UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE – UFS

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – POSGRAP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGECIMA

FABIO FONTES FRAGA

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE PROPORÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

SÃO CRISTÓVÃO - SE
Abril/2022

FABIO FONTES FRAGA

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE PROPORÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Federal de Sergipe – PPGECIMA/UFS, como requisito final à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Paulo Attie

SÃO CRISTÓVÃO - SE
Abril/202

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Fraga, Fabio Fontes
F811a Argumentação no ensino de proporção em livros didáticos / Fabio Fontes Fraga; orientador João Paulo Attie. – São Cristóvão, SE, 2022.
87 f.; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Proporção. 3. Livros didáticos. I. Attie, João Paulo orient. II. Título.

CDU 5:37

ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DE PROPORÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIMA, da Universidade Federal de Sergipe, como parte integrante dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Linha de pesquisa: Currículo, Didática e Métodos de Ensino das Ciências e Matemática, sob orientação do Prof. Dr. João Paulo Attie.

São Cristóvão, 29 de abril de 2022

BANCA DA DISSERTAÇÃO

Prof. Dr. João Paulo Attie (Orientador – PPGECIMA – UFS)

Prof. Dr. Erivanildo Lopes da Silva (PPGECIMA-UFS)

Prof. Dr. Jorge Costa do Nascimento (PPG.ECFP-UESB)

SÃO CRISTÓVÃO - SE

Abril/2022

Dedico este trabalho especialmente aos meus três filhos, Fábio Franklin, Fábio Frankiel e Fábio Frankoan e também a minha esposa Lidiomar, assim como a todos os meus professores de minha formação do mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar força, coragem e persistência, me concedendo esta oportunidade de chegar até aqui e poder concluir este curso de mestrado. Foram muitas as dificuldades enfrentadas, muitas horas, dias e meses de dedicação e renúncias.

À minha família, aos meus pais, à minha esposa Lidiomar e aos meus três filhos, Fábio Franklin, Fábio Frankiel e Fábio Frankoan, por me compreenderem, tendo paciência, quando precisei me dedicar a esta nova etapa da minha vida, este curso de mestrado.

Aos meus colegas da turma do mestrado 2020, os quais enfrentamos juntos muitos desafios a cada disciplina cursada, durante o período de pandemia.

Aos meus professores, prof. Dr. Erivanildo Lopes da Silva e ao prof. Dr. João Paulo Attie, ambos ministrantes da disciplina de Didática e Metodologia do Ensino em Ciências e Matemática.

À profª. Drª. Denise da Silva Souza, ministrante da disciplina Políticas Públicas para a Educação Cientifica no Brasil.

À profª. Drª. Alice Alexandre Pagan e à profª. Drª. Yzila Liziane Farias Maia de Araujo, ambas ministrantes da disciplina Saber, Ciência, Técnica e Cultura nas Sociedades Contemporâneas.

À profª. Drª. Suzana Mary de Andrade Nunes e à profª. Drª. Veleida Anahi da Silva, ambas ministrantes da disciplina de Currículo e Avaliação Escolar.

Ao prof. Dr. Wellington Barros da Silva e à profª. Drª. Adjane da Costa Tourinho e Silva, ambos ministrantes da disciplina de Fundamentos do Ensino e da Pesquisa: aspectos históricos e epistemológicos.

E mais uma vez ao prof. Dr. João Paulo Attie, meu orientador e também ministrante da disciplina Tópicos Especiais em Ensino de Matemática. Obrigado, pela oportunidade de ter sido seu orientando. Agradeço imensamente suas contribuições em minha formação durante este curso de mestrado.

Aos professores doutores Erivanildo Lopes da Silva e Jorge Costa do Nascimento como membros da banca de defesa da dissertação. Ao PPGECIMA/UFS e a todos que tiveram contribuições diretas e indiretas na minha formação.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.

(Galileu Galilei)

Resumo: Neste estudo, tivemos como objetivo identificar as categorias de argumentação utilizadas em onze livros didáticos de matemática, do 7º ano da educação básica, adotados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático, o PNLD, de 2020, em relação ao conteúdo de proporção. Baseando-nos em diversos autores, como Toulmin (2006), Balacheff (1988), Sales (2010), Attie (2016), Duval (1993), Caldato *et al* (2017), Nasser e Tinoco (2003), Sasseron e Carvalho (2011), entre outros, e definimos conceitos importantes para nosso trabalho, como argumentação, explicação, justificação, prova e demonstração. Quanto à metodologia, consideramos que nossa pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, com aspectos exploratório, documental e descritivo. Para o seu desenvolvimento partimos de uma questão central: Que tipo ou categorias de argumentação são abordados em livros didáticos de Matemática recomendados pelo guia do PNLD, em relação ao ensino de proporção? A partir dessa questão, traçamos como objetivo identificar as categorias de argumentação utilizadas nos livros didáticos recomendados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático - PNLD, 2020, em relação ao ensino de proporções. Em relação à coleta de dados, fizemos uma breve abordagem histórica sobre o tema, assim como um mapeamento de pesquisas relacionadas ao ensino de proporção e realizamos uma busca nos livros didáticos, afim de identificar as categorias de argumentação utilizadas no ensino de proporção. Por fim, após as análises, utilizando a técnica de Análise de Conteúdo apresentamos como resultado principal a predominância da argumentação explicativa nos livros considerados.
Palavras-chave: Argumentação Justificativa; Ensino de Proporção; Livros Didáticos de Matemática.

Abstract: This study aimed to identify the argumentation categories used by eleven mathematics textbooks, of the 7th grade, of basic education, adopted by the guide of the National Textbook Plan, the PNLD, of 2020, in relation to the proportion content. Based on several authors, such as Toulmin (2006), Balacheff (1988), Sales (2010), Attie (2016), Duval (1993), Caldato et al (2017), Nasser and Tinoco (2003), Sasseron and Carvalho (2011), among others, we defined the concepts of argumentation, explanation, justification, proof and demonstration, which are important for our work. Regarding the methodology, we consider that our research can be characterized as qualitative, with exploratory, documentary and descriptive aspects. For the development of our research, we start from the central question: What type or categories of argumentation are addressed in mathematics textbooks recommended by the PNLD guide, in relation to proportion teaching? From this question, we designed as objective to identify the categories of argumentation used by the textbooks recommended by the guide of the National Plan of Textbook - PNLD (BRASIL, 2020), in relation to the teaching of proportions. Regarding data collection, we made a brief historical approach on the subject, as well as a mapping of research related to the teaching of proportion and we carried out a search in the textbooks mentioned, in order to identify the categories of argument used in the teaching of proportion. Finally, after the analysis, we present as the main result the predominance of explicative arguments in the books considered.
Keywords: Justification Argumentation; Teaching of Proportion; Mathematics Textbooks.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BNCC-EM – Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio

EJA – Educação de Jovens e Adultos

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA – *Programme for International Student Assessment* - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

RI-UFS – Repositório Institucional da Universidade Federal de Sergipe

SciElo – *Scientific Electronic Library Online* – Biblioteca Cientifica Eletrônica Online

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A partir de nossa história como estudante e como professor da educação básica, consideramos ser possível apontar que, geralmente, a maioria dos livros didáticos de matemática, mesmo os mais recentes, quando apresentam um novo conteúdo, o fazem seguindo um tipo de sequência: definem o tópico a ser estudado, às vezes trazendo um pequeno recorte histórico ou anedótico daquele conteúdo, para em seguida, apresentar aspectos complementares dos conceitos, resolver alguns exemplos e em seguida, apresentar uma lista de exercícios de fixação ou atividades propostas para que, baseado nos exemplos resolvidos, o aluno resolva os exercícios propostos.

A compreensão da matemática pode ser um longo processo, repleto de variáveis, para o qual defendemos a primazia da busca da compreensão em relação à memorização dos procedimentos. Com essa divisa como sustentação, neste trabalho, buscamos identificar as categorias de argumentação utilizadas em livros didáticos de matemática do 7º ano da educação básica, adotados pelo guia do PNLD[1] 2020, no ensino de proporção.

Consideramos que a Matemática deve ser vista como mais do que uma disciplina meramente numérica, pois está presente em diversas situações do nosso cotidiano e, nesse sentido, defendemos a utilização da argumentação como possibilidade de favorecer o estabelecimento da comunicação, a elaboração de conjecturas, bem como a formulação e a resolução de situações-problema, ampliando assim, as capacidades de crítica e de autonomia do indivíduo.

Assim, apontamos a argumentação como um caminho imprescindível no ensino de matemática. Compreendemos e corroboramos que o termo

> é usado para designar argumentação na aula de Matemática, ou seja, conversações aí desenvolvidas cujo foco é a Matemática e que assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo e justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições, pela indicação de razões. (BOAVIDA, 2005, p. 01).

Considerando que “argumentar é a ação de fazer ou mostrar como se faz e é também a ação de justificar o porquê se faz” (SALES, 2011, p. 01), entendemos por argumentar o ato de apresentar fatos, razões que confirmam a existência de uma

1 Plano Nacional do Livro Didático.

verdade, corroborando para a autenticidade de uma afirmação ou de um ponto de vista.

Assim, entendemos que argumentar em matemática significa comunicar-se com base em discussões e validações matemáticas, desenvolvendo representações na compreensão dos procedimentos das resoluções.

Documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio (BNCC-EM, 2018), por exemplo, apontam que os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretando-os, após resolverem problemas matemáticos. Nesse contexto, a competência de comunicar-se ganha relevância, pois

> nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos relacionados às competências de raciocinar e representar (BRASIL, 2018, p. 519).

Consideramos importante evidenciar aqui as orientações de algumas políticas públicas, como por exemplo, as descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017).

De acordo com os PCN de Matemática (1998), em relação à questão da argumentação, temos que,

> para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios [...] e procedimentos matemáticos (formulação de hipóteses, realização de cálculos, coleta, organização e interpretação de dados estatísticos, prática da argumentação, etc) (BRASIL, 1998, p. 26/27).

Ainda conforme apontam os PCN (1998), na síntese dos princípios norteadores para a área de Matemática no Ensino Fundamental, a argumentação é evidenciada como fator primordial na construção do conhecimento, pois

> o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de

> processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, p. 56).

Da mesma forma, a BNCC (2018), em relação ao ensino de matemática no Ensino Fundamental, aponta que

> além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada (BRASIL, 2018, p. 297).

Assim, como questão norteadora da nossa pesquisa, indagamos: Que categorias de argumentação são abordadas nos livros didáticos de Matemática recomendados pelo guia do PNLD, em relação ao ensino de proporção? Assim, traçamos como objetivo identificar as categorias de argumentação utilizadas em livros didáticos de matemática do sétimo ano, adotados pelo PNLD, em relação ao tema proporções.

Caracterizamos essa pesquisa como sendo de natureza qualitativa, à medida em que o nosso propósito não é ter uma representação numérica de um fenômeno, e sim investigarmos e aprofundarmos a compreensão dele. Complementando, a pesquisa também teve um caráter exploratório, pois pretendemos tornar o tema mais explícito, no sentido de refletirmos sobre as consequências da utilização das categorias de argumentação no ensino. Como o objeto de pesquisa foram os livros didáticos, também a assinalamos como sendo uma pesquisa bibliográfica.

A fundamentação foi feita a partir de pesquisas em livros, dissertações, teses e artigos acadêmicos, utilizamos principalmente no arcabouço teórico desta pesquisa, autores como Toulmin (2006), Balacheff (1988), Sales (2010) e Attie (2016), afim de analisarmos a argumentação e suas categorias, explicativa e justificativa, nos livros didáticos de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, recomendados pelo guia do PNLD.

Para fazer esta análise, optamos pelo conteúdo proporção, por considerarmos que este assunto é questão central para o entendimento de diversos outros temas, como por exemplo os de velocidade, densidade de um corpo, densidade demográfica, relacionados ao conceito de razão, comparação entre grandezas, função de 1º grau, semelhança de polígonos e teorema de Tales, dentre outros. Nesse contexto, consideramos que a escolha se justifica por tratar-se de um conceito amplo, usado em diversas áreas do conhecimento, além da própria matemática, como física, química, biologia, música, arte, economia, medicina, entre várias outras, além de estar presente em situações do cotidiano.

O ensino de proporção no Ensino Fundamental é trabalhado especificamente no 7º ano, através de tópicos como razão, proporção, escala, propriedade fundamental das proporções, grandezas direta e inversamente proporcionais, regra de três simples e composta e porcentagem. Este conteúdo é retomado no 9º ano, abrangendo proporcionalidade em geometria, razão entre segmentos e segmentos proporcionais, a divina proporção, proporcionalidade e escala, teorema de Tales, teorema da bissetriz, figuras semelhantes, polígonos semelhantes e semelhança e proporcionalidade em triângulos.

O termo proporção está intimamente ligado ao conceito elementar de razão[2], de forma que proporção é definida como sendo uma igualdade entre duas razões.

Estruturamos a nossa pesquisa apresentando, inicialmente na seção 1, conceitos fundamentais relacionados à teoria. Nessa seção, discutimos sobres alguns conceitos relevantes no processo argumentativo, tais como argumentação, explicação, justificação, prova e demonstração e também apresentamos a fundamentação teórica, onde apontamos três modelos de análise em relação à argumentação no processo de ensino, os de Toulmin (2006), de Balacheff (1988) e de Sales (2010)/Attie (2016), sendo que optamos pela utilização do terceiro modelo em nossa análise, em virtude de a pesquisa ser realizada com livros didáticos.

Na seção 2, apresentamos uma breve abordagem histórica da utilização do conceito de proporção, em relação às civilizações egípcia, babilônica, chinesa e árabe, entre outras. Pois consideramos relevante fazer um breve percurso sobre a utilização desse conceito na história, abordando algumas civilizações. Porque a ideia de proporção e suas aplicações remonta desde as mais antigas civilizações.

Na seção 3, evidenciamos a importância do conteúdo proporção e a resolução de exemplos com proporção, de acordo com as categorias de argumentação: Explicativa e Justificativa. Aponatamos que a compreensão da ideia de proporcionalidade é essencial para o entendimento de diversas situações do cotidiano principalmente na educação básica.

Na seção 4, apresentamos a metodologia, que pode ser caracterizada como qualitativa, com aspectos exploratório, documental e descritivo. Nesta seção, indicamos também um mapeamento e uma sucinta descrição de pesquisas sobre o ensino de proporção.

2 "comparação entre duas quantidades" (LIVY, VALE, 2011, p. 26).

Já na seção 5, apresentamos a análise dos livros didáticos sugeridos pelo guia do PNLD 2020, a qual realizamos uma análise em 11 livros didáticos de matemática, do 7º ano do ensino fundamental, com o objetivo de identificar as categorias de argumentação no ensino de matemática, em relação ao conteúdo de proporção, fundamentados nos conceitos de explicação e justificação apresentados por Balacheff (1988), e nas consequentes categorias de "argumentação explicativa" e de "argumentação justificativa" (ATTIE, 2016).

Por fim, apontamos os resultados e as nossas considerações finais em relação à argumentação no ensino de proporção nos livros didáticos. Assim, ao analisarmos os 11 livros didáticos, percebemos que é possível identificarmos a presença da Argumentação Explicativa na maioria (06) dos livros adotados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático.

Em alguns livros (02 livros), não foi possível identificar essas categorias de argumentação, devido a uma abordagem superficial em relação ao conteúdo em análise. Somente na minoria (03) dos livros analisados, pudemos identificar a presença da Argumentação Justificativa.

Além disso, defendemos a utilização de uma Argumentação Justificativa no ensino de matemática, pois considerando que, com a prática frequente e contínua de resolução de situações e exercícios matemáticos com a utilização de argumentos justificatórios, busca-se a compreensão dos processos que fundamentam os procedimentos a serem utilizados.

Ainda consideramos que a Argumentação Justificativa procura apresentar com argumentos lógicos fundamentados da compreensão do como e do porquê dos procedimentos e algoritmos utilizados, na qual a argumentação contribui para uma compreensão mais efetiva do conteúdo estudado.

Seção 1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Argumentação: conceitos fundamentais

A seguir, discutiremos alguns conceitos relevantes dentro do processo argumentativo, tais como os de argumentação, explicação, justificação, prova e demonstração.

Conforme aborda Duval (1993, *apud* Monteiro e Santos, 2013, p. 03), os conceitos de argumentação, explicação e justificação, apesar de estarem relacionados, são explorados e analisados de forma distinta. Segundo o autor, o vínculo fundamental entre argumentação e justificação é a sua finalidade, pois a argumentação é produzida com o objetivo de justificar uma afirmação ou tese. Assim, é possível distinguir, no processo justificativo, duas partes essenciais: a produção de argumentos e o exame da aceitabilidade dos argumentos produzidos. O autor defende que a produção de argumentos emerge da procura de resposta a perguntas do tipo “Por que afirmas que...?” ou “Por que respondes que...?”, enquanto as respostas às questões do tipo “Por que ocorre...?” requerem apenas uma explicação.

No que se refere à explicação, o autor optou pela perspectiva de Balacheff (1988), assumindo que, enquanto a explicação é um discurso, cujo objetivo é tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, fazendo, frequentemente, apelo à intuição, a justificação é a exposição das razões que legitimam determinada atuação, comportamento ou acontecimento.

Em nosso trabalho, também os termos prova e demonstração foram objeto da pesquisa. Constatamos que Balacheff (1988), ao pretender clarificar estes conceitos, expressou algumas de suas diferenças, defendendo que a demonstração, uma vez realizada, é aceita por toda a comunidade perante a qual é apresentada e a prova pode ser aceita por uma determinada comunidade e, no entanto, rejeitada por outra. O autor ainda diferencia que, enquanto a prova tem a aspiração de justificar, a demonstração pretende apenas validar.

Segundo Caldato *et al* (2017), em geral, os docentes adotam como sinônimos os termos argumentação, explicação e demonstração, e isto é refletido nas resoluções dos discentes. Os alunos não compreendem o significado de demonstração e interpretam os termos argumentação, explicação e demonstração como sinônimos, em sala de aula. Dessa forma, confirma-se uma consideração dos autores, de que o ensino da prova não faz parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica. Além sso, verificou-se disso, verificou-se a predominância do empirismo ingênuo[3] nas justificativas dos discentes em sua pesquisa, corroborando com as considerações apresentadas nos estudos de Souza (2009) e de Aguilar e Nasser (2012).

De acordo Nasser e Tinoco (2003, *apud* Caldato *et al*, 2017), após o Movimento da Matemática Moderna houve o abandono total do raciocínio e das demonstrações no ensino na Educação Básica. Constatou-se que a maioria das escolas adota um modelo de ensino onde o aluno é levado a resolver extensivas listas de exercícios repetitivos, que para ele não têm significado algum, dissociados de qualquer contexto, os quais consistem em aplicações diretas de fórmulas ou na repetição de técnicas apresentadas pelo professor.

Apesar do esforço de grande parte dos educadores, consideramos que ainda vigora no Brasil um ensino transmissivo, em relação à matemática. De acordo com alguns autores, entre os quais destacamos Fiorentini (1995), Attie (2018), e Cordeiro e Oliveira (2015), essa metodologia de ensino, marcada pela repetição e memorização de fórmulas e que é adotada em muitas escolas, não demonstra resultados positivos, sendo um dos fatores a influir no baixo desempenho dos discentes em várias avaliações de ranqueamento, como por exemplo, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e o PISA (*Programme for International Student Assessment* - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes). Um tipo de ensino em que, geralmente, apresentam-se os conteúdos a serem estudados, resolvem-se exemplos ou exercícios e aplicam-se listas de questões e exercícios de fixação para os discentes repetirem o procedimento apresentado e assim memorizarem o conteúdo "aprendido", desconsiderando as possibilidades da argumentação em sala de aula, que, ao nosso ver, deve ir além do "como fazer" (Argumentação Explicativa[4]) e buscar um entendimento do "porquê fazer" dessa maneira (Argumentação Justificativa[5]), e assim, proporcionando ao discente a possibilidade de construção do seu conhecimento.

Nesse contexto, consideramos que a formação do aluno na Educação Básica não garante que ele atinja o nível de prova intelectual[6] e, consequentemente, este

---

3 De acordo com Balacheff (1988), considerando o caráter hierárquico, o empirismo ingênuo é o primeiro tipo de prova e, portanto, é o mais simples. É quando, diante de uma afirmação, o estudante recorre a apenas alguns casos a ela relacionados, para concluir que é verdadeira.

4 Em termos gerais, podemos dizer que a argumentação explicativa é utilizada com a finalidade de apenas esclarecer, expor como se faz (ATTIE, 2016).

