

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA (PEQ-UFS)

DENISSON DE OLIVEIRA LIBÓRIO

**CONSTRUÇÃO DE UMA BASE DE INFORMAÇÕES PARA A DIFERENÇA DE
PRESSÕES ARBITRÁRIAS EM UMA SUSPENSÃO PARTICULADA**

São Cristóvão (SE)

2016

DENISSON DE OLIVEIRA LIBÓRIO

**CONSTRUÇÃO DE UMA BASE DE INFORMAÇÕES PARA A DIFERENÇA DE
PRESSÕES ARBITRÁRIAS EM UMA SUSPENSÃO PARTICULADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Sergipe, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Santos Silva

Coorientador: Prof. Dr. Rogério Luz Pagano

São Cristóvão (SE)

2016

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

L696c Libório, Denisson de Oliveira
Construção de uma base de informações para a diferença de pressões arbitrárias em uma suspensão particulada / Denisson de Oliveira Libório ; orientador Antônio Santos Silva. – São Cristóvão, 2016.
75 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Engenharia química. 2. Suspensão particulada. 3. Pressões arbitrárias. 4. Modelagem matemática. I. Silva, Antônio Santos, orient. II. Título

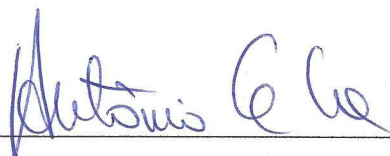
CDU: 66.05:54-148

DENISSON DE OLIVEIRA LIBÓRIO

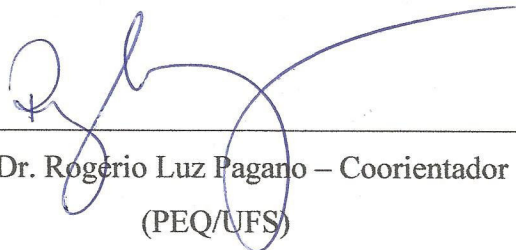
**CONSTRUÇÃO DE UMA BASE DE INFORMAÇÕES PARA A DIFERENÇA DE
PRESSÕES ARBITRÁRIAS EM UMA SUSPENSÃO PARTICULADA**

Dissertação de mestrado aprovada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da
Universidade Federal de Sergipe em 27 de Janeiro de 2016

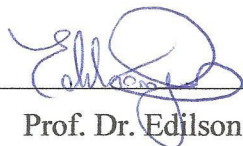
BANCA EXAMINADORA



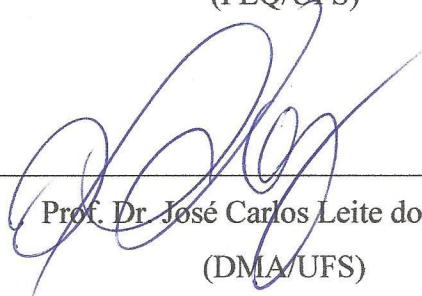
Prof. Dr. Antônio Santos Silva – Orientador
(PEQ/UFS)



Prof. Dr. Rogério Luz Pagano – Coorientador
(PEQ/UFS)



Prof. Dr. Edilson de Jesus Santos
(PEQ/UFS)



Prof. Dr. José Carlos Leite dos Santos
(DMA/UFS)

*Aos meus pais Arestides Libório
e Mary Lúcia e a meus irmãos
José Arilúcio, Arisson e Ibson, os
quais amo incondicionalmente*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força, fé, paciência, sabedoria, inteligência e presença na minha vida. Sem Tua luz eu não saberia como tomar decisões e seguir caminhos. Também à Santíssima Virgem Maria que sempre esteve na minha vida para me acolher, me abraçar, me perdoar, me compreender, me acalmar, me ensinar, me educar, me formar e me amar.

Muitos contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho, expresso a todos meu agradecimento. Em especial:

Aos meus pais, Arestides Libório e Mary Lúcia, pelo amor incondicional, carinho, compreensão, paciência, força, incentivo e por acreditar nas minhas escolhas. Obrigado! Amo vocês mais que tudo na minha vida. Vocês são as razões do meu viver.

Aos meus irmãos José Arilúcio, Arisson e Ibson, às minhas cunhadas Rose, Larissa e Meiryale e aos meus sobrinhos Maria Clara, Maria Valentina, Maria Piedade e Yan Victor pela amizade, força, carinho e, principalmente, paciência.

Ao professor Dr. Antônio Santos Silva, pela excelente orientação, pela paciência, pela parceria, pelos incentivos e por proporcionar momentos únicos de aprendizagem.

Aos professores Drs. Edilson de Jesus Santos, Pedro Leite de Santana e Rogério Luz Pagano, pelas valiosas discussões e contribuições, pelos incentivos constantes e pelos seus exemplos como educadores.

Aos demais professores do PEQ/UFS, pela amizade e por compartilhar seus conhecimentos, com os quais foi possível a realização deste trabalho. Em especial ao professor Dr. José Jailton Marques.

À Tammyris Carvalho pela amizade, pelo convívio, pelo companheirismo e pelas motivações perante a trajetória que foi árdua. Somos sobreviventes, somos vencedores!

“A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa a emoção fundamental que está na raiz de toda a ciência e de toda a arte.”

Albert Einstein

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

“Ninguém pode conceber tão bem uma coisa e fazê-la sua, quando a aprende de um outro, em vez de a inventar ele próprio.”

René Descartes

RESUMO

O estudo do movimento de suspensões particuladas é relevante tanto do ponto de vista teórico como em muitas situações de interesse prático. O movimento de queda acelerada de uma partícula no fluido é um ponto de partida para obter informações de parâmetros de uma suspensão, em especial a parte constitutiva da força de interação. Do ponto de vista de misturas sólido-fluido, a suspensão particulada pode ser estudada com base na teoria contínua de misturas sem reações químicas por estabelecer equações dos balanços de forma mais generalizada, que é importante para a análise de grandezas constitutivas e, quando há algum tipo de restrição, grandezas arbitrárias. A depender de como essas grandezas são agrupadas, são obtidas formas diferentes de sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. A escolha desse sistema deve ser a que facilita a obtenção de soluções exatas, as mais simples possíveis, para serem inseridas em modelagem matemática. Neste trabalho, no contexto de meio poroso com restrição de incompressibilidade, é preparada uma base de informações para o estudo de grandezas arbitrárias e constitutivas de uma suspensão particulada. São determinadas duas soluções exatas de um sistema de equações do movimento da suspensão particulada. As duas soluções são inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, a qual envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, inclusive pela onda de aceleração. Uma solução é inserida na região de sedimentação livre e a outra na região de transição. Os movimentos da onda e das interfaces são estabelecidos pela compatibilização da solução exata da região de sedimentação livre com a solução exata da região de transição, os quais dependem dos parâmetros básicos velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces. Das soluções exatas e dos movimentos das interfaces são estabelecidas duas funções velocidades que serviram como base para o cálculo dos parâmetros básicos, juntamente com o uso de dados experimentais da literatura de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta. Em seguida, são propostas equações para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão. Com isso, fica estabelecida a base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. Com o uso da base é determinada a equação para o cálculo da diferença de pressões arbitrárias. São mostrados resultados numéricos do cálculo da velocidade da onda de aceleração, do ponto de encontro da onda com a interface superior descendente, do ponto de encontro das interfaces e dos parâmetros estabelecidos envolvidos nas equações do modelo, como também na diferença de pressões arbitrárias.

PALAVRAS-CHAVE: suspensão particulada; pressões arbitrárias; modelagem matemática

ABSTRACT

The study of the motion of particulate suspensions is important both from a theoretical point of view and in many situations of practical interest. The accelerated fall movement of a particle in the fluid is a starting point for parameter information of a suspension, in particular a constitutive part of the interaction force. From the viewpoint of solid-fluid mixtures particulate suspension can be studied based on continuous theory mixtures without chemical reaction, because establishing the equations of the balances more generally, which is important for the analysis of constituent quantities, and when there is some type of restriction, arbitrary quantities. Depending on how these values are grouped, different forms of the equations of motion system of a particulate suspension with incompressibility constraint are obtained. The choice of this system shall be that easy to obtain exact solutions, the simplest possible, to be inserted in mathematical modeling. This work dealt with porous media with incompressible constraints and is a study on the preparation of a preliminary background information to arbitrary and constitutive quantities of a particulate suspension. Two exact solutions of a system of motion equations for the particulate suspension were determined. The solutions were applied in the mathematical modeling of the gravitational motion of particulate suspensions in a test tube. The modeling considered sub-regions that varied with time and were bounded by moving interfaces and acceleration wave. One solution was embedded in the free sedimentation region, and the other, in the transition region. Motions of the wave and the interfaces were established by the compatibilization of the exact solution of the free sedimentation region with that of the transition region. The motions depend on the velocity parameters of the acceleration wave, meeting point of the wave with the descending upper interface, and meeting point of the interfaces. From the exact solutions and motions, two velocity functions were established, and these functions, along with the experimental data on height versus time of the descending upper interface of the test tube as obtained from literature, served as the basis for calculating the parameters. Then, equations for the constituent parts of the force of interaction and of each strain tensor are proposed. Thus, the preliminary background information for studying the motion of a particulate suspension with an incompressibility constraint was established. Using the background information, the equation to calculate the difference in arbitrary pressures is determined. The numerical calculation results of the acceleration wave velocity, meeting point of the wave with the descending upper interface, the meeting point of the interfaces, of the parameters in the model equations and the difference in arbitrary pressures are reported in this paper.

KEYWORDS: particulate suspension; arbitrary pressures; mathematical modeling

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Determinação do mínimo de w para uma suspensão aquosa de CaCO_3	58
Tabela 2 – Valores de w_0 para diversas suspensões.....	59
Tabela 3 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de Atapulgita.....	60
Tabela 4 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de microbarita	60
Tabela 5 – Suspensão aquosa de esferas de vidro	61
Tabela 6 – Parâmetros da suspensão aquosa de esferas de vidro	61
Tabela 7 – Comparação entre as alturas experimental e teórica da suspensão aquosa de esferas de vidro	62
Tabela 8 – Suspensão aquosa de esferas de vidro	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Perfil de uma suspensão inicialmente homogênea com partícula de tamanho 37,7 μm e porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,30$34

Figura 2 – Perfis de uma suspensão inicialmente homogênea com partículas grandes a) e de uma suspensão com partículas pequenas. Porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,30$34

Figura 3 – Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.39

Figura 4 – Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta com a inclusão da letra S (Sistema S) em cada região.43

Figura 5 - Comparação entre as alturas experimental e teórica da interface superior descendente.....62

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	Porosidade
ρ_1	Densidade do constituinte fluido
ρ_2	Densidade do constituinte sólido
ρ_f	Massa específica do fluido puro
ρ_s	Massa específica do sólido puro
V_1	Velocidade do constituinte fluido
V_2	Velocidade do constituinte sólido
t	Variável tempo
y	Coordenada espacial
P_f	Pressão do constituinte fluido
P_s	Pressão do constituinte sólido
P_{sf}	Diferença de pressões arbitrárias
φ	Função do tempo
ϕ	Função da posição e do tempo
a_1	Aceleração do constituinte fluido
a_2	Aceleração do constituinte sólido
σ_1	Parte constitutiva do tensor tensão para o fluido
σ_2	Parte constitutiva do tensor tensão para o sólido
m	Parte constitutiva da força de interação
g_1	Força de campo sobre o fluido
g_2	Força de campo sobre o sólido

H	Altura inicial da suspensão na proveta
x	Altura da interface superior descendente
h	Altura da onda de aceleração
z	Altura da interface inferior ascendente
t_0	Instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
t_c	Instante de encontro das duas interfaces
x_0	Altura de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
x_c	Altura de encontro das duas interfaces
ε_0	Porosidade inicial
u_0	Velocidade de sedimentação livre
w_0	Velocidade da onda de aceleração
A	Função comprimento
γ	Constante com dimensão de velocidade
B	Função da porosidade
Q	Função da porosidade
ψ	Função da posição e do tempo
U	Velocidade de superfície em movimento
$\bar{\varepsilon}$	Porosidade média da suspensão
ε_m	Porosidade média na região de compactação
g	Aceleração da gravidade
N	Comprimento função da porosidade
w	Função velocidade
W	Função velocidade
T_1	Tensor tensão do constituinte 1

- T_2 Tensor tensão do constituinte 2
- l_1 Força de interação do constituinte 1
- l_2 Força de interação do constituinte 2
- E_1 Energia de interação do constituinte 1
- E_2 Energia de interação do constituinte 2
- A_1 Energia de Helmholtz do constituinte 1
- A_2 Energia de Helmholtz do constituinte 2
- p_1 Função escalar arbitrária do constituinte 1
- p_2 Função escalar arbitrária do constituinte 2

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. REVISÃO DA LITERATURA	17
2.1 QUEDA ACELERADA DE UMA PARTÍCULA ESFÉRICA NUM FLUIDO	17
2.2 MEIO POROSO SATURADO COM FLUIDO	18
2.2.1 Meio poroso com restrição de incompressibilidade	19
2.3 MOVIMENTO GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA	29
3. METODOLOGIA.....	35
3.1 DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES EXATAS.....	35
3.1.1 Primeira solução	37
3.1.2 Segunda solução	37
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA	38
3.3 USO DAS SOLUÇÕES EXATAS	43
3.3.1 Região de sedimentação livre.....	44
3.3.2 Região de transição	44
3.3.3 Movimento da Interface Superior Descendente	45
3.3.4 Velocidade da Onda de Aceleração	47
3.3.5 Movimento da Interface Inferior Ascendente	49

3.3.6 Condições para o ponto de encontro das interfaces	51
3.3.7 Ponto de encontro das interfaces	52
3.4 BASE DE INFORMAÇÕES	52
3.5 EQUAÇÕES PROPOSTAS PARA AS GRANDEZAS CONSTITUTIVAS	53
3.6 DIFERENÇA DE PRESSÕES ARBITRÁRIAS	56
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
5. CONCLUSÃO.....	64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
APÊNDICE A – Altura da Interface Superior Descendente.....	70
APÊNDICE B – Roteiro para execução da base.....	72

1. INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de suspensões particuladas é relevante tanto do ponto de vista teórico, como em muitas situações de interesse prático, a exemplo de sedimentação, filtração, refrigeração, mecânica dos solos, hidrologia, engenharia petrolífera, engenharia ambiental, purificação da água, projetos de equipamentos industriais, cálculo de parâmetros reológicos e diversas outras áreas.

Com base na mecânica do contínuo para corpo único, é importante destacar que o movimento de queda acelerada de uma partícula num fluido é um ponto de partida para obtenção de informações que podem ser usadas na análise de parâmetros de uma suspensão particulada, principalmente para a força de interação que envolve resistividade ou força de arraste ou ainda coeficiente de arraste.

Do ponto de vista de misturas sólido-fluido, a suspensão particulada pode ser estudada com base em uma teoria mais adequada, como é o caso da teoria contínua de misturas sem reações químicas, que estabelece equações dos balanços de forma mais generalizada, inclusive a desigualdade entrópica que é importante tanto para análise de grandezas constitutivas, como também para grandezas arbitrárias quando há algum tipo de restrição.

Neste caso, a restrição é de incompressibilidade, pois as densidades do sólido e do fluido puros são consideradas constantes. Desse modo, no contexto de meio poroso saturado com fluido, as equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, estabelecidas pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, além de grandezas constitutivas, envolvem grandezas arbitrárias as quais equilibram tais equações em qualquer situação e não permitem que grandezas constitutivas sejam sobrecarregadas com dados que deveriam estar em grandezas arbitrárias.

