



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA**



VALÉRIA DE JESUS PADILHA

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE A PRESENÇA
DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM
DE 2017-2020**

SÃO CRISTÓVÃO-SE
Maio, 2022

VALÉRIA DE JESUS PADILHA

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE A PRESENÇA
DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM
DE 2017-2020**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, da Universidade Federal de Sergipe – PPGECIMA/UFS, pela linha de pesquisa **Currículo, didáticas e métodos de ensino das ciências naturais e matemática.**

ORIENTADORA: Profa. Dra. Denize da Silva Souza.

SÃO CRISTÓVÃO-SE
Maio, 2022

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

P123a Padilha, Valéria de Jesus.
Uma análise praxeológica sobre a presença de sólidos geométricos em provas do ENEM de 2017-2020 / Valéria de Jesus Padilha; orientadora Denize da Silva Souza. – São Cristóvão, SE, 2022.
175 f.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)
– Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Educação. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Geometria - Estudo e ensino. 4. Ensino médio. I. Souza, Denize da Silva, orient. II. Título.

CDU 37.022

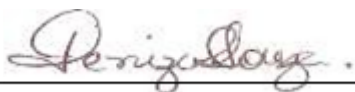
**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE A PRESENÇA DE SÓLIDOS
GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM DE 2017-2020**

VALÉRIA DE JESUS PADILHA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe para a defesa de Mestrado.

Aprovada pela banca examinadora em 31 de maio de 2022

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Denize da Silva Souza
Universidade Federal de Sergipe - UFS
(Presidente e Orientadora)



Prof. Dr. Saddy Ag Almouloud
Universidade Federal da Bahia - UFBA
(Membro Externo à Instituição)



Profa. Dra. Ivanete Batista dos Santos
Universidade Federal de Sergipe - UFS
(Membro Interno)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de dedicar esse trabalho à duas pessoas, minha irmã Patrícia, por ouvir as minhas reclamações, indecisões e por sempre me apoiar com palavras e ações e à minha orientadora, Prof^a Dr^a Denize da Silva Souza, por acreditar e confiar na minha capacidade e potencialidade, o que me deu forças para continuar na pesquisa e ter êxito, mesmo diante das dificuldades que passei nesse período de pandemia.

Agradeço à Deus e à minha família, por desde sempre cuidarem de mim e possibilitarem a minha dedicação à pesquisa.

À banca, Prof^a. Dr^a. Ivanete Batista dos Santos e o Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, por apresentarem contribuições valiosas ao meu texto e para mim, como pesquisadora.

À todas as professoras e professores do mestrado pelos ensinamentos.

Aos amigos e colegas de curso, que compartilharam das incertezas, trabalhos e apresentações durante o mestrado.

Ao grupo de pesquisa ao qual faço parte, Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisas em Educação Matemática – NCPPEM /UFS/CNPq.

Às minhas parceiras desde a graduação, do grupo Formigueiro da Balbúrdia, Narinha Milena, Nailys, Juliana, Marcela, Eressiely e Cristina que sempre estiveram dispostas a me ajudar ou simplesmente dizer uma palavra amiga.

Gratidão a todos!

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa que teve como objetivo analisar quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020. A razão para este objeto deve-se ao fato de avaliações, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), influenciarem e serem influenciadas pelas orientações curriculares e didáticas presentes em documentos oficiais para o ensino médio, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). O Enem é uma avaliação de larga escala no âmbito nacional, servindo de indicativo para análise/criação de políticas públicas a esse nível de ensino brasileiro; para o ingresso de estudantes de todo o país em universidades públicas e privadas, em alguns casos, até em instituições de outros países. Ao ter em conta a importância desse exame, além da problemática acerca do ensino de Geometria, mais especificamente, os sólidos geométricos e instigadas pelo problema de pesquisa presente na Teoria Antropológica do Didático (TAD), buscamos compreender como este objeto matemático vive nessa avaliação e em quais condições e restrições isto ocorre. Deste modo, por meio de uma pesquisa qualitativa de caráter documental, nos fundamentamos nos pressupostos de Chevallard e Gáscon, para analisar as dimensões epistemológicas, econômicas e ecológicas relacionadas ao nosso problema de pesquisa. Nas dimensões econômica e ecológica, analisamos a presença dos sólidos geométricos em documentos curriculares nacionais do ensino médio (PCNEM e PCN+), além de analisarmos dois livros didáticos de matemática do 2º ano desse mesmo nível de ensino, aprovados pelos PNLD's vigentes ao período de realização das provas escolhidas para análise (PNLD 2015 e PNLD 2018). Na análise dessas dimensões, percebemos uma ênfase dada à Geometria métrica, principalmente pelos livros didáticos, contendo um número considerável de tarefas voltadas ao cálculo das medidas de área da superfície e de volume dos sólidos. Ou ainda, para descobrir medidas que não estão explicitadas. Realizar essas análises, possibilitou a elaboração do nosso Modelo Praxeológico de Referência (MPR) e, como o próprio nome explicita, esse modelo serviu de referência para a nossa análise praxeológica das provas do Enem de 2017 a 2020, com a qual inferimos que há uma predominância de tarefas voltadas ao cálculo de medidas de volume.

Palavras-chave: Ensino médio. Praxeologias matemáticas. Provas do ENEM. Sólidos geométricos.

ABSTRACT

This dissertation presents a research in which had as a main objective analyzing what are the mathematical praxeologies related to geometric solids present in Enem tests from 2017 to 2020. The reason for this object is due to the fact that evaluations, such as the National High School Exam (Enem), influence and are influenced by the curricular and didactic guidelines present in official documents for high school, such as the National Curricular Parameters for High School (PCNEM), Complementary Educational Guidelines to the National Curricular Parameters (PCN+). Enem is a large-scale assessment at the national level, serving as an indication for the analysis/creation of public policies at this level of Brazilian education; for the admission of students from all over the country to public and private universities, in some cases even to institutions abroad. By taking into account the importance of this exam, in addition to the problem about the teaching of geometry, more specifically, the geometric solids and instigated by the research problem present in the Anthropological Theory of Didactics (ADT), we seek to understand how this mathematical object lives in this evaluation and under what conditions and restrictions this occurs. Thus, through a qualitative research of documentary character, we are based on the assumptions of Chevallard and Gáscon, to analyze the epistemological, economic and ecological dimensions related to our research problem. In the economic and ecological dimensions, we analyzed the presence of geometric solids in national high school curriculum documents (PCNEM and PCN+), in addition to analyzing two 2nd year mathematics textbooks of the same level of education, approved by the current PNLD's at the time of conclusion of the tests chosen for analysis (PNLD 2015 and PNLD 2018). In the analysis of these dimensions, we noticed an emphasis given to metric geometry, mainly by textbooks, containing a considerable number of tasks aimed at calculating surface area and volume measurements of solids. Or even, to discover measures that are not explicit. Carrying out these analyzes enabled the elaboration of our Praxeological Reference Model (PRM) and, as the name itself explains, this model served as a reference for our praxeological analysis of the Enem exams from 2017 to 2020, in which we infer that there is a predominance of tasks related to calculating volume measurements.

Keywords: High school. Mathematical praxeologies. ENEM exams. Geometric solids.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ANPED	Associação Nacional de Pós- Graduação e Pesquisa em Educação
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CBET	<i>Competence Based Education and Training</i>
CQR	Caderno de Questões Rosa
CTAI	Curso Técnico em Agropecuária Integrado
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
DDMat	Grupo de Estudos em Didática da Matemática
EJAEM	Educação de Jovens e Adultos do Ensino Médio
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IES	Instituições de Ensino Superior
IMPA	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
LDBEN	Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MED	Modelo Epistemológico de Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MMM	Movimento da Matemática Moderna
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCNEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PEAMAT	Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PEP-FP	Percurso de Estudo e Pesquisa de Formação Profissional
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio
PNUD	Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional
ProUni	Programa Universidade para Todos

RP	Programa Residência Pedagógica
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEESP	Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
SESU	Secretaria de Ensino Superior
SISU	Sistema de Seleção Unificada
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TCT	Teoria Clássica dos Testes
TD	Transposição Didática
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TRI	Teoria de Resposta ao Item
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFS	Universidade Federal de Sergipe
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura
UNIBAN	Universidade Bandeirante de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNICEF	Fundo das Nações Unidas para a Infância

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Escala dos níveis de codeterminação matemática e didática	31
Figura 2. Representação de um poliedro e seus elementos	33
Figura 3. MER dos sólidos geométricos	51
Figura 4. Organização dos conteúdos da coleção Matemática: ciência e aplicações....	60
Figura 5. Organização dos conteúdos da coleção #Contato Matemática.	61
Figura 6. Exemplo sobre sólidos geométricos no PCN+.	79
Figura 7. Exemplo do tipo de tarefa 11	85
Figura 8. Tarefa 13	85
Figura 9. Tarefa 15	88
Figura 10. Seção meridiana de um cilindro oblíquo.	89
Figura 11. Exemplos de não poliedros	93
Figura 12. Exemplos de cilindros e cones	94
Figura 13. Tarefa 17	95
Figura 14. MED dos sólidos geométricos	98
Figura 15. MPR dos sólidos geométricos.....	103
Figura 16. Exemplo de tarefa envolvendo apenas grandezas e medidas.....	106
Figura 17. Capa do caderno de questões – edição 2017.....	107
Figura 18. Ilustração da questão 152 do Enem edição 2017, prova de primeira aplicação	109
Figura 19. Questão 177 do Enem edição 2017, prova de primeira eaplicação	111
Figura 20. Alternativas da questão 177 do Enem edição 2017, prova de primeira aplicação	111
Figura 21. Questão 166 do Enem edição 2017, prova de reaplicação.....	115
Figura 22. Alternativas da questão 166 do Enem edição 2017, prova de reaplicação	116
Figura 23. Questão 176 do Enem edição 2018, prova da 1ª aplicação.....	119
Figura 24. Questão 148 do Enem edição 2018, prova da reaplicação.....	120
Figura 25. Questão 167 do Enem edição 2018, prova da reaplicação.....	121
Figura 26. Alternativas da questão 167 do Enem edição 2018, prova de reaplicação	121
Figura 27. Questão 176 do Enem edição 2018, prova de reaplicação.....	123
Figura 28. Questão 175 do Enem edição 2019, prova da reaplicação.....	131
Figura 29. Alternativas da questão 175 do Enem edição 2019, prova da reaplicação	132
Figura 30. Tabela da questão 176 do Enem edição 2019, prova de reaplicação	133
Figura 31. Questão 136 do Enem edição 2020, prova de primeira aplicação	136
Figura 32. Questão 170 do Enem edição 2020, prova digital.	145
Figura 33. Questão 174 do Enem edição 2020, prova digital	146

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Pesquisas do Repositório institucional da UFS	38
Quadro 2. Levantamento dos trabalhos acerca da TAD, da Geometria e do ensino médio	40
Quadro 3. Focos temáticos	44
Quadro 4. Tipos de tarefa e principais conceitos	50
Quadro 5. Levantamento dos trabalhos acerca da Geometria e do Enem.....	70
Quadro 6. Focos temáticos.....	73
Quadro 7. Tipos de tarefas e objetos de estudo.....	99
Quadro 8. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2017 .	113
Quadro 9. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2018 .	125
Quadro 10. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2019	127
Quadro 11. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2019	134
Quadro 12. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2020	139
Quadro 13. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2020	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Livro didático Matemática: ciência e aplicação	91
Tabela 2. Livro didático #Contato Matemática	96

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1.1 JUSTIFICATIVA PESSOAL	15
1.2 PROBLEMÁTICA	17
1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS	22
1.4 ASPECTOS TEÓRICOS: TERMOS PRIMITIVOS DA TAD.....	25
1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	26
2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	28
2.1 O PROBLEMA DIDÁTICO E SUAS DIMENSÕES	34
2.2. O QUE AS PESQUISAS REVELAM SOBRE A TAD E GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO.....	37
2.3 SOBRE OS MODELOS DO PROBLEMA DE PESQUISA	48
3. ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: DUALIDADE, REFORMAS, ENEM	52
3.1 ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: UMA POLÍTICA DE DUALIDADES	52
3.2 ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: UM PANORAMA ACERCA DOS DOCUMENTOS CURRICULARES	54
3.2.1 Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM).....	56
3.2.2 Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) e PCN+	57
3.2.3 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	58
3.3 GUIAS DOS PNLD's 2015 E 2018	59
3.4 ENEM: O CONTEXTO INVESTIGATIVO.....	62
4. OBJETO DE ESTUDO: SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E O ENEM	67
4.1 O QUE AS PESQUISAS REVELAM SOBRE O ENEM	67
4.2 DIMENSÃO ECONÔMICA	77
4.2.1 Documentos Curriculares Nacionais e Matriz do Enem	78
4.2.2 Livros didáticos	83
4.3 DIMENSÃO ECOLÓGICA	99
5. A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÕES 2017 – 2020)	105
5.1 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2017).....	108
5.2 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2018).....	117

5.3 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2019).....	126
5.4 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2020).....	135
CONSIDERAÇÕES FINAIS	151
REFERÊNCIAS	159
ANEXO	170

INTRODUÇÃO

Ser professor neste país é, antes de tudo, um ato de bravura, amor e resistência.

(@paneloviski – M. TAVARES)¹

Iniciamos nosso texto com essa frase por acreditarmos no poder transformador da educação e, em especial, na influência do professor para que isto seja concretizado. Com um dos intuitos de auxiliá-lo em sua profissão, apresentaremos em nossa dissertação uma discussão envolvendo os sólidos geométricos presentes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio.

Esta Introdução está dividida em quatro subseções. A primeira apresentará alguns momentos da trajetória acadêmica que influenciaram na escolha do tema desta pesquisa, razão pela qual, nesta subseção usaremos os verbos na primeira pessoa do singular. Na segunda subseção, apresentaremos a problemática que envolve o ensino de Geometria, na subseção seguinte, os aspectos metodológicos e teóricos da nossa pesquisa. Por fim, explicitaremos a estrutura das próximas seções.

1.1 JUSTIFICATIVA PESSOAL

No meu processo de formação inicial na Universidade Federal de Sergipe (UFS), tive a oportunidade de participar de projetos de pesquisa que contribuíram para o meu desejo em ser pesquisadora na área de Educação Matemática. O meu primeiro projeto foi pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC 2016-2017, sob o tema “A explicação relacional como aliada para o ensino de Geometria e as praxeologias desse ensino presentes nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental”. Pelo fato de a Geometria ser ampla, especificamos um objeto geométrico analisado escolhendo ângulos.

Para analisar os livros didáticos de matemática nos embasamos em três aspectos teóricos: na Teoria Antropológica do Didático (TAD), na compreensão relacional de Skemp – em que categoriza a aprendizagem em compreensão instrumental e relacional, o primeiro relacionado apenas ao saber-fazer e, o segundo, envolvendo também o motivo, o porquê fazer. Também nos embasamos na teoria dos níveis de van Hiele, criada pelo casal van Hiele e que trata do pensamento geométrico em um modelo

¹ A frase foi retirada do perfil do *Facebook*: <https://www.facebook.com/paneloviski/posts/dia-do-professor/2538269992896804/>

hierárquico de cinco níveis – visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor. Em uma segunda oportunidade, no ano seguinte, participei de outro projeto do PIBIC 2017-2018², dessa vez, analisando como as figuras geométricas estavam presentes nos livros didáticos de matemática do 6º ano.

Outros dois fatores que contribuíram para minha formação e escolha do objeto matemático voltado à Geometria, foi a minha participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e nas “Oficinas de Matemática: somando conhecimento, multiplicando saberes”. Projetos esses, sob a coordenação da minha orientadora, cuja proposta era envolver o ensino de Geometria durante a aplicação de atividades matemáticas, em escolas parceiras do PIBID. Contudo, no caso das oficinas, a experiência ocorreu durante a formação de professores que ensinam matemática na educação básica em redes municipais de ensino de vários municípios sergipanos.

No final do meu curso, decidi pesquisar para o meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) como o objeto matemático ângulos vive nos documentos curriculares nacionais dos anos finais do ensino fundamental, embasada nas noções da TAD e dos níveis de van Hiele. Assim, desde o início da minha formação inicial, sempre estive pensando na Geometria, nas possibilidades relacionadas ao seu ensino e como esse campo matemático existe e vive no currículo brasileiro.

Contudo, o que influenciou na minha escolha especificamente pelos sólidos geométricos no Enem?

A escolha de pesquisar os sólidos geométricos ocorreu pela influência de uma colega de curso, N. Santos (2021), que pesquisou em sua dissertação esse objeto geométrico. Ela analisou as praxeologias adotadas por uma bolsista do Programa Residência Pedagógica (RP), do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Sergipe, ao ensinar sólidos geométricos em uma turma do 6º ano do ensino fundamental. Ao pensar na continuidade dessa pesquisa, decidi por analisar os sólidos geométricos no ensino médio.

Enquanto a escolha por analisar especificamente as provas do Enem, ocorreu após participar como “chefe de sala” na aplicação das provas na edição de 2020. Ao observar a importância dessa prova para os participantes que, mesmo no contexto de pandemia e ensino remoto, se esforçaram para marcar presença e, talvez, conseguir uma boa pontuação.

² Título do projeto: “Análise praxeológica com diagramas esquemáticos acerca das figuras geométricas presentes em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental”.

Mas, a importância da Geometria, no ensino médio e no Enem não se restringe às minhas experiências. Como poderemos ver na próxima Seção, há uma problemática envolvendo o ensino dessa área da matemática que apesar dos esforços de pesquisadores, professores e de outros profissionais da educação, ainda é vista como difícil durante a aprendizagem.

1.2 PROBLEMÁTICA

Geralmente, escutamos a frase “a Geometria está presente em nosso cotidiano”, mas, para algumas pessoas ela passa despercebida. Podemos listar diferentes situações em que elas se fazem presentes, em algumas, de forma mais diretas que outras. Seja na arrumação ou construção de uma casa visando à otimização do espaço, a localização em um mapa, entre outros. Ao pensarmos sobre sua relevância, destacamos o quanto o seu ensino pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, ainda na educação básica. Por conseguinte, em determinadas situações do dia a dia ou da vida acadêmica.

Apesar dessa importância do ensino de Geometria, há certos problemas que o rodeiam. A ausência ou formação insuficiente dos professores, entre outros aspectos, fazem parte da problemática no ensino de Geometria apontado por autores como Pavanello (1989; 1993); Lorenzato (1995); Zuin (2001). A época em que o texto de Lorenzato (1995) foi publicado, o autor destacou uma omissão em relação a esse ensino, causado por professores que não possuem o conhecimento necessário para as suas práticas. A outra causa apontada é a forma em que a Geometria aparecia no livro didático, geralmente no final, atrelada à dependência em seguir a ordem apresentada pelos autores dos livros didáticos.

Cerca de 10 anos depois, Almouloud et al (2004), também passaram a discutir sobre as problemáticas que envolvem esse ensino. Os autores compartilham da ideia de que a formação inicial e continuada dos professores não os prepara de forma satisfatória para que eles possam ensinar Geometria aos seus alunos. Também apontam o livro didático como um dos fatores, não pela ordem em que a Geometria aparece, mas pela forma como são propostas as tarefas. Com poucas demonstrações e situações que propiciem um raciocínio dedutivo, em contrapartida, com ênfase em uma resolução mais algébrica.

Mais atualmente, Leme da Silva (2021, p.19) afirma que essas representações relacionadas ao ensino de Geometria, como a ideia do seu abandono, ainda são presentes e marcantes no meio educacional. Essas representações são consideradas pela autora, como “construídas pela memória e [...] sustentadas por relações afetivas negativas que a experiência como alunos nos permitiu guardá-las”. Diante dessa afirmação, a autora nos convida a refletir criticamente e ressignificar tais representações, para que as experiências com a Geometria se tornem positivas.

Por causa da importância que o currículo tem para que situações como as citadas sejam minimizadas ou não, destacamos que durante a década de 1990, ocorreram diversas discussões acerca da reforma do ensino médio brasileiro. Ressaltamos que a nossa escolha por apresentar documentos curriculares nacionais a partir da década de 1990 é por considerarmos as mudanças ocorridas desde a promulgação da Constituição Federal de 1988. Nesse período, diversos documentos curriculares foram publicados com o objetivo de promover a reforma da educação básica.

No ano de 1996, houve a promulgação da nova Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional Nº 9.394/96 (LDBEN). Entre as suas regulamentações, o currículo foi estabelecido em duas partes, sendo uma chamada comum e a outra diversificada. A parte do Currículo Comum compunha-se de componentes curriculares como base a toda educação básica envolvendo três áreas (Linguagem, Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas). A outra parte, Currículo Diversificado, oportunizou aos sistemas de ensino e escolas inserirem outros componentes curriculares que atendessem a demandas da comunidade local, em prol de uma formação de cidadãos críticos e participativos para a vida em sociedade.

Como consequência dessa lei e pesquisas voltadas à área da Educação, nos anos seguintes, foram reformulados e lançados diversos documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), Orientações Curriculares Complementares (PCN+), que regulamentavam os currículos da educação básica, superior e/ou profissionalizante.

Embora a Lei Nº 9394/96 ainda esteja em vigor, novas ementas foram implementadas para consolidar a regulamentação de uma base curricular comum. Como é o exemplo do Artigo 26,

Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (Redação dada pela Lei nº 12.796, de 2013, BRASIL, 1996).

A principal mudança nesse artigo foi a garantia de uma base curricular não apenas para o ensino fundamental e médio, mas, também, para o ensino infantil. Dessa forma, os currículos de toda a educação básica devem seguir as orientações contidas na BNCC. Em relação à parte diversificada do currículo, incluído pela Lei Nº 13.415, de 2017, o Artigo 35-A § 1º regulamenta que esta parte “deverá estar harmonizada à Base Nacional Comum Curricular e ser articulada a partir do contexto histórico, econômico, social, ambiental e cultural” (BRASIL, 1996).

Na mesma década em que a LDBEN foi promulgada e implementada, em 1998, foram publicadas as DCNEM, com diretrizes para apoiar a organização pedagógica e curricular das escolas em cada ano de ensino. Esse documento passou por atualizações em 2012 e 2018. Entre os fatores para esta última atualização está a discussão gerada pela criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No mesmo ano da primeira versão das DCNEM, foi criado o Exame Nacional do Ensino Médio (1998). A sua realização, desde o planejamento até a operacionalização, era e ainda é de competência do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). Inicialmente, essa avaliação teve como um dos seus objetivos, avaliar o desempenho de alunos egressos do ensino médio, as competências e habilidades desenvolvidas durante a sua vida escolar.

Dois anos depois da criação do Enem (ano 2000), foram publicados os PCNEM. No que diz respeito ao objeto geométrico escolhido para ser estudado nesta dissertação, os sólidos geométricos. Apesar de não serem citados diretamente nos PCNEM, podemos perceber a sua presença nas competências e habilidades propostas neste documento. Entre essas propostas e tratando da relevância para a compreensão e percepção de espaço, destacamos um trecho do documento em que enfatiza

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p. 44)

Em relação ao documento que complementa as propostas dos PCNEM, em 2002 foram implementados os PCN+. Nesse documento, contém orientações educacionais a professores, coordenadores, entre outros profissionais que trabalham com a educação ofertada no ensino médio, de forma direta ou indireta. Talvez, o fato de conter essas orientações educacionais seja o que nos permitiu ver mais claramente a presença dos conceitos a ser trabalhados no ensino médio, entre eles, a Geometria e, mais especificamente, sólidos geométricos. Como podemos observar no segundo exemplo dado no capítulo correspondente à Matemática, ao tratar sobre o volume de um cubo e de um prisma.

É apontado no texto dos PCN+ que, embora parte do que é trabalhado sobre a Geometria no ensino médio seja voltado às medidas, outros conhecimentos devem ser desenvolvidos. Por exemplo, o estudo das relações entre as figuras espaciais e planas e propriedades de congruência e semelhança dessas figuras. Além disso, entre as propostas do documento, está o fato das competências e habilidades desenvolvidas durante o ensino fundamental ser aprofundadas e consolidadas no ensino médio. Por exemplo, quando o aluno tem contato com experimentações e deduções informais no ensino fundamental, para no ensino médio conhecer melhor o sistema dedutivo, os teoremas e postulados (BRASIL, 2002).

De acordo com o referido documento, é necessária a presença mais formal da lógica dedutiva e o ensino não deve ser baseado na memorização. O ensino deve possibilitar que os alunos percebam “como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática” (BRASIL, 2002, p.124).

Anos depois da homologação dos PCN+, durante o governo do presidente Lula, em 2009, o Enem passou por mudanças e começou a ser chamado como Novo Enem. Entre essas mudanças, estava a criação da Matriz de Referência que ainda é usada. Nessa matriz, constam as competências e habilidades, gerais e específicas para cada área do conhecimento, a serem avaliadas pelo exame. Outra mudança é a quantidade de questões que deixaram de totalizar apenas 63 (sessenta e três) questões e a redação, passando para 180 (cento e oitenta) questões, diluídas igualmente a cada área de conhecimento – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias – e a redação. Por causa disso, a prova deixou de ser aplicada em apenas um dia, precisando de dois dias para a sua aplicação (NADALON, 2018).

O Enem é considerado desde a sua criação uma avaliação voluntária, ou seja, o aluno egresso do ensino médio não é obrigado a fazer essa prova. Contudo, ao longo dos anos, instituições de ensino superior passaram a utilizar a nota obtida nesse exame como critério para o ingresso do aluno em seus cursos. O aluno também pode conseguir incentivos, como empréstimos ou bolsas parciais ou integrais por meio de programas como o Fies ou o ProUni³ para o acesso aos cursos de algumas instituições privadas.

Nos últimos três anos, houve a criação de um novo currículo, tornando-se documento norteador nacional para a criação de currículos nos estados brasileiros, a BNCC. Ao diferenciar-se dos documentos anteriores, passou a ter como princípio básico, um conjunto de aprendizagens essenciais que devem constar no currículo da educação básica, ou seja, esse documento toma como base um currículo comum regulamentado na LDBEN Nº 9.394/96 para todos os sistemas de ensino.

Outro aspecto que vale destacar na BNCC refere-se à forte influência sob a presença do ensino por competências. Em seu texto, constam as competências gerais consideradas importantes para serem desenvolvidas ao longo da educação básica e as competências específicas, as quais são divididas pela área de conhecimento de cada ano de ensino. Nos documentos anteriores, as competências aparecem com maior ênfase nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, implementados na década 2000. Nos documentos editados na década anterior (1990), o foco voltou-se ao uso dos termos ‘capacidades’ e ‘habilidades’.

Ressaltamos que, de acordo com Rangel *et al* (2016), há diferença entre habilidades e competências. As habilidades seriam “facilidade, uma aptidão, uma vocação para algo” (RANGEL *et al*, 2016, p. 33). Enquanto para sua transformação em competência seria necessário aprendizagens com maior aprofundamento para alcançar um domínio e este domínio seria a competência.

Sobre as propostas para o ensino dos sólidos geométricos presentes na BNCC, enquanto no ensino fundamental há uma ênfase as suas propriedades, classificação e representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior): no ensino médio, as habilidades e competências envolvem um estudo das áreas e volumes dessas figuras espaciais. Ou seja, para melhor compreender os conceitos que serão vistos no ensino médio, faz-se necessário entender o que foi visto nos anos anteriores. Arcanjo Filho e Tavares (2016) apontam em suas análises preliminares que boa parte dos alunos,

³ Leia-se Fies – Fundo de Financiamento Estudantil e ProUni – Programa Universidade para Todos.

concluintes do ensino médio, possui dificuldades nos conceitos elementares da Geometria, como no caso dos sólidos geométricos.

Algumas pesquisas como as de R. Santos (2014), Gomes (2017) e Nadalon (2018) utilizaram os dados obtidos pelo Enem para investigar quais são as dificuldades dos alunos desse nível de ensino, uma vez que ele é usado para avaliar o desempenho de alunos egressos do ensino médio. Esses dados podem ser as questões de provas, as pontuações gerais, entre outros. Também pode ser usada a matriz de referência e os descritores, neles são destacadas as competências e habilidades a serem avaliadas no Enem. Na matriz mais atual, sobre os objetos do conhecimento relacionados a ela, os sólidos geométricos estão presentes nos conhecimentos geométricos e algébrico/geométricos.

Diante das dificuldades de alunos e professores, bem como, instigadas pela problemática ecológica⁴ presente na Teoria Antropológica do Didático (TAD), resolvemos investigar como os sólidos geométricos vivem no ensino médio. Mais especificamente, voltado aos concluintes, assim escolhemos olhar as provas do Enem, uma vez que essa avaliação serve como um dos indicadores para o governo, sobre o ensino médio brasileiro. É uma prova realizada com alunos que estão para concluir ou já concluíram o ensino médio – regular ou EJAEM⁵ – e desejam ingressar em instituições de ensino superior por meio da inscrição da nota obtida no Sistema de Seleção Unificada (SISU).

Assim, na próxima subseção, apresentaremos quais os aspectos metodológicos e o aporte teórico, adotados em nossa pesquisa, além da estrutura desta dissertação.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Caracterizamos nossa pesquisa como uma pesquisa qualitativa e documental. Apesar de nossa pesquisa realizar alguns levantamentos quantitativos de dado, assim como Nadalon (2018)⁶, buscamos compreender e interpretar a análise dos dados obtidos a partir das provas do Enem de 2017 a 2020. Também concordamos com Bogdan e Biklen (1999 *apud* E. ALMEIDA, 2012, p. 16), ao afirmarem que nas pesquisas qualitativas há uma ênfase no processo, não necessariamente no produto.

⁴ Nessa problemática, busca-se responder se o objeto existe ou não, em quais condições e o porquê.

⁵ Educação de Jovens e Adultos do Ensino Médio – EJAEM.

⁶ Esta pesquisa aparece na Seção 4, onde realizamos uma revisão de literatura sobre o que as pesquisas de teses e dissertações revelam acerca do ensino de Geometria e o Enem.

Realizamos um levantamento bibliográfico ao fazermos um mapeamento das pesquisas de teses e dissertações. Contudo, nossas principais fontes para a pesquisa foram os dados obtidos nos documentos curriculares nacionais (PCENM, DCNEM e BNCC), livros didáticos de matemática e nas provas do Enem. Por isso, consideramos nossa pesquisa como documental.

Pautamo-nos em Prodnov e Freitas (2013), além de Gil (2008), ao considerarmos que nesse tipo de pesquisa, a natureza das fontes é de documentos de primeira ou segunda instância. Ou melhor, ainda não tiveram algum tratamento analítico ou já foram analisados e, talvez, reelaborados. Prodnov e Freitas (2013, p.56) consideram que os documentos são

[...] qualquer registro que possa ser usado como fonte de informação, por meio de investigação, que engloba: observação (crítica dos dados na obra); leitura (crítica da garantia, da interpretação e do valor interno da obra); reflexão (crítica do processo e do conteúdo da obra); crítica (juízo fundamentado sobre o valor do material utilizável para o trabalho científico).

Para tanto, buscamos em nosso trabalho responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem, nas edições de 2017 até 2020?”. Para tanto, tomamos como objetivo geral: analisar as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020.

Destacamos que não demos ênfase às propostas da BNCC, uma vez que as alterações nas provas do Enem devido às propostas desse documento ainda não ocorreram. A previsão é que seja reformulado o Novo Enem a partir de 2024, após todas as regulamentações necessárias e a criação das novas matrizes de referência (BRASIL, 2021).

Por conseguinte, traçamos os seguintes objetivos específicos que nos auxiliaram na busca por respostas.

- 1.1 Explicitar os Modelos Epistemológicos de Referência (MER) dos sólidos geométricos, a partir do estudo de N. Santos (2021);
- 1.2 Construir um Modelo Epistemológico Dominante (MED) e um Modelo Praxeológico de Referência (MPR), a partir dos documentos curriculares e livros didáticos de Matemática do ensino médio para o estudo dos sólidos geométricos voltados às questões das provas do Enem;

1.3 Identificar nas provas do Enem de 2017 a 2020, quais praxeologias envolvem sólidos geométricos;

1.4 Analisar as praxeologias referentes aos sólidos geométricos, identificadas nas provas, tomando como parâmetro o MPR elaborado.

Para atingir esses objetivos, fundamentamos esta dissertação sob os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, com foco no problema didático tratado por Gáscon. A partir do que é proposto no problema didático e tomando como base o modelo epistemológico de referência (MER) de N.S. Santos (2021), criamos o nosso modelo epistemológico dominante (MED) e o modelo praxeológico de referência (MPR). A criação desses modelos serviu para auxiliar a análise das provas do Enem. Por meio deles, podemos identificar quais conhecimentos envolvem o ensino dos sólidos geométricos e analisar as praxeologias matemáticas referentes a esse objeto presente nas provas do Enem.

Ao iniciarmos nossa pesquisa, sentimos a necessidade de entender o contexto das teses e dissertações brasileiras no que se refere ao ensino dos sólidos geométricos. O que elas investigavam sobre o tema que escolhemos e quais os respectivos resultados. Portanto, decidimos realizar dois levantamentos, um deles com ênfase aos aportes teórico-metodológicos, sob a perspectiva da TAD e sem o foco no Enem. O outro, em relação aos exames nacionais e questões envolvendo sólidos geométricos.

No primeiro mapeamento utilizamos em nossa busca as seguintes palavras: “teoria antropológica do didático” AND “ensino médio” AND “Geometria”. Enquanto no segundo mapeamento, utilizamos as palavras: “exame nacional do ensino médio” AND “Geometria”. Assim, pesquisamos as palavras-chave escolhidas no banco de dados da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES⁷.

Ao fazer o levantamento das pesquisas, buscamos seguir os mesmos procedimentos aos dois mapeamentos. Iniciamos tabulando os autores, títulos, instituições de ensino superior (IES) e Unidade Federativa (UF) em que os trabalhos foram publicados. Em sequência, destacamos os respectivos estados e regiões, localizando esses estudos geograficamente. Também observamos as metodologias e tipos de pesquisas aspectos teóricos das pesquisas. Entretanto, ao observar os focos temáticos que os trabalhos revelaram, para a apresentação neste estudo tratamos de

⁷ CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

identificar apenas os focos que mais se aproximavam ao nosso objeto. Desse modo, escolhemos algumas pesquisas para destacar os respectivos objetivos e resultados obtidos. Sendo 19 pesquisas referentes ao primeiro levantamento que estão localizadas na Seção 2 e 17 pesquisas do segundo levantamento, na Seção 4.

Na próxima subseção, apresentaremos alguns aspectos primitivos sobre a Teoria Antropológica do Didático e, por fim, qual a estrutura adotada em nosso texto.

1.4 ASPECTOS TEÓRICOS: TERMOS PRIMITIVOS DA TAD

A teoria da Transposição Didática (TD) faz parte da Didática da Matemática francesa e foi desenvolvida por Yves Chevallard. Segundo Almouloud (2007), ela foi desenvolvida para diferenciar os saberes que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem – saber sábio, saber a ser ensinado e saber ensinado. O saber sábio é o saber acadêmico, esse saber passa pelo processo de transposição para o saber a ser ensinado, que é o saber sistematizado e/ou adaptado dentro do sistema didático, por sua vez, sendo transposto ao saber ensinado, saber que de fato chega ao aluno, mas não necessariamente o saber que esse aluno aprende.

Essa teoria se mostrou insuficiente para a classificação dos objetos de saber e, entre outros motivos, Chevallard resolveu criar a Teoria Antropológica do Didático (TAD), como estudo do homem frente ao saber matemático e às situações matemáticas. Nela, parte-se do princípio de que tudo é objeto, inclusive as pessoas (X) e as instituições (I). Estes três são considerados termos primitivos da TAD: objeto, pessoa e instituição. O objeto (O) é qualquer entidade que possui ou não materialidade, todo produto intencional da atividade humana e que para existir deve ser percebido pelas pessoas (X) e/ou pelas instituições (I). (CHEVALLARD, 2018).

Por sua vez, as instituições (I) são dispositivos sociais que possuem suas demandas, modos de ser e fazer. Em relação às pessoas, existem estágios para ser considerado como tal – os indivíduos e os sujeitos. Os indivíduos são considerados o estágio mais primitivo, que não muda por causa das relações entre os objetos (O) e instituições (I) e nem se sujeita a nada. Os sujeitos são os indivíduos que se sujeitaram às regras e modos de determinada instituição (I). Entretanto, diante de diversas sujeições a várias instituições, esse sujeito se constitui uma pessoa.

A relação que acontece entre um indivíduo (X) e um objeto (O) é denominado por relação pessoal, $R(X, O)$, em que se (O) existe para (X), essa relação será não

vazia, $R(X, O) \neq \emptyset$. Por exemplo, este ensaio existe porque nós o reconhecemos como tal. Quando uma pessoa (X) entra para uma instituição (I), essa relação $R(X, O)$ pode se modificar dependendo da relação institucional entre (I) e (O), representada por $R(I, O)$ e se essa relação for não vazia, o objeto (O) existirá para esta instituição (I). Quando essa modificação acontece, podemos dizer que essa pessoa aprendeu algo, quando não acontece, então não aprendeu. Um objeto pode existir ou não para diferentes pessoas ou instituições e a forma como ocorre será determinada por eles (SANTOS; MENEZES, 2015).

Deste modo, podemos dizer que o objeto “sólidos geométricos” existe, visto que ele é reconhecido por instituições como a escola. Contudo, a forma como eles são reconhecidos pelos documentos curriculares, os livros didáticos, entre outros, não necessariamente será da mesma forma. Assim também, a forma que os sólidos são percebidos por alunos e professores podem ser diferentes. A investigação que ocorre nessa dissertação envolve mais especificamente essa relação entre a instituição Enem e o objeto “sólidos geométricos”.

Na próxima subseção, apresentaremos a estrutura da nossa dissertação por Seção, como forma de situar nosso leitor sobre o que esperar nas próximas páginas.

1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Nossa dissertação conta com seis seções, a primeira é esta Introdução, a qual apresentou a problemática envolvendo o ensino de Geometria, os aspectos metodológicos e teóricos da nossa pesquisa, além dessa subseção que delineia a estrutura do texto. Na Seção 2, aprofundamos essa discussão sobre a Teoria Antropológica do Didático, com ênfase no problema didático e as suas dimensões fundamentais – epistemológica, econômica e ecológica. Também apresentamos uma revisão bibliográfica para identificar quais informações das teses e dissertações em relação ao que pesquisaram sobre a TAD e o ensino de Geometria. Encerramos a referida Seção com uma discussão sobre o Modelo Epistemológico de Referência (MER), para o qual, adotamos o MER criado por N. M. Santos (2021) para este estudo.

Na Seção 3, a discussão é marcada por uma abordagem mais descritiva acerca do ensino médio brasileiro. Buscamos situar a dualidade que envolve esse nível de ensino e apresentar um breve panorama sobre os documentos curriculares nacionais deste nível de ensino, entre eles, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino

Médio (DCNEM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). Ainda nesta Seção, comentamos sobre os Guias do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) referentes aos anos 2015 e 2018, ressaltando os dados sobre os livros didáticos de matemática escolhidos para análise na Seção seguinte. Além disso, relatamos algumas informações sobre o Enem, como a sua estrutura, leis que embasam as suas mudanças ao longo dos anos, entre outros aspectos.

A Seção 4 é destinada para a abordagem sobre a presença dos sólidos geométricos diluída em três subseções, evidenciando entre elas, duas dimensões do problema didático. A primeira delas envolve uma revisão bibliográfica sobre a Geometria nas provas do Enem de acordo com trabalhos de teses e dissertações levantados. Na segunda subseção, há um tratamento sobre uma das dimensões do nosso problema de pesquisa – a dimensão econômica – para a qual, fizemos uma análise sobre os documentos curriculares nacionais (PCNEM e PCN+), a Matriz de Referência do Enem e dois livros didáticos de matemática do 2º ano do ensino médio. O estudo analítico nos possibilitou a construção do nosso Modelo Epistemológico Dominante (MED). Na terceira subseção, tratamos da terceira dimensão apresentada nos estudos da TAD – dimensão ecológica, realizamos um comparativo entre as informações obtidas na subseção anterior e o MER de N. M. Santos (2021). Com base no estudo realizado, criamos um Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

A penúltima Seção contém a análise das provas do Enem por edição (2017-2020), com base no MPR criado na Seção anterior a ela. A seção é finalizada por uma síntese comparativa entre as informações coletadas durante a análise das provas e das outras seções. Por fim, encerramos com a Seção das Considerações, resumimos os dados obtidos neste trabalho, além das nossas impressões e possibilidades para futuras pesquisas. Deste modo, a próxima Seção aprofundará os conceitos sobre a teoria que embasou nossa pesquisa, a TAD.

2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Para esta Seção, temos como objetivo, apresentar uma abordagem sobre os pressupostos teóricos que norteiam o estudo, incluindo um levantamento bibliográfico que identifica quais estudos se aproximam a esta investigação, além dos modelos do problema de pesquisa elaborados para dá suporte à análise das praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes nas provas do Enem de 2017 a 2020.

Investigar sobre praxeologias é buscar fundamentos na Teoria Antropológica do Didático, um dos aportes teóricos que compõem a Didática da Matemática, criada por Yves Chevallard. Esse teórico, além de se apoiar nas ideias desenvolvidas na Transposição Didática, também se baseou na Ecologia dos saberes para desenvolver a sua teoria. Isso ampliou o campo de análise ao partir de uma problemática ecológica, para com essa perspectiva teórica, questionar o real. Em outras palavras, a partir dos pressupostos desta teoria, busca-se investigar a existência ou não de um objeto e em quais condições isso ocorre. Ele também se apoia em outros conceitos da ecologia – habitat, cadeia alimentar, nicho e ecossistema – para explicar o estudo do objeto (O) e as relações entre os objetos, $R(X, O)$ e $R(I, O)$.

Destacamos os conceitos primitivos da TAD – objeto, instituição e pessoa e as relações entre eles. Na TAD, partimos do princípio de que o objeto é uma entidade, resultante de toda intencionalidade humana. Enquanto as instituições são dispositivos sociais que possuem regras próprias e pessoas são os sujeitos que passaram por diversas sujeições às instituições. Ainda definimos por meio das relações entre os três termos primitivos, que um objeto existe ao ser reconhecido por uma instituição (I) ou por uma pessoa (X). Ou seja, essas relações são não vazias e denotamos isto por meio do seguinte simbolismo matemático: $R(X,O) \neq \emptyset$, para a relação pessoa e objeto, e $R(I,O) \neq \emptyset$, para a relação instituição e objeto.

Nessas relações, podemos perceber onde e como determinado objeto existe, por quais mudanças ele passou ao longo do tempo, quem contribui para a sua existência e se ele contribui para outro objeto. Esses questionamentos envolvem a compreensão dos conceitos da ecologia. Em nosso caso, por exemplo, está entre nossos objetivos, apresentar como os sólidos geométricos vivem no Enem, assim, temos como instituição – o Enem – e como objeto – sólidos geométricos. O nicho e a cadeia alimentar poderão ser percebidos com maior facilidade durante a apresentação dos nossos modelos

epistemológicos, uma vez que destacamos essa relação de alimento e alimentado, além da discussão sobre a funcionalidade do objeto.

Em relação aos ecossistemas, podemos caracterizá-los como os sistemas em que os objetos interagem e vivem. Pesquisadores da Didática da Matemática identificaram que há quatro ecossistemas relacionados à matemática – ecossistema do saber, no qual a matemática é produzida; ecossistema didático escolar, a matemática é estudada; ecossistema profissional, em que ocorre a sua utilização na concretização de tarefas profissionais; ecossistema noosferiano, a matemática sofre uma manipulação para fins de transposição (SILVA; ALMOULOU, 2018; FERNANDES; GUERRA, 2018).