5 Tem o objetivo não somente de elucidar, mas de convencer. Além de mostrar como se faz, tem por finalidade convencer o aluno do porquê se usa tal algoritmo (ATTIE, 2016).

6 De acordo com Balacheff (1988), é o tipo de prova que abrange a aplicação de propriedades (conhecimentos teóricos).

aluno não estará apto a dominar a capacidade de argumentar e demonstrar os conteúdos matemáticos.

Deparamo-nos quanto ao significado para a argumentação nas aulas de matemática com diferentes perspectivas, já que

> a argumentação em Matemática é a expressão de um raciocínio possível, uma tentativa de justificar um enunciado ou conjunto de enunciados a partir daquilo que se crê como verdadeiro, um processo em que as inferências se apoiam principalmente sobre os conteúdos embora, na sua perspectiva, se possa mostrar que também nas demonstrações, contrariamente ao que defende Duval, as proposições não se afastam do conteúdo (BOAVIDA, 2005, p. 57).

Da mesma forma, outro autor aponta que

> empiricamente, o conceito de argumentação diz respeito às interações observadas, ao nível da sala de aula, que dizem respeito às explicações intencionais de raciocínio relativas a uma solução enquanto ou depois de ela se desenvolver (KRUMMHEUER, 1995, p. 231).

Consideramos que a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante não somente produzir alguma explicação, mas também justificá-la. Assim, um argumento matemático será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem apresentados.

Contudo, uma argumentação não deve ser confundida com uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação pode ser considerada mais próxima das práticas discursivas espontâneas, sendo regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.

1.2 Referencial teórico

Com o propósito de fazer uma exposição sobre as possibilidades em relação aos objetivos de nossa pesquisa, apresentamos três modelos de análise no que diz respeito à argumentação no processo educativo, os modelos de Toulmin (2006), de

Balacheff (1988) e de Sales (2011)/Attie (2016) e também exemplos de algumas pesquisas que utilizaram esses modelos.

1.2.1 Toulmin e o livro "Os Usos do Argumento"

Ao publicar em 1958, a primeira edição do livro "Os Usos do Argumento", Toulmin destaca que se trata de um conjunto de ensaios nos quais aborda elementos que considera relacionados a argumentos produzidos no cotidiano. Toulmin busca levantar problemas sobre a lógica, mais precisamente sobre como aplicar os argumentos lógicos na prática. Segundo ele, historicamente, a lógica seguiu um caminho de desenvolvimento que tomou uma direção que a afastou de questões mais práticas, acerca dos modos que os indivíduos se valem dos argumentos em diferentes campos. Assim, a área caminhou em busca de uma autonomia que a aproximou da matemática pura, livre de preocupações práticas. Com isso, o autor aponta que,

> de fato, como descobriremos, a ciência da lógica, em toda sua história, tendeu a se desenvolver numa direção que a afastava destas questões, para longe das questões práticas sobre o modo como temos ocasião de tratar e criticar os argumentos em diferentes campos, e na direção de uma completa autonomia, em que a lógica se torna estudo teórico autônomo, tão livre de preocupações práticas imediatas quanto certos ramos da matemática pura (TOULMIN, 2006, p. 03).

O autor propõe, então, pensar a lógica como "jurisprudência generalizada" (*Idem*, p. 10) e assim, busca comparar a lógica ao campo do Direito.

Ao fazer um paralelo entre processos judiciais e processos racionais, o autor indicou a existência de semelhanças em procedimentos e, por conseguinte, nas formas dos argumentos. Levando em conta tais semelhanças, fez reflexões sobre o emprego do que chamou de termos modais, com vistas a esclarecer as reais funções destes nos argumentos cotidianos. Para tanto, optou pelo termo "impossibilidade" e seus equivalentes ("é impossível", "não pode") e, posteriormente, pelo termo "probabilidade", tendo em vista a baixa e a alta preocupação filosófica, respectivamente, com tais termos.

Com os primeiros, examinados em uma variedade de situações práticas tomadas como exemplos e dentro das quais assumiam sentidos distintos (linguístico, fatídico, terminológico), o autor procurou entender em que circunstâncias e com que característica os termos modais eram usados ao se construir e se avaliar argumentos, e até que ponto variavam quando presentes em campos distintos e, além disso, quais os critérios de uso que estariam envolvidos. Então, observou que todas as afirmações, ainda que em casos variados e sob razões distintas, poderiam ser escritas conforme um padrão.

Nos usos de um termo modal, o autor identificou aspectos dentre os quais evidenciou o que chamou de força e critérios. A força do termo estaria associada às implicações da sua utilização, ao passo que os critérios corresponderiam às bases e razões que justificam essa aplicação, tornando o termo apropriado ou não a determinado contexto. Dentro da matemática, a força do uso do termo “impossível” aponta para a exclusão de uma determinada consideração. A referida exclusão se reveste de razões (critérios) que, por sua vez, podem mudar. Assim, “os critérios podem mudar cada vez que mudamos de um para outro uso, mas a força é sempre a mesma” (TOULMIN, 2006, p. 51, *apud* SÁ, 2021, p. 72).

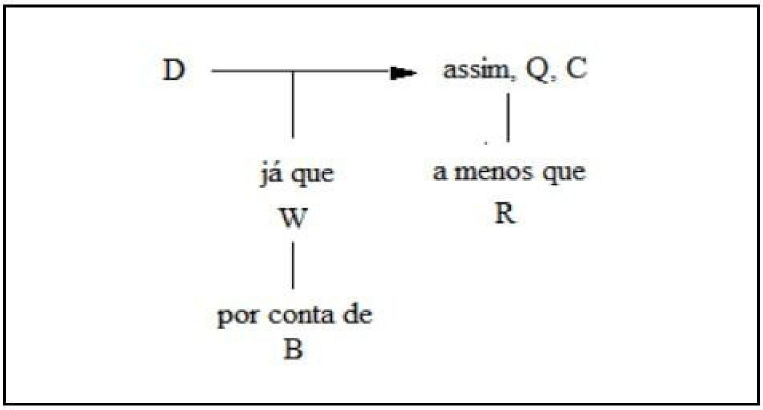
Toulmin (2006) coloca-se em condições de nos apresentar seu modelo de análise de argumentos, ao firmar a importância dos termos modais como qualificadores nas argumentações cotidianas. O seu modelo nos diz que, quando fazemos uma afirmação e somos levados a dizer em que estamos nos baseando (não em termos de procedimentos,
mas de justificativas) para fazer tal alegação, recorremos a dados (informações a partir das quais chegamos ao que alegamos). Dispomos, assim, de alguns elementos sempre presentes, como dados (D) e uma conclusão (C) entre os quais percebemos uma relação, mas precisamos de garantias (W) que estabeleçam uma ligação entre ambos, que permitam e justifiquem a existência desse movimento dos dados à alegação (conclusão). Assim, temos um esquema inicial sob a forma (D; W; logo C), por sua vez, capaz de representar argumentos de qualquer campo, mas, ainda insuficiente diante das especificidades das diversas situações (campos) em que os argumentos são produzidos. Então, haveria ainda a possibilidade de serem encontradas exceções ao que estava sendo alegado dentro da relação estabelecida entre dados, garantia e conclusão. Assim, outros dois elementos são tidos como marcadamente presentes nos argumentos práticos, os qualificadores modais, que indicam a força conferida pelos dados através da garantia à declaração (alegação, conclusão) feita; e as condições de refutação, ou seja, condições não alcançadas pela garantia, afinal a existência de exceções a uma afirmação que serve de garantia não é algo raro em declarações (situações) cotidianas. Por fim, um

elemento mostra-se fundamental e caracteristicamente próprio do campo de argumentação (das espécies de problemas, da situação) em que os argumentos são construídos: o apoio. Este, fortemente vinculado ao campo de argumento, corresponde ao suporte sobre o qual se fundamenta a garantia, não devendo ser confundido com ela, já que ambos possuem funções distintas dentro de uma argumentação. "Garantias são uma coisa, apoio, outra; apoio por meio de observação numérica é uma coisa, apoio por meio de classificação taxionômica é outra; e nossa escolha de um modo peculiar de expressão, embora talvez seja sutil, reflete bastante exatamente estas diferenças" (TOULMIN 2006, p.168, *apud* SÁ, 2021, p. 75).

Dessa forma, de acordo com Toulmin (2006), temos os seguintes elementos:

- Conclusão (C) – alegação feita.
- Dados (D) – "fatos aos quais recorremos como fundamentos para a alegação" (TOULMIN, 2006, p.140).
- Garantias (W) – “pontes” que autorizam a passagem dos dados às conclusões.
- Qualificadores (Q) – correspondem ao "grau de força que nossos dados conferem à nossa alegação em virtude de nossa garantia", (TOULMIN, 2006, *apud* SÁ, 2021, p. 75), ou seja, os qualificadores indicam a "força que a garantia empresta a uma conclusão", (*Idem*, p. 76), ao viabilizar a passagem dos dados a esta conclusão. Condições de Refutação (R) – "indicam circunstâncias nas quais se tem de deixar de lado a autoridade geral da garantia", (*Idem*, *Ibidem*).
- Apoio (B) – "por trás de nossas garantias normalmente haverá outros avais, sem os quais nem as próprias garantias teriam autoridade ou vigência. Estes avais podem ser tomados como o apoio (B) das garantias", (*Idem*, *Ibidem*). Assim, o modelo de Toulmin foi esquematizado de acordo com a figura 1:

Figura 1: Modelo de argumento de Toulmin



Fonte: Toulmin (2006, p.150).

Sasseron e Carvalho (2011) se basearam no modelo de argumentação de Toulmin (2006), afim de tecer uma relação entre a alfabetização cientifica e a argumentação. As autoras analisaram as discussões ocorridas em sala de aula e, a partir dos resultados obtidos, foi possível tecer relações entre estes dois temas e encontraram indícios da existência de um ciclo por meio do qual as argumentações ganham coerência e completude. Concluíram como uma característica interessante das argumentações uma relação bastante intensa e profícua entre o aparecimento e uso dos indicadores da alfabetização científica e o padrão de argumentação de Toulmin (2006).

Sá (2021) também adotou o modelo de Toulmin (2006), ao trabalhar com a argumentação de estudantes da EJA- ensino médio, no processo de aprendizagem de matemática, a partir das respostas e justificativas elaboradas pelos estudantes coletivamente, procurando identificar os elementos constituintes dos argumentos construídos.

Semelhantemente, Krummheuer (1995) investigou a prática da argumentação coletiva em sala de aula de matemática, analisando seus dados com base nas interações argumentativas e no modelo de análise de argumento proposto por Toulmin. A investigação do autor contribuiu para evidenciar as potencialidades desse modelo para analisar a natureza e a qualidade das comunicações de ideias em sala de aula de matemática.

1.2.2 Balacheff (1988) e os tipos de prova

Quanto às argumentações apresentadas por estudantes, a categorização de provas adotada por Balacheff (1988), configura-se em quatro níveis hierárquicos, partindo de ações efetivas, assumidas como provas para ações interiorizadas, ou seja, de provas pragmáticas (relacionadas à prática, à ação), para provas intelectuais (que abrangem a aplicação de propriedades, conhecimentos teóricos). Segundo Balacheff (1988), as provas estão classificadas em quatro níveis, sendo que três desses níveis são atribuídos às provas pragmáticas, que são provas baseadas em manipulações ou exemplos, como veremos a seguir:

- O **empirismo ingênuo**: Não aparecem indícios de processo de validação. Geralmente a afirmação é obtida a partir de alguns casos. Esse nível se caracteriza por verificar a validade de um enunciado por meio de exemplos. Considerando o caráter hierárquico, este é o primeiro tipo de prova e, portanto, é o mais simples. Quando, diante de uma afirmação, o estudante recorre a alguns casos, a ela relacionados, para concluir que a afirmação é verdadeira, ele estará recorrendo ao empirismo ingênuo.
- A **experiência crucial**: Esse nível se caracteriza pela verificação de uma proposição por meio de um caso no qual não se hesita em dizer que se a proposição é verdadeira neste caso, ela funcionará sempre. Distingue-se do empirismo ingênuo, pois na experiência crucial o exemplo utilizado é pouco particular e conhecido. A prova adotada corresponde a um caso bastante particular, presumindo-se que ao se confirmar a afirmação com este caso, conclui-se que ela será sempre válida.
- O **exemplo genérico**: Aqui há a explicação das razões da validade da afirmação por meio de um objeto seguida de uma generalização, ou seja, ainda é uma demonstração particular, mas que vale para toda a classe representada. Um representante é usado como prova recorrendo-se, a partir dele, a propriedades, características e estruturas gerais da classe à qual pertence. As transformações nesse representante são explicadas e assumidas como prova.

Enquanto isso, as provas intelectuais, que se caracterizam pelo distanciamento em relação à ação, e estão representadas pelo

- **Experimento mental**: Invoca a ação, interiorizando-a e afastando-se de sua realização sobre um representante particular. O estudante não recorre a casos específicos ou representantes para desenvolver a sua prova. Esta é conceitual e, assim sendo, são utilizadas propriedades e conhecimento teórico, sendo a experiência mental a prova intelectual propriamente dita, sob a ressalva de que não corresponde a uma demonstração matemática.

Alguns autores como, Gravina (2001) e Aguilar e Nasser (2012), por exemplo, discutindo Balacheff (1988), apresentam apenas 2 provas pragmáticas e o exemplo genérico como sendo uma transição entre as provas pragmáticas e intelectuais, dado que o exemplo genérico "consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade, mesmo fazendo uso de um representante particular" (GRAVINA, 2001, p. 67).

Ainda sobre os tipos de provas segundo Balacheff (1988), destacamos DaSilva *et at* (2015), que, ao analisarem e classificarem as provas de alunos do ensino médio, utilizam-se da tipologia de Balacheff (1988), defendendo que as

> provas matemáticas devem também ser discutidas em sala de aula, visto que compreender o porquê uma afirmação é verdadeira e não apenas a aceitar por meio de um ou mais exemplos. Assim, pode-se favorecer o aprendizado e a compreensão dos alunos para uma matemática que seja útil e interessante (DASILVA *et al*, 2015, p. 09).

Os autores, classificando as provas feitas por alunos, observaram uma grande quantidade de dados insuficientes ou de alunos que não fizeram as demonstrações, o que, de acordo com os mesmos, provavelmente demonstra a grande dificuldade que é, para os estudantes, fazer uma demonstração. Assim concluíram, a partir dos dados analisados, que a maioria das provas realizadas pelos alunos fica entre empirismo ingênuo e experiência crucial. Os autores afirmam que,

> com o objetivo de investigar a visão de alunos e professores sobre argumentação e demonstração matemática, à luz da tipologia de provas de Balacheff (1988), aplicamos um questionário a professores da Educação Básica do interior do Estado de São Paulo. A partir da análise dos questionários, selecionamos duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, de professores e escolas públicas distintas que resolveram um teste para avaliar o nível de prova desses alunos. Dentre os resultados obtidos, verificou-se que, em geral, os docentes adotam como sinônimos os termos argumentação, explicação e demonstração, e isto é refletido nas resoluções dos discentes, que apresentam o nível de prova classificado como empirismo ingênuo. Acreditamos que os cursos de licenciatura devem proporcionar aos futuros professores a oportunidade de conceber a argumentação e demonstração como um recurso metodológico a ser utilizado em sala de aula, a fim de criar um ambiente favorável à exploração-investigação da matemática (DASILVA *et al*, 2015, p. 09).

Com o objetivo de investigarem a visão de alunos e professores sobre argumentação e demonstração matemática, à luz da tipologia de provas de Balacheff (1988), Caldato *et al* (2017) aplicaram um questionário a professores da

Educação Básica do interior do Estado de São Paulo. A partir da análise dos questionários, selecionaram duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, de professores e escolas públicas distintas e aplicaram um teste para avaliar o nível de prova desses alunos. Dentre os resultados obtidos, verificaram que, em geral, os docentes adotam como sinônimos os termos argumentação, explicação e demonstração, e isto é refletido nas resoluções dos discentes, que apresentam o nível de prova classificado como empirismo ingênuo.

No seu trabalho investigativo, Souza (2009) pesquisou argumentação e provas em relação ao conteúdo de Geometria. O trabalho centrou-se na análise de uma questão que solicitava a verificação e a apresentação de uma justificativa dos alunos da Educação Básica para a seguinte afirmação: "Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°". Os resultados da pesquisa evidenciaram que mais de 50% dos alunos pesquisados classificaram a afirmação da questão como verdadeira, e em relação às justificativas, a preferência por argumentos empíricos (verificações para alguns casos) se destacou, sendo poucos os que justificaram suas respostas com o uso de propriedades.

1.2.3 Argumentação Explicativa e Justificativa

Fundamentados nos conceitos de explicação e justificação apresentados por Balacheff (1988), inicialmente Sales (2010) aponta as ideias de "argumentos explicativos " e "argumentos justificatórios" e, depois, Attie (2016) caracteriza-os como categorias de argumentação, mediante suas finalidades, explicativa ou justificativa.

> A partir da perspectiva de Balacheff (1988), enquanto a explicação supõe um discurso com o objetivo de tornar inteligível uma proposição ou um resultado, o termo justificativo compreende uma exposição das razões que os legitimam. Nesse contexto, chegamos [...] aos conceitos de "argumentação explicativa" e "argumentação justificativa". Em termos gerais, podemos dizer que, enquanto a argumentação explicativa é utilizada com a finalidade de apenas esclarecer, a argumentação justificativa tem o objetivo não somente de elucidar, mas de convencer. Nossa hipótese é a de que, no processo de ensino de matemática, o modo de argumentação mais utilizado é o primeiro (ATTIE, 2016, p. 2262).

Assim, podemos apontar que, na argumentação explicativa, a finalidade do professor é simplesmente expor como se faz, o que, no caso da matemática, se resume a exibir e treinar as fórmulas necessárias para resolver problemas, sem contextualizações históricas ou sociais e/ou sem um fundamento lógico plausível para a utilização dessas fórmulas. Diferentemente, a argumentação justificativa, além de mostrar como se faz, tem por finalidade “convencer” o aluno do porquê se usa tal procedimento e para isso irá apresentar ao mesmo todo processo de fundamentação lógica do algoritmo exibido. O termo “convencer”, ao qual nos referimos aqui, não deve ser percebido com a intenção de persuadir o estudante, mas sim de lhe proporcionar uma compreensão, a partir de argumentos matematicamente fundamentados, do uso do algoritmo.

Dessa forma, podemos afirmar que a argumentação justificativa visa à convicção dos alunos nos procedimentos matemáticos pautada em razões lógicas e não em outras razões, como por exemplo, sua crença na autoridade do professor ou na efetividade dos algoritmos.

Attie e Krpan (2020), buscando apresentar semelhanças e diferenças nos processos de argumentação no ensino da disciplina de matemática, relacionados aos principais livros didáticos adotados em estados/províncias do Brasil (Sergipe) e do Canadá (Ontário), defenderam um ensino de matemática em que a argumentação justificativa possua um papel relevante e que possa levar o indivíduo a uma formação crítica e consciente, e optaram pela escolha dos seguintes temas ou conteúdos matemáticos para análise: os critérios de divisibilidade, as expressões numéricas, a divisão de frações, as operações entre inteiros e o cálculo de áreas, por serem frequentemente considerados “delicados” em relação às suas demonstrações ou causas, quando vistos em sala de aula, vistos como obstáculos dentro dos processos de ensino e de aprendizagem. Os resultados apresentados apontam que no Canadá há um uso mais frequente da busca de padrões e regularidades e do incentivo ao raciocínio, apesar da falta dessa abordagem em relação a temas como os critérios de divisibilidade e as expressões numéricas, por exemplo.

Santos, Nascimento e Attie (2020), ao abordarem a argumentação de licenciandos e professores de matemática, defenderam a argumentação justificativa no ensino dos conteúdos matemáticos, tendo como objetivo apresentar as categorias de argumentação utilizadas por atuais e futuros professores de matemática, no ensino dos conteúdos de análise combinatória e de equações do 1° grau. Fundamentando teoricamente em Sales (2010) e Attie (2016), os autores indicaram que os professores apresentaram, predominantemente, a categoria explicativa da argumentação, enquanto que os licenciandos, em sua maioria, demonstraram domínio da modalidade justificativa da argumentação.