Além disso, dependendo de como as grandezas constitutivas e arbitrárias são agrupadas e interpretadas, formas diferentes podem ser obtidas para sistemas das equações do movimento de uma suspensão particulada. Para efeito do uso em modelagem matemática, a forma do sistema escolhido é aquela que facilita a determinação de soluções exatas, as mais simples possíveis, compatíveis com o modelo.

O trabalho de Silva e Jesus (2013) mostra que existe uma forma de sistema com duas equações envolvendo a diferença de pressões arbitrárias onde uma das equações tem como solução exata a diferença de pressões arbitrárias como função da porosidade.

Por isso, são de fundamental importância para obtenção de informações sobre a diferença de pressões arbitrárias e as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, desde que soluções exatas, as mais simples e explícitas possíveis, do sistema possam ser inseridas em algum tipo de modelagem adequada.

Em uma dimensão, pode ser utilizada modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta ou modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta, que não é simplesmente um problema puro de sedimentação, pois a modelagem envolve sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais.

Além disso, é preciso estabelecer condições iniciais e de contorno, considerar as condições de salto através das interfaces em movimento para caracterizar o problema estabelecido pela modelagem. As soluções de todas as regiões, levando-se em conta as interfaces em movimento, devem ser compatibilizadas. Assim, resolvido o problema de forma completa, a compatibilização permite que parâmetros envolvidos nas soluções sejam levados para a equação da altura versus tempo do movimento da interface superior descendente. Neste sentido, parâmetros envolvidos nas soluções podem ser determinados com dados experimentais de altura versus tempo de tal interface, por comparação da altura teórica com a experimental.

Desse modo, por força da modelagem matemática, dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente do teste de proveta são suficientes para estabelecimento de funções porosidade e velocidades em regiões do próprio teste, sendo de fundamental importância destacar as regiões nas quais as soluções são explícitas, pois fornecem informações de forma mais direta.

O objetivo deste trabalho é a construção de uma base de informações para a diferença de pressões arbitrárias. Sendo necessário, para isso, escolher um sistema de equações do movimento da suspensão particulada; determinar soluções exatas do sistema; inserir as soluções em modelagem matemática do movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta; compatibilizar as soluções; propor equações para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão; e determinar a equação para o cálculo da diferença de pressões arbitrárias.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1 QUEDA ACELERADA DE UMA PARTÍCULA ESFÉRICA NUM FLUIDO

Sobre queda acelerada de partículas em fluidos, é de fundamental importância destacar o trabalho de Basset (1961), que além de mostrar o estabelecimento de uma equação íntegro-diferencial para a velocidade de queda acelerada de uma partícula esférica num fluido newtoniano incompressível, envolvendo a história da aceleração, também apresenta um estudo sobre soluções aproximadas para tal equação.

Neste sentido, o trabalho de Basset (1961) pode ser usado como ponto de partida para estudo de queda de corpos em fluidos, como pode ser evidenciado no levantamento feito por Feng e Joseph (1995), onde foi estudado o movimento instável de partículas em regime laminar para validar a abordagem do método quase-estacionário, que pressupõe que o movimento da partícula é tão lenta que é composto de uma série de estados de equilíbrio, onde foi possível concluir que, utilizando simulações numéricas diretas, o erro da abordagem quase-estacionário é quantitativamente significativa, mas qualitativamente insignificante.

Já Mollinger *et al.* (1999), também utilizou o movimento de queda acelerada como base inicial para estudar o movimento oscilatório de queda de partículas esféricas com uma relação entre os diâmetros de partícula e do tubo relativamente grande. Onde foi observado que as partículas aceleram e desaceleram enquanto está se instalando na parte inferior da proveta, sendo considerado um fenômeno inesperado, pois, era até então desconhecido na sedimentação de partículas esféricas.

Segundo Massarani (2002), a força resistiva exercida pelo fluido sobre a partícula depende das dimensões, da forma da partícula e do campo de velocidades do fluido não perturbado pela presença da partícula. Além disso, ela é influenciada pela presença de contornos rígidos e de outras partículas e, no movimento acelerado, depende da história da aceleração da partícula.

Para estudar o movimento instável de duas esferas sólidas em regime de Stokes, Ardekani e Rangel (2006) deram início a análise a partir da queda acelerada e foram utilizados dois métodos a fim de calcular a força exercida sobre cada instável partícula. Na primeira abordagem, foi empregue um método simplificado de reflexões em combinação com o método de ponto-força, já na segunda abordagem, um método simplificado de reflexões combinados com uma solução de fluxo instável de Bürger foi considerado. Como resultados,

foi verificado que a utilização da força de Basset, correspondendo ao movimento de duas esferas, dá origem a uma maior força de arraste, em comparação com a solução utilizando somente a força de Basset.

Foi estudado analiticamente por Jalaal *et al.* (2010) o movimento de aceleração de uma partícula esférica caindo verticalmente em um fluido newtoniano incompressível, sendo utilizado o Método de Perturbação Homotópica (MPH) e obtidas expressões como solução para a velocidade instantânea, aceleração e posição da partícula.

O movimento de uma esfera que cai verticalmente num fluido viscoso foi analisado por Soares *et al.* (2012), sendo considerado os efeitos da massa adicionada, combinado a solução analítica para o movimento da partícula com o método numérico iterativo para determinar parâmetros da suspensão e validado através de dados experimentais da literatura, sendo possível também compreender as interações fluido/partículas.

O movimento de queda de partículas com formato bicôncavo (forma de haltere) foi estudado por Srivastava e Yadav (2012), tendo parâmetros encontrados através de métodos numéricos. Nessa mesma abordagem, um estudo bibliográfico de suspensões com partículas não esféricas simétricas foi feito por Srivastava D. K e Srivastava, N. (2013).

Uma nova solução para o movimento de aceleração de uma partícula não esférica caindo verticalmente em um fluido newtoniano incompressível foi determinado por Torabi e Yaghoobi (2013), onde a velocidade e a aceleração foram determinadas através do Método de Iteração Variacional (MIV) e aproximação de Padé.

O trabalho de Silva e Jesus (2015) transformou a equação íntegro-diferencial em uma equação diferencial e estabeleceu alternativas para a determinação da velocidade de queda acelerada de uma partícula esférica num fluido newtoniano incompressível.

Os trabalhos citados apresentam elementos que podem ser usados como ponto de partida para o estudo do movimento de uma suspensão particulada, principalmente aqueles oriundos da resistência dinâmica. No entanto, a teoria contínua de misturas sem reações químicas é quem fornecerá equações de balanço mais generalizadas, envolvendo pressões arbitrárias, para o estudo do movimento de uma suspensão particulada.

2.2 MEIO POROSO SATURADO COM FLUIDO

Num meio poroso saturado com um fluido e modelado pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, pode-se escrever que:

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (01)$$

onde ε é a função porosidade, ρ_1 é a densidade do constituinte fluido, ρ_2 é a densidade do constituinte sólido, ρ_f e ρ_s , são respectivamente, as densidades do sólido e do fluido puros (SILVA e JESUS, 2013).

Balances básicos

No contexto da teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, dos trabalhos de Green *et al.* (1970), Atkin e Craine (1976a,b), Demiray (1981) e Ahmadi (1985), escrevem-se a seguir os balances de massa e de quantidade de movimento linear.

Balances de massa:

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} V_\alpha = 0 \quad \dot{\rho}_\alpha \equiv \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + (\operatorname{grad} \rho_\alpha) \cdot V_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \quad (02)$$

onde div é o operador divergente espacial, V_α é a velocidade, t é a variável tempo, grad é o operador gradiente espacial e $\alpha = 1$ indica o constituinte fluido.

Balances de quantidade de movimento linear:

$$\rho_\alpha a_\alpha = \operatorname{div} T_\alpha + l_\alpha + \rho_\alpha g_\alpha \quad a_\alpha \equiv \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (\operatorname{grad} V_\alpha) V_\alpha \quad (03)$$

onde a_α é a aceleração, T_α é o tensor tensão, l_α é a força de interação e g_α é a força de campo.

Além da força de interação l_α , outro tipo de interação importante para a formulação da teoria quase mecânica para o Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade (MPRI) é a energia de interação E_α . Desse modo, além das Equações (02) e (03), para a mistura como um todo, também se pode escrever

$$l_1 + l_2 = 0 \quad E_1 + E_2 = 0 \quad (04)$$

2.2.1 Meio poroso com restrição de incompressibilidade

Na teoria de um corpo simples com restrição de incompressibilidade, o tensor tensão é dividido em duas partes: uma constitutiva e outra arbitrária não determinada pela história do movimento, reduzida a uma pressão arbitrária por força de um axioma que estabelece que a

parte arbitrária não realiza trabalho para todo movimento compatível com a restrição. A motivação para tal axioma pode ser pensada como oriunda da desigualdade entrópica de Clausius-Duhem, no sentido de que a parte arbitrária do tensor tensão deve ser retirada da desigualdade, para que a mesma fique na sua forma natural de exploração de equações constitutivas, gerando assim, a ideia de produção entrópica da parte arbitrária nula, como mostra o estudo de Green *et al.* (1970) sobre a termodinâmica de um corpo simples com restrições.

Em sistemas particulados, no contexto de meio poroso saturado com fluido, existe na literatura uma grande discussão sobre as várias teorias estabelecidas para o movimento de um meio poroso com restrição de incompressibilidade, principalmente a respeito dos balanços de quantidade de movimento linear, como mostra a análise ampla e detalhada do trabalho de Bedford e Drumheller (1983).

O trabalho de Silva (1990), também trata desta questão através do estabelecimento de uma teoria puramente mecânica para um MPRI: meio poroso saturado com fluido, modelado pela teoria contínua de misturas sólido-fluido sem reações químicas, na qual as densidades dos sólidos e do fluido puros são constantes, que caracterizam restrição de incompressibilidade.

Ainda segundo Silva (1990), cada tensor tensão envolvido nesta teoria é decomposto em uma parte constitutiva e outra arbitrária não determinada pela história do movimento, como também a força de interação. As partes arbitrárias são determinadas com base em desigualdade entrópica, sob o princípio de que a soma das produções entrópicas das mesmas é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade.

Por ser baseada em desigualdade entrópica, a teoria de Silva (1990) é bem fundamentada no sentido de que a mesma é suportada no princípio básico de validade da desigualdade para todos os processos termodinâmicos admissíveis. Ela produz resultados compatíveis com os de várias teorias da literatura como apresentados em Ahmadi (1985).

Mesmo assim, ainda é uma teoria simplificada, uma vez que o axioma usado por Silva (1990) é baseado apenas na parte mecânica da desigualdade entrópica utilizada, produzindo como consequência, a mesma pressão arbitrária para as fases sólida e fluida. Desse modo, o axioma puramente mecânico não é adequado quando o meio poroso apresenta uma diferença de pressão entre fases significativa.

Por isso, Silva e Jesus (2013), adicionando ao axioma puramente mecânico a produção entrópica da parte arbitrária de cada energia livre de Helmholtz, estabeleceram uma

teoria quase mecânica para o MPRI, assim chamada por não envolver produções entrópicas com derivadas e/ou gradientes de temperatura. Com isso, foi mostrado que o novo axioma produz pressões arbitrárias diferentes para as fases sólida e fluida e, além disso, causa grande influência nos balanços de quantidade de movimento linear, uma vez que surgem novos termos de interação.

O entendimento para a teoria apresentada por Silva e Jesus (2013) começa com o fato de que para o MPRI ρ_s e ρ_f são constantes. Com isso, das Equações (01) e (02), pode-se escrever:

$$\varepsilon \mathbf{1} \cdot L_1 + V_1 \cdot \text{grad} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad L_1 \equiv \text{grad} V_1 \quad (05)$$

$$(1 - \varepsilon) \mathbf{1} \cdot L_2 - V_2 \cdot \text{grad} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad L_2 \equiv \text{grad} V_2 \quad (06)$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade (SILVA, 1979).

As formas das Equações (05) e (06), o tensor tensão T_α , a força de interação l_α , a energia de interação E_α e a energia livre de Helmholtz A_α são elementos básicos para o estabelecimento de uma teoria quase mecânica para o MPRI, começando com as seguintes decomposições:

$$l_\alpha = l_\alpha^a + l_\alpha^c \quad T_\alpha = T_\alpha^a + T_\alpha^c \quad (07)$$

$$E_\alpha = E_\alpha^a + E_\alpha^c \quad A_\alpha = A_\alpha^a + A_\alpha^c \quad (08)$$

onde o índice superior a indica parte arbitrária, não determinada pela história do movimento, e o índice superior c indica parte constitutiva. Além disso, postula-se aqui que as partes arbitrárias e constitutivas, de cada força de interação e cada energia de interação, também devem satisfazer a Equação (04), ou seja:

$$l_1^a + l_2^a = 0 \quad l_1^c + l_2^c = 0 \quad (09)$$

$$E_1^a + E_2^a = 0 \quad E_1^c + E_2^c = 0 \quad (10)$$

No cálculo das partes arbitrárias, pode-se escrever para cada constituinte o seguinte axioma: a soma das produções entrópicas das partes arbitrárias das Equações (07) e (08) é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade. Com isso, pode-se escrever

$$\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha^a}{\partial t} + (l_\alpha^a + \rho_\alpha \text{grad} A_\alpha^a) \cdot V_\alpha - T_\alpha^a \cdot L_\alpha - E_\alpha^a = 0 \quad (11)$$

Então, para que a Equação (05) do constituinte fluido não seja destruída pelo axioma expresso na Equação (11) para $\alpha = 1$, deve-se ter:

$$l_1^a = p_1 \text{grad} \varepsilon - \rho_1 \text{grad} A_1^a \quad T_1^a = -\varepsilon p_1 \mathbf{1} \quad (12)$$

$$E_1^a = \rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} - p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (13)$$

onde p_1 é uma função escalar arbitrária. Do mesmo modo, para que a Equação (06) do constituinte sólido não seja destruída pelo axioma expresso na Equação (11), para $\alpha = 2$, também deve-se ter:

$$l_2^a = -p_2 \text{grad} \varepsilon - \rho_2 \text{grad} A_2^a \quad T_2^a = -(1 - \varepsilon) p_2 \mathbf{1} \quad (14)$$

$$E_2^a = \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} - p_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (15)$$

onde p_2 é outra função escalar arbitrária. Com isso, as Equações (09), (10) e (12)-(15) fornecem:

$$\rho_1 \text{grad} A_1^a + \rho_2 \text{grad} A_2^a = (p_1 - p_2) \text{grad} \varepsilon \quad (16)$$

$$\rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} = (p_1 - p_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (17)$$

Com a introdução das funções arbitrárias definidas por

$$P_e = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a \quad P_f = p_1 + \rho_f A_1^a \quad P_s = p_2 + \rho_s A_2^a \quad (18)$$

o par de Equações (16) e (17) fica transformado em

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + (P_s - P_f) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

$$\text{grad} P_e + (P_s - P_f) \text{grad} \varepsilon = 0 \quad (20)$$

cuja eliminação de P_e fornece a equação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} (\text{grad} (P_s - P_f)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (P_s - P_f) \right) \text{grad} \varepsilon \quad (21)$$

Além dos resultados expressos pelas Equações (19)-(21), outros podem ser destacados com a introdução de mais duas funções arbitrárias definidas por:

$$P = \varepsilon p_1 + (1 - \varepsilon)p_2 \quad \Pi = P - P_f \quad (22)$$

Desse modo, das Equações (16), (17) e (22), um destaque é expresso por

$$(1 - \varepsilon)grad(P_s - P_f) = grad\Pi \quad (23)$$

$$(1 - \varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}(P_s - P_f) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (24)$$

que por meio da Equação (21) produz a relação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} grad\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t} grade \quad (25)$$

Outro destaque é obtido com o uso das Equações (12)-(18) e (22) para as partes arbitrárias de cada força de interação caracterizadas por

$$l_1^a = -\varepsilon grad P + grad(\varepsilon p_1) + \varepsilon grad\Pi \quad (26)$$

$$l_2^a = \varepsilon grad P - grad(\varepsilon p_1) - \varepsilon grad\Pi \quad (27)$$

a qual mostra que a grandeza l_a definida por

$$l_a = \varepsilon grad\Pi \quad (28)$$

é uma força de interação arbitrária que é parte de l_1^a . Além disso, é importante destacar também o resultado

$$\varepsilon grad\Pi + (1 - \varepsilon)grad(P - P_s) = 0 \quad (29)$$

que tem característica de balanço de forças de interação.