A partir da ideia de conjuntos, inseridos nesses ecossistemas, temos os habitats. Os habitats referem-se ao local, o tipo de instituição, onde o objeto matemático vive. Na cadeia alimentar, para que um objeto viva no ecossistema, ele é alimentado por outro objeto, mas também, pode servir de alimento a outro. Ou seja, para que um objeto exista, ele precisa de outros objetos para dar esse suporte a sua existência, por exemplo, para compreender o conceito do objeto, sólidos geométricos, há a necessidade de conceitos contributivos como a noção de ponto, reta e plano.

No que diz respeito ao nicho, ele se refere à função que o objeto exerce no habitat. Segundo Silva e Almouloud (2018, p. 161), eles contemplam as “suas funcionalidades nas praxeologias que se evidenciam em relação a um objeto de ensino, ocorrendo em um dado habitat de um certo ecossistema”. Para Chevallard (1999), essas praxeologias fazem parte do postulado básico da TAD, tendo em vista que todas as atividades humanas, quando regularmente realizadas, podem ser descritas por meio de um modelo único, as praxeologias ou organizações praxeológicas.

De modo a explicitar essas praxeologias, as atividades humanas podem ser expressas por meio de tarefas (t) que deverão ser cumpridas. Essas tarefas são associadas aos tipos de tarefa (T), os quais há uma determinada precisão em relação ao objeto, um exemplo que podemos dar a esses tipos de tarefa é “construir um cubo utilizando papel”, “calcular a área ocupada pela planificação da superfície de uma pirâmide” etc. Observem que os tipos de tarefas (T) são acompanhados de verbos, eles são chamados de gêneros de tarefa e pedem que haja um complemento para que se tenha de fato um tipo de tarefa (T) (CHEVALLARD, 1999; KLUTH; ALMOULOU, 2018).

Dado um tipo de tarefa (T), para que ele viva, ou seja, para realizar o que é proposto, é necessário determinar uma forma de fazer (saber fazer), que denominamos

de técnica (τ). Os tipos de tarefa (T) e as técnicas (τ) compõem o bloco do saber fazer ou prático-técnico $[T/\tau]$. A utilização de determinadas técnicas (τ) é justificada racionalmente por meio da tecnologia (θ). Com um nível superior a esse discurso tecnológico, temos a teoria (Θ) que desempenha a função de justificar a tecnologia (θ). A tecnologia (θ) e a teoria (Θ) compõem o bloco dos saberes, conhecido como bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$. Esses elementos são conhecidos como os 4 t's da praxeologia. Na busca pela resposta da problemática ecológica sobre um objeto existir ou não, se ele deixou de existir e em quais condições isso ocorre, utiliza-se desses 4t's como auxílio para a investigação (KLUTH; ALMOULOU, 2018; CHEVALLARD, 1999).

Ainda relacionado à ecologia, Chevallard (2002) criou cinco níveis de determinação matemática: Objeto, Tema, Setor, Domínio e Disciplina, que podem ser explicitados durante a classificação das praxeologias. Podemos observar a hierarquia desses níveis de determinação matemática na Figura 1. Chevallard (2002) afirma que existem níveis de escalões superiores aos mencionados, importantes para compreender a problemática acerca de determinado objeto ou tema. Esses níveis fazem parte das determinações didáticas – Pedagogia, Escola e Sociedade – e estão inseridos na noosfera⁸. Para o referido autor, todos esses níveis fazem parte de uma construção histórica, não são apenas dados. Eles contribuem para determinar as organizações praxeológicas por meio dos pontos de apoio oferecidos e pelas restrições impostas.

⁸ Entende-se noosfera como sendo “o centro operacional do processo de transposição, que traduz em fatos a resposta ao desequilíbrio criado e testado (expresso por matemáticos, os pais, os próprios professores)” (CHEVALLARD, 1998, p.11 *apud* PAIAS, 2019, p. 73). Ainda de acordo com S. Santos (2020, p. 45), na noosfera estão os “responsáveis pelo desenho e implementação dos planos de estudo. Caracterizada em muitos casos como sendo restritiva e não suficientemente funcional”.

Figura 1. Escala dos níveis de codeterminação matemática e didática



Fonte: N. Santos (2021, p.48).

Ao observar a Figura 1, nos níveis superiores temos o nível da Sociedade. Nele são impostas condições, restrições e suas concepções que podem influenciar nos níveis abaixo dele. O nível seguinte é a Escola, em que suas condições e restrições estão relacionadas à instituição escolar. Existem escolas diferentes e as suas determinações influenciam na pedagogia empregada. Podemos exemplificar as escolas de ensino fundamental e médio, por se tratar de públicos distintos, há uma necessidade de criar um projeto pedagógico que acompanhe essa mudança, de mesma forma, os níveis abaixo – Pedagogia, Disciplina, Domínio, Setor, Tema, Objeto – também podem não ser os mesmos.

Em nossa pesquisa, podemos considerar que o Enem está transversalizando esses níveis superiores. Essa avaliação faz parte da noosfera, entretanto, não se enquadra como um desses níveis, especificamente. O Sistema de ensino nacional utiliza o Enem para avaliar a qualidade do desempenho de alunos egressos das modalidades do ensino médio, possibilitando por parte do governo, a criação de políticas públicas educacionais. De certo modo, no âmbito social, a avaliação faz parte das regulamentações que influenciam nas Escolas e no tipo de ensino ofertado por elas. Por exemplo, com o intuito de ter mais alunos com boas notas no Enem, determinada escola cria meios e incentiva seu corpo docente a ensinar visando os conceitos que normalmente são

exigidos nesta prova. Apesar de considerarmos esses níveis importantes na compreensão dos papéis que o Enem desempenha, o foco da nossa dissertação é observar a presença dos sólidos geométricos e como isto ocorre na prova das edições de 2017 a 2020.

Como apresentado, na Figura 1, podemos ver que abaixo do nível da Escola está posicionada hierarquicamente a Pedagogia. Esse nível é considerado como uma fronteira entre a noosfera e os níveis de determinação matemática. Além disso, oferece condições, impõe limitações para o estudo das disciplinas e faz parte dos sistemas de ensino. Podemos exemplificar como parte desse nível, os documentos curriculares nacionais, PCNEM, PCN+ e BNCC. As propostas desses documentos referendam a criação dos currículos (neste caso, do ensino médio brasileiro) e, a partir deles, cada escola seleciona o que será ensinado ou não. Em nossa pesquisa, nos dedicamos a investigar a organização matemática, considerando desde o nível da Pedagogia aos níveis inferiores.

Os níveis inferiores – Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto – estão relacionados ao estudo das praxeologias. Ao observar uma praxeologia, podemos considerá-la como pontual, local, regional ou global, e a consideramos completa quando é composta pelos dois blocos, prático-técnico e tecnológico-teórico. Quando a praxeologia é formada apenas por um tipo de tarefa (T) é chamada de praxeologia pontual, $[T/\tau/\theta/\Theta]$. A nomeação dos sólidos geométricos é um Objeto de estudo, ou assunto, que pode ser determinado na praxeologia pontual por meio do tipo de tarefa, nomear os sólidos geométricos (N. SANTOS, 2021)⁹. Se mais de uma praxeologia pontual mobiliza a mesma tecnologia (θ) e diferentes técnicas (τ_i), elas fazem parte de uma praxeologia local, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$. Essa mobilização permite que se assuma um status de tópico de ensino, ou Tema, em que estão inseridos os objetos de estudo.

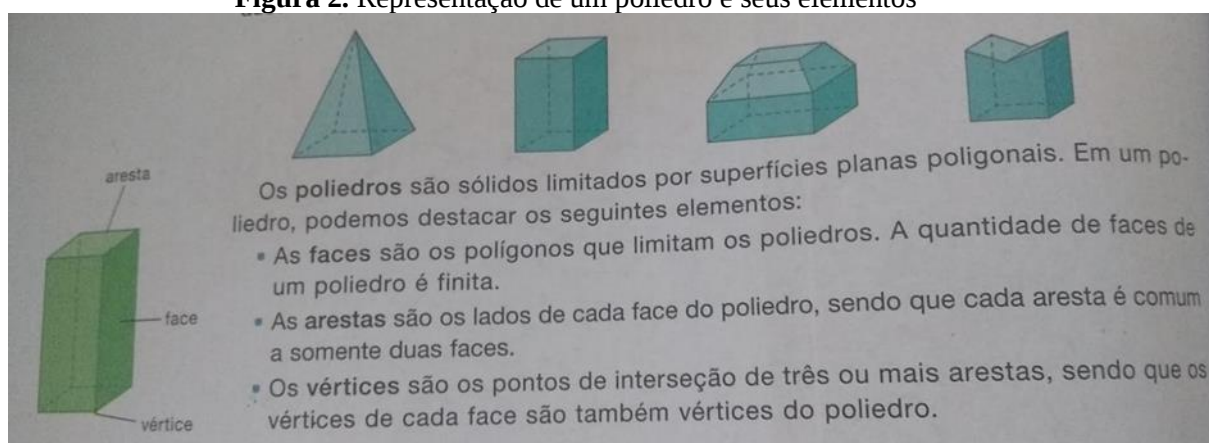
Por conseguinte, em uma organização maior, esse tema está inserido em um Setor, explicitado pela praxeologia regional, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$. A praxeologia regional é formada por diversas praxeologias locais, que mobilizam uma mesma teoria (Θ). Quando há praxeologias regionais, em que as teorias (Θ_k) apesar de diferentes se articulam, chamamos de praxeologia global, $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$. Por meio dessa praxeologias, temos o nível do campo de estudo, ou Domínio, podemos considerar a

⁹ Convém destacar nossa escolha em identificar referências de estudos que tenham seus autores com mesmo sobrenome, inserindo a inicial do prenome para distinguir tais estudos, independentemente do ano de publicação.

Geometria como um exemplo desse nível. A união dos campos forma o que chamamos de Disciplina, como a matemática (CHEVALLARD, 1999, p.7, CHEVALLARD, 2002).

Além disso, destacamos que para se ter uma praxeologia é preciso dois tipos de objetos: os objetos ostensivos, dotados de certa materialidade e podem ser percebidos pelos sentidos (audição, visão, tato) e os objetos não ostensivos, são objetos que existem institucionalmente, como as ideias, as crenças, os conceitos etc. Estes objetos não ostensivos podem ser evocados por meio da manipulação dos objetos ostensivos. Por exemplo, a ideia de poliedros pode ser evocada por meio da sua representação figurativa ou pela explicação a partir das suas propriedades.

Figura 2. Representação de um poliedro e seus elementos



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.202).

Na Figura 2, podemos identificar as imagens, apoiadas no discurso que define os poliedros e seus elementos como objetos ostensivos e, por meio da sua manipulação, são evocados os objetos não ostensivos, como o conceito de poliedros e seus elementos. Ainda ressaltamos a importância das imagens para um melhor entendimento sobre as figuras espaciais, contudo, elas não devem ser a única forma de representação, visto que os alunos devem ser capazes de uma abstração e de reconhecer as propriedades dessas figuras.

Ainda sobre as organizações praxeológicas, elas podem ser uma praxeologia matemática ou didática, isto dependerá se o tipo de tarefa vem da matemática ou se são de estudo. As organizações matemáticas referem-se às realidades matemáticas e, a didática, a maneira em que o estudo pode ser realizado. Um exemplo que podemos considerar é do artigo de Almouloud, Koné e Sangaré (2014), analisado na revisão bibliográfica de Benito (2019, p. 37) em que

A análise das organizações matemáticas identificou os tipos de tarefas, as técnicas e as tecnologias apresentadas em cada coleção com base em uma classificação feita por meio de análises do currículo de matemática para o ensino básico, livros didáticos e práticas em sala de aula. Já as escolhas didáticas feitas em cada coleção foram analisadas a partir das recomendações para o ensino de cônicas contidas no currículo de matemática do Ensino Básico da República do Mali.

Pelo fato de propormos em nosso trabalho uma investigação da forma como os sólidos geométricos aparecem nas provas do Enem, nos restringiremos a fazer uma análise das praxeologias matemáticas, apesar de ser possível destacar questionamentos que possam envolver o estudo desse objeto matemático no ensino médio. Para a análise dessas praxeologias, fizemos a investigação das três dimensões fundamentais do problema de pesquisa, dimensões epistemológicas, econômicas e ecológicas.

2.1 O PROBLEMA DIDÁTICO E SUAS DIMENSÕES

De acordo com Gascón (2011), o desenvolvimento do problema didático pode ser representado pelo esquema (ou padrão) heurístico

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

Em que P_0 é o possível ponto de partida que justificará a necessidade de se fazer a pesquisa, podemos denominá-lo problema docente (ou de ensino). Devido a sua incompletude, para começarmos a considerar como um problema didático é necessário ter ao menos a dimensão epistemológica, P_1 , essa necessidade é representada pelo símbolo $\oplus$. Enquanto o símbolo $\hookrightarrow$ é utilizado para dar uma ideia de hierarquia entre as dimensões – P_2 refere-se à dimensão econômica e P_3 , à dimensão ecológica. Por fim, P_δ simboliza o problema didático, formado pelas dimensões fundamentais e as relações entre elas. Além das novas questões implícitas nelas (GASCÓN, 2011).

Ao apresentar esse padrão, Gascón (2011) pontua algumas considerações, avaliando uma delas como a evolução das pesquisas em Didática da Matemática passando a emergir de problemas que não são necessariamente problemas docentes. Contudo, para realizar investigação baseada na TAD, é essencial que nos problemas de pesquisa haja um questionamento do campo da atividade matemática envolto no problema didático. Consideramos em nossa dissertação, o problema de pesquisa, visto que a nossa proposta não parte de um problema docente.

Em nossa pesquisa, o marco inicial para o seu desenvolvimento ocorreu devido à seguinte pergunta: “Quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos

geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 a 2020?”. Esse questionamento carece de um entendimento mais amplo sobre os sólidos geométricos, portanto, há a necessidade de olhar para a dimensão epistemológica e investigar a razão de ser desse objeto matemático. Para, após isso, investigar esse saber inserido na instituição Enem.

Podemos considerar que o Modelo Epistemológico de Referência (MER) é uma espécie de materialização da dimensão epistemológica. Mesmo que não seja de forma explícita, o pesquisador sempre utiliza um modelo epistemológico para a sua análise, possibilitando a desconstrução e reconstrução das praxeologias. Ele sempre é provisório, uma vez que diante de novas informações, o pesquisador pode modificá-lo. Além disso, a sua criação permite ao pesquisador compreender como o saber se desenvolveu e se estabeleceu ao longo dos anos (GASCÓN, 2011; FIGUEROA, ALMOULOUD, 2018).

Como explicitado anteriormente, a dimensão epistemológica é essencial para o problema de pesquisa, ela refere-se a uma discussão sobre a razão de ser do objeto. Um exemplo que podemos dar sobre essa dimensão é a investigação apresentada por Figueroa e Almouloud (2018), os quais criaram um MER sobre o objeto matemático ‘limites’, baseados em textos da História da matemática e em outras pesquisas. Segundo Gáscon (2011), o MER é fundamental para o estudo do saber matemático antes dele passar pelo processo de transposição em saber a ser ensinado.

Ao se ter o MER como ponto de partida para a investigação, olhando para determinada instituição, podemos identificar se o objeto existe nela, como ele existe, por quais mudanças passou e por quais motivos isto ocorreu. Ao fazer esses questionamentos, estamos tratando das dimensões econômica e ecológica do problema de pesquisa.

Em nossa pesquisa, utilizamos o modelo criado por N. Santos (2021), visto que a pesquisadora também investigou a dimensão epistemológica referente aos sólidos geométricos. Apesar de sua pesquisa envolver os sólidos nos anos finais do ensino fundamental, para desenvolver o MER não houve uma distinção entre os níveis de ensino, apenas um estudo aprofundado sobre o saber independente disto. O que não pôde ser feito nas outras dimensões, por causa das instituições analisadas serem diferentes.

A outra dimensão citada é a dimensão econômica. Embora, a palavra “econômica” geralmente nos leve a pensar em situações envolvendo dinheiro, ou coisas

do tipo, nessa dimensão é questionada a relação institucional com o saber. O modo em que o saber está presente nessa dimensão depende das regras impostas por determinada instituição. Um exemplo simplificado que podemos citar são os sólidos geométricos nos documentos curriculares do ensino fundamental e médio. Enquanto no ensino fundamental, há uma ênfase maior nas suas características e propriedades; no ensino médio, o foco está nas relações de áreas e volumes, ou ainda, nos teoremas e postulados. A presença desse saber adota as regras de cada instituição (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013; GASCÓN, 2011).

É baseando-se no MER e nos questionamentos evocados nessa dimensão que o pesquisador desenvolve o Modelo Epistemológico Dominante (MED). N. Santos (2021) utilizou os livros didáticos, os Parâmetros Curriculares e a Base Nacional Comum Curricular para fazer o estudo dos sólidos geométricos nessa dimensão e criou o MED desse objeto voltado aos anos finais do ensino fundamental (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013; GASCÓN, 2011; N. SANTOS, 2021).

Na dimensão ecológica é questionado o motivo do objeto existir em determinada instituição da forma em que ele existe. Também é discutido o que seria necessário para modificá-lo em determinada direção. De modo geral, são tratadas as condições e restrições do objeto matemático na instituição e para buscar respostas a esses questionamentos, é necessário levar em consideração o MER (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013; GASCÓN, 2011).

Depois desse estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica, um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) pode ser criado. Segundo Chaachoua e Bittar (2019), a elaboração do modelo passou a ser uma parte necessária em vários trabalhos da TAD. O MPR possibilita que o pesquisador caracterize e analise as praxeologias a ensinar. De acordo com Gascón (2018, p.51), Chevallard afirma que esse modelo é considerado como uma generalização do MER, englobando “as condições e restrições da vida das sociedades humanas sob as quais as praxeologias de todos os tipos (científicos e não-científicos) vivem, migram, mudam, operam, desaparecem, renascem, etc., nas instituições humanas”.

Deste modo, buscamos investigar as dimensões epistemológicas (econômicas e ecológicas) para identificar como os sólidos geométricos são representados no ensino médio, de modo a criar nosso Modelo Praxeológico de Referência (MPR), considerando o modelo (MER) criado por N. Santos (2021). A partir da criação do nosso MPR, analisamos como são as praxeologias relacionadas a esse objeto geométrico, nas provas

do Enem 2017 a 2020. Entretanto, primeiramente apresentamos o que as pesquisas revelam sobre a TAD e Geometria no ensino médio, com o propósito de inserir nossa pesquisa no contexto investigativo desse campo.

2.2. O QUE AS PESQUISAS REVELAM SOBRE A TAD E GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Nesta subseção, apresentaremos uma revisão de literatura, cujo objetivo é apresentar o que as pesquisas brasileiras selecionadas tratam em relação ao ensino de sólidos geométricos no ensino médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático.

Para a seleção dessas pesquisas, inicialmente, nos propomos buscar no banco de dados da BDTD e no Catálogo de teses e dissertações da CAPES, as palavras-chave: “teoria antropológica do didático” AND “sólidos geométricos” AND “ensino médio”. Encontramos apenas 4 (quatro) dissertações na BDTD. Também substituímos a palavra “sólidos geométricos” por “figuras geométricas espaciais” e por “figuras espaciais”, encontrando apenas um trabalho no catálogo da CAPES, o qual apareceu na busca anterior.

Em consequência disso, decidimos abranger a pesquisa ao substituir “sólidos geométricos” por “Geometria”, com o intuito de encontrar um número maior de textos que pudessem contribuir para nossa revisão. Desta forma, as palavras-chave usadas foram: “teoria antropológica do didático” AND “ensino médio” AND “Geometria”. Ao pesquisá-las no catálogo da CAPES e na BDTD, encontramos 8 (oito) pesquisas em cada. Após uma primeira leitura dos títulos, constatamos que 3 (três) delas eram comuns em ambas as bases de dados, sendo uma delas identificada na primeira seleção. Assim, resultam em 16 (dezesesseis) trabalhos, sendo 4 (quatro) teses, 11 (onze) dissertações acadêmicas e 1 (uma) dissertação de mestrado profissional.

Pelo quantitativo de pesquisas encontradas, decidimos por não escolher um recorte temporal. Assim, a pesquisa mais antiga encontrada foi do ano de 2006, enquanto a mais recente foi do ano de 2019, como pode ser observado no Quadro 2. Outro aspecto a considerar é não haver representatividade significativa em nível local. Em nossa busca, não apareceram pesquisas do estado de Sergipe. Assim, resolvemos pesquisar as palavras-chave no Repositório Institucional de Teses e Dissertações da Universidade Federal de Sergipe (RIUFS): “teoria antropológica do didático AND

sólidos geométricos AND ensino médio”. Encontramos 18 (dezoito) pesquisas, sendo elas: 4 (teses) e 14 (quatorze) dissertações.

Após uma leitura inicial de seus títulos, resumos e programas de pós-graduação, fizemos um refinamento e constatamos que a maioria pertencia a programas de pós-graduação em Geografia, Filosofia, História, entre outros. Visto que esses programas são específicos a outras áreas que não a da matemática, diferentemente dos programas de pós-graduação em Educação ou em Ensino de Ciências e Matemática.

Deste modo, decidimos realizar uma nova pesquisa no RIUFS, desta vez mudando apenas a palavra Teoria Antropológica do Didático entre aspas durante a pesquisa, ““teoria antropológica do didático””¹⁰ AND sólidos geométricos AND ensino médio”. Ou seja, para que esta palavra seja buscada da forma integral em que está escrita. Ao fazer essa mudança, encontramos 6 (seis) dissertações, todas pertencentes ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMA/UFS). No Quadro 1, podemos observar os respectivos autores, anos e títulos das dissertações encontradas.

Quadro 1. Pesquisas do Repositório institucional da UFS – PPGECIMA (2017-2021)

Autor(es)/ Ano	Título
Franckline Juliana Alves de Jesus (JESUS, 2017)	Uso(s) do livro didático por professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental de escolas da rede estadual de Aracaju/SE
Eressiely Batista Oliveira Conceição (CONCEIÇÃO, 2019)	Singularidades e subjetividades de um grupo do PIBID na área de matemática: contribuições para o processo de formação de identidade professoral
Alanne de Jesus Cruz (CRUZ, 2019)	Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017
Luciano Pontes da Silva (L. SILVA, 2019)	Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva
Larissa Evelyn Santos Silva Alves (ALVES, 2021)	Sentidos e significados de professores de matemática ao usarem resolução de problemas para abordar conteúdos geométricos no ensino médio
Nailys Melo Sena Santos (N. SANTOS, 2021)	Praxeologia para ensinar sólidos geométricos: o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS

Fonte: Repositório Institucional UFS (2022)

Ao realizar uma leitura de trechos dos trabalhos, percebemos que Jesus (2017) apenas cita em sua referência uma tese que trata da TAD, Conceição (2019) utiliza um

¹⁰ As aspas servem para, ao pesquisar no banco de dados, os resultados contenham a palavra exatamente da forma como está escrita em sequência e completa, sem possíveis variações. Neste caso, quando não inserimos as aspas essas palavras podem ter variações.

texto sobre a teoria e Alves (2021) cita a sua participação em um grupo de pesquisa que discutia textos sobre duas teorias (TAD e Relação com o Saber). Como nenhum desses textos discutia de fato sobre a TAD, decidimos excluí-los da nossa revisão.

Assim, dentre os estudos realizados, em âmbito local (UFS), a pesquisa de N. Santos (2021) será adicionada a nossa revisão, por ser a que mais se aproxima com as nossas propostas, apesar de investigar o objeto “sólidos geométricos”, sob o olhar no nível de 6º ano do ensino fundamental. Também decidimos por adicionar os textos de Cruz (2019) e L. Silva (2019), ambos relacionaram a TAD à Neurociência.

Quadro 2. Levantamento dos trabalhos acerca da TAD, da Geometria e do ensino médio

PESQUISAS	AUTOR/ANO	TÍTULO	IES/UF
TESES	Renata Rossini (ROSSINI, 2006)	Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.	Doutorado em Educação; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo
	Carlos Roberto da Silva (C. SILVA, 2015)	Articulação das representações cartesiana, paramétrica e polar de retas e circunferências, na transição do ensino médio, e do ensino superior	Doutorado em Educação Matemática; Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo
	Ricardo Nicasso Bentito (BENITO, 2019)	Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas	Doutorado em Educação Matemática; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo
	Rita Lobo Fretias (R. FREITAS, 2019)	Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para ensino de Geometria analítica plana do ponto e da reta.	Doutorado em Educação Matemática; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo
DISSERTAÇÕES – MESTRADOS ACADÊMICOS	Roberto Carlos Dantas Andrade (ANDRADE, 2007)	Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio.	Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará, Pará.
	Kátia Sebastiana Carvalho dos Santos Farias (FARIAS, 2008)	A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental	Mestrado em Educação. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul
	Márcia Varella (VARELLA, 2010)	Prova e demonstração na Geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos	Mestrado em Educação; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo
	Luciano Ferreira (FERREIRA, 2011)	Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: "construção do plano de Poincaré" como uso do <i>software</i> Geogebra	Mestrado em Ciências Exatas; Universidade Estadual de Maringá, Paraná.
	Elizabeth Fraccaroli Jammal (JAMMAL, 2011)	Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio	Mestrado em Educação Matemática; Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo
	Eliane A. Martins de Almeida (E. ALMEIDA, 2012)	Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática	Mestrado em Educação; Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso

	Cintia Melo dos Santos (C. SANTOS, 2013)	Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a Geometria no ensino médio	Mestrado em Educação Matemática; Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul, Mato Grosso Do Sul
	Joselito da Silva Bispo (BISPO, 2014)	Estudo de sólidos geométricos e suas métricas utilizando o <i>software</i> Cabri 3D	Mestrado em Educação Matemática; Universidade Estadual De Santa Cruz, Bahia
	Maxlei Vinicius Candido de Freitas (M. FREITAS, 2015)	Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio	Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul
	Marcia Santos Melo Almeida (M. ALMEIDA, 2015)	A articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental	Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul
	Valéria Ciabotti (CIABOTTI, 2016)	Elaboração de livro paradidático para o ensino de probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do ensino fundamental	Mestrado em Educação, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais
	Alanne de Jesus Cruz (CRUZ, 2019)	Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe, Sergipe
	Luciano Pontes da Silva (SILVA, 2019)	Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe, Sergipe
	Nailys Melo Sena Santos (N. SANTOS, 2021)	Praxeologia para ensinar sólidos geométricos: o caso de uma bolsista residente do curso licenciatura em matemática da UFS	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe, Sergipe
DISSERTAÇÕES – MESTRADOS PROFISSIONAIS	Joseane Gabriela Almeida Mezerhane Correia (CORREIA, 2017)	Maneiras de agir e pensar significativos para autoformação do professor que ensina matemática	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática; Universidade Federal do Acre, Acre

Fonte: Catálogo de teses e dissertações da CAPES, banco de dados da BDTD e RIUFS.

Consideramos 19 (dezenove) publicações, para análise em nossa revisão. Pelo fato de termos escolhido entre as nossas palavras-chaves, o termo “teoria antropológica do didático”, todas as pesquisas apresentaram a TAD como referencial teórico e, em alguns casos como referencial metodológico. Ao fazer a leitura dos textos, observamos que 10 (dez) pesquisas apresentam apenas a TAD como aporte teórico, são elas: Rossini (2006), Farias (2008), Ferreira (2011), C. Santos (2013), M. Freitas (2015), M. Almeida (2015), Ciabotti (2016), Benito (2019), R. Freitas (2019) e N. Santos (2021). Apesar disso, Andrade (2007), Varella (2010), Jammal (2011), E. Almeida (2012), Bispo (2014), C. Silva (2015), Correia (2017), Cruz (2019) e L. Silva (2019) decidiram por usar também outros referenciais¹¹.

Andrade (2007, p.50) tratou do ensino da Geometria Analítica Plana e dos Vetores baseando-se na Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel (1968). Nos estudos de Jammal (2011), E. Almeida (2012) e C. Silva (2015) adotaram como referencial teórico, a Teoria dos Jogos de Quadros de Régine Douady (1992). Conjuntamente a essa teoria, Jammal (2011) e C. Silva (2015) compartilharam o referencial ao tratarem das noções de ponto de vista, conforme Dias (1998) e Rogalski (2001), e de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, de acordo com Robert (1997, 1998).

C. Silva (2015) e Varella (2010) se respaldaram em Balacheff, para o estudo da noção de transposição informática e da tipologia de provas produzidas por alunos, respectivamente. Outros dois referenciais que apareceram no levantamento foram Teoria de Instrumentação de integração de ferramentas tecnológicas no ensino de Rabardel (1995) e a noção de Registros de Representações Semióticas desenvolvida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval (1995), usadas por Bispo (2014) para tratar da compreensão na utilização das ferramentas tecnológicas e da matemática no processo de ensino e aprendizagem, respectivamente.

Correia (2017) trata da formação do professor sob um enfoque cognitivo, a partir das ideias de Shulman (1986) e Tardif (2008). Enquanto Cruz (2019, p.68) e L. Silva (2019) se embasaram nas ideias da Neurociência Cognitiva, que “tem como foco o estudo a respeito das capacidades mentais do ser humano, como por exemplo, o pensamento, aprendizado, inteligência, memória, linguagem, percepção, sendo relacionada sua influência na educação pelos últimos tempos”.

Parte dos aportes teóricos adotados pelas pesquisas enquadra-se nas teorias da Didática da Matemática francesa – Engenharia Didática, Teoria dos Jogos de Quadros, noção de ponto de vista, Teoria de Instrumentação, noção de Registros de Representações

¹¹ Destacamos que pesquisas distintas com autores de mesmo sobrenome, optamos para distingui-las usando a inicial do prenome.

Semióticas e Teoria Antropológica do Didático. Segundo Almouloud (2007), as pesquisas nessa área surgiram a partir do fracasso da reforma da matemática, conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM)¹². Um ideário que levou aos pesquisadores da França e de outros lugares a investigarem situações relacionadas ao ensino e aprendizagem da matemática. Ainda de acordo com o referido autor, a Didática da Matemática é vista como uma ciência que objetiva investigar, além do que foi dito, as condições que favorecem o conhecimento dos alunos.

Apesar de propormos, em nossa dissertação, uma pesquisa fundamentada teoricamente apenas na TAD, acreditamos ser importante saber das possíveis relações entre ela e outros aportes teóricos. Para futuras pesquisas, podemos optar por fazer essas relações, visto que as pesquisas nos mostram que outros aportes podem complementar ou reforçar as propostas da TAD.

Após apresentar brevemente em que as pesquisas selecionadas se fundamentaram teoricamente, decidimos agrupar os trabalhos em focos temáticos que emergiram durante a nossa análise. Por meio desses focos, apresentaremos os objetivos e resultados de cada pesquisa selecionada, visando uma discussão sobre esses dados.

Focos temáticos

Ao realizar a leitura e coleta de dados dos textos, observamos algumas semelhanças e diferenças entre eles. Deste modo, criamos 4 (quatro) focos temáticos, são eles: Discentes; Docentes; Livros didáticos e Outros documentos, organizados para melhor visualização no Quadro 3.

Os focos Discentes e Docentes correspondem aos participantes das pesquisas, alunos do ensino médio, ou nível superior, como também com professores, respectivamente. Nas pesquisas dos focos Livros didáticos e Outros documentos, não há participantes, elas analisam apenas os documentos. No foco Livros didáticos, como o próprio nome deixa claro, são analisados os livros didáticos de matemática, no ensino médio. Enquanto no foco Outros documentos, além dos livros didáticos, são analisados outros materiais didáticos como cadernos bimestrais e avaliações.

¹² Conforme Pavanello (1993), o MMM propunha uma Geometria sob a perspectiva das transformações algébricas, transformando-a distante do mundo real. Essa proposta surgiu após a Segunda Guerra Mundial, como uma resposta à defasagem enfrentada na nova sociedade industrial diante do currículo vigente na época. De acordo com Fiorentini (1995), houve um retorno às ideias do formalismo matemático, contudo, fundamentando-se nas estruturas algébricas.

Quadro 3. Focos temáticos

Foco temático	Pesquisas Mapeadas
<u>Discentes</u>	Andrade (2007); Ferreira (2011); Bispo (2014) ; C. Silva (2015); M. Almeida (2015); L. Silva (2019)
<u>Docentes</u>	Rossini (2006); C. Santos (2013); R. Freitas (2019) ; Benito (2019) ; N. Santos (2021)
<u>Livros didáticos</u>	Farias (2008); E. Almeida (2012); M. Freitas (2015) ; Ciabotti (2016); Correia (2017); Cruz (2019);
<u>Outros documentos</u>	Varella (2010) ; Jammal (2011)

Fonte: Levantamento das pesquisas (julho.2021)

Ao observar melhor cada uma delas, vimos que em cada foco temático há pelo menos um trabalho com proximidade ao nosso objeto. Desse modo, selecionamos apenas esses estudos para detalharmos seus objetivos e resultados. Buscamos dar ênfase em negrito no Quadro 3 para melhor visualização.

Discentes

Neste foco, aparecem seis pesquisas: Andrade (2007); Ferreira (2011); Bispo (2014); C. Silva (2015); M. Almeida (2015); L. Silva (2019). Daremos destaque ao texto de Bispo (2014), um dos textos encontrados sobre sólidos geométricos. Nesse estudo, o autor objetivou compreender os objetos de estudos propostos no ensino de Geometria espacial do Curso Técnico em Agropecuária Integrado (CTAI) e as dificuldades encontradas por alunos do 3º ano do ensino médio dessa instituição na aprendizagem dos sólidos geométricos sob a perspectiva tridimensional e na determinação de suas métricas, utilizando o ambiente papel/lápis. Bispo (2014) concluiu que se os ambientes de aprendizagem forem explorados de fato, nas práticas, sempre que possível com situações envolvendo o cotidiano dos alunos, a aprendizagem pode ser atraente e significativa.

Em geral, de acordo com o que podemos observar nesse foco, independente do público-alvo e do objeto matemático escolhido, a manipulação dos objetos ostensivos e não ostensivos podem servir de auxílio para o momento de aprendizagem dos alunos, mas deve-se ter o cuidado para que não se tornem um obstáculo. O mesmo pode ocorrer nas provas do Enem, alvo da nossa pesquisa, se os objetos propostos nas tarefas não estiverem claros, ou se os conhecimentos dos estudantes não forem suficientes. Ou seja, nesses casos, os objetos ostensivos e não ostensivos serão um obstáculo para resolução das tarefas propostas nas provas.

A seguir, as pesquisas voltadas aos professores que talvez ajudem a compreender quais fatores podem auxiliar o trabalho docente entre outras coisas.

Docentes

As pesquisas de Rossini (2006); C. Santos (2013); R. Freitas (2019); Benito (2019) e N. Santos (2021) fazem parte desse foco. Contudo, evidenciamos as pesquisas de R. Freitas (2019); Benito (2019) e N. Santos (2021).

As teses de R. Lobo Freitas (2019) e Benito (2019) questionam sobre como o Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) pode auxiliar futuros professores. Para isso, eles escolheram como participantes alunos de Licenciatura em Matemática da Bahia e de Sergipe, respectivamente. Ao classificar essas duas pesquisas, neste foco, por considerar que são investigações com ênfase na formação inicial, cujos participantes foram estudantes, como futuros professores. Isso implica que cada uma das teses teve como foco não apenas a aprendizagem dos sujeitos participantes, mas, sim, no papel deles como professores.

O objeto matemático escolhido por R. Freitas (2019) foi a Geometria analítica plana, e os estudantes participantes estavam em turmas de estágio curricular supervisionado, à época da pesquisa. R. Freitas (2019) concluiu considerando o fato de que os discentes submetidos ao processo de formação profissional, por meio do PEP-FP, conseguiram mobilizar e construir os saberes docentes didáticos, pedagógicos e tecnológicos sobre o ponto e a reta.

Enquanto na pesquisa de Benito (2019), seu propósito foi investigar como o PEP-FP contribuiria na formação de futuros professores para questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino e o objeto foi as cônicas. Benito (2019) também percebeu a contribuição positiva do PEP-FP para a formação dos participantes. Destacamos que para a construção do PEP e PEP-FP se faz necessária a criação de modelos epistemológicos de referência (MER).

Por fim, também fazendo a construção desse modelo – o MER, N. Santos (2021) decidiu analisar as praxeologias para o ensino de sólidos geométricos numa de 6º ano do ensino fundamental, adotadas por uma licencianda em matemática da UFS e participante do Programa Residência Pedagógica (RP). Para essa análise, a autora se fundamentou no estudo das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) dos problemas didáticos, sob os aportes da TAD.

Cada uma dessas três dimensões tem um propósito para auxiliar o/a pesquisador/a em suas análises. Na dimensão epistemológica, há um estudo histórico sobre o saber e, por meio desse estudo, cria-se um instrumento de referência, conhecido como Modelo Epistemológico de Referência (MER). Na dimensão econômica, busca-se identificar como determinado saber

matemático está posto nas instituições que se envolvem no processo de ensino aprendizagem. A partir do MER e da análise nessa dimensão econômica, é criado o Modelo Epistemológico Dominante (MED) que pode variar de acordo com a instituição analisada. Finalmente, na dimensão ecológica, é investigada a razão de determinado objeto matemático existir e em quais condições isso ocorre e o que é necessário para mudá-lo (GASCÓN, 2018; FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013; FIGUEROA, ALMOULOU, 2018).

Ao fazer análise dessas dimensões e práticas da licencianda, N. Santos (2021) constatou que a prática da participante estava em conformidade com as propostas da BNCC e com as discussões teóricas realizadas no Programa Residência Pedagógica. A pesquisadora também destaca a importância desse programa para a formação inicial de seus participantes, uma vez que, devido a fatores como a carga horária limitada das disciplinas, certas discussões podem não ocorrer. O que resulta como complemento para a formação oferecida pelo curso.

Desses trabalhos, destacamos N. Santos (2021) por se tratar de uma pesquisa sobre os sólidos geométricos e que se baseia nas dimensões do problema didático, assim como a nossa pesquisa. A pesquisadora também faz parte de nosso grupo de pesquisa – NCPPEM/CNPq/UFS¹³.

Livros didáticos

Farias (2008), E. Almeida (2012), M. Freitas (2015), Correia (2017), Cruz (2019) investigaram os livros didáticos e Ciabotti (2016) que apesar de tratar de livros para didáticos, decidimos manter neste foco. Destacamos E. Almeida (2012) que observou o estudo das progressões aritméticas e geométricas no primeiro ano do ensino médio, M. Freitas (2015) teve seu olhar ao ensino de volume de sólidos geométricos em todo o ensino médio, razão pela qual apresentaremos apenas os dados desta dissertação.

M. Freitas (2015) analisou quatro coleções mais adotadas nas redes públicas brasileiras e aprovadas pelo PNLD¹⁴/2012 dando ênfase na coleção mais adotada e sobre a importância em fundamentar sua pesquisa pela TAD. Quanto a isso, o autor exemplifica destacando como foi importante conhecer os tipos de tarefas e técnicas mobilizadas, em

¹³ Leia-se NCPPEM/CNPq/UFS – Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisas em Educação Matemática, vinculado à Universidade Federal de Sergipe, registrado no CNPq em 2019, mas com suas ações iniciadas desde 2017, com atividades de iniciação científica – PIBIC, sob a coordenação da Profa. Dra. Denize Souza. As práticas educativas e de pesquisas estão diluídas em três linhas: A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores; Saberes e Práticas Educativas; Educação Matemática e Inclusão. Sua finalidade é contribuir para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática, a partir do aprofundamento ao conhecimento de perspectivas teóricas que norteiam práticas educativas e práticas de pesquisa em Educação, Educação Matemática, Didática da Matemática e Educação Inclusiva.

¹⁴ Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD.

relação ao volume dos sólidos geométricos. Entre os tipos de tarefas propostos, o que teve mais recorrência foi o de calcular o volume dos sólidos, principalmente de sólidos conhecidos. Os sólidos irregulares tiveram pouca frequência. De acordo com o autor, isso pode comprometer o estudo de algumas propriedades relacionadas ao cálculo do volume. M. Freitas (2015) lança questionamentos que surgiram durante a pesquisa e que podem ser respondidos por futuras pesquisas: “até que ponto a evolução das praxeologias podem influenciar no processo de ensino e aprendizagem? Será que a praxeologia apresentada nessas coleções são as mesmas que o professor põe em prática em sala de aula?”.

São questões que merecem reflexão quando se busca investigar sobre praxeologias adotadas para o estudo de sólidos geométricos. Em outras palavras, quando se deseja analisar as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos nas provas do Enem nas edições de 2017 até 2020. Desse modo, enfatizamos que apesar de ter sido uma pesquisa publicada há mais de 5 anos, os resultados obtidos serviram como auxílio para o momento em que investigamos as praxeologias presentes nas provas do Enem.

Outros documentos

No último foco, Varella (2010) e Jammal (2011) analisaram outros documentos além dos livros didáticos, todavia, destacamos apenas a pesquisa de Varella (2010). Em sua pesquisa, Varella (2010, p.8) parte do seguinte questionamento: “Quais organizações matemáticas e didáticas envolvendo prova e demonstração são propostas por materiais didáticos do Ensino Médio, no conteúdo Geometria Analítica?”.

A autora decidiu em restringir seu estudo para o conteúdo, equação de uma reta no 3º ano do Ensino Médio, valendo-se dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM 2010) e dos cadernos bimestrais dos alunos e dos professores adotados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEESP/2009). Para além desses materiais, também analisou documentos curriculares nacionais e estaduais: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCN+ Ensino Médio, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e a Proposta Curricular de Matemática para o Ensino Médio. Após análise das praxeologias, Varella (2010, p.204-205) ressaltou quatro pontos:

- i) a ausência de definição para os termos que constituem o método dedutivo;
- ii) a falta de clareza da organização Matemática¹⁵ ao realizar uma demonstração que verifica um teorema; iii) incidência não representativa de tarefas propostas aos alunos que permitam a elaboração de provas nos

¹⁵ Mantivemos escrito como no original.

diferentes níveis de raciocínio dedutivo; iv) inconsistência na identificação de um teorema: não está explícito na maioria dos materiais didáticos analisados, se uma afirmação representa uma propriedade, um teorema ou somente deduz uma fórmula matemática.

Por fim, a autora ressalta que os documentos curriculares orientam um ensino que propicie o desenvolvimento do estudante, entre outras coisas, como cidadão crítico. Contudo, diante da organização didática apresentada nos materiais analisados, ela expõe que talvez devam iniciar o desenvolvimento da argumentação durante os anos finais do ensino fundamental, uma vez que não podem não conseguir realizá-la de modo consistente apenas no ensino médio.

Pelo fato de as pesquisas desse foco darem ênfase em outros documentos, elas nos auxiliaram em como podemos fazer as discussões e análises dos documentos curriculares nacionais e das provas do Enem. Da mesma maneira, podemos ter um olhar sobre outros focos, ao considerar as problemáticas levantadas pelos autores e os aportes teóricos escolhidos com o objetivo de alcançar respostas aos seus questionamentos.