Após fazermos esse percurso sobre três modelos de análise em relação à argumentação no processo educativo, os modelos de Toulmin (2006), de Balacheff (1988) e de Sales (2010)/Attie (2016), optamos pela utilização do último em nosso trabalho. Nossa escolha se deve principalmente ao fato de que nossa pesquisa se baseia na análise de argumentos apresentados em livros, sem a possibilidade de uma interatividade, aspecto que poderia aparecer se tivéssemos diálogo entre indivíduos, ainda que esse fosse mediado por documentos como cadernos ou avaliações, por exemplo.Assim, em relação às categorias, defendemos a utilização da argumentação justificativa no ensino de matemática, ou seja, o uso de fundamentos lógicos para os procedimentos que são realizados nas aulas e que possam proporcionar aos discentes um entendimento, a partir de argumentos matematicamente fundamentados logicamente, buscando a compreensão do “como fazer” e do “porquê fazer” desse modo. Consideramos que o uso da argumentação justificativa no ensino da matemática visa a ampliação dos conhecimentos dos estudantes, pois, à medida que compreendem o processo, eles podem apresentar maior domínio do conteúdo estudado em que, além de saberem empregar fórmulas, conseguem ampliar e validar, com justificativas lógicas, seus raciocínios. Além disso, esse tipo de ensino pode estimular os alunos a engajarem-se em seu processo de aprendizagem de forma a contribuir para condutas mais reflexivas e questionadoras, no sentido de uma emancipação para a tomada de decisões e possibilitando a busca de variadas estratégias para resolução de situações-problema, tanto em sala de aula, como em sua vida cotidiana.

Em suma, ratificando o que já afirmamos, enquanto a Argumentação Explicativa é utilizada com a finalidade de apenas esclarecer um procedimento, convencendo o aluno ou mostrando “como” se resolvem os problemas e questões matemáticas, a Argumentação Justificativa tem o objetivo de convencer, buscando uma convicção lógica, apresentando não apenas o “como fazer”, mas também o “porquê fazer dessa maneira”.

Seção 2: PROPORÇÃO: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA

A ideia de proporção e as aplicações desse conceito são bastante antigas. Consideramos relevante fazer um breve percurso sobre a utilização desse conceito na história, abordando algumas civilizações.

2.1 Egito

Por volta do início do terceiro milênio a.C. o Egito transformou-se em uma nação singular, graças ao desenvolvimento da agricultura, que se deu a partir desse período. A administração dos territórios e dos impostos fez surgir a necessidade de calcular, registrar e reorganizar a divisão das terras, principalmente após as cheias do rio Nilo. Além da agricultura, o rio foi uma das mais importantes fontes de água para os egípcios e ainda permitiu a intensificação do transporte de pessoas e de mercadorias e, consequentemente, do comércio na região.

Com a compreensão a respeito da época da estação das enchentes do rio Nilo e a consequente elaboração de um calendário, por volta do ano 3000 a.C., além do fato de que os egípcios já tinham desenvolvido um sistema de escrita chamado de hieróglifos, nos traz alguns dados sobre essa civilização.

Ao passarem a utilizar o papiro para fazerem seus registros, os egípcios desenvolveram outro sistema de escrita, chamada de hierática, que foi utilizado até por volta de 800 a.C. Vale ressaltar que

> muito de nossa informação sobre a matemática egípcia vem do Papiro Rhind ou Ahmes [...], mas há também outras fontes. Além do Papiro Kahun, há um Papiro de Berlim, duas pranchas de madeira de Akhmin (Cairo) de cerca de 2 000 A.C., um rolo de couro contendo listas de frações unitária e um importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou [...]. O Papiro de Moscou tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto de largura. Contém vinte e cinco exemplos, quase todos da vida prática e não diferindo muito dos de Ahmes (BOYER, 1974, p.14).

Entre os vários temas pelos quais a matemática egípcia é conhecida, dois deles são as frações unitárias (frações com numerador igual a 1) e as proporções. “As frações eram necessárias porque sendo, por exemplo, os salários pagos em pão e cerveja, era, muitas vezes, preciso dividir esses bens por diferentes trabalhadores” (FERRET, 2007, p. 46). Essa divisão a que se refere o autor, era feita de maneira equitativa ou proporcional.

No papiro de Ahmes, por exemplo, aparecem vários problemas envolvendo proporções[7] e, além disso, um dos mais importantes resultados egípcios, a regra da falsa posição, permite o encontro da solução de equações do 1º grau a partir do cálculo da proporção realizada envolvendo a primeira hipótese de resposta.

2.2 Babilônia

A Babilônia era uma das cidades da Mesopotâmia, região ao sul da Ásia, situada entre os rios Tigre e Eufrates, na área onde atualmente se encontra o Iraque.

Entre 3500 a.C. e 3300 a.C. ocorreu um grande desenvolvimento entre os povos do Sul da Mesopotâmia, em especial nas cidades de Ur e Uruk, intensificando-se o sistema de seus registros, e assim, os antigos sistemas foram se desenvolvendo num complexo de sistema numérico de escrita, evoluindo para a escrita cuneiforme (em forma de cunha), na qual eram registrados os conhecimentos em placas ou tabletas de argila.

Entre as diversas placas babilônias encontram-se registrados diversos conhecimentos matemáticos, dos quais destacamos as proporções, que são visualizadas nos cálculos de perímetros e áreas de figuras geométricas, assim como na semelhança de triângulos, pois "os babilônicos também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais" (EVES, 2011, p. 61). Além disso, também já conheciam a proposição, hoje conhecida como o teorema de Tales[8] , "apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônicos a usá-la" (BOYER, 1974, p. 30).

2.3 Grécia

No estudo da matemática grega, consideramos dois grandes períodos, ou divisões históricas, correspondentes a diferentes realidades políticas e geográficas, no entanto meramente indicativas, afim de situarmos nesse contexto. São eles: o período Clássico e o período Alexandrino, pois a matemática da Grécia antiga não apresenta uma uniformidade. Conforme aponta Boyer (1974), mesmo num dado tempo e lugar do mundo grego haviam marcadas diferenças no nível de interesses e

7 Problema 62: proporções, sobre metais preciosos e o seu peso; Problemas 63 e 65: divisão proporcional de pães por um número de homens; Problema 67: proporção de gado devido a imposto; Problema 68: divisão proporcional de cereais entre grupos de homens; Problemas 69 a 78: pesos de pão e cerveja e proporção inversa.

8 Na verdade, um caso particular: Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes proporcionais sobre uma transversal, também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

realização matemática, de forma semelhante ao que acontece com a nossa civilização hoje.

2.3.1 Grécia: período clássico e Alexandrino

Considerado como Clássico o primeiro período, que remete aos séculos VI, V e IV a. C., a cidade de Atenas pode ser situada como o centro da Grécia, na qual encontravam-se a Academia de Platão e o Liceu de Aristóteles, sem desconsiderarmos a importância de cidades ligadas a outras escolas, tais como Mileto, Crotona e Eleia. Neste período, estão incluídos os trabalhos de Euclides, com destaque para o livro, "Os Elementos", uma obra magistral, composta por 13 livros no qual Euclides reuniu os conhecimentos matemáticos da época, referentes a aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida. As centenas de edições deste livro, que, segundo Silva (2012), dominaram o ensino da Geometria até ao século XX, serviram para que o modelo axiomático servisse como base, tanto para a Matemática, como para a ciência em geral.

O segundo período, chamado de Alexandrino, corresponde ao período que vai do séc. III a. C. até o séc. IV d. C., e o nome tem origem no mais importante centro intelectual da época, a cidade de Alexandria, no Egito.

Do primeiro período, o Clássico, nenhum documento original teria chegado até os dias atuais. Assim, as obras dessa época são conhecidas por referências ou comentários escritos já durante o segundo período, Alexandrino. Deste período chegou até nós uma quantidade significativa de textos relacionados à matemática; no entanto, estes foram sendo copiados, traduzidos e reeditados ao longo do tempo e, possivelmente, esses escritos teriam sofrido alterações em relação aos textos originais, introduzindo assim, novos resultados, reordenando proposições e até considerando outros casos nas demonstrações matemáticas.

Em relação à teoria das proporções, vale ressaltar dois aspectos da matemática da Grécia. O primeiro aspecto é o de que, na ausência do conceito de função, usava-se a proporcionalidade para a resolução de equações, pois o referido conceito só foi desenvolvido e consolidado a partir do século XVIII. Já o segundo aspecto refere-se à noção de razão que está presente no próprio conceito grego de número (*arithmós*).

No livro “Os Elementos de Euclides”, destacamos o Livro VII, por ser dedicado à teoria das proporções numérica ou pitagórica, no contexto de números inteiros (positivos) e o Livro V, que é dedicado à nova teoria elaborada por Eudoxo, matemático, astrônomo e filósofo grego ligado à Academia platônica. Inclusive, o tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no livro V. Assim, a descoberta da incomensurabilidade, pelos pitagóricos[9] , foi uma grande surpresa aos gregos, ocasionando uma reformulação da sua teoria de razões e proporções.

A teoria da proporcionalidade, é apresentada através da doutrina dos quatro Elementos Materiais: Fogo, Ar, Água e Terra. O Fogo era considerado um elemento divino, próprio aos corpos celestiais, enquanto o Ar e a Água eram considerados elementos de transição, referindo-se, respectivamente, à atmosfera e à superfície da terra e a Terra, vista com um elemento mundano, próprio ao centro do universo.

De acordo com Erickson e Fossa (2006), para Platão, a proporção Fogo/Ar; Ar/ Água e Água/Terra, seria de 3840:2880; 2880:2160 e 2160:1620, obtendo-se assim, a saúde física e mental através da proporção correta dos Elementos Materiais na constituição da pessoa. Em relação à proporção, um dos autores afirma que, de acordo com Platão,

> não será possível explicar aqui todos os detalhes de como essa proporção é deduzida, mas devemos mencionar a estrutura matemática que fundamenta toda a filosofia e, portanto, boa parte da filosofia europeia perante os séculos. Trata- se da Linha Dividida, cuja geração é descrita por Platão na seguinte maneira: um segmento de reta é dividido em alguma razão e as partes resultantes são também divididas nessa mesma razão (FOSSA, 2011, p. 4-5).

Conforme aponta Kistemann (2008), Platão ressalta a importância da Matemática para a formação do espírito a fim de depreendê-lo das coisas sensíveis, mutáveis, sobre as quais o conhecimento é impossível. Somente as ideias, imutáveis e eternas, podiam realmente ser conhecidas. Ainda para Platão, um dos aspectos da beleza era a proporção, onde o belo estaria pautado na noção de perfeição, de verdade. Para ele, o belo estava relacionado com a ideias de proporcionalidade, em que a beleza existiria em si mesma, no mundo das ideias, separada do mundo sensível (o mundo concreto), ou seja, do mundo real.

De acordo com Fossa (2011), para os pitagóricos, “a decomposição da própria matemática no *quadrivium* (os quatro estudos matemáticos), são: Astronomia, Geometria, Aritmética e Música”, e podemos apontar aí novamente a presença do conceito de proporção, já que os harmônicos musicais somente se expressariam a partir de proporções adequadas.

---

9 “... as palavras de Euclides na abertura do Livro X dos Elementos, acompanhadas de uma reflexão. Definição: Dizem-se grandezas comensuráveis as que se medem pela mesma medida, e incomensuráveis aquelas das quais não é possível nada tornar-se medida comum” (GONÇALVES & POSSANI, 2010, p. 16).

2.3.2 Nicômaco e Boécio

A definição de proporção aparece em Nicômaco, no capítulo XXI do livro 2, segundo aponta Silva (2012):

> no seu sentido próprio, proporção é a combinação de duas ou mais razões. Na sua definição geral, proporção é a combinação de duas ou mais relações, mesmo que não estejam sob a mesma razão, mas sob uma diferença ou outra qualquer. (SILVA, 2012, p. 44)

Assim, Nicômaco define proporção como sendo um sistema de razões, por um lado, e por outro como sendo um sistema de relações. Baseado no clássico autor grego, Silva (2012) diferencia os três tipos de proporção:

- Proporção aritmética é quando três ou mais termos são dispostos sucessivamente e a diferença entre os termos consecutivos é a mesma, embora a razão entre os termos não seja a mesma: **b – a = c – b**;
- Proporção geométrica é quando três ou mais termos estão dispostos sucessivamente e os termos consecutivos nunca diferem na mesma quantidade, mas sim na mesma qualidade da razão: $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$
- Proporção harmônica é a razão entre o maior termo e o menor é igual à razão entre a diferença entre o maior termo e o do meio e a diferença entre o do meio e o menor termo: $\frac{c}{a}=\frac{c-b}{b-a}$

De acordo com o autor, os conceitos de proporção e proporcionalidade são apontados por Boécio em seu livro II, capítulo XV:

> A proporção é, pois a associação de dois, de três ou de um número qualquer de razões numa única razão, mesmo se não são constituídas pelas mesmas quantidades, ou as mesmas diferenças. (...) uma razão é uma relação recíproca, uma espécie de sequência de dois termos, cuja reunião dá uma proporção porque é a reunião de razões que faz a proporção (SILVA, 2012, p.74).

Como podemos perceber, o termo “relação”, é recorrente para designar uma proporção tanto por Nicômaco quanto por Boécio ao tratarem do conceito de proporcionalidade.

2.3.3 Tales

Ainda em relação à proporção na Grécia antiga, considera-se, conforme, (BOYER, 1974, p. 35) que “Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas”. O que atualmente chamamos de “Teorema de Tales”, que pode ser descrito da seguinte forma:

“Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais”.

Um fato clássico sobre Tales é que ele teria medido a altura da pirâmide de Quéops, usando seus conhecimentos sobre geometria e proporcionalidade. Tales teria fincado uma estaca na areia, medindo as respectivas sombras da pirâmide e da estaca em uma determinada hora do dia e estabelecendo uma proporção, representada da seguinte forma: $\frac{altura \text{ da pirâmide}}{sombra \text{ da pirâmide}} = \frac{altura \text{ da estaca}}{sombra \text{ da estaca}}$

De acordo com Ávila (2001), mesmo antes e durante o período helenístico, não havia fórmulas como as que conhecemos hoje e tudo era dado em termos de proporções.

2.3.4 A proporção e a música

Finalmente, cabe aqui ressaltar a relação histórica entre a música e a proporção na Grécia antiga. Conforme Abdounur (2012), desde a antiguidade a matemática e a música possuem vínculos, manifestados no assim conhecido experimento do monocórdio[10] , atribuído aos pitagóricos. Esse experimento estabeleceu a relação inversamente proporcional ao que conhecemos hoje de altura musical, comprimento de corda, correspondência entre intervalos musicais e razões matemáticas verificadas em uma corda – oitava: 1:2, quinta: 2:3 e quarta: 3:4 – mas ainda a consequência natural de que a composição de intervalos musicais está relacionada à composição de razões matemáticas.

O autor afirma que

> a teoria pré-eudoxiana de razões e proporções é uma herança da teoria musical pitagórica, neste contexto, a ideia de composição de razões é a tradução matemática, analógico-estruturalmente falando, da composição de intervalos musicais contíguos, hipótese histórica (ABDOUNUR, 2012, p. 391).

10 Constituído por uma corda fixa nas extremidades por dois cavaletes, contendo um terceiro cavalete móvel, que poderia ser colocado em qualquer parte da corda, alternando a porção vibrante, muito provável inventado pelo próprio Pitágoras (BARNABÉ, 2001, p. 22).

A música, na Grécia antiga, ainda fazia parte da rotina diária das pessoas, da cultura, do lazer e das festividades, bem como podia ser contemplativa, dedicada aos deuses em rituais e oferendas especiais.

2.4 China

As histórias da matemática em geral dedicam pouco espaço às contribuições chinesas, no entanto, são inegáveis suas contribuições no que diz respeito ao conhecimento matemático. Segundo Eves (1995), o mais importante dos textos de matemática dos chineses antigos, é o *K'ui-ch'ang Suan-shu*, ou "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática", que data do período *Han*[11] . No entanto, é bem provável que existam outras obras que tratem da matemática da antiga China. Os "Nove Capítulos" configuram-se em apresentar uma síntese do conhecimento matemático da época, contendo principalmente cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequência de problemas aplicados. Na obra, constam cerca de 246 problemas relacionados com agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. Entre os conteúdos abordados podemos destacar alguns relacionados ao conceito de proporção, tais como: Porcentagem, Regra de três, Regra de sociedade, Regra de falsa posição e Triângulos retângulos pitagóricos, entre outros.

2.5 Índia

Sabe-se pouco sobre o desenvolvimento da matemática indiana antiga, em virtude da falta de fontes históricas autênticas. Segundo Eves (1995), a fonte histórica preservada mais antiga que se tem registro são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro[12] . De acordo com Boyer (1974, p. 157-158), "a matemática indiana é frequentemente descrita como intuitiva", corroborando com Eves (1995, p. 259), que afirma que a matemática indiana "era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração ou uma dedução; a característica mais importante da matemática grega era sua insistência com as demonstrações rigorosas".

Em relação à proporção na história da matemática antiga da Índia, encontramos a presença da regra de três, que

11 A Dinastia Han (206 a.C.-221 d.C.) foi a segunda dinastia da China Imperial. Dinastia Han que criou um império que iria durar, com um pequeno hiato, até 221 d.C. (EVES, 1995, p. 235/242).

12 Um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no atual Paquistão (EVES, 1995, p. 247).

> provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bháskara a tratavam por essa mesma designação. Durante séculos, a regra mereceu a mais alta consideração da parte dos mercadores. Ela era enunciada mecanicamente, sem nenhuma justificação, e seus vínculos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV (EVES, 1995, p. 263).

Observamos que, nesse molde, a proporção, ou a regra de três, era descrita mecanicamente, ao passo que essa relação só foi reconhecida como uma proporção como conhecemos hoje, muitos séculos depois.

Vejamos como o matemático e astrônomo Brahmagupta (598-668 d.C.) considerado o mais eminente matemático indiano do século VII, enunciava a regra, de acordo com Eves (1995, p. 263), “Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto”. Uma aplicação dessa regra de três é apresentada por Bháskara (1114-1185 d.C.), da seguinte forma: “Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?”.

Neste caso, 3/7 e 9, que têm a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e 5/2 que correspondem aos dois palas e meio, ou seja, 2,5 é o Fruto. A resposta, ou Produto, é dada por (9).(2,5)/(3/7) = 52 ½. Hoje, considerando o conceito de proporção como uma “igualdade entre duas razões”, este exemplo poderia ser descrito assim:

$$\frac{2{,}5 \times 9}{\frac{3}{7}} = 52{,}5$$

2.6 Árabes

O desenvolvimento da Matemática teve contribuições dos árabes, desde a preservação e aperfeiçoamento do sistema indo-arábico, até a criação das tábuas trigonométricas de equações cúbicas e também em relação ao conceito de proporcionalidade, pois os árabes utilizavam a regra da falsa posição para resolver problemas algébricos.

Em relação a matemática árabe,

> por volta do ano 600 d.C. as conquistas do Império Islâmico, que absorveram as culturas dos conquistados, tornam Bagdá o novo

centro da matemática. No século IX d.C. muitas obras da antiga Grécia, da Índia, da Pérsia e da Mesopotâmia foram estudadas e traduzidas pelos árabes e sua principal contribuição refere-se à álgebra. Conforme Eves (1995), é do matemático e astrônomo al-Khowarizmi, que viveu entre os séculos VIII e IX, a primeira aritmética árabe que se conhece, à qual seguiram-se muitas outras aritméticas. Estas ensinavam regras de cálculo com os numerais e algoritmos hindús, a regra da falsa posição, frações e regra de três (BERNAL, 2004, p. 33)

Assim, observamos que os árabes desenvolveram conhecimentos sobre a proporção, principalmente relacionados à regra da falsa posição e ao uso da regra de três. Ainda de acordo com Boyer (1974, p. 176) “Os árabes claramente se sentiam mais atraídos pela álgebra e pela trigonometria que pela geometria, mas um aspecto da geometria tinha um fascínio especial para eles – o quinto postulado de Euclides”.

Omar Khayyam, que viveu por volta do século XI, foi o autor da obra Álgebra e, segundo Boyer (1974), expôs uma teoria elaborada sobre proporções, pois acreditava que Euclides no seu livro V não conseguiu exprimir a essência de uma razão, como a média de uma grandeza por outra. Ele comparava razões, decompondo-as em frações contínuas e verificando se elas eram comensuráveis.

2.7. Europa

Segundo Eves (1995), a partir do século V d.C., com a queda de Roma ante os invasores “bárbaros”, começou o processo de transformação da Europa de civilização antiga em civilização medieval. Após o colapso do Império romano, a Europa dividiu-se em oriental e ocidental, sendo que neste período muitos intelectuais e inventores deixaram de se interessar pela ciência pura e matemática.