Com o desenvolvimento de relações entre grandezas arbitrárias, pode-se partir agora para as equações do movimento do MPRI com base nos balanços de massa e de quantidade de movimento linear, as quais começam com

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + div(\varepsilon V_1) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}((1 - \varepsilon)V_2) = 0 \quad (31)$$

obtidas das Equações (01) e (04). Em seguida com

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \operatorname{grad} P_f + \operatorname{div} \sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (32)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \operatorname{grad} P_s + \operatorname{div} \sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (33)$$

obtidas das Equações (07), (12), (14), (16) e (18), onde

$$m = l_1^c \quad \sigma_1 = T_1^c \quad \sigma_2 = T_2^c \quad (34)$$

são as partes constitutivas da força de interação l_1 e de cada tensor tensão, respectivamente, e as acelerações a_1 e a_2 são dadas por:

$$a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (\operatorname{grad} V_1)V_1 \quad (35)$$

$$a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + (\operatorname{grad} V_2)V_2 \quad (36)$$

Por causa das grandezas arbitrárias e de relações entre elas, o movimento do MPRI fica estabelecido por uma das formas de sistemas de equações, destacados a seguir.

Sistema I

É o sistema formado pelas Equações (19), (20), (30)-(36) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f , P_s e P_e , uma vez que σ_1 , σ_2 e m são grandezas constitutivas.

Sistema II

As relações definidas pelas Equações (04), (32) e (33) fornecem a equação de interseção

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -\operatorname{grad}(P_s - P_f) + \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{div} \sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (37)$$

E o sistema é formado pelas Equações (21), (30), (31), (35)-(37) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 e $P_s - P_f$.

Sistema III

As relações definidas pelas Equações (23), (28), (29), (32) e (33) produzem as equações

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \text{grad} P + l_a + \text{div} \sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (38)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \text{grad} P - l_a + \text{div} \sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (39)$$

E o sistema é formado pelas Equações (25), (28), (30), (31), (35), (36), (38) e (39) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P e Π .

Sistema IV

As Equações (23), (28) e (33) fornecem a relação

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \text{grad} P_f + \text{div} \sigma_2 - m - \frac{l_a}{\varepsilon} + \rho_2 g_2 \quad (40)$$

E o sistema é formado pelas Equações (25), (28), (30), (31), (32), (35), (36) e (40) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f e Π .

Sistema V

As relações definidas pelas Equações (01), (28), (32) e (40) fornecem a equação de interseção

$$\varepsilon \rho_2 (a_2 - g_2) - (1 - \varepsilon) \rho_1 (a_1 - g_1) = \varepsilon \text{div} \sigma_2 - (1 - \varepsilon) \text{div} \sigma_1 - \varepsilon m - l_a \quad (41)$$

E o sistema é formado pelas Equações (25), (28), (30), (31), (35), (36) e (41) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , e Π .

Como m é a parte constitutiva da força de interação l_1 , das Equações (07) e (34)

$$m = l_1 - l_1^a. \quad (42)$$

Dos trabalhos de Liu (1980) e Silva (1990), a grandeza m é a força difusiva ou resistiva definida por

$$m = l_1 - l_1^0 \quad l_1^0 = l_1 \text{ para } V_1 = V_2. \quad (43)$$

Logo, das Equações (42) e (43)

$$l_1^a = l_1^0 \quad (44)$$

ou seja, a parte arbitrária l_1^a é a força de interação l_1 no equilíbrio. Desse modo, das Equações (12), (18) e (44)

$$l_1^0 = P_f \text{grad} \varepsilon - \text{grad}(\rho_1 A_1^a) \quad (45)$$

Para discussão da Equação (45) e da função arbitrária P_f , com base na Equação (43) e no Sistema I, considera-se o MPRI sob a ação da gravidade na situação estática constante caracterizada por:

$$\varepsilon = \text{constante} \quad V_1 = V_2 = 0 \quad m = 0 \quad \text{div} \sigma_1 = 0 \quad (46)$$

Neste caso, como

$$g_1 = g_2 = g \quad (47)$$

onde g é a aceleração da gravidade, das Equações (01), (32), (33) e (45)-(47)

$$\text{grad} P_f = \rho_f g \quad (48)$$

$$l_1^0 = -\text{grad}(\rho_1 A_1^a) = \text{grad}(\rho_2 A_2^a) \quad (49)$$

$$\text{grad} P_s = \frac{1}{1-\varepsilon} \text{div} \sigma_2 + \rho_s g \quad (50)$$

A Equação (48) mostra que, para a situação estática constante sob ação da gravidade, P_f é a pressão do fluido, concordando com os dados bem conhecidos dos experimentalistas (MASSARANI, 1984; SILVA TELLES, 1993).

O resultado dado pela Equação (49) mostra que, na mesma situação, a força de interação não precisa ser nula. Este resultado está coerente com aqueles de pesquisadores como Liu (1980), que afirma que em tal situação a força de interação não é nula e é ela que equilibra o empuxo, aqui implícito em cada gradiente de l_1^0 da Equação (49).

Sobre a Equação (50), a análise depende de como se estabelece a situação estática constante. Se ela só acontece quando o sólido é rígido, σ_2 é indeterminada e tal equação pode não produzir informações sobre P_s e, neste caso, P_s é simplesmente uma função escalar arbitrária vista como equilibradora do Sistema I. Por outro lado, se o sólido não é rígido ou σ_2

não é considerado na Equação (50), tem-se que $\text{div}\sigma_2 = 0$ e, como no caso do fluido, P_s pode ser interpretada como uma pressão arbitrária associada ao sólido.

Quanto ao sistema II, para o MPRI sob a ação da gravidade, das Equações (01) e (47), vale a observação de que o termo

$$\rho_s g_2 - \rho_f g_1 = (\rho_s - \rho_f)g$$

aparece naturalmente no mesmo sem precisar outro tipo de decomposição para a força de interação l_1 .

Outra grandeza a considerar nesta discussão, com base nas Equações (18), é a parte arbitrária da energia livre de Helmholtz A^a para a mistura, definida por

$$(\rho_1 + \rho_2)A^a = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a = P_e \quad (51)$$

Assim, observando que, sob o axioma caracterizado pela Equação (11), a parte arbitrária da energia livre de Helmholtz de um corpo único incompressível é constante, considera-se, para efeito de discussão e comparação que a energia A^a é constante; uma vez que a mesma é definida para a mistura como um todo. Desse modo, das Equações (01), (20) e (51), obtém-se o resultado

$$P_s - P_f = (\rho_s - \rho_f)A^a \quad (52)$$

para ε não constante, do qual pode-se escrever:

$$\text{grad}P_s = \text{grad}P_f \quad (53)$$

Então, neste caso, das Equações (52) e (53), pode-se escolher apenas uma pressão arbitrária para aparecer no Sistema I, mesmo sendo diferentes as pressões das fases sólida e fluida. Ou seja, o aparecimento de uma única pressão arbitrária nas Equações (32) e (33) não significa que as pressões das fases sejam iguais. Neste sentido, o trabalho de Silva (1990) não precisaria se restringir a um axioma puramente mecânico para a obtenção de um sistema com apenas uma pressão arbitrária. Portanto, das Equações (52) e (53), os sistemas do trabalho de Silva (1990) ficam iguais aos Sistemas I e II, ressalvando-se que as pressões das fases não precisam ser iguais.

De acordo com Silva *et al.* (2013), a igualdade expressa na Equação (53) também pode ser obtida da Equação (37) com base em modelagem matemática envolvendo o movimento do MPRI.

Outras teorias para o MPRI, como mostra o trabalho de Givler (1987), também estabelecem a pressão arbitrária da fase fluida diferente da pressão arbitrária da fase sólida. Mas, além de serem casos particulares da teoria desenvolvida por Silva *et al.* (2013), cada sistema de equações diferenciais parciais produzido apresenta o número de funções incógnitas excedendo de uma unidade o número de equações. Por isso, tais teorias estabelecem equações extras para a diferença de pressão entre as fases, inclusive equações constitutivas, para a obtenção de um sistema fechado, como é o caso do Sistema I ou II que, pelo menos em uma dimensão, apresenta o número de funções incógnitas igual ao número de equações.

A soma das Equações (38) e (39) do Sistema III sugere que a grandeza arbitrária P pode ser interpretada como a pressão no meio poroso. Além disso, com base nas Equações (22), (28) e (29), a função arbitrária Π pode ser interpretada como sendo uma pressão arbitrária de interação, uma vez que na situação estática constante sob a ação da gravidade $P - \Pi = P_f$ é a pressão do fluido no poro.

Sobre as grandezas constitutivas nos Sistemas I até V, m , como já frisado, é a força difusiva ou resistiva como função da diferença de velocidades. Em muitos problemas σ_1 é desprezada e σ_2 é a chamada pressão constitutiva do sólido considerada como função da porosidade. São também estudados os casos em que σ_1 é dada por uma relação semelhante à do fluido newtoniano.

Para discussão com base na parte da força de interação arbitrária l_1^a dada pela Equação (28), as Equações (32) e (40) dos Sistemas I e IV, respectivamente, mostram que as equações do movimento do MPRI podem ser escritas envolvendo apenas a pressão arbitrária do fluido no poro P_f , uma vez que a outra grandeza arbitrária l_a que aparece na Equação (40) é uma força de interação. Além disso, P_f e l_a são fatores de estabilidade, eles equilibram relações definidas pelas Equações (32) e (40) ou (41) em qualquer situação. Isso permite, por exemplo, trabalhar apenas com a Equação (32) sem ser necessário desconsiderar a Equação (40), pois, estabelecida a função P_f a Equação (40) fica equilibrada por l_a , situação bastante conhecida em filtração uniforme. Também, pode-se observar aqui que P_f e l_a podem absorver certas grandezas consideradas desprezíveis em muitos modelos propostos, ou seja, uma tal grandeza, mesmo não sendo desprezível, poderia não aparecer no modelo, já estaria englobada em P_f ou l_a . Há também os casos em que as equações propostas não apresentam

grandezas arbitrárias. Nestes casos tudo é sustentado por supostas equações constitutivas para σ_1 , σ_2 e m , os quais são sobrecarregados para que as Equações (32) e (40) ou (41) sejam equilibradas. Neste sentido, as equações propostas para σ_1 , σ_2 e m podem apresentar dados que, para um mesmo par sólido-fluido, variam de um modelo para outro. Estes dados deveriam estar inclusos em grandezas arbitrárias que variam livremente até no mesmo modelo.

Sobre a interação arbitrária l_a , pode-se obter informação a partir da equação de interseção, Equação (41) do Sistema V, considerando-se os casos em que $\text{div}\sigma_1 = 0$, $\text{div}\sigma_2 = 0$ e $m = 0$. Nestes casos, as Equações (04) e (41) mostram que l_a é função da porosidade e das acelerações reduzidas $a_2 - g_2$ e $a_1 - g_1$. Baseado nisso, pode-se propor para l_a , em qualquer situação, a relação

$$l_a = d_1(a_1 - g_1) + d_2(a_2 - g_2)$$

onde d_1 e d_2 são funções densidades arbitrárias, já discutidas em Silva Telles (1993) para toda parte arbitrária da força de interação. Aqui l_a é apenas uma parte da força de interação arbitrária.

Com isso, a restrição de incompressibilidade provoca o aparecimento de grandezas arbitrárias nos balanços de quantidade de movimento linear. Por conta de tais grandezas e de relações entre elas, as equações do movimento do MPRI podem ser expressas de vários modos, destacados em sistemas com formas diferentes, uma forma de sistema para cada modo. A questão está nos agrupamentos de termos de pressões e interações arbitrárias e suas interpretações.

2.3 MOVIMENTO GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA

O primeiro a formular um tratamento matemático para o movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta, ou sedimentação gravitacional em proveta, foi Kynch (1952), que, usando apenas os balanços de massa e supondo a velocidade das partículas sólidas como função da concentração local de sólidos, desenvolveu um estudo de propagação de ondas de concentração para o problema.

A não inclusão direta dos efeitos de pressão no sólido e da força de interação nos balanços de massa, motivou pesquisadores como Tiller (1981), Fitch (1983) e Font (1988) a revisar a teoria e a introduzirem os balanços de quantidade de movimento linear.

Ao ser considerado por Bürger e Wendland (2001) que a sedimentação e a suspensão particulada desempenham um papel importante na tecnologia moderna, um levantamento bibliográfico do ano de 1912 até 2000 foi produzido pelos mesmos, sendo juntadas nove contribuições para a matemática desses processos. Foi mostrado que os autores pesquisados fornecem um relato conciso das contribuições para a pesquisa em sedimentação e suspensão particulada, que foram feitas durante o século 20 com um foco nas diferentes etapas de progresso que foram feitas para o entendimento de sedimentação em batelada, suspensões particuladas e sedimentação contínua em processamento mineral. Sendo que um grande avanço foi a teoria sedimentação cinemática do Kynch publicada em 1952. Matematicamente, esta teoria dá origem a uma primeira lei de conservação escalar não linear para a concentração de sólidos. Extensões desta teoria à sedimentação contínua, flocculante, suspensões polidispersas, ensaios com provetas com diferentes seções transversais, centrífugas e várias dimensões de espaço, bem como as suas aplicações atuais, foram abordadas no trabalho.

Uma interpretação linear da teoria dos fluxos de sólidos para modelos de sedimentação em 3 regiões foi realizada por Wett (2002). O modelo diferencia a região de sedimentação livre, a região de transição e a região de compressão a partir da teoria do fluxo de sólidos para suspensões particuladas em proveta e define três tipos de velocidade, uma para cada região, sendo que, para aplicação, o modelo foi aplicado a um modelo biocinético para acompanhamento on-line.

Um modelo unificado para cálculo de velocidade de queda de partículas nos processos de sedimentação, filtração e suspensões flocculentas foi desenvolvido por Garrido *et al.* (2003). Onde foram identificadas as variáveis e equações para cada uma das operações para compatibilização e, com isso, verificou-se que os processos podem ser descritos por variantes de um escalar hiperbólico-parabólico. Para completar o estudo, também foram analisadas equações constitutivas para obtenção das forças de interação sólido-fluido, permeabilidade e a compressibilidade do meio poroso.

Um simulador para estabelecimento de velocidades de sedimentação gravitacional em proveta e para suspensões flocculentas foi desenvolvido por Garrido *et al.* (2004) através do método numérico introduzido por Bürger, cujos dados de entrada são parâmetros da

suspensão, massa específica do sólido e tensor tensão do sólido, tendo como saída o gráfico do perfil de concentração.

Foi proposto por Usher e Scales (2005) uma modelagem para espessantes em estado estacionário a partir do limite de elasticidade à compressão, que impedem a sedimentação de partículas. O algoritmo foi desenvolvido a partir de propriedades fundamentais e como dados de saída tem-se dados de altura versus concentração de sólidos em toda suspensão. Além disso, também determina o tempo de residência das partículas no leito da suspensão.