Diante do que foi explicitado nesta subseção, podemos observar algumas noções da TAD enfatizadas nas pesquisas. As organizações matemáticas e didáticas, os objetos ostensivos e não ostensivos, como destacamos as seguintes pesquisas: Rossini (2006), Andrade (2007), Varella (2010), Ferreira (2011), E. Almeida (2012), C. Santos (2013), C. Silva (2015) e M. Freitas, (2015). Outras temáticas se revelam, como o Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) nas pesquisas de Benito (2019) e R. Freitas (2019); as relações institucionais e pessoais em Jammal (2011) e os modelos apresentados na pesquisa de N. Santos (2021): Modelo Epistemológico de Referência (MER) e Modelo Epistemológico Dominante (MED).

2.3 SOBRE OS MODELOS DO PROBLEMA DE PESQUISA

Mesmo que não seja de maneira consciente, todo pesquisador utiliza um modelo que serve de referência para a sua pesquisa. De acordo com Gáscon (2011), para o problema didático é necessário tratar das dimensões fundamentais – dimensões epistemológica, econômica e ecológica. Na Teoria Antropológica do Didático, a dimensão epistemológica é considerada como o passo inicial e essencial para o problema de pesquisa. Desse modo, nesta subseção, trataremos da dimensão epistemológica referente aos sólidos geométricos.

Para a nossa pesquisa, consideramos o Modelo Epistemológico de Referência criado por N. Santos (2021). Para criar o seu modelo, a autora tomou como base, textos de Boyer (2001); Tomei (2006); Roque (2012); dentre outros, com o intuito de apresentar uma das

razões de ser dos sólidos geométricos, mostrando uma evolução do saber sábio ao longo da história.

N. Santos (2021) também complementou seu estudo quanto às organizações matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos ao identificar os tipos de tarefas e técnicas propostos na investigação das atividades no livro *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2 (LIMA et al, 2004 *apud* N. SANTOS, 2021). Conforme justificativa da autora, observou-se uma proximidade entre o estudo dos sólidos geométricos proposto pelos autores e o bloco tecnológico-teórico da sua pesquisa.

O MER para o caso dos sólidos geométricos

Apresentaremos neste subtópico, o resultado da pesquisa de N. Santos (2021) quanto à criação do Modelo Epistemológico de Referência (MER) dos sólidos geométricos. Com base na investigação da dimensão epistemológica, a autora pôde explicitar por meio do modelo, uma das razões de ser dos sólidos geométricos que, segundo a autora, podem ser definidos na Geometria euclidiana como “aquele que tem comprimento, largura e profundidade, [...] as suas faces são as superfícies” (N. SANTOS, 2021, p.68).

Durante a investigação no bloco tecnológico-teórico, N. Santos (2021) apresentou um breve histórico da Geometria, dando foco ao livro *Os elementos*, de Euclides, que durante muito tempo representou os conhecimentos geométricos difundidos no mundo. A pirâmide, o prisma, a esfera, o cilindro, o cone e os cinco sólidos de Platão (sólidos regulares) eram um dos objetos estudados nesse livro. Séculos depois, a Geometria se desenvolveu e com isso surgiram novos ramos, como as Geometrias analítica e descritiva.

Ao analisar o bloco técnico-prático¹⁶, N. Santos (2021) exemplificou dez tipos de tarefas, decidimos apresentá-los no Quadro 4. Além disso, destacamos os conceitos mobilizados, com o intuito de tornar mais claro ao leitor a aparição deles no MER criado pela referida autora. Esses conceitos estão presentes no modelo, podendo ser observada a relação que ocorre na cadeia alimentar entre objetos que alimentam ou são alimentados.

¹⁶ N. Santos (2021) analisou, no bloco técnico-prático, o livro *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2 de Lima *et al* (2004).

Quadro 4. Tipos de tarefa e principais conceitos

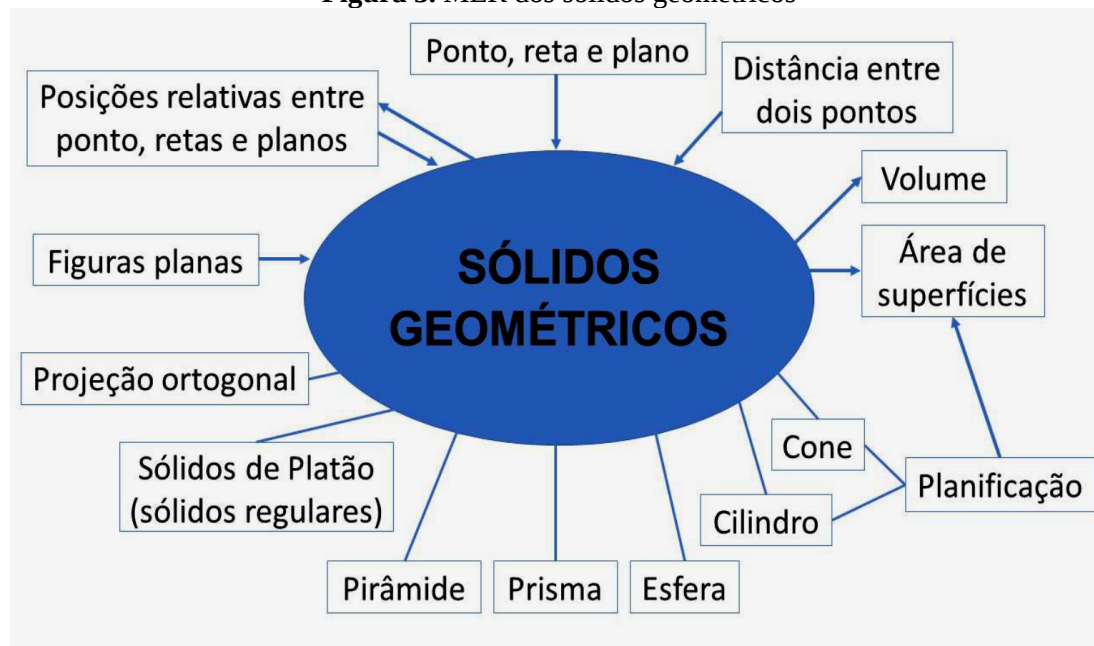
Tipos de tarefas	Principais conceitos
T ₁ : Construir uma pirâmide	Ponto; reta; plano; paralelismo entre retas e planos.
T ₂ : Construir um prisma	
T ₃ : Identificar a interseção de α e β , onde o plano α é determinado pelas arestas laterais opostas $\overline{VA}$ e $\overline{VC}$ de uma pirâmide quadrangular de base $ABCD$ e vértice V e o plano β é determinado por $\overline{VB}$ e $\overline{VD}$ dessa mesma pirâmide.	Posições relativas entre dois planos.
T ₄ : Mostrar que os planos $ABHG$ e $EFDC$ são perpendiculares, de modo que esses planos são determinados pelas arestas de um cubo $ABCDEFGH$.	Perpendicularismo.
T ₅ : Desenhar as vistas ortogonais de um sólido	Projeção ortogonal de figuras espaciais e as vistas (frontal, topo e perfil) geradas por essa projeção.
T ₆ : Desenhar um sólido de acordo com as vistas frontal, superior e de perfil;	
T ₇ : Calcular a diagonal BH de um paralelepípedo $ABCDEFGH$, onde $AB = a$, $AD = b$ e $DH = c$	Distância entre dois pontos.
T ₈ : Calcular o raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta a .	
T ₉ : Calcular o volume do octaedro regular de aresta a .	Volume.
T ₁₀ : Calcular a área da superfície de uma pirâmide regular de altura 4cm e base quadrada de lado 6cm.	Área.

Fonte: N. Santos (2021, p. 79-85)

De acordo com os tipos de tarefas exemplificados, podemos constatar que alguns conceitos tanto alimentam os sólidos, como são alimentados por eles, de modo a desenvolver as técnicas necessárias para as respectivas tarefas.

Por meio da análise dos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico foi construído o MER. Durante sua construção, N. Santos (2021) verificou que os conceitos relacionados a ponto, reta, plano e figuras planas servem de alimento para os sólidos geométricos, com destaque para os conceitos das posições relativas entre ponto, retas e planos que também são alimentados pelos sólidos.

Como pode ser observado na Figura 1, a autora interligou os conceitos por linhas (—). No modelo, também é dado destaque às relações da cadeia alimentar ao indicar as relações de alimento ($\rightarrow$) e alimentado ($\leftarrow$), por meio das setas, cujas flechas estão em direção ao conceito que é alimentado.

Figura 3. MER dos sólidos geométricos

Fonte: N. Santos (2021, p.86)

Outro ponto a ser levantado é o fato dos conceitos de medidas tanto de área da superfície de um sólido como do volume, serem apontados como alimentados pelos sólidos geométricos. Diante do estudo dos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico, a autora identificou que para a resolução de tarefas relacionadas à área e ao volume, inicialmente, era necessário realizar o reconhecimento de cada sólido e dos seus principais elementos, como os vértices, as arestas e as faces/superfícies (N. SANTOS, 2021, p.85).

Apesar de N. Santos (2021) apresentar sobre a área e o volume dos sólidos geométricos em seu modelo, a autora informa que restringiu seu texto em apresentar a definição e caracterização dos sólidos estudados nos anos finais do ensino fundamental, isto ocorreu devido a questões como a pandemia e o tempo disponível.

Levamos em consideração que os Modelos são provisórios e podem ser modificados, ou complementados, a cada nova descoberta. Assim, durante a construção do nosso Modelo Epistemológico Dominante (MED), buscamos responder algumas inquietações: Será que houve mudanças em relação ao MER de N. Santos (2021)? Quais objetos matemáticos fazem parte ou não deste novo modelo? Será que há conceitos que podem complementar o nosso MED?

Antes de apresentar nosso MED, respondendo essas indagações, acreditamos ser necessário apresentar algumas informações acerca do ensino médio brasileiro e dos documentos curriculares nacionais que o regula. Portanto, na próxima Seção apresentaremos essa caracterização.

3. ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: DUALIDADE, REFORMAS, ENEM

As práticas relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem são norteadas, dentre tantas coisas, pelos documentos curriculares nacionais. As propostas e mudanças contidas nesses documentos, em especial no ensino médio, possibilitam a construção de um currículo para as escolas brasileiras. Devido à importância dos documentos curriculares nacionais e das avaliações em larga escala, como o Enem, para essa construção, nesta Seção trataremos dessas instituições. Também trataremos brevemente sobre os Guias dos PNLD's¹⁷ 2015 e 2018, pelo fato de serem os Guias vigentes durante as provas do Enem de 2017 a 2020.

Para a nossa pesquisa, consideramos necessário tratar desses habitats em que os sólidos geométricos estão inseridos. Visto que as dimensões econômica e ecológica para o nosso problema de pesquisa envolvem essas instituições. Logo, conhecer as suas propostas e mudanças nos auxiliam a compreender o porquê e como o objeto geométrico está posto nelas. Além disso, na Seção seguinte, por meio da análise realizada nessas instituições que criamos os nossos modelos, MED e MPR.

Nesta Seção, organizamos a seguinte estrutura: Ensino médio brasileiro: uma política de dualidades; Ensino médio brasileiro: um panorama acerca dos documentos curriculares; Guias dos PNLD's 2015 e 2018 e Enem: um contexto investigativo.

3.1 ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: UMA POLÍTICA DE DUALIDADES

Para entender a discussão envolvendo a dualidade do ensino médio brasileiro, precisamos saber que nem sempre houve a ideia de “educação para todos”, ou a sua tentativa de implementação. Muito pelo contrário, a oportunidade de seguir nos estudos era reservada para poucos e infelizmente, no século XXI, ainda podemos encontrar discursos que propagam isto. Enquanto os filhos de famílias ricas e da burguesia tinham maiores oportunidades de ingressar em universidades, os filhos de famílias menos favorecidas precisavam de um ofício, surgindo à necessidade de formação profissional para criar uma mão de obra capaz de cumprir com as exigências da sociedade.

Ao considerarmos as mudanças ocorridas a partir da Reforma Campos, em 1930, houve a elaboração de um novo currículo nacional. Euclides Roxo propôs unir as disciplinas – Aritmética, Álgebra e Geometria – em uma só, a disciplina Matemática, tomando como

¹⁷ PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático.

base a experiência como professor e diretor no Colégio Pedro II. Apesar da proposta de Roxo sofrer alterações, permaneceu a disciplina única (VALENTE, 2011).

A estrutura dos níveis de ensino, que conhecemos atualmente como ensino fundamental (anos iniciais e anos finais) e ensino médio, foi resultado de muitas mudanças e reformas na educação. A partir da Reforma Campos, esses níveis de ensino eram estruturados em ensino primário e secundário, sendo o ensino secundário dividido em dois ciclos: curso fundamental e curso complementar. Essa estrutura foi modificada após a Reforma Capanema, em 1940, o ensino secundário foi redistribuído em ginásio e colégio. Também era ofertado o ensino técnico para as áreas industriais, agrícolas e comerciais, além do ensino normal. Com a promulgação da Lei Nº 5.692/71, houve mudanças nessas divisões, o primário e o ginásio foram denominados de 1º grau e o colégio como 2º grau, mantendo-se ainda os cursos técnicos e normal¹⁸ (VALENTE, 2011, SANTOS; SILVA, 2020).

Segundo Valente (2011), podemos considerar o curso complementar como um antepassado do ensino médio. Esses cursos ofertavam três opções: curso pré-jurídico, curso pré-médico, curso pré-politécnico. Ministrados em anexos das universidades, tinham como objetivo preparar os alunos para cursos de nível superior. Ainda de acordo com o referido autor, a matemática ensinada nesses cursos visava conteúdos introdutórios aos cursos superiores, não como complementariedade ao curso fundamental.

No que se refere aos cursos com formação para o trabalho, entre outros motivos, surgiram devido às necessidades da população e empresas por uma capacitação mais imediata, visto que a formação no ensino superior demanda um tempo maior de formação. Essa separação entre o ensino propedêutico e o ensino profissionalizante (técnico, profissional) gerou e perpetuou essa dualidade no ensino médio. De tempos em tempos são discutidas formas de diminuir essa separação, contudo, tanto o campo educacional como político, servem de influência para as decisões tomadas objetivando as reformas no ensino médio.

De acordo com Silva et al (2020), podemos afirmar que os resultados não favoráveis de exames de larga escala, como o Enem, também serviram como embasamento de propostas a uma reforma do ensino médio. Uma vez que esses exames servem para investigar a qualidade do ensino e aprendizagem. Entre os resultados mais recentes da reforma do ensino médio, está a criação da BNCC e a atualização das DCN.

¹⁸ O curso normal era voltado à formação de professores e ocorria concomitante à formação do 2º grau.

Na BNCC, podemos levantar alguns questionamentos acerca da dualidade no ensino médio, por exemplo: Será que a proposta apresentada sobre os itinerários formativos serve para fazer uma aproximação entre uma formação cidadã, acadêmica e profissional? Ou é mais uma medida para agravar a dualidade existente? Deixamos esses questionamentos para que o leitor possa refletir, de modo que seja instigado a pesquisar mais sobre o assunto e tire suas próprias conclusões sobre o tema.

3.2 ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: UM PANORAMA ACERCA DOS DOCUMENTOS CURRICULARES

Ao pensarmos em como foi o processo de estruturação do currículo brasileiro, em especial a partir da década de 1990, precisamos discutir o que estava acontecendo nesse período e como isto influenciou na educação. No final da década de 1980, ocorreram diversas mudanças que influenciaram a economia e política mundial. Entre os diversos acontecimentos desse período, em 1989, houve a queda do muro de Berlim e depois, como consequência, a reunificação da Alemanha oriental e ocidental. Outro acontecimento que podemos citar foi a crise política na União Soviética, um dos principais símbolos do socialismo, que resultou na sua dissolução em 1991.

No Brasil, após alguns anos do fim da ditadura militar e promulgação da nova Constituição Federal de 1988, nosso presidente era Fernando Collor de Mello que, por causa das acusações de corrupção, sofreu *impeachment* dois anos depois a sua posse, tendo como sucessor o seu vice, Itamar Franco. De acordo com Nascimento (2007), no início dessa década, o Brasil foi inserido na economia mundial e por causa disto precisou passar por alguns reajustes de forma a seguir as necessidades dessa conjuntura. Entre os campos que precisavam passar por reajustes, estava a educação, considerada importante para a competitividade entre os países. Essas circunstâncias acarretaram a demanda de profissionais mais qualificados.

Segundo Frigotto e Ciavatta (2003, p. 97), nesse período, “do ponto de vista da educação, ocorre uma disputa entre o ajuste dos sistemas educacionais às demandas da nova ordem do capital e as demandas por uma efetiva democratização do acesso ao conhecimento em todos os seus níveis.” Ainda de acordo com esses autores, essa década foi marcada por eventos e produções documentais por parte dos organismos internacionais, como UNESCO¹⁹,

¹⁹ UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura.

UNICEF²⁰, PNUD²¹ e Banco Mundial. Essas agências financiaram a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, que ocorreu na Tailândia. Segundo Frigotto e Ciavatta (2003), alguns autores consideram como o marco referencial para a organização do currículo baseado no ensino por competências. Este evento teve como principal ideia a discussão sobre a “satisfação das necessidades básicas de aprendizagem” (FRIGOTTO; CIAVATTA, 2003, p. 98).

Os eventos e as produções desse período propiciaram uma reforma na educação mundial, principalmente para os países em desenvolvimento, como o Brasil. No que diz respeito ao currículo do ensino médio, nesse período houve uma desvinculação entre ele e o ensino profissional, para que fossem oferecidos de forma concomitante ou sequencial. Em 1995, Fernando Henrique Cardoso era o presidente do Brasil e diversas políticas públicas de currículo foram criadas durante seu mandato, as quais ainda estão em vigor ou serviram de influência para as seguintes. A relação do governo de Fernando Henrique Cardoso e a ideologia de mercado pode ser expressa pela afirmação da secretária da Secretaria de Ensino Superior (SESU), Maria H. Guimarães Castro, explicitou que “as competências que devem ser avaliadas são aquelas que os empresários indicam como desejáveis” (FRIGOTTO; CIAVATTA, 2003, p. 108).

Como fruto das discussões nesse período, a nova LDBEN Nº 9.394/96 foi promulgada em 1996, a qual apresenta algumas regulamentações para a educação básica, superior e profissionalizante, e apesar de algumas alterações em seu texto ainda está em vigor. Essa lei tem o objetivo de regulamentar as diretrizes e bases da educação brasileira. Entre as suas regulamentações constam os deveres e direitos da sociedade e dos órgãos públicos em relação à oferta de serviços da educação. Destacamos o Artigo 22, que trata das finalidades da educação básica, como por exemplo, assegurar a formação comum aos estudantes para o exercício da cidadania. Além disso, a responsabilidade de fornecer a eles formas para prosseguir nos estudos ou trabalho (BRASIL, 1996).

Em seu texto também é garantida a criação de uma base nacional comum, que em princípio foi apenas para o ensino fundamental e médio. Em 2013, foi adicionado que o ensino infantil deveria ser contemplado. Destacamos ainda, a presença das ideias das teorias tradicionais do currículo sob uma perspectiva instrumental, em que são selecionados conhecimentos que serviriam para uma aplicabilidade econômica e social ao tratar das competências e habilidades.

²⁰ UNICEF – Fundo das Nações Unidas para a Infância.

²¹ PNUD – Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento.

A partir LDBEN Nº 9.394/96, nos anos seguintes, foram reformulados os documentos como os PCN e as DCN que apresentam as orientações educacionais para cada nível e modalidade de ensino e área do conhecimento. Desde então, foram publicados outros documentos curriculares nacionais e avaliações que buscavam propor uma mudança no currículo do ensino médio ofertado nas escolas brasileiras. Apresentaremos a seguir um breve histórico de alguns dos principais documentos curriculares nacionais para o ensino médio (DCNEM, PCNEM E BNCC), o PNLD e o Enem.

3.2.1 Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)

No ano de 1998, foram publicadas as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), de acordo com Ciavatta e Ramos (2012, p. 11), isto introduziu um novo discurso em nossa educação de “orientações explícitas de como deveria ser pensada e conduzida a ação educacional nas escolas”.

Esse documento tinha o intuito de definir princípios, fundamentos e procedimentos que deveriam servir de apoio à organização pedagógica e curricular de acordo com cada ano de ensino para as escolas. Por se tratar do ensino médio, suas orientações estavam sempre vinculadas à formação cidadã e à preparação para o trabalho. De acordo com Moehlecke (2012, p. 39), as DCNEM de 1998 sofreram diversas críticas devido ao que consideravam “sua ênfase excessiva na flexibilização, autonomia e descentralização do currículo, subordinando a educação às demandas do mundo do trabalho”. De acordo com o artigo 1º, as DCNEM

[...] se constituem num conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular de cada unidade escolar integrante dos diversos sistemas de ensino, em atendimento ao que manda a lei, tendo em vista vincular a educação com o mundo do trabalho e a prática social, consolidando a preparação para o exercício da cidadania e propiciando preparação básica para o trabalho. (BRASIL, 2000, p.101)

Mais de dez anos depois, em 2012, as DCNEM foram atualizadas. De acordo com Silva e Colantonio (2014, p. 613), os argumentos para a criação das novas DCNEM estão relacionados à necessidade de aprofundar as temáticas sobre ciência, cultura, trabalho e tecnologia, propostos como elementos centrais no ensino médio para a organização pedagógico-curricular.

As DCNEM seguem em vigor com atualização, em 2018, a partir de algumas das mudanças ocorridas na LDBEN Nº 9.394/96, fruto das discussões mais recentes acerca do

novo ensino médio. Atualmente, são complementadas pelas orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nessa última versão, algumas das regulamentações estão relacionadas à formação integral e ao projeto de vida. Essa última versão está em conformidade com a BNCC, enquanto as versões anteriores se relacionam às propostas dos PCNEM e PCN+, no próximo tópico, apresentaremos algumas informações sobre esses documentos curriculares.

3.2.2 Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) e PCN+

Considerados como um complemento normativo para as DCNEM, no ano 2000, foram publicados novos documentos – os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) – cujos volumes correspondem a cada área do conhecimento, organizada na época. Esses documentos fizeram parte da reforma do ensino médio e sofreram diversas críticas em sua criação e implementação, principalmente por causa do ideário neoliberal presente neles. Segundo Lopes (2002), os PCNEM adotam como princípios curriculares, presentes em seu discurso, a interdisciplinaridade, contextualização e currículo por competências. É válido ressaltar que devemos tomar os devidos cuidados para que a interdisciplinaridade e contextualização não sejam obstáculos para o processo de ruptura entre o conhecimento cotidiano e o conhecimento escolar.

No último ano no governo de Fernando Henrique Cardoso, em 2002, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (PCN+) foram publicadas como um complemento para as propostas dos PCNEM. Elas se diferenciam pela discussão acerca da articulação entre conteúdo e competência. Segundo Oliveira et al (2013, p. 6), os PCN+ foram criados para “suprir a necessidade dos professores em aprender novas metodologias ou novas maneiras de abordar os conteúdos a partir de análises e reflexões sobre o documento”.

No documento, as habilidades e competências propostas em outros documentos curriculares são tratadas como complementares. Um exemplo dado é a relação entre os PCN+ e Enem que apesar da quantidade diferente de competências propostas são consideradas parecidas. No texto do PCN+, há uma analogia das mãos como as competências e os dedos como as habilidades, como forma de exemplificar e esclarecer a relação entre elas, em que a primeira só teria sentido pela associação com a última. As habilidades seriam competências específicas, não competências menores, pelo fato de não haver uma relação hierárquica (BRASIL, 2002). Atualmente, temos um novo documento curricular para nortear a criação dos currículos que está em processo de implementação na educação básica, a BNCC.

3.2.3 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC teve a sua versão final foi publicada em 2018, em conformidade com documentos como a Constituição/1988, a LDBEN Nº 9.394/96 e o Plano Nacional de Educação – Lei Nº 13.005/2014, os quais previam a implementação de uma base curricular comum. Ao que diz respeito ao conteúdo da BNCC do ensino médio, podemos destacar três principais pontos abordados e que se diferenciam um pouco da proposta para o ensino infantil e fundamental. São eles, a proposta de educação integral, que é caracterizada por uma formação mais integrada. O outro ponto são os itinerários formativos, eles podem ser baseados nas áreas de conhecimento em que a Base está organizada – Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – na formação técnica e profissional, ou ainda, na combinação entre as diversas áreas e/ou a essa formação técnica. Por fim, os projetos de vida, os quais estão ligados a auxiliar os alunos nas suas escolhas para a vida, uma vez que a escola também faz parte da vida desses estudantes, mesmo que alguns deles não a compreendam dessa forma.

Desse modo, tanto as competências gerais quanto as específicas por área do conhecimento, dispostas na Base, tem o discurso de que a sua finalidade seria a contribuição dos currículos brasileiros para a formação do estudante. Apesar do termo competência ser geralmente associada a empregabilidade, o texto da BNCC busca relacioná-lo a uma formação mais ampla e que sirva para todos os âmbitos da vida do estudante, seja no exercício da cidadania, como trabalhador e, também, numa possível continuidade dos estudos.

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8, grifos nossos).

De acordo com o seu texto, a BNCC é baseada em duas principais noções. A primeira refere-se à matéria curricular e ao fato das competências e diretrizes fazerem parte do que é comum a todos e o currículo do diverso. O segundo, ao fato de que a LDB “orienta a definição das aprendizagens essenciais, e não apenas dos conteúdos mínimos a ser ensinados” (BRASIL, 2018, p. 11). Essas aprendizagens essenciais são as aprendizagens fundamentais

que devem ser comuns aos estudantes da educação básica de forma a garantir o seu acesso e a sua permanência na escola.

O discurso presente na Base é dos alunos como protagonistas em seu processo de escolarização, por meio da proposta de educação integral e itinerários formativos. Essas aprendizagens auxiliariam na construção e realização do projeto de vida dos estudantes e na continuidade dos seus estudos. Esse projeto de vida diz respeito às escolhas, sejam elas de uma formação para o nível superior, inserção ao mercado de trabalho e por estilos de vida – sustentáveis, saudáveis e éticos (BRASIL, 2018).

Anterior às propostas presentes na BNCC, os guias do PNLD 2015 e 2018, estão de acordos com os documentos curriculares PCNEM e PCN+. No próximo tópico apresentaremos brevemente o que é o PNLD, dando ênfase nas principais indicações dos Guias de 2015 e 2018, para os livros didáticos de matemática do ensino médio de forma geral e, em específico, das coleções adotadas em nossa pesquisa.

3.3 GUIAS DOS PNLD's 2015 E 2018

De acordo com o histórico apresentado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), o Programa Nacional do Livro Didático teve uma denominação anterior, como Instituto Nacional do Livro. Com um dos objetivos de distribuir obras didáticas aos alunos da rede pública de ensino, em 1937, o instituto foi criado por meio do Decreto-Lei Nº 93, de 21 de dezembro de 1937. Atualmente, houve uma mudança em seu nome, apesar de manter a mesma sigla, Programa Nacional do Livro e Material Didático. O PNLD avalia e distribui obras didáticas, pedagógicas e literárias às escolas públicas, além de escolas comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas ao Poder Público. Após avaliação por meio de critérios pré-definidos, os livros aprovados compõem o Guia do PNLD. A partir desse Guia, cada professor e escola poderão escolher as coleções de livros didáticos a serem adotados.

A cada ano é lançado um Guia referente a uma das etapas de ensino – anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Em nossa pesquisa, escolhemos duas coleções de livros didáticos de matemática do ensino médio aprovadas respectivamente pelos Guias do PNLD de 2015 e 2018. Essa escolha ocorreu devido a disponibilidade do material e por pertencerem aos dois Guias vigentes durante as provas do Enem de 2017 a 2020. Deste modo, apresentaremos a seguir as informações dadas por esses

Guias sobre todas as coleções aprovadas e, em específico, sobre as duas coleções e objeto geométrico escolhidos para esta pesquisa.

No Guia de 2015, é comentado acerca do ensino da Geometria espacial, que:

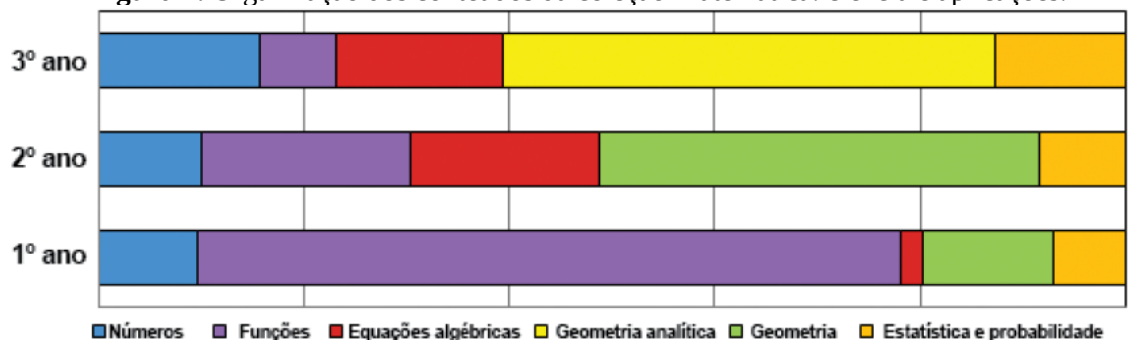
O ensino médio usual não tem contribuído de modo desejável para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos. Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos (BRASIL, 2014, p. 99).

Essa afirmação se mantém no Guia de 2018, ainda de acordo com os dois documentos, há uma evidência na classificação das figuras e os problemas apresentados não são instigantes. No caso do estudo das medidas de área e de volume, essa ênfase está em propor situações em que há aplicação da álgebra sem explorar tanto a capacidade de visualização.

Em relação às coleções escolhidas para esta pesquisa, observamos as informações dadas sobre as coleções pelos respectivos Guias. A coleção Matemática: ciência e aplicações de autoria Iezzi et. al., pertencente ao Guia de 2015, e #Contato Matemática, autorias Joamir Souza e Jacqueline Garcia, vinculado ao Guia de 2018. Nos dois documentos são apresentados gráficos da organização dos conteúdos em relação aos campos da matemática, como pode ser observado na

Figura 4 e na Figura 5.

Figura 4. Organização dos conteúdos da coleção Matemática: ciência e aplicações.

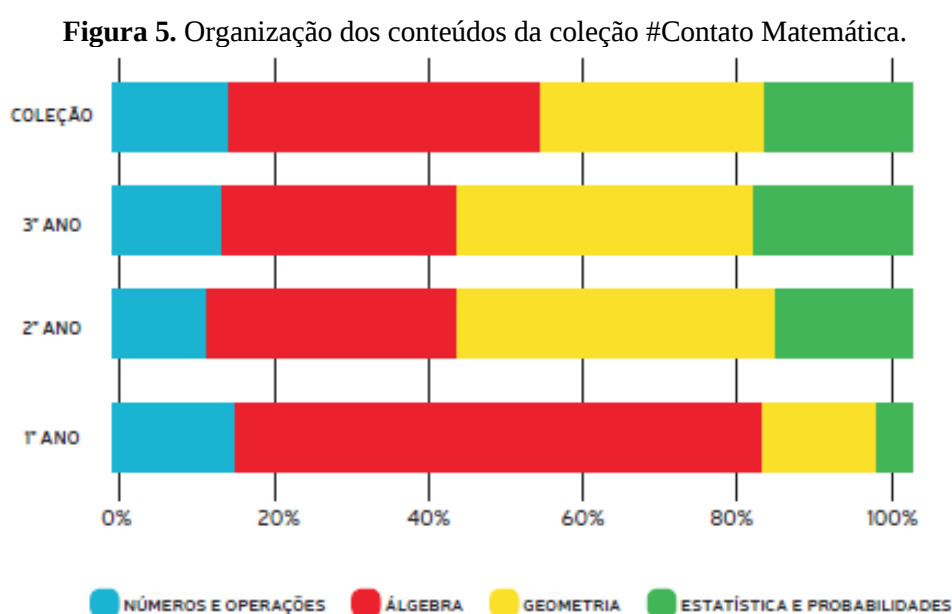


Fonte: Brasil (2014, p. 52).

Na coleção Matemática: ciência e aplicações, podemos observar um predomínio da Geometria no livro de matemática do 2º ano do ensino médio. De acordo com a análise contida no Guia de 2015, nessa coleção, em específico, há uma predominância da Geometria

métrica²². Nela, também há um cuidado em apresentar as deduções das fórmulas do cálculo de medida de volume baseadas no Princípio de Cavalieri. Apesar disso, é destacado no Guia que o cálculo da medida de área de uma superfície esférica apresentado possui uma imprecisão. Ao observar o sumário da coleção e devido a sua organização, intuímos que o objeto estudado nesta pesquisa será encontrado apenas no livro do 2º ano.

Em relação à coleção #Contato Matemática, diferente da coleção anterior, a Geometria aparece em seus três livros. Na Figura 5, é apresentada uma média do percentual em que os campos da matemática aparecem na coleção – Números e operações, Álgebra, Geometria, Estatística e probabilidade.



Fonte: Brasil (2017, p. 84).

Assim como na coleção Matemática: ciência e aplicações, no livro do 2º ano do ensino médio é explorada a Geometria métrica. Nesse Guia, alguns dos métodos utilizados são poucos convencionais, sendo o Princípio de Cavalieri usado de maneira frequente e apropriada. Enquanto no livro didático do 3º ano são estudadas as cônicas, apesar de não apresentarem a demonstração das equações, seu desenvolvimento consta no Manual do Professor.

Ao utilizarmos essas coleções em nossa pesquisa, acreditamos ser necessário conhecer a avaliação dos Guias, uma vez que elas foram aprovadas por eles. Os Guias apresentam uma visão sobre essas coleções, o que pode nos ajudar no momento da nossa análise. Apesar de

²² Apesar de não apresentar diretamente o que se entende por Geometria métrica, os autores nos permitem inferir como sendo a parte da Geometria voltada ao estudo do cálculo de medidas como o comprimento, área, volume e amplitude de ângulos (BRASIL, 2014, p. 53).

não ser específica para os sólidos geométricos, são reveladas ao leitor informações em forma de exemplo que auxilia a compreender a forma em que esse objeto geométrico é abordado nelas.

Após esta breve apresentação acerca do PNLD, seus Guias dos anos 2015 e 2018, além das duas coleções adotadas para a nossa análise, veremos na próxima subseção informações sobre o Enem. Como destacado ao longo do nosso texto, consideramos necessário conhecer essas instituições em que o nosso objeto matemático vive e investigar as mudanças ocorridas nelas. Deste modo, buscamos conhecer como isso pode ter afetado na sobrevivência ou não dos sólidos geométricos durante os três anos do ensino médio, culminando na sua avaliação durante a prova do Enem.

3.4 ENEM: O CONTEXTO INVESTIGATIVO

Antes de tratarmos sobre o Enem de fato, destacaremos o que é avaliação, em específico, avaliação de larga escala e alguns aspectos que a envolvem. O ato de avaliar é universal e próprio do ser humano, ao avaliarmos, buscamos conhecer a qualidade da realidade. Cabe ao avaliador fazer a investigação e a revelação dessa qualidade, enquanto ao gestor, diante das informações obtidas, tomar as decisões. Existem situações em que um mesmo profissional pode desempenhar os dois papéis, como é o caso do professor ao aplicar uma prova com seus alunos para conhecer a realidade da aprendizagem de sua turma e, a partir disso, traçar mudanças no seu planejamento (LUCKESI, 2018).

No contexto das avaliações educacionais, durante as décadas de 1980 a 1990, começou um movimento de discussões que passou a tratar o fracasso escolar, não como responsabilidade apenas do aluno. Nesse período, houve discussões sobre o papel do sistema de ensino como um desses responsáveis. Deste modo, passaram a ser instituídas, além da avaliação de aprendizagem – acompanhamento individual dos alunos – as avaliações institucionais e de larga escala. A primeira tem como objetivo avaliar a qualidade do desempenho da instituição. Enquanto na avaliação de larga escala é mais abrangente, a investigação é do ensino do país como um todo (LUCKESI, 2018).

Um exemplo de avaliação em larga escala é o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), criado em 1988, com o intuito de avaliar o Sistema Nacional de Ensino. Cerca de 10 anos depois, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado, sendo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), o órgão responsável pelo

planejamento e operacionalização da prova. De acordo com a Portaria N° 438, de 28 de maio de 1998.

Artigo 1º – Instituir o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, como procedimento de avaliação do desempenho do aluno, tendo por objetivos:
I – conferir ao cidadão parâmetro para autoavaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio (BRASIL, 1998, p.178).

Essa política pública de avaliação externa teve como um dos objetivos avaliar o ensino médio das escolas brasileiras, entre outras coisas, auxiliando os gestores para a criação de propostas voltadas para a melhoria da educação básica.

O Enem era composto por uma prova de múltipla escolha com 63 (sessenta e três) questões, a qual seriam avaliadas 7 (sete) competências e 21 (vinte e uma) habilidades, além de uma redação, com 5 (cinco) competências avaliadas. Inicialmente, a prova seria aplicada apenas nas capitais, no Distrito Federal e em cidades que tivessem uma quantidade significativa de alunos matriculados no ensino médio, para gradativamente ir expandindo as outras localidades. Além disso, a participação dos estudantes era voluntária, contudo, mais recentemente a nota obtida no exame e inscrita em programas como o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) ou Programa Universidade para Todos (ProUni), podem ser usadas pelo estudante para tentar uma vaga no curso superior, visto que diversas instituições de ensino superior estão adotando essa nota como forma de entrada aos seus cursos.

Em 2001, a adesão à prova foi maior após permitirem aos estudantes de escolas públicas serem isentos do pagamento da inscrição. Outro aumento no número de inscritos ocorreu depois da criação do ProUni, em 2004. O que permitiu aos participantes usarem a nota para concorrer a bolsas de estudos parciais de 50% ou totais, em instituições privadas do ensino superior. No ano de 2006, o Enem começou a divulgar uma média do desempenho por escola para que as instituições avaliassem o rendimento de seus alunos. Apesar disso, o resultado não teve o impacto esperado (E. FERREIRA, 2014; NADALON, 2018).

Nesse período, as Instituições de Ensino Superior (IES), ainda utilizavam a nota do Enem como complemento às notas obtidas em seus vestibulares. Em 2009, houve uma reformulação da proposta do Enem, as notas passaram a ser usadas integralmente pelas IES e os participantes maiores de 18 anos poderiam obter a certificação de conclusão do ensino médio. Desde 2017, o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e

Adultos (ENCCEJA) voltou a ser responsável por essa certificação. As mudanças do ano de 2009 marcaram as propostas para o Novo Enem. Um dos motivos foi a criação do SISU, permitindo ao estudante usar a sua nota no Enem para ingressar em algumas das IES públicas (MOTA, 2015; NADOLON, 2018).

Além disso, a prova foi dividida de acordo com as áreas de conhecimento, sendo a Matemática separada da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Foram destinadas 45 (quarenta e cinco) questões para cada uma. A redação foi mantida e a execução da prova passou a ocorrer em dois dias. Inicialmente, ocorrendo em dias seguidos sábado e domingo, contudo em 2017, passou a ocorrer somente a dois domingos, consecutivamente.

Ainda durante o ano de 2009, foi publicada a Portaria Nº 109, de 27 de maio de 2009 e entre as suas regulamentações, estava a Matriz de Referência para o Enem. Nela, constam 5 (cinco) eixos cognitivos, comuns às áreas de conhecimento. Além de habilidades, competências e conhecimentos²³ a serem avaliados nas provas. A Matriz de referência de Matemática e suas tecnologias possui 7 (sete) competências de áreas e um total de 30 (trinta) habilidades. Entre essas competências, duas delas apresentam as suas indicações relacionadas aos conhecimentos geométricos e algébricos/geométricos, que são:

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

Também houve mudanças na teoria usada para a análise do desempenho dos participantes e geração dos resultados obtidos, de acordo com Rabelo (2013a, p.50 *apud* E. FERREIRA, 2014, p.24).

Para implantar essas mudanças, foi necessário recorrer às técnicas oriundas da TRI (Teoria de Resposta ao Item). A utilização dessa teoria no ENEM abriu a possibilidade de se construir uma série histórica do desempenho dos estudantes e dos egressos dos Exames Nacionais de Avaliação Educacional ensino médio brasileiro, como é feito com os resultados do SAEB e da Prova Brasil.

²³ São eles, os conhecimentos: numéricos, geométricos, estatística e probabilidade, algébricos e algébricos/geométricos.

Ao longo das edições, outras mudanças ocorreram; como a regulamentação das DCNEM/2012, o Enem passou a fazer parte do SAEB. O documento explicita quais funções deveriam ser assumidas

Art. 21. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) deve, progressivamente, compor o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), assumindo as funções de:

I - avaliação sistêmica, que tem como objetivo subsidiar as políticas públicas para a Educação Básica;

II - avaliação certificadora, que proporciona àqueles que estão fora da escola aferir seus conhecimentos construídos em processo de escolarização, assim como os conhecimentos tácitos adquiridos ao longo da vida;

III - avaliação classificatória, que contribui para o acesso democrático à Educação Superior (BRASIL, 2012, p.9).

Nas DCNEM mais recentes (ano 2018), o Artigo 32 determina que as matrizes do Enem e de outros processos seletivos usados para ingressar na educação superior, devem estar de acordo com a BNCC e o que está posto nos Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos. As provas terão duas etapas, a primeira baseada na BNCC e a segunda nos referenciais, se for o caso, as duas serão consideradas para o ingresso nas IES. Assim, na segunda etapa, caberá ao estudante escolher a sua área que deverá estar vinculada ao curso superior pretendido. Os sistemas de ensino deveriam criar o cronograma dessas mudanças para o primeiro ano letivo após a data de publicação da BNCC, em 2019, e a partir do segundo ano letivo, a sua implementação (BRASIL, 2018).

A partir da Portaria Nº 521, de 13 de julho de 2021, foi estabelecido um cronograma para ocorrerem mudanças nas matrizes de avaliação do Novo Enem, em conformidade com as propostas para o Novo ensino médio, referenciado pela BNCC. De acordo com o cronograma,

Art. 7º A atualização da matriz de avaliação do Novo Enem obedecerá ao seguinte cronograma:

I - No ano de 2021: elaboração e consolidação da versão preliminar das matrizes de avaliação das quatro áreas de conhecimento para a formação geral básica e os itinerários formativos;

II - No ano de 2022: validação pedagógica das matrizes das quatro áreas de conhecimento, para a formação geral básica e os itinerários formativos, e elaboração da versão final;

III - No ano de 2022: elaboração do documento básico do exame;

IV - No ano de 2022: publicação da portaria do Enem, conforme as diretrizes do Novo Ensino Médio; e

V - No ano de 2024: aplicação do Enem, conforme as diretrizes do Novo Ensino Médio (BRASIL, 2021, p.46-47).

Deste modo, como as alterações ainda não ocorreram, as provas que serão analisadas nesta pesquisa seguiram a Matriz de Referência de 2009. Outro fato a ser destacado é a implantação do Enem digital, na edição de 2020, ocorrendo como modelo piloto. Inicialmente, a participação nesse tipo de prova digital será opcional. Contudo, a ideia é que haja implantação e implementação de modo gradual para que, em 2026, a prova digital substitua a prova impressa, também ocorrendo diversas aplicações ao longo do ano. Desse modo, ressaltamos que analisaremos as provas das edições de 2017 a 2020, nessa última edição contemplando a prova digital.