Somente a partir do século XV, a Europa renasce na arte, no saber e a matemática floresce, destacando-se diversos eruditos e intelectuais. Assim, no Renascimento,

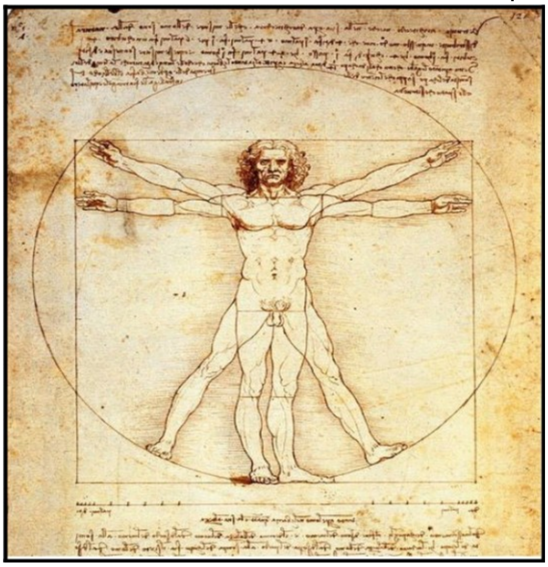
figuram Leonardo Fibonacci (c. 1175- 1250), Leonardo da Vinci (1452- 1519), Michelangelo (1475-1564) e Benvenuto Cellini (1500-1571). O ressurgimento da cultura ocidental antiga logo se alastrou pelo norte da Europa, onde deflagrou um novo interesse pela ciência e pela arte, e os frutos logo surgiram no trabalho do astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) e no de seu sucessor dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) (Idem, p. 288).

Diversos matemáticos se destacaram durante esse período, no desenvolvimento da matemática na Europa do século V ao século XVI, assim como, no decorrer dos séculos XVII, XVIII, XIX em diante. Dentre os principais destacamos Leonardo da Vinci e Leonardo Fibonacci. A figura

> do homem vitruviano, foi imortalizada pelos desenhos magistrais de Leonardo da Vinci (1452-1519). Todavia, foi o italiano Vitruvius (século I a.C) quem afirmou em sua obra Arquitetura que as medidas do corpo humano são proporcionais. (...) Vitrivius afirma, entre outras, as seguintes proporcionalidades: A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura de um homem. A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem. O comprimento da mão é um décimo da altura de um homem. A altura da orelha é um terço da longitude da face. A distância do topo da cabeça para os mamilos é um quarto da altura do homem (DA SILVA, 2014, p. 52).

Leonardo da Vinci teria sido o primeiro a representar adequadamente o homem vitruviano com base na razão áurea, inscrito num círculo e num quadrado, no qual o centro é o seu umbigo. No entanto, Vitruvius afirma na obra *De archictetura libridecem,* as medidas proporcionais do homem vitruviano.

Figura 2: O homem vitruviano e as medidas proporcionais



Fonte: https://ipemsp.wordpress.com/tag/marcus-vitruvius-pollio/. Acesso: 01 mar 2022

Em relação a Fibonacci (1175-1250), o matemático utiliza, em sua obra *Liber abaci*, o método da falsa posição para a resolução de equações lineares e quadráticas e, de acordo com Eves (1995), a regra de três aparece ilustrada no seguinte problema: “Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores? (EVES, 1995, p. 316) .

Segundo Bernal (2004), diversos outros matemáticos destacaram-se durante o renascimento, no estudo da proporcionalidade, como o inglês Bradwardine (1290–1349), o francês Nicolau de Oresme (1325–1382), conhecido como Nicole de Oresme, o influente matemático Regiomontanus (1436-1476), o italiano Luca Pacioli (1445-1514) e também outros matemáticos como Chuquet (1445-1500), Stifel (1486-1567) e Tartaglia (1499-1557).

Após esse sucinto relato sobre a história da proporção, prosseguimos com exemplos de como poderia ser a apresentação do tema, de acordo com cada categoria de argumentação.

Seção 3: O CONTEÚDO E AS CATEGORIAS DE ARGUMENTAÇÃO

A compreensão da ideia de proporcionalidade é essencial para o entendimento de diversas situações do cotidiano que estão relacionadas com a comparação entre razões ou mesmo entre grandezas. Na educação básica, apesar da proporcionalidade ser um conteúdo abordado no 7º ano e aprofundado no 9º ano, já vem sendo trabalhado em séries anteriores, em que aparecem resolução de problemas multiplicativos, estudos de porcentagem, semelhança de figuras, análise de tabelas, gráficos e funções.

Diversos outros temas como por exemplo as regras de três, os juros simples, equivalência de áreas, perímetros, ampliação e redução de figuras planas, escalas, entre outros, são conteúdos nos quais a proporcionalidade é pré-requisito para a resolução de exercícios e problemas.

A seguir, apresentaremos um exemplo de uma questão envolvendo proporção, a partir de uma concepção de argumentação explicativa e a mesma questão sendo resolvida sob a categoria de argumentação justificativa.

Questão proposta: Sabendo que os números 6, 24, 5 e x formam, nessa ordem, uma proporção, determine o valor de x. Fonte: Giovanni Jr e Castrucci, (2018).

3.1 Argumentação Explicativa

Inicialmente, apresentaremos o exemplo de acordo com a categoria de argumentação explicativa, em que há uma preferência pelo ensino do procedimento, sem preocupação em relação à compreensão do processo.

Resolução 1: *Dados três números racionais a, b, c, não nulos, denomina-se quarta proporcional desses números um número x, tal que,* $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ *, e assim, de acordo com a propriedade fundamental das proporções, (de modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa):* $\frac{6}{24}=\frac{5}{x} \Rightarrow$

$6.x = 24.5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 120 \quad \Rightarrow \quad x = 20$

Logo, a quarta proporcional é igual a 20

3.2 Argumentação Justificativa

Agora apresentaremos, a mesma questão, sendo resolvida na perspectiva de argumentação justificativa, em que há a priorização da compreensão do processo, além da apresentação do procedimento, ou seja, se mostra como se faz e também porquê se faz daquele modo. Assim, temos:

Resolução 2: $\frac{6}{24}=\frac{5}{x}$ **.** *Neste caso, temos uma igualdade entre os dois membros de uma equação, que na perspectiva da argumentação utilizamos o princípio multiplicativo e o da inversibilidade que estão associados a resolução de situações envolvendo expressões algébricas*.

Vamos multiplicar os dois membros da equação pelo mesmo número 24, (pois é esse o único número que nos serve para "transformar" o primeiro denominador)

$$\frac{6}{24}.24=\frac{5}{x}.24 \quad \Rightarrow \quad 6.1=\frac{5}{x}.24$$

Da mesma forma, agora vamos multiplicar os dois membros da equação pelo mesmo número, x (que deve ser diferente de zero), *pois não existe divisão por zero (pensando na divisão entre a e b, como sendo "quantos bs cabem em a, como responder à questão: quantos zeros cabem em qualquer número?*

$$6.x=\frac{5.24}{x}.x \quad \Rightarrow \quad 6.x=5.24.1 \quad \Rightarrow \quad 6.x=5.24$$

*Por fim, vamos dividir os dois membros da equação pelo mesmo número, 6 (pois esse o único número que nos serve para "**transformar**" o fator do primeiro membro e "isolar" o que nos interessa encontrar: x.*

$$6.x=5.24 \quad \Rightarrow \quad \frac{6.x}{6}=\frac{5.24}{6} \quad \Rightarrow \quad 1.x=\frac{5.24}{6}$$

Finalmente, efetuamos as operações indicadas para calcular o valor de x:

$$x=\frac{5.24}{6} \quad \Rightarrow \quad x=20 \ .$$

Na Resolução 2, utilizamos o fato, descrito no século IX pelo matemático árabe Al-Kowarizmi, de que obter uma equação equivalente a uma dada equação é realizar acréscimos ou retiradas de componentes nos membros da equação, de modo que a igualdade permaneça. Nesses termos, serão utilizados os princípios multiplicativos ou aditivos, conforme a situação exija.

Vale ressaltar que, na expressão final (que equivale a multiplicar extremos e meios), apenas o número 5 permaneceu como estava no início, invariante. Os números 24 e 6, e a incógnita x que aparecem não são os mesmos como apresentados no início do processo, sofreram modificação. Aqueles foram simplificados e estes novos apareceram para equilibrar a equação. Pois na resolução 2, quando multiplicamos os dois membros por 24, transformamos, através da simplificação o 24 em 1, no 1º membro, consequentemente, este 24 aparece no 2º membro. Depois quando multiplicamos os dois membros por x, transformamos o x do 2º membro em 1, surgindo assim, o x, no 1º membro. Depois quando multiplicamos ambos os membros por 6, transformamos em 1. Surgindo assim, o 6 no 2º membro. Logo, o último número que permaneceu o mesmo desde o início, foi o número 5.

$$\frac{6}{24}=\frac{5}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5.24}{6}$$

Ainda podemos apresentar aqui uma 3ª resolução, baseada no princípio da inversabilidade, que seria transformar a igualdade $\frac{6}{24}=\frac{5}{x}$ em $\frac{24}{6}=\frac{x}{5}$.

Ao dividirmos 24 por 6, teríamos que $4=\frac{x}{5}$ e assim, teríamos x = 20.

Acreditamos que o processo de argumentação pode proporcionar uma maior interação ou familiarização do aluno com o conteúdo estudado, para uma melhor compreensão dos conceitos e aplicabilidades desse conteúdo, ampliando a compressão dos mesmos e possibilitando a transformação de perspectivas, à medida que a argumentação contribui, de forma significativa, para uma maior compreensão do processo de construção desse conhecimento. Embora a propriedade fundamental das proporções, multiplicar extremos e meios, seja mais rápida, consideramos que, se não for compreendido o porquê desse procedimento, ele inevitavelmente irá se tornar apenas mais uma regra sem significado, a ser memorizada e repetida.

Seção 4: METODOLOGIA

Quanto à metodologia, consideramos que nossa pesquisa pode ser caracterizada como de natureza qualitativa, pois esse tipo de pesquisa possibilita uma maior flexibilidade quanto aos procedimentos para a coleta dos dados, assim, a nossa preocupação esteve em aprofundarmos a compreensão dos aspectos subjetivos do fenômeno relacionado à argumentação enquanto ação humana. A pesquisa teve também um caráter exploratório, pois pretendíamos obter uma “maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses” (GIL, 2017, p. 41). Consideramos que também possui o aspecto de uma pesquisa documental, pois parte da análise sobre o tema da argumentação foi realizada em dois documentos preconizados pelas políticas públicas, os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular, BNCC (BRASIL, 2018).

Também possui o aspecto de uma pesquisa documental, pois a coleta de dados, foi realizada em livros didáticos, recomendados pelo guia do PNLD.

Ainda caracterizamos a nossa pesquisa como descritiva, na medida em que buscamos descrever características de um determinado fenômeno, neste caso, a identificação das categorias de argumentação presente em livros didáticos.

4.1 Coleta de dados

Visando obter a coleta de dados para o nosso trabalho, inicialmente fizemos um mapeamento de pesquisas acadêmicas sobre o ensino de proporção, levamos em consideração três bases de dados, duas delas de maior abrangência, a *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e uma de alcance regional, restrita às pesquisas elaboradas na UFS, o Repositório Institucional da Universidade, RI-UFS.

4.2 Mapeamento de pesquisas sobre o ensino de proporção

Primeiramente, começamos pela SciElo, que é uma biblioteca eletrônica que abrange uma coleção selecionada de periódicos científicos, e que tem por objetivo o desenvolvimento de uma metodologia comum para a preparação, armazenamento, disseminação e avaliação da produção científica em formato eletrônico.

Ao acessarmos o sítio eletrônico da SciELO (https://www.scielo.org/) e utilizando os descritores, "ensino", "razão" e "proporção", encontramos 09 trabalhos.

No entanto, após fazermos uma leitura dos seus respectivos resumos, constatamos que somente 02 tinham relação com a nossa temática. Um dos trabalhos, de Galvão *et al* (2016) da revista Bolema: Boletim de Educação Matemática, enfocando a Transição das Razões para as Funções Trigonométricas. Outra publicação, de Marcen e Sallán (2013), abordando a gênese histórica dos conceitos de razão e proporção, na Revista Latino-Americana de Pesquisa em Matemática Educacional – RELIME.

Quadro 01: Artigos encontrados

N	Tipo	Título	Ano	Autor(es)	Revista
1	A	La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización	2013	MARCEN, A.O. e SALLAN, J.M.G.	RELIME
2	A	A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas	2016	GALVÃO, M.E.L; SOUZA, V.H.G. e MIASHIRO P.M.	BOLEMA

Fonte: Autor, 2021.

Em seguida, investigamos na BDTD, uma plataforma que integra os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e de pesquisa do Brasil, e também estimula o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico. A BDTD é uma rede distribuída de sistemas de informação, desenvolvida e coordenada pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (Ibict).

A partir dos mesmos descritores, posteriormente acessamos a página da BDTD (https://bdtd.ibict.br/vufind/) e, nesta, apareceram 55 trabalhos, entre dissertações e teses. Fizemos uma leitura dos temas e dos resumos e percebemos que muitos não tinham uma relação direta com o nosso objetivo, relacionado com o ensino de proporção, restringindo a 20 trabalhos. Entretanto, após releitura e uma análise mais minuciosa, destacamos 13 desses trabalhos, que estavam efetivamente relacionados com nossa pesquisa, dos quais, são 11 dissertações e 02 teses.

Assim, organizamos os trabalhos em ordem cronológica: encontramos uma tese da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) do ano de 1996; uma tese da Universidade Federal do Paraná (UFPR) de 2006; duas dissertações da Pontífica Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) uma do ano de 2009 e outra de 2010. Em 2011, encontramos uma dissertação da Universidade de São Paulo (USP). Em 2013, encontramos uma dissertação da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Em 2015, encontramos três dissertações, uma da Universidade Federal de

Pernambuco (UFPE), uma da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e outra da Universidade Federal de Viçosa (UFV). Em 2016, encontramos uma dissertação da Universidade de Brasília (UnB). Em 2018, foram duas dissertações, uma da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e outra da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e em 2020, encontramos uma dissertação da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Conforme o quadro 2:

Quadro 02: Teses e Dissertações encontradas

N	Tipo*	Titulo	Ano	Autor	Instituição
1	T	Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho.	1996	PONTES, M. G. O.	Unicamp
2	T	Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem	2006	VIZOLLI, I.	UFPR
3	D	Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações	2009	MIRANDA, M. R.	PUC - SP
4	D	Proporcionalidade: uma análise do caderno do professor 7º ano da proposta implementada pela SEESP no ano de 2008.	2010	PAULA, M. B.	PUC - SP
5	D	A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática	2011	BARNABÉ, F. M.	USP
6	D	A lousa digital no ensino de razão e proporção: uma análise das interações.	2013	MELO, P. C. O.	UFPE
7	D	Raciocínio proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA.	2015	PORTO, E. R. S.	UFPE
8	D	Razão e proporção para além da sala de aula.	2015	ALMEIDA, R. G.	UFJF
9	D	A relação da proporcionalidade com outros temas matemáticos.	2015	CASTRO, F. A.	UFV
10	D	Razão áurea: uma proposta para o ensino.	2016	RAMOS, P. L. S.	UNB
11	D	Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade.	2018	TOBIAS, P. R. N. A.	UFMG
12	D	Uma sequência didática para o Teorema de Tales.	2018	BARBOSA, M. J. F.	UTFPR
13	D	A proporção divina: estudando a beleza do Número de Ouro	2020	ANDRADE, T. M.	Unesp

		na Matemática.				

* Dissertações ou Teses

Fonte: Autor, 2021.

Por fim, buscamos pesquisas na base de dados do repositório institucional da Universidade Federal de Sergipe, o RI-UFS. Seguindo os mesmos parâmetros, a partir dos descritores, "ensino", "razão" e "proporção", acessamos o Repositório Institucional da Universidade Federal de Sergipe – RI-UFS, através do sítio eletrônico (https://ri.ufs.br), afim de investigarmos se havia publicações sobre o tema, nos cursos de graduação (Matemática) e de pós graduação (Mestrado Profissional em Matemática e Mestrados Acadêmicos de Educação e de Ensino de Ciências e Matemática). Constatamos que não havia nenhuma publicação sobre o tema em estudo em nossa instituição. Ao ampliarmos a pesquisa com a abrangência “todo repositório”, mesmo assim não foi encontrado nenhum trabalho com esses descritores.

4.3 Descrição das pesquisas

De acordo com Marcén e Sallán (2013), o raciocínio proporcional é uma importante ferramenta matemática. A proporção aritmética é inquestionável de dois pontos de vista: matemática escolar e sua aplicação prática. Sua importância se reflete em uma série de trabalhos na área de Educação Matemática, esta pesquisa mostra uma revisão histórica de alguns dos principais conceitos relacionados à proporção aritmética, como razão e proporção. Além de sua importância, como estudo histórico, acredita-se que muitos problemas cotidianos podem ser resolvidos com técnicas relacionadas à proporcionalidade, e assim, múltiplos fenômenos físicos e econômicos podem ser modelados usando os conceitos de razão e proporção, inclusive, o tema aparece nos currículos e livros didáticos de qualquer país há mais de 200 anos.

Conforme aponta Galvão *et al* (2016), o objetivo da pesquisa foi verificar as contribuições de uma estratégia de ensino, formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional, para a aprendizagem significativa dos principais conceitos presentes na transição das razões no triângulo retângulo para as funções trigonométricas. O trabalho trouxe contribuições significativas que possibilitou explorar os vários aspectos dos conteúdos considerados como subsunçores para a construção de uma função trigonométrica.

Segundo Pontes (1996), a matemática é considerada uma das disciplinas que mais contribuem expressivamente para o baixo desempenho escolar do aluno e para a instalação de “caos”, segundo várias pesquisas nacionais e internacionais. À vista disso foi desenvolvido um estudo que investigou como a matemática é ensinada na escola, levando em consideração dois conceitos: Medidas e Proporcionalidade. A escolha destes conteúdos, residiu nos fatos de serem considerarmos conceitos de grande relevância e por estarem presentes na vida dos indivíduos. Como conclusão, foram apresentadas possibilidades do educador matemático poder contribuir para a melhoria do ensino de matemática, optando por sugerir soluções microestruturais, como a valorização do cotidiano do trabalho, trazendo o vivido para a sala de aula.

Vizolli (2006), apresenta uma pesquisa, a partir de uma ausculta nas falas e nos registros de representação de alunos e professores de Educação de Jovens e Adultos – EJA, ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem. Partindo do pressuposto de que as pessoas pouco escolarizadas tomam como referência situações do contexto social para solucionar estes tipos de problemas, foram feitas as seguintes perguntas de pesquisa: Como os professores e alunos do curso de Educação de Jovens e Adultos escrevem a solução de problemas de proporção porcentagem? Que registros de representação semiótica os alunos e professores de Educação de Jovens e Adultos utilizam para solucionar problemas de proporção-porcentagem? Assim, foram utilizados registros verbal oral e registros de representação semiótica (mistos; numéricos: aritméticos, percentual, fração, razão, decimal; tabela de números proporcionais, equação e função). Os resultados permitiram inferir que o processo de ensino e aprendizagem de proporção-porcentagem deve proporcionar oportunidades para que os alunos estabeleçam relações Inter contextuais que lhes permitam generalizar procedimentos de situações familiares para não-familiares. Estes resultados corroboram a recomendação, de que o professor proponha atividades que levem em consideração a mudança de registro de representação semiótica.

Miranda (2009), trouxe em seu trabalho, uma síntese de investigações, que focalizaram as expressões matemáticas, geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional. O objeto de estudo foram as atividades realizadas e explicitadas em dissertações de mestrado produzidas no Estado de São Paulo, que visaram melhorar o ensino e aprendizagem de aspectos do pensamento proporcional. Como resultado da pesquisa, foram verificados que a realização de atividades propostas em somente duas dissertações do Estado de São Paulo, favoreceu a expressão e o desenvolvimento do pensamento proporcional em estudantes, e os aspectos privilegiados foram os que tiveram como objetivo representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas; utilizar ideias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de resolver problemas envolvendo funções ou ideias associadas às funções e suas representações, utilizando a multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão ou proporção.

Paula (2010), realizou uma análise do caderno do professor do 3º bimestre do 7º ano do Ensino Fundamental do Ciclo II fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008, enfocando o tema proporcionalidade. Como resultado da pesquisa, foi observado a existência de dois tipos diferentes de abordagem quanto ao ensino de proporcionalidade, a primeira no qual se enfoca o estudo do tema por meio de situações que envolvam as grandezas diretamente e inversamente proporcionais e, a segunda, visando o estudo do objeto matemático razão e proporção.

