009) aponta que a prática tradicional do professor, marcada por essa repetição de exercícios que não estimulam a criatividade pode ser um dos contribuintes que dificulta a aprendizagem, visto que não há discussão, motivação, curiosidade e nem interesse para estudá-los.

Hipótese:

Acreditamos que o uso de argumentos justificativos no processo de ensino da matemática pode contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos dessa matéria, como, também, promover o desenvolvimento de habilidades argumentativas no aluno e aprimorar as capacidades de interpretar informações e solucionar problemas em variados contextos. Entretanto, cremos que os professores, ao ensinarem a disciplina, priorizam por argumentos explicativos, isto é, utilizam-se apenas de fórmulas e algoritmos sem muitas justificativas e/ou contextualizações que possam dar sentido ao mesmo. Consideramos duas suposições que podem levar a essa atitude: a primeira relaciona-se ao desconhecimento do professor a essas justificativas; e a segunda vincula-se ao fato de, apesar de terem esse conhecimento, optam por descartar seu uso durante o processo de ensino, com o motivo de seguir por um caminho mais “rápido” e “simples” de ensinar, apresentando somente o produto final e não, também, o seu processo.

Metodologia Proposta:

Conforme Gerhardt e Silveira (2009 apud Santos, 2010, p. 10) “a pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.” e é visando a melhor compreensão dos objetos de estudo que pretendemos adotar esse tipo de pesquisa. Para além desse aspecto, será uma pesquisa exploratória, para buscarmos uma “maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses” (GIL, 2002, p. 41) e assumirá uma forma bibliográfica, pois teremos como alicerce para fundamentar nosso trabalho a pesquisa em livros e artigos científicos. Para alcançar os objetivos propostos, desenvolveremos a pesquisa em 5 (cinco) momentos. No primeiro momento faremos uma busca e identificação dos professores que se disponibilizarão a participar dessa investigação. A princípio, o contato e o convite a esses sujeitos

ocorrerão através de e-mails. O endereço de e-mail desses, serão adquiridos no banco de dados do Projeto “Oficinas de Matemática”, que dispõe de uma listagem com professores das redes públicas de ensino do Estado de Sergipe. Priorizaremos em nossa seleção, professores que estejam atuando no Ensino Fundamental II. Posteriormente a essa identificação, levantaremos dados, através de um questionário via Google Forms (Anexo I), com a finalidade de traçar o perfil de cada professor, identificar livro(s) e/ou recurso(s) didático(s) adotados para planejamento e/ou execução das aulas. Em um terceiro momento, ocorrerão as entrevistas semiestruturadas (Anexo II), individualmente e de forma remota através de videoconferência, por meio da plataforma Google Meet, com vista a entender a relação desses docentes sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo dos números inteiros, bem como, caracterizar os argumentos emitidos por esses professores em uma possível aula sobre o mesmo. Tais argumentos serão organizados e classificados de acordo com a categorização proposta por Sales (2011) e Attie (2016). Na etapa quatro, realizaremos a busca e a análise dos livros didáticos citados por esses entrevistados e adotados pela escola. Essa análise também ocorrerá, especificamente, no conteúdo do conjunto dos números inteiros e a partir das categorias de argumentação proposta por Sales (2011) e Attie (2016). Por fim, no quinto e último momento será realizada uma oficina para os professores participantes, com possíveis abordagens didáticas para o conjunto dos números inteiros e, ao final, os mesmos receberão um novo questionário (Anexo III), também via Google Forms a fim de sondar se houve alguma mudança de concepção sobre o ensino da matemática.

Critério de Inclusão:

Critério de Inclusão dos Participantes: Professores de matemática que estão, atualmente, lecionando no ensino fundamental maior (da rede municipal de educação).

Critério de Exclusão:

Professores de matemática que atuam, exclusivamente, em outros níveis de ensino (ensino médio – regular ou EJA – ou nível superior).

Metodologia de Análise de Dados:

As informações coletadas serão analisadas conforme o método de análise de conteúdo proposto por Laurence Bardin (2011).

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Identificar os argumentos utilizados no processo de ensino do conjunto dos números inteiros.