Destacamos novamente a importância em compreender essas instituições que fazem parte da noosfera. Apesar de algumas informações não tratarem especificamente sobre os sólidos, até mesmo sobre a Geometria e a matemática, elas nos permitem compreender algumas mudanças que afetaram/afetam a forma como esses objetos estão presentes no ensino médio e como são avaliados na prova do Enem.

4. OBJETO DE ESTUDO: SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E O ENEM

Nesta Seção, apresentaremos uma breve revisão de literatura realizada após levantamento de teses e dissertações sobre a presença da Geometria em provas do Enem. Após isso, identificaremos como os sólidos geométricos estão representados nas dimensões econômicas e ecológicas do currículo do ensino médio brasileiro, por meio dos PCNEM (PCN+) e livros didáticos de matemática do ensino médio dos PNLD 2015 e 2018. Por meio dessa análise, buscamos atingir um dos nossos objetivos específicos: Construir um Modelo Epistemológico Dominante (MED) e um Modelo Praxeológico de Referência (MPR), a partir dos documentos curriculares e livros didáticos de Matemática do ensino médio para o estudo dos sólidos geométricos voltados às questões das provas do Enem.

Assim, apresentaremos na subseção uma breve revisão de literatura sobre a Geometria presente em provas do Enem, a partir do que dissertações e teses indicam em suas pesquisas, como forma de compreender o que essas pesquisas afirmam acerca do tema. Parte dessa subseção foi apresentada e publicada em 2021, no 12º Encontro Internacional de Formação de Professores e 14º Fórum Permanente Internacional de Inovação Educacional –12º ENFOPE/14º FOPIE – cujo tema era “educação ressignificada: formação docente e práticas disruptivas”.

4.1 O QUE AS PESQUISAS REVELAM SOBRE O ENEM

Como destacamos anteriormente, em nosso texto, o ensino de Geometria sofreu, principalmente durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), um processo de algebrização e um (quase) abandono por parte de alguns professores, como é apontado por Pavanello (1989; 1993) e Lorenzato (1995). Por diversos fatores, como um despreparo por parte dos professores para ministrar aulas que abordassem a Geometria, essa área da Geometria passou a ser omitida, ou deixada para o final do ano letivo. Apesar de serem fatos pesquisados desde a década de 1990, a problemática acerca do ensino de Geometria ainda é apresentada por autores como Almouloud et. al. (2004), que apontam para essa formação deficitária dos docentes que refletem no processo de ensino aprendizagem. Afinal, como esses profissionais ensinarão algo que não são bem capacitados?

Além dessas dificuldades apresentadas ao longo dos anos, destacamos a importância que a Geometria tem, não apenas como um conteúdo a ser ensinado em sala de aula. A sua relevância está presente até em coisas simples do cotidiano, como arrumar os móveis da sala

da melhor forma para aproveitar o espaço. Autores, como Walle (2009), defendem que o seu ensino é importante para desenvolver desde cedo o raciocínio espacial. Ainda segundo o referido autor, o desenvolvimento ocorre a partir de experiências ricas e constantes ao longo do tempo, ou seja, o contato com a Geometria não deve ocorrer apenas no fim do período letivo, como apontado anteriormente. O professor pode, sempre que possível, relacioná-la com outros conceitos e de forma que seja significativa para seus alunos.

A indicação para o ensino de Geometria está presente em diversos documentos curriculares de toda a educação básica. Deste modo, resolvemos investigar como ela aparece no Enem, em razão dessa avaliação ser tão importante para alunos que desejam ingressar no ensino superior. O Enem passou por alterações ao longo do ensino médio brasileiro para análise/criação de políticas públicas. Como também para o ingresso de estudantes de todo o país em universidades públicas e privadas, em alguns casos, até em instituições de outros países (BRASL, 2020).

Com o intuito de conhecer o que as pesquisas apontam sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e sólidos geométricos, fizemos uma revisão de literatura no banco de dados da BDTD e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, com as seguintes palavras-chave: “exame nacional do ensino médio” AND “sólidos geométricos”. Encontramos apenas uma dissertação no banco de dados da BDTD. Na tentativa de encontrar mais textos, substituímos “sólidos geométricos” por “figuras geométricas espaciais” e depois por “figuras espaciais”.

Dessa maneira, conseguimos encontrar outras duas dissertações no catálogo da CAPES, que apareceram nas duas substituições, totalizando apenas três dissertações sobre o objeto matemático. Por causa desse baixo quantitativo de pesquisas encontradas sobre sólidos geométricos, decidimos ampliar nossa busca substituindo por Geometria. É válido destacar que os textos citados também apareceram nessa busca. Assim, pesquisamos as seguintes palavras-chave: “exame nacional do ensino médio” AND “Geometria”.

No que se refere ao quantitativo da nossa busca, encontramos no banco de dados da BDTD, 12 (doze) dissertações, divididas entre dissertações de cursos profissionais e acadêmicos, 8 (oito) e 4 (quatro), respectivamente. Enquanto no Catálogo da CAPES, encontramos 11 (onze) publicações, totalizando em 8 (oito) dissertações de mestrado profissional e, nos cursos acadêmicos, 2 (duas) dissertações e 1 (uma) tese. Entre esses trabalhos, 3 (três) dissertações eram comuns aos dois bancos de dados.

Deste modo, consideramos para a construção do Quadro 5 apenas 20 (vinte) trabalhos, sendo 14 (catorze) dissertações do mestrado profissional, 5 (cinco) dissertações acadêmicas e

1 (uma) tese. Após a leitura inicial dos títulos e informações sobre as instituições de ensino superior (IES), nos surpreendemos com o baixo quantitativo de trabalhos encontrados nos cursos de pós-graduação acadêmica, uma vez que a maioria dos trabalhos envolvendo o Enem foi de cursos de pós-graduação profissional, como pode ser observado no referido quadro.

Quadro 5. Levantamento dos trabalhos acerca da Geometria e do Enem

PESQUISAS	AUTOR/ANO	TÍTULO	IES/UF
TESE	Joseide Justin Dallemole (DALLEMOLE, 2015)	A Teoria dos Registros de Representação Semiótica em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: uma proposta metodológica explorando os conceitos de ponto, reta e circunferência no ensino médio.	Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana Do Brasil, Rio Grande do Sul
DISSERTAÇÕES – MESTRADOS ACADÊMICOS	Benedito Cardoso da Silva (B. SILVA, 2004)	Identificando sinalizações referentes às expectativas de aprendizagem sobre Geometria, ao término da educação básica	Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo
	Jaclason Machado Veras (VERAS, 2010)	Modelagem para o <i>Software Virtual-TANEB</i> baseado na Teoria da Resposta ao Item para avaliar o rendimento dos alunos	Mestrado no Programa de Pós-graduação em Engenharia de Eletricidade/CCET, Universidade Federal do Maranhão, Maranhão
	Suelen Maggi Scheffer Vieira (VIEIRA, 2013)	Registros semióticos em porcentagem: análise da produção de alunos na resolução de problemas triparticionados	Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina
	Silvio Henrique Araújo Mota (MOTA, 2015)	Currículo de Geometria espacial do Colégio 7 de Setembro: influências do vestibular da Universidade Federal do Ceará e do Enem	Mestrado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo
	Dionatan de Oliveira Nadalon (NADALON, 2018)	Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do <i>Software</i> Geogebra	Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul
DISSERTAÇÕES – MESTRADOS PROFISSIONAIS	Alexandre Goulart Arruda (ARRUDA, 2013)	Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial	Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais
	Edson Martins Ferreira (E. FERREIRA, 2014)	Análise da abrangência da matriz de referência do Enem com relação às habilidades nos itens de matemática aplicados de 2009 a 2013	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade de Brasília, Distrito Federal
	Renato Rodrigues dos Santos (R. SANTOS, 2014)	Análise de erros em questões de geometria do Enem: um estudo com alunos do ensino médio	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Maringá, Paraná
	Rodrigo Duda (DUDA, 2014)	Matemática financeira e planilhas eletrônicas: uma abordagem com a incorporação de recursos computacionais	Mestrado em Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná

DISSERTAÇÕES – MESTRADOS PROFISSIONAIS	Joao Batista Coelho (COELHO, 2015)	Geometria fractal: um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do ensino médio	Mestrado Profissional e Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Tocantins, Tocantins
	Erica Vicente Barbosa (BARBOZA, 2015)	Geometria, artes e tecnologia na escola em favor do processo de ensino-aprendizagem	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro
	Antonio Junior Evangelista (EVANGELISTA, 2015)	A situação do ensino da matemática no ensino médio do município de Lábrea – Am	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Rondônia, Rondônia
	José Gutemberg Lima Rodrigues (RODRIGUES, 2016)	Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em geometria plana?	Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de Brasília, Distrito Federal
	Karlo Sérgio Medeiros Leopoldino (LEOPOLDINO, 2016)	Sequências de Fibonacci e a razão áurea - aplicações no ensino básico	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte
	Diogo Oliveira Soares (SOARES, 2017)	Logaritmos e função logarítmica na matemática escolar brasileira	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo
	Sergio Rodrigo Lira da Silva (S. SILVA, 2017)	Proposta para a abordagem de geometria analítica via ensino híbrido	Mestrado Profissional Em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro
	Mario Guimaraes Gomes (GOMES, 2017)	Geometria nas questões do Enem sob a ótica da resolução de problemas: um auxílio ao trabalho docente	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Minas Gerais
	Nayra Milla da Silva Santos (N. SANTOS, 2017)	Mosaicos: construção através do Geogebra e aplicações para o ensino básico	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia
	June Cristien Braz (BRAZ, 2019)	Funções estudadas no primeiro ano do ensino médio e suas aplicações	Mestrado no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais

Fonte: Catálogo de teses e dissertações da CAPES e banco de dados da BDTD.

Frente ao exposto no Quadro 5, destacamos que um dos trabalhos faz parte de um mestrado em Engenharia de Eletricidade. A decisão por mantê-lo nesta revisão reside por considerarmos as informações apresentadas sobre o Enem pertinentes ao nosso estudo. Em contrapartida, os trabalhos de Vieira (2013) e Duda (2014) foram retirados, pelo fato de os autores não tratarem da Geometria e apenas citam o Enem sem apresentar nenhuma (ou pouca) discussão acerca desse exame. Soares (2017) também foi excluído porque, apesar de fazer uma análise de questões do Enem, não apresenta outras informações sobre essa prova e quase não fala sobre Geometria. Assim, a partir desse ponto, consideraremos nesta revisão de literatura apenas os 17 (dezessete) trabalhos levantados.

Chamamos atenção ao ano de publicação desses trabalhos, o primeiro publicado em 2004 e com uma diferença de 6 (seis) anos, o segundo foi produzido em 2010. Quando o primeiro trabalho foi publicado, o Enem já estava em vigor há quase 6 (seis) edições, surgindo então, algumas mudanças relacionadas a essa avaliação.

Em 2009, durante o governo do então Presidente Lula, essa avaliação passou a ser usada também para o ingresso dos estudantes em instituições públicas de ensino superior, seja a nota usada como complemento da pontuação obtida pelo vestibular, seja como pontuação total para o ingresso. Outro fator, relacionado à nota do ENEM, refere-se à criação do ProUni, com ele, esses estudantes também receberam incentivos para ingressar em instituições privadas.

Também destacamos que cerca de 9 (nove) dissertações pertencem ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT). De acordo com o site desse programa²⁴, o PROFMAT tem como público-alvo professores de matemática que ensinam na educação básica, principalmente quem trabalha nas escolas da rede pública, e buscam uma formação continuada dedicada ao conteúdo matemático. O programa é de caráter semipresencial, está sob a coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e tem o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O PROFMAT conta com a participação de uma rede de Instituições de Ensino Superior (IES) pelo país e algumas das suas publicações apareceram em nossa revisão, como é o caso do texto de Braz (2019). Seu texto faz parte das publicações da Universidade Federal do Triângulo Mineiro pelo estado de Minas Gerais.

²⁴ <https://www.profmato-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>

Para além dessas questões apontadas até aqui, na leitura dos títulos, resumos e outras seções, como introdução, metodologia e considerações finais, fomos observando variedade e aproximação de temas abordados. Assim, criamos três categorias sobre focos temáticos a partir desses estudos: Ensino-Aprendizagem; Provas e Currículo; Outros.

Focos temáticos

As pesquisas no foco Ensino-Aprendizagem apresentam propostas ou investigações relacionadas tanto aos docentes, como relacionadas mais diretamente à aprendizagem dos alunos, da educação básica ou ensino superior. Diferente do foco anterior, no foco Provas e Currículo não há participantes, as pesquisas têm como alvo apenas os documentos, nelas são analisados os exames de vestibular, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e/ou propostas mudanças no currículo. O foco Outros contempla diferentes temas que não se enquadram nos focos mencionados anteriormente (diferentes objetos matemáticos, que não envolvem a Geometria e focos como a TRI).

Quadro 6. Focos temáticos

Foco temático	Pesquisas
<u>Ensino-Aprendizagem</u>	R. Santos (2014) , Barboza (2015), Evangelista (2015), Dallemole (2015), Rodrigues (2016) , S. Silva (2017), Gomes (2017) , Nadalon (2018)
<u>Provas e currículo</u>	B. Silva (2004) , E. Ferreira (2014) , Coelho (2015), Mota (2015)
<u>Outros</u>	Veras (2010) , Arruda (2013), Leopoldino (2016), N. S. Santos (2017), Braz (2019)

Fonte: Levantamento das pesquisas (julho.2021)

O destaque a ser apontado, a partir do Quadro 6, considerou-se de cada pesquisa, os objetivos, resultados e considerações dos autores. Apresentaremos apenas algumas das pesquisas levantadas, por considerarmos suas informações mais pertinentes e contributivas a esta dissertação.

Ensino-Aprendizagem

O foco Ensino-Aprendizagem, conta com 8 (oito) pesquisas, são elas R. Santos (2014), Barboza (2015), Evangelista (2015), Dallemole (2015), Rodrigues (2016), S. Silva (2017), Gomes (2017), Nadalon (2018). Daremos destaque, apenas a 4 (quatro)

dessas pesquisas, como é o caso da pesquisa de R. Santos (2014). Nela, buscou-se realizar uma análise e classificação dos erros cometidos em questões de Geometria no Enem, por parte de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Para isso, ele investigou alunos de cinco escolas estaduais do município de Maringá-PR, aplicando um teste com quatro questões do Enem. A partir da análise dos erros, os resultados apontam que entre as dificuldades apresentadas pelos estudantes, estavam: aplicação de fórmulas, interpretação das tarefas e a transposição para a linguagem matemática.

A outra pesquisa é a de Rodrigues (2016), nela é levantado o seguinte questionamento – Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em Geometria plana? – Dessa questão, o autor fez uma análise documental de legislações e diversas publicações. Também aplicou questionários com alunos do ensino médio e professores de algumas escolas públicas do Distrito Federal. Concluiu informando que as causas, para esse baixo desempenho, estão relacionadas à falta de motivação tanto de alunos, como de professores. Também destacou a ausência de aulas voltadas ao ensino da Geometria plana e a exclusão dela nos currículos escolares ao longo dos anos. Como possíveis soluções a esses problemas, o autor destaca a formação continuada dos docentes, bem como, incentivos por parte do governo e das escolas para os professores e alunos, sejam por meio de políticas públicas, projetos, palestras e outros.

A pesquisa de Gomes (2017) teve foco nos professores de matemática, em ajudá-los nas atividades relacionadas à Geometria. Ao considerar que os documentos curriculares – como Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) – propõem um ensino baseado nas competências e habilidades, esse autor fez um levantamento bibliográfico e uma análise documental desses documentos e da Matriz de Referência do Enem, investigando suas propostas para o ensino de Geometria. Ao usar a resolução de problemas, ele selecionou e resolveu questões das provas do ENEM, dos anos de 2009 a 2016, envolvendo Geometria plana, espacial e métrica indicando as competências e habilidades que foram contempladas, com o intuito de auxiliar o trabalho docente.

Ainda para o foco do *Ensino-Aprendizagem*, temos o texto de Nadalon (2018), que foi o único texto a aparecer no banco de dados da BDTD, em nossa primeira busca. De modo diferente dos textos anteriores, o autor escolheu como participantes, um grupo do PIBID composto por discentes do curso de licenciatura em matemática e professores da rede estadual do Rio Grande do Sul e do município de Santa Maria. Nadalon (2018)

resolveu aplicar e analisar uma oficina, chamada Superfícies e Sólidos de Revolução no Geogebra 3D discutindo questões do Enem. Por fim, o autor constatou a importância do Geogebra para a visualização do objeto geométrico, principalmente, porque usualmente, são ensinados no curso com ênfase na Álgebra e não na Geometria.

Pelo fato de as pesquisas terem sido realizadas com professores e alunos, pudemos ver a aplicação com esses participantes. Apesar de serem resultados mais locais, representou parte das dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria, o que nos permitiu compreender alguns aspectos da sua problemática. Como é o caso da dissertação de R. Santos (2014) que, a partir dos dados coletados, concluiu que os estudantes apresentavam dificuldades em interpretar a linguagem matemática e em usar as fórmulas para responder as tarefas. A seguir, veremos textos com um enfoque mais documental, cujo foco está nas provas e currículo.

Provas e Currículo

Nas pesquisas que apresentam ênfase em investigar as *Provas*, como o Enem, ou *Currículos*, estão as 4 (quatro) pesquisas, B. Silva (2004), E. Ferreira (2014), Coelho (2015), Mota (2015). As pesquisas deste foco contribuíram para compreender o histórico do Enem, em como a Geometria estava presente nessa avaliação e, de certa forma, a influência que essa área da matemática pode ter na construção do currículo. Decidimos por não tratar da pesquisa de Coelho (2015), que investiga sobre a Geometria fractal.

A pesquisa de B. Silva (2004), definida como bibliográfica e documental, investigou expectativas de aprendizagem da Geometria para o ensino médio. O autor retrata qual conhecimento sobre Geometria é exigido nos vestibulares, como o da FUVEST²⁵ e da UNICAMP²⁶, e no Enem. Destacamos o Enem por fazer parte do foco de nossa pesquisa, que na época do texto de B. Silva (2004), era usado por algumas instituições para complementar a avaliação dos vestibulares. B. Silva (2004, p. 132) destaca após a sua análise das provas, que “embora apresente questões bem elaboradas [...] também acabam por valorizar muito mais os aspectos métricos do que propriamente geométricos”. De forma geral, os documentos curriculares e as avaliações analisadas sugerem diversos temas e abordagens diferentes do período do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e retomam a importância ao ensino de Geometria.

²⁵ Fundação Universitária para o Vestibular – FUVEST

²⁶ Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Cerca de dez anos depois, apoiando-se em autores como Rabelo (2013) e Dias Sobrinho (2003) para falar sobre as avaliações de larga escala – como o Enem – E. Ferreira (2014) se propôs a analisar as provas desta avaliação entre os anos de 2009 e 2013. É válido ressaltar que desde as alterações no Enem em 2009, houve grande participação de estudantes de todo o país, uma vez que essa se tornou uma das formas de ingressar no ensino superior. E. Ferreira (2014) analisou a abrangência da Matriz de Referência do Enem com relação às habilidades avaliadas nos itens de matemática aplicados nessas provas. Constatou-se que elas estão em consonância com o que é proposto na Matriz e, além disso, de acordo com a análise documental nos livros didáticos recomendados pelo PNLD, eles valorizam a álgebra enquanto as provas do Enem, os conteúdos geométricos.

Com ênfase maior no currículo do que as pesquisas anteriores, o texto de Mota (2015) analisa o currículo de Geometria espacial de uma escola particular de Fortaleza, Colégio 7 de Setembro, e se ele é influenciado pelos vestibulares da Universidade Federal do Ceará (UFC) e o Enem. Visto que uma das metas para o ensino médio dessa escola é preparar seus alunos para serem aprovados em universidades públicas. Ao completar a sua análise, Mota (2015) concluiu que o currículo praticado na escola se fundamentava no livro didático de Matemática e em indicações do vestibular, se adequando ao que era alterado nas avaliações. Apesar disso, eles também valorizavam conteúdos da Geometria que não eram exigidos no Enem.

Por causa das pesquisas nesse foco serem voltadas às provas e ao currículo, as suas contribuições também foram nestas questões. Destacamos o texto de E. Ferreira (2014) por causa da discussão apresentada sobre o histórico do Enem e o texto de Mota (2015) principalmente pela sua análise das provas de 2009 a 2013, com ênfase na presença da Geometria espacial nas questões. Esses textos auxiliaram no desenvolvimento da discussão na Seção anterior, que tratou sobre esses aspectos sobre o Enem. No último foco, temos Outros,

Outros

Como pode ser observado no Quadro 6, 5 (cinco) pesquisas estão no foco *Outros* porque os respectivos objetos de estudos não se encaixaram nos focos anteriores, são elas: Veras (2010), Arruda (2013), Leopoldino (2016), N. S. Santos (2017) e Braz (2019). Diante das informações obtidas, destacamos as contribuições principalmente do

texto de Veras (2010) que nos auxiliaram a compreender um pouco da proposta da Teoria de Resposta ao Item (TRI). Uma vez que essa teoria serve para a metodologia de análise do desempenho dos estudantes da prova do Enem.

A proposta de Veras (2010) é uma modelagem geral para um *software* denominado Virtual-TANEB²⁷ que foi usado para a averiguação do conhecimento sobre Geometria de alunos da quarta série²⁸ do ensino fundamental. Apesar do *software* ser baseado no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o autor afirma que pode ser usado em outros sistemas de avaliação, como o Enem. Essa pesquisa permaneceu em nossa revisão por apresentar um breve histórico do Enem e por tratar da Teoria de Resposta ao Item (TRI).

Ao realizar a leitura das pesquisas, constatamos que algumas delas tinham os objetivos voltados a investigar situações relacionadas diretamente aos discentes e docentes. Os pesquisadores selecionados optaram por aplicar questionários ou não, mas sempre buscando contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, para que esse momento seja mais significativo para os alunos e que o professor seja capacitado para tal. Outras pesquisas tinham foco nas avaliações ou currículos, investigando o que eles propõem no ensino da Geometria e como se influenciam. Também destacamos que mais de uma pesquisa utilizou o Geogebra em suas propostas de atividades. S. Silva (2017), Nadalon (2018) e outros autores, consideraram esse *software* como um recurso facilitador para a visualização e construção de conceitos e objetos da Geometria.

De modo geral, esta revisão contribuiu para uma melhor compreensão acerca do histórico do Enem e em como a Geometria era apresentada nessa avaliação. O corpus das pesquisas do Mestrado Profissional se difere das dissertações acadêmicas, mas em contrapartida, esses trabalhos apresentam um predomínio de discussão mais matemática acerca dos objetos geométricos.

4.2 DIMENSÃO ECONÔMICA

Nesta subseção, trataremos da Dimensão econômica, considerando o que discutimos na Seção sobre os aspectos teóricos da TAD. Nessa dimensão, investigamos o modo em que o saber existe, de acordo com as regras impostas por determinada

²⁷ Um *software* que permite a avaliação do rendimento do aluno, baseando-se na Teoria da Resposta ao Item.

²⁸ O autor coloca dessa forma, lembramos que a quarta série equivale atualmente ao quinto ano do ensino fundamental.

instituição. Dito isso, levantamos o seguinte questionamento para basear a nossa investigação: Como os sólidos geométricos existem no ensino médio brasileiro? Essa pergunta é ampla, decidimos restringi-la tomando como instituições a serem observadas, os PCNEM, os PCN+, as Matrizes de Referência do Enem e duas coleções de livros didáticos de matemática do ensino médio (PNLD 2015 e 2018). Ao nos basearmos nesses documentos e no Modelo Epistemológico de Referência, criado por N. Santos (2021), elaboramos o nosso Modelo Epistemológico Dominante. Neste primeiro momento, veremos como os sólidos geométricos estão representados nos documentos curriculares nacionais.

4.2.1 Documentos Curriculares Nacionais e Matriz do Enem

Como mencionamos anteriormente, os PCN+ foram publicados como um complemento às propostas dos PCNEM, por este motivo, não apresentaremos um comparativo entre os dois documentos. Apenas destacamos que nos PCN+, há uma discussão e orientações de maneira mais pedagógica e direta, quanto ao que deveria ser desenvolvido no ensino médio brasileiro. Assim, para a construção do nosso modelo, percebemos que nos PCN+ contém uma quantidade mais rica de informações a serem usadas. Contudo, decidimos apresentar algumas das informações obtidas no primeiro documento, ao considerarmos a sua importância para delimitar as nuances do ensino médio brasileiro e, conseqüentemente, das dimensões econômica e ecológica desta pesquisa.

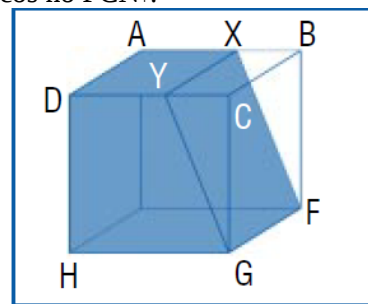
Na proposta apresentada nos PCNEM, são definidas competências e habilidades a serem desenvolvidas por meio de situações que envolvam a contextualização e a interdisciplinaridade. Para tanto, isso requer um ensino voltado à resolução de problemas, como por exemplo, no ensino de figuras espaciais, fazer relações com o cotidiano do aluno. Neste exemplo, podemos destacar possibilidades em desenvolver nos alunos, “[...] habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas” (BRASIL, 2000, p.44). Em nosso entendimento, o desenvolvimento de competências atreladas a essas habilidades possibilitam aos alunos uma melhor compreensão do espaço que os cercam e para poder interpretar enunciados de questões matemáticas e de outras áreas do conhecimento. Autores, como Walle (2019), apontam a importância de desenvolver o pensamento geométrico, não apenas no sentido educacional, mas, para atividades do dia a dia.

No que concerne às propostas dos PCN+, nas áreas do conhecimento como um todo, a contextualização aparece como uma das principais formas para a busca de relacionar os conhecimentos escolares à vida cotidiana dos alunos. Também é reconhecida a importância de saber ler e interpretar, como parte importante para entender problemas matemáticos. Quanto aos sólidos geométricos destacamos, na Figura 6, o exemplo dado pelo referido documento.

Figura 6. Exemplo sobre sólidos geométricos no PCN+.

Exemplo 2

A figura ao lado destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a , após retirar-se dele o prisma BCYXFG, sendo XY paralelo a AD. Se o volume do sólido restante é $4/7$ do volume do cubo, ache a fração de a que expressa a medida de AX.



Fonte: Brasil (2002, p. 112)

Neste exemplo, podemos observar a presença dos objetos ostensivos, no discurso, bem como, na imagem representando um sólido geométrico. Consideraremos o exemplo apresentado como tarefa T₁₀, nele, antes de descobrir a fração que expressa a medida de AX é necessário responder outras tarefas que permitem chegar ao resultado desejado.

T_{10.1}: Calcular o volume do prisma apresentado na Figura 6.

t_{10.1}: De acordo com as informações dadas no enunciado e considerando o volume total do cubo como a^3 , visto que a é a medida da aresta e o volume de um cubo é dado pela multiplicação das medidas de suas dimensões, que são iguais. Assim, temos que, se o volume do sólido restante é representado por $4/7$ do volume do cubo, ou seja, $4/7$ de a^3 , então, o volume do prisma que foi retirado é

$$a^3 - 4a^3/7 = 3a^3/7.$$

T_{10.2}: Calcular a área da base do prisma BCYXFG.

t_{10.2}: Primeiro, deve-se reconhecer a figura BCYXFG como um prisma triangular. A base do prisma triangular é representada pelo triângulo YCG ou XBF, como representado. Pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume de um prisma qualquer é dado pela multiplicação entre a área da base e a sua altura. Nesse caso, substituindo as informações dadas,

$$V_{prisma} = A_{Base} \cdot h \rightarrow \frac{3}{7}a^3 = A_{Base} \cdot a.$$

Ao dividir os dois lados da equação por a , temos que $A_{Base} = \frac{3}{7} \frac{a^3}{a}$. Ao simplificar a fração $\frac{3}{7} \frac{a^3}{a}$ temos que a área da base triangular é $A_{Base} = \frac{3}{7}a^2$.

T_{10.3}: Calcular as medidas dos lados dos triângulos YCG e XBF.

t_{10.3}: Como pode ser observado, os lados GC e BF medem a e $\widehat{YCG}$ e $\widehat{XBF}$ são ângulos retos, visto que $\widehat{BCG}$ e $\widehat{ABF}$ também são, por se tratar dos ângulos internos de um quadrado. Classificando YCG e XBF de acordo com seus ângulos, podemos dizer são triângulos retângulos. Também podemos dizer que eles são semelhantes. Escolhemos definir GC como a base e YC como a altura do triângulo retângulo YCG. Sabemos que a área de um triângulo é dada pela multiplicação entre a medida da sua base e altura, divididas por dois, $A_{triângulo} = (b \cdot h)/2$. Substituindo a área encontrada na técnica anterior e a base por a , temos

$$A_{Base} = A_{triângulo} \rightarrow \frac{3a^2}{7} = \frac{(YC \cdot a)}{2}.$$

Pela regra de três,

$$\frac{3a^2}{7} = \frac{(YC \cdot a)}{2} \rightarrow 2 \cdot 3a^2 = 7 \cdot YC \cdot a \rightarrow 6a^2 = 7 \cdot YC \cdot a.$$

Simplificando ao dividindo os dois lados da equação por $7a$, temos

$$YC = 6a^2/7a \rightarrow YC = 6a/7.$$

Como YCG e XBF são triângulos semelhantes, a medida de XB também é $6a/7$.

T_{10.4}: Achar a fração de a que expressa a medida de AX.

t_{10.4}: Como visto anteriormente, AB mede a e XB mede $6a/7$ logo, a medida de AX é a subtração de XB em AB,

$$AX = a - (6a/7) \rightarrow AX = (7a/7) - (6a/7) \rightarrow AX = a/7.$$

Apesar de inicialmente parecer simples, a tarefa T₁₀ é justificada por diversas tecnologias, como área, volume, semelhança de triângulos, classificação de triângulos quanto aos ângulos, frações, figuras planas e espaciais, entre outros. Classificamos essa praxeologia matemática como global, levando em consideração que, além das diversas técnicas e tecnologias, é mobilizada mais de uma teoria, Geometria e Aritmética. Ao analisar as técnicas necessárias para resolver essa tarefa, podemos entender melhor a proposta do PCN+ sobre saber ler e interpretar, visto que mesmo tendo domínio dos

conceitos abordados, apenas interpretando as informações dadas é possível chegar à resposta final.

Podemos considerar que, além da falta de conhecimento matemático, dificuldades na leitura e na interpretação podem ser obstáculos para o processo de ensino aprendizagem. Essa problemática é abordada pelo documento como forma de orientar os professores a propor não apenas situações do tipo “calcule”, “resolva”, visto que não são suficientes, mas que tenham sentido e significado aos alunos, o que gera em um problema da didática, segundo Chevallard (1999).

Ou seja, enquanto nos documentos curriculares nacionais sugere-se aplicar atividades contextualizadas para melhor o aluno saber relacionar o objeto matemático a situações que possa ter vivenciado em seu cotidiano, Chevallard (1999) nos remete a refletir sobre gêneros de tarefa. Para esse autor, é importante o professor, ao propor tarefas para o aluno, apresentar enunciados que deem significado e melhor compreensão para o aluno. Por exemplo, muitas tarefas são propostas apenas com o verbo – calcule, determine, resolva – o que reflete em gêneros de tarefas, artefatos, segundo Chevallard (1999). É preciso que o trabalho em sala de aula seja mais claro e potencialize habilidades de percepção visual ao tratar de objetos geométricos, principalmente.

Outro aspecto a considerar sobre o modo como os sólidos geométricos existem na instituição PCN+, refere-se a fazerem parte do eixo ou tema estruturadores²⁹ – Geometria e medidas. Esse eixo é composto por quatro unidades temáticas: Geometria plana, espacial, métrica e analítica. De acordo com o referido documento, na Geometria, as propriedades tratadas são de dois tipos, quanto à posição relativa das formas ou às medidas (BRASIL, 2002, p. 123).

Essa afirmação nos permite entender as propostas do documento sobre os conceitos mobilizados no ensino médio que se relacionam aos sólidos geométricos e, de certo modo, refletem na abordagem em sala de aula. Nos PCN+, a tecnologia envolvendo composição e decomposição de figuras é proposta na tarefa de calcular medidas de comprimento, perímetro, área e volume de figuras planas e espaciais, para justificá-la. Para Chevallard (1999), trata-se de um estilo de racionalidade atribuído por uma dada instituição. Essa racionalidade justificará quais técnicas deverão ser empregadas para resolução dos tipos de tarefas propostos pela dada instituição.

²⁹ Os PCN+ definem três eixos ou temas estruturadores – Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; Análise de dados – que devem ser desenvolvidos em cada um dos três anos do ensino médio.

Ainda sobre o documento, entre as unidades temáticas do tema estruturador Geometria e medidas, identificamos duas que se relacionam ao estudo dos sólidos geométricos, a Geometria espacial e métrica, cujos conteúdos³⁰ e habilidades propostas são

Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro (BRASIL, 2002, p.125).

Podemos observar que além dos conceitos citados no Modelo Epistemológico de Referência (MER) criado por N. S. Santos (2021), são citados no documento a inscrição e circunscrição de sólidos, bem como a estimativa, valor exato e aproximado. Esses conteúdos se relacionam aos conhecimentos geométricos e algébricos/geométricos associados à Matriz de Referência do Enem.

Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

³⁰ Esse termo é utilizado pelo documento ao tratar de conceitos.

Como destacado em seções anteriores, diferentemente dos documentos anteriores, a Matriz de Referência do Enem apresenta apenas os eixos cognitivos³¹, as competências, as habilidades e os objetos do conhecimento avaliados por esta prova. Não há uma discussão sobre eles, deste modo, decidimos por apresentar aqui os conhecimentos mobilizados, considerando que das sete competências da área Matemática e suas tecnologias, duas delas, e suas respectivas habilidades, tratam da Geometria.

Para continuar a nossa investigação sobre como os sólidos geométricos existem no ensino médio brasileiro, também decidimos analisar os livros didáticos de matemática deste nível de ensino. Como não seria possível analisar todas as coleções aprovadas pelos Guias dos PNLD 2015 e 2018, decidimos escolher uma coleção de cada Guia respectivamente— Matemática: ciência e aplicações (IEZZI *et al*, 2013); #Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016) – e apresentar os dados coletados, como pode ser observado no próximo tópico.

4.2.2 Livros didáticos

Os livros didáticos são um importante material para auxiliar o processo de ensino aprendizagem, também servindo nos estudos e pesquisas sobre a educação. Na Seção anterior, tratamos sobre os Guias dos PNLD 2015 e 2018, cujos livros aprovados serviram de material para diversos alunos no desenvolvimento dos estudos no ensino médio e, conseqüentemente, como uma forma de preparação para a prova do Enem. Em nossa pesquisa, consideramos os livros didáticos de matemática do ensino médio como instituições cujo objeto matemático – os sólidos geométricos – está inserido no âmbito da noosfera.

Dito isso, consideramos necessário analisá-los para a discussão das dimensões econômica e ecológica. Diante da disponibilidade de materiais e tempo hábil desta pesquisa, escolhemos uma coleção aprovada em cada um dos Guias – Matemática: ciência e aplicações (IEZZI *et al*, 2013); #Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016), respectivamente. Essas duas coleções contemplam o período das provas analisadas. Após uma leitura das informações nos guias e nos livros, vimos que os conceitos sobre sólidos geométricos estavam presentes nos livros de matemática do 2º ano do ensino médio, assim como é sugerido nos PCN+.

³¹ Os eixos cognitivos são: Dominar linguagens; Compreender fenômenos; Enfrentar situações-problema; Construir argumentação; Elaborar propostas. Eles são comuns a todas as áreas do conhecimento.

Esses livros foram analisados na dimensão econômica após levantarmos alguns questionamentos. São eles: Qual a relação institucional com o saber matemático? De que modo os sólidos geométricos estão presentes nos livros didáticos de matemática do 2º ano do ensino médio, escolhidos para esta pesquisa? Esses questionamentos podem ser considerados como amplos por alguns leitores, contudo, nosso objetivo está relacionado à tentativa de criar nossos modelos de modo mais completo, diante do que está ao nosso alcance. Para uma melhor apresentação dos dados coletados, decidimos apresentá-los por livro didático.

Matemática: ciência e aplicações, 2º ano do EM

O livro conta com seis capítulos tratando acerca da Geometria espacial. No capítulo 9 – Geometria espacial de posição – os autores apresentam noções iniciais relacionadas aos conceitos de ponto, reta e plano. Também são discutidos os conceitos de posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos; ângulos formados entre retas; retas e planos perpendiculares; projeções ortogonais e distâncias. Apenas ao final do capítulo, é destinado um apêndice tratando de uma introdução aos sólidos geométricos.

Ainda sobre o capítulo 9, este é iniciado com uma nota histórica apresentando a mudança para uma Geometria mais abstrata e com demonstração das propriedades, dando destaque à obra *Os elementos*, de Euclides. Após essa nota, na introdução são relacionados objetos do cotidiano ao cubo. Assim, são tratados conceitos de vértices e pontos, para então discutir a relação entre arestas e faces com segmentos de retas e regiões planas, respectivamente.

Destacamos que os sólidos geométricos são estudados desde o ensino fundamental. Portanto, é comum exemplificar algumas das noções primitivas por meio de figuras espaciais como blocos retangulares e pirâmides, supondo-se que já tenham sido desenvolvidas as habilidades necessárias para que alunos do ensino médio compreendam essas ideias.

No que se refere aos tipos de tarefas referentes aos sólidos geométricos, observamos situações em que são apresentadas imagens de sólidos destacando os pontos referentes aos vértices, como observado na Figura 7. Ao ter como base, esse objeto ostensivo, a exemplificação da tarefa e da técnica é:

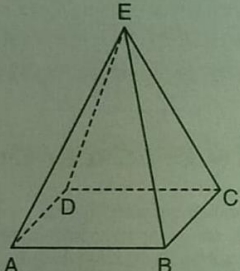
T₁₁: Determinar a posição relativa entre retas, entre retas e planos e entre planos.

t_{11.1}: Visualizar o sólido geométrico, a partir da figura.

t_{11.2}: Identificar os segmentos de retas e regiões planas que formam esse sólido geométrico, para determinar as retas e os planos referentes. Após isso, será possível identificar a posição relativa entre eles.

Figura 7. Exemplo do tipo de tarefa 11

10. Observe a pirâmide a seguir, cuja base é um retângulo.



Determine a posição relativa entre:

- a) as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
- b) as retas $\overline{AB}$ e $\overline{EC}$;
- c) as retas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$;
- d) a reta $\overline{AB}$ e o plano (BEC);
- e) a reta $\overline{AD}$ e o plano (BEC);
- f) as retas $\overline{BD}$ e $\overline{EC}$.

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.170)

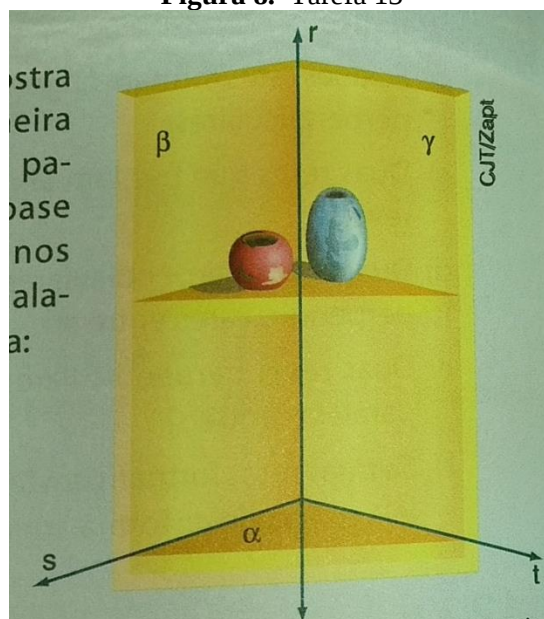
Também identificamos outros tipos de tarefas:

T₁₂: Classificar os tipos de retas, de acordo com a posição e/ou ao ângulo formado.

t₁₂: Identificar nas retas propostas a posição a qual ocupam e/ou os ângulos formados, para então, de acordo com as definições de cada tipo de reta, classificá-las

T₁₃: Quantificar a medida dos ângulos $\hat{r}s$ e $\hat{r}t$.

Figura 8. Tarefa 13



Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.174)

t_{13.1}: Visualizar a Figura 8 e identificar a localização dos ângulos $\widehat{rs}$ e $\widehat{rt}$.

t_{13.2}: Identificar que a reta r é perpendicular às retas t e s , para identificar que os ângulos formados pelas interseções entre elas é de 90°

T₁₄: Indicar os segmentos de retas que representam as distâncias entre pontos; pontos e retas; pontos e planos; planos; retas.

t₁₄: Identificar os pontos, retas e planos pedidos, para então indicar os segmentos que representam as suas distâncias. No caso das distâncias entre pontos e retas, antes, é necessário identificar o ponto que passa pela reta e forma um segmento perpendicular a ela, passando pelo ponto fora dela, sendo este segmento a representação da distância entre eles. De forma análoga, é realizado para a distância entre um ponto e um plano, ou entre dois planos, identificando o segmento perpendicular formado por eles.

Como destacado, não há um capítulo destinado a tratar dos sólidos geométricos de maneira geral, apenas um apêndice no capítulo 9 – Introdução ao estudo dos sólidos geométricos – novamente a proposta é relacionar a Geometria com o cotidiano, por meio de fotos de obras arquitetônicas conhecidas e de objetos, como o Museu do Louvre e uma lata, respectivamente. Iezzi *et al* (2013) não dizem de forma direta a definição para os sólidos. Contudo, de acordo com o que é apresentado, podemos concluir que os sólidos são figuras tridimensionais, cujos tipos mais simples são os poliedros e os corpos redondos. De acordo com N. S. Santos (2021), para a Geometria euclidiana, é “aquele que tem comprimento, largura e profundidade. Essa definição nos remete à característica de os sólidos serem tridimensionais. [...] Suas faces são superfícies”

Os cinco capítulos seguintes são destinados à discussão sobre cada um dos principais exemplos de sólidos geométricos: prismas; pirâmides; cilindros; cones e esferas. No capítulo 10, o foco está nos prismas, introduzidos por meio da representação no cotidiano e das suas características básicas, como superfícies formadas por polígonos, pelo menos dois polígonos congruentes em planos paralelos e por paralelogramos (IEZZI *et al*, 2013).

Após apresentação dos elementos que compõem um prisma: base; faces laterais; arestas da base e das faces laterais, foram discutidas as classificações de acordo com a quantidade de lados do polígono da base, como prisma triangular; quadrangular, entre outros. Bem como, a classificação quanto à inclinação das arestas em relação às bases: prisma oblíquo ou reto. A ênfase é dada aos prismas cujas bases são paralelogramos, ou

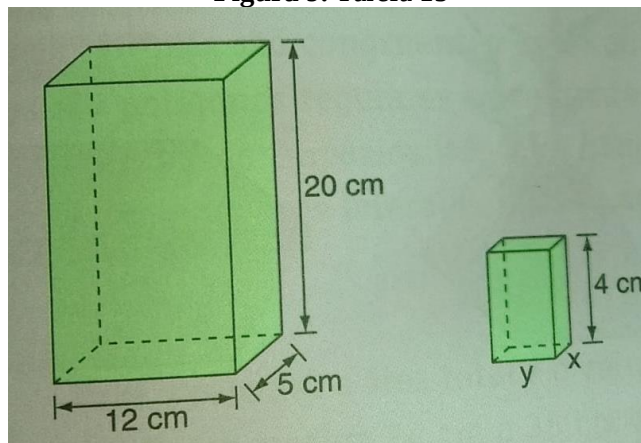
seja, paralelepípedos e os seus casos especiais, como os cubos, com o cálculo das medidas de suas áreas e de volumes. Para então, tratar do Princípio de Cavalieri, para calcular a medida de volume de um prisma qualquer.