Em Barnabé (2011), buscou-se novas abordagens para o trabalho com conteúdos matemáticos, em que a Música surge como um elemento facilitador neste processo, por meio de um trabalho interdisciplinar, podendo ser explorada sob diferentes aspectos, sejam eles rítmicos ou melódicos. Pensando sobre as relações matemáticas presentes na construção melódica da música ocidental, o estudo dos conceitos de razão e proporção se torna peça fundamental para a compreensão das mudanças ocorridas durante a história da música e a diferenciação de alguns termos matemáticos, como razão, proporção, quociente, fração e números decimais. O trabalho propôs uma prática interdisciplinar por meio de oficinas, foi intensificado e explorado o processo de investigação e pesquisa, promovendo assim, o desenvolvimento da autonomia e o senso crítico dos alunos.

Melo (2013), analisou em sua pesquisa a atividade docente com o uso da Lousa Digital em aula de Matemática, especificamente as interações docentes em aula de Razões e Proporções. Para tanto, foi realizado um estudo de caso com um professor e o uso da Lousa Digital. A atividade docente foi analisada a partir da revisão de literatura sobre Razão e Proporção. Na pesquisa, ficou evidente que o uso da Lousa permitiu ao professor propor uma boa variedade de exercícios, elaborados a partir de recursos digitais e expressos em forma de textos, tabelas, exemplos, todos na tentativa de favorecer a apresentação dos conteúdos de razão e proporção. No entanto, concluiu-se que não foram propostas atividades em que os alunos interagissem diretamente com a Lousa Digital. Observou-se que algumas funções da

Lousa Digital, como o uso do teclado na Lousa Digital ou a função lápis, precisariam ser melhor estruturadas e articuladas pelos desenvolvedores da ferramenta, facilitando, assim, a relação dessa com outros *softwares* e com outras apresentações.

A pesquisa de Porto (2015), consistiu em investigar o raciocínio proporcional de estudantes da educação de jovens e adultos, cursando a 4ª Fase (que corresponde ao 8° e ao 9° ano do Ensino Fundamental). Após a investigação, concluiu-se com este estudo que nem sempre ao resolver e acertar problemas proporcionais o estudante apresenta o raciocínio proporcional e que este é mais facilmente desenvolvido em algumas situações, que em outras, evidenciando que o domínio da proporcionalidade se dá de forma gradativa e requer o desenvolvimento de outros conceitos, representações e procedimentos.

Nos estudos de Almeida (2015), teve como objetivo descrever os conceitos de razão e proporção através de situações que estão presentes no cotidiano popular, buscando estabelecer relações da vida prática do leitor com a matemática ensinada nas escolas, por análise e resolução de problemas. Foi desenvolvido um estudo detalhado, aplicado e diversificado das razões, resolução dos problemas de proporções, conhecidos por Regra de Três e Porcentagem, através de métodos que utilizam análises lógicas de fácil compreensão. Percebeu-se uma melhoria do ensino e da aprendizagem dos conceitos de razão e proporção, a partir de situações aplicáveis ao cotidiano, desenvolvendo habilidades que possibilitassem aos alunos uma matemática, não somente feita dentro, mas também para além da sala de aula.

De acordo com Castro (2015), ao propor uma sequência didática que aproximasse os conteúdos matemáticos dos conteúdos de outras disciplinas, mostrando para o aluno que o domínio de um conceito matemático é inter e intradisciplinar. Além de apresentar sua aplicação no cotidiano, dando significância ao aprendizado. O conteúdo matemático escolhido foi razão e proporção e as disciplinas envolvidas foram geografia, ciências, física, química, além da própria matemática. Sendo assim, esta pesquisa pretendeu contribuir para o ensino da matemática e outras disciplinas a partir de uma visão transdisciplinar. Segundo o autor, o objetivo do trabalho foi alcançado, considerando que foi apresentada uma proposta que privilegia os conceitos em detrimento da simples memorização. Demonstrando a importância do conceito de proporcionalidade para a compreensão e o aprendizado de vários conteúdos na Matemática e em outras disciplinas.

Ramos (2016), apresenta a Razão Áurea, que segundo estudiosos, é a mais "bela" proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Ela aparece muitas vezes na natureza, no corpo humano, em obras de arte e esculturas. Apesar de aparecer em várias construções antigas, a primeira descrição formal da Razão Áurea foi feita por Euclides em sua obra Os elementos, livro VI proposição 30, conhecida na época como divisão de um segmento na média extrema razão. A partir daí, muitos matemáticos fizeram grandes contribuições para o estudo dessa proporção. Em sua pesquisa foram aplicadas uma avaliação diagnóstica, três oficinas práticas, a uma avaliação final e uma pesquisa de opinião. A partir da análise do desempenho dos participantes, foi constatado um expressivo desenvolvimento dos alunos tanto na parte de construções geométricas, quanto no interesse em aprender e enxergar a Matemática no dia a dia.

Tobias (2018), investigou as potencialidades da Sala de Aula Invertida nas aulas de proporcionalidade, buscando analisar as percepções dos estudantes em relação à essa metodologia; as possíveis influências da utilização de vídeo aulas no processo de interação estudante-aula-professor na perspectiva da Sala de Aula Invertida e, também, se essa interação trazia elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade, ao colocar o educando como protagonista de seu aprendizado, tendo acesso prévio ao conteúdo da aula, seja por vídeos, áudios, textos, geralmente com o recurso midiático envolvendo a internet. Concluiu-se que, acerca das implicações pedagógicas, a sala de aula se tornou um espaço de investigação, enriquecido com as discussões dos discentes e o professor.

Barbosa (2018), em sua pesquisa teve por objetivos elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática, com tarefas relativas ao Teorema de Tales, contribuindo assim, para que os discentes diferenciassem os conceitos de reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas e transversais, bem como a compreensão do conceito de razão e proporção, que culminaram na aprendizagem do Teorema de Tales. Ao concluir, a pesquisa, como professora pesquisadora, pode perceber a importância de se trabalhar uma Matemática real, concreta e que faça sentido para os alunos.

Andrade (2020), apresentou em sua pesquisa, o Número de Ouro, também conhecido como, Número Áureo, Razão Áurea, Seção Áurea, Proporção Áurea e Média e Extrema Razão, que é o número irracional 1,6180339887. Este número fascinou muitos matemáticos ao longo da história como Pitágoras, Platão, Euclides, Fibonacci e o matemático italiano Luca Pacioli. O objetivo do trabalho foi estudar o número de ouro destacando seu contexto histórico; as propriedades geométricas da divina proporção (como o triângulo e o retângulo áureo, o pentágono regular e a sequência de Fibonacci) e a descrição de exemplos encontrados na literatura, a presença da Razão Áurea na natureza, arte e arquitetura. Assim, ao finalizar esse trabalho, foi apresentando um conjunto de atividades didáticas que poderiam ser usadas por professores da Educação Básica, para trabalhar juntamente com o *software* GeoGebra, o Número de Ouro na sala de aula, contribuindo para o ensino da matemática para os alunos da Educação Básica.

Seção 5. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Em relação à coleta de dados nos livros, realizamos uma análise em 11 livros didáticos de matemática, do sétimo ano, adotados pelo guia do PNLD 2020, com o objetivo de identificar as categorias de argumentação no ensino de matemática, em relação ao conteúdo de proporção, fundamentados nos conceitos de explicação e justificação apresentados por Balacheff (1988), e nas consequentes categorias de "argumentação explicativa" e de "argumentação justificativa" (ATTIE, 2016).

Em relação à análise dos dados coletados, consideramos pertinente proceder à técnica da análise de conteúdo, frequentemente utilizada para análise em pesquisas qualitativas, e que pode ser definida como “um conjunto de técnicas de análise das comunicações” (BARDIN, 2010, p. 31).

Desta forma, realizamos as etapas de pré-análise e as operações de codificação, decomposição/enumeração, a partir das dimensões que emergiram da pesquisa com os livros. A pré-análise foi realizada ao elaborarmos a resolução de uma proporção segundo as duas categorias de argumentação. As etapas de codificação e de decomposição/enumeração foram realizadas ao observarmos as resoluções efetuadas nos livros selecionados e identificarmos a categoria de argumentação utilizada.

O guia do PNLD 2020 recomenda onze livros didáticos para o 7º ano. Obtivemos o acesso às obras por meio eletrônico e procedemos à coleta e análise dos dados de acordo com o que segue.

5.1 Livros didáticos do guia do PNLD 2020

Livro 1. O primeiro livro analisado foi "Matemática Bianchini", de Edwaldo Bianchini, da Editora Moderna, de 2018. O conteúdo proporção, é abordado no capítulo 9, em que são desenvolvidos dois dos mais fundamentais conceitos da Matemática no nível da Educação Básica: a proporcionalidade e o cálculo com porcentagem. O tema proporção é desenvolvido a partir de um exemplo, como mostra a figura 3:

Figura 3: 1º Exemplo – razões iguais.

Juliana coleciona gibis. A cada 5 gibis de sua coleção, 1 é de histórias em quadrinhos feitas no estilo japonês (mangá).

Dessa maneira, a cada 10 gibis, 2 são mangás; a cada 15 gibis, 3 são mangás; a cada 20 gibis, 4 são mangás; e assim por diante.

Podemos, então, obter as razões:

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{20}$

Fonte: Bianchini, 2018, p. 203 .

Assim, pôde-se observar que todas essas razões eram iguais a 1/5, pois

$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

Logo, o autor salienta que “sentenças como essas, que representam uma igualdade entre duas razões, são chamadas de proporção” (BIANCHINI, 2018, p. 204). Em seguida, define que “Proporção é uma igualdade entre duas razões”. Depois, já apresenta uma lista de exercícios propostos para serem resolvidos no caderno, questões do tipo: “Escreva como lê a proporção $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, ou “Verifique em cada caso se os números, nessa ordem, formam uma proporção. Em caso afirmativo, escreva a proporção 4, 5, 8 e 10”, ou ainda “Para que os números 15, x, 3 e 4 formem, nessa ordem, uma proporção, qual deve ser o valor de x?". Outro exercício aborda uma questão recorrente no comércio: “Um mercado vende o mesmo tipo de arroz em dois tipos de pacotes: • de 2 kg por R$ 2,60; • de 5 kg por R$ 6,40. a) Para cada pacote, determine a razão entre o preço e a massa. b) Essas razões formam uma proporção? Justifique sua resposta” (BIANCHINI, 2018, p. 204). Para esses exercícios, ainda não foi apresentada a propriedade fundamental, mas, no tópico seguinte, "Propriedade Fundamental das Proporções", define-se que “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios” (BIANCHINI, 2018, p. 205), a partir de três exemplos mostrados: $\frac{6}{5}=\frac{18}{15}$, $\frac{0,9}{0,6}=\frac{15}{10}$ e $\frac{8}{12}=\frac{12}{18}$, e é referido que isso acontece em todas as proporções. Percebemos que não há nenhuma justificativa, do porquê que isso acontece, apenas a apresentação da propriedade. São dados três exemplos, afim de mostrar por meio dessa propriedade, como reconhecer quando duas razões formam uma proporção, conforme a figura 4.

Figura 4: Exemplos, reconhecendo quando duas razões formam uma proporção.

Por meio dessa propriedade, também podemos reconhecer quando duas razões formam uma proporção.

Veja alguns exemplos.

a) $\frac{8}{10}$ e $\frac{24}{30}$ formam uma proporção, pois:

$$\underbrace{8 \cdot 30}_{240} = \underbrace{10 \cdot 24}_{240}$$

produto dos extremos — produto dos meios

b) $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois:

$$\underbrace{4 \cdot 9}_{36} = \underbrace{3 \cdot 12}_{36}$$

produto dos extremos — produto dos meios

c) $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{5}$ não formam uma proporção, pois o produto dos extremos ($2 \cdot 5 = 10$) é diferente do produto dos meios ($4 \cdot 3 = 12$).

Nas situações a seguir, observe como podemos encontrar o valor desconhecido de um termo em uma proporção usando a propriedade fundamental.

Fonte: Bianchini, 2018, p. 206.

A seguir, são apresentadas duas situações que o autor denomina “situações-problema”, que aparecem nas figuras 6 e 7. No entanto, consideramos que a expressão foi indevidamente utilizada, pois, ao nosso ver, uma "situação problema", tem característica distinta das situações apresentadas. Um exemplo de situação-problema, é o problema do bilhar da Revista do Professor de Matemática. v. 50. Sociedade Brasileira de Matemática, 2002:

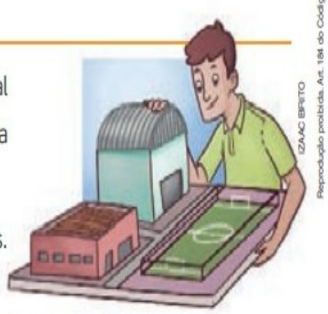
> Em Educação Matemática, não há consenso no uso das expressões: problema aberto, problema fechado, situação-problema. Além da concepção expressa no texto, há aqueles que usam o termo problema fechado para o problema que admite solução determinada e incondicional, em contraposição ao problema aberto, que exige uma divisão em casos ou mesmo o acréscimo de hipóteses àquelas do enunciado para a existência de solução. Como o texto aponta, há os que chamam de situação-problema o problema surgido de uma situação da vida real, um problema contextualizado (SANTOS, 2002, p. 03).

Assim, as situações apresentadas, poderiam ser consideradas como, exercício 1 e exercício 2. Pois, em ambos os casos, deve-se encontrar o valor desconhecido de um termo em uma proporção usando a propriedade fundamental.

Figura 5: 1º exemplo – Situação 1. (Denominada situação-problema).

Situação 1

A maquete de um ginásio de esportes tem altura igual a 54 cm e foi construída na escala $\frac{9}{250}$; ou seja, nela, cada 9 cm corresponde a 250 cm na realidade.



Vamos calcular a altura real desse ginásio de esportes.

Assim, temos:

$$\text{escala} = \frac{\text{número que expressa o comprimento do desenho}}{\text{número que expressa o comprimento real}}$$

$$\frac{9}{250} = \frac{54}{x}$$

Observe que obtivemos uma proporção.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo a equação obtida, temos:

$$9x = 54 \cdot 250$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{54 \cdot 250}{9}$$

$$x = 1.500$$

Logo, a altura real desse ginásio é 1.500 cm, ou seja, 15 m.

Fonte: Bianchini, 2018, p. 206.

Figura 6: 2º exemplo – situação 2. (Denominada situação-problema).

Situação 2

Vamos calcular o valor de x na proporção $\frac{3x - 1}{x + 4} = \frac{2}{3}$.

$$\overbrace{3 \cdot (3x - 1)}^{\text{produto dos extremos}} = \overbrace{2 \cdot (x + 4)}^{\text{produto dos meios}}$$

$$9x - 3 = 2x + 8$$

$$9x - 2x = 8 + 3$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{11}{7}$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Fonte: Bianchini, 2018, p. 206.

Por fim, é apresentada uma atividade denominada “Pense mais um pouco”. Nesta seção o aluno é levado a percorrer um procedimento aplicado a uma proporção criada por outro aluno e vice-versa e chegar a uma conclusão válida para aquela proporção inventada, além de verificar que a propriedade também é válida para outras proporções. Consideramos que essa atividade não chega a ser uma demonstração, mas, é uma forma válida de estimular os alunos a pensarem um pouco mais. Em seguida, são apresentados mais exercícios com questões do tipo

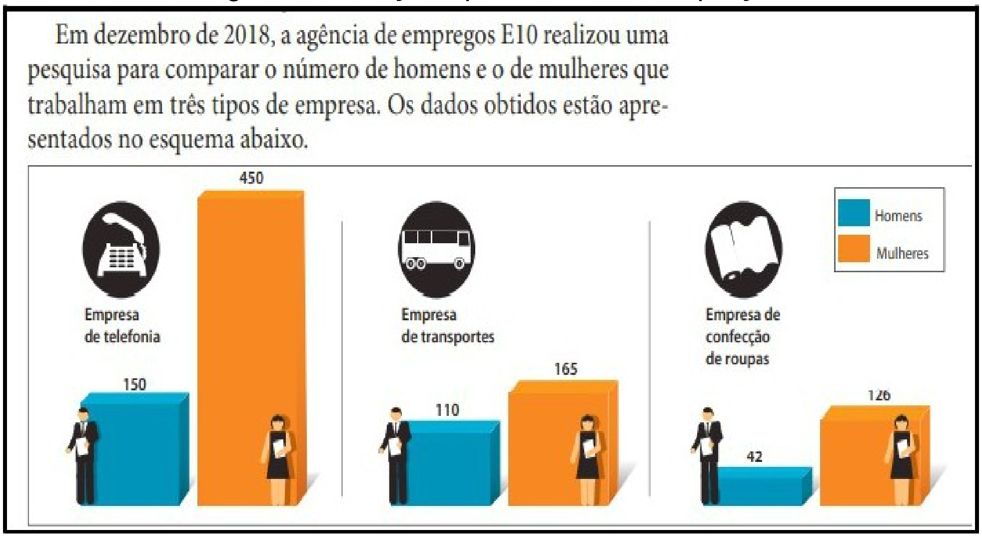
“Calcule o valor de x na proporção $\frac{6}{x}=\frac{9}{12}$ ”, ou ainda “Calcule x e y na proporção

$\frac{x}{y}=\frac{8}{3}$, sabendo que x + y = 132”.

Consideramos que a sequência de atividades propostas pelo livro reproduz um tipo de ensino em que, geralmente, apresentam-se os conteúdos a serem estudados, resolvem-se exemplos ou exercícios e aplicam-se listas de questões e exercícios de fixação para os discentes repetirem o procedimento apresentado e assim memorizarem o conteúdo “aprendido”. Não aparece nenhuma base lógica que justifique a propriedade fundamental das proporções, caracterizando assim a utilização da Argumentação Explicativa no volume considerado.

Livro 2. O segundo livro analisado, foi o "Araribá Mais Matemática", dos autores Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva, da Editora Moderna, de 2018. O conteúdo em análise é abordado no capítulo 11, “Proporção e aplicações”, a partir da seguinte situação:

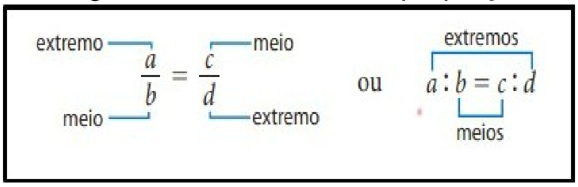
Figura 7: Situação apresentada 1. Proporção.



Fonte: Gay & Silva, 2018, p. 265.

De acordo com a situação, ao comparar o número de homens e o de mulheres que trabalham em cada tipo de empresa por meio de uma razão, temos na empresa de telefonia, que a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{150}{450}=\frac{1}{3}$. Os autores concluem que, para cada homem, 3 mulheres trabalham nesse tipo de empresa. Em transportes, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{110}{165}=\frac{2}{3}$, com o que se conclui que para cada 2 homens, 3 mulheres trabalham nessa empresa. Já em confecção de roupas, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{42}{126}=\frac{1}{3}$, o que leva os autores ao fato de que, para cada homem, 3 mulheres trabalham nessa empresa. Assim, de acordo com a comparação entre os tipos de empresa, concluiu-se que $\frac{150}{450}=\frac{42}{126}$, e, a partir dessa conclusão, os autores chegaram à definição de que “Quatro números não nulos, a, b, c e d, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, apresentando os termos na figura 8.

Figura 8: Termos de uma proporção



Fonte: Gay & Silva, 2018, p. 265.

Em seguida, é apresentado um exemplo, na figura 9, em que um dos termos da proporção é desconhecido.

Figura 9: Situação apresentada 2. Determinando o valor do x.

Dois jovens vão caminhar 12 km até chegar ao acampamento. Se eles começarem a caminhar às 8 horas, a que horas chegarão ao acampamento, mantendo o mesmo ritmo de caminhada?

Considerando x o tempo gasto para percorrer os 12 km, podemos indicar a seguinte proporção, que é uma equação de incógnita x:

$\frac{1}{15} = \frac{12}{x}$ “Um quilômetro está para 15 minutos, assim como 12 quilômetros estão para x minutos.”