Objetivo Secundário:

Identificar e classificar os argumentos apresentados por professores do ensino fundamental; Identificar e categorizar os argumentos utilizados em livros didáticos indicados pelo Guia do Plano Nacional do Livro Didático; Obter indícios da possível influência do livro didático na metodologia do professor; Produzir uma oficina para os professores participantes, com uma possível abordagem didática que possa justificar o presente conteúdo.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Durante a coleta dos dados, seja durante a resolução do questionário ou durante a entrevista, os participantes podem sentir-se cansados, psicológica ou fisicamente, e/ou desconfortáveis, mais especificamente, no momento da entrevista, em virtude de estar perante ou pessoa e/ou da gravação do vídeo. Nesses casos, os mesmos serão alertados que a partir do momento que sentirem-se incomodados de alguma forma, é só sinalizarem, podendo escolher se prefere continua-la em outro momento ou até mesmo desistir de participar da investigação.

Benefícios:

Ressalta-se que, a princípio, os benefícios da pesquisa para o professor participante – e após a publicação dos resultados, outros leitores – podem consistir em uma reflexão sobre a postura e prática pedagógica adotada em sala de aula e agregar conhecimentos sobre uma abordagem didática alternativa para o ensino do conteúdo matemático trabalhado, de tal modo que pode justificar os procedimentos realizados, indo além da utilização exclusiva de algoritmos. Quem sabe, talvez, suscitar a curiosidade para a busca de argumentos para outros assuntos.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A abordagem metodológica da pesquisa consistirá na resolução de questionários online e entrevista semiestruturada com professores de matemática da educação básica de ensino, especificamente aqueles atuantes no ensino fundamental das redes municipais de educação do Estado de Sergipe.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Vide campo "Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações".

- Carta Resposta apresentada com atendimento às pendências.

Recomendações:

Vide campo "Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações".

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Não foram observados óbices éticos.

Diante do exposto, o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Sergipe, de acordo com as atribuições definidas na Resolução CNS nº 510 de 2016, na Resolução CNS nº 466 de 2012 e na Norma Operacional nº 001 de 2013 do CNS, manifesta-se pela aprovação do projeto de pesquisa proposto.

Considerações Finais a critério do CEP:

O CEP informa que de acordo com a Resolução CNS nº 466/12, Diretrizes e normas XI. 1 – A responsabilidade do pesquisador é indelegável e indeclinável e compreende os aspectos éticos e legais e XI. 2 - XI.2 - Cabe ao pesquisador: a) apresentar o protocolo devidamente instruído ao CEP ou à CONEP, aguardando a decisão de aprovação ética, antes de iniciar a pesquisa; b) elaborar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e/ou Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, quando necessário; c) desenvolver o projeto conforme delineado; d) elaborar e apresentar os relatórios parciais e final; e) apresentar dados solicitados pelo CEP ou pela CONEP a qualquer momento; f) manter os dados da pesquisa em arquivo, físico ou digital, sob sua guarda e responsabilidade, por um período de 5 anos após o término da pesquisa;

g) encaminhar os resultados da pesquisa para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico integrante do projeto; e h) justificar fundamentadamente, perante o CEP ou a CONEP, interrupção do projeto ou a não publicação dos resultados.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1735516.pdf	14/09/2021 08:52:32		Aceito
Outros	Termo_de_autorizacao_de_uso_de_imagens_e_depoimentos_Evelyn.pdf	14/09/2021 08:50:57	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_de_Pesquisa_Evelyn.docx	14/09/2021 08:50:35	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Outros	Carta_Resposta__Pendencias_Evelyn.pdf	14/09/2021 08:50:18	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_Evelyn.pdf	14/09/2021 08:49:59	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Outros	TCUD_Evelyn.pdf	14/09/2021 08:47:37	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Outros	Carta_Resposta_Pendencias_Evelyn.pdf	31/07/2021 11:32:11	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Termo_de_Existencia_de_Infraestrutura_Evelyn.pdf	31/07/2021 11:23:49	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_Rosto_Evelyn.pdf	31/07/2021 11:21:51	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Outros	Termo_de_Compromisso_Evelyn.pdf	24/04/2021 19:42:18	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Declaracao_Pesquisadora_Evelyn.pdf	24/04/2021 19:33:05	EVELYN DOS SANTOS NASCIMENTO	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

ARACAJU, 07 de Outubro de 2021

Assinado por
FRANCISCO DE ASSIS PEREIRA
 (Coordenador(a))