Neste capítulo, estão presentes tarefas relacionando o cálculo da medida de área da superfície de um paralelepípedo e matemática financeira, ou razão e proporção. Dadas as medidas do comprimento, largura e altura, propõe-se calcular as medidas de diagonal, área e/ou volume. Em alguns casos são dadas medidas de diagonal, área, volume e/ou até duas das outras medidas, para encontrar o valor da que está faltando. Também identificamos tarefas para calcular a medida de área por meio da planificação da superfície de determinado prisma. Conforme apontado por Nadalon (2018, p.15) acerca da Geometria, no ensino médio, “o conteúdo é geralmente introduzido com noções da geometria de posição, em que percebemos um desinteresse, por parte dos alunos, até chegarem à geometria espacial e analítica, a qual novamente tem um grande foco no cálculo”. Ou seja, o referido autor também constata esse enfoque no cálculo de medidas.

O capítulo 11 trata sobre as pirâmides, introduzidas com a discussão acerca da arquitetura egípcia, dando destaque às Pirâmides de Gizé. De acordo com os autores, esse sólido é a reunião de segmentos de reta com extremidade em um ponto do polígono convexo contido em um plano α e um ponto V , não contido neste plano. Assim como o capítulo anterior, são apresentados os elementos e as classificações de acordo com o polígono da base, para depois tratar de modo especial das pirâmides regulares e o cálculo da medida de área e de volume dessas pirâmides. Quanto às tarefas, encontramos casos em que se pedia para dar a nomenclatura das pirâmides, de acordo com o número de faces ou arestas. Ou para identificar o número de faces, vértices e aresta de determinada pirâmide, dada a quantidade de lados. Além do cálculo das medidas de área e de volume.

Ao final do capítulo, há os tópicos sobre os sólidos semelhantes, em especial sobre as pirâmides semelhantes, e os troncos de pirâmides com os cálculos de áreas e de volumes. Um exemplo das tarefas nesse tópico é

T₁₅: Determine os valores de x e y , a fim de que as caixas seguintes sejam semelhantes:

Figura 9. Tarefa 15

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.217).

T_{15.1}: Calcular a razão entre as medidas das alturas dos dois prismas.

t_{15.1}: Para calcular a razão r entre as alturas, é necessário realizar a divisão entre eles. Ou seja, $\frac{20}{4} = r \rightarrow r = 5$

t_{15.2}: Para que os dois prismas sejam semelhantes, as medidas de comprimento e largura precisam obedecer a essa razão encontrada, a divisão entre eles deve ser $\frac{12}{y} = r$ e $\frac{5}{x} = r$. Temos que $\frac{12}{y} = 5$ e $\frac{5}{x} = 5$.

$$\text{Logo, } \frac{12}{y} = 5 \rightarrow 5y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{5} \rightarrow y = 2,4$$

$$\frac{5}{x} = 5 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{5} \rightarrow x = 1$$

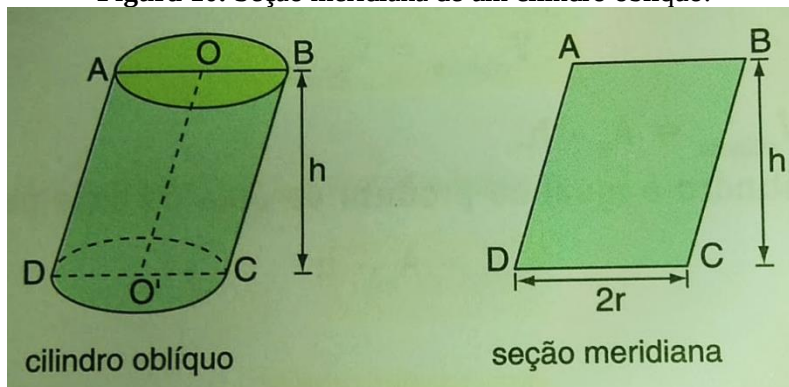
Portanto, para que os dois prismas sejam semelhantes, $y = 2,4$ cm e $x = 1$ cm.

De modo geral, além das medidas de área da superfície e de volume de um prisma, as tarefas identificadas nesse capítulo tratam das medidas de comprimento, altura e largura, em situações nas quais é preciso descobrir quais devem ser as medidas para que os sólidos sejam semelhantes, ou efetuar o cálculo da razão entre essas medidas, dadas figuras semelhantes.

No capítulo 12, assim como nos capítulos anteriores, segue a ordem: introdução, abordando algo do cotidiano; conceito; elementos; classificação; área e volume. Além disso, é discutido sobre a seção meridiana de um cilindro,

É a interseção deste com um plano que contém o segmento $\overline{OO'}$

Fonte: Iezzy *et al* (2013, p.224)

Figura 10. Seção meridiana de um cilindro oblíquo.

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.224)

Um exemplo de tarefa que podemos citar é

T₁₆: O perímetro da seção meridiana de um cilindro reto mede 28cm. Sabendo que a área lateral do cilindro mede $48\pi\text{cm}^2$, determine seu volume.

T_{16.1}: Encontrar o sistema de equação que representa as medidas do raio e altura

t_{16.1}: A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo, as suas dimensões são h , a altura do cilindro, e $2r$, a medida do diâmetro da base. Deste modo,

$$\text{Perímetro}_{\text{retângulo}} = 2r \cdot 2 + h \cdot 2$$

Na tarefa é dado o valor desse perímetro, $\text{Perímetro}_{\text{retângulo}} = 28\text{cm}$.

$$\rightarrow 4r + 2h = 28$$

Também é dada a área lateral, como o cilindro é reto, a planificação da sua superfície é um retângulo. Logo, considerando que h é a medida da altura e $2\pi r$ é o comprimento da circunferência da base, temos

$$\text{Área}_{\text{lateral}} = 2\pi rh \rightarrow 2\pi rh = 48\pi \rightarrow 2rh = 48$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações,

$$\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2rh = 48 \end{cases}$$

T_{16.2}: Resolver o sistema de equação que representa as medidas do raio e da altura.

t_{16.2}: Para resolver o sistema de equação $\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2rh = 48 \end{cases}$, podemos colocar uma das incógnitas em evidência, em cada equação.

$$\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2rh = 48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 14 - 2r \\ r = \frac{24}{h} \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos $h^2 - 14h + 48 = 0$.

Ao calcular a equação, encontramos como soluções, $h=6\text{cm}$ ou $h=8\text{cm}$.

Sabendo que

$$Volume_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Logo, se $h=6$ cm, então $r=4$ cm, a medida do volume será

$$Volume_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \rightarrow 96\pi \text{cm}^3$$

$$\text{Se } h=8 \text{ cm, então } r=3 \text{ cm, } Volume_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 \rightarrow 72\pi \text{cm}^3$$

Essa tarefa, T_{16} , é justificada por conceitos pertencentes à Geometria e Álgebra, visto que, para chegar ao sistema de equações, é necessário saber quais expressões representam o perímetro da seção meridiana e a área lateral de um cilindro reto. Portanto, podemos classificar essa praxeologia matemática como global.

O penúltimo capítulo aborda sobre os cones, seguindo a mesma praxeologia dos seus antecessores, é apresentada a seção meridiana, o tronco de um cone e a semelhança entre cones. O mesmo acontece em relação às tarefas, são em sua maioria para calcular as medidas de área e de volume, ou usar essas medidas para encontrar outras medidas, como raio e altura.

No último capítulo envolvendo sólidos geométricos, temos o capítulo 14, sobre as esferas. Apesar de não seguir exatamente a praxeologia dos capítulos anteriores, também apresenta os tópicos: conceito, elementos, volume da esfera e área da superfície esférica. Ademais, há um tópico sobre a seção da esfera e outro sobre partes dela, o fuso³² e a cunha³³ esféricos. Ao analisar os seis capítulos do livro de Iezzi *et al* (2013), percebemos que os autores deram uma ênfase maior aos casos especiais de cada tipo de sólido citados, bem como, o cálculo das suas respectivas medidas de áreas e de volumes, tanto na apresentação dos objetos matemáticos quanto nas tarefas indicadas.

Com o objetivo de auxiliar no comparativo entre os livros e para a criação do nosso MED, decidimos criar uma tabela sobre o número de tarefas e os principais conceitos mobilizados por capítulo.

³² “[...] é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) em torno do eixo que contém seu diâmetro” (IEZZI *et al*, 2013, p.251).

³³ “[...] sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$) em torno do eixo que contém seu diâmetro” (IEZZI *et al*, 2013, p.252).

Tabela 1. Livro didático Matemática: ciência e aplicação

CAPÍTULOS DO LIVRO	NÚMERO DE TAREFAS POR CAPÍTULO	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS
	9 – Geometria espacial de posição 24	• Ponto, reta e plano; posições relativas; ângulos; distâncias; projeções ortogonais; sólidos geométricos
	10 – Prisma 36	• Prismas: elementos, classificação, principais casos; medidas de área das superfícies e de volume; planificação de um prisma
	11 – Pirâmide 44	• Pirâmides: elementos, classificação, principais casos; medidas de altura, área das superfícies e volume; planificação de uma pirâmide; sólidos semelhantes; tronco de pirâmide
	12 - Cilindro 25	• Cilindros: elementos, classificação, principais casos; medidas de altura, área das superfícies e volume; seção meridiana; planificação de um cilindro
	13 – Cone 38	• Cones: elementos, classificação, principais casos; medidas de altura, área das superfícies e volume; seção meridiana; planificação de um cone; tronco de um cone; cones semelhantes
	14 – Esfera 28	• Esferas: seção, elementos, classificação, principais casos; medidas de altura, área das superfícies e volume; Pares da esfera: fuso e cunha esférica
Total	6 capítulos	195 tarefas

Fonte: Iezzi *et al* (2013)

Como esperado diante da leitura dos documentos curriculares e do Guia do PNLD 2015, as praxeologias adotadas, em sua maioria, foram justificadas pelas medidas de área da superfície e volume. A Geometria espacial, plana e métrica estão intimamente ligadas nesse nível de ensino, assim como apontado por Nadalon (2015) e M. Freitas (2015).

No próximo subtópico serão apresentadas as informações sobre como os sólidos geométricos estão postos no livro didático #Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016), 2º ano do ensino médio e quais os tipos de tarefas relacionadas a esse objeto geométrico.

#Contato Matemática, 2º ano do EM

Diferentemente do livro didático anterior, o livro #Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016), do 2º ano do ensino médio, contém apenas dois capítulos sobre a Geometria espacial, sendo o capítulo 7 destinado a tratar da Geometria espacial de posição e o capítulo 8, figuras geométricas espaciais, sob estes mesmos títulos.

Também iniciado por uma nota histórica sobre a Geometria e o livro Os elementos de Euclides, o capítulo 7 contém postulados e teoremas sobre as relações entre ponto, reta e plano, relacionando-os às figuras planas e espaciais. Com apenas uma tarefa envolvendo os sólidos, para indicar por regiões de quantos planos as faces de determinada pirâmide era formada e em quantos planos, da tarefa anterior, cada um dos seus vértices estão contidos.

Ao tratar da posição relativa entre duas retas; entre reta e plano; entre dois planos, percebemos uma presença maior dos sólidos nas tarefas propostas. De modo geral, as tarefas são para classificar as retas, cujos segmentos pertencem aos sólidos, ou para determinar as posições em que retas e planos ocupam. Ainda neste capítulo, são discutidas as propriedades de paralelismo e perpendicularismo, projeções ortogonais sobre um plano e distâncias no espaço. O conceito de vistas é abordado por meio de uma tarefa, entre as suas demandas, estão a identificação e desenho das vistas laterais, frontais e/ou superiores.

O capítulo seguinte é dedicado para a discussão sobre as figuras geométricas espaciais. Começando com a apresentação de situações do cotidiano e arquitetura, os autores apresentam o conceito dos poliedros,

Sólidos limitados por superfícies planas poligonais
--

Fonte: Souza; Garcia (2016, p.202).

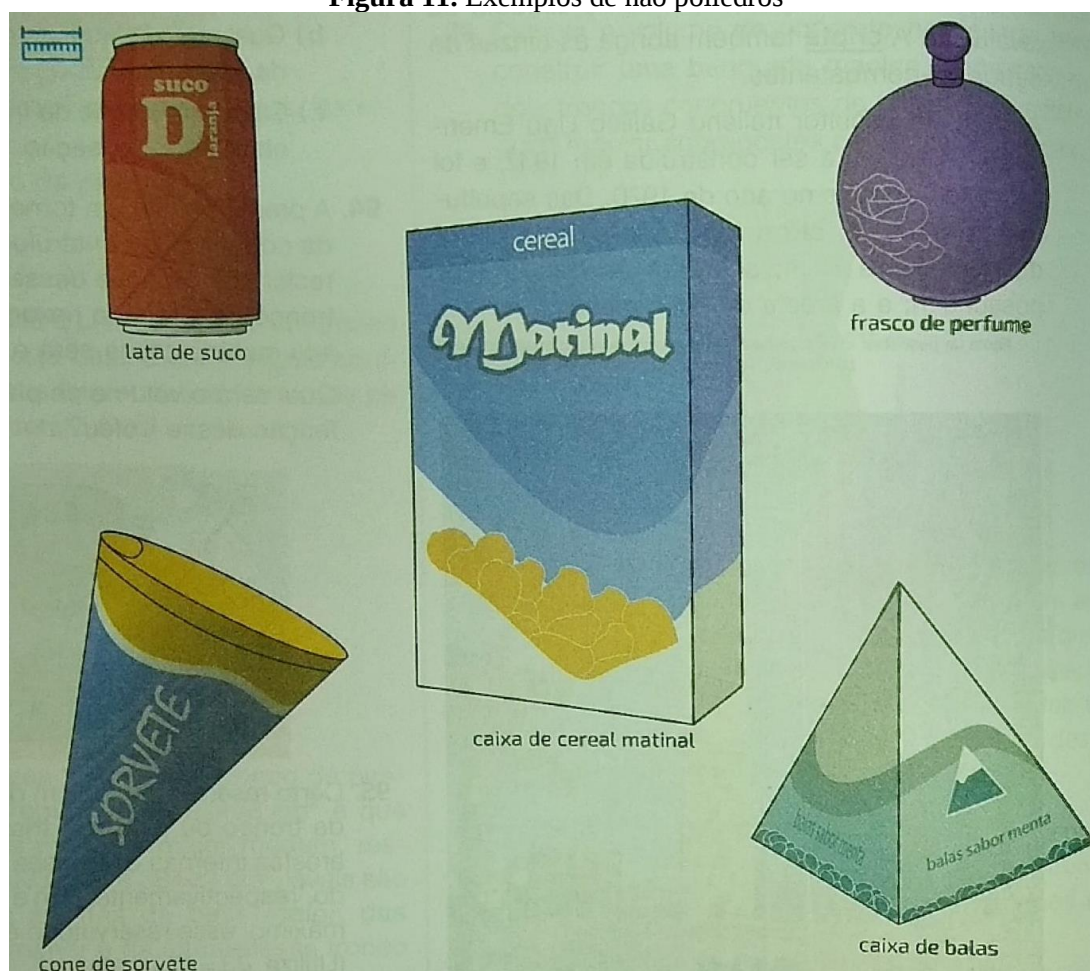
Além dos seus elementos e classificação quanto ao número de faces e em convexos e não convexos. Há tópicos sobre a relação de Euler e poliedros de Platão (poliedros regulares), cujas tarefas são, em sua maioria, para descobrir o número de vértices, faces ou aresta. Em apenas algumas delas, é necessário nomear e determinar se o sólido é um dos poliedros de Platão, ou seja, se é regular.

Nos três tópicos seguintes são apresentados os prismas, as pirâmides e o tronco de uma pirâmide reta, com suas respectivas definições, elementos que os compõem, classificação, medidas de área das suas superfícies e volumes, sendo discutido o Princípio de Cavalieri. As tarefas se resumem em classificar os poliedros, calcular a área da superfície, o volume, ou, por meio deles, calcular as medidas que faltam. Damos destaque a uma tarefa já solucionada, que trata de uma pirâmide quadrangular inscrita em um cubo, para o qual se faz necessário determinar as medidas da altura, apótema da base e da pirâmide. Apesar de não discutir anteriormente sobre sólidos inscritos ou circunscritos, os autores se utilizam da tarefa resolvida para abordar a forma de resolver

essa situação. Posteriormente, há outras tarefas nas quais um octaedro regular e, em outro caso, uma esfera estão inscritos em um cubo, para as duas situações são solicitados os cálculos das respectivas medidas de volumes.

O tópico seguinte destina-se a tratar dos não poliedros – cilindro, cone e esfera – os autores se referem a esses sólidos dessa maneira, não considerando a nomenclatura de corpos redondos. O tópico é iniciado com um discurso acerca da presença desses sólidos no cotidiano das pessoas e figuras ilustrando uma lata cilíndrica de suco, um frasco esférico de perfume, uma caixa de cereal, um cone de sorvete e uma caixa de balas em forma de pirâmide. Após isso, há um discurso indicando quais dessas formas são não poliedros, seguido pela ilustração das formas geométricas. Foram dedicados tópicos para tratar especificamente cada um desses sólidos.

Figura 11. Exemplos de não poliedros

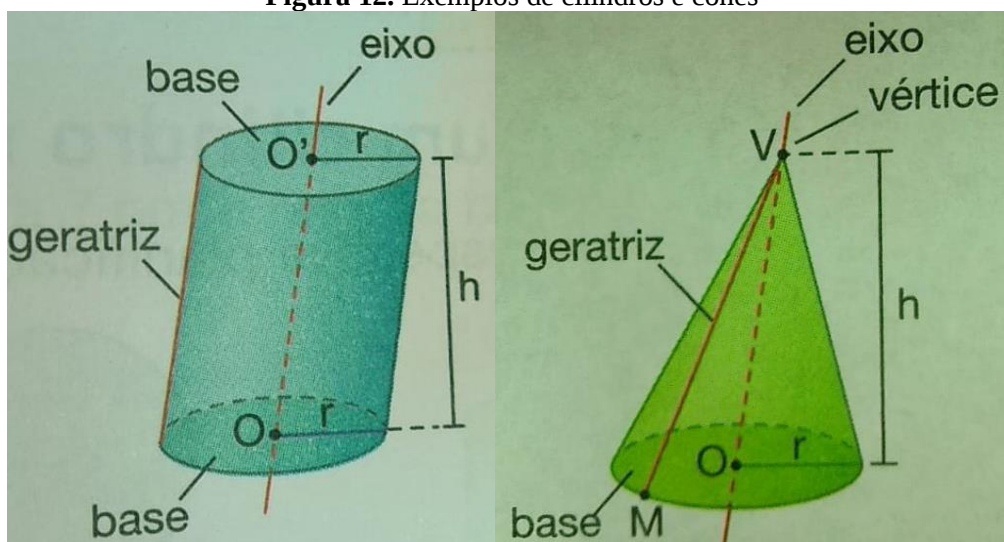


Fonte: Souza; Garcia (2016, p.234).

O tópico Cilindro contém mais exemplos relacionados ao dia a dia, a sua definição e representação nos planos. Também são destacados os seus elementos, classificação, as medidas de área da superfície e de volume, finalizado por uma tarefa contextualizada sobre o inventário florestal envolvendo o cilindro e o paralelepípedo. As demais tarefas são para calcular as medidas de área e de volume.

O tópico Cone relaciona o funil a essa forma geométrica. Assim como o tópico anterior, é apresentada a sua definição e representação nos planos, elementos e classificação, acompanhado das medidas de área da superfície e de volume. É dedicado um tópico específico para tratar do tronco de um cone reto, seus elementos, medidas de área e de volume. As tarefas nesse tópico também são voltadas ao cálculo das medidas: raio, geratriz, área e volume, em alguns casos, a partir de um cone; de um triângulo que forma o seu sólido de revolução e do tronco do cone.

Figura 12. Exemplos de cilindros e cones

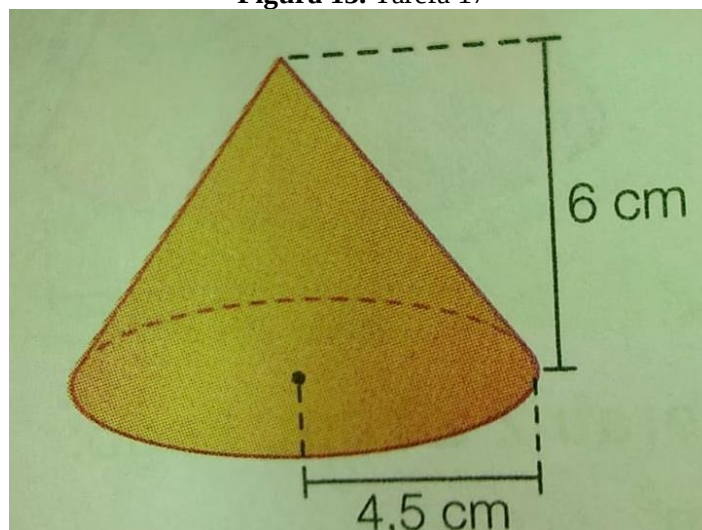


Fonte: Souza; Garcia (2016, p.235-244).

O último tópico é destinado à discussão sobre a esfera, seus elementos, medidas de área da superfície e volume. Como mencionado anteriormente, uma das tarefas envolve uma esfera inscrita em um cubo, nas demais tarefas há uma ênfase no cálculo das medidas de área, volume e raio. Além de fazer relação com o formato da Terra, para calcular a medida da linha do equador terrestre, entre outras medidas. O encerramento do capítulo ocorre por meio de uma atividade acerca da adulteração de combustíveis, a Geometria e o cálculo da medida de volume. Podemos exemplificar as tarefas nesse capítulo como

T₁₇: Em relação ao cone reto apresentado, calcule: a) a área da base; b) a medida da geratriz.

Figura 13. Tarefa 17



Fonte: Souza; Garcia (2016, p.246).

A tarefa 17 se subdivide em duas, a primeira para o cálculo da área e a segunda da medida geratriz, dessa forma, teremos

T_{17.a}: Em relação ao cone reto da Figura 13, calcule a área da base.

t_{17.a}: A área da base de um cone reto pode ser calculada a partir da seguinte fórmula: $\text{Área}_{\text{base}} = \pi r^2$

Considerando $\pi = 3,14$ e como a medida do raio r é dada, $r = 4,5$ cm, basta substituir o valor na fórmula,

$$\text{Área}_{\text{base}} = (3,14)(4,5)^2 \rightarrow \text{Área}_{\text{base}} = 63,585 \text{ cm}^2$$

A outra tarefa é

T_{17.b}: Em relação ao cone reto da Figura 13, calcule a medida da geratriz.

t_{17.b}: A medida da geratriz de um cone pode ser calculada a partir do teorema de Pitágoras, em que considerando g como essa medida; h como altura e r o raio, temos

$$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Substituindo os valores que foram dados, $r = 4,5$ cm e $h = 6$ cm,

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} \rightarrow g = \sqrt{(4,5)^2 + 6^2} \rightarrow g = 7,5 \text{ cm}.$$

Essa tarefa é justificada pelos conceitos das medidas de área da base de um cone reto e da geratriz, ou seja, mais de uma tecnologia. Desta forma, podemos classificar essa praxeologia como regional, em que os sólidos são o Tema de estudo.

Destacamos que os dois capítulos citados são os últimos capítulos do livro didático. Diferentemente do livro anterior, percebemos que as informações apresentadas estão de forma mais sucinta, dando um espaço maior para a proposição de tarefas. Assim como no subtópico anterior, apresentaremos na Tabela 2, o número de tarefas e os principais conceitos mobilizados por capítulos, para realizar esse comparativo entre os livros.

Tabela 2. Livro didático #Contato Matemática

	NÚMERO DE TAREFAS POR		OBJETOS NÃO OSTENSIVOS
	CAPÍTULOS		GEOMÉTRICOS
CAPÍTULOS DO LIVRO	7 – Geometria espacial de posição	42	• Ponto, reta e plano; posições relativas; ângulos; distâncias; projeções ortogonais; sólidos geométricos • Poliedros: convexos e não convexos; poliedros de Platão e poliedros regulares; • Prismas: elementos, classificação, principais casos; medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de um prisma; • Pirâmides: elementos, classificação, principais casos; medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de uma pirâmide; • Tronco de pirâmide: elementos, medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de um tronco de pirâmide;
	8- Figuras geométricas espaciais	198	• Não poliedros: Exemplos; • Cilindros: elementos, classificação, cilindro de revolução; seção meridiana; medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de um cilindro; • Cones: elementos, classificação, cones de revolução; seção meridiana; medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de um cone; • Tronco de cone reto: elementos, medidas de área das superfícies e de volume; planificação da superfície de um tronco de cone reto; • Esferas: elementos; medidas de área das superfícies e de volume.
Total	2 capítulos		230 tarefas

Fonte: Souza; Garcia (2016).

Uma das diferenças entre os livros, que podemos apontar, é a presença dos conceitos de fuso e cunha esférica em Iezzi *et al* (2013), os quais não estão contidos em Souza e Garcia (2016). Eles também se diferem no quantitativo de tarefas, enquanto o

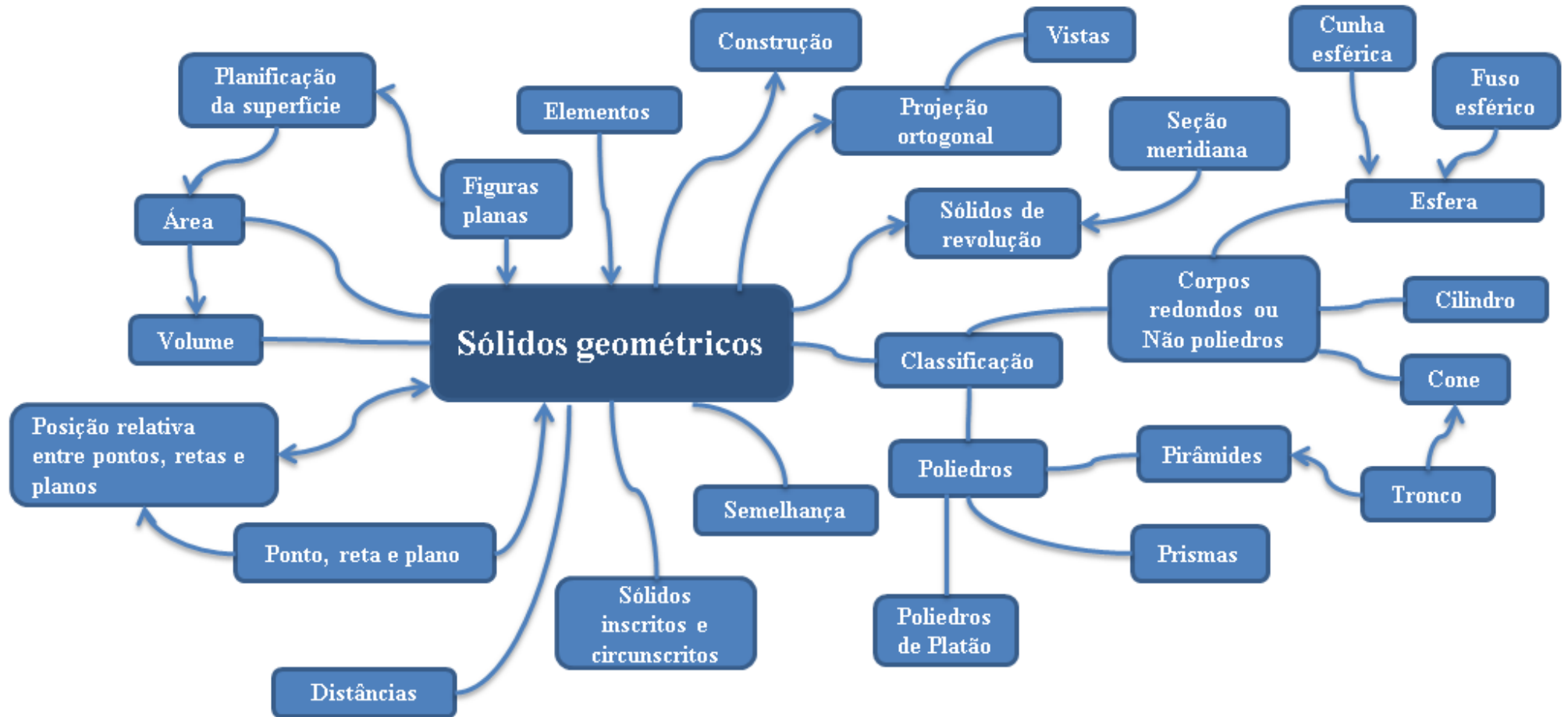
primeiro livro apresenta 195 tarefas, diluídas entre os seis capítulos, o segundo livro propõe aproximadamente 230 tarefas. Apesar do número significativo, as tarefas eram muito parecidas, modificando as situações, mas em geral, voltadas para o cálculo das medidas de área e de volume, ou para descobrir medidas que estão faltando. M. Freitas (2015), ao analisar livros didáticos, constatou que a maioria das tarefas relacionadas ao volume dos sólidos é sobre o seu cálculo.

A partir da análise dos documentos curriculares – PCNEM e PCN+ –, da matriz do Enem e dos livros didáticos de matemática do ensino médio, foi possível criar nosso Modelo Epistemológico Dominante.

Modelo Epistemológico Dominante – MED

Assim como no Modelo Epistemológico de Referência, que destacava as relações da cadeia alimentar entre qual objeto servia de alimento e, por sua vez, qual era alimentado. Consideraremos que a seta ($\rightarrow$) estará na direção do objeto alimentado. Percebemos a presença de conceitos como sólidos inscritos e circunscritos que não estavam presentes no MER, como nosso intuito é deixar o nosso modelo mais completo possível, esses e outros objetos foram adicionados ao nosso Modelo Epistemológico Dominante.

Figura 14. MED dos sólidos geométricos



Fonte: Elaborado pela autora (maio, 2022)

4.3 DIMENSÃO ECOLÓGICA

Como afirmado anteriormente, para o desenvolvimento do problema didático é necessário analisar, pelo menos, suas três dimensões fundamentais – epistemológica, econômica e ecológica. Para esta subseção, temos como foco, a dimensão ecológica. Nessa dimensão, nosso olhar recai sobre as condições e restrições para que determinado objeto exista em uma instituição. Ou seja, na nossa pesquisa investigamos quais motivos para que os sólidos geométricos existam ou não na instituição ensino médio, de que modo isto ocorre e o que levou a esta mudança ou não. Para tanto, nos utilizamos dos dados coletados nas dimensões anteriores – epistemológica e econômica –, de modo a embasar nosso comparativo, além de outros dados acerca dos níveis de codeterminação.

Quadro 7. Tipos de tarefas e objetos de estudo

Tipo de tarefa	Objeto de estudo
T ₁₁ : Determinar a posição relativa entre retas, entre retas e planos e entre planos.	Posição relativa entre retas, entre retas e planos e entre planos
T ₁₂ : Classificar os tipos de retas, de acordo com a posição e/ou ao ângulo formado.	
T ₁₈ : Determinar a semelhança entre sólidos geométricos	Semelhança entre sólidos geométricos
T ₁₉ : Calcular a medida da área da superfície de um sólido geométrico	Área da superfície de um sólido geométrico
T ₂₀ : Calcular a medida do volume de um sólido geométrico	Volume de um sólido geométrico
T ₂₁ : Calcular as medidas do comprimento, altura, largura, geratriz, raio, entre outras medidas.	Distância entre dois pontos
T ₂₂ : Desenhe as vistas superior, frontal e lateral de determinado objeto.	Projeção ortogonal

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Ao observar as tarefas na subseção anterior, em conformidade com o que foi destacado na pesquisa de N. Santos (2021) para o ensino fundamental, constatamos que os sólidos geométricos são um Tema de estudo, visto que, na maioria dos casos, mais de uma praxeologia pontual mobiliza diferentes técnicas em uma mesma tecnologia.

Ao considerarmos os níveis de codeterminação, podemos perceber pelas indicações dos PCNEM e PCN+, como o nível da Sociedade pode influenciar em outros níveis. Como exemplo, o incentivo em contextualizar situações do cotidiano, tanto para permitir aos alunos continuar seus estudos, quanto entender o mundo que os rodeiam. Deste modo, dada às necessidades da sociedade, não apenas por profissionais

capacitados, mas para pessoas críticas que consigam se comunicar bem e compreendam as mudanças e saibam agir para tal.

Como apontado nos PCN+ sobre os tipos de problemas que devem ser propostos

Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho (BRASIL, 2002, p.113).

Ou seja, o que é ensinado no ensino médio busca preparar os alunos para o mundo do trabalho, a vida em sociedade e, caso seja uma escolha dos alunos, prosseguir nos estudos. O Enem surge como uma possibilidade para essa progressão, visto que a prova não serve apenas como avaliação do ensino ofertado nas escolas. A nota obtida pode ser usada para o ingresso em universidades públicas e privadas pelo Brasil e, em alguns casos, para outros países, como já visto em Seção anterior, por meio da inscrição no SISU e outros programas de incentivo à educação.

Em nossa pesquisa não analisamos as indicações de uma escola específica, mas podemos considerar que no nível Escola, estão todas as escolas de redes públicas e privadas que ofertam o ensino médio. Apesar disso, as propostas sobre como os sólidos geométricos são abordados nesse nível implica indiretamente, ou diretamente, nos demais níveis de codeterminação, bem como, sobre qual será o resultado da avaliação Enem.

O nível da Pedagogia compreende os documentos curriculares nacionais do ensino médio. De acordo com a citação anterior, podemos perceber a forma como os níveis superiores podem influenciar nas propostas contidas nos PCN+, assim também, como o nível da Pedagogia pode influenciar nos níveis abaixo dele. Portanto, ao considerarmos essa cadeia de influências, apontaremos algumas das condições e restrições para que os sólidos sobrevivam na instituição ensino médio.

É sugerido no texto dos PCNEM que, para o ensino da Geometria, haja um ensino adequado possibilitando os alunos desenvolverem habilidades que lhes permitam representar e visualizar o mundo, por meio do uso das formas e propriedades geométricas. Nessa perspectiva, pudemos observar a tentativa dos autores dos livros didáticos de matemática selecionados para esta pesquisa, em apresentarem tarefas que envolvessem representações dos sólidos geométricos no cotidiano, arquitetura, entre outros. Essa contextualização é indicada nos PCNEM e nos PCN+, de modo que o

conhecimento se torne mais significativo, seja por meio da resolução de problemas, em como é presente nos livros didáticos analisados, ou até mesmo no trabalho do professor em sala de aula (BRASIL, 2000, p.44).

Outro ponto a ser abordado é que apesar de reconhecer a ligação entre as medidas e os números ao tratar da Geometria, o ensino de suas propriedades métricas como as medidas de perímetro, área e volume também precisam considerar as relações geométricas. Como o que foi realizado nas tarefas T₁₀ dos PCN+ e T₁₃ do livro didático Matemática: ciência e aplicação, em que se faz necessário o aluno de ensino médio ter apropriação de conhecimento sobre propriedades geométricas para encontrar suas respectivas soluções. Segundo os PCN+, com o intuito de desenvolver um raciocínio geométrico mais completo, o ensino da Geometria no ensino médio precisa:

[...] contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos (BRASIL, 2002, p. 123).

De modo geral, essa indicação está em consonância com o que foi apresentado no livro didático Matemática: ciência e aplicação, edição 2013. Entretanto, algumas dessas indicações não aparecem no segundo livro que analisamos – #Contato Matemática, edição 2016. Um dos possíveis motivos reflete na forma das organizações praxeológicas escolhidas pelos respectivos autores. Os autores do primeiro livro optaram por dar mais espaço para tratar de cada um dos principais sólidos geométricos, enquanto os autores do segundo livro didático optaram por reservar uma quantidade menor para essa discussão, havendo então a necessidade em priorizar quais objetos ostensivos e não ostensivos a serem contemplados. Assim, podemos considerar, por exemplo, que o conceito de sólidos semelhantes “vive” na primeira instituição (Matemática: ciência e aplicação, edição 2013) mas não “vive” na segunda (#Contato Matemática, edição 2016). De acordo com Gáscon (2011), o questionamento de existência ou não do objeto em determinada instituição faz parte da problemática ecológica. Portanto, é possível determinado objeto viver em uma determinada instituição e não viver em outra, assim como vimos nessas duas instituições.

Outro ponto que destacamos é a proposta dos PCN+ quanto ao ensino sobre sólidos inscritos e circunscritos, que não apareceu no Modelo Epistemológico de N.

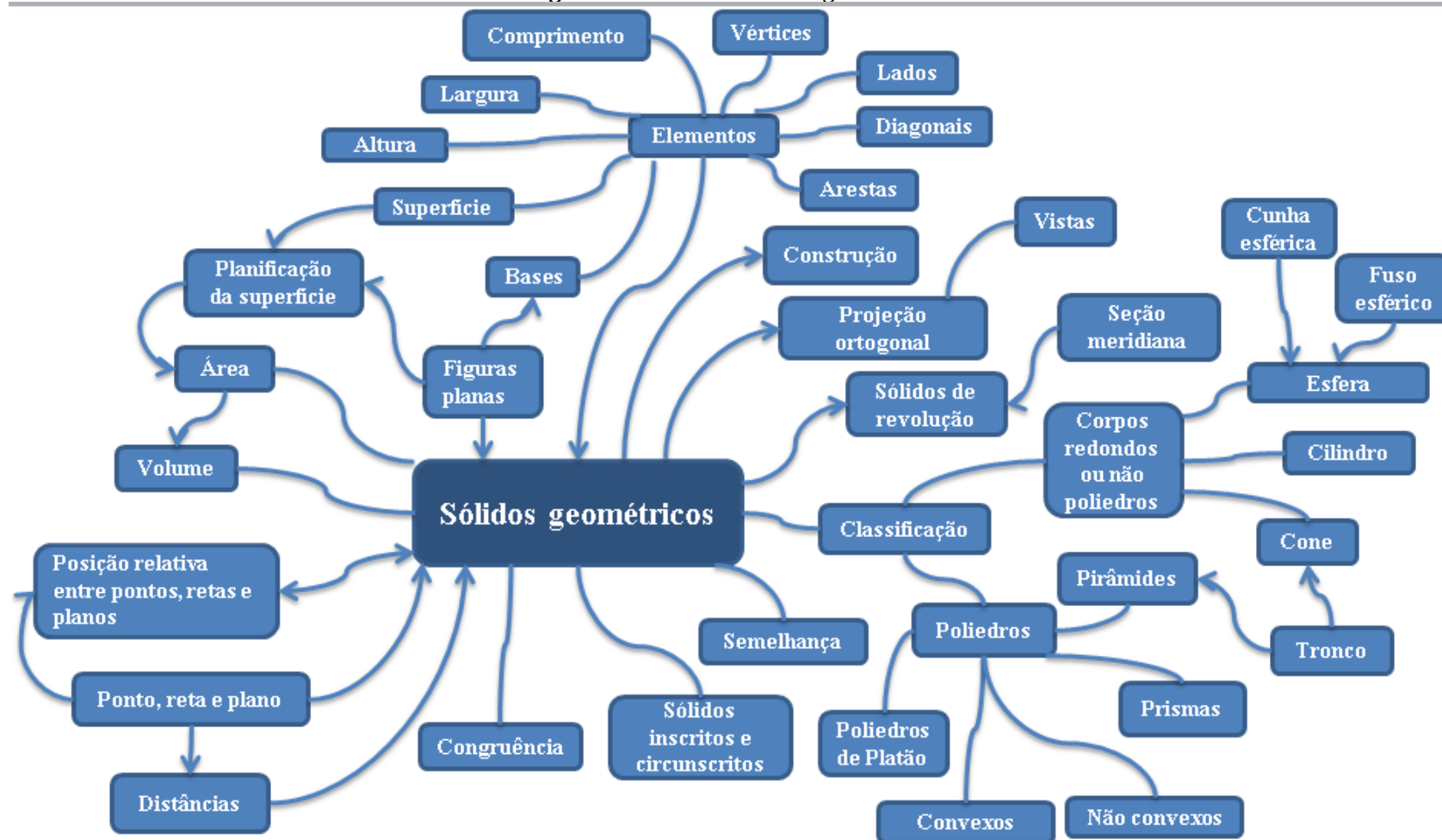
Santos (2021), nem em um dos livros didáticos analisados, apenas no livro #Contato Matemática. Esse conceito apareceu por meio da resolução apresentada no livro em uma das tarefas propostas envolvendo uma pirâmide inscrita em um cubo, após isto, foram propostas outras duas tarefas sobre esse conceito. Em consonância com a proposta do referido documento curricular, esse conceito deveria aparecer como uma aplicação do que foi aprendido sobre as medidas de comprimentos, áreas e volumes. Desse modo, a sua presença permite tornar o nosso Modelo Praxeológico de Referência (MPR) mais completo.

Na pesquisa de N. S. Santos (2021), apareciam tarefas solicitando a construção de sólidos como pirâmides e prismas, visto que o foco da autora estava nos conceitos que mais se aproximavam ao proposto para o 6º ano do ensino fundamental. Diferentemente do que foi destacado, apenas no livro didático #Contato Matemática solicita-se o esboço de um poliedro convexo de 6 faces e outro não convexo de 7 faces, enquanto no outro livro, essa construção não é solicitada. Podemos conjecturar que isso ocorre pelo fato de ser esperado para o nível de ensino médio haver um aprofundamento de objetos já estudados em anos anteriores (nível de ensino fundamental), além da ênfase dada pelos documentos curriculares em vincular a Geometria espacial à Geometria métrica.

Diante dessa análise sobre as condições e restrições dos sólidos no ensino médio, podemos constatar como a Geometria métrica é enfatizada nesse nível de ensino, contemplando um maior número de tarefas nos livros didáticos que envolvem conceitos e cálculos de medidas de grandeza, como área, volume, raio e outras medidas das figuras espaciais. Em relação à Matriz de Referência do Enem, observamos situações como na tarefa T₁₆ em que o sistema de equações auxilia para determinar o volume de um cilindro reto, dados a seção meridiana e sua área lateral. Uma situação em que são mobilizados conhecimentos geométricos e algébricos/geométricos.

Por fim, diante da nossa análise dessas dimensões, foi possível criar nosso MPR. Como nos modelos anteriores, a relação entre alimento e alimentado da cadeia alimentar é representada por meio da seta ($\rightarrow$). Na seta, a flecha aponta para o objeto que é alimentado. Ao buscarmos organizar melhor nosso modelo e inspirados na forma em que N. S. Santos (2021) apresentou o seu MER, decidimos colocar os objetos de estudos relacionados aos tipos de tarefas.

Figura 15. MPR dos sólidos geométricos



Fonte: Elaborado pela autora (maio, 2022)

Com o intuito de atingir os objetivos traçados no início da nossa pesquisa, na próxima Seção discutiremos sobre a presença dos sólidos geométricos nas provas do Enem das edições de 2017 a 2020. Portanto, utilizando o Modelo Praxeológico de Referência criado, serão analisadas um total de nove provas, envolvendo a primeira aplicação, a segunda aplicação (reaplicação) e a versão digital de 2020.