Foi simulado numericamente unidades de clarificadores-espessantes por Bürger *et al.* (2006) através de suspensões ideais com função de fluxo de densidade contendo dois pontos de inflexão, partindo do balanço de massa da sedimentação de partículas. A escolha da função deu-se por ser possível obter uma estrutura mais rica em informações dos parâmetros da suspensão do que funções com apenas um ponto de inflexão. A escolha dessa função foi motivada por uma série de experimentos.

Uma avaliação do método 1-fluid foi feita por Pianet *et al.* (2007) para a Simulação Numérica Direta (SND) do movimento de partículas de uma suspensão de uma única esfera com número de Reynolds de moderado a alto. Tendo como base o algoritmo de otimização Lagrangeana aumentada para o acoplamento pressão-velocidade, focando no movimento transiente da suspensão de uma esfera em meio viscoso e validando por comparação com dados de outros trabalhos de própria autoria.

Foi estabelecido por Grassia *et al.* (2008) uma técnica simplificada para obtenção de parâmetros de suspensão particulada em proveta, por meio de ajustes através da lei de potência da seção não linear da altura da interface superior descendente na região de transição, através de relações analíticas explícitas e, com isso, foram obtidos dados de simulação da altura versus tempo da suspensão, sendo os resultados aplicados para estimar propriedades de materiais desidratados, apresentando erros pequenos.

O comportamento da compactação na sedimentação gravitacional de uma suspensão altamente concentrada com partículas de dióxido de titânio (TiO_2) foi estudado por Iritani *et al.* (2009) através do modelo de Terzaghi modificado com movimento lagrangeano. Sendo que as variações da altura do sedimento compactado com o tempo foram adequadamente descritos utilizando a solução analítica da função que descreve a relação média de compactação. Além disso, a altura de equilíbrio foi representada por uma função de potência do volume total de sólidos, para um valor específico de pH.

Foi estudado por Hogg e Dorrell (2010), sedimentação de suspensões bidispersas para o cálculo analítico da fração de volume de cada espécie, onde foi observado que os perfis muitas vezes incluem a interação entre as partículas, através da qual ocorrem mudanças descontínuas na fração de volume.

Uma nova solução de forma fechada para encontrar a relação altura versus tempo do sedimento de suspensões particuladas foi abordada por Grassia *et al.* (2011) através de funções de fluxo de sedimentação, considerando uma linha reta na região de sedimentação livre e uma dependência paramétrica na região de transição. Com isso, foi estabelecido uma relação entre a altura do sedimento na suspensão e parâmetros do material de forma direta e sem a necessidade do parâmetro velocidade de sedimentação, tendo aplicação em projetos de equipamentos como sedimentadores.

Uma predição de um modelo de sedimentação de uma suspensão particulada ambiente aquático, sem entrada de sedimentos, foi feita por Guo *et al.* (2012), onde, nessas condições, as forças de controle entre partículas da suspensão são significativamente diferentes do processo de sedimentação ideal. O processo de sedimentação possui formas da região de sedimentação livre, região de transição e região de compactação de acordo com características das partículas. Equações para a altura e tempo de sedimentação foram estabelecidas com base na taxa de sedimentação e o modelo foi criado com base nos parâmetros fundamentais do lodo do ambiente aquático, podendo ser aplicado para a predição de assentamento do solo em ambientes aquáticos.

Um modelo multifásico de sedimentação e suspensão em um digestor anaeróbico foi estabelecido por Yu *et al.* (2013), através da teoria cinética do escoamento granular, que foi criada para descrever como ocorrem os fluxos das partículas de resíduos biológicos. O tempo de retenção de sólidos foi adicionado como um parâmetro no modelo de digestão anaeróbica para avaliar o seu efeito sobre a produtividade de biogás. O modelo foi validado experimentalmente em um reator de coluna de gás-líquido-sólido e com a fração de volume gás sólido e temperatura como as principais variáveis. A distribuição do tempo de águas residuais residência também foi determinada através de modelagem e de medição para avaliar o padrão de mistura no reator.

Um estudo experimental do movimento gravitacional de suspensões concentradas de partículas monodispersa foi feito por Hernando *et al.* (2014), para a determinação das sub-regiões da suspensão. No estudo, foi investigado, experimentalmente, o movimento gravitacional de suspensões concentradas de partículas de polimetilmetacrilato (PMMA), a

baixo número de Reynolds, com esferas de três raios diferentes utilizando a técnica de fluorescência induzida por laser para determinar a evolução espaço-temporal da concentração de partículas e do deslocamento das sub-regiões, sendo possível reconhecer a existência de tais sub-regiões.

O aparato experimental para obtenção da imagem consistiu numa indução por laser de argônio em uma suspensão com partícula de tamanho $37,7 \mu\text{m}$ e porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,30$, tendo a imagem capturada por câmera fotográfica acoplada a um computador contendo o software para tratamento da imagem.

Em um outro trabalho de Hernando *et al.* (2015) foi realizado um estudo experimental do movimento de uma suspensão concentrada de partículas com tamanhos diferentes para a determinação e análise das sub-regiões do movimento da suspensão utilizando o mesmo aparato experimental do trabalho anterior.

Dos trabalhos acima citados, Kynch (1952), Bürger e Wendland (2001), Wett (2002), Bürger *et al.* (2006), Iritani *et al.* (2009), Hogg e Dorrel (2010), Grassia *et al.* (2011), Hernando *et al.* (2014; 2015) apresentam somente balanço de massa. Os demais apresentam balanços de massa e quantidade de movimento linear. Porém, todos os trabalhos não tratam de diferença de pressões arbitrárias, pois tal diferença surge quando a formulação teórica para o movimento de suspensão particulada fornece equações dos balanços mais generalizadas, as quais permitem visualização de soluções exatas.

Apesar disso, os trabalhos citados servem como base para caracterização do movimento de suspensão particulada em proveta. Neste sentido, podem ser destacadas as Figuras 01 e Figura 02 dos trabalhos de Hernando *et al.* (2014; 2015), que reconhecem a existência de sub-regiões, principalmente na Figura 02, que é possível distinguir a região de líquido puro A, região de sedimentação livre B, região de transição D e regiões de compactação C e E.

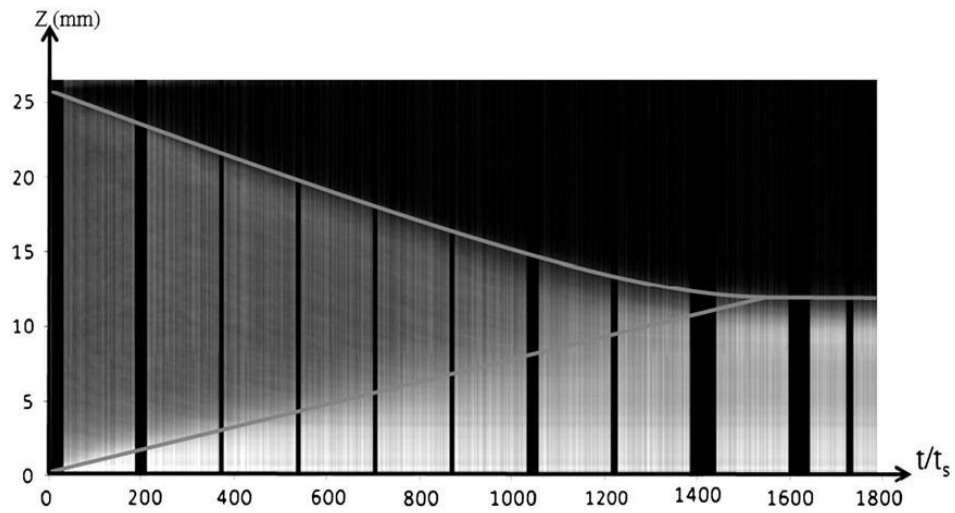


Figura 1 – Perfil de uma suspensão inicialmente homogênea com partícula de tamanho $37,7 \mu\text{m}$ e porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,30$.

Fonte: Hernando *et al.* (2014)

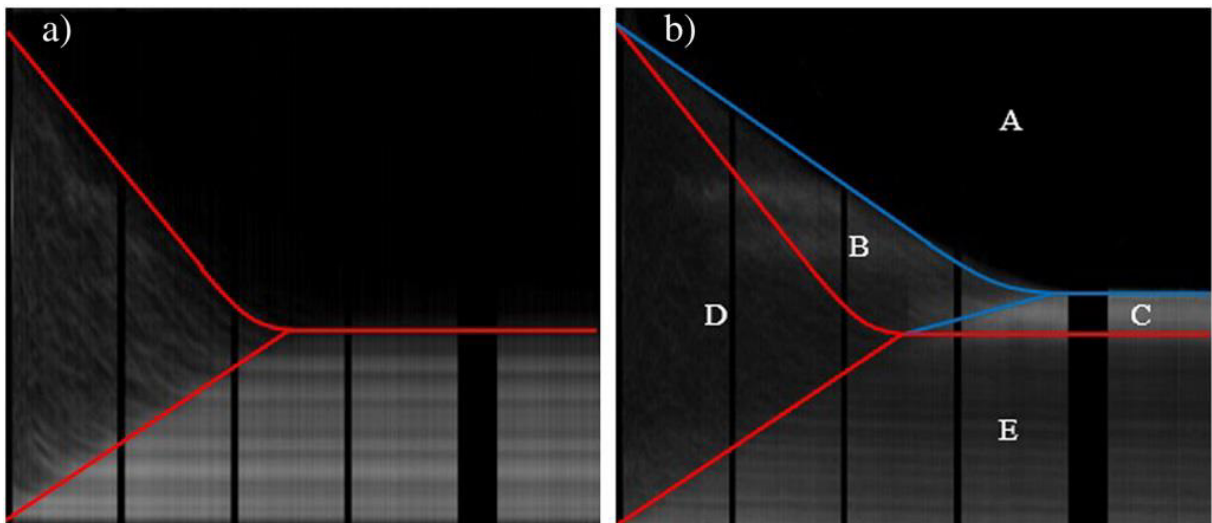


Figura 2 – Perfis de uma suspensão inicialmente homogênea com partículas grandes a) e de uma suspensão com partículas pequenas. Porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,30$.

Fonte: Hernando *et al.* (2015)

3. METODOLOGIA

3.1 DETERMINAÇÃO DE SOLUÇÕES EXATAS

De acordo com o Sistema II, Equações (01), (21), (30)-(33), (35)-(37), em uma dimensão, as equações do movimento da suspensão particulada com restrição de incompressibilidade são expressas pela Equação (01), com ρ_s e ρ_f constantes, e pelas equações relatadas a seguir:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon V_1)}{\partial y} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \varepsilon)(V_2)] = 0 \quad (55)$$

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \frac{\partial P_f}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + m + \rho_1 g_1 \quad (56)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \frac{\partial P_s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - m + \rho_2 g_2 \quad (57)$$

$$a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad (58)$$

$$a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad (59)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P_{sf}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial P_{sf}}{\partial t} \quad (60)$$

onde P_{sf} é a diferença de pressões arbitrárias, ou seja

$$P_{sf} = P_s - P_f \quad (61)$$

e também a equação de interseção

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -\frac{\partial P_{sf}}{\partial y} + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (62)$$

obtida das Equações (01), (56) e (57), na qual y é a coordenada espacial.

O sistema formado pelas Equações (54)-(62) será denominado de Sistema S.

A determinação de soluções exatas do sistema S, começa com as notações

$$\varepsilon = \varepsilon(y, t) \quad (63)$$

$$V_1 = V_1(y, t) \quad (64)$$

$$V_2 = V_2(y, t) \quad (65)$$

$$\phi = \phi(y, t) = \phi(\varepsilon) \quad (66)$$

em que ϕ é uma função suficientemente suave, obtém-se das Equações (54) e (55) e da regra da cadeia, com base na Equação (66), que

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = \varphi = \varphi(t) \quad (67)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (68)$$

Seguindo a notação expressa na Equação (66), com o uso da Equação (68), de imediato segue que a consideração

$$P_{sf} = P_{sf}(y, t) = P_{sf}(\varepsilon) \quad (69)$$

satisfaz a Equação (60). Isso motiva a determinação de soluções exatas do sistema formado pelas Equações (1), (54), (55), (58), (59)-(62), com base nas considerações expressas pelas Equações (63)-(65) e as relações

$$V_1 = V_1(\varepsilon) \quad (70)$$

$$V_2 = V_2(\varepsilon) \quad (71)$$

de tal modo que derivadas da porosidade e das velocidades também sejam funções da porosidade. Dessa forma, equações constitutivas generalizadas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão também podem ser colocadas na forma

$$m = m(y, t) = m(\varepsilon) \quad (72)$$

$$\sigma_1 = \sigma_1(y, t) = \sigma_1(\varepsilon) \quad (73)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(y, t) = \sigma_2(\varepsilon) \quad (74)$$

3.1.1 Primeira solução

É a solução constante, ou seja, a porosidade e as velocidades são constantes.

$$V_1(y, t) = \text{constante} \quad (75)$$

$$V_2(y, t) = \text{constante} \quad (76)$$

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad (77)$$

Com isso, a solução do conjunto de Equações (54), (55), (58)-(61) e (75)-(77) fica na forma

$$\frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad \text{para } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad (78)$$

3.1.2 Segunda solução

É a solução determinada com base nas Equações (63)-(74) cuja construção começa com a observação de que o conjunto de Equações (54)-(55) fornece a equação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (79)$$

com γ dada por

$$\gamma = \frac{d}{d\varepsilon} [(1 - \varepsilon)V_2] = -\frac{d}{d\varepsilon} (\varepsilon V_1) \quad (80)$$

Considerando também que

$$\gamma = -w_0 \quad (81)$$

onde w_0 é uma velocidade constante, segue das Equações (67) e (80) que

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad (82)$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0) + \varphi}{\varepsilon} \quad (83)$$

nas quais u_0 é outra velocidade constante e, neste caso, φ é constante. Dessa forma, usando a Equação (81), a integração da Equação (79) fornece a solução

$$\int A(\varepsilon) d\varepsilon = y - w_0 t + cte \quad (84)$$

onde $A(\varepsilon)$ é uma função arbitrária da porosidade com unidade de comprimento e vale ressaltar que

$$A(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 \quad (85)$$

Assim, as Equações (58), (59), (63)-(66), (68)-(74), (82), (83) e (85) produzem a relação

$$\left[\frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - (\rho_s g_2 - \rho_f g_1) \right] A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon) \quad (86)$$

com $B(\varepsilon)$ e $Q(\varepsilon)$ dadas por

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} \quad (87)$$

$$Q(\varepsilon) = \rho_s \left[\left(\frac{w_0 - V_2}{1-\varepsilon} \right)^2 \right] + \rho_f \left[\left(\frac{w_0 - V_1}{\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (88)$$

As Equações (78), (82), (83), (86)-(88) podem ser usadas como fonte de informações para a diferença de pressões arbitrárias, através da grandeza arbitrária $A(\varepsilon)$ aqui chamada de função comprimento, inclusive com o uso da Equação (78) para $\varepsilon = \text{constante} = \varepsilon_0$.