Vamos descobrir o valor de x.

$$\frac{1}{15} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{1}{15} \cdot x = \frac{12}{x} \cdot x$$

Ao multiplicar os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, diferente de zero, obtemos outra igualdade.

$$\frac{x}{15} = 12$$

$$\frac{x}{15} \cdot 15 = 12 \cdot 15$$

$$x = 12 \cdot 15$$

$$x = 180$$

Logo, eles levarão 180 minutos (ou 3 horas) para percorrer os 12 km. Assim, eles chegarão ao acampamento às 11 horas.

Fonte: Gay & Silva, 2018, p. 266.

Percebemos que nesse primeiro momento de resolução, foi utilizado o princípio descrito pelo matemático árabe Al-Kowarizmi, no século IX, que consiste em obter uma equação equivalente a uma dada equação, realizando operações iguais nos membros da equação, neste caso, usando a multiplicação.

Depois, foi resolvido o mesmo exercício $\frac{1}{15} = \frac{12}{x}$, aplicando a propriedade das proporções, e deixando o seguinte questionamento: “Será que esse fato é válido para todas as proporções?” (GAY & SILVA, 2018, p. 266). Logo em seguida, é apresentada uma demonstração da propriedade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, para se obter **a.d = b.c**, como mostra a figura 10.

Figura 10: Demonstração da Propriedade Fundamental das Proporções.

com a, b, c e d não nulos, e obter $a \cdot d = b \cdot c$. Veja.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{c}{d} \cdot d$$ — Multiplicamos ambos os membros da igualdade por d.

$$\frac{a \cdot d}{b} = c \cdot \frac{d}{d}$$ — Reescrevemos a igualdade de outra forma.

$$\frac{a \cdot d}{b} = c \cdot 1$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = c$$

$$b \cdot \frac{a \cdot d}{b} = b \cdot c$$ — Multiplicamos ambos os membros da igualdade por b.

$$\frac{b}{b} \cdot a \cdot d = b \cdot c$$ — Reescrevemos a igualdade de outra forma.

$$1 \cdot a \cdot d = b \cdot c$$

$$\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$$

Fonte: Gay & Silva, 2018, p. 266.

Logo, percebemos o uso da demonstração como um caminho que corrobora com o entendimento do processo justificatório, já que “é possível elaborar uma organização didática que produza uma evolução da argumentação para a demonstração. O discurso explicativo e justificatório está no processo de ascensão do cotidiano para o científico” (SALES, 2010, p. 224).

Em seguida, é apresentada uma atividade intitulada, “Vamos aplicar”, que consiste em resolver exercícios do tipo: “Descubra todas as proporções com os termos 2, 3, 10 e 15”, ou ainda “Sabendo que 42 está para x, assim como 252 está para 186, calcule o valor de x”. Consideramos que esses exercícios possuem o objetivo de consolidar a propriedade fundamental das proporções. Concordamos que “faz sentido esse exercício de repetição quando a intenção é exercitar a argumentação, seja ela explicativa ou justificatória” (SALES, 2010, p. 218).

Assim, apontamos a presença da Argumentação Justificativa, em que há a priorização da compreensão do processo, do “como” se faz e do “porque” se faz assim.

Livro 3. O livro "A Conquista da Matemática", dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedito Castrucci, da editora FTD, de 2018. O conteúdo proporção é apresentado no segundo tópico, da unidade 7, no capítulo Grandezas Proporcionais. É apresentada uma situação, para se chegar à definição de proporção.

Figura 11: Situação/questão “igualdade entre duas razões”.

Acompanhe a situação.

A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda **1 médico** para cada grupo de **1 000 habitantes**. Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 50 000 habitantes?

De acordo com a situação apresentada, organizamos a tabela:

Médicos por habitantes

Nº de habitantes	Nº de médicos
1 000	1
2 000	2
3 000	3
4 000	4
5 000	5
6 000	6
⋮	⋮
10 000	10
⋮	⋮
50 000	50

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{1000}$

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{50}{50\,000} = \frac{1}{1\,000}$

Fonte: Giovanni Jr & Castrucci, 2018, p. 210.

Assim, de acordo com a questão apresentada, os autores apontam que as razões $\frac{1}{1000}$ e $\frac{50}{50.000}$ são iguais, concluindo que uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada proporção, e chegando à definição de que “Proporção é uma igualdade entre duas razões” (GIOVANNI JR & CASTRUCCI, 2018, p. 210).

Logo a seguir é proposta uma atividade intitulada “Pense e responda”, que consiste na situação seguinte: “Um posto de combustíveis oferece um desconto aos clientes de R$ 1,00 para cada 10 litros abastecidos com gasolina. a) Relacione o desconto para cada 10 litros até alcançar 100 litros. b) De quantos reais será o desconto para: 40 litros? 60 litros? 90 litros? c) Um desconto de R$ 10,00 corresponde a quantos litros de gasolina? 100 litros. d) Para 420 litros de gasolina, de quanto será o desconto?” (GIOVANNI JR & CASTRUCCI, 2018, p. 211).

Em seguida, os autores pedem para o aluno considerar os números 6, 9, 12 e 18, nessa ordem, mostrando que as razões $\frac{6}{9}$ e $\frac{12}{18}$ são iguais a $\frac{2}{3}$, e chegando à conclusão de que 6 : 9 = 12 : 18 e afirmando, mais adiante, à Propriedade Fundamental das Proporções, “De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios” (GIOVANNI JR & CASTRUCCI, 2018, p. 211).

Depois, são apresentados alguns exemplos, que os autores chamam de "exercícios resolvidos", nos quais é aplicada a propriedade fundamental das proporções, conforme a figura 12.

Figura 12: Exercícios resolvidos 1, 2 e 3.

1 Usando a propriedade fundamental, verificar se os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.
Se considerarmos o primeiro e o quarto dos números (3 e 28) como extremos e o segundo e o terceiro números (7 e 12) como meios, temos:

- produto dos extremos: $3 \cdot 28 = 84$
- produto dos meios: $7 \cdot 12 = 84$

$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12 \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{12}{28}$

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.

2 Sabendo que os números 6, 24, 5 e *x* formam, nessa ordem, uma proporção, determinar o valor de *x*.

$\frac{6}{24} = \frac{5}{x}$ → os números 6, 24, 5 e *x*, nessa ordem, formam uma proporção

$6x = 5 \cdot 24$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$6x = 120$

$x = \frac{120}{6}$

O valor de *x* é 20.

3 Qual é o valor de *x* na igualdade $\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$, com $x \neq 2$?

Na igualdade, temos:

- extremos: $x + 1$ e 2
- meios: $x - 2$ e 1

$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$

$2 \cdot (x + 1) = 1 \cdot (x - 2)$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$2x + 2 = x - 2$

$2x - x = -2 - 2$

$x = -4$

O valor de *x* (raiz da equação) é -4.

Fonte: Giovanni Jr & Castrucci, 2018, p. 213.

Por fim, o livro traz uma lista de exercícios/atividades, tendo como objetivo ampliar e consolidar os conhecimentos que os discentes “construíram”, aplicando a propriedade fundamental das proporções em situações variadas, como: “Calcule o valor de x em cada uma das proporções” e “Em uma pequena comunidade constatou-se que, de cada 7 crianças, 2 possuíam olhos azuis. Sabendo que na comunidade havia 91 crianças, quantas possuíam olhos azuis? ”.

Assim, nesta obra, percebemos a presença da Argumentação Explicativa, na qual são evidenciadas a partir dos exemplos e exercícios resolvidos, em que a preocupação é apenas compreender como se faz, reproduzindo o procedimento, sem a preocupação de se entender o porquê se faz dessa forma. Conforme aponta ATTIE (2016) “argumentação explicativa é utilizada com a finalidade de apenas esclarecer”.

Livro 4. O livro "Convergência Matemática", de Eduardo Chavante, da Editora SM Educação, de 2018, apresenta o tema proporção no capítulo 7 da unidade 3.

O autor apresenta uma situação, mostrando um quadro que representa os funcionários das empresas A, B e C que possuíam ou não automóvel e, com base nesse quadro e na comparação entre as razões entre os que possuem automóvel e os que não possuem, conclui-se que as empresas A e C possuem a mesma razão. Daí, o autor define que "chamamos de proporção a igualdade entre duas razões" (CHAVANTE, 2018, p. 120). Em seguida, traz somente uma pequena questão, conforme a figura 13, e depois já parte para o próximo tópico “Grandezas diretamente e inversamente proporcionais".

Figura 13: Outros exemplos de proporção

Observe a seguir outros exemplos de proporções:

a) $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$ b) $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$

\> Escreva em seu caderno uma proporção utilizando duas razões. Depois, utilize uma calculadora e verifique se o que você escreveu está correto.

Fonte: Chavante, 2018, p. 120.

Nas atividades propostas ao final do tópico, apenas quatro (em 31 exercícios), exigem o cálculo da propriedade fundamental das proporções, que tampouco é apresentada explicitamente. Assim, consideramos que o livro, aborda de forma muito superficial o conteúdo proporção, pois, apesar da preocupação em relação às proporcionalidades direta e inversa, a ausência de definições, exemplos e aplicações compromete a preparação para a compreensão e resolução de problemas e exercícios.

Concordamos que a argumentação “pode mobilizar a turma no seu todo e ser desencadeada quando se trabalha com qualquer tarefa ou tópico matemático” (BOAVIDA, 2005, p. 775), e acreditamos que o tratamento dado ao conteúdo propriedade fundamental das proporções não nos permite apontar a presença de qualquer argumentação a respeito. Consideramos importante ressaltar que nenhuma obra pode ser julgada com base em um único conteúdo ou tema, no entanto, queremos aqui situar o contexto no qual envolve o conteúdo em análise, “proporção”. Dessa forma, no nosso entender, esta obra não traz elementos suficientes para se compreender o tema em análise, ficando uma lacuna muito grande a respeito do tema abordado.

Livro 5. No livro "Matemática Compreensão e Prática", de Ênio Silveira, da editora Moderna, de 2018, o conteúdo proporção é apresentado no capítulo 8, “Proporcionalidade”, a partir do seguinte exemplo: “Em carros com motor bicombustível, é possível utilizar como combustível uma mistura de etanol e gasolina. Vamos supor que, no tanque de 50 *l* de um carro, foram colocados 10 *l* de etanol e 40 *l* de gasolina. Já o tanque de 60 *l* de outro carro foi preenchido com 12 *l* de etanol e 48 *l* de gasolina” (SILVEIRA, 2018, p. 185). Após fazer a relação entre as razões $\frac{10}{40}$ e $\frac{12}{48}$, o autor afirma que que elas são iguais, apontando que “Proporção é uma igualdade entre duas razões” (SILVEIRA, 2018, p. 185). No entanto, o autor revela um cuidado ao indicar que, ao definir proporção como uma igualdade entre duas razões, é preciso perceber que não basta igualar duas razões quaisquer para obter uma proporção, pois "a construção da noção de proporcionalidade envolve também a competência de reconhecer situações em que ela não está presente" (*Idem*, *ibidem*).

Depois disso, o autor apresenta a origem do nome proporção e define os seus termos, “meios” e “extremos”.

A seguir, são apresentados dois textos, um deles com um exemplo clássico do uso das proporções, o homem Vitruviano de Leonardo da Vinci, e o outro abordando brevemente o surgimento dos conceitos de proporção, conforme a figura 14.

Figura 14: Texto um pouco de história de proporção

Um pouco de história

Surgimento dos conceitos de proporção

A ideia de proporção é atribuída a Pitágoras (c. 580 a.C.-500 a.C.), embora haja dúvida sobre isso. Na Antiguidade, o estudo das proporções presumivelmente fazia parte da Aritmética ou da teoria pitagórica dos números.

Eudoxo de Cnido, discípulo de Platão, matemático e filósofo grego que viveu entre 408 a.C. e 355 a.C., deu nova definição para os teoremas relacionados a proporções. Essa definição foi exposta no Livro V de *Os elementos*, de Euclides (330 a.C.-?), e é a que conhecemos e usamos hoje em dia.

Dados obtidos em: Carl Benjamin Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974. p. 34, 61, 66.

Caricatura de Eudoxo de Cnido.

Fonte: Silveira, 2018, p. 187.

Após uma atividade proposta, é explorada uma situação que trabalha a ideia de escala, conforme a figura 15.

Figura 15: Resolução de exercício - determinar o valor de x.

Para determinar o valor de x, podemos multiplicar ambos os membros dessa igualdade por x e, em seguida, por 65. Veja:

$$\frac{1}{65} = \frac{56}{x}$$

$$\frac{1}{65} \cdot x = \frac{56}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}$$

$$\frac{1 \cdot x}{65} = 56$$

$$\frac{1 \cdot x}{\cancel{65}} \cdot \cancel{65} = 56 \cdot 65$$

$$1 \cdot x = 56 \cdot 65$$

$$x = 3640$$

Miniatura da nau *Santa Maria*.

Portanto, a medida do comprimento real da embarcação era 3640 cm ou 36,40 m.

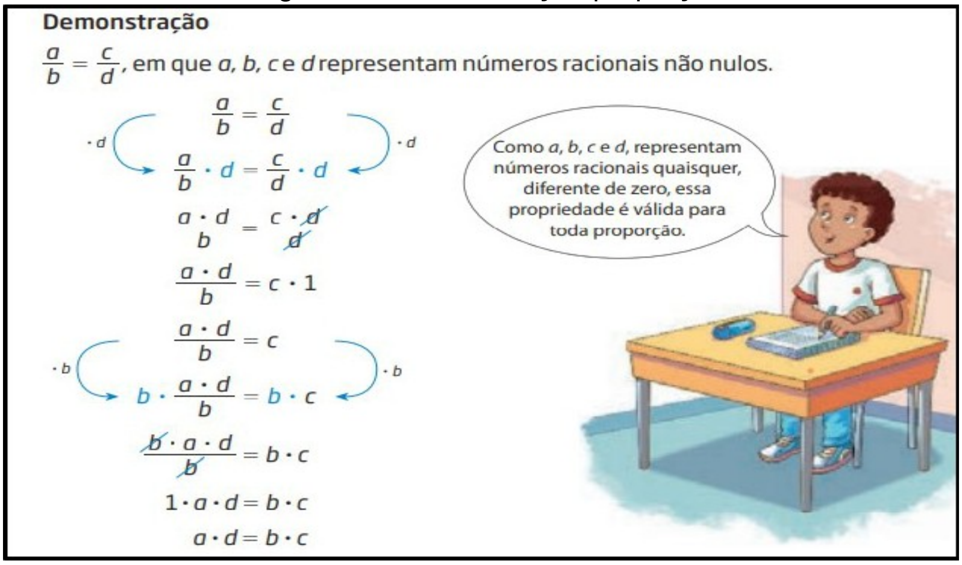
Ao desenvolver a resolução da proporção desse exemplo, podemos observar que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:

$$\frac{1}{65} = \frac{56}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot x = 56 \cdot 65$$

Fonte: Silveira, 2018, p. 188.

Percebemos que a questão é respondida, dentro de uma linha de Argumentação Justificativa, na medida em que utiliza a ideia da compreensão do processo, na busca do entendimento do “como” e do “porquê” dos termos utilizados. Depois há uma demonstração algébrica, para se chegar à propriedade fundamental das proporções, conforme a figura 16.

Figura 16: Demonstração/proporção



Demonstração

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que a, b, c e d representam números racionais não nulos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{c}{d} \cdot d$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = \frac{c \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = c \cdot 1$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = c$$

$$b \cdot \frac{a \cdot d}{b} = b \cdot c$$

$$\frac{\cancel{b} \cdot a \cdot d}{\cancel{b}} = b \cdot c$$

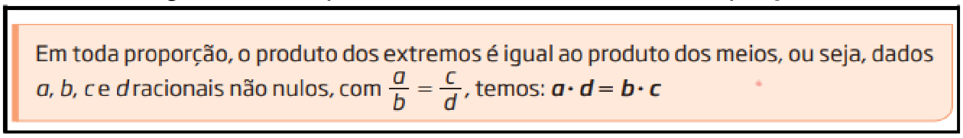
$$1 \cdot a \cdot d = b \cdot c$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Fonte: Silveira, 2018, p. 188.

Assim, após essa demonstração, o autor afirma que em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, conforme a figura 17.

Figura 17: Propriedade Fundamental das Proporções.



Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, dados a, b, c e d racionais não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos: $\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$

Fonte: Silveira, 2018, p. 188.

Em seguida, são resolvidos dois exemplos de problemas, como podemos observar na figura 18.

Figura 18: Determinando o valor desconhecido nas proporções.

- Sabendo que 5 está para 8, assim como 15 está para x, qual é o valor de x?

Para determinar o valor de x, inicialmente escrevemos a proporção:

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$$

Em seguida, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação encontrada:

$$5 \cdot x = 8 \cdot 15$$

$$5x = 120$$

$$\cdot\frac{1}{5} \qquad \cancel{5}x \cdot \frac{1}{\cancel{5}} = 120 \cdot \frac{1}{5} \qquad \cdot\frac{1}{5}$$

$$x = \frac{120}{5}$$

$$x = 24$$

Portanto, o valor de x é 24.

- Em uma salina, de cada 1 000 dm^3 de água salgada são retirados 40 dm^3 de sal. Para obter 800 dm^3 de sal, quantos decímetros cúbicos de água salgada são necessários?

A quantidade de sal retirada é proporcional ao volume de água salgada.

Então, indicando por x a quantidade de água salgada a ser determinada, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{1000}{40} = \frac{x}{800}$$

Em seguida, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação encontrada:

Salinas Diamante Branco, Galinhos (RN), 2014.

$$40 \cdot x = 800 \cdot 1000$$

$$\cdot\frac{1}{40} \qquad \frac{1}{\cancel{40}} \cdot \cancel{40} \cdot x = \frac{1}{40} \cdot 800\,000 \qquad \cdot\frac{1}{40}$$

$$x = \frac{800\,000}{40}$$

$$x = 20\,000$$

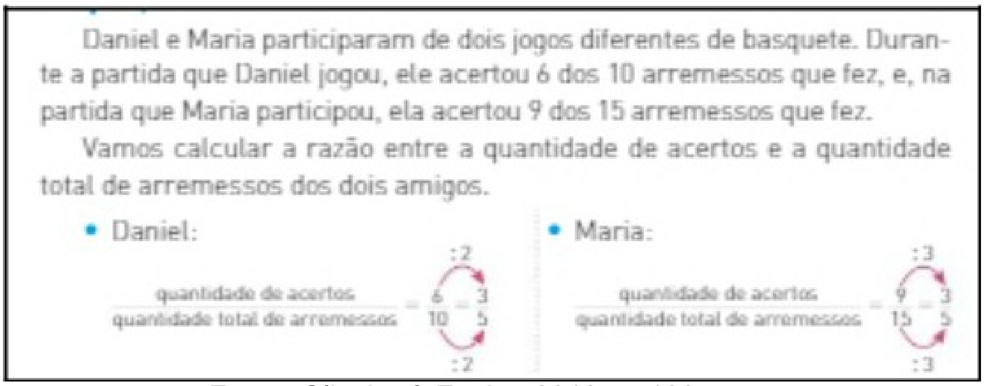
Portanto, são necessários 20 000 dm^3 de água salgada para obter 800 dm^3 de sal.

Fonte: Silveira, 2018, p. 189.

Percebemos que esses exemplos também foram resolvidos de acordo com a Argumentação Justificativa considerando, baseados em Balacheff (1988), que a justificação “é a exposição das razões que legitimam determinada atuação, comportamento ou acontecimento” (BALACHEFF, 1988 *apud* MONTEIRO, 2013, p. 3). Assim, apontamos a presença da Argumentação Justificativa neste livro.

Livro 6. No sexto livro analisado, "Matemática Geração Alpha", da SM Educação, dos autores Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita, de 2018, o tema é apresentado no capítulo 5, “Proporcionalidade e Porcentagem”. Os autores partem de dois exemplos, para chegarem à definição de que os números apresentados formam ou não uma proporção, conforme mostram as figuras 19 e 20.

Figura 19: Exemplo 1. Proporcionalidade.