5. A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÕES 2017 – 2020)

Esta Seção caracteriza-se em apresentarmos uma análise dos resultados, considerando dois dos objetivos específicos traçados no início desta pesquisa, são eles: Identificar nas provas do Enem de 2017 a 2020, quais praxeologias envolvem sólidos geométricos e Analisar as praxeologias referentes aos sólidos geométricos, identificadas nas provas, tomando como parâmetro o MPR elaborado.

Para tanto, utilizamos o Modelo Praxeológico de Referência (MPR) criado na Seção anterior. Esse modelo nos auxiliou a identificar as tarefas que tratavam sobre os sólidos geométricos, bem como, possibilitou a realização da nossa análise.

Destacamos que, em nossa revisão de literatura da Seção anterior (a Seção 4), os trabalhos analisados pesquisaram edições anteriores das provas do Enem. Um exemplo é a pesquisa de Gomes (2017) que analisou a edição 2016. Assim, nosso comparativo será apresentado ao final desta Seção, apontando algumas das mudanças ocorridas na prova, tomando como base os dados e discussões das pesquisas.

Em nosso levantamento inicial, observamos uma quantidade substancial de tarefas tratando sobre a medida do volume. Contudo após uma leitura mais aprofundada sobre o que era solicitado em cada uma das tarefas, constatamos que aproximadamente 7,5% delas eram voltadas a uma discussão apenas sobre grandezas e medidas, sem necessariamente relacioná-las à Geometria, muitos menos aos conceitos e propriedades dos sólidos geométricos. Isso pode ser observado na Figura 16.

Figura 16. Exemplo de tarefa envolvendo apenas grandezas e medidas

QUESTÃO 161

Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3 .

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

- A** 100.
- B** 400.
- C** 1 600.
- D** 6 250.
- E** 10 000.

Fonte: Brasil (2017, p. 23)

Diante disso, decidimos por não analisar esse tipo de tarefa, para darmos ênfase apenas aos tipos mais específicos aos sólidos geométricos – nosso objeto de estudo. As provas analisadas foram das edições de 2017 a 2020, sendo aplicadas pelo menos, duas provas (aplicação e reaplicação) em cada um desses anos. Convém ressaltar que, em geral, a segunda prova, denominada reaplicação, foi voltada a pessoas privadas de liberdade. Além disso, na edição de 2020 começou a ser implementado o Enem Digital, cujos candidatos inscritos poderiam optar por fazer a prova neste formato ou no formato impresso. No Enem, existem quatro tipos de provas se diferenciando pela ordem em que as questões aparecem e pela cor do caderno de questões. Para padronizar a nossa pesquisa, escolhemos em todas as edições o “caderno de questões rosa” – conforme anunciado na própria capa do caderno.

Figura 17. Capa do caderno de questões – edição 2017



Fonte: Arquivos da autora (2022).

Diante dessa escolha, iniciamos a análise de nove provas, apresentando como ocorre a presença dos sólidos geométricos, por edição. Assim, a primeira edição analisada foi a do ano de 2017, contando com duas provas.

Pensar em facilitar para o leitor, a identificação sobre quais questões foram analisadas, escolhemos um código para as tarefas contendo o número da questão da prova, o ano a qual ela pertence e se é a primeira, ou segunda aplicação digital (p e s, respectivamente). Por exemplo, na Tarefa_{161.17p} o seu código refere-se à questão 161 da prova de primeira aplicação do Enem 2017.

5.1 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2017)

Ao analisar a presença dos sólidos nas provas de primeira e segunda aplicação das edições de 2017, decidimos apresentar seus dados em separado. Deste modo, inicialmente apresentaremos as tarefas, técnicas e discussões sobre a prova de primeira aplicação, dando ênfase a cinco tarefas como forma de exemplificação ao leitor e apresentando um resumo contendo todas as tarefas e seus respectivos objetos ostensivos e não ostensivos geométricos, além de destacar qual tipo de praxeologia essas tarefas compõem.

Analizamos os dados sobre as questões 137, 146, 148, 150, 152, 158, 160, 171, 174 e 177, da prova de primeira aplicação do caderno de questões rosa. Contudo, conforme mencionado, selecionamos apenas cinco para apresentar de maneira mais explícita essa análise. Para comentar as praxeologias, decidimos apresentar as tarefas e as técnicas relacionadas a elas, bem como uma breve discussão sobre o que foi analisado, apresentando alguns dos conceitos utilizados para justificá-los. A seguir, apresentaremos as tarefas envolvendo as questões 137, 152, 158, 160 e 177.

Tarefas_{137.17p}: Calcular a medida do volume de água em uma piscina de base retangular, cujas medidas são 1,7 m de profundidade, 3 m largura, 5 m comprimento e o nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A partir deste resultado, calcular a quantidade de produto a ser utilizado. Sendo que para cada 1.000 litros de água são adicionados 1,5 mililitros do produto.

Técnicas_{137.17p}: É necessário considerar o nível da lâmina d'água. Assim, a região ocupada terá uma profundidade 50 cm menor que a profundidade total da piscina. Ou seja, para calcular a medida do volume da piscina basta multiplicar as medidas de largura, comprimento e profundidade, $1,2\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 1\text{ m}^3$, ou 18000 l. Por fim, para descobrir a quantidade de produto, basta fazer uma regra de três visto que há uma proporcionalidade entre essas medidas, para cada 1.000 l são utilizados 1,5 ml de produto e para cada 18.000 l uma quantidade x equivalente. Ou seja,

$$\frac{1000\text{ l}}{1,5\text{ ml}} = \frac{18000\text{ l}}{x} \rightarrow (1000\text{ l} \cdot x) = 1,5\text{ ml} \cdot 18000\text{ l} \rightarrow$$

$$x = \frac{27\text{ l}}{1000\text{ l}} \rightarrow x = 0,027\text{ l, ou } 27\text{ ml}.$$

Como vimos em nosso MPR, tarefas como esta que envolvem o cálculo de medidas como volume, contemplam os objetos não ostensivos das medidas de volume, largura, comprimento e altura/profundidade. Essa referida tarefa pode ser justificada por esses conceitos, além da proporcionalidade, transformação de medidas e a multiplicação entre números racionais. Como há mais de uma teoria para justificá-la, a Geometria, a Álgebra e os Aritmética, consideramos essa tarefa como um elemento de uma praxeologia global.

Também analisamos as questões 148, 150 e 152, como poder observado a seguir.

Figura 18. Ilustração da questão 152 do Enem edição 2017, prova de primeira aplicação



Figura 1

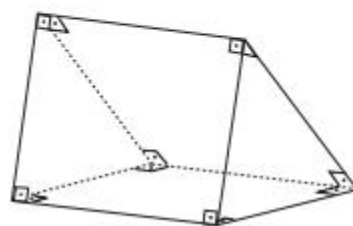


Figura 2

Fonte: Brasil (2017a, p. 20).

Tarefas_{152.17p}: Identificar e nomear a forma geométrica da superfície, cujas arestas estão representadas por meio da Figura 2 (do caderno de questões).

Técnicas_{152.17p}: Para solucionar essa tarefa, se faz necessário visualizar a Figura 2 (proposta da prova), considerando que ela representa geometricamente a sólido da Figura 1 (do caderno de questões, conforme enunciado da questão em jogo). A partir dessa visualização, deve-se analisar suas propriedades, de modo a identificar qual forma geométrica ela se relaciona. Chega-se, então, à conclusão que se trata de um prisma triangular reto.

Diferente da maioria das tarefas propostas e que apareceram em nosso MPR, a tarefa_{152.17p}, não faz relação com outras áreas da matemática, ou pede-se o cálculo de medidas. Nela, basta que o aluno saiba relacionar o que ele vê com as figuras geométricas e suas propriedades, sabendo nomeá-las. Assim, consideramos que é

constituída uma praxeologia local, visto que são necessárias diferentes tarefas e técnicas, contudo uma mesma tecnologia.

Tarefas_{158.17p}: Considerando um viveiro em formato de prisma retangular, cuja lateral é coberta por uma tela com 100 metros lineares, calcular as medidas de comprimento e largura, de modo que a medida da área da base seja máxima.

Técnicas_{158.17p}: De acordo com as informações dadas, podemos considerar a medida do perímetro como 100 m, logo as medidas do comprimento e largura devem corresponder a essa medida. As possibilidades são A: 1 e 49 e D: 25 e 25. Contudo, pede-se a área máxima. Assim, sabendo que a fórmula para o cálculo da área de um retângulo é a multiplicação entre as medidas do comprimento e largura, na opção A, a medida de área seria 49m^2 ; enquanto na opção D, 625m^2 , com medida de área maior que a anterior.

Assim como observado em nosso MPR, nessa praxeologia global é proposta uma tarefa envolvendo o cálculo de medidas, em que o leitor deve estar atento aos detalhes dados para descobrir o resultado que se encaixa ao que é pedido. Visto que a interpretação dos dados fornecidos e os conhecimentos acerca do que é perímetro e área, pode influenciar no resultado final. Um exemplo é a opção E, 50 e 50, se o candidato não souber que a medida do perímetro é calculada por meio da soma das medidas dos lados da figura plana (não apenas do comprimento e largura de um par de lados), ele poderá escolher essa opção.

Tarefas_{160.17p}: Escolher a esfera cujo diâmetro seja mais próximo da medida dada, 4 mm.

Técnicas_{160.17p}: Dadas as cinco medidas do diâmetro das possíveis escolhas, basta realizar o cálculo da subtração entre cada uma dessas medidas e os 4mm.

$$4,025 - 4 = 0,025$$

$$4,100 - 4 = 0,100$$

$$4 - 3,970 = 0,030$$

$$4,080 - 4 = 0,080$$

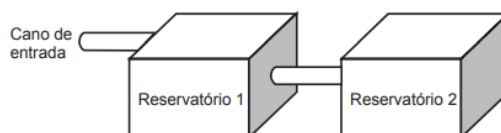
$$4 - 3,099 = 0,901$$

Após isso, escolher a opção em que o resultado foi menor. Ou seja, a opção C, cuja esfera possui a medida de 4,025mm de diâmetro.

Apesar de aparecerem os conceitos de diâmetro e esfera, presentes em nosso MPR, para a realização desta tarefa, tais conceitos aparecem como um adereço ao texto, visto que a técnica pode ser empregada de forma intuitiva, sem necessariamente saber sobre eles. Por causa disso, consideramos que ela é justificada apenas pelo conceito de números decimais e a operação entre eles, justificados apenas por uma teoria, constituindo uma praxeologia local.

Figura 19. Questão 177 do Enem edição 2017, prova de primeira e aplicação
QUESTÃO 177

A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.



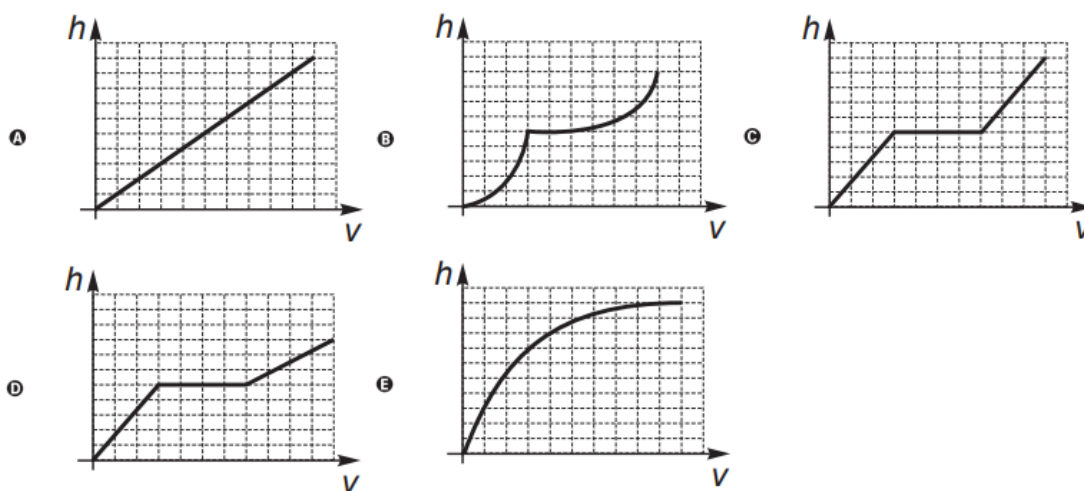
A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema?

Fonte: Brasil (2017a, p. 30).

Tarefas_{177.17p}: Identificar qual gráfico representa a altura em função do volume de um reservatório de água, com formato de bloco retangular que está sendo cheio.

Figura 20. Alternativas da questão 177 do Enem edição 2017, prova de primeira aplicação



Fonte: Brasil (2017a, p. 30).

Técnicas_{177.17p}: Visualização da figura dos reservatórios e abstração sobre o caminho percorrido pela água para enchê-los. Em outras palavras, inicialmente deve-se entender que a água passará pelo cano de entrada e começará a encher o reservatório 1. Em um dado momento, essa água passará pelo segundo cano, deixará de ficar

armazenada no reservatório 1 e encherá o reservatório 2. Após a água atingir a medida da altura do segundo cano, ela encherá os dois reservatórios, em uma velocidade menor que a velocidade inicial ao encher apenas o reservatório 1. Assim, o gráfico da letra D é o que melhor representa a situação.

Apesar de inicialmente parecer simples, essa técnica envolve a visualização e a interpretação do que é visto, por exemplo, se não compreender que, após a água atingir a altura do segundo cano, a medida da altura no reservatório 1 será constante até que o segundo reservatório esteja cheio na altura desse segundo cano. A partir desse momento, as alternativas C e D tornam possibilidades que mais se encaixam a nossas considerações. Bem como, análise e dedução informal para relacionar a Geometria com o gráfico de uma função, nesse caso, de acordo com as medidas da altura e do volume. Ao caracterizar elementos que formam uma praxeologia global, cujas teorias mobilizadas são a Geometria, de maneiras mais perceptível e a Álgebra de maneira intuitiva. Essa praxeologia pode ser considerada como um complemento ao nosso MPR, devido a forma como ela é caracterizada, uma vez que nas praxeologias do nosso modelo não apareceram situações como essa, que envolviam a análise de gráficos. Como mencionado anteriormente, os modelos estão em constante mudança e podem ser complementados a cada nova informação.

Nessas praxeologias analisadas, constatamos que são envolvidos três tipos de Geometrias (plana, espacial e métrica) para avaliar as competências de área 2 e 3 da Matriz de Referência do Enem: “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela; Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano” (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

Diante do número de tarefas analisadas nesta edição, decidimos criar Quadro 8 com um resumo do que foi solicitado em cada tarefa, os objetos não ostensivos geométricos³⁴ e objetos ostensivos e quais tipos de praxeologias essas tarefas pertencem.

³⁴ Optamos por apresentar apenas os objetos não ostensivos relacionados à Geometria, visto que nossa pesquisa tem como foco tratar dos sólidos geométricos e, assim, tornar mais claro quais conceitos geométricos foram mobilizados nas tarefas.

Quadro 8. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2017

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXEOLOGIA
1. Calcular o volume de água em uma piscina de base retangular e, a partir deste resultado, calcular a quantidade de produto a ser utilizado. Sendo que para cada 1000 litros de água são adicionados 1,5 mililitros do produto (CQR 137, p.16) ³⁵ .	Volume, prisma	Discurso	Global
2. Calcular o tempo de escoamento de uma piscina em forma de paralelepípedo retangular, dada a altura em 15cm e considerando o seu volume máximo com altura de 20cm (CQR 146, p.18).	Volume, altura e prisma	Discurso	Global
3. Calcular a área mínima de uma bandeja, em cm ² , para que quatro taças de base e borda superior, cujos raios medem respectivamente 4cm e 5cm, sejam organizadas em uma única fileira (CQR 148, p.19).	Área, circunferência, raio, planos	Discurso e imagem	Global
4. Escolher entre cinco caixas distintas, em qual é possível armazenar um objeto cúbico de 80cm de aresta, devendo sobrar o menor espaço livre, dadas as suas respectivas medidas de comprimento, largura e altura (CQR 150, p.19).	Aresta, prisma e volume	Discurso	Global
5. Nomear a forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas por meio de uma figura (CQR 152, p.20).	Reconhecimento e nomenclatura de sólidos	Discurso e imagem	Local
6. Dado o perímetro da base de um prisma retangular, calcular as medidas de comprimento e largura, de modo que a área da base seja máxima (CQR 158, p.22).	Prisma, perímetro, área, comprimento e largura	Discurso e imagem	Global
7. Escolher a esfera cujo diâmetro seja mais próximo da medida dada (CQR 160, p.23).	Diâmetro de uma esfera	Discurso e imagem	Local
8. Diante da secção de uma esfera e dada as medidas do seu diâmetro e do raio do seu paralelo, calcular a medida do segmento de reta que passa entre a superfície e o paralelo, cuja reta compreende o ponto central da esfera (CQR 171, p.27).	Paralelos, raios e diâmetro de uma esfera	Discurso e imagem	Global
9. Um caminhão transportando 3 tubos cilíndricos, dadas as medidas dos raios dos tubos, a altura do caminhão e distância mínima entre um viaduto e o caminhão, calcular a medida da altura mínima de um viaduto, para o caminhão passar embaixo (CQR 174, p.29).	Raio da base de um cilindro, altura, triângulo	Discurso e imagem	Global
10. Identificar qual gráfico representa a altura em função do volume de um reservatório de água, com formato de bloco retangular, que está sendo cheio (CQR 177, p.30).	Volume	Discurso e imagem	Global

Fonte: Brasil (2017a, p. 16 – 30).

³⁵ A sigla representa o Caderno de Questões Rosa (CQR), o número da referida questão e a página a qual foi retirada.

Como apresentado de forma resumida no Quadro 8, na edição 2017, a prova de primeira aplicação contém 10 tarefas justificadas pelos sólidos geométricos, nas quais, a maioria teve como objeto de estudo mobilizado, a medida de volume. Os outros objetos mobilizados foram as medidas de área e perímetro, projeção ortogonal, nomenclatura de um sólido e esfera.

Na prova de reaplicação, o número de tarefas encontradas foi menor, em apenas 3 (três) tarefas, foi possível identificarmos os sólidos geométricos como tema de estudo. Diante deste baixo quantitativo, consideramos pertinente apresentar todas as tarefas e suas possíveis técnicas. Na primeira tarefa, buscou-se avaliar a habilidade 9, relacionada à competência 2, a qual indica o uso de conhecimentos geométricos, tanto de espaço como de forma, para selecionar argumentos que possibilitem a solução de problemas do dia a dia (BRASIL, 2009a).

A primeira tarefa envolve uma praxeologia pontual, cujos conceitos mobilizados pelo candidato, estão presentes na nossa representação do MPR. Por meio da contextualização, é apresentada uma situação sobre a aparência de um cristal granada, cujo modelo ilustrativo criado por um mineralogista é semelhante a um poliedro convexo formado por 30 arestas e 20 vértices. Na tarefa, solicita-se que o número de faces desse poliedro seja identificado. Para encontrar a sua solução, basta aplicar a relação de Euler, válida para poliedros convexos, em que o número de vértices (V) somado ao número de faces (F) é igual ao número de arestas (A) mais dois. Ou seja, $V + F = A + 2$.

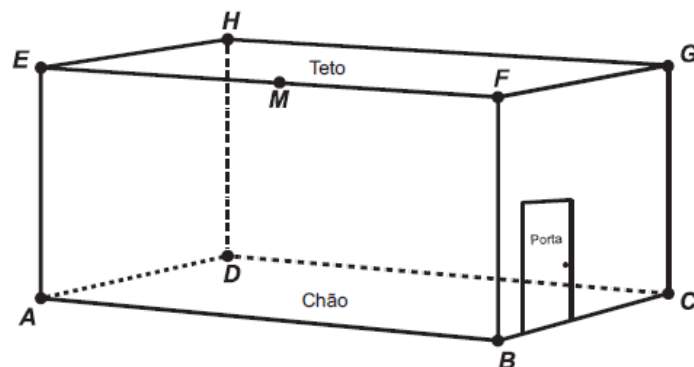
Logo, $20 + F = 30 + 2 \rightarrow F = 12$.

A segunda tarefa envolve a projeção ortogonal em um paralelepípedo retangular e posição relativa entre ponto, reta e plano. Praxeologias envolvendo tarefas como essa apareceram na análise dos livros didáticos e estão em conformidade com as contidas no nosso MPR. Podemos observar na Figura 18, o discurso do que é solicitado.

Figura 21. Questão 166 do Enem edição 2017, prova de reaplicação.

QUESTÃO 166

Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



A lagartixa parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento **EF**. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto **M** até o ponto **H**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

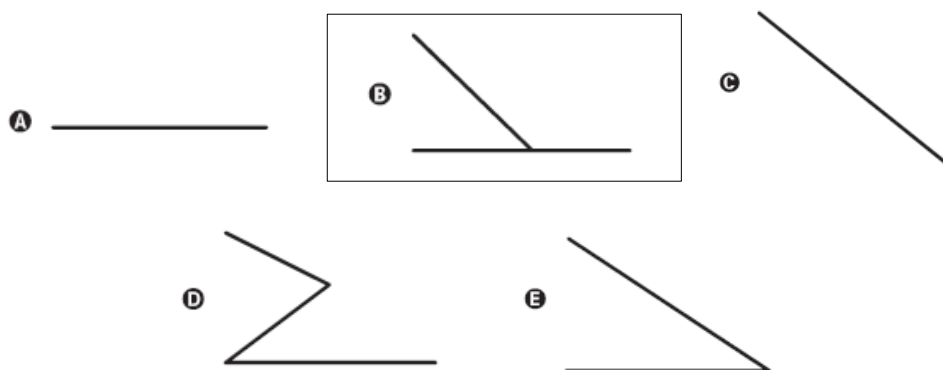
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

Fonte: Brasil (2017b, p. 27).

Ao analisar essa tarefa, observamos que ela é um elemento de uma praxeologia pontual e contempla a habilidade 6 da Matriz de Referência do Enem: “interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional” (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

Apesar de não envolver diversos conceitos da matemática ou tipos de tarefas que propõem calcular ou resolver, ao envolver a visualização e/ou propriedades com situações cotidianas podem promover um pensamento geométrico e ser mais significativas aos candidatos. Essa afirmação corrobora com as ideias de Chevallard (1999) sobre propor diversos gêneros de tarefas.

Figura 22. Alternativas da questão 166 do Enem edição 2017, prova de reaplicação



Fonte: Brasil (2017b, p. 27).

A técnica empregada envolve a abstração mental para imaginar a visão do quarto. Um ponto essencial é compreender que essa visão deve ser a partir do plano que contém o chão. Ao seguir as instruções dadas sobre o trajeto realizado pela lagartixa, podemos perceber que a representação do trajeto do ponto A ao ponto M se sobrepõe ao percurso anterior do ponto B ao ponto A. Justificada por conceitos como ponto, segmento de reta e projeção ortogonal, pertencentes à teoria Geometria. Diante desses dados, consideramos que tais técnicas são um dos elementos que fazem parte de uma praxeologia local.

Uma informação a ser considerada é que nessa tarefa, para quem vai respondê-la, faz-se necessário ter atenção sobre em qual dos planos a projeção ortogonal do deslocamento é pedida. Caso contrário, talvez por falta de atenção ou de interpretação do que é solicitado, pode haver um obstáculo epistemológico e não ser escolhida a alternativa correta, a letra B ilustrada na Figura 22. Como consta nos PCN+, as habilidades de ler e interpretar são importantes para a compreensão de problemas matemáticos. Como inferido por R. Santos (2014), após a aplicação de questões do Enem com alunos do 3º ano, ao analisar os erros desses alunos, percebeu-se a relação entre a dificuldade de interpretar e transpor a linguagem natural para a linguagem matemática.

Por fim, a última tarefa envolve o cálculo da medida de volume, ao questionar qual a capacidade de uma piscina olímpica que possui 50 metros de comprimento, 3 metros de profundidade e 10 raias medindo 2,5 metros cada. A primeira técnica a ser empregada é o cálculo para descobrir qual a largura desta piscina, neste caso, basta fazer a multiplicação entre o número de raias e a medida delas, $10 \cdot 2,5 = 25$.

Logo, a piscina tem 25 metros de largura. Em posse das medidas de comprimento, largura e profundidade da piscina, para encontrar a medida do volume, deve-se realizar a multiplicação dessas medidas. $50 \cdot 25 \cdot 3 = 3750$.

Portanto, a piscina possui capacidade de 3.750 m^3 .

Constituindo uma praxeologia global, visto que as técnicas utilizadas para resolver a tarefa proposta são justificadas por mais de uma tecnologia. Por sua vez, envolvem mais de uma teoria, a Geometria e a Aritmética, visto que se faz necessário o candidato mobilizar os conceitos de medidas de largura e volume, bem como operações entre números reais. Também constatamos que essa praxeologia está em conformidade com o que era esperado a partir do nosso MPR, em que a maioria das praxeologias eram compostas por tecnologias que envolviam o cálculo de medidas.

Nessa tarefa, são avaliadas as habilidades 8 e 12. Nelas, teve-se como objetivo avaliar a capacidade de resolver situações problemas envolvendo tanto os conhecimentos geométricos espaciais e planos, como as medidas de grandezas (BRASIL, 2009a).

Destacamos que nessa edição do Enem, entre as duas provas, de 90 (noventa) questões apenas 13 (treze) eram justificadas por objetos relacionados aos sólidos geométricos. Esse quantitativo contabiliza cerca de 14,4% do total de questões nesse ano. Infelizmente, não foi possível comparar os dados obtidos aqui com outros trabalhos, visto que, ao fazer nosso levantamento de textos no início desta pesquisa, nenhum dos que apareceram tratavam dessa edição da prova do Enem.

5.2 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2018)

Na primeira aplicação da prova edição 2018, encontramos apenas 3 (três) tarefas relacionadas aos sólidos geométricos. Na primeira delas, é apresentado um discurso em que um artesão precisa escolher entre cinco caixas em formato de paralelepípedo reto retângulo, dadas as suas medidas de comprimento, largura e altura. A caixa escolhida deve comportar o maior número de potes cilíndricos de tinta empilhados na vertical, cujas medidas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Por meio do discurso apresentado, são mobilizados os objetos geométricos não ostensivos (cilindros e prismas). A técnica que pode ser utilizada é realizar a divisão entre o comprimento da caixa e o diâmetro do

cilindro, entre a largura e o diâmetro e, depois, entre a altura da caixa e a altura do cilindro. Por fim, basta fazer a multiplicação entre os valores obtidos na divisão, arredondados e sem casas decimais, visto que se trata da quantidade de cilindros organizados e este deve ser um número natural. Assim, constituem uma praxeologia local, cujas habilidades da Matriz de Referência do Enem avaliadas são: 8 e 12, já citadas anteriormente no final da subseção anterior (5.1).

Na segunda tarefa, é apresentado o jogo virtual *Minecraft*, no qual, é possível para o jogador construir casas, edifícios, entre outras coisas. A situação problema é sobre um jogador que deseja construir um cubo de medidas $4 \times 4 \times 4$, cujo processo aparece iniciado. Por meio da visualização, deve-se escolher a peça que está faltando para completá-lo. Essa tarefa tem como objetos de estudo: projeção ortogonal, vistas laterais, frontais e superiores, com os quais identifica-se o que falta a ser preenchido. Por não necessitar de mais técnicas, classificamos como constituindo uma praxeologia pontual. É uma tarefa que chama nossa atenção por ter uma abordagem contextualizada com uma perspectiva mais próxima da realidade dos jovens, por se tratar de jogo virtual, popular entre os jovens. O que talvez, a proposta possa ter dado um significado positivo para os candidatos que fizeram a prova.

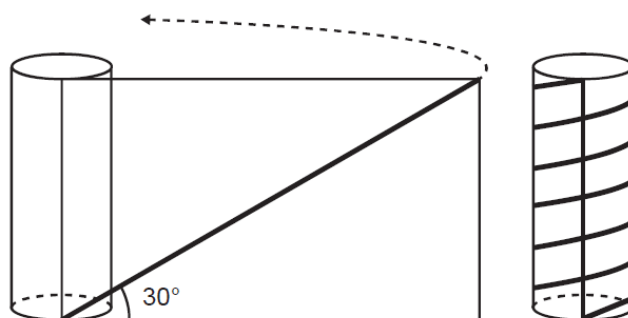
Na última tarefa, solicita-se que calculem a medida da altura do cilindro, dadas as informações contidas na Figura 23.

Figura 23. Questão 176 do Enem edição 2018, prova da 1ª aplicação.

QUESTÃO 176

Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao

enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



Fonte: Brasil (2018a, p. 30)

A partir da Figura 23, podemos identificar que a fita dá 6 voltas no cilindro, logo a medida da base do triângulo é seis vezes maior que a medida do comprimento da circunferência, ou seja: $6 \cdot 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 72$. Com esses dados, podemos calcular a tangente de 30° como a divisão entre a altura h e 72. Portanto, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{72} \leftrightarrow h = 24\sqrt{3}$.

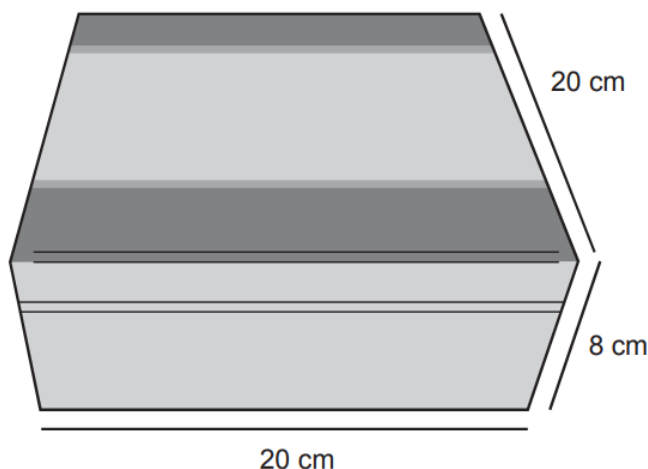
Deste modo, concluímos que essa tarefa integra uma praxeologia do tipo global. Nessa tarefa, as Geometrias (plana e espacial) são abordadas para avaliar a habilidade 7: “identificar características de figuras planas ou espaciais”, e habilidade 12: resolver situações que envolvam medidas de grandezas (Brasil, 2009a, s.n.p).

Na prova de reaplicação, encontramos apenas 5 tarefas sobre os sólidos geométricos, são elas 148;150; 167; 174 e 176.

Tarefas_{148,185}: Dadas as medidas de altura, comprimento, largura e espessura de uma caixa de madeira em forma de paralelepípedo reto-retângulo, calcular a medida do volume de madeira utilizado na construção da caixa.

Figura 24. Questão 148 do Enem edição 2018, prova da reaplicação.

Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.



Fonte: Brasil (2018b, p. 20)

Técnicas_{148.18s}: Para determinar a medida do volume de madeira utilizado na construção, deve-se considerar as medidas do volume total da caixa subtraído da medida do volume interno da caixa. $V_{\text{externo}} = 20 \cdot 20 \cdot 8 = 3200 \text{ cm}^3$. Conhecida a medida da espessura como 0,5 cm, teremos que as medidas internas de comprimento e largura serão $20-1=19\text{cm}$, respectivamente e a medida da altura, $8-1=7\text{cm}$. Assim, o volume do interior será dado por meio da multiplicação entre essas medidas. $V_{\text{interno}} = 19 \cdot 19 \cdot 7 = 2527 \text{ cm}^3$. Portanto, a medida do volume da madeira será $V_{\text{interno}} = 3200 - 2527 = 673 \text{ cm}^3$. Ao relacionarmos as teorias Aritmética e Geometria, nessa praxeologia global é exigida uma interpretação e abstração para compreender como a espessura da madeira pode interferir no cálculo das medidas de volume.

Tarefas_{150.18s}: Calcular as medidas de altura, comprimento e largura que uma caixa de papelão em forma de paralelepípedo reto-retângulo deve ter para embalar uma televisão, considerando que a televisão possui as respectivas medidas, 49,5cm; 67,5cm e 18cm. Além disso, a caixa deve deixar uma folga de 5cm em cada dimensão para a colocação de um isopor e a espessura do papelão é 0,5cm. A partir dessas condições, escolher entre os cinco protótipos de caixas o que comporta as especificações para embalar a televisão.

Técnicas_{150.18s}: Para solucionar essa tarefa, basta somar a cada uma das medidas da televisão 5,5 cm, equivalente às medidas da folga para colocar o isopor e a espessura

do papelão. Ao fazer isso, a caixa deverá ter 73cm de comprimento, 55cm de altura e 23,5 de largura, correspondendo às medidas da caixa 4.

Apesar de simples, consideramos uma praxeologia global composta por diversas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Figura 25. Questão 167 do Enem edição 2018, prova da reaplicação

QUESTÃO 167

A figura mostra uma anticlépsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlépsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.



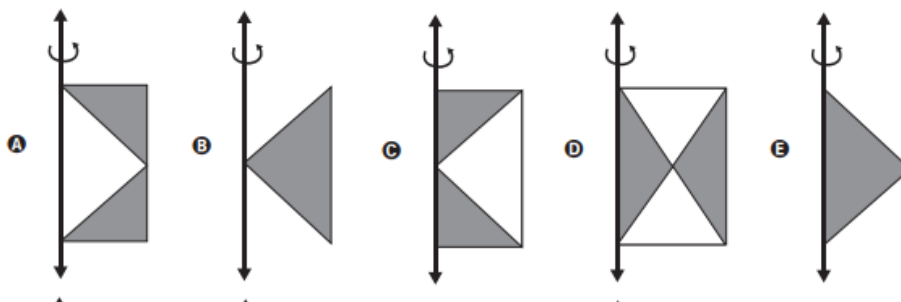
Disponível em: www.klickeducacao.com.br. Acesso em: 12 dez. 2012 (adaptado).

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlépsidra como a da figura acima é

Fonte: Brasil (2018b, p. 26)

Tarefas_{167.18s}: Identificar a figura plana que, ao ser rotacionada em torno do eixo indicado, resulta em uma anticlépsidra.

Figura 26. Alternativas da questão 167 do Enem edição 2018, prova de reaplicação



Fonte: Brasil (2018b, p. 26)

Técnicas_{167.18s}: Por meio da visualização e partindo da ideia de eixo de rotação de um sólido de revolução, basta identificar na primeira figura qual seria esse eixo. Além disso, quais regiões estão com cores escuras e claras. Por fim, a letra b seria a opção que se encaixa nos termos citados. Para aplicar essa técnica, se faz necessário o

candidato mobilizar apenas conceitos geométricos sobre os sólidos de revolução e vistas, por sua vez constituindo uma praxeologia regional.

De modo geral, as tarefas que envolvem vistas se restringem a trabalhar os conceitos geométricos, sem necessariamente envolver outras teorias. Em contraponto a isso, a questão 174 envolve as frações (teoria - Aritmética) para relacionar a ideia de giro de $\frac{1}{4}$ de uma volta (teorias – Aritmética e Geometria), para justificar a técnica utilizada.

Tarefas_{174.18s}: Identificar qual figura representa a projeção ortogonal formada pela maçaneta de uma torneira ao ser aberta, em relação à parede, ao realizar um giro de $\frac{1}{4}$ de volta.

Técnicas_{174.18s}: Para realizar a tarefa determinada, deve-se fazer a abstração mental das orientações dadas para, a partir disso, identificar qual imagem melhor representa a projeção ortogonal formada.

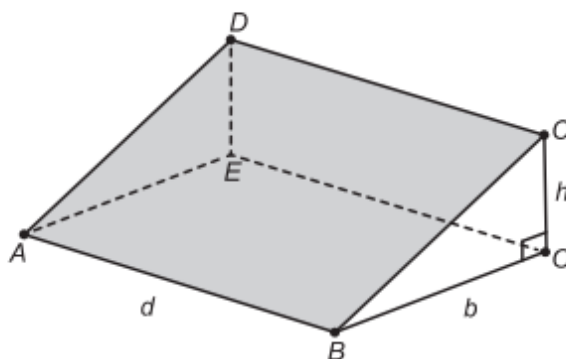
Observa-se a partir dessas tarefas e técnicas da questão anterior (174.18s), há uma praxeologia global, pela qual, o candidato teria que mobilizar diferentes tecnologias para justificar as técnicas necessárias para obtenção da resolução. Em outras palavras, precisa-se aplicar técnicas que envolvem os conceitos de fração, projeção ortogonal, giro, semicírculo e ângulo, visto que esses conceitos fazem parte de distintas teorias – Aritmética e Geometria.

Tarefas_{176.18s}: Dada as medidas de uma das arestas, uma fórmula representando a inclinação e outra para o número de telhas, em formato de um prisma de base triangular, calcular a quantidade mínima de telhas a serem adquiridas.

Figura 27. Questão 176 do Enem edição 2018, prova de reaplicação

QUESTÃO 176

A inclinação de um telhado depende do tipo e da marca das telhas escolhidas. A figura é o esboço do telhado da casa de um específico proprietário. As telhas serão apoiadas sobre a superfície quadrada plana $ABCD$, sendo BOC um triângulo retângulo em O . Sabe-se que h é a altura do telhado em relação ao forro da casa (a figura plana $ABOE$), $b = 10$ é o comprimento do segmento OB , e d é a largura do telhado (segmento AB), todas as medidas dadas em metro.



Disponível em: www.toptelha.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Sabe-se que, em função do tipo de telha escolhida pelo proprietário, a porcentagem i de inclinação ideal do telhado, descrita por meio da relação $i = \frac{h \times 100}{b}$, é de 40%, e que a expressão que determina o número N de telhas necessárias na cobertura é dada por $N = d^2 \times 10,5$. Além disso, essas telhas são vendidas somente em milheiros.

O proprietário avalia ser fundamental respeitar a inclinação ideal informada pelo fabricante, por isso argumenta ser necessário adquirir a quantidade mínima de telhas correspondente a

Fonte: Brasil (2018b, p. 30)

Técnicas_{176.18s}: Para descobrir a quantidade de telhas, primeiro devemos calcular a medida de h , levando em consideração as informações dadas no enunciado, termos

$$i = \frac{h \cdot 100}{b}, i = 0,4; b = 10 \rightarrow 0,4 = \frac{h \cdot 100}{10} \rightarrow h = 0,04.$$

Como a superfície $ABCD$ é quadrada, a medida do lado BC será igual a d . Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas do triângulo retângulo BOC e descobrir a medida de d^2 , teremos

$$d^2 = b^2 + h^2 \rightarrow d^2 = 10^2 + 0,04^2 \rightarrow d^2 = 100 + 0,0016 \rightarrow d^2 = 100,0016$$

O número de telhas será $N = d^2 \cdot 10,5 \rightarrow N = 100,0016 \cdot 10,5 \rightarrow N = 1050,0168$. Portanto, a quantidade de telhas necessárias estará entre 1000 e 2000, ou seja, como as telhas são vendidas em milheiros, o proprietário precisará comprar 2 milheiros.

As técnicas mencionadas para resolver a questão (176.18s) são justificadas por conceitos como equação, Teorema de Pitágoras, figuras planas, entre outros. Assim, esses conceitos vivem em teorias como Geometria, Aritmética e Álgebra. Dito isso, podemos considerá-los como constituintes de uma praxeologia global.

Por conseguinte, o Quadro 9 apresenta um resumo das tarefas e os objetos não ostensivos geométricos mobilizados pelos objetos ostensivos presentes nas questões da prova de segunda aplicação do Enem, edição 2018.

Quadro 9. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2018

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXELOGIAS
11. Dadas as medidas de altura, comprimento, largura e espessura de uma caixa de madeira em forma de paralelepípedo reto-retângulo, calcular a medida do volume de madeira utilizado na construção da caixa (CQR 148, p.20).	Medidas de altura, comprimento, largura, espessura e volume, paralelepípedo reto-retângulo	Discurso e imagem	Global
12. Escolher entre os cinco protótipos de caixas de papelão em forma de paralelepípedo reto-retângulo, dadas as medidas de altura, comprimento, largura e espessura de cada uma, a que comporta as especificações para embalar uma televisão (CQR 150, p.21).	Medidas de altura, comprimento, largura e espessura, paralelepípedo reto-retângulo	Discurso e imagem	Global
13. Identificar a figura plana que ao ser rotacionada em torno do eixo indicado, resulta em uma anticlépsidra ³⁶ (CQR 167, p.26).	Sólido de revolução	Discurso e imagem	Regional
14. Identificar qual figura representa a projeção ortogonal formada pela maçaneta de uma torneira ao ser aberta, em relação à parede (CQR 174, p.29).	Projeção ortogonal	Discurso e imagem	Global
15. Dada uma telha em formato de um prisma de base triangular, cujas medidas de uma das arestas, uma fórmula representando a inclinação e outra para o número de telhas necessárias, calcular a quantidade mínima de telhas que devem ser adquiridas (CQR 176, p.30).	Aresta, ângulo, teorema de Pitágoras	Discurso e imagem	Global

Fonte: Brasil (2018b, p. 20 – 30).

³⁶ De acordo com o texto de apoio na questão 167, “é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro” (BRASIL, 2018b, p.26).

Pelas informações contidas no Quadro 9, podemos observar que os objetos ostensivos, o discurso e as imagens, foram utilizados em todas as praxeologias analisadas nessa prova. Também podemos considerar que as cinco tarefas são diferentes, apesar de, em duas delas, ser necessário cada candidato mobilizar os mesmos objetos não ostensivos. Destacamos a questão 14, por mobilizar o conceito de sólidos de revolução, visto que é a única a tratar deste conceito entre todas as edições analisadas.

Com um quantitativo total menor que a edição anterior, a edição de 2018 contempla apenas 8 (oito) praxeologias matemáticas, avaliando as competências de área 2 – “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela” e 3 – “Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano” (BRASIL, s.n.p.).

Apenas a praxeologia regional que aparece se restringe a abordar tecnologias pertencentes a teoria Geometria. As demais envolvem, além da Geometria, Aritmética e/ou Álgebra, sendo portanto, classificadas como globais. Apesar de analisarmos contextualizações diferentes sobre objetos geométricos para a construção do nosso Modelo Praxeológico de Referência, consideramos que tais praxeologias identificadas nessa edição 2018, assemelham-se as do nosso modelo. Também ressaltamos o fato de encontrar essas praxeologias regional e globais ter sido o esperado, visto que os conceitos presentes nas praxeologias contidas em nosso MPR também podem ser abordados mais sob estruturas algébricas do que representações geométricas. O que se confirma ao exposto no início do nosso estudo, quanto à problemática sobre o ensino de Geometria – uma de suas causas ser a algebrização como modelo de abordagem de seus objetos de conhecimento. Dentre os estudos, como o de Pavanello (1993), eles apontam que esse processo de algebrização ocorre desde o Movimento da Matemática Moderna (MMM) e conforme constatado por Nadalon (2015), o ensino dos sólidos no ensino médio é mais voltado ao cálculo de medidas.

5.3 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2019)

A edição do ano de 2019 é a última a ter apenas a primeira aplicação e a reaplicação, ou segunda aplicação. Na primeira prova, analisamos 4 (quatro) tarefas e, assim como nas provas anteriores, decidimos apresentá-las por meio de um quadro

(Quadro 10). Todas as tarefas se apoiam no uso do discurso e das imagens como objetos ostensivos.