Determinada a função $A(\varepsilon)$, informações fornecidas pela Equação (78) podem ser aproveitadas nas Equações (86)-(88), onde vale ressaltar que por envolver efeito de pressão constitutiva do sólido a grandeza $B(\varepsilon)$ responde por compressibilidade. Também vale ressaltar que a já conhecida grandeza m responde por resistividade. Neste sentido, a função arbitrária comprimento $A(\varepsilon)$ pode ser vista como razão de compressibilidade por resistividade além dos efeitos de diferença de pressões arbitrárias.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

No estudo do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta (sedimentação gravitacional em proveta), em cada teste, a suspensão é colocada numa proveta de altura e diâmetro adequados, com agitação suficiente para que a condição inicial de concentração de sólidos uniforme seja obtida. As dimensões devem ser tais que os efeitos de parede não interfiram na queda das partículas sólidas, de modo que o movimento possa ser considerado unidimensional.

Com base na revisão da literatura, com destaque para os trabalhos Hernando *et al.* (2014, 2015) e Libório *et al.* (2015a,b), desde o início do movimento de queda das partículas sólidas até o término, a região ocupada pela suspensão na proveta fica dividida em sub-regiões, as quais podem ser caracterizadas de acordo com a Figura 3.

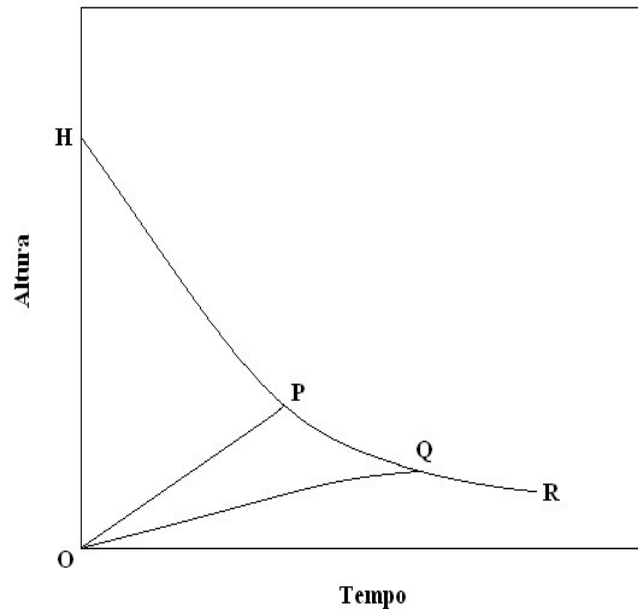


Figura 3 – Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.

No gráfico da Figura 3, HPQR até a altura H corresponde à Região de Líquido Puro (RLP), OPHO corresponde à Região de Sedimentação Livre (RSL), OPQO corresponde à Região de Transição (RT) e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à Região de Compressão (RC). As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente. A introdução da região de transição OPQO foi motivada pelo trabalho de Kynch (1952) e a revisão da sua teoria feita por Tiller (1981) e estendida pelos trabalhos de Fitch (1983) e Font (1988). A onda de aceleração, que não precisa ser visível, corresponde à propagação inicial da onda de concentração, a única que parte do fundo da proveta. A velocidade das partículas sólidas, na região de transição, foi determinada pelo efeito da suposição de Kynch (1952) sobre os balanços de massa e de quantidade de movimento linear, o qual forneceu uma equação explícita para tal velocidade como função da porosidade.

Em relação a cada curva do gráfico da Figura 3, podem ser escritas as seguintes notações:

$$x(t) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (89)$$

$$h(t) \quad (0 \leq t \leq t_0) \quad (90)$$

$$z(t) \quad (0 \leq t \leq t_c) \quad (91)$$

onde t é a variável tempo, $x(t)$ é a altura da interface superior descendente, $h(t)$ é a altura da onda de aceleração e $z(t)$ é a altura da interface inferior ascendente. O tempo t_0 indica o instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração, enquanto que o tempo t_c indica o instante de encontro das duas interfaces.

As alturas satisfazem as condições iniciais

$$x(0) = H \quad (92)$$

$$h(0) = z(0) = 0 \quad (93)$$

as condições de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração

$$x(t_0) = h(t_0) \equiv x_0 \quad (94)$$

e as condições de encontro das duas interfaces

$$x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (95)$$

onde H é a altura inicial da suspensão na proveta.

Com relação ao gráfico da Figura 3, a coordenada espacial (y) está orientada para cima de tal modo que $y = 0$ representa o fundo da proveta ou o eixo dos tempos.

Sob a notação usada nas Equações (89)-(91), para a função porosidade em cada região, caracterizada por $\varepsilon(y, t)$, vale ressaltar que

$$\varepsilon(y, t) = 1 \quad x < y \leq H \quad 0 \leq t < \infty \quad (96)$$

para a região de líquido puro. Além disso, com base nas Equações (92)-(95) a função porosidade satisfaz a condição inicial

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = cte \quad 0 \leq y \leq H \quad (97)$$

A onda de aceleração e as interfaces caracterizadas na Figura 3 são superfícies singulares em movimento e algumas propriedades apresentam uma descontinuidade através da interface, sendo isso representado por uma condição de salto na interface.

O salto de uma função de uma função

$$\psi = \psi(y, t) \quad (98)$$

através de cada superfície singular é definido por

$$[\psi] = \psi^+ - \psi^- \quad (99)$$

onde ψ^+ e ψ^- são os valores de ψ nos lados superior e inferior de cada superfície, respectivamente.

Ele relaciona as propriedades entre um lado e o outro da interface por meio de balanços de massa, de quantidade de movimento e outros. Com isso, os balanços de massa através de cada superfície produzem as seguintes condições de salto

$$[\rho_1(U - V_1)] = 0 \quad (100)$$

$$[\rho_2(U - V_2)] = 0 \quad (101)$$

onde U é a velocidade da superfície correspondente.

A onda de aceleração é definida por

$$[V_1] = [V_2] = 0 \quad (102)$$

$$[a_1] \neq 0 \quad (103)$$

$$[a_2] \neq 0 \quad (104)$$

Com isso, das Equações (01), (98)-(104) são obtidas as seguinte expressões, através da onda de aceleração, para as velocidades e porosidade

$$V_1^+ = V_1^- \quad (105)$$

$$V_2^+ = V_2^- \quad (106)$$

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- \quad (107)$$

através da onda de aceleração.

Usando a Equação (101), no lado superior da interface superior descendente, a porosidade será

$$\varepsilon^+ = 1 \quad 0 \leq t < \infty \quad (108)$$

Assim, das condições de salto das Equações (01), (98)-(101) e (108), tem-se que

$$V_2^- = U = \frac{dx}{dt} \quad 0 \leq t < \infty \quad (109)$$

no lado inferior da interface superior descendente.

As velocidades dos constituintes fluido e sólido são nulas no fundo da proveta (posição $y = 0$), ou seja

$$V_1(0, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (110)$$

$$V_2(0, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (111)$$

Desse modo, das Equações (67), (110) e (111), tem-se que $\varphi = 0$ numa vizinhança do fundo da proveta, o que implica em

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = 0 \quad 0 \leq t < \infty$$

próximo de $y = 0$. Mas, das Equações (01), (98)-(101), o resultado anterior também vale para toda a suspensão na proveta. Dessa forma obtém-se que

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (112)$$

A porosidade média em qualquer região da suspensão é definida pelo teorema do valor médio para integrais, com isso, ao considerar $\bar{\varepsilon}$ como a porosidade média da suspensão, seu valor é obtido através da expressão

$$(1 - \bar{\varepsilon})x = \int_0^x (1 - \varepsilon) dy \quad 0 \leq t < \infty \quad (113)$$

Do balanço de massa de sólidos e das Equações (89)-(100)

$$(1 - \bar{\varepsilon})x = (1 - \varepsilon_0)H \quad 0 \leq t < \infty \quad (114)$$

Analogamente, a porosidade média ε_m da suspensão na região de compactação é definida por

$$(1 - \varepsilon_m)z = \int_0^z (1 - \varepsilon) dy \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (115)$$

Desse modo, obtém-se das Equações (54) e (115) e da regra de Leibnitz a derivada

$$\frac{d}{dt}((1 - \varepsilon_m)z) = (1 - \varepsilon^-) \left(\frac{dz}{dt} - V_2^- \right), \quad 0 < t < \infty \quad (116)$$

com o sinal – indicando valor no lado inferior da interface inferior ascendente.

Para cada força de campo, nesta situação, onde a coordenada espacial y está orientada para cima,

$$g_1 = g_2 = -g \quad (117)$$

onde vale ressaltar que g é a aceleração da gravidade.

3.3 USO DAS SOLUÇÕES EXATAS

Em cada região da Figura 03, as funções porosidade e velocidade satisfazem o sistema S, como indicado na Figura 04. Ou seja, o sistema é o mesmo, as funções porosidade e velocidades é que são suficientemente suaves por partes em $0 \leq y \leq x(t)$, ou em $0 \leq y \leq H$ se também for considerada a região de líquido puro.

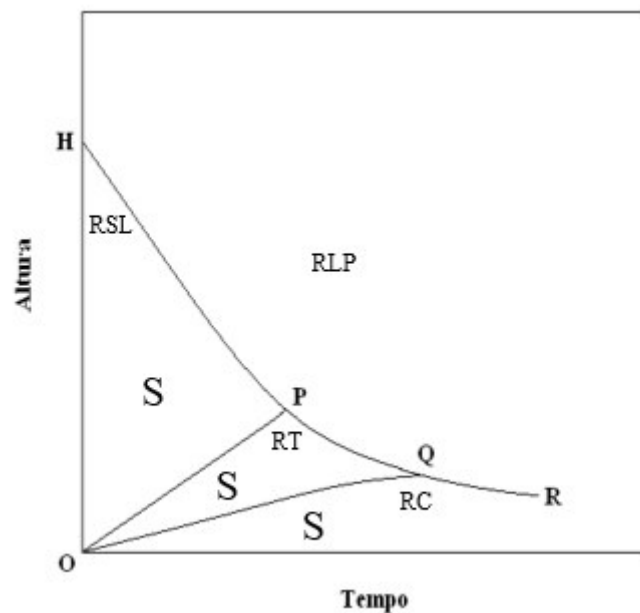


Figura 4 – Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta com a inclusão da letra S (Sistema S) em cada região.

A primeira solução exata do Sistema S, solução constante, será inserida na região de sedimentação livre, já a segunda solução exata do Sistema S será inserida na região de transição.

Na região de compressão ou compactação, será trabalhado com a porosidade média da suspensão. Sendo que para a compatibilização das soluções para a Região de Sedimentação Livre e Região de Transição são utilizadas condições de salto através das interfaces e no caso da Região de Compressão será utilizada a definição de porosidade média e o balanço de massa.

3.3.1 Região de sedimentação livre

Em tal região, limitada pela proveta e por $h(t) \leq y \leq x(t)$ e $0 \leq t \leq t_0$, a função porosidade é caracterizada por

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (118)$$

e as velocidades V_1 e V_2 também são constantes. Por isso, a primeira solução, com resultado expresso na Equação (78) é encaixada nesta região. Dessa forma, com base na Equação (118),

$$\varepsilon^+ = \varepsilon_0 \quad (119)$$

$$V_2 = V_2^+ \quad (120)$$

no lado superior da onda de aceleração. Com isso, a velocidade do constituinte sólido na região de sedimentação livre fica expressa por

$$V_2(y, t) = V_2^+ = cte = -u_0 \quad h(t) \leq y \leq x(t) \quad 0 < t \leq t_0 \quad (121)$$

3.3.2 Região de transição

Limitada pela proveta e por $z(t) \leq y \leq h(t)$ para $0 \leq t \leq t_0$ e $z(t) \leq y \leq x(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_c$. Nesta região, pela própria caracterização exposta no gráfico da Figura 3, é encaixada a segunda solução com resultados expressos nas Equações (79)-(88). Assim as Equações (67), (82)-(84), (92)-(95), (97) e (112) produzem os resultados

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (122)$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon} \quad 0 < t \leq t_c \quad (123)$$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (124)$$

Desse modo, das Equações (88), (122) e (123), obtém-se a seguinte expressão para $Q(\varepsilon)$

$$Q(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon)^3} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^3} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (125)$$

Das Equações (105)-(107), (118)-(120) e (122) tem-se que

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- = \varepsilon_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad (126)$$

$$V_2^+ = V_2^- = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0 \quad (127)$$

através da onda de aceleração. Dessa forma, as Equações (89)-(91), (126) e (127) produzem

$$\varepsilon(h(t), t) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (128)$$

Com isso, as Equações (79), (81) e a regra da cadeia sobre a Equação (128) fornecem que

$$\frac{dh}{dt} = w_0 \quad 0 \leq t \leq t_0$$

cuja integração, com o uso das Equações (92)-(95), produz os resultados

$$h = h(t) = w_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (129)$$

$$x_0 = w_0 t_0 \quad (130)$$

para a altura da onda de aceleração.

É importante destacar que além da função comprimento $A(\varepsilon)$ outra função comprimento denotada por $N(\varepsilon)$ pode ser introduzida pela definição

$$2 \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \xi) A(\xi) d\xi \right) N(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi \right)^2 \quad (131)$$

que será útil mais adiante.

3.3.3 Movimento da Interface Superior Descendente

Das Equações (89)-(91), (109), (121) (126) e (127) tem-se que

$$\frac{dx}{dt} = -u_0 \quad 0 < t \leq t_0$$

Desse modo, a integração da equação acima com o uso das Equações (92)-(95) produz a relação

$$x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (132)$$

para a altura da interface superior descendente no intervalo de tempo da curva de sedimentação livre, onde u_0 é a velocidade de sedimentação livre. Outras formas para a Equação (132) é obtida utilizando as Equações (92)-(95) e (132), sendo elas

$$(u_0 + w_0)t_0 = H \quad (133)$$

$$(u_0 + w_0)x_0 = Hw_0 \quad (134)$$

para o ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente.

Para o cálculo da altura da interface superior descendente no intervalo de tempo da curva de transição, segue das Equações (92)-(95), (122), (124) e (129)-(130) que

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (135)$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (136)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (137)$$

$$2\left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon\right) N^- = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon\right)^2 \quad N^- = N(\varepsilon^-) \quad (138)$$

onde ε^- é a porosidade no lado inferior da interface superior descendente

Usando as Equações (135)-(137) também pode-se escrever que (ver Apêndice A)

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0)(x + u_0 t - H) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (139)$$

Com isso, segue das Equações (135)-(137) e (139) que

$$(w_0 t - x)^2 = 2N^-(x + u_0 t - H) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (140)$$

para a altura da interface superior descendente no intervalo da curva de transição.

Usando as Equações (129)-(130), (133)-(134) e (137), a Equação (140) pode ser reescrita na forma

$$w_0 t = x + N^- \frac{u_0}{w_0} - \sqrt{\lambda} \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (141)$$

onde

$$\lambda = \left(N^- \frac{u_0}{w_0}\right)^2 - 2N^- \left(H - \left(1 + \frac{u_0}{w_0}\right)x\right) \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (142)$$

Considerando t_m o instante tal que

$$\lambda = 0 \quad \text{para} \quad t = t_m \quad (143)$$

e

$$x_m = x(t_m) \quad (144)$$

$$N_m = N^-(t_m) \quad (145)$$

Desse modo, as Equações (141)-(145) estabelecem as seguintes expressões

$$w_0 t_m = x_m + N_m \frac{u_0}{w_0} \quad (146)$$

$$N_m \left(\frac{u_0}{w_0}\right)^2 = 2 \left(H - \left(1 + \frac{u_0}{w_0}\right)x_m\right) \quad (147)$$

Assim, das Equações (146) e (147) existe um ponto (x_m, t_m) tal que

$$w_0 = \frac{u_0 x_m}{2(H - x_m) - u_0 t_m} \quad (148)$$

para a velocidade da onda de aceleração.