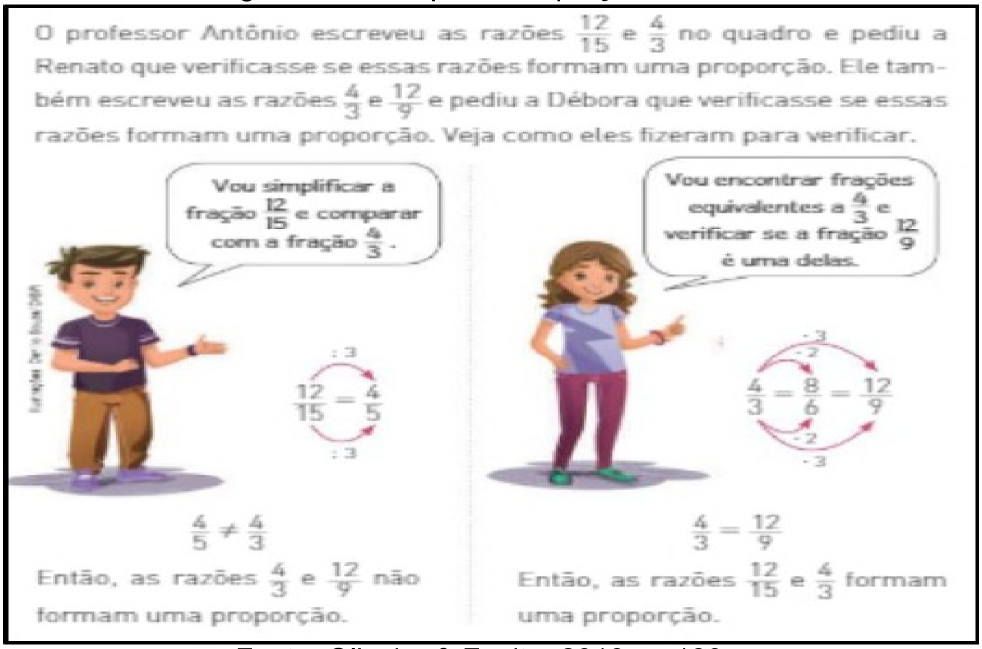

Daniel e Maria participaram de dois jogos diferentes de basquete. Durante a partida que Daniel jogou, ele acertou 6 dos 10 arremessos que fez, e, na partida que Maria participou, ela acertou 9 dos 15 arremessos que fez.

Vamos calcular a razão entre a quantidade de acertos e a quantidade total de arremessos dos dois amigos.

- Daniel: $\frac{\text{quantidade de acertos}}{\text{quantidade total de arremessos}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (:2)
- Maria: $\frac{\text{quantidade de acertos}}{\text{quantidade total de arremessos}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (:3)

Fonte: Oliveira & Fugita, 2018, p. 180.

Figura 20: Exemplo 2. Proporção ou não.


O professor Antônio escreveu as razões $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{3}$ no quadro e pediu a Renato que verificasse se essas razões formam uma proporção. Ele também escreveu as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ e pediu a Débora que verificasse se essas razões formam uma proporção. Veja como eles fizeram para verificar.

$\frac{4}{5} \neq \frac{4}{3}$

Então, as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ não formam uma proporção.

$\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

Então, as razões $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{3}$ formam uma proporção.

Fonte: Oliveira & Fugita, 2018, p. 180.

Após esses exemplos, os termos e a Propriedade Fundamental das Proporções são apresentados. Em seguida, o livro traz mais quatro exemplos e uma atividade, com questões que necessitam da aplicação da propriedade, verificando se os números dados formam ou não uma proporção, assim como, determinar o valor de x em cada caso.

Na próxima seção, os autores apresentam duas outras propriedades das proporções, conforme as figuras 21 e 22.

Figura 21: 1ª propriedade das proporções.

1ª propriedade

Dados a, b, c e d, não nulos, temos que:

- Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ e $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ e $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Fonte: Oliveira & Fugita, 2018, p. 183.

Figura 22: 2ª propriedade das proporções.

2ª propriedade

Dados a, b, c e d, não nulos, temos que:

- Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Fonte: Oliveira & Fugita, 2018, p. 184.

Ainda dentro dessa seção, são resolvidos dois exemplos, com a utilização das propriedades, assim como há duas pequenas atividades/exercícios, tendo as mesmas características dos exemplos apresentados.

Apontamos que essa obra abordou o tema de uma forma objetiva e clara. No entanto, nos exemplos e questões exploradas, não percebemos uma preocupação na busca da compreensão do processo de resolução, resumindo-se somente ao saber como fazer, configurando assim uma Argumentação Explicativa, de acordo com Attie (2016), utilizada com a finalidade de apenas esclarecer. Ou seja, que a partir da exploração do conteúdo, a finalidade, é somente saber "como" resolver, não há uma preocupação do "porquê" resolver dessa forma.

Livro 7. No livro "Matemática Coleção Apoema", de Edilson Longen, da Editora do Brasil, de 2018, o conteúdo em análise é apresentado no capítulo 19, intitulado “Razões e Proporções”. O conceito de proporção é dado a partir de uma situação que envolve escala, conforme podemos observar na figura 23.

Figura 23: Questão resolvida/escala.

Uma arquiteta projetou a planta de um pequeno apartamento. Ela desenhou a planta na escala 1 : 200. Se na planta a largura de determinada parede é de 3 cm, qual é a medida real correspondente a esses 3 cm?

Como a planta está na escala 1 : 200, cada 1 cm na planta corresponde a 200 cm de medida real. Assim, temos:

$$\frac{1}{200} = \frac{3\text{ cm}}{x\text{ cm}} \text{ ou } \frac{1}{200} = \frac{3}{x} \longrightarrow \text{proporção}$$

Fonte: Longen, 2018, p. 175.

A partir desse exemplo, o autor apresenta o conceito, os termos e a Propriedade Fundamental das Proporções. Logo depois são exploradas três situações utilizando a ideia do conceito, nas quais é indicado o método para definir medidas proporcionais utilizando a propriedade das proporções, sendo relembrado o conteúdo de equações polinomiais do 1º grau e aplicando-o para encontrar os termos desconhecidos. Na 3ª situação, na figura 24, além de encontrar a medida proporcional, foi feita a conversão de metro para quilômetro.

Figura 24: 3ª situação. Aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções.

Utilizando uma régua, Caio mediu a distância, em linha reta, entre as cidades de Canguçu e Pelotas, ambas no Rio Grande do Sul, conforme vemos no mapa ao lado. Utilizando a escala do mapa, determine a distância real entre essas cidades.

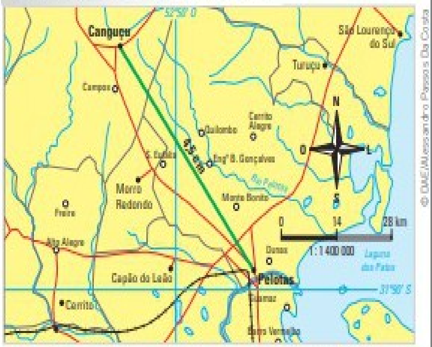
Resolução

$$\frac{1}{1400000} = \frac{4,5}{x}$$

$x = 4,5 \cdot 1\,400\,000$

$x = 6\,300\,000$ cm ou 63 000 m ou 63 km

Rio Grande do Sul (RS): político



Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2016. p. 177.

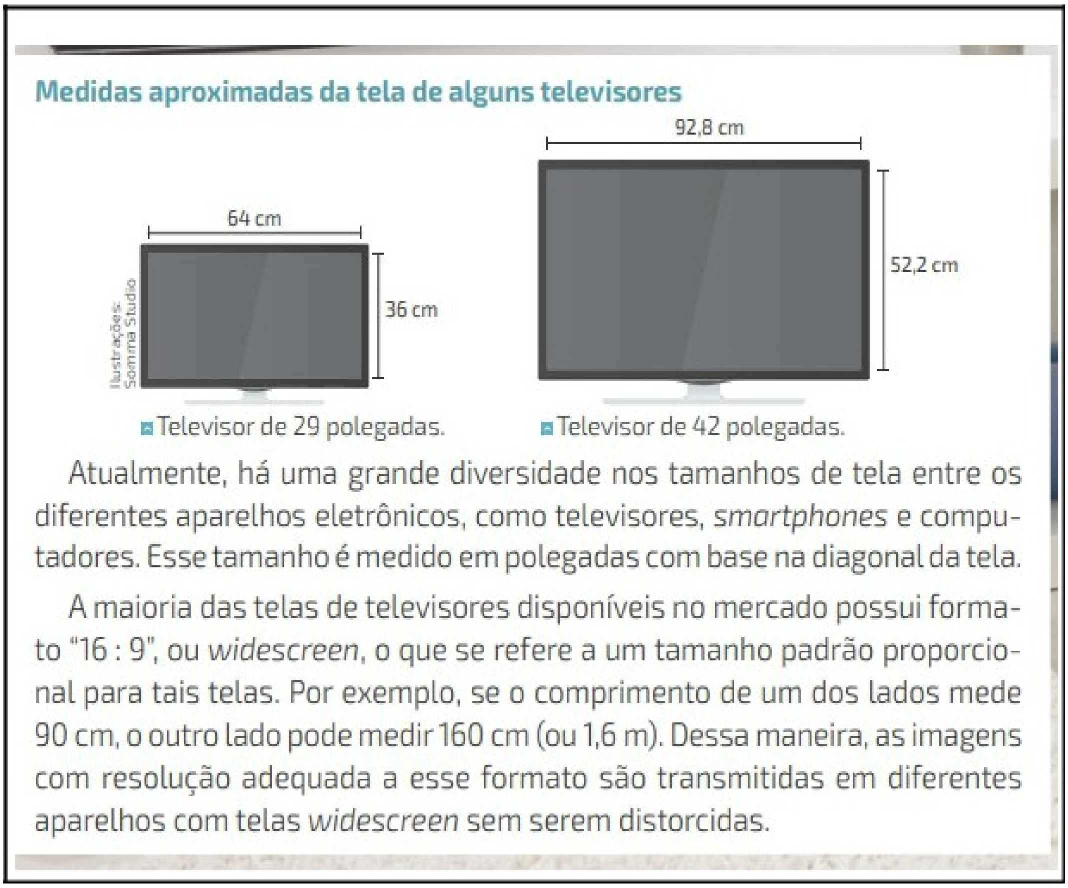
Fonte: Longen, 2018, p. 176.

Em seguida, são apresentadas atividades/exercícios para serem feitas no caderno. Questões do tipo: Verifique se as igualdades indicadas constituem proporções considerando a propriedade a seguir, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou ainda, determine o valor do termo desconhecido nas proporções. Resolva as equações considerando a propriedade da proporção. Após esta atividade, o autor apresenta uma situação comum do cotidiano, onde a ideia e o conceito de proporção são aplicados.

Assim, de acordo com o que foi exposto sobre o tema proporção, nesta obra, somente a Argumentação Explicativa pôde ser percebida, pois a preocupação parece ser apenas a de saber como se resolve tal exercício ou situação abordada. Salientamos como positiva a tentativa de aproximar o conteúdo a fatos do cotidiano. Entretanto, a obra não apresenta a fundamentação lógica para os procedimentos. Apoiado pela perspectiva de Balacheff (1988), Duval (1993) aponta que a explicação "é um discurso, cujo objetivo é tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, duma proposição ou dum resultado, fazendo, frequentemente, apelo à intuição".

Livro 8. No livro "Matemática Essencial" dos autores Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri da Editora Scipione, de 2018, o tema em análise está exposto em seu capítulo 10, intitulado, "Proporcionalidade". Inicialmente, os autores apresentam uma pequena atividade, que podemos observar na figura 25.

Figura 25: Proporcionalidade – Medidas aproximadas da tela de alguns televisores.


Medidas aproximadas da tela de alguns televisores

Atualmente, há uma grande diversidade nos tamanhos de tela entre os diferentes aparelhos eletrônicos, como televisores, *smartphones* e computadores. Esse tamanho é medido em polegadas com base na diagonal da tela.

A maioria das telas de televisores disponíveis no mercado possui formato "16 : 9", ou *widescreen*, o que se refere a um tamanho padrão proporcional para tais telas. Por exemplo, se o comprimento de um dos lados mede 90 cm, o outro lado pode medir 160 cm (ou 1,6 m). Dessa maneira, as imagens com resolução adequada a esse formato são transmitidas em diferentes aparelhos com telas *widescreen* sem serem distorcidas.

Fonte: Pataro & Balestri, 2018, p. 212.

Em seguida, são apresentados alguns questionamentos, dos quais destacamos o seguinte: "Em sua opinião, o que significam os números 16 e 9 na expressão "16 : 9"? Logo depois, discute-se o conceito de razão e em seguida é proposta uma atividade. O conceito específico de proporção, os termos e a propriedade fundamental não são trabalhados neste livro. Posteriormente, são apresentadas situações que envolvem duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais, sem ter trabalhado a ideia de Proporção, conforme apontado na figura 26.

Figura 26: Exercício sobre grandeza proporcionais.

Atividades Anote no caderno

5. Verifique em cada item se as grandezas são proporcionais.

a) A medida da altura de Aline aos 13 anos de idade era 1,55 m e aos 26 anos, 1,76 m. Nesse caso, as grandezas "idade" e "altura" são proporcionais? não

b) Em certa fábrica, uma máquina produz 188 peças em 4 h e 94 peças em 2 h de funcionamento. Nesse caso, as grandezas "quantidade de peças produzidas" e a "medida do tempo de funcionamento" são proporcionais? sim

c) Em um supermercado, o preço do pacote de arroz de 1 kg de certa marca custa R$ 3,70 e o de 5 kg, R$ 17,20. Nesse caso, as grandezas "massa" e "preço" são proporcionais? não

Fonte: Pataro & Balestri, 2018, p. 219.

Por fim, a obra em análise traz um pequeno texto, "Cidadania: explore essa ideia", abordando as vantagens e desvantagens em relação aos tipos de combustíveis, etanol ou gasolina. Como este livro não trabalhou diretamente o tema "Proporção", não podemos identificar quanto às categorias de Argumentação Explicativa ou Justificativa.

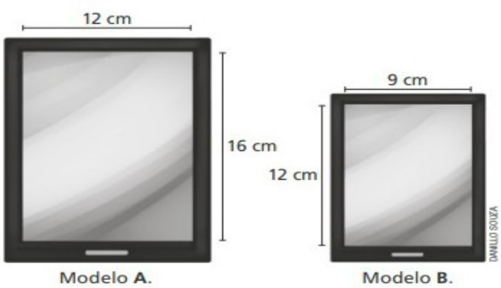
Livro 9. No livro "Matemática: Realidade e Tecnologia", de Joamir Souza, da Editora FTD, de 2018, o tema proporção é abordado no capítulo 6, a partir de uma situação, conforme aponta a figura 27.

Figura 27: Exemplo proposto – proporção.

Observe ao lado as dimensões das telas de dois modelos desses aparelhos.

Para a tela de cada modelo, vamos escrever uma razão entre o comprimento (maior medida) e a largura (menor medida), em centímetros.

- Modelo **A**. $\frac{16}{12}$
- Modelo **B**. $\frac{12}{9}$



Note que essas duas razões são iguais, pois:

$\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Nesse caso, dizemos que as razões $\frac{16}{12}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma **proporção**.

Fonte: Souza, 2018, p. 169.

A partir desse exemplo, o autor apresenta o conceito, os termos e a Propriedade Fundamental das Proporções. Logo em seguida, são propostas atividades do tipo:

“Quais das razões a seguir formam uma proporção com a razão $\frac{20}{34}$?”, e “O professor de Matemática escreveu uma proporção na lousa, porém um dos termos foi apagado, $\frac{8}{12} = \frac{14}{?}$ ”.

Posteriormente, são apresentados exemplos, nas figuras 28 e 29 e resolvidos exercícios/questões envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais, sempre de acordo com o conceito de proporção.

Figura 28: Exemplo 1. Propriedade Fundamental das Proporções.

Carlos leu na embalagem do biscoito a seguir que, em cada porção de 40 g do produto, havia 3 g de gordura saturada.

Note que as grandezas massa do biscoito e massa de gordura saturada são diretamente proporcionais, pois, se dobrarmos uma delas, a outra também dobra; se reduzirmos uma delas à metade, a outra também será reduzida à metade; e assim por diante.

Podemos calcular a massa total de gordura saturada (**x**) nos biscoitos de um pacote de 160 g usando a propriedade fundamental das proporções.

Massa do biscoito (g)	Massa de gordura saturada (g)
40	3
160	x

$$\frac{40}{160} = \frac{3}{x}$$
$$40 \cdot x = 160 \cdot 3$$
$$\frac{40x}{40} = \frac{480}{40}$$
$$x = 12$$

! Nessa situação, também poderia ser escrita a seguinte proporção: $\frac{40}{3} = \frac{160}{x}$

Assim, em um pacote de biscoitos desses há 12 g de gordura saturada.

DIVULGAÇÃO PNLD 2020 FTD

Fonte: Souza, 2018, p. 172.

Figura 29: Exemplo 2. Propriedade Fundamental das Proporções.

Observe outras situações-problema resolvidas de maneira análoga.

a) Observe a informação em destaque na lata de tinta.

Quantos litros dessa tinta são necessários para cobrir 75 m²?

Resolução:

Consideremos **x** a quantidade de litros de tinta para cobrir 75 m².

Quantidade de tinta (L)	Área (m²)
3,6	15
x	75

$$\frac{3{,}6}{x} = \frac{15}{75}$$
$$x \cdot 15 = 3{,}6 \cdot 75$$
$$\frac{15x}{15} = \frac{270}{15}$$
$$x = 18$$

Nessa situação, também poderia ser escrita a seguinte proporção: $\frac{3{,}6}{15} = \frac{x}{75}$

Assim, para cobrir 75 m² com essa tinta, são necessários 18 L.

b) Vicente é costureiro e comprou 16 m de certo tecido por R$ 220,80. Quanto Vicente pagaria por esse mesmo tecido caso tivesse comprado 7 m apenas?

Resolução:

Consideremos **x** o preço, em reais, de 7 m de tecido.

Quantidade de tecido (m)	Preço (R$)
16	220,80
7	x

$$\frac{16}{7} = \frac{220{,}80}{x}$$
$$16 \cdot x = 7 \cdot 220{,}80$$
$$\frac{16x}{16} = \frac{1545{,}60}{16}$$
$$x = 96{,}60$$

Nessa situação, também poderia ser escrita a seguinte proporção: $\frac{16}{220{,}80} = \frac{7}{x}$

Assim, Vicente pagaria R$ 96,60 caso tivesse comprado 7 m desse tecido.

Fonte: Souza, 2018, p. 173.

Posteriormente, há uma atividade que trabalha a identificação de situações em que grandezas estão relacionadas de maneira diretamente proporcional e, para complementar esta atividade, o autor solicita que os alunos resolvam, ao que ele denomina de “situações-problema”, que identificaram como diretamente proporcionais.

Em seguida é apresentada uma dessas situações-problema, envolvendo grandezas inversamente proporcionais, conforme apontamos na figura 30.

Figura 30: Situação-problema com grandezas inversamente proporcionais.

A família de Milena possui um sítio com um tanque em que cria 750 tilápias. Para alimentá-las por 18 dias, eles utilizam certa quantidade de ração. Pensando em ampliar a renda, a família vai aumentar o tanque e criar 1 350 tilápias, mantendo o consumo de ração por tilápia. Por quantos dias essa mesma quantidade de ração será suficiente para tratar as tilápias após esse aumento?

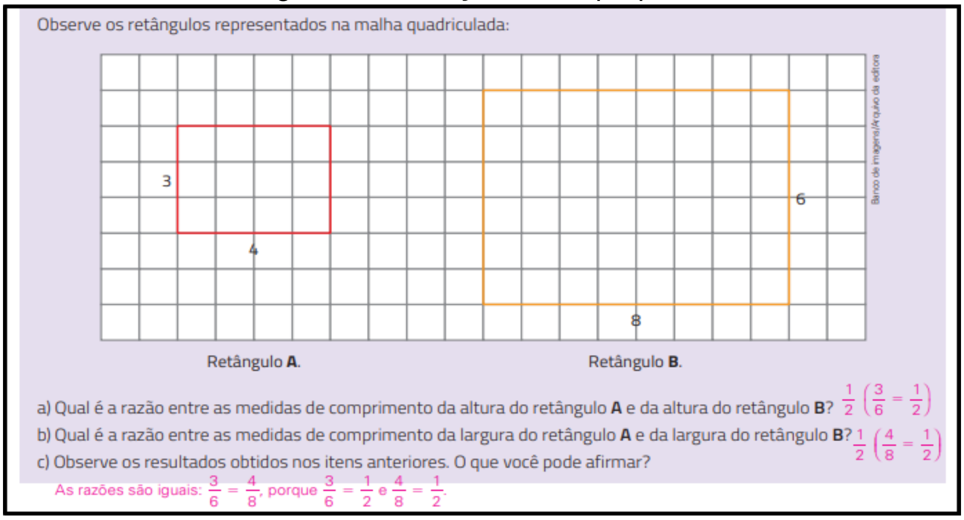
Fonte: Souza, 2018, p. 178.