Quadro 10. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2019

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXELOGIAS
16. Um reservatório central conectado a quatro reservatórios auxiliares, todos cilíndricos, cujas medidas de raio e altura são dadas. Calcular a medida em metros da altura das colunas de água nos reservatórios auxiliares (CQR 138, p.18).	Cilindro, medidas de altura, raio e volume	Discurso e imagem	Global
17. Identificar qual figura representa a sombra projetada de uma placa suspensa por cabos (CQR 142, p.20).	Projeção ortogonal	Discurso e imagem	Local
18. Dado um tetraedro seccionado, identificar quantas e quais figuras planas representa as suas faces (CQR 165, p.26).	Pirâmide, tronco de uma pirâmide, poliedro regular, faces, figuras planas	Discurso e imagem	Regional
19. Calcular a quantidade de caminhões e as capacidades máximas necessárias para preencher uma laje, cujas medidas de comprimentos, larguras e espessura são dadas (CQR 175, p.30).	Medidas de comprimento, largura, espessura e volume, figuras planas	Discurso e imagem	Global

Fonte: Brasil (2019, p. 18 – 30).

A partir desse quadro, descrevemos as praxeologias correspondentes a cada uma das quatro tarefas:

Tarefas_{138.19p}: Um reservatório central conectado a quatro reservatórios auxiliares por canos, todos cilíndricos, cujas medidas de raio, altura e comprimento são dadas. Calcular a medida em metros da altura das colunas de água nos reservatórios auxiliares.

Técnicas_{138.19p}: Para descobrir a medida das alturas dos reservatórios menores após cessar o fluxo de água entre os reservatórios, podemos considerar que a medida do volume total do reservatório central será igual à soma das medidas de volume dos canos cilíndricos, dos reservatórios auxiliares e do volume restante no reservatório central,

sendo os dois últimos com a mesma altura, devido ao princípio dos vasos comunicantes. Logo, a medida do volume total do reservatório central é $V_{RC} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V_{RC} = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 \rightarrow V_{RC} = 13,2\pi$. A medida do volume dos quatro canos será dada por $V_{canos} = 4\pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V_{canos} = 4\pi \cdot 0,05^2 \cdot 20 \rightarrow V_{canos} = \pi \cdot 0,0025 \cdot 80 \rightarrow V_{canos} = 0,2\pi$. A partir desses dados, temos que $V_{RC} = V_{canos} + V_{RA} + V_{Rr} \rightarrow 13,2\pi = 0,2\pi + 4\pi \cdot 1,5^2 \cdot h + 4\pi h \rightarrow 13\pi = 4\pi \cdot 2,25h + 4\pi h \rightarrow 13\pi = 13\pi h \rightarrow h = 1$. Portanto, a medida da altura das colunas de água nos reservatórios auxiliares será 1m.

Essas tarefas e técnicas constituem uma praxeologia global, cujos conceitos mobilizados pertencem a mais de uma teoria como na maioria das praxeologias analisadas, até o momento.

Tarefas_{142.19p}: Identificar qual figura representa a sombra projetada de uma placa com a palavra PINE suspensa por cabos, no horário de meio-dia.

Técnicas_{142.19p}: Para cumprir a tarefa mencionada, deve-se compreender como o formato das letras e os espaços entre elas influencia na sombra projetada no solo. Para então, identificar qual das opções dadas é a que representa essa projeção.

Como a maioria das tarefas analisadas, que são justificadas por tecnologias envolvendo o conceito de projeção ortogonal, bem como, o que encontramos durante a construção do nosso Modelo Praxeológico de Referência, costumam viver apenas no campo da Geometria. Por sua vez, constituindo praxeologias pontuais ou locais.

Tarefas_{165.19p}: Dado um tetraedro, identificar quantas e quais figuras planas representam as suas faces ao seccioná-lo em $1/3$ das suas medidas de aresta.

Técnicas_{165.19p}: Ao realizar a abstração mental de como seria o tetraedro (pirâmide de base triangular) seccionado, o novo sólido seria formado por 4 triângulos equiláteros, formados pelos vértices retirados, e 4 hexágonos regulares das faces do tetraedro original.

Como a tarefa proposta é acompanhada pelo discurso explicando o que será pedido e a imagem ilustrando uma das secções, mesmo que o candidato não tenha muito conhecimento sobre o que são as arestas de um sólido geométrico, os dois recursos mencionados possibilitam o momento de abstração das demais secções.

Por envolver mais de uma tarefa e técnica, contudo justificada por tecnologias atreladas aos conceitos de figuras espaciais e planas, os quais vivem na teoria Geometria, consideramos que esses 4t's compõem uma praxeologia regional.

Tarefas_{175.19p}: Calcular a quantidade de caminhões e as capacidades máximas necessárias para preencher uma laje, cujas medidas de comprimentos, larguras e espessura são dadas.

Técnicas_{175.19p}: o primeiro passo é decompor a figura que representa a laje em três retângulos, cujas medidas das respectivas áreas são 64m^2 , 21m^2 e 15m^2 , a soma dessas medidas resulta na medida de área total da laje, 100m^2 . ao usarmos o Princípio de Cavalieri, temos que o volume será dado pela multiplicação entre as medidas da área figura e da altura (espessura da laje). Contudo, antes é necessário converter a medida da espessura de cm para m, 5cm equivale a 0,05m e a medida do volume será

$$V = 100 \cdot 0,05 = 5\text{m}^3$$

Como os caminhões disponíveis possuem medidas de capacidade 2m^3 , 5m^3 e 10m^3 de concreto, para essa laje será necessário apenas um caminhão de 5m^3 .

Ao serem justificadas por conceitos como medidas de volume e operações entre números reais, que vivem nas teorias da Geometria e Aritmética, essas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias compõem uma praxeologia global.

Entre as tarefas analisadas, as Tarefas_{165.19p} nos chamaram atenção por tratar apenas das Geometrias plana e espacial. As tarefas são para identificar e nomear as figuras planas que representam as faces de um tetraedro seccionado. De maneira similar ao constatado na construção do nosso MPR, ao analisar as provas, percebemos que a maioria dos objetos não ostensivos mobilizados nas tarefas fazia parte da Geometria métrica. Apenas em alguns casos não foram abordam as medidas, como o da tarefa mencionada.

Ainda nessa edição 2019, na prova da segunda aplicação identificamos 8 (oito) tarefas, elas são referentes às questões: 144, 146, 148, 150, 151, 175, 176 e 180. É válido ressaltar que nenhuma dessas tarefas foram justificadas pelo conceito de projeção ortogonal. Entre as provas selecionadas para esta pesquisa, a prova de primeira aplicação da edição 2019 foi a única prova sem contemplar tal objeto geométrico. Por causa dos tipos de praxeologias encontradas, diferentemente das subseções anteriores, nesta apresentaremos as tarefas e respectivas técnicas, após isso, resumiremos parte das informações em um quadro e teceremos nossos comentários.

Tarefas_{148.19s}: Em um copo cilíndrico (com medidas de altura, 15cm, e diâmetro, 6cm), há três cubos de gelo (arestas medindo 2cm) e duas rodela de limão (4cm de

diâmetro e 0,5cm de espessura). De acordo com essas informações, calcular o volume máximo de refrigerante no copo.

Técnicas_{148.19s}: Para saber quanto de refrigerante é possível preencher o copo, antes, é preciso saber as medidas de volumes do copo, dos cubos de gelo e das rodela de limão.

$$V_{\text{copo}} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{copo}} \rightarrow V_{\text{copo}} = 3 \cdot 3^2 \cdot 15 \rightarrow V_{\text{copo}} = 3 \cdot 9 \cdot 15 \rightarrow V_{\text{copo}} = 405\text{cm}^3$$

$$V_{\text{gelo}} = c \cdot l \cdot h_{\text{gelo}} \rightarrow V_{\text{gelo}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow V_{\text{gelo}} = 8\text{cm}^3$$

$$V_{\text{limão}} = \pi \cdot r_{\text{limão}}^2 \cdot h_{\text{limão}} \rightarrow V_{\text{limão}} = 3 \cdot 4^2 \cdot 0,5 \rightarrow V_{\text{limão}} = 3 \cdot 16 \cdot 0,5 \rightarrow V_{\text{limão}} = 6\text{cm}^3.$$

A quantidade de refrigerante será descoberta por meio da subtração entre a medida de volume total do copo e as medidas de volume dos três cubos de gelo e das duas rodela de limão. Logo, $V_{\text{refrigerante}} = V_{\text{copo}} - 3V_{\text{gelo}} - 2V_{\text{limão}} \rightarrow V_{\text{refrigerante}} = 405 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 6 \rightarrow V_{\text{refrigerante}} = 405 - 24 - 12 \rightarrow V_{\text{refrigerante}} = 369\text{cm}^3$.

Tarefas_{150.19s}: Calcular a quantidade mínima de pedrinhas devem ser compradas para colocar em um vaso de planta com formato de paralelepípedo retangular, dadas as medidas de altura, comprimento e largura do vaso (60cm, 40cm e 35cm, respectivamente) e de volume das pedrinhas (100cm³), cujo vaso deve ser preenchido pela metade por água que deve ficar a 10cm do topo do vaso.

Técnicas_{150.19s}: A quantidade de pedrinhas será descoberta após o cálculo da medida de volume do vaso, $V_{\text{vaso}} = c \cdot l \cdot h \rightarrow V_{\text{vaso}} = 40 \cdot 35 \cdot 60 \rightarrow V_{\text{vaso}} = 84000\text{cm}^3$. Como o vaso desse ser cheio pela metade com água, devemos dividir a medida encontrada por 2. Assim, essa medida será de 42000cm³. Ao considerarmos que a água deve estar a 10cm do topo então, o volume do vaso preenchido pela água e pedrinhas será $V_{a,p} = 40 \cdot 35 \cdot 50 \rightarrow V_{a,p} = 70000\text{cm}^3$. Como 42000cm³ desse volume é apenas água, a subtração entre essas medidas será a medida do volume das pedrinhas, $V_p = V_{a,p} - V_a \rightarrow V_p = 70000 - 42000 \rightarrow V_p = 28000\text{cm}^3$. Portanto, se essa é a medida do volume das pedrinhas, para descobrir a quantidade mínima delas, basta realizar a divisão entre essa medida e a medida do volume de apenas uma pedrinha, dada a proporcionalidade dessas medidas. Logo, $P = \frac{V_p}{V_{1p}} \rightarrow P = \frac{28000}{100} \rightarrow P = 280$. Portanto, há no mínimo 280 pedrinhas no vaso.

Tarefas_{151.19s}: Identificar entre cinco contêineres, qual deles atende as necessidades de um cliente, que tenha largura 40% maior e comprimento 20% menor que o modelo padrão, cujas medidas de altura, largura e comprimento são 2,4m; 3m e 7m, respectivamente.

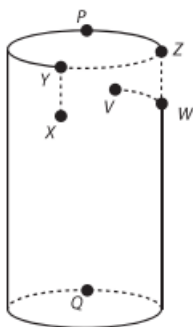
Técnicas_{151.19s}: Para escolher o contêiner que se encaixa no pedido realizado pelo cliente, temos que descobrir quanto são as medidas de largura e comprimento escolhidas. Assim, 40% de $3m = 3 \cdot \frac{40}{100} = 1,2m$, ou seja, a medida da largura será $3 + 1,2 = 4,2m$. Para a medida do comprimento, 20% de $7m = 7 \cdot \frac{20}{100} = 1,4m$, ela será $7 - 1,4 = 5,6m$. Por fim, basta olhar a tabela em que contém os diversos modelos e escolher o que se enquadra nessas medidas encontradas.

Tarefas_{175.19s}: Identificar a figura que representa o trajeto de uma formiga em um copo cilíndrico, a partir da planificação da superfície lateral.

Figura 28. Questão 175 do Enem edição 2019, prova da reaplicação

Questão 175

Uma formiga encontra-se no ponto X , no lado externo de um copo que tem a forma de um cilindro reto. No lado interno, no ponto V , existe um grão de açúcar preso na parede do copo. A formiga segue o caminho $XYZWV$ (sempre sobre a superfície lateral do copo), de tal forma que os trechos ZW e WV são realizados na superfície interna do copo. O caminho $XYZWV$ é mostrado na figura.



Sabe-se que: os pontos X , V , W se encontram à mesma distância da borda; o trajeto WV é o mais curto possível; os trajetos XY e ZW são perpendiculares à borda do copo; e os pontos X e V se encontram diametralmente opostos.

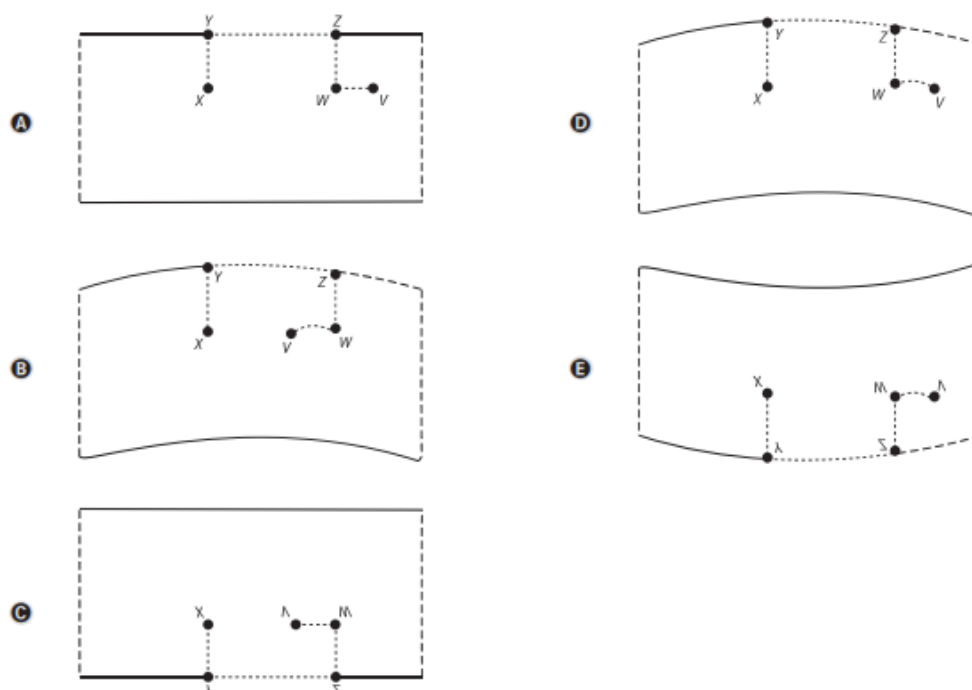
Supondo que o copo é de material recortável, realiza-se um corte pelo segmento unindo P a Q , perpendicular à borda do copo, e recorta-se também sua base, obtendo então uma figura plana. Desconsidere a espessura do copo.

Considerando apenas a planificação da superfície lateral do copo, a trajetória da formiga é

Fonte: Brasil (2019a, p. 29).

Técnicas_{175.19s}: Dadas as informações mencionadas, para identificar qual o caminho percorrido pela formiga, deve-se fazer mentalmente a planificação do cilindro reto representado sem a sua base, visto que ela foi recortada. Neste primeiro momento, é possível eliminar as alternativas B, D e E, uma vez que as representações nessas alternativas não correspondem a retângulos e possuem seus lados curvos.

Figura 29. Alternativas da questão 175 do Enem edição 2019, prova da reaplicação



Fonte: Brasil (2019a, p. 29).

No segundo momento, deve-se comparar a base do cilindro representado e a curvatura do trajeto WV, para identificar a direção em que os pontos V e W estão. A partir disso e dos pontos em que o copo é cortado, ao fazer novamente a abstração mental da planificação do cilindro, é possível identificar a alternativa A como a que melhor representa a situação descrita.

Tarefas_{176.19s}: Entre cinco lojas, escolher a que apresenta os menores preços por comprimento de peças de decoração para cinco pilastras cilíndricas, cujas medidas do raio das bases é 10cm, de modo que cada uma tenha seis faixas de cor preta e cinco faixas de cor branca (CQR 176, p.30).

Técnicas_{176.19s}: Cada pilastra, tem como medida do comprimento 60cm, a qual pode ser descoberta por meio do cálculo, $c = 2\pi r \rightarrow c = 2 \cdot 3 \cdot 10 \rightarrow c = 60cm$. Como cada pilastra precisa de 6 faixas pretas e 5 brancas, no total 11 faixas, então para cobrir o cilindro são necessários $60 \cdot 11 = 660cm$. Portanto, para as cinco pilastras serão necessários $660 \cdot 5 = 3300cm$. Com a tabela de preços, precisamos descobrir quantas peças seriam necessárias em cada loja e qual o valor pago.

Figura 30. Tabela da questão 176 do Enem edição 2019, prova de reaplicação

Loja	Comprimento da peça (em metro)	Preço da peça (em real)
I	3	11,00
II	7	19,00
III	10	33,00
IV	14	37,00
V	22	61,00

Fonte: Brasil (2019a, p. 30).

Para isto, converteremos a medida das peças de metros para cm e dividir a quantidade de cm necessários para as peças, 3300cm, pela medida vendida, para depois multiplicar pelo preço da peça.

- Loja I, $\frac{3300}{300} = 11$, ou seja, precisa comprar 11 peças por $11 \cdot 11 = 121$ reais.
- Loja II, $\frac{3300}{700} = 4$ e resto 500, ou seja, 4 peças não serão suficientes e precisará de uma quinta peça, custando $5 \cdot 19 = 95$ reais.
- Loja III, $\frac{3300}{1000} = 3$ e resto 300, precisará de 4 peças. Logo, $4 \cdot 33 = 132$ reais.
- Loja IV, $\frac{3300}{1400} = 2$ e resto 500, são necessárias 3 peças. Logo, $3 \cdot 37 = 111$ reais.
- Loja V, $\frac{3300}{2200} = 1$ e resto 1100, com 2 peças, serão pagos $2 \cdot 61 = 122$ reais.

Portanto, na Loja II será pago o menor valor.

Nessa tarefa é possível associar os conceitos básicos de Educação Financeira (como relação de compra e venda de produtos) e a Geometria. A técnica adotada para a sua resolução é justificada por conceitos geométricos e aritméticos, como as medidas de comprimento e raio, proporcionalidade e operações básicas. Desta forma, caracterizamos que essas tarefas e técnicas compõem uma praxeologia global.

A seguir, é possível observar no Quadro 11 uma síntese de todas as tarefas analisadas, contidas na prova, além das exemplificadas. No referido quadro, há um resumo das tarefas, objetos não ostensivos geométricos, objetos ostensivos e as praxeologias as quais se referem.

Quadro 11. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2019

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXELOGIAS
20. Ao comparar o formato da Terra à uma esfera, calcular quantos quilômetros um navio percorre ao viajar por determinado percurso (CQR 144, p.19).	Esfera e seus elementos, medida de ângulo, raio, comprimento e latitude	Discurso e imagem	Global
21. Identificar qual expressão representa a relação entre os vértices, faces e arestas de um poliedro não convexo, que obedece a relação de Euler (CQR 146, p.20).	Poliedro não convexo, vértices, faces e arestas	Discurso e imagem	Global
22. Calcular o volume máximo de refrigerante em um copo cilíndrico, dadas as suas medidas de altura, raio e espessura, contendo cubos de gelo e limão (CQR 148, p.20).	Circunferência, cilindro, cubo, medidas de volume, área e raio	Discurso	Global
23. Calcular quantas pedrinhas devem ser compradas para colocar em um vaso de planta com formato de paralelepípedo retangular, dadas as medidas de altura, comprimento e largura do vaso, e de volume das pedrinhas (CQR 150, p.21).	Paralelepípedo retangular, medidas de altura, comprimento, largura e volume	Discurso	Global
24. Identificar entre cinco contêineres, qual atende as necessidades de um cliente, dadas as medidas de altura, largura e comprimento (CQR 151, p.21).	Prisma, medidas de altura, largura e comprimento	Discurso, imagem e quadro	Global
25. Identificar a figura que representa o trajeto de uma formiga em um copo cilíndrico, a partir da planificação da superfície lateral (CQR 175, p.29).	Cilindro, planificação de uma superfície	Discurso e imagem	Local
26. Entre cinco lojas, escolher a que apresenta os menores preços por comprimento de peças de decoração para cinco pilastras cilíndricas, cujas medidas do raio das bases é 10cm, de modo que cada uma tenha seis faixas de cor preta e cinco faixas de cor branca (CQR 176, p.30).	Cilindro, medidas de comprimento e raio	Discurso, imagem e quadro	Global
27. Escolher entre os cinco modelos de caixa (paralelepípedo reto retângulo), o que pode embalar um objeto esférico (CQR 180, p.31).	Prisma, esfera, sólido inscrito, volume	Discurso e quadro	Global

Fonte: Brasil (2019a, p. 19-31)

Identificamos entre as nossas análises apenas uma praxeologia local, nela avaliou-se a interpretação da localização da formiga e a sua movimentação no copo. Além da representação desse trajeto no espaço bidimensional, exigindo do candidato um nível de abstração mental e transposição entre uma figura espacial e a sua planificação.

Enquanto as outras sete praxeologias foram do tipo global, mobilizando na sua maioria a relação entre a Geometria métrica e a Álgebra e/ou Aritmética. Bem como esperado após a criação do nosso Modelo Praxeológico de Referência, o qual nas praxeologias prevaleciam as tarefas que envolviam o cálculo de medidas.

Nas tarefas apresentadas, há tarefas que utilizam quadros como objetos ostensivos, além dos objetos citados anteriormente, discurso e imagens. As Tarefas 22 (Tarefas_{148.19s}) e 23 (Tarefas_{150.19s}) são acompanhadas apenas do discurso, sem uma imagem para ilustração das figuras descritas, o que se torna necessário, para os alunos, ter certo grau de abstração e conhecimentos das propriedades geométricas para a resolução delas. Além disso, entre os objetos não ostensivos mobilizados, ressalta-se entre eles, o poliedro não convexo, na Tarefa 21, e a planificação de um sólido, na Tarefa 25 (Tarefas_{175.19s}). Também, objetos só identificados nessas duas tarefas.

Assim como proposto pelo livro didático #Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016), na Tarefa 20 é realizada a comparação entre os formatos da Terra e da esfera, como forma de contextualizar esse sólido. O discurso apresentado faz relação entre alguns elementos da esfera e conceitos geográficos, seguindo as propostas dos PCNEM acerca da contextualização e, uma possível tentativa, de interdisciplinaridade.

5.4 A PRESENÇA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM PROVAS DO ENEM (EDIÇÃO 2020)

Nessa edição, na primeira aplicação foram localizadas 10 (dez) tarefas entre 45 questões (136; 141; 150; 154; 158; 163; 166; 168; 169; 178). A forma como a maioria dos sólidos geométricos aparece não se diferencia das demais provas. No entanto, inclui-se aos sólidos representados, o tronco reto de uma pirâmide de base quadrada. Na tarefa, a qual essa figura espacial é representada, pede-se para identificar quantas e quais figuras planas compõem esse tronco reto da pirâmide. A forma geométrica é relacionada há uma obra arquitetônica, uma forma de abordar os conceitos de sólidos geométricos, muito utilizada nos livros didáticos analisados.

Escolhemos apresentar, como, exemplificação apenas as tarefas referentes às questões 136; 150; 166; 168; 170. Assim como ocorreu na subseção anterior, optamos por tecer nossos comentários apenas após as tarefas e técnicas.

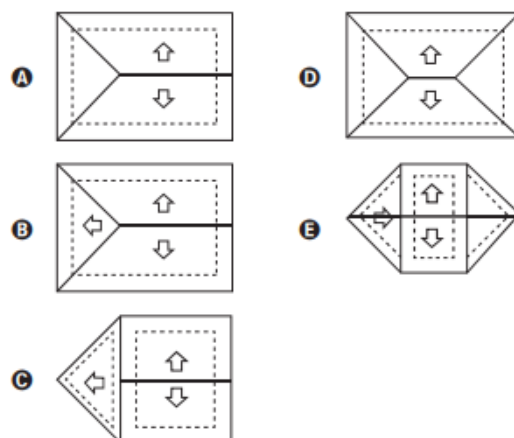
Figura 31. Questão 136 do Enem edição 2020, prova de primeira aplicação

Questão 136

A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.



A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é



Fonte: Brasil (2020, p. 16)

Tarefas_{136. 20p}: Identificar qual figura representa o escoamento da água no telhado de uma casa a partir da vista superior.

Técnicas_{136. 20p}: Somos apresentados a algumas informações que devem ser levadas em consideração, como a casa precisar ter 3 caídas de água. Dito isso, podemos inferir que as alternativas D e E não são válidas, visto que há mais de 3 caídas de água. Outro ponto a ser observado é a representação da casa na figura 1 (do caderno de questões) e como seria sua planta do escoamento da água, nela a visão de cima da casa forma um retângulo. A planta da outra casa deve considerar isso e como ficaria a terceira caída. Assim, é mantida a representação de um retângulo contudo, decomposto por um triângulo e outros dois retângulos menores, tornando a alternativa C incorreta.

Por fim, a direção do escoamento da água nas três quedas d'água que não aparecem na alternativa A, consolida a alternativa B como a que mais se encaixa no que é solicitado.

Tarefas_{154.20p}: Descobrir o raio de uma caixa-d'água cilíndrica (B), considerando outra caixa-d'água cilíndrica (A), de raio R, com mesma medida de volume e a medida da altura da caixa-d'água B é igual a 25% da caixa-d'água A. (CQR 154, p.22).

Técnicas_{154.20p}: Sabendo que o volume do cilindro pode ser descoberto por meio do Princípio Cavalieri, em que $V_{cilindro} = A_{base} \cdot Altura$. Essa área da base é dada pela fórmula $A_{base} = \pi R^2$, logo, $V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot Altura$. De acordo com o enunciado, a medida da altura da caixa-d'água B é igual a 25% da caixa-d'água A, ou seja, $Altura_B = \frac{25}{100} \cdot Altura_A \rightarrow Altura_B = \frac{1}{4} \cdot Altura_A$. Assim, a medida do volume da caixa-d'água A é dada por $V_{cilindro A} = \pi R_A^2 \cdot Altura_A$ e da caixa-d'água B, $V_{cilindro B} = \pi R_B^2 \cdot Altura_B$. Como a medida desses volumes são iguais e $Altura_B = \frac{1}{4} \cdot Altura_A$, então $\pi R_A^2 \cdot Altura_A = \pi R_B^2 \cdot Altura_B \rightarrow \pi R_A^2 \cdot Altura_A = \pi R_B^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot Altura_A \rightarrow R_A^2 = R_B^2 \cdot \frac{1}{4} \rightarrow 4R_A^2 = R_B^2 \rightarrow R_B = 2R_A$ ou $R_B = -2R_A$, considerando que por se tratar da medida do raio o valor deve ser positivo. Portanto, $R_B = 2R_A$.

Nessas técnicas e tecnologias, podemos observar que elas foram justificadas por conceitos geométricos e algébricos. Ao fazer apenas substituições nas fórmulas já conhecidas de medida do volume de um cilindro e área de uma circunferência, a resolução das tarefas propostas exigiram uma algebrização dos conceitos geométricos

Tarefas_{166.20p}: Um poste com iluminação natalina em formato de cone, tem iluminação feita por mangueiras na vertical. Essas mangueiras possuem comprimento igual e são fixadas a partir de um mesmo ponto até outro ponto de uma circunferência fixada no chão, formando 20 arcos. Qual deve ser o raio dessa circunferência para que seja usado 100m de mangueiras, considerando a medida da altura como 3m?

Técnicas_{166.20p}: Como as mangueiras fixadas formam 20 arcos, significa que há 20 delas representando segmentos de reta que poderão dividir os 100m de mangueira, ou seja, cada segmento terá medida de 5m. Considerando um triângulo retângulo formado pelo encontro dos segmentos que representam a mangueira (hipotenusa), o raio e o poste (catetos), pelo Teorema de Pitágoras teremos $r^2 + 3^2 = 5^2 \rightarrow r^2 = 25 - 9 \rightarrow r^2 = 16 \rightarrow r = 4$. Portanto, o raio medirá 4 metros.

Tarefas_{168. 20p}: Dado um sólido rígido proveniente de um jogo de computador em que o usuário pode movê-lo como quiser, identificar qual figura representa a posição do sólido de acordo com as suas projeções ortogonais em três planos.

Técnicas_{168. 20p}: A partir da comparação entre a figura e as suas representações em cada um dos três planos e da abstração mental dessas representações, deve-se considerar a direção e localização delas.

Assim como na maioria das tarefas envolvendo projeção ortogonal, nas Tarefas_{168. 20p} apenas conceitos geométricos foram mobilizados para justificá-las, compondo uma praxeologia local

Tarefas_{178. 20p}: O Templo de Kukulkán, uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno, pode ser representado geometricamente como um tronco reto de pirâmide de base quadrada. Identificar quantas e quais figuras planas compõem esse sólido.

Técnicas_{178. 20p}: Considera-se que no tronco de uma pirâmide reta de base quadrada há uma secção transversal paralela à base, formando assim uma base maior e outra menor, contudo, do mesmo tipo de figura, no caso as duas bases quadradas. Enquanto as faces laterais são representações de trapézios e a quantidade é de acordo com o número de arestas da base, logo, são 4 trapézios.

A seguir o Quadro 12 com uma síntese das tarefas.

Quadro 12. Tarefas presentes na prova de primeira aplicação do Enem, edição 2020

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXELOGIAS
28. Identificar qual figura representa o escoamento da água no telhado de uma casa a partir da vista superior (CQR 136, p.16).	Projeção ortogonal	Discurso e imagem	Local
29. Escolher qual gráfico representa melhor a variação da altura do líquido em função do tempo, na garrafa de espumante (CQR 141, p.17).	Volume e altura	Discurso e imagem	Global
30. Em um recipiente com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo contendo água, qual o número de bolinhas é necessário para completar o volume restante do vaso, dadas as medidas de comprimento, largura e altura do vaso, a altura da coluna de água e o volume de cada bolinha (CQR 150, p.21).	Prisma, medidas de altura, largura, comprimento e volume	Discurso e imagem	Global
31. Descobrir o raio de uma caixa-d'água cilíndrica, considerando as medidas de outra caixa-d'água com mesmo volume e determinada altura em relação a outra e raio (CQR 154, p.22).	Cilindro, medidas de volume, altura e raio	Discurso	Global
32. Dado o volume de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo reto, calcular a escala usada para criar uma maquete representando-a (CQR 158, p.23).	Prisma, volume e escala	Discurso	Global
33. Calcular a altura de uma caixa, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, para caber dentro um troféu com uma base de madeira em formato de paralelepípedo, com três hastes verticais sustentando uma esfera. São dadas as medidas do troféu, o comprimento e a largura da caixa (CQR 163, p.25).	Prisma, esfera, medidas de altura, largura e comprimento	Discurso e imagem	Global
34. Um poste com iluminação natalina em formato de cone, cuja iluminação é feita por mangueiras na vertical. Essas mangueiras possuem comprimento igual e são fixadas a partir de um mesmo ponto até outro ponto de uma circunferência fixada no chão. Qual deve ser o raio dessa circunferência para que seja usada determinada metragem das mangueiras? (CQR 166, p.26).	Cone, raio, circunferência triângulo, teorema de Pitágoras	Discurso e imagem	Global

35. Dado um sólido rígido proveniente de um jogo de computador em que o usuário pode movê-lo como quiser, identificar qual figura representa posição do sólido de acordo com as suas projeções ortogonais (CQR 168, p.27).	Projeção ortogonal, posição relativa	Discurso e imagem	Local
36. Com um discurso explicando como ocorre o processo de aeração entre dois tanques em formato de prismas retos de bases retangulares, dadas as medidas de comprimento e largura, escolher a equação relacionada às medidas de alturas entre a coluna de líquido que saiu do primeiro tanque e a coluna do líquido que chegou no segundo tanque (CQR 169, p.28).	Prisma, medidas de altura, largura, comprimento e volume	Discurso e imagem	Global
37. O Templo de <i>Kukulcán</i> , uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno, pode ser representado geometricamente como um tronco reto de pirâmide de base quadrada. Identificar quantas e quais figuras planas compõem esse sólido (CQR 178, p.30).	Tronco de uma pirâmide, faces e figuras planas	Discurso	Local

Fonte: Brasil (2020, p. 16-30)

Em consonância com o que foi encontrado em nosso MPR e na análise das provas anteriores, podemos observar uma predominância nas praxeologias globais (sete praxeologias globais), cujos conceitos mobilizados, de modo geral, viviam na teoria Geometria, mais especificamente Geometria métrica, e na Álgebra e/ou Aritmética.

Na Tarefa 29, a visualização, a leitura e a interpretação de gráfico são importantes para a sua resolução. Nela, é necessário perceber que, conforme a garrafa fica cheia, a medida da altura que o líquido atinge aumenta em função do tempo e, nos momentos finais, isto ocorre de maneira mais rápida, uma vez que no gargalo a área a ser preenchida é menor. Portanto, classificamos essa praxeologia como global.

As outras três praxeologias analisadas eram do tipo local, duas delas envolviam a projeção ortogonal e a outra a identificação das faces do tronco de uma pirâmide reta de base quadrada. Nelas, as técnicas foram justificadas por conceitos que vivem apenas na Geometria.

Consideramos na proposta da Tarefa 28(Tarefas_{136.20p}), apesar de simples, com um possível significado positivo principalmente para o público adulto. Nessa tarefa, os objetos ostensivos (o discurso que a acompanha e a figura ilustrativa – a casa) fazem referência ao trabalho de um pedreiro na construção da planta de escoamento da água de um telhado. Identificamos essa praxeologia como local, visto que a técnica necessária para sua resolução é realizar a comparação entre o tipo de casa e as opções de plantas de escoamento, além de observar qual deles apresentava a direção correta desse escoamento.

Na segunda prova desta edição, analisamos apenas 4 (quatro) tarefas, com destaque para o fato que duas delas eram sobre projeção ortogonal. Uma delas partindo das vistas para identificar uma figura geométrica e, na outra, para identificar a projeção correspondente ao trajeto realizado por uma formiga. Assim, também podemos afirmar que ambas praxeologias podem ser classificadas como pontuais.

Tarefas_{157.20s}: A partir das vistas frontais, laterais e superiores de uma torre, identificar qual figura melhor representa a forma geométrica espacial dela.

Técnicas_{157.20s}: Para realizar a identificação, pode ser feito um comparativo entre a vista e a figura da torre. Por exemplo, como na vista frontal e perfil há a imagem de um trapézio, não é possível ser as opções em que os lados da torre são curvos. Outro comparativo é entre a vista frontal, onde há a representação de três círculos um no

interior do outro, a opção em que a torre lembra o formato do tronco de uma pirâmide de base retangular não é válida, sobrando assim apenas uma opção se enquadrando na representação das vistas.

Tarefas_{162.20s}: 39. Dado o trajeto de uma formiga em um castiçal, identificar qual projeção ortogonal sobre o plano de uma mesa, melhor representa esse trajeto.

Técnicas_{162.20s}: Assim como foi preciso nas outras tarefas mencionadas, até aqui, que envolviam projeção ortogonal, é necessário compreender sobre qual plano deve ser considerado. O plano da mesa, o caminho percorrido pela formiga no castiçal formará um segmento de reta.

As tarefas e técnicas das duas questões constituem praxeologias pontuais, esses tipos de tarefa estão em consonância com o que observamos durante a construção do nosso MPR, em que as tarefas envolviam o desenho ou o comparativo entre a representação de uma figura espacial e as suas vistas representadas por figuras planas, ou a projeção de trajetos, como é o caso da questão 162.

Tarefas_{163.20s}: Calcular qual deve ser o aumento em metros, do raio de um tanque cilíndrico de 2m de profundidade, para comportar 900 peixes. De modo que ao ampliar a capacidade do tanque, não altere sua profundidade, considerando que o tanque possui 750 peixes e está dimensionado para comportar 5 peixes a cada m³.

Técnicas_{163.20s}: Primeiro é preciso descobrir qual o atual volume do tanque, visto que no enunciado é dado apenas a quantidade total de peixes criados. Para isso, a partir da ideia de proporcionalidade entre as medidas de quantidade de peixes por m³, teremos que $\frac{750}{5} = \frac{V_i}{1} \rightarrow V_i = 150m^3$. A partir desse dado e pelo Princípio de Cavalieri, podemos encontrar qual o raio do cilindro, $V_i = \pi r_i^2 \cdot h$, r é o raio e h a altura ou profundidade do tanque. $150 = 3r_i^2 \cdot 2 \rightarrow \frac{150}{6} = r_i^2 \rightarrow r_i = \sqrt{25} \rightarrow r_i = 5$. Essas operações serão feitas novamente, contudo para descobrir a medida do raio do tanque para comportar 900 peixes, $\frac{900}{5} = \frac{V_f}{1} \rightarrow V_f = 180m^3$. Logo, $V_f = \pi r_f^2 \cdot h \rightarrow 180 = 3r_f^2 \cdot 2 \rightarrow \frac{180}{6} = r_f^2 \rightarrow r_f = \sqrt{30}$. Portanto, o aumento da medida do raio será dado pela diferença entre as medidas do raio final pelo raio inicial, $r_f - r_i = \sqrt{30} - 5$.

Para cumprir a tarefa principal proposta pela questão, foi necessário cumprir outras tarefas complementares com suas respectivas técnicas. Isso remete ao candidato

mobilizar conceitos de área, volume, proporcionalidade, equações e operação entre números reais pertencentes a Geometria, Álgebra e Aritmética. Dessa maneira, integra-se uma praxeologia global.

Tarefas_{173.20s}: A representação geométrica da cúpula do Museu de Arte Contemporânea é um tronco de cone circular reto, que precisa ter o pátio revitalizado. Dadas as medidas do diâmetro da base maior, a distância entre as duas bases e o ângulo formado entre o prolongamento do segmento do pátio e a geratriz do tronco, calcular a área que deve ser revitalizada.

Técnicas_{173.20s}: Primeiro, para encontrar qual a medida do raio do piso do pátio, podemos considerar um triângulo retângulo formado entre a geratriz, a altura e parte da base maior do tronco, usando as relações trigonométricas cujo um dos ângulos mede 60° , $tg\ 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12}{1,7} \rightarrow x \cong 7$. A medida do raio do pátio (base menor) será a diferença entre a medida encontrada e a do raio da base maior. $r \cong 25 - 7 \rightarrow r \cong 18m$. Logo, a medida da área a ser revitalizada será $A = \pi \cdot r^2 \rightarrow A \cong 3 \cdot 18^2 \rightarrow A \cong 3 \cdot 324 \rightarrow A \cong 972m^2$.

De modo semelhante ao que mencionamos nas tarefas anteriores, tanto nas analisadas durante a construção do nosso Modelo Praxeológico de Referência como nas das outras provas, uma grande parcela delas e suas respectivas tecnologias eram justificadas por conceitos que viviam em mais de uma Teoria. Chamamos atenção apenas às duas praxeologias pontuais, ambas envolvendo projeção ortogonal. No Quadro 13, podemos observar um resumo dos dados coletados sobre as tarefas analisadas.

Quadro 13. Tarefas presentes na prova de segunda aplicação do Enem, edição 2020

TAREFA	OBJETOS NÃO OSTENSIVOS GEOMÉTRICOS	OBJETOS OSTENSIVOS	TIPO DE PRAXELOGIAS
38. A partir das vistas frontais, laterais e superiores de uma torre, identificar qual figura melhor representa a forma geométrica espacial dela. (CQR, 157, p. 21)	Projeção ortogonal, figuras planas e espaciais	Discurso e imagem	Pontual
39. Dado o trajeto de uma formiga em um castiçal, identificar qual projeção ortogonal sobre uma mesa, melhor representa o trajeto que vai do ponto A ao ponto E. (CQR, 162, p.23)	Projeção ortogonal, distâncias	Discurso e imagem	Pontual
40. Calcular qual deve ser o aumento em metros, do raio de um tanque cilíndrico, para que um piscicultor consiga ampliar a capacidade do tanque, de forma que não altere sua profundidade. (CQR, 163, p. 24)	Cilindro, medidas de raio, volume e altura	Discurso	Global
41. A representação geométrica da cúpula do Museu de Arte Contemporânea é um tronco de cone circular reto, que precisa ter o pátio revitalizado. Dadas as medidas do diâmetro da base maior, a distância entre as duas bases e o ângulo formado entre o prolongamento do segmento do pátio e a geratriz do tronco, calcular a área que deve ser revitalizada. (CQR, 173, p. 27)	Tronco de cone, medidas de diâmetro, altura, ângulo e área	Discurso e imagem	Global

Fonte: Brasil (2020a, p. 21-27).

Nas outras duas tarefas, Tarefas 40 e 41, as propostas envolvem os corpos redondos, ou não poliedros, respectivamente, sendo: cilindro e tronco de cone. Também envolvem medidas de área e volume, desse modo, afirmamos serem os mesmos objetos não ostensivos que apareceram na maioria das tarefas presentes nos livros didáticos analisados na Seção anterior, durante a construção do nosso Modelo Praxeológico de Referência, ao constataremos uma grande quantidade de tarefas relacionadas ao cálculo de medidas.

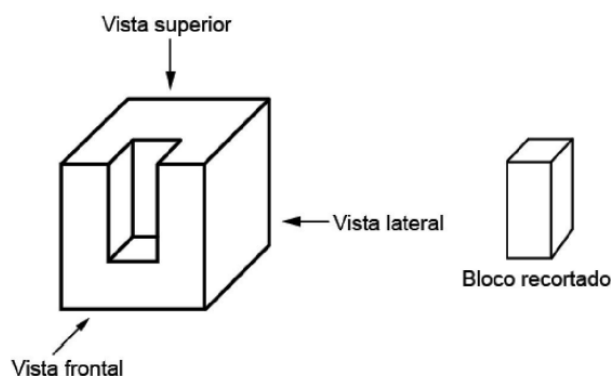
A prova digital do Enem 2020 é a que apresenta menos praxeologias sobre os sólidos geométricos, contando com apenas duas tarefas: uma delas com foco na

projeção ortogonal e outra na medida de volume. Assim como na prova de segunda aplicação da edição 2017, decidimos apresentar essas tarefas fora de um quadro.

Figura 32. Questão 170 do Enem edição 2020, prova digital.

Questão 170 - Matemática e suas Tecnologias

No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.



Fonte: Brasil (2020b, s.n.p.)

Para a resolução dessa tarefa, se faz necessário escolher quais figuras representam as vistas frontal, lateral e superior. O discurso e as figuras são objetos ostensivos que auxiliam na resolução. Os objetos não ostensivos mobilizados são pertencentes apenas à Geometria, visto que é necessário para quem irá resolvê-la, além de reconhecer as projeções ortogonais, também compreender o que são arestas e como as arestas do corte serão representadas. Deste modo, inferimos com uma praxeologia local em que buscou-se avaliar habilidades apenas da competência de área 2.

Figura 33. Questão 174 do Enem edição 2020, prova digital

Questão 174 - Matemática e suas Tecnologias

Um fazendeiro possui uma cisterna com capacidade de 10 000 litros para coletar a água da chuva. Ele resolveu ampliar a área de captação da água da chuva e consultou um engenheiro que lhe deu a seguinte explicação: “Nesta região, o índice pluviométrico anual médio é de 400 milímetros. Como a área de captação da água da chuva de sua casa é um retângulo de 3 m de largura por 7 m de comprimento, sugiro que aumente essa área para que, em um ano, com esse índice pluviométrico, o senhor consiga encher a cisterna, estando ela inicialmente vazia”.