Vale ressaltar que das Equações (129), (130), (133), (134), (137)-(140) também pode ser escrito que

$$x = w_0 t + N^- - \sqrt{2N^-(u_0 + w_0)t - H) + (N^-)^2} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (149)$$

para a altura da interface superior descendente no intervalo de transição, que será útil mais adiante.

3.3.4 Velocidade da Onda de Aceleração

Com base nas Equações (92)-(95), (129) e (130), quando o ponto final da reta HP da Figura 3 está bem definido, a velocidade da onda de aceleração é dada por

$$w_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad (150)$$

Quando não, é preciso outro caminho para o cálculo de w_0 que possa ser usado em qualquer situação. Para isso, pode ser usada como ponto de partida a Equação (148) reescrita na forma

$$u_0 = \frac{2(H-x_m)w_0}{x_m + w_0 t_m} \quad t_m > t_0 \quad x_m = x(t_m) \quad (151)$$

Em seguida, considere duas funções velocidades $u = u(x, t)$ e $w = w(x, t)$ relatadas por

$$u = \frac{2(H-x)w}{x + wt} \quad 0 \leq t < \infty \quad (152)$$

sobre a curva x versus t , com u e w satisfazendo as condições

$$w(x_0, t_0) = w_0 \quad u(x_0, t_0) = u_0 \quad (153)$$

Além de u e w , seja $v = v(x, t)$ outra função velocidade sobre a curva x versus t , definida pela relação

$$v = \frac{u_0 x}{H - u_0 t} \quad 0 \leq u_0 t < H \quad (154)$$

Dessa forma, das Equações (132) e (154) tem-se que

$$v(x, t) = u_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (155)$$

As Equações (150)-(155) formam uma estrutura que fornece uma indicação para o cálculo de w_0 através da interseção entre as funções $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$, a qual começa com a igualdade de u e v que produz a relação

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H-x) - (2H-x)u_0 t} \quad (156)$$

com a função w satisfazendo a condição expressa na Equação (153).

Com base na Equação (156), seja $\bar{w} = \bar{w}(x, t)$ uma aproximação de $w = w(x, t)$ definida por

$$\bar{w} = \frac{u_0 X^2}{2H(H-X) - (2H-X)u_0 t} \quad (157)$$

onde $X = X(t)$ é uma aproximação de $x = x(t)$ satisfazendo

$$X(0) = H \quad (158)$$

$$X(t_0) = x_0 = x(t_0) \quad (159)$$

$$\frac{dX}{dt}(t_0) = -\frac{H-x_0}{2H-x_0}u_0 \quad (160)$$

Então, das Equações (129), (130), (132), (150) e (157)-(160) são obtidas

$$\bar{w}(x_0, t_0) = w_0 \quad (161)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt}(t_0) = 0 \quad (162)$$

Assim, com base nas Equações (161) e (162), o ponto (x_0, t_0) é um ponto crítico da função $\bar{w}$. Então, através do estudo da função $\bar{w}$ com denominador positivo, w_0 é o valor mínimo positivo da função $\bar{w}$. Além disso, como $\bar{w}$ é uma aproximação de w e o estudo da função w com denominador positivo também indica que a função w tem um mínimo positivo, adota-se, de forma aproximada, para o valor de w_0 , o mínimo positivo da função w obtido pela substituição de pontos experimentais x versus t na relação (156) com denominador positivo.

3.3.5 Movimento da Interface Inferior Ascendente

A interface inferior ascendente é fronteira comum entre a região de transição e a região de compactação. Das condições iniciais e de encontro estabelecidas pelas Equações (92)-(95) e das Equações (122), (124) e (131), pode-se escrever que

$$V_2^+ = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^+} \quad 0 < t \leq t_c \quad (163)$$

$$\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - z \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (164)$$

$$z(0) = 0 \quad (165)$$

$$2\left(\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon\right) N^+ = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon\right)^2 \quad N^+ = N(\varepsilon^+) \quad (166)$$

As Equações (01), (98)-(101) fornecem o balanço

$$(1 - \varepsilon^+) \left(\frac{dz}{dt} - V_2^+\right) = (1 - \varepsilon^-) \left(\frac{dz}{dt} - V_2^-\right) \quad 0 < t \leq t_c \quad (167)$$

através da interface inferior ascendente.

Das Equações (116), (163)-(165) e (167) tem-se que

$$\int_{\varepsilon^+}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0) \left(z + u_0 t - \left(\frac{1 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_0} \right) z \right) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (168)$$

Com isso, das Equações (164)-(166) e (168) obtém-se que

$$(w_0 t - z)^2 = 2N^+ \left(z + u_0 t - \left(\frac{1 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_0} \right) z \right) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (169)$$

Usando a Equação (165), a Equação (169) pode ser reescrita na forma

$$w_0 t = z + N^+ \frac{u_0}{w_0} - \sqrt{\gamma} \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (170)$$

onde

$$\gamma = \left(N^+ \frac{u_0}{w_0} \right)^2 - 2N^+ \left(\left(\frac{1 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_0} \right) z - \left(1 + \frac{u_0}{w_0} \right) z \right) \quad (171)$$

Considerando t_n o instante tal que

$$\gamma = 0 \quad \text{para} \quad t_n \quad (172)$$

e

$$z_n = z_n(t_n) \quad (173)$$

$$N_n = N^+(t_n) \quad (174)$$

$$H_n = \left(\frac{1 - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_0} \right) z \quad \text{para} \quad t = t_n \quad (175)$$

Desse modo, as Equações (170)-(175) fornecem as relações

$$w_0 t_n = z_n + N_n \frac{u_0}{w_0} \quad (176)$$

$$N_n \left(\frac{u_0}{w_0} \right)^2 = 2 \left(H_n - \left(1 + \frac{u_0}{w_0} \right) z_n \right) \quad (177)$$

Das equações (176) e (177) existe um ponto (z_n, t_n) tal que

$$w_0 = \frac{u_0 z_n}{2(H_n - z_n) - u_0 t_n} \quad (178)$$

que é do mesmo tipo da Equação (148).

É importante destacar que usando a Equação (165), a Equação (169) também pode ser reescrita na forma

$$z = w_0 t + N^+ - \sqrt{(N^+)^2 + 2N^+ \left((u_0 + w_0)t - \left(\frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z \right)} \quad (179)$$

3.3.6 Condições para o ponto de encontro das interfaces

A primeira condição para o ponto (x_c, t_c) de encontro das interfaces está expressa nas Equações (92)-(95). Dessa forma das Equações (92)-(95) e (113)-(115), pode-se escrever que

$$(1 - \varepsilon_m)z = (1 - \bar{\varepsilon})x = (1 - \varepsilon_0)H \quad \text{para } t = t_c \quad (180)$$

a qual produz outra condição expressa por

$$\bar{\varepsilon}(t_c) = \varepsilon_m(t_c) \quad (181)$$

Das Equações (92)-(95), (122) e (124), tem-se que

$$\varepsilon^-(t_c) = \varepsilon^+(t_c) \equiv \varepsilon_c \quad (182)$$

onde os sinais $-$ e $+$ indicam, respectivamente, valores no lado inferior da interface superior descendente e no lado superior da interface inferior ascendente.

Usando como base a suavidade de cada porosidade média, adota-se a seguinte condição:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}(t_c) = \frac{d\varepsilon_m}{dt}(t_c) \quad (183)$$

Dessa forma, as Equações (92)-(95), (180), (181) e (183) produzem a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{1-\varepsilon_m}{1-\varepsilon_0} \right) z \right) = \frac{H}{x} \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \quad \text{para } t = t_c \quad (184)$$

Também é adotada a seguinte condição

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = -\frac{u_0}{2H-u_0 t} (1 - \varepsilon_m) \quad \text{para } t = t_c \quad (185)$$

Com isso, das Equações (114), (180), (181) e (185) segue que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{u_0 x}{2H - u_0 t} \quad \text{para } t = t_c \quad (186)$$

É importante destacar que as Equações (92)-(95), (140), (169), (180), (181) e (184) produzem a condição

$$\frac{dN^-}{dt} - \frac{dN^+}{dt} = \frac{(w_0 t - x) - N_c \left(\frac{H}{x} - 1\right)}{(x + u_0 t - H)} \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) \quad \text{para } t = t_c$$

$$N_c = N^+(t_c) \equiv N^-(t_c)$$

onde o sinal $-$ indica valor no lado inferior da interface superior descendente e o sinal $+$ indica o valor no lado superior da interface inferior ascendente.

3.3.7 Ponto de encontro das interfaces

As Equações (92)-(95), (144), (145) e (173)-(175) para $t_n = t_m = t_c$ ($z_n = x_m = x_c, H_n = H$) mostram que as Equações (148) e (176) são exatamente as mesmas. Isso motiva a introdução da função $W = W(x, t)$ definida por

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t} \quad (187)$$

com denominador positivo.

Então, segue das Equações (186) e (187) que

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad \text{para } t = t_c \quad (188)$$

Assim, com base nas Equações (187) e (188) e no estudo da função W , o ponto (x_c, t_c) de encontro das interfaces é o ponto onde ocorre o mínimo positivo da função W , obtido pela substituição de pontos experimentais x versus t da altura da interface superior descendente na Equação (187).

3.4 BASE DE INFORMAÇÕES

Dados experimentais, que podem ser coletados da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, determinam os parâmetros básicos u_0 , w_0 e (x_c, t_c) por meio das Equações (132), (156) e (187).

Os parâmetros básicos, os dados experimentais da altura e a estrutura apresentada entre as Equações (01) e (188), com destaques para as Equações (78), (86)-(95), (112), (122)-(130), (132)-(142), (156), (163)-(171) e (187), estabelecem uma ordem de cálculo para outros parâmetros e funções. Eles formam uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

A base é uma fonte de informações para parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, como também para a função diferença de pressões arbitrárias.

3.5 EQUAÇÕES PROPOSTAS PARA AS GRANDEZAS CONSTITUTIVAS

Inicialmente é importante observar que, com base na Equação (117), a Equação (86) pode ser escrita na forma

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon) \quad (189)$$

sendo que

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + (\rho_s - \rho_f)g \quad (190)$$

Neste trabalho, será considerada como ponto de partida a classe de suspensões particuladas com equações constitutivas expressas por:

$$\sigma_1 = 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial y} \quad (191)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \left(\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \right)^\beta \quad (192)$$

$$m = (1 - \varepsilon)R(V_2 - V_1) \quad R = R(\varepsilon) \quad (193)$$

onde μ , σ_0 e β são constantes e R é a resistividade (SILVA e JESUS, 2015).

Das Equações (85), (87), (123), (191) e (192) obtém-se que

$$B(\varepsilon) = \frac{\beta\sigma_2}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^4} \left(\frac{\varepsilon}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + 2 \right) \quad (194)$$

$$\frac{dB}{d\varepsilon} = \frac{\beta(\beta+2)\sigma_2}{(1-\varepsilon)^3} + \frac{2\mu\tau}{\varepsilon^4} \left[-\frac{8}{\varepsilon} - \frac{5}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{A} \frac{d^2A}{d\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon}{A^2} \left(\frac{dA}{d\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (195)$$

com τ dada por

$$\tau = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0) - u_0}{A} \quad (196)$$

Usando as Equações (112) e (193) tem-se que

$$m = \frac{(1-\varepsilon)RV_2}{\varepsilon} \quad (197)$$

Assim, com base na região de sedimentação livre, das Equações (78), (117), (118), (121), (126), (127), (190), (193) e (197), para $\varepsilon = \varepsilon_0$, pode-se escrever que

$$G(\varepsilon_0) = 0 \quad (198)$$

$$u_0 = \frac{\varepsilon_0^2(\rho_s - \rho_f)g}{R_0} \quad R_0 = R(\varepsilon_0) \quad (199)$$

A Equação (199) motiva a introdução de uma velocidade u dada por

$$u = u(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(\rho_s - \rho_f)g}{R} \quad (200)$$

Dessa forma, as Equações (199) e (200) fornecem a relação

$$u = \frac{R_0}{R} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \quad (201)$$

Com isso, motivado nas Equações (199)-(201), são adotadas as seguintes relações

$$u = u_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^M \quad (202)$$

$$R = R_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{M-2} \quad (203)$$

onde M é uma constante.

Usando as Equações (190), (197), (201)-(203) obtém-se que

$$G(\varepsilon) = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^M \left[w_0 - (u_0 + w_0) \left(\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \right) \right] + (\rho_s - \rho_f)g \quad (204)$$

Então, a derivada da Equação (186) pode ser escrita na forma

$$\frac{dG}{d\varepsilon} = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^M \left[-\frac{M w_0}{\varepsilon} + (u_0 + w_0) \left(\frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon} \right) \left(\frac{M}{\varepsilon} - \frac{1}{1-\varepsilon} \right) \right] \quad (205)$$

Dessa forma, usando a Equação (205) para $\varepsilon = \varepsilon_0$ tem-se que

$$\frac{dG}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = \frac{R_0}{\varepsilon_0^2} \left[\frac{M u_0}{\varepsilon_0} - \frac{(u_0 + w_0)}{1-\varepsilon_0} \right] \quad (206)$$

A derivada da Equação (125) produz a relação

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = 3(1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1-\varepsilon)^4} - \frac{\rho_f}{\varepsilon^4} \left(\frac{w_0}{(1-\varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right] \quad (207)$$

A derivada da Equação (189) fornece a relação

$$G(\varepsilon) \frac{dA}{d\varepsilon} + A(\varepsilon) \frac{dG}{d\varepsilon} = \frac{dB}{d\varepsilon} - \frac{d^2 P_{sf}}{d\varepsilon^2} - \frac{dQ}{d\varepsilon} \quad (208)$$

Para a classe de suspensões particuladas considerada, destaca-se a subclasse com a constante M dada por

$$M = \frac{\varepsilon_0(u_0 + w_0)}{u_0(1-\varepsilon_0)} \quad (209)$$

Assim, as Equações (198), (206) e (208) fornecem os resultados

$$B(\varepsilon_0) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon_0) = 0 \quad (210)$$

$$\frac{dB}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) - \frac{d^2 P_{sf}}{d\varepsilon^2} - \frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = 0 \quad (211)$$

As funções comprimento $A(\varepsilon)$ e a diferença de pressões arbitrárias estão relacionadas nas Equações (125), (189) e (190). Por serem arbitrárias, fixada uma, a outra sustenta o sistema de equações, Libório *et al.* (2015c). Por isso, usando a Equação (138), podem ser estudados os casos para os quais

$$A = A_0 = \text{constante} \quad (212)$$

$$\frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} = \frac{d^2 P_{sf}}{d\varepsilon^2} = 0 \quad \text{para } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad (213)$$

Dessa forma segue das Equações (210)-(212) que

$$\frac{\beta\sigma_0}{(1-\varepsilon_0)^2} + \frac{4\mu\tau}{\varepsilon_0^4} = Q(\varepsilon_0) \quad (214)$$

$$\frac{\beta(\beta+2)\sigma_0}{(1-\varepsilon_0)^3} - \frac{16\mu\tau}{\varepsilon_0^5} = \frac{dQ}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \quad (215)$$

Então, as Equações (125), (207), (214) e (215) mostram que existem σ_0 e β tais que μ é a viscosidade do fluido, situação sustentada pelas condições expressas na Equação (213).