Depois, o autor apresenta uma atividade, na qual trabalha cálculos envolvendo grandezas inversamente proporcionais e o uso de sentenças algébricas para expressar a relação entre elas.

Neste livro, podemos apontar a utilização da Argumentação Explicativa, pois nas resoluções dos exemplos resolvidos e dos exercícios/atividades propostas nesta obra, observamos a preocupação de somente mostrar como se faz, ainda que tenham sido apontados dois modos de escrita das proporções nas situações apresentadas, além do estímulo à construção de elaboração de “situações-problema” por parte dos alunos, incentivando o raciocínio lógico nessas construções. Entretanto, nas resoluções e na apresentação dos conceitos não aparecem as justificativas lógicas para isso.

Livro 10. No livro "Matemática: Projeto Teláris", de Luiz Roberto Dante, da Editora Ática, de 2018, o conteúdo proporção é apresentado no capítulo 7, “Proporcionalidade”, a partir da situação da figura 31.

Figura 31: Situação sobre proporcionalidade.



Fonte: Dante, 2018, p. 210.

Dessa situação, definiu-se proporção como a igualdade de duas razões. Em seguida, apresentou-se a propriedade fundamental das proporções, conforme a figura 32.

Figura 32: Propriedade Fundamental das proporções.

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Assim, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, então $a \cdot d = b \cdot c$.

Fonte: Dante, 2018, p. 210.

Depois, apresenta-se uma atividade, lista de exercícios, afim de aplicar os conhecimentos estudados, com questões que consistiam em determinar a “razão entre valores fornecidos em cada item” e “verifique quais das razões da atividade formam uma proporção, escrevendo-a simbolicamente e como se lê” e “Copie as igualdades no caderno e complete-as de modo a formar proporções”. proporção, assim como alguns problemas envolvendo situações do cotidiano, utilizando o conceito e a propriedade das proporções.

Assim, a proporcionalidade entre grandezas também é trabalhada, com exemplos e exercícios propostos.

E por fim, é proposto e apresentado a leitura do texto, “A proporção na Arte: Antiguidade e Renascimento”, estimulado o compartilhamento do que foi compreendido e das informações mais interessantes discutidos sobre o tema.

Em relação às categorias de Argumentação, podemos afirmar que neste livro há a predominância da Argumentação Explicativa, pois nos exemplos apresentados e nas atividades propostas, observamos somente a preocupação de mostrar a maneira de proceder, ou seja, como se resolve tal exercício, sem a fundamentação lógica para isso.

Livro 11. No livro Trilhas da Matemática, do autor Fausto Arnaud Sampaio, Editora Saraiva, de 2018. O conteúdo de proporção está registrado na unidade 6, capítulo 13, “Razão e Proporção”, visto a partir de um exemplo para perceber se as razões formam na ordem uma proporção; e assim, chegando-se a definição, “Uma proporção é uma igualdade entre razões”, conforme apresentado na figura 33.

Figura 33: Razão e Proporção.

Observe a razão entre a medida da largura e a medida da altura de cada imagem:

Imagem A	**Imagem B**	**Imagem C**
$\frac{40}{50} = \frac{40:10}{50:10} = \frac{4}{5}$	$\frac{30}{25} = \frac{30:5}{25:5} = \frac{6}{5}$	$\frac{24}{30} = \frac{24:6}{30:6} = \frac{4}{5}$

Note que as imagens A e C apresentam a mesma razão entre as medidas consideradas. Dizemos que as razões $\frac{40}{50}$ e $\frac{24}{30}$ formam uma **proporção**, pois: $\frac{40}{50} = \frac{24}{30}$

Entretanto, as razões entre as medidas consideradas correspondentes às imagens A e B não formam uma proporção, pois $\frac{40}{50} \neq \frac{30}{25}$; do mesmo modo, as razões entre as medidas consideradas correspondentes às imagens B e C não formam uma proporção, pois $\frac{30}{25} \neq \frac{24}{30}$.

Fonte: Sampaio, 2018, p. 232.

Em seguida são apresentados um exemplo resolvido e atividades com questões, afim de aplicar o que se aprendeu sobre equações, para obter um termo desconhecido em uma proporção, conforme a figura 34.

Figura 34: Exemplo 1. Resolução de uma proporção.

Exemplo:

Para qual valor de x temos a proporção $\frac{x}{5} = \frac{42}{35}$?

$$\frac{x}{5} \cdot 35 = \frac{42}{35} \cdot 35 \text{ (Multiplicando ambos os lados da igualdade por 35)}$$

$$7x = 42$$

$$x = \frac{42}{7} \text{ (Dividindo ambos os lados da igualdade por 7)}$$

$$x = 6$$

Outro modo de obter um termo desconhecido de uma proporção é por meio de frações equivalentes.

No caso da proporção anterior, temos: $\frac{x}{5} = \frac{42}{35}$ ($\cdot 7$ no numerador; $\cdot 7$ no denominador)

Como x multiplicado por 7 resulta em 42, conclui-se que $x = 6$.

Fonte: Sampaio, 2018, p. 232

Figura 35: Exemplo 2. Resolução de uma proporção.

Resolução

a) Podemos escrever a razão $\frac{\text{número de partes de suco concentrado}}{\text{número de partes de água}}$ e, consequentemente, montar a proporção.

$$\frac{x}{12} = \frac{1}{2}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por 12, obtemos:

$$\frac{x}{12} \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 12$$

$$x = 6$$

b) Para cada 2 partes de água, temos 1 parte de suco.

Temos, então, um total de 3 partes da mistura água-suco.

Para obter 30 partes dessa mistura, devemos multiplicar cada parte por 10, pois $30 : 3 = 10$.

- número de partes de suco concentrado: $1 \cdot 10 = 10$

Fonte: Sampaio, 2018, p. 233.

Depois foi apresentada uma atividade proposta, uma lista de questões, assim como, um texto na seção, “Trabalhando com a informação”. E por fim, tem-se uma lista de exercícios, atividades complementares.

Neste livro, podemos perceber a presença da Argumentação Justificativa, já que o autor apresenta a fundamentação lógica para resolução da propriedade fundamental das proporções.

5.2 Resultados

Para este estudo, tivemos como objetivo identificar as categorias de argumentação utilizadas em onze livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental recomendados pelo guia do PNLD 2020. Outro objetivo, complementar, foi o de apontar possibilidades do ensino de proporção, buscando a compreensão do processo por trás do procedimento para se chegar ao resultado.

Tivemos a pretensão de identificar as categorias de argumentação que há nesses livros e se elas são do tipo - Explicativa ou Justificativa, ou seja, se há a predominância de um ensino em que se prioriza o procedimento, de como fazer, ou se há também a busca da compreensão do processo, do porquê fazer assim. Como é evidente, consideramos a argumentação justificativa a mais adequada a um ensino que se proponha a formar indivíduos críticos, a qual pode "contribuir com o propósito de ampliação do conhecimento dos alunos, e também a entenderem as causas dos procedimentos e algoritmos utilizados" (ATTIE, 2016, p. 2266).

Após analisarmos o conteúdo de "proporção", em relação as categorias de argumentação, nos 11 livros didáticos adotado pelo guia do PNLD 2020, das diversas coleções apontadas, percebemos que em geral o conteúdo está caracterizado dentro de uma linha de raciocínio, em que é evidente o processo de Argumentação Explicativa, em que busca "convencer" o aluno de como fazer. Somente em três livros adotados, percebemos que há uma preocupação de, além de mostrar como se faz, busca-se uma compreensão do porquê fazer daquela maneira. No entanto, essa abordagem, em nosso ponto de vista, ainda não pode ser considerada satisfatória, pelo fato de aparecer nos livros didáticos, ainda de forma sucinta. No que se refere ao uso da argumentação, em relação a matemática na escola, aponta Attie (2013) que

> enquanto a matemática do pesquisador matemático deve envolver a compreensão dos processos, o uso de argumentação e a possibilidade de descobertas, a matemática escolar parece se restringir à memorização de fórmulas e ao treinamento nos procedimentos (ATTIE, 2013, p. 60).

Assim, de acordo com Sales (2010) e Attie (2016), podemos caracterizar uma Argumentação Explicativa, quando uma conclusão é esclarecida a partir de uma descrição de procedimentos adotados, "como", enquanto uma Argumentação Justificativa, corresponde ao "como" e do "porquê" do envolvido no procedimento.

Assim, ao identificarmos as categorias de argumentação presentes nos livros didáticos analisados, classificamos em Argumentação Explicativa ou Justificativa. Porém, em duas obras não foi possível identificar nenhuma categoria de Argumentação, conforme mostra o quadro 3.

Quadro 3: Categorias de Argumentação X Livros Didáticos

Título	Autor(es)	Categoria
Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini.	**Explicativa**
Araribá Mais Matemática	Mara R. G. Gay/Willian R. Silva	**Justificativa**
A Conquista da Matemática	José R. Giovanni Jr/Benedito Castrucci	**Explicativa**
Convergência Matemática	Eduardo Chavante	**Ausência**
Compreensão e Prática	Ênio Silveira	**Justificativa**
Matemática Geração Alpha	Carlos N. C. de Oliveira/Felipe Fugita	**Explicativa**
Coleção Apoema	Edilson Longen	**Explicativa**
Matemática Essencial	Patrícia M. Pataro/Rodrigo Balestri	**Ausência**
Realidade e Tecnologia	Joamir Souza	**Explicativa**
Matemática: Projeto Teláris	Luiz Roberto Dante	**Explicativa**
Trilhas da Matemática	Fausto Arnaud Sampaio	**Justificativa**

Fonte: Autor, 2021

Dessa forma, podemos observar como, de acordo com nosso referencial teórico, Sales (2010) e Attie (2016), há uma predominância da Argumentação Explicativa ou até mesmo uma ausência de argumentação, o que consideramos não ser o panorama desejável para a formação de alunos críticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho, tivemos a pretensão de identificar as categorias de argumentação classificando-as em Explicativa ou Justificativa, em relação ao ensino de proporção abordado nos livros didáticos recomendados pelo guia do PNLD, 2020. Uma observação a ser feita é relativa ao tipo de ensino que é privilegiado a partir de cada categoria. Se um ensino reprodutivo em que o único foco é o procedimento do "como fazer", ou um ensino em que, além disso, também se prioriza a compreensão do processo, do "porquê fazer assim". Ainda buscamos apontar em relação ao ensino de proporção, as possibilidades de um ensino pautado na compreensão do procedimento para se chegar ao resultado desejado.

Assim, ao fundamentarmos nossa pesquisa, destacamos alguns conceitos fundamentais relacionados à argumentação, realizamos o levantarmos das pesquisas que abordaram o ensino de proporção, fazendo uma breve análise das mesmas e, depois, fizemos um percurso sobre a história das proporções. Em seguida, abordamos a importância do conteúdo proporção e a resolução de um exemplo na perspectiva da cada uma das categorias de Argumentação, Explicativa e Justificativa. Por fim, fizemos a análise dos livros didáticos propostos e trouxemos os resultados finais e as ideias conclusivas da nossa pesquisa.

Assim, ao analisarmos os onze livros didáticos, percebemos que é possível identificarmos a presença da Argumentação Explicativa na maioria (54,5%, ou seja, 06 obras) dos livros adotados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático. Em alguns livros (18,2%, ou seja, 02), não foi possível identificar essas categorias de argumentação, devido a uma abordagem superficial em relação ao conteúdo em análise. Somente na minoria (27,3%, ou seja, 03) dos livros analisados, pudemos identificar a presença da Argumentação Justificativa.

De acordo com o que defendemos para um ensino de matemática voltado para uma formação cidadã, embora a matemática esteja presente em todos os momentos da vida de um indivíduo, ainda que ele não o perceba, consideramos que é preciso dar sentido para o que está sendo estudado. Assim, além da contextualização, defendemos fortemente a utilização da Argumentação Justificativa no ensino de matemática, considerando que, com a prática frequente e contínua de resolução de situações matemáticas com a presença de uma base que as fundamente, torna-se possível a compreensão dos processos que fundamentam os procedimentos e algoritmos utilizados.

Consideramos que a Argumentação Justificativa procura apresentar com argumentos lógicos fundamentados da compreensão do como e do porquê dos procedimentos e algoritmos utilizados. Neste caso, em relação ao ensino de matemática, esse tipo de argumentação pode contribuir para uma compreensão efetiva do conteúdo estudado, em nosso caso, proporção.

Portanto, no presente estudo buscamos defender que não basta somente saber como se faz. Consideramos de suma importância entender, além disso, também o porquê se faz daquela maneira. Assim, à medida em que o estudante compreende o processo, pode também apresentar um maior domínio do conteúdo estudado, pois, além de saber empregar as fórmulas, pode conseguir também ampliar e validar, com justificativas lógicas, os raciocínios e procedimentos utilizados. Assim, enfatizamos nossa defesa da utilização da argumentação justificativa no ensino de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, O. J. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.3, pp.386-397, 2012.

AGUILAR Jr, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e Argumentação Matemática de Alunos do Ensino Fundamental. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, nº 2, p. 133-147, 2012.

ALMEIDA, R. G. **Razão e proporção para além da sala de aula**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2015.

ANDRADE, T. M. **A proporção divina: estudando a beleza do Número de Ouro na Matemática**. Dissertação (Mestrado em Matemática). IGCE, Universidade Estadual Paulista. Franca, 2020.

ATTIE, J. P. **Relações de Poder no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação). 164 p. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2013.
_________. Argumentação no Ensino de Matemática. Seminário Internacional de Estudos Sobre Discurso e Argumentação, 3. **Anais, III SeDiAr**. p. 2259-2268. São Cristóvão, 2016.

ATTIE, J. P.; KRPAN, C. M. Argumentação em Livros Didáticos de Matemática: Brasil e Canadá. **Interfaces Brasil/Canadá**. Florianópolis/Pelotas/São Paulo, v. 20, 2020, p. 01-20.

ATTIE, J. P.; MOURA, M. O. A altivez da ignorância matemática: Superbia Ignorantiam Mathematicae. **Educação e Pesquisa** [online]. 2018, v. 44 e152362. Disponível em: https://doi.org/ 10.1590/S1517-9702201702152362 Acesso: 20 Out 2021.

BALACHEFF, N. **Une étude des processos de preuve em mathématique chez des élèves de Collège**. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BARBOSA, M. J. F. **Uma sequência didática para o Teorema de Tales**. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

BARNABÉ, F. M. **A melodia das razões e proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011. doi: 10.11606/D.48.2011.tde-07022012-152052. Acesso em: 20 ago. 2021.

BERNAL, M. M. **Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC. Florianópolis, 2004.

BIANCHINI, E. **Matemática – Bianchini**. 9ª ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BOAVIDA, A. M. R. **A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. 2005. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Educação. Lisboa, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

________. Ministério da Educação. **PNLD 2020: Matemática – Guia de Livros Didáticos**. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2020.

CALDATO, J. C; UTSUMI, M. C; NASSER, L. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. **Triângulo.** Uberaba, v. 10 n. 2 p.74-93 Jul -dez 2017.

CASTRO, F. A. **A relação da proporcionalidade com outros temas matemáticos**. 139 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, MG, 2015.

CHAVANTE, E. R. **Convergências Matemática**. São Paulo: Edições SM, 2018.

CORDEIRO, E. M.; OLIVEIRA, G. S. de. As Metodologias de Ensino Predominantes nas Salas de Aula. In: Encontro de Pesquisa em Educação, 7. **Anais**. Uberaba: Universidade de Uberaba, 2015.

DA SILVA, C. M. S. Onde está a proporção? **RHMP**, Natal, v. 1, n. 1, Mar. 2014.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. São Paulo: Ática, 2018.

DASILVA, L. A.; SILVEIRA, A.; FERREIRA, G. Classificando provas de alunos do ensino médio segundo a tipologia de Balacheff. In: CIAEM-IACME, 14. **Anais.** Chiapas, México, 2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERRET, R. B. **História e Filosofia da Matemática**. Aracaju: Unit, 2017. Disponível em :http://www.infoescola.com/matematica/geometria-plana-conceitos-historicos-e-calculo-deareas Acesso em: 25 fev. 2022.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, Ano 3, n°4, p. 1-37, 1995.

FOSSA, J. A. RAZÃO E PROPORÇÃO: A herança antiga. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 23, p. 01-06, 2020. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/109. Acesso em: 25 fev. 2022.

GALVÃO, M. E. E. L; SOUZA, V. H. G. e MIASHIRO P. M. A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 1127-1144, dez. 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a15 Acesso: 12 Set. 2021.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá Mais Matemática**. São Paulo: Moderna, 2018.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisas**. São Paulo: Atlas, 2017.

GIOVANNI JR, J. R..; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2018.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/261214412_A_argumentacao_matematica_na _perspetiva_da_professora_Rita Acesso: 04 Set 2021.

KISTEMANN JR., M. A. Sobre a teoria das proporções, o Método da Exaustão e os incomensuráveis. **Revista de Educação Matemática**, v. 11, n. 13, p. 47 - 62, 31 jul. 2008.

LAGRANGE, J. L. **Lições sobre matemáticas elementares**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

LIVY, S.; VALE, C. First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. **Mathematics Teacher Education and Development**, Nova Zelândia, v. 13, n. 2, p. 22-43. 2011.

LONGEN, A. **Apoema Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

MARCEN, A. M. O.; SALLAN, J. M. M. La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. **RELIME**, Ciudad de México, v. 16, n. 3, p. 317-338, nov, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.12802/relime.13.1632 Acesso: 12 Set. 2021.

MELO, P. C. O. **A lousa digital no ensino de razão e proporção: uma análise das interações**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações**. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

ONTEIRO, R.; SANTOS, L. A argumentação matemática na perspectiva da professora Rita. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática. **Ata do EIEM**. p. 170-184. Covilhã, Portugal, 2013.

MOREIRA, M, M.; SILVA, A. G. F. G.; ALVES, F. C. **O Ensino de Matemática na Educação Contemporânea**: o devir entre a teoria e a práxis. Iguatu: Quipá Editora, 2021.

OLIVEIRA, C. N. C.; FUGITA, F. **Geração Alpha Matemática**. São Paulo: SM Educação, 2018.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. **A Argumentação e provas no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PATARO, P. R. M.; BALESTRI, R. D. **Matemática Essencial**. São Paulo: Scipione, 2018.

PAULA, M. B. **Proporcionalidade: uma análise do caderno do professor** 7º ano (antiga 6ª série) da proposta implementada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

PONTES, M. G. O. **Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. 223f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1996. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253739. Acesso em: 20 ago. 2021.

PORTO, E. R. S. **Raciocínio proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA**. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

RAMOS, P. L. S. **Razão áurea: uma proposta para o ensino**. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

RESENDE, V. S. Três grandes marcos do resgate retórico: Perelman, Toulmin e Meyer. **Revista Eletrônica de Ciências Sociais**, ano 4, ed. 10, mai./ago. 2010.

SÁ, E. B. F. **Argumentação de estudantes da EJA - Ensino Médio no processo de aprendizagem de matemática**. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2021.

SALES, A. **Práticas Argumentativas no Estudo da Geometria por Acadêmicos de Licenciatura em Matemática.** 2010. 243f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2010.
_________ - **Argumentação e raciocínio: uma revisão teórica**. Nova Andradina: Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2011.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da Matemática**. São Paulo: Saraiva, 2018.

SANTOS, M. C. Um exemplo de situação-problema – o problema do bilhar. **Revista Professor de Matemática** – RPM, n. 50. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/50/7.htm. Acesso em 27 de dezembro de 2022.

SANTOS, M. M.; NASCIMENTO, E. S.; ATTIE, J. P. (2020), Argumentação de licenciandos e professores de matemática. *In*: MOREIRA, M, M.; SILVA, A. G. F. ALVES, F. C. O **Ensino de Matemática na Educação Contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu/CE: Quipá Editora, 2021.

SASSERON, L. H; CARVALHO, A. M. P. Construindo argumentação na sala de aula a presença do ciclo argumentativo, os indicadores de alfabetização científica e o padrão de Toulmin. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 97-114, 2011.

SILVA, D. P. C. **Alguns marcos históricos relativos a um conceito matemático elementar: um estudo sobre proporções**. Dissertação (Mestrado em Matemática).

Formação Contínua de Professores. Universidade do Minho. Braga, 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/1822/22768. Acesso em: 23 fev. 2022.

SILVEIRA, E. **Matemática: Compreensão e Prática**. São Paulo: Moderna, 2018.

SOUZA, J. R. **Matemática Realidade & Tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018.

TOBIAS, P. R. N. A. **Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade**. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2018.

TOULMIN, S. E. **Os usos do argumento**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

VIZOLLI, I. **Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2006.