Sabe-se que o índice pluviométrico de um milímetro corresponde a um litro de água por metro quadrado. Considere que as previsões pluviométricas são cumpridas e que não há perda, por nenhum meio, no armazenamento da água.

Em quantos metros quadrados, no mínimo, o fazendeiro deve aumentar a área de captação para encher a cisterna em um ano?

Fonte: Brasil (2020b, s.n.p.)

A técnica inicial para solucionar essa tarefa é realizar o cálculo da medida de área da região de captação de água formada por um retângulo, para isto, deve-se multiplicar as medidas de comprimento e largura, totalizando em 21 m^2 . Também, é preciso calcular o quanto índice pluviométrico anual médio equivale em litros por metros quadrados. Ao fazer a conversão das medidas, temos a medida de 400 litros de água por m^2 . Também deve-se calcular quanto, em m^2 , são necessários para captar 10.000 litros de água em um ano, resultando em 25 m^2 . Dessa forma, se a área inicial de captação era de 21 m^2 , basta subtrair essa quantidade da medida de 25 m^2 , e assim, concluímos que o fazendeiro deve aumentar a área em 4 m^2 . Para essa tarefa, consideramos ser uma praxeologia regional, visto que é formada por diversas técnicas e justificadas por mais de uma tecnologia.

Destacamos nessa tarefa, a avaliação das competências de área, 2, 3 e, além delas, a competência 4. Esta última envolve a variação de grandezas: “Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano” (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

Convém ressaltarmos que, entre os estudos analisados em nossa revisão de literatura, não encontramos uma análise de tarefas como a realizada nesta pesquisa. Assim, decidimos apresentar uma síntese dos dados coletados para facilitar um comparativo entre as edições das provas do Enem.

Síntese

Assim como podemos considerar que fatores como: onde nascemos, crescemos, vivemos e até morremos, como estas coisas ocorreram ou a partir de qual ponto de vista estamos observando, pode afetar na percepção sobre quem somos/fomos, o mesmo pode ser dito sobre o objeto matemático. Nessa perspectiva, quando realizamos a nossa investigação das dimensões do nosso problema de pesquisa – dimensões Epistemológica, Econômica e Ecológica – analisamos os sólidos geométricos. Ao ter como base os dados obtidos, construímos nosso Modelo Praxeológico de Referência. A partir desses passos, foi possível prosseguir a nossa análise das questões do Enem, a qual apresentaremos uma síntese das nossas inferências durante esse processo.

Ao retomar nossos objetivos específicos, que possibilitaram a busca por resposta à questão central, entre os quais destacamos dois: Identificar nas provas do Enem de 2017 a 2020, quais praxeologias envolvem sólidos geométricos e Analisar as praxeologias referentes aos sólidos geométricos, identificadas nas provas, tomando como parâmetro o MPR elaborado. Esses objetivos pavimentaram o caminho para a resposta da nossa questão central: “Quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020?”.

Para tanto, vimos uma predominância nas praxeologias globais que, assim como proposto pelos documentos curriculares nacionais, relacionam conceitos de diferentes teorias. Outro fato a ser pontuado, é a ênfase dada à Geometria métrica relacionada à Geometria espacial, em especial, aos conceitos e cálculos de medidas de área, volume, entre outras ou para encontrar medidas ausentes, assim como indicado em nosso MPR. Esses conceitos são ensinados geralmente de forma mais algébrica, a maneira como são avaliados no Enem também tem esse viés.

Esse dado está em consonância com as tarefas presentes nos livros didáticos de matemática para o ensino médio, aqui analisados, cujos autores dedicaram grande quantidade de tarefas propostas para esses conceitos. Como discutido na Seção anterior, de acordo com os PCN+, na Geometria, o foco está na posição relativa das formas ou no cálculo de medidas. Isso também foi observado por B. Silva (2004), ao analisar provas do Enem de 2001 a 2003. O referido autor constatou essa valorização dada à Geometria métrica, contudo isso não ocorreu com abordagens mais geométricas.

As tarefas propostas nas provas mobilizavam mais de uma técnica, por sua vez, essas técnicas eram justificadas por tecnologias pertencentes a mais de uma teoria, visto que envolviam tanto Geometria como Aritmética e/ou Álgebra. Deste modo, dados esses elementos, caracterizamos boa parcela das praxeologias como globais. Outro aspecto que podemos inferir refere-se à quantidade de praxeologias globais analisadas que se dá justamente pela forma como a Geometria vive no currículo e na sala de aula, sendo apresentada, estudada e aprendida de maneira mais algébrica.

Deste modo, para solucionar as tarefas propostas precisam-se de técnicas que envolvam não apenas um pensamento geométrico, mas uma compreensão das operações básicas e certa algebrização. Ou seja, elas são justificadas por conceitos que envolvem mais de uma teoria. No estudo de M. Freitas (2015), voltado a analisar como o livro didático de matemática do ensino médio propõe o ensino volume dos sólidos, é constatado o predomínio de tarefas envolvendo o cálculo dessa medida e da área. Esses dados levaram o referido autor a inferir que isso pode levar o aluno a se limitar à memorização de fórmulas, não favorecendo o seu processo de ensino e aprendizagem.

De modo geral, podemos considerar que, na maioria das tarefas analisadas, foram avaliadas as competências de área 2 – “Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano” e 3 – “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela”, contemplando principalmente as habilidades correspondentes à competência 2, visto que ela é mais específica para a Geometria plana e espacial, enquanto a 3 refere-se a Grandezas e medidas (BRASIL, 2009a, s.n.p.).

Ao realizar um levantamento da quantidade de tarefas por tipo de prova e edição, temos um total de 49 (quarenta e nove) tarefas analisadas em nove provas, equivalente a quase 12% das questões. Dentre outros dados, inferimos que a média é de aproximadamente 5 (cinco) questões por prova. Também constatamos que as provas de primeira aplicação da edição 2017 e da edição 2020, apresentaram um quantitativo maior de questões, ambas com 10 (dez) tarefas envolvendo os sólidos geométricos.

Ao compararmos esses dados aos estudos sobre questões de provas do Enem como o de Mota (2015) que, ao analisar provas do Enem das edições de 2009 a 2013, constatou que aproximadamente 10% das questões da prova envolviam a Geometria espacial, bem como essa Geometria dava ênfase na Geometria de posição e métrica.

Podemos constatar que essa situação permaneceu nas provas analisadas por nossa pesquisa, a qual se diferencia dos demais estudos até então localizados.

Apesar de aparecer nas provas do Enem acompanhadas de uma contextualização (maior), podemos considerar que as tarefas citadas na Seção anterior também foram encontradas nessa avaliação.

T₁₉: Calcular a medida da área da superfície de um sólido geométrico.

T₂₀: Calcular a medida do volume de um sólido geométrico.

T₂₁: Calcular as medidas do comprimento, altura, largura, geratriz, raio, entre outras medidas.

T₂₂: Desenhar as vistas superior, frontal e lateral de determinado objeto.

Com destaque ao fato de que na avaliação não é possível desenhar essas vistas, porém, as alternativas permitiam um comparativo com a imagem mental criada pela abstração do que é proposto, técnica possível a ser utilizada durante a resolução da tarefa.

Podemos considerar os prismas e os cilindros como os principais representantes dos poliedros e corpos redondos, respectivamente. Apesar de outros sólidos aparecerem como objetos não ostensivos, esses dois foram os que mais apareceram. Um motivo possível é que a maioria dos objetos cotidianos possuem essas formas como referência.

Uma situação que chamou a nossa atenção é de quase todas as provas conterem ao menos uma tarefa envolvendo projeção ortogonal. Apenas a prova de reaplicação da edição 2019 não possui tarefas sobre esse conceito. Em contrapartida, na edição 2020, desse mesmo tipo de prova, foram encontradas duas tarefas tratando do objeto projeção ortogonal.

Destacamos ainda, o uso de jogos como forma de contextualização das tarefas, fazendo uma dialética entre esse objeto ostensivo e o objeto não ostensivo (projeção ortogonal). Ao ter em conta que a prova do Enem ser destinada a jovens e adultos, consideramos importante envolver situações como essas, que possivelmente tenham sentido e significado para eles. Na pesquisa de Bispo (2014), constatou-se a importância de contextualizar e envolver o cotidiano do aluno, sendo observado que isto pode transformar a aprendizagem mais atraente ao aluno. Andrade (2007) também apontou a importância da manipulação da representação dos objetos ostensivos para os alunos,

uma vez que ao fazer isso, eles retomam conhecimentos matemáticos de modo articulado e integrado para um melhor entendimento de novos conhecimentos.

Em algumas das tarefas analisadas eram apresentadas opções, geralmente em número de cinco, sendo necessário fazer um comparativo, para então, escolher entre elas a que mais se adequava à situação problema, proposta como tarefa. Um exemplo é a Tarefa 4, para escolher entre cinco caixas distintas a que armazenaria melhor um objeto cúbico. Salientamos que nem todos os objetos não ostensivos presentes em nosso Modelo Praxeológico de Referência foram contemplados pelas provas. Entre eles, estão as ideias de congruência e semelhanças entre sólidos geométricos. Assim, apresentaremos na próxima Seção, uma síntese do caminho percorrido em nossa pesquisa e quais as nossas reflexões sobre ela.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020, observamos que em sua maioria eram do tipo global visto que as tarefas envolviam a manipulação de objetos ostensivos e não ostensivos pertinentes aos campos da Geometria e, principalmente da Álgebra. O que se constata em consonância com um fato apontado pelos Guias do PNLD 2015 e 2018, ao afirmarem a ênfase dada à aplicação da álgebra para a resolução de tarefas envolvendo Geometria, sem necessariamente desenvolver habilidades de desenho e visualização.

No Guia de 2015, está posto sobre o ensino da Geometria espacial, que:

O ensino médio usual não tem contribuído de modo desejável para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos. Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos (BRASIL, 2014, p. 99).

Essa afirmação se mantém no Guia de 2018, ainda de acordo com os dois documentos, há uma evidência na classificação das figuras e os problemas apresentados não são instigantes. No caso do estudo sobre as medidas de área e de volume, essa ênfase está em propor situações em que há aplicação da álgebra sem explorar tanto a capacidade de visualização.

A problemática sobre o ensino de Geometria não é recente. As pesquisas sobre esse tema sempre têm revelado diferentes questões como a maneira em que esse objeto aparecia nos livros didáticos de matemática, o conhecimento de professores que ensinam matemática, dentre outras questões. Podemos considerar as mudanças na sociedade e o resultado de anos de pesquisas, por diferentes décadas, buscando diminuir as dificuldades relacionadas ao ensino da Geometria, como motivos para que essa problemática se modificasse ao longo desse tempo. Contudo, são os resultados dessas pesquisas e mudanças na sociedade que demandam possibilidades de que tais questões sejam minimizadas. São aspectos que nos remetem perceber o quanto níveis superiores da escala de codeterminação, em especial, o da Sociedade, podem influenciar níveis inferiores dessa escala.

Em reflexão a essa problemática, iniciamos nossa dissertação tratando sobre o quanto acreditamos no papel transformador da educação e a influência do professor nesse processo, como um dos intuitos de poder auxiliá-lo em sua profissão. Para tanto, buscamos realizar a nossa investigação a partir de um objeto geométrico, devido a problemática envolvendo o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Além disso, dando uma certa especificidade, sobre a presença dos sólidos geométricos em provas do Enem, visto que essa avaliação é de grande importância para a Sociedade como um todo. Sejam egressos do ensino médio, sejam pessoas que querem ter acesso a um curso universitário, governos, ou outros, essa prova mobiliza todo o país antes, durante e depois da sua aplicação e de formas diferentes para cada um. Assim, levantamos a seguinte questão de pesquisa: “Quais são as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020?”. Cujo objetivo geral foi analisar as praxeologias matemáticas relacionadas aos sólidos geométricos presentes em provas do Enem nas edições de 2017 até 2020.

Para conseguir responder esse questionamento e atingir nosso objetivo geral, passamos por diversos obstáculos, desde a busca de pesquisas produzidas no Brasil para compreender melhor a teoria escolhida, a Teoria Antropológica do Didático, até entender de que forma ela poderia ser aplicada em nossa pesquisa.

Instigadas pela influência da Noosfera no ensino de Geometria, escolhemos um objeto de pesquisa e uma instituição para realizar nossa investigação, considerando então, os sólidos geométricos como nosso objeto e o Enem como a instituição. Assim, decidimos analisar quais são praxeologias matemáticas que remetem sobre a presença dos sólidos geométricos nas provas do Enem, edições 2017 a 2020, sob a luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Definimos esta pesquisa como qualitativa e documental, uma vez que nosso maior interesse não foi apenas apresentar um levantamento quantitativo das provas do Enem, mas uma discussão qualitativa sobre o tema. Além disso, consideramos como documental por causa das fontes da nossa pesquisa, documentos curriculares nacionais; livros didáticos de matemática e provas do Enem, visto que todos são fontes primárias que se apresentam sem um tratamento analítico.

Assim, iniciamos nossa pesquisa fazendo um levantamento sobre os trabalhos de tese e dissertações que apresentavam em relação aos sólidos geométricos nas provas do

Enem e sobre esse objeto no ensino médio, embasados na TAD. Nos dois levantamentos, a quantidade de trabalhos foi insuficiente e vimos a necessidade de expandir a busca para a Geometria de forma geral. Desta maneira, conseguimos ter certa noção sobre o nosso tema.

Esses levantamentos resultaram em duas revisões bibliográficas. Na primeira delas sobre a TAD e a Geometria no ensino médio, emergiram 4 (quatro) focos temáticos: *Discentes*; *Docentes*; *Livros didáticos* e *Outros documentos*. Os dois primeiros correspondem às pesquisas que tinham como participantes os alunos e professores, respectivamente. Os focos *Livros didáticos* e *Outros documentos* envolvem as pesquisas documentais, ou bibliográficas, cuja ênfase estava na análise de livros didáticos ou em outros tipos de materiais didáticos. A partir das leituras realizadas, foi possível perceber como relacionar e analisar conceitos geométricos à TAD. Ressaltamos a importância das pesquisas que realizaram análise de livros didáticos e do problema didático, visto que foram dois pontos abordados em nossa pesquisa.

O trabalho de N.S.Santos (2021) foi o que mais se aproximou da nossa proposta, inclusive, decidimos utilizar o Modelo Epistemológico de Referência elaborado pela autora. A referida autora também optou pelos sólidos geométricos como objeto da pesquisa e fez uma análise sobre a razão de ser dele, embora, o foco principal da pesquisa foi investigar as praxeologias adotadas por uma bolsista do programa Residência Pedagógica ao ensinar uma turma do 6º ano do ensino fundamental. De modo geral, as pesquisas que apareceram nessa revisão propiciaram conhecer formas de analisar as praxeologias e os documentos curriculares, levando em consideração objetos geométricos.

A outra revisão de literatura destinou-se a investigar a Geometria presente em provas do Enem, sob a ótica das teses e dissertações. Emergiram 3 (três) focos temáticos, são eles: *Ensino-Aprendizagem*; *Provas e Currículo* e *Outros*. No foco *Ensino-Aprendizagem* foi possível conhecer algumas das dificuldades enfrentadas por professores e alunos durante o processo de ensino-aprendizagem da Geometria, permitindo observar na “prática”, alguns aspectos que envolvem a sua problemática. O foco *Provas e Currículo* nos permitiu conhecer quatro tipos de análise de provas das edições anteriores ao período que escolhemos para nossa pesquisa, assim também, conhecer a relação dessas provas com o currículo vigente. No último foco, foram

contempladas as pesquisas que não se encaixaram nos focos anteriores. São pesquisas que auxiliaram a compreender a forma como as respostas dos participantes são tratadas pela correção da avaliação Enem, a partir da Teoria de Resposta ao Item (TRI).

Concomitantemente, fizemos leituras dos documentos curriculares nacionais para o ensino médio (vigentes ao período das provas escolhidas para análise) e de textos sobre o Enem, visando melhor entender o por que e por quais mudanças essas instituições passaram, identificando, por conseguinte, como os sólidos geométricos “sobreviviam” nessas instituições.

Também realizamos outras leituras para aperfeiçoar nosso conhecimento sobre a TAD, apesar de já termos realizado leituras anteriores sobre a teoria, a discussão a respeito do problema didático não era tão familiar. Ressaltamos entre alguns desses aspectos teóricos, o problema de pesquisa ou didático, considerado como o possível ponto de partida que justifica o porquê da pesquisa.

Podemos considerar que a TAD investiga o objeto matemático perante a atividade humana. Dito isto, a nossa pesquisa não teve como objetivo se restringir apenas ao objeto dos sólidos geométricos, mas, a maneira como ele está inserido no Enem, resultado de interações humanas. Ao buscar compreender um problema didático é necessário observar além da razão de ser do objeto matemático, independentemente de instituições, quais fatores levaram-no a ser de determinada maneira em um dado ambiente. Ou seja, investigar as dimensões fundamentais do problema didático, ou de pesquisa – dimensões epistemológica, econômica e ecológica.

Como os sólidos geométricos viveram/sobreviveram ao longo dos anos para estar de determinada forma inserido na avaliação do Enem? Ou, quais fatores influenciaram para as mudanças ou não desse objeto geométrico? Esses foram alguns dos questionamentos que surgiram durante a escrita desta pesquisa. Contudo, outro aspecto torna-se relevante ao fato de o ensino médio estar em constante mudança, daqui a alguns anos, o que foi inferido pode não ser a realidade futura, o que não desqualifica nosso texto, mas é um complemento para a compreensão acerca do objeto.

Nessa compreensão isso e para auxiliar a procura por respostas a nossa pesquisa, traçamos alguns objetivos específicos que nos permitiram organizar melhor o que deveria ser realizado a seguir e quais passos deveriam ser seguidos. Em um total de 4 objetivos específicos, traçados a partir do que pesquisamos em nossa revisão de

literatura sobre o problema didático/de pesquisa, foi preciso conhecer as três dimensões do nosso problema de pesquisa, a razão de ser do nosso objeto geométrico, quais mudanças ele passou ao longo dos anos, porque e como vive/sobrevive.

Por causa da incompletude do problema de pesquisa, é necessária a dimensão epistemológica, nela se discute a razão de ser de determinado objeto. Seguida hierarquicamente por outras duas dimensões – a dimensão econômica, a qual trata como o objeto está posto na instituição escolhida, e a dimensão ecológica, com a qual busca-se os motivos que levaram a existência ou não do objeto na instituição. Por sua vez, tais dimensões auxiliaram e resultam na criação de Modelos – Epistemológico de Referência (MER); Epistemológico Dominante (MED) e Praxeológico de Referência (MPR).

Portanto, o primeiro objetivo foi explicitar os Modelos Epistemológicos de Referência (MER), o qual partimos da análise epistemológica de N.M. Santos (2021) e adotamos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) criado pela autora. Embora, sua investigação teve ênfase nos sólidos geométricos para o 6º ano do ensino fundamental, a forma como buscou o tratamento epistemológico nos auxiliou para o momento em que analisamos a dimensão econômica do nosso problema de pesquisa. Também destacamos a qualidade das informações apresentadas pela autora.

Desse modo, complementamos o modelo de N. Santos (2021) e, a partir disto, foi possível seguir para o objetivo seguinte, construir os Modelos Epistemológico Dominante (MED) e um Modelo Praxeológico de Referência (MPR). Essa construção ocorreu após a análise da dimensão econômica, em que foram levantados questionamentos sobre como os sólidos existiam nos documentos curriculares do ensino médio brasileiro e em livros didáticos de matemática deste nível de ensino. Afinal, esses documentos restringem e determinam em parte, a maneira em que os sólidos vivem nessas instituições.

Nessa dimensão, voltamos o nosso olhar para os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e a Matriz de Referência do Enem. Encontramos os sólidos geométricos em algumas propostas dos documentos curriculares e em habilidades, neles estabelecidas, tanto as que deveriam ser desenvolvidas durante o ensino médio quanto às avaliadas na prova.

Também consideramos livros didáticos de matemática do 2º ano do ensino médio, devido à presença dos sólidos geométricos neste material e para analisar as praxeologias matemáticas sobre esse objeto. Percebemos que os conceitos das medidas de área e de volume foram os objetos não ostensivos mais mobilizados pelas tarefas analisadas. A partir dos dados coletados nessa dimensão, criamos nosso Modelo Epistemológico Dominante (MED).

Na dimensão ecológica, tratamos das condições e restrições para a existência ou não dos sólidos geométricos, nos mesmos materiais analisados na dimensão econômica. Comparamos as propostas dos documentos curriculares, da Matriz de Referência do Enem e o que “vivia” de fato nos livros didáticos de matemática do 2º ano do ensino médio. Constatamos, a partir desses documentos curriculares, que no ensino médio ocorre um aprofundamento dos conhecimentos desenvolvidos no nível anterior, o ensino fundamental, bem como, o desenvolvimento de novos conhecimentos. Outras propostas são a ênfase para um ensino contextualizado e interdisciplinar, além da relação entre a Geometria espacial e a Geometria métrica, indicados para serem discutidos no 2º ano desse nível de ensino. Quanto às tarefas, os autores dos livros didáticos analisados organizaram suas praxeologias na obra, reservando uma quantidade maior para os cálculos de medidas de grandeza, como área, volume e outras medidas das figuras espaciais.

A discussão nessa dimensão permitiu a criação do Modelo Praxeológico de Referência (MPR). Esse modelo referenciou a nossa análise das praxeologias das provas do Enem, edições 2017 a 2020. Em conformidade com as indicações na dimensão ecológica, o estudo de B. Silva (2004), na época da sua pesquisa, constatou que as provas do Enem possuíam questões bem elaboradas valorizando, contudo, os conceitos métricos, como as medidas de área de um triângulo e de um quadrilátero, mais que os conceitos geométricos, de modo geral. Apesar disso, o autor aponta uma tentativa de retomar esses conceitos geométricos. Na pesquisa de E. Ferreira (2014), foi possível constatar uma valorização maior para a Geometria.

Assim, de forma mais recente, em nossa pesquisa, constatamos que os objetos não ostensivos da Geometria espacial métrica foram valorizados nas provas analisadas, principalmente as medidas de área e de volume. Muito embora, outros conceitos pertencentes à Geometria espacial foram abordados, por exemplo, podemos ressaltar

uma das tarefas envolvendo um tronco de pirâmide de base quadrada que, para resolvê-la, deve-se identificar de quantas e de quais figuras planas a figura é composta. Ou ainda, tarefas que envolviam a visualização para identificar qual a projeção ortogonal de determinada figura espacial.

É possível relacionar a forma como esses objetos geométricos aparecem nas provas do Enem com o modo em que são ensinados. Bem como mencionado anteriormente, podemos considerar que essa avaliação está transversalizando os níveis superiores da escala de codeterminação – Sociedade, Escola e Pedagogia. De certo modo, justificando a hipótese apresentada, visto que ao mesmo tempo em que o Enem avalia a qualidade do ensino ofertado nas escolas, ele pode servir como um parâmetro à Sociedade e ao Sistema educacional. Ao considerarmos que as pessoas que compõem esses níveis podem ter entre as suas pretensões, almejar notas melhores na avaliação, seja como reflexo de um bom ensino ofertado ou para utilizar essas notas em cursos de instituições de ensino superior.

Mais especificamente na relação professor, aluno e esse objeto geométrico, podemos inferir que esse predomínio sobre a Geometria métrica pode ser uma opção que o professor possa fazer relações entre o objeto e as vivências dos alunos, na tentativa de contextualizar seu ensino. O que nos leva a questionar, assim como M. Freitas (2015), sobre que situações envolvendo contextualização sempre parecidas, pode deixar de ser um meio de transposição para o processo de ensino aprendizagem, para ser um obstáculo nesse processo. Uma vez que pode deixar de proporcionar discussões mais construtivas e levar apenas a uma memorização de fórmulas.

Nosso estudo voltou-se a uma análise de 49 (quarenta e nove) tarefas encontradas em nove provas correspondente às edições de 2017 a 2020, sendo as três primeiras edições com provas de primeira e segunda aplicação, e a última contando também com a prova digital. De modo geral, foram avaliadas a competência de área 2, sobre a Geometria plana e espacial, e a competência de área 3, cujo foco são grandezas e medidas.

Como resultados, encontramos praxeologias dos tipos pontuais, locais, regionais e globais, com uma predominância nas praxeologias globais. As praxeologias pontuais foram identificadas considerando que as tarefas necessitaram de uma técnica justificada apenas por uma tecnologia; as locais, caracterizadas por mais de uma praxeologia

pontual justificada por uma mesma tecnologia, mas com diferentes técnicas necessárias para resolver os tipos de tarefas. As regionais, por se tratar de praxeologias locais justificadas por uma mesma teoria, e as globais, por sua vez, justificadas por mais de uma teoria. A maioria delas era global e mobilizava conceitos envolvendo as teorias Geometria, Aritmética e Álgebra. Nessas praxeologias, houve manipulação dialética entre os objetos ostensivos como o discurso, as imagens e quadros, e os objetos não ostensivos quanto aos conceitos de paralelepípedo reto retângulo, as medidas de área e de volume. Os principais sólidos citados nas provas foram os prismas e os cilindros, respectivamente um poliedro e um não poliedro.

Assim como a pesquisa de N. S. Santos (2021), a partir do MER elaborado, serviu como ponto de partida para esta pesquisa embasando a criação dos nossos modelos (MED e MPR), esperamos que a nossa pesquisa também auxilie futuras investigações científicas sobre o tema. Como comentamos no início desta Seção, é fundamental que existam pesquisas voltadas à problemática do ensino de Geometria, seja adotando um objeto geométrico específico ou não. Esse tipo de discussão permitirá que os envolvidos na educação do nosso país percebam quais mudanças são necessárias ou não para melhorar o ensino ofertado.

Além do que foi mencionado, analisar as praxeologias presentes nas provas do Enem, edições 2017 a 2020, nos permitiu perceber como a Geometria métrica é aparentemente mais valorizada que as outras Geometrias. Ou seja, o cálculo de medidas sejam elas volume, área, raio ou outras, apareceu de maneira mais contundente enquanto as propriedades dos sólidos e resoluções que necessitassem apenas de conceitos geométricos, não foram tão presentes. Podemos inferir que esse é um reflexo da forma como a Geometria é abordada em sala de aula, o que pode abrir um precedente de possível pesquisa, ao fazer uma investigação se essa hipótese é validada e quais outras estratégias podem ser utilizadas para um ensino de matemática mais geométrico.

O texto desta dissertação iniciou com uma citação abordando sobre a importância do professor ao nosso país, esperamos que esse texto auxilie esse profissional que está na linha de frente da educação. Por fim, adicionamos a essa frase inicial que, fazer ciência, se dedicar à pesquisa, também é um ato de resiliência (bravura, amor e resistência), principalmente pela atual situação política do nosso país.

REFERÊNCIAS³⁷

ALMEIDA, E. A. M. **Progressões aritméticas e geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática**. 2012. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação, Cuiabá: UFMS, 2012.

ALMEIDA, M. S. M. **A articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2015. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande: UFMS, 2015.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. 1. ed. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. et al. A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 27, p. 94-108, 2004.

ALVES, L. E. S. S. **Sentidos e significados de professores de matemática ao usarem resolução de problemas para abordar conteúdos geométricos no ensino médio**. 2021. 164 fls. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão: UFS, 2021.

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio**. 2007. 121f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Belém: UFPA, 2007.

ARCANJO FILHO, M. e TAVARES, H. C. A educação matemática e o ensino-aprendizagem de Geometria: causas e consequências da deficiência e como fazer a excelência. In: **Revista Ensino Interdisciplinar**. Mossoró-RN. V 2, nº 01, 2016, p. 55-63.

ARRUDA, A. G. **Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial**. 2013. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa: UFV, 2013.

BARBOZA, E. V. **Geometria, Artes e tecnologia na escola em favor do processo de ensino-aprendizagem**. 2015. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: PUC RIO, 2015.

³⁷ As referências dos textos que apareceram nos mapeamentos foram retiradas dos dados fornecidos nas plataformas BDTD e catálogo de teses e dissertações da CAPES.

BARRETTO, E. S. Políticas de currículo e avaliação e políticas docentes. **Cadernos de Pesquisa**, 42, 2012. p. 738-753.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas**. 2019. 220f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo: PUC-SP, 2019.

BISPO, J. S. **Estudo de sólidos geométricos e suas métricas utilizando o software Cabri 3D**. 2014. 260f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus: UESC, 2014.

BRANCO, E. P., BRANCO, A. B., IWASSE, L. F., ZANATTA, S. C. Uma visão crítica sobre a implantação da Base Nacional Comum Curricular em consonância com a reforma do ensino médio. **Debates em Educação**, 10 (21), 2018, pp. 47-70.

BRANCO, A., BRANCO, E., IWASSE, L., NAGASHIMA, L. Urgência da reforma do Ensino Médio e emergência da BNCC. **Revista Contemporânea de Educação**, 14 (29), pp. 345-363, 2019.

BRAZ, J. C. **Funções estudadas no primeiro ano do ensino médio e suas aplicações**. 2019. 112f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba: UFTM, 2019.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei número 9394**, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. MEC. Portaria MEC Nº 438, de 28 de maio de 1998. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 01 de jun. de 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2000.

BRASIL. MEC. SEB. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2002.

BRASIL. MEC. SEB. **Orientações Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2.

BRASIL. MEC. INEP. Portaria INEP Nº 109, de 27 de maio de 2009. Estabelece a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 28 de maio de 2009.

BRASIL. MEC. INEP. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília: INEP/MEC. 2009a.

BRASIL. MEC. CNE. CEB. Resolução CNE/CEB Nº 2, de 30 de janeiro de 2012. Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Diário Oficial da União**, Brasília, 31 jan. 2012, Seção 1, p. 20.

BRASIL. MEC. SEB. FNDE. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015. Matemática: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2014.

BRASIL. **Lei Nº 13.415**, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nos 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho CLT, aprovada pelo Decreto-Lei no 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei Nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei Nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Portal da Legislação, Brasília, 2017.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 1º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2017a.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 2º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2017b.

BRASIL. MEC. SEB. FNDE. **Guia de livros didáticos: PNLD 2018. Matemática: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2017c.

BRASIL. MEC. CNE. CEB. Resolução CNE/CEB Nº 3, de 21 de novembro de 2018 (*) Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Diário Oficial da União**, Brasília, 22 de novembro de 2018, Seção 1, pp. 21-24.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 1º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2018a.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 2º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2018b.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 1º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2019.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 2º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2019a.

BRASIL. MEC. Portaria MEC Nº 458, de 05 maio de 2020. Institui normas complementares necessárias ao cumprimento da Política Nacional de Avaliação da Educação Básica. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 06 de maio de 2020.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 1º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2020a.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, 2º aplicação. Caderno Rosa. Brasília, 2020b.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)** Prova de Matemática e suas Tecnologias, Digital. Caderno Rosa. Brasília, 2020c.

BRASIL. MEC. Portaria MEC Nº 521, de 13 de julho de 2021. Institui o Cronograma Nacional de Implementação do Novo Ensino Médio. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 14 de julho de 2021.

CALDATTO, M., PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, 24(1), p. 103-128, 2015.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019.

CHEVALLARD, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. La Pensée Sauvage-Editions, Grenoble, França, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999. (Tradução nossa)

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: Saddy Ag Almouloud, Luiz Marcia Santos Farias e Afonso Henriques. (Org.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos** 1. ed. Curitiba; CRV, 2018.

CIABOTTI, V. **Elaboração de livro paradidático para o ensino de probabilidade: o trilhar de uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental**. 2016. 00fls. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba: UFTM, 2016.

CIAVATTA, M., RAMOS, M. A “era das diretrizes”. **Revista Brasileira de Educação**, 17(49), p. 11-37, 2012,

COELHO, J. B. **Geometria fractal: um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do ensino médio**. 2015. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Tocantins, Rio de Janeiro: UFT, 2015.

CONCEIÇÃO, E. B. O. **Singularidades e subjetividades de um grupo do PIBID na área de matemática: contribuições para o processo de formação de identidade professoral**. 2019. 186 fls. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão: UFS, 2019.

CORREIA, J. G. A. M. **Maneiras de agir e pensar significativos para auto formação do professor que ensina matemática**. 2017. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco: UFAC, 2017.

CRUZ, A. J. **Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017**. 2019. 139 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão: UFS, 2019.

DALLEMOLE, J. J. **A teoria dos registros de representação semiótica em um ambiente virtual de aprendizagem: uma proposta metodológica explorando os conceitos de ponto, reta e circunferência no ensino médio**. 2015. 264f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas: ULBRA, 2015.

DUDA, R. **Matemática financeira e planilhas eletrônicas: uma abordagem com a incorporação de recursos computacionais**. 2014. 116f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa: UEPG, 2014.

EVANGELISTA, A. J. **A situação do ensino da matemática no ensino médio do município de Lábrea-AM**. 2015. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Rondônia, Rio de Janeiro: UNIR, 2015.

FARRAS, B. B. BOSCH, M. GASCÓN, J. *Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática*. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013.

FARIAS, K. S. C. S. **A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2008. 216f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande: UFMS, 2008.

FERNANDES, J. A. N.; GUERRA, R. B. Dimensão ecológica de um problema didático: praxeologia com matemática no ensino de limite em curso de engenharia. In: ALMOLOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S. e HENRIQUES, A. (Org.). **Teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1ed. Curitiba: CRV, 2018, v. 1, p. 505-522.

FERREIRA, E. M. **Análise da abrangência da matriz de referência do ENEM com relação às habilidades nos itens de matemática aplicados de 2009 a 2013**. 2014. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília: UNB, 2014.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: construção do plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra**. 2011. 290f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá: UEM, 2011.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. In: **Zetetiké**, ano 3, n. 4, p. 01-38, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

FIORENTINI, D. et al. O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 - 2012**. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. p. 17 - 42.

FIGUEROA, T. P; ALMOULOU, S. A. Reflexões sobre um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático limites de funções. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.20, n.3, pp. 72-96, 2018.

FREITAS, M. V. C. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio**. 2015. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande: UFMS, 2015.

FREITAS, R. L. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de Geometria analítica plana do ponto e da reta**. 2019. 408f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo: PUC-SP, 2019.

FRIGOTTO, G., CIAVATTA, M. Educação básica no Brasil na década de 1990. **Educação & Sociedade**, 24, 2003, pp. 93-130.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, M. G. **Geometria nas questões do Enem sob a ótica da resolução de problemas: um auxílio ao trabalho docente**. 2017. 140f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Rio de Janeiro: UFVJM, 2017.

GASCÓN, J. *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental*. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Cidade do México, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.

GÁSCON, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOULOU, S. FARIAS, L. M. S. HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1ª ed. Curitiba: CRV, 2018, p. 41 - 66.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2: ensino médio. 7ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

JAMMAL, E. F. **Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio**. 2011. 244f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2011.

JESUS, F. J. A. **Uso(s) do livro didático por professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental de escolas da rede estadual de Aracaju/SE**. 2017. 128 f. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão-SE: UFS, 2017.

KLUTH, V. S.; ALMOULOU, S. A. A teoria antropológica do didático: primórdio de uma trajetória direcionado à prática de ensino de matemática. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.3, pp. 1-25, 2018.

LACERDA, C. C.; SEPEL, L. M. N. Percepções de professores da Educação Básica sobre as teorias do currículo. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 45, 2019.

LEME DA SILVA, M. C. **Histórias do ensino de geometria nos anos iniciais e seus parceiros: desenho, trabalhos manuais e medidas**. 1º edição. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequências de Fibonacci e a razão áurea: aplicações no ensino básico**. 2016. 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

LOPES, A. R. C. **Conhecimento escolar: ciência e cotidiano**. Rio de Janeiro: UERJ, 1999

LOPES, A. C. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a submissão ao mundo produtivo. **Educação & Sociedade**, 23, 2002, pp. 386-400.

LOPES, A. C.; MACEDO, E. F. de. **Teorias de currículo**. São Paulo: Cortez, 1ª ed., v. 1, p. 271, 2011.

LORENZATO, S. A. Porque não ensinar Geometria? In: **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p.3-13.

LUCKESI, C. C. **Avaliação em educação: questões epistemológicas e práticas**. São Paulo: Cortez, 2018.

MACEDO, E. “A Base é a Base”. E o currículo o que é? In: AGUIAR, M. A.; DOURADO, L. F. **A BNCC na contramão do PNE 2014-2024: avaliação e perspectivas**. Recife: ANPAE, 2018. p. 59.

MENEZES, M. B. de. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectiva da Educação Matemática** – UFMS, volume 8, número temático, 2015, ISSN:2359-2842.

MOEHLECKE, S. O ensino médio e as novas diretrizes curriculares nacionais. **Revista Brasileira de Educação**, 17(49), 2012, pp. 39-58.

MOTA, S. H. A. **Currículo de geometria espacial do Colégio 7 de setembro**: influências do vestibular da Universidade Federal do Ceará e do ENEM. 2015. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

NADALON, D. O. **Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do software geogebra**. 2018. 103f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2018.

NASCIMENTO, M. N. Ensino médio no Brasil. **Publicações UEPG Ciências Humanas, Sociais Aplicada, Linguagem, Letras e Artes**, 2007, pp. 77-87.

OLIVEIRA, E. A., FALK, J. E., CARVALHO, M. P., GONÇALVES, E. N. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Formação Docente e a Gestão Escolar. **SIMPÓSIO BRASILEIRO DE POLÍTICA E ADMINISTRAÇÃO DA EDUCAÇÃO**, 26, 2013, pp. 1-13.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP: UNICAMP, 1989.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. In: **Revista Zetetiké**, Campinas, n 1, 1993 p 7-17.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. Porto Alegre: Editora Artmed, 1999.

PERRENOUD, P. Construir competências é viras as costas aos saberes? In: **Pátio. Revista Pedagógica**, 1999a. p.15-19.

PERRENOUD, P. O que fazer da ambigüidade dos programas escolares orientados para as competências? In: **Pátio. Revista Pedagógica**. Porto Alegre, 2002. pp. 1-7.

PRODANOV, C. C.; Freitas, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAMOS, M. N. **A pedagogia das competências**. 3ªed. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

RANGEL, M., MOCARZEL, M. S., PIMENTA, M. D. A trajetória das competências e habilidades em educação no Brasil. **Meta: Avaliação**, 8, 2016. pp. 28-47.

RICARDO, E. C. Discussão acerca do ensino por competências. **Cadernos de Pesquisa**, 40, 2010. pp. 605-628.

RODRIGUES, J. G. L. **Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em geometria plana?** 2016. 138f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função:** uma investigação das praxeologias. 2006. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SANTOS, C. M. **Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a geometria no ensino médio.** 2013. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

SANTOS, N. M. S. **Mosaicos:** construção através do geogebra e aplicações para o ensino básico. 2017. 89f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Rio de Janeiro, 2017.

SANTOS, N. M. S. **Praxeologia para ensinar sólidos geométricos:** o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS. 2021. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2021.

SANTOS, R. R. **Análise de erros em questões de geometria do ENEM:** um estudo com alunos do Ensino Médio. 2014. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual De Maringá, Maringá, 2014.

SANTOS, S. P. **A teoria antropológica do didático:** condições e restrições reveladas pelas teses e dissertações defendidas no Brasil na área da educação matemática. 2020. 170f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

SACRISTÁN, J. G. O que significa o currículo? In: J. G. SACRISTÁN, **Saberes e incertezas sobre o currículo.** São Paulo: Penso, 2010.

SILVA, B. C. **Identificando sinalizações referentes às expectativas de aprendizagem sobre geometria, ao término da educação básica.** 2004. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

SILVA, C. R. **Articulação das representações cartesiana, paramétrica e polar de retas e circunferências, na transição do ensino médio, e do ensino superior.** 2015. 331f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, C. V.; ALMOULOU, S. A. Um estudo sobre o objeto matemático simetria ortogonal à luz da ecologia didática. In: ALMOULOU, S. FARIAS, L. M. S.

HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1ª ed. Curitiba: CRV, 2018, p. 225-264.

SILVA, M. R., COLONTONIO, E. M. As diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio e as proposições sobre trabalho, ciência, tecnologia e cultura. **Revista Brasileira de Educação**, 19(58), 2014, pp. 611-628.

SILVA, S. R. L. **Proposta para a abordagem de geometria analítica via ensino híbrido**. 2017. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

SILVA, L. P. **Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva**. 2019. 209 fls. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2019.

SILVA, F. L. G. R.; POSSAMAI, T.; MARTINI, T. A. Avanço das políticas conservadoras no Ensino Médio brasileiro: a revitalização da dualidade histórica na formação dos jovens como política. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 15, p. 1-17, 2020.

SOARES, D. O. **Logaritmos e função logarítmica na matemática escolar brasileira**. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **#Contato matemática**, 2º ano. 1ª edição. São Paulo, FTD, 2016.

VALENTE, W. R. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares? **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 11, n. 34, p. 645-662, set./dez. 2011.

VARELLA, M. **Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos**. 2010. 212f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

VERAS, J. M. **Modelagem para o software Virtual-Taneb baseado na teoria da resposta ao item para avaliar o rendimento dos alunos**. 2010. 110f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2010.

VIEIRA, S. M. S. **Registros semióticos em porcentagem: análise da produção de alunos na resolução de problemas triparticionados**. 2013. 205f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2013.

WALLE, J. A. V. de. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: Paulo Henrique Colonesse. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 211f. Dissertação de Mestrado em Educação, na linha de pesquisa: Educação e Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: UFMG, 2001.

ANEXO



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS
EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA**

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

- I. **Dominar linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
- II. **Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricogeográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
- III. **Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- IV. **Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
- V. **Elaborar propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

- H1** - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
- H2** - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- H3** - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- H4** - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- H5** - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

ANEXO

Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência

1. Linguagem, Códigos e suas Tecnologias

- **Estudo do texto: as sequências discursivas e os gêneros textuais no sistema de comunicação e informação** - modos de organização da composição textual; atividades de produção escrita e de leitura de textos gerados nas diferentes esferas sociais - públicas e privadas.
- **Estudo das práticas corporais: a linguagem corporal como integradora social e formadora de identidade** - *performance* corporal e identidades juvenis; possibilidades de vivência crítica e emancipada do lazer; mitos e verdades sobre os corpos masculino e feminino na sociedade atual; exercício físico e saúde; o corpo e a expressão artística e cultural; o corpo no mundo dos símbolos e como produção da cultura; práticas corporais e autonomia; condicionamentos e esforços físicos; o esporte; a dança; as lutas; os jogos; as brincadeiras.
- **Produção e recepção de textos artísticos: interpretação e representação do mundo para o fortalecimento dos processos de identidade e cidadania** – Artes Visuais: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade. Teatro: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Música: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Dança: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Conteúdos estruturantes das linguagens artísticas (Artes Visuais, Dança, Música, Teatro), elaborados a partir de suas estruturas morfológicas e sintáticas; inclusão, diversidade e multiculturalidade: a valorização da pluralidade expressada nas produções estéticas e artísticas das minorias sociais e dos portadores de necessidades especiais educacionais.
- **Estudo do texto literário: relações entre produção literária e processo social, concepções artísticas, procedimentos de construção e recepção de textos** - produção literária e processo social; processos de formação literária e de formação nacional; produção de textos literários, sua recepção e a constituição do patrimônio literário nacional; relações entre a dialética cosmopolitismo/localismo e a produção literária nacional;

2. Matemática e suas Tecnologias

- **Conhecimentos numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
- **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
- **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
- **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º grau, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
- **Conhecimentos algébricos/geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.