Das Equações (118), (124) e (194) também pode-se escrever que

$$N = N^- = \text{constante} = N_0 = (1 - \varepsilon_0)A_0 \quad (216)$$

Dessa forma, usando as Equações (149) e (216) obtém-se que

$$x(t) = N_0 + w_0 t - \sqrt{2N_0(u_0 + w_0)t - N_0(2H - N_0)}, \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (217)$$

Além disso, a Equação (140) para $t = t_c$ e a Equação (216) produzem o resultado

$$N_0 = \frac{(w_0 t_c - x_c)^2}{2(x_c + u_0 t_c - H)} \quad (218)$$

3.6 DIFERENÇA DE PRESSÕES ARBITRÁRIAS

Com a estrutura apresentada acima, as Equações (189), (194), (204) e (212) fornecem a relação

$$P_{sf} = I_B - I_Q - A_0 I_G + cte \quad (219)$$

onde

$$I_B = \frac{\beta\sigma_2}{(\beta+1)(1-\varepsilon)} - \frac{4\mu\tau}{3\varepsilon^3} \quad (220)$$

$$I_Q = (1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\rho_s}{2} \left(\frac{u_0 + w_0}{1 - \varepsilon} \right)^2 - \frac{\rho_f}{2\varepsilon^2} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right) \quad (221)$$

$$I_G = \left(R_0 \left(\frac{w_0 \varepsilon_0^{M-2}}{1-M} \varepsilon^{1-M} - \varepsilon_0^{M-2} (u_0 + w_0) (1 - \varepsilon_0) \int \frac{1}{(1-\varepsilon) \varepsilon^M} d\varepsilon \right) + (\rho_s - \rho_f) g \varepsilon \right) \quad (222)$$

para a diferença de pressões arbitrárias, com $M \neq 1$.

No caso $M = 1$, das Equações (189), (194), (204) e (212), a diferença de pressões arbitrárias fica expressa na forma

$$P_{sf} = I_B - I_Q - A_0 I_G + cte \quad (223)$$

onde

$$I_B = \frac{\beta \sigma_2}{(\beta+1)(1-\varepsilon)} - \frac{4\mu\tau}{3\varepsilon^3} \quad (224)$$

$$I_Q = (1 - \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\rho_s}{2} \left(\frac{u_0 + w_0}{1-\varepsilon} \right)^2 - \frac{\rho_f}{2\varepsilon^2} \left(\frac{w_0}{(1-\varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right) \quad (225)$$

$$I_G = \left(\frac{R_0}{\varepsilon_0} \left(w_0 \ln \varepsilon - (u_0 + w_0) (1 - \varepsilon_0) \left(\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) + (\rho_s - \rho_f) g \varepsilon \right) \quad (226)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O ponto de partida para utilização da base é a obtenção dos parâmetros básicos velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda com a interface superior descendente e ponto de encontro da interface superior descendente com a interface inferior ascendente, que são dados primordiais para obtenção do movimento da onda e das interfaces através do cálculo de suas alturas.

Os resultados dos cálculos de tais parâmetros foram obtidos com base na modelagem matemática descrita na metodologia juntamente com dados experimentais de altura versus tempo da interface superior descendente, coletados da literatura, onde a velocidade de sedimentação livre u_0 foi obtida por meio da Equação (132).

Para ilustrar o cálculo da velocidade da onda de aceleração w_0 como o valor mínimo da função w definida pela Equação (156), como também o cálculo do ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente, foi elaborada a Tabela 1 com dados experimentais de Schirmer (1980).

Tabela 1 – Determinação do mínimo de w para uma suspensão aquosa de CaCO_3

$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$	$w \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$
0,00	40,00	-
8,50	35,00	2,24
20,10	30,00	1,05
33,30	25,00	0,65
52,50	18,00	0,39
56,00	17,00	0,38
59,50	16,00	0,39
64,10	15,00	0,46
68,60	14,00	0,63
73,50	13,00	1,71

Fonte: Schirmer (1980)

Na Tabela 1 estão os dados de altura e velocidade versus tempo de uma suspensão aquosa de CaCO_3 de altura $H = 40 \text{ cm}$, porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,960$ e velocidade de sedimentação livre $u_0 = 0,43 \text{ cm min}^{-1}$. De acordo com a Tabela 1, o mínimo positivo de w é $0,38 \text{ cm min}^{-1}$, ou seja, a velocidade da onda de aceleração para tal suspensão é $w_0 = 0,38 \text{ cm min}^{-1}$. Logo, utilizando as Equações (133) e (134), calcula-se o ponto (x_0, t_0) de

encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente. Com isso, $t_0 = 49,38$ min e $x_0 = 18,77$ cm.

Usando suspensões dos trabalhos de Schirmer (1980) e Massarani (1984), nas quais a velocidade da onda de aceleração também pode ser determinado pela Equação (150) devido o ponto final da reta HP da Figura 3 estar bem definido, a Tabela 2 mostra comparação do valor de w_0 dado pela Equação (150) com o valor de w_0 determinado pelo mínimo positivo da função w expressa na Equação (156).

Tabela 2 – Valores de w_0 para diversas suspensões

Suspensão aquosa	w_0 (cm min ⁻¹)	
	Equação (150)	Equação (156)
CaCO ₃ : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,977$, $u_0 = 2,00$ cm min ⁻¹	2,00	2,14
CaO: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,972$, $u_0 = 1,54$ cm min ⁻¹	0,58	0,62
Caulim: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,913$, $u_0 = 1,40$ cm min ⁻¹	0,74	0,70
CaSO ₄ : $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = 0,980$, $u_0 = 2,75$ cm min ⁻¹	3,71	3,92
Borra de carbureto: $H = 30,7$ cm, $\varepsilon_0 = 0,970$, $u_0 = 2,62$ cm min ⁻¹	1,48	1,50
Barita: $H = 40$ cm, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 = 0,975$, $u_0 = 1,52$ cm min ⁻¹	0,70	0,69

Fonte: Schirmer (1980) e Massarani (1984)

Para ilustração do cálculo do ponto (x_c, t_c) de encontro da interface superior descendente com a interface inferior ascendente foram elaboradas as Tabelas 2 e 3 com os dados experimentais de Tiller e d'Ávila (1980).

De acordo com o modelo, o ponto (x_c, t_c) é o ponto onde ocorre o mínimo da função W definida pela Equação (187). A Tabela 3, que refere-se a uma suspensão aquosa de Atapulgita de altura $H = 40$ cm, porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,970$ e velocidade de sedimentação livre $u_0 = 0,18$ cm min⁻¹, mostra que o ponto mínimo de W é dado por $0,115$ cm min⁻¹, que ocorre no tempo $t = 196,67$ min e na altura $x = 12,50$ cm. Portanto, o ponto de encontro é dado por $t_c = 196,67$ min e $x_c = 12,50$ cm, que é o mesmo valor do ponto experimental encontrado por Tiller e d'Ávila (1980).

Tabela 3 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de Atapulgita

Suspensão Aquosa de Atapulgita		
$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$	$W(\text{cm}/\text{min})$
117,75	20,00	0,191
137,68	17,50	0,156
163,04	15,00	0,131
196,67	12,50	0,115
216,67	11,88	0,124
233,33	11,56	0,140
250,00	11,25	0,162
Ponto de Encontro das Interfaces		
Experimental: (196,67 min; 12,50 cm)		

Fonte: Tiller e d'Ávila (1980)

Ainda para ilustração do ponto (x_c, t_c) , foram utilizados dados de uma suspensão aquosa de Microbarita de altura $H = 42$ cm, porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,970$ e velocidade de sedimentação livre $u_0 = 4,23$ cm min⁻¹, expressos na Tabela 4

Tabela 4 – Ponto de encontro das interfaces para uma suspensão aquosa de microbarita

$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$	W cm min ⁻¹
7,63	10,00	1,33
7,85	8,75	1,11
8,18	7,50	0,92
8,56	6,25	0,75
8,87	5,63	0,68
10,00	5,00	0,67
10,74	4,74	0,69
12,00	4,30	0,74
14,00	3,60	0,89
16,00	2,89	1,160

Fonte: Tiller e d'Ávila (1980)

De forma análoga, como da Tabela 4 o mínimo de W é 0,67 cm min⁻¹ e ocorre no tempo $t = 10,00$ min e na altura $x = 5,00$ cm, ponto de encontro das interfaces é dado por $t_c = 10,00$ min e $x_c = 5,00$ cm, sendo, neste caso, o valor experimental $t_c = 8,87$ min e $x_c = 5,63$ cm.

Seguindo o que foi feito para as Tabelas 1 e 2, a Tabela 5 foi elaborada com base nos dados experimentais de Shannon *et al.* (1964) para suspensões aquosas de esferas de vidro de altura $H = 31$ cm, porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,850$, velocidade de sedimentação livre $u_0 =$

10,10 cm min⁻¹, massa específica das esferas $\rho_s = 2,45 \text{ g cm}^{-3}$ e massa específica do fluido $\rho_f = 1,0 \text{ g cm}^{-3}$.

Tabela 5 – Suspensão aquosa de esferas de vidro

$t \text{ (min)}$	$x \text{ (cm)}$	$w \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$	$W \text{ (cm min}^{-1}\text{)}$
000	31,00	-----	-----
1,25	18,19	13,86	14,14
1,50	15,76	10,27	10,38
1,75	13,52	8,14	7,90
2,00	11,01	5,85	5,62
2,25	8,75	4,56	4,06
2,50	7,26	5,94	3,30
2,75	7,12	-11,71	3,60

Fonte: Shannon *et al.* (1964)

Com os dados da Tabela 5 e com as Equações (132)-(134), calcula-se os parâmetros velocidade de sedimentação livre u_0 , velocidade da onda de aceleração w_0 , ponto de encontro entre a interface superior descendente e onda de aceleração (x_0, t_0) e ponto de encontro da interface superior descendente e da interface superior ascendente (x_c, t_c) . Com isso, e com as Equações (216) e (218), as constantes A_0 e N_0 foram calculadas e todos esses resultados estão expressos na Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros da suspensão aquosa de esferas de vidro

Sequência por linha do cálculo de A_0	
$u_0 = 10,10 \text{ cm min}^{-1}$	$w_0 = 4,56 \text{ cm min}^{-1}$
$t_0 = 2,11 \text{ min}$	$x_0 = 9,64 \text{ cm}$
$t_c = 2,50 \text{ min}$	$x_c = 7,26 \text{ cm}$
$N_0 = 5,67 \text{ cm}$	$A_0 = 37,84 \text{ cm}$

Com os dados da Tabela 6, pode-se calcular a altura teórica da interface superior descendente na região de sedimentação livre, por meio das Equações (132)-(134), e na região de transição, por meio da Equação (217).

Os resultados foram expressos na Tabela 7, a qual também mostra a comparação dos dados experimentais de Shannon *et al.* (1964) com os resultados teóricos da altura da interface superior descendente, nos intervalos de sedimentação livre e de transição, obtidas pelas equações do modelo apresentado nesse trabalho.

Tabela 7 – Comparação entre as alturas experimental e teórica da suspensão aquosa de esferas de vidro

$t(\text{min})$	$x(\text{cm})$ (experimental)	$x(\text{cm})$ (teórica)
0,00	31,00	31,00
1,25	18,19	18,38
1,50	15,76	15,85
1,75	13,52	13,33
2,00	11,01	10,80
2,25	8,75	8,58
2,50	7,26	7,26

Fonte: Shannon *et al.* (1964)

Para melhor visualização da comparação dos resultados experimentais com os teóricos, foi elaborado o gráfico abaixo.

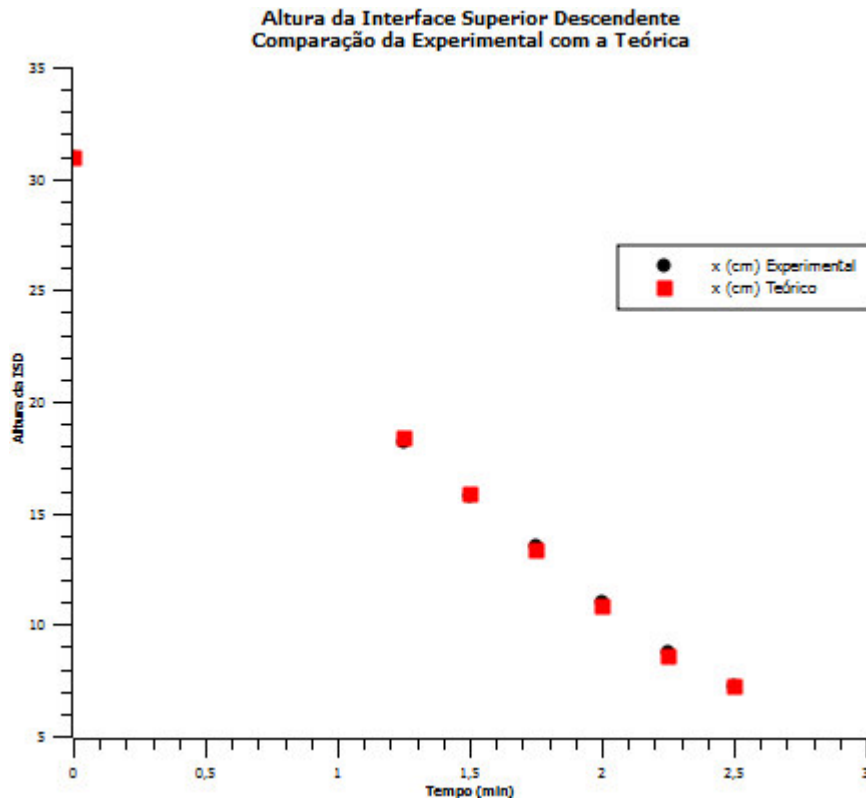


Figura 5 - Comparação entre as alturas experimental e teórica da interface superior descendente

Como, de acordo com a Tabela 7 e a Figura 5, os valores teóricos obtidos pelo modelo estão próximos dos valores experimentais, a função arbitrária constante $A_0 = 37,84 \text{ cm}$ é aceita. Com isso, a função comprimento fica determinada pela Equação (212) e é fundamental para obtenção de informações dos parâmetros das equações constitutivas.

Para o cálculo de tais parâmetros, σ_0 , β e μ , foram utilizadas as Equações (125), (196), (207), (209), (214) e (215), cujos resultados estão expressos na Tabela 8.

Tabela 8 – Suspensão aquosa de esferas de vidro

Parâmetros
$M = 8,23$
$\beta = 0,99$
$\sigma_0 = 79,98 \text{ g cm}^{-1} \text{ min}^{-2}$
$\mu = 0,6 \text{ g cm}^{-1} \text{ min}^{-1}$
$R_0 = 365942,67 \text{ g cm}^{-3} \text{ min}^{-1}$

Na Tabela 8, os parâmetros σ_0 e β foram determinados usando para μ o valor da viscosidade da água.

Com os dados das Tabelas 6 e 8, a diferença de pressões arbitrárias fica determinada pelas Equações (196) e (219)-(222).

Se o valor de A_0 calculado não produz a altura teórica compatível com a altura experimental, a Equação (194) não é adequada para o estudo da suspensão particulada. Neste caso, deve ser proposta outra forma de equação no lugar da Equação (212) para a função comprimento, o que implica em mudanças nas Equações (212), (216)-(222).

5. CONCLUSÃO

Soluções exatas de um sistema de equações do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade, incorporadas em modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, facilitam a determinação de equações para os movimentos da onda de aceleração e das interfaces, principalmente para a altura teórica da interface superior descendente que pode ser comparada com a altura experimental.

Ou seja, por força da modelagem matemática com base em soluções exatas, dados experimentais de altura versus tempo, coletados da literatura, da interface superior descendente do teste de proveta, na porosidade inicial ε_0 , são suficientes para estabelecimento de funções porosidade e velocidades em regiões do próprio teste, inclusive dos movimentos das interfaces e da onda de aceleração.

Equações estabelecidas neste trabalho, juntamente com dados experimentais, coletados da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente do próprio teste de proveta, mostram uma aplicação da base preliminar de informações. De fato, a base fornece elementos para o estudo de grandezas constitutivas e arbitrárias de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. Pois, a partir dela, podem ser determinados parâmetros envolvidos em equações propostas para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, como também para a função diferença de pressões arbitrárias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMADI, G. A Generalized continuum theory for multiphase suspensions flows. **International Journal of Engineering Science**, v. 23, n. 1, p. 1-25, 1985.

ARDEKANI, A. M; RANGEL, R, H. Unsteady motion of two solid spheres in Stokes flow. **Physics of Fluids**. v.18, n. 10, p. 1033061-14, 2006.

ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: applications, **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 17, n. 2, p. 153-207, 1976b.

ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 29, n. 2, p. 209-244, 1976a.

BASSET, A. B. Dynamic simulation of sheared suspensions. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 179, p. 43-63, 1888 (also in A treatise on hydrodynamics: with numerous examples, 2 vol. Dover Publications, 1961. 592 p).

BEDFORD, A.; DRUMHELLER, D. S. Theories of immiscible and structured mixtures. **International Journal of Engineering Science**, v. 21, n. 8, p. 863-960, 1983.

BÜRGER, R.; CONCHA, F.; KARLSEN, K. H.; NARVÁEZ, A. Numerical simulation of clarifier-thickener units treating ideal suspensions with a flux density function having two inflection points. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 44, n. 3-4, p. 255-275, 2006.

BÜRGER, R; WENDLAND, W. Sedimentation and suspension flows: Historical perspective and some recent developments. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 41, n. 2, p. 101-116, 2001.

DEMIRAY, H. A continuum theory of chemical Reacting Mixtures of fluids and solids. **International Journal of Engineering Science**, v. 19, n. 2, p. 253-68, 1981.

FENG, J; JOSEPH, D. D. The unsteady motion of solid bodies in creeping flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 303, p. 83-102, 1995.

FITCH, B. Kynch theory and compression zones. **AIChE Journal**, v. 29, n. 6, p. 940-947, 1983.

FONT, R. Compression zone effect in batch sedimentation. **AIChE Journal**, v. 34, n. 2, p. 229-252, 1988.

GARRIDO, P.; BURGOS, R.; CONCHA, F.; BÜRGER, R. Settling velocities of particulate systems: 13. A simulator for batch and continuous sedimentation of flocculated suspensions. **International Journal of Mineral Processing**, v. 73, n. 2-4, p. 131-144, 2004.

GARRIDO, P.; CONCHA, F.; BÜRGER, R. Settling velocities of particulate systems: 14. Unified model of sedimentation, centrifugation and filtration of flocculated suspensions. **International Journal of Mineral Processing**, v. 72, n. 1-4, p. 57-74, 2003.

GIVLER, R. C. An interpretation for the solid-phase pressure in slow, fluid-particle flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 13, n. 5, p. 717-722, 1987.

GRASSIA, P.; USHERB, S. P.; SCALESB, P. J. A simplified parameter extraction technique using batch settling data to estimate suspension material properties in dewatering applications. **Chemical Engineering Science**, v. 63, n. 7, p. 1971-1986, 2008.

GRASSIA, P.; USHERB, S. P.; SCALESB, P. J. Closed-form solutions for batch settling height from model settling flux functions. **Chemical Engineering Science**, v. 66, n. 5, p. 964-972, 2011.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M.; TRAPP, J. A. Thermodynamics of a continuum with internal constraints. **International Journal of Engineering Science**, v. 8, n. 11, p. 891-908, 1970.

GREENBERG, M. D. Foundations of Applied Mathematics. Reprinted ed. Dover Publications, 2013. 656p.

GUO, S.; ZHANG, F.; WANG, B.; ZHANG, C. Settlement prediction model of slurry suspension based on sedimentation rate attenuation. **Water Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 79-92, 2012.

HERNANDO, L.; OMARI, A.; REUNGOAT, D. Experimental study of sedimentation of concentrated mono-disperse suspensions: Determination of sedimentation modes. **Powder Technology**, v. 258, p. 265-271, 2014.

HERNANDO, L.; OMARI, A.; REUNGOAT, D. Experimental investigation of batch sedimentation of concentrated bidisperse suspensions. **Powder Technology**, v. 275, p. 273-279, 2015.

HOGG, A. J.; DORREL, R. Sedimentation of bidisperse suspensions. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 36, n. 6, p. 481-490, 2010.

IRITANI, E.; HASHIMOTO, T.; KATAGIRI, N. Gravity consolidation-sedimentation behaviors of concentrated TiO₂ suspension. **Chemical Engineering Science**, v. 64, n. 21, p. 4414-4423, 2009.

JALAAL, M.; GANJI, D. D.; AHAMADI, G. Analytical investigation on acceleration motion of a vertically falling spherical particle in incompressible Newtonian media. **Advanced Powder Technology**, v. 21, n. 3, p. 298-304, 2010.

KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. **Transactions of the Faraday Society**, v. 48, p. 166-176, 1952.

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., SILVA, C. F., SILVA, A. S. Uma base preliminar de informações para o estudo do movimento de uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. **Scientia Plena**, v. 11, n. 10, p. 1042021-14, 2015a.

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., PAGANO, R. L., SILVA, A. S. Estudo sobre a diferença de pressões arbitrárias em uma suspensão particulada com restrição de incompressibilidade. In: XVIII ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL E VI ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 2015b, Salvador. **Proceedings of XVIII ENMC – National Meeting on Computational Modeling and VI ECTM –Meeting on Materials Science and Technology Salvador, BA – 13-16 October 2015**

LIBÓRIO, D O., SANTOS, E. J., SANTANA, P. L., SILVA, C. F., SILVA, A. S. Estudo do movimento de uma suspensão particulada por meio de modelagem matemática com base em soluções exatas. In: XVIII ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL E VI ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 2015c, Salvador. **Proceedings of XVIII ENMC – National Meeting on Computational Modeling and VI ECTM –Meeting on Materials Science and Technology Salvador, BA – 13-16 October 2015**

LIU, I. S. On fluid pressure and buoyance force in porous media. **Revista Brasileira de Tecnologia**, v. 11, n. 4, p. 35-43, 1980.

MASSARANI, G. **Fluidodinâmica em sistemas particulados**. 2 ed. E-Papers, 2002. 152 p.

MASSARANI, G. **Problemas em sistemas particulados**. 1 ed. Edgard Blücher, 1984. 114 p.

MOLLINGER, A. M; CORNELISSEN, E. C; VAN DEN BRULE B. H. A. A. An unexpected phenomenon observed in particle settling: oscillating falling spheres. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.**, v. 86, n. 3, p. 389-393, 1999.

PIANET, G.; CATE, A. T.; DERKSEN, J. J.; ARQUIS, E. Assessment of the 1-fluid method for DNS of particulate flows: Sedimentation of a single sphere at moderate to high Reynolds numbers. **Computers & Fluids**, v. 36, n. 2, p. 359-375, 2007.

SCHIRMER, H. P. **Projeto de sedimentador III**. 1980. 82 f. Dissertação de mestrado (Mestrado em ciências) – Programa de pós-graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, 1980.

SHANNON, P. T; DEHAAS, R. D; STROUPE, E. P; TORY, E. M. Batch and Continuous Thickening. Prediction of batch settling behavior from initial rate data with results for rigid spheres. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 3, n. 3, p. 250-260, 1964.

SILVA A. S. **Superfícies singulares e ondas de aceleração em misturas**. 1979. 90 f. Tese de Mestrado (Mestrado em ciências) – Programa de pós-graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, 1979.

SILVA TELLES, A. Considerações sobre as equações do movimento em sistemas Polifásicos. In: XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS, 1., 1993, Ouro Preto.

SILVA, A. S. Sobre Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade. In: XVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS, 2., 1990, Nova Friburgo.

SILVA, A. S., JESUS, E., PAGANO, R. L. e PACÍFICO, J. A. Estimação de parâmetros de suspensões particuladas com base em modelagem matemática da sedimentação gravitacional em proveta. In: II CONGRESSO BRASILEIRO DE REOLOGIA, 2013, Aracaju.

SILVA, A. S.; JESUS, E. S. On arbitrary quantities in a porous media with incompressibility constraint. **International review of chemical engineering**, v. 5, n. 6, p. 429-434, 2013.

SILVA, A. S.; JESUS, E. S. Queda transiente de uma partícula esférica em num fluido viscoso: Transformação da equação íntegro-diferencial em uma equação diferencial. In: XXXV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 3., 2014, Natal. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2015. p 1-7.

SOARES, A. A; CAMELO, L; ANDRADE, M. A. P. M. Study of the motion of a vertically falling sphere in a viscous fluid. **European Journal of Physics**, v.33, n. 5, p. 1053-1062, 2012.

SRINIVASAN, S.; BONITO, A.; RAJAGOPAL, K. R. Flow of a fluid through a porous solid due high pressure gradients. **Journal of porous media**, v. 16, n. 3, p. 193-203, 2013.

SRIVASTAVA, D. K; SRIVASTAVA, N. Stokes flow past axially symmetric isolated bodies: A review article. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 9, n. 8, p. 1-53, 2013.

SRIVASTAVA, D. K; YADAV R. R. Steady Stokes flow past dumbbell shaped axially symmetric body of revolution: An analytic approach. **Theoretical and Applied Mechanics**, vol. 39, n. 3, p. 255-289, 2012.

TILLER, F. M. Revision of Kynch sedimentation theory. **AIChE Journal**. V. 27, p. 823-829, (1981)

TILLER, F. M.; D'ÁVILA, J. S. Zona de compressão em sedimentação. In: VIII ENCONTRO SOBRE ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS, 1980, Curitiba.

TORABI, M.; YAGHOUBI, H. Accurate solution for acceleration motion of a vertically falling spherical paricle in incompressible Newtonian media. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 91, n. 2, p. 376-381, 2013.

USHER, S. P.; SCALES, P. J. Steady state thickener modelling from the compressive yield stress and hindered settling function. **Chemical Engineering Journal**, v. 111, n. 2-3, p. 253-261, 2005.

WETT, B. A straight interpretation of the solids flux theory for a three-layer sedimentation model. **Water Research**, v. 36, n. 12, p. 2949-2958, 2002.

YU, L.; MA, J.; FREAR, C.; ZHAO, Q.; DILLON, R.; LI, X.; CHEN, S. Multiphase modeling of settling and suspension in anaerobic digester. **Applied Energy**, v. 111, p, 28-39, 2013.

APÊNDICE A – Altura da Interface Superior Descendente

Demonstração do cálculo da altura da Interface Superior Descendente (ISD).

A altura da ISD no intervalo de transição é determinada do problema

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (\text{AP1})$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (\text{AP2})$$

$$x(t_0) = x_0 = w_0 t_0 \quad (\text{AP3})$$

$$t_0 = \frac{H}{u_0 + w_0} \quad (\text{AP4})$$

onde ε^- é a porosidade no lado inferior da interface superior descendente.

Usando a regra de Leibniz para derivada (Greenberg, 2013) e a derivada da Equação (AP1), obtêm-se que

$$-A(\varepsilon^-) \frac{d\varepsilon^-}{dt} = w_0 - \frac{dx}{dt} \quad (\text{AP5})$$

Das Equações (AP2) e (AP5), pode-se escrever que

$$-A(\varepsilon^-) \frac{d\varepsilon^-}{dt} = (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad (\text{AP6})$$

A Equação (AP2) também pode ser reescrita na forma

$$\frac{dx}{dt} + u_0 = (u_0 + w_0) \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon^-}{1 - \varepsilon^-} \right) \quad (\text{AP7})$$

Defina $I(t)$ por

$$I(t) = \int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon - (1 - \varepsilon_0)(x + u_0 t - H) \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (\text{AP8})$$

Como $\varepsilon^-(t_0) = \varepsilon_0$ e utilizando as Equações (AP3) e (AP4), têm-se que

$$I(t_0) = 0 \quad (\text{AP9})$$

Usando a regra de Leibniz (Greenberg, 2013), a derivada da integral estabelecida pela Equação (AP8) fornece

$$\frac{dI}{dt} = -(\varepsilon_0 - \varepsilon^-)A(\varepsilon^-) \frac{d\varepsilon^-}{dt} - (1 - \varepsilon_0) \left(\frac{dx}{dt} + u_0 \right) \quad (\text{AP10})$$

Com isso, a substituição das Equações (AP6) e (AP7) na Equação (AP10), mostra que

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (\text{AP11})$$

Dessa forma, segue das Equações (AP9) e (AP11) que

$$I(t) = 0 \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (\text{AP12})$$

Como conclusão, as Equações (AP8) e (AP12) mostram que

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \varepsilon_0)(x + u_0 t - H) \quad (\text{AP13})$$

APÊNDICE B – Roteiro para execução da base

I) Coletar dados experimentais x versus t da literatura, de altura versus tempo da interface superior descendente, oriundos de teste de proveta com a suspensão particulada a ser estudada com porosidade inicial ε_0 e altura inicial H da suspensão na proveta.

II) Determinar a velocidade de sedimentação livre u_0 , com base nos dados experimentais x versus t e na equação

$$x = H - u_0 t$$

III) Calcular a velocidade da onda de aceleração w_0 , como o mínimo positivo da função w , obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na relação

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H - x) - (2H - x)u_0 t}$$

IV) Calcular o ponto (x_0, t_0) de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente, por meio das equações

$$t_0 = \frac{H}{u_0 + w_0}$$

$$x_0 = w_0 \cdot t_0 = \frac{H w_0}{u_0 + w_0}$$

V) Calcular o ponto (x_c, t_c) de encontro da interface superior descendente com a interface inferior ascendente, onde o ponto (x_c, t_c) é o ponto onde ocorre o mínimo positivo da função W , obtido pela substituição de pontos experimentais (x, t) na Equação

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t}$$

VI) Altura da onda de aceleração

$$h(t) = w_0 t$$

VII) Altura da interface superior descendente

$$x = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$(w_0 t - x)^2 = 2N^-(x + u_0 t - H) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$x = w_0 t + N^- - \sqrt{2N^-(u_0 + w_0)t - H) + (N^-)^2} \quad t_0 \leq t \leq t_c$$

$$2\left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon\right) N^- = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon\right)^2 \quad N^- = N(\varepsilon^-)$$

VIII) Região de Sedimentação Livre: $h(t) \leq y \leq x(t)$ em $0 \leq t \leq t_0$

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_0$$

$$V_2(y, t) = -u_0$$

$$V_1(y, t) = \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} u_0$$

$$P_{sf}(y, t) = P_{sf}(\varepsilon_0) = cte$$

IX) Região de Transição: $z(t) \leq y \leq h(t)$ em $0 \leq t \leq t_0$; $z(t) \leq y \leq x(t)$ em $0 \leq t \leq t_c$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\xi) d\xi = w_0 t - y$$

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon}$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon}$$

$$G(\varepsilon)A(\varepsilon) = B(\varepsilon) - \frac{dP_{sf}}{d\varepsilon} - Q(\varepsilon)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + (\rho_s - \rho_f)g$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon}$$

$$Q(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0)^2 \left[\rho_s \frac{(u_0 + w_0)^2}{(1 - \varepsilon)^3} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^3} \left(\frac{w_0}{(1 - \varepsilon_0)} - (u_0 + w_0) \right)^2 \right]$$

X) Propor equações para as grandezas constitutivas m, σ_1 e σ_2 ;

XI) Observar a equação que relaciona as funções arbitrárias $A(\varepsilon)$ e P_{sf} , pois, por serem arbitrárias, P_{sf} pode ser determinada a partir de considerações feitas sobre $A(\varepsilon)$, ou vice versa.