

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA (PEQ-UFS)

HARIEL UDI SANTANA MENDES

**FUNÇÕES POROSIDADES E VELOCIDADES NO MOVIMENTO
GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA**

São Cristóvão (SE)

2019

HARIEL UDI SANTANA MENDES

**FUNÇÕES POROSIDADES E VELOCIDADES NO MOVIMENTO
GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Santos Silva

São Cristóvão (SE)

2019

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Mendes, Hariel Udi Santana
M538f Funções porosidades e velocidades no movimento gravitacional
de uma suspensão particulada em proveta / Hariel Udi Santana
Mendes ; orientador Antônio Santos Silva - São Cristóvão, 2019.
96 f. : il.

Dissertação (mestrado em Engenharia Química) – Universidade
Federal de Sergipe, 2019.

1. Engenharia química. 2. Porosidade. 3. Velocidade. 4.
Sedimentação e depósitos. 5. Sedimentos e suspensão. I. Silva,
Antônio Santos orient. II. Título.

CDU 66,011

HARIEL UDI SANTANA MENDES

**FUNÇÕES POROSIDADES E VELOCIDADES NO MOVIMENTO
GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA**

Dissertação de Mestrado aprovada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da
Universidade Federal de Sergipe em 28 de Fevereiro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Santos Silva – Orientador
(PEQ/UFS)

Prof. Dr. Pedro Leite de Santana
(PEQ/UFS)

Prof. Dr. Acto de Lima Cunha
(NUPETRO/UFS)

Dedico este trabalho a minha mãe, Aldeni, mulher guerreira e batalhadora, que sempre me incentivou incondicionalmente. Você é meu maior exemplo para que eu possa conquistar meus sonhos. Dedico também a minha noiva, Maria. Você é luz na minha vida, minha melhor metade e meu melhor sorriso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e a possibilidade de trilhar este caminho, por proporcionar esta oportunidade de estudo e por colocar em meu caminho pessoas amigas e preciosas.

A minha amada família, meus pais e minhas irmãs, que sempre me apoiaram incondicionalmente, que apostaram em mim mais do que ninguém e que seguramente são os que mais compartilham da minha alegria. Amo vocês.

A minha noiva, Maria, que sempre esteve ao meu lado quando precisei, que sempre me encorajou a nunca desistir e que sempre me fez acreditar que posso ser capaz. Sem você do meu lado este trabalho não seria possível. Amo você.

Ao professor Dr. Antônio Santos Silva, meu orientador, que foi o principal incentivador para minha pesquisa neste tema e que foi de extrema importância para tornar este trabalho uma realidade. Obrigado pela paciência e confiança depositada em mim, pelas críticas, sugestões e conselhos.

Aos professores Dr. Pedro Leite de Santana e Dr. Acto de Lima Cunha pelas valiosas contribuições e correções no exame de qualificação e na dissertação do mestrado e pelos seus exemplos como educadores.

A todos colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química (PEQ) da Universidade Federal de Sergipe que fizeram junto comigo as disciplinas do mestrado e foram parte da minha jornada acadêmica.

Ao Núcleo de Graduação em Engenharia de Petróleo (NUPETRO) da Universidade Federal de Sergipe, pela oportunidade concedida de ter sido professor substituto durante meu tempo como mestrando. Foi uma experiência muito gratificante, que contribuiu para meu aperfeiçoamento enquanto professor.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de mestrado.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química por serem parte fundamental da minha formação acadêmica.

A todas as pessoas que contribuíram para a concretização desta dissertação, estimulando-me intelectualmente e emocionalmente, meu profundo e sentido agradecimento.

Nós não precisamos de magia para mudar o mundo, nós já temos todo o poder necessário dentro de nós mesmos: nós já temos o poder de imaginar algo melhor.

J. K. Rowling

RESUMO

O estudo do movimento gravitacional de uma suspensão particulada é de grande importância para o estabelecimento de parâmetros fenomenológicos do processo, e para a predição de valores de parâmetros necessários aos cálculos de projetos de sedimentadores e da sedimentação de partículas sólidas, presentes em fluidos de perfuração e completação de poços de petróleo. Neste trabalho, com base nos testes de proveta para o movimento gravitacional, consideram-se as regiões de sedimentação livre, de transição e de compactação, ocupadas pela suspensão durante o processo. A suspensão na proveta foi modelada por um meio poroso com restrição de incompressibilidade que, sob certas condições, permite o estabelecimento de equações para as funções porosidades e velocidades nestas três regiões. Nas equações que fornecem diretamente as funções porosidades para as regiões de transição e de compactação surgem parâmetros constantes que precisam ser determinados, os quais também aparecem nas equações que descrevem a altura da interface superior descendente, a onda de aceleração e a interface inferior ascendente. As equações propostas para a altura da interface superior descendente mostraram um ótimo ajuste em relação aos dados experimentais do teste de proveta de suspensões particuladas de barita, calcita e atapulgita, com porosidade inicial conhecida. Para a interface inferior ascendente, o comportamento se apresenta compatível com resultados da literatura. Os resultados numéricos para porosidades e velocidades estão de acordo com resultados da literatura, ou seja, tendem a aumentar, em módulo, do fundo da proveta até a altura da interface superior descendente e diminuem com o tempo em cada posição.

Palavras-chave: funções porosidades; funções velocidades; suspensão particulada; sedimentação gravitacional.

ABSTRACT

The study of the gravitational movement of a particulate suspension is of great importance for the establishment of phenomenological parameters of the process and for the prediction of parameter values necessary for the calculations of sedimentation projects and the sedimentation of solid particles present in drilling fluids and completion of oil wells. In this work, based on the beakers' tests for the gravitational movement, we consider the regions of free sedimentation, transition and compaction, occupied by the suspension during the process. The suspension in the beaker was modeled by a porous medium with restriction of incompressibility that, under certain conditions, allows the establishment of equations for the porosities and velocities functions in these three regions. In the equations that directly provide the porosities functions for the transition and compaction regions, there are constant parameters that need to be determined, which also appear in the equations describing the height of the upper descending interface, the accelerating wave, and the lower ascending interface. The equations proposed for the height of the upper descending interface showed a good fit in relation to the experimental data of the barite, calcite and atapulgitite particulate suspensions test with known initial porosity. For the lower ascending interface, the behavior is consistent with literature forms. The numerical results for porosities and velocities are in accordance with literature results, that is, they tend to increase, in module, from the bottom of the beaker to the height of the upper descending interface and decrease with time in each position.

Keywords: porosities functions; velocities functions; particulate suspension; gravitational sedimentation.

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de barita com porosidade inicial $\epsilon_0 = 0,88$	52
Tabela 4.2 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de calcita com porosidade inicial $\epsilon_0 = 0,88$	52
Tabela 4.3 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de barita com porosidade inicial $\epsilon_0 = 0,933$	53
Tabela 4.4 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de atapulgita com porosidade inicial $\epsilon_0 = 0,970$	53
Tabela 4.5 - Velocidades de sedimentação livre (u_0).....	54
Tabela 4.6 - Parâmetros calculados.....	54
Tabela 4.7 - Resultados de N_0 e A_0	55
Tabela 4.8 - Resultados numéricos para a altura da interface superior descendente da região de transição para o caso $A(\epsilon)$ e $N(\epsilon)$ constantes.....	56
Tabela 4.9 - Constantes Δ , γ , β e A_m	60
Tabela 4.10 - Resultados numéricos para a altura da interface superior descendente da região de transição para o caso $A(\epsilon)$ variável.....	61
Tabela 4.11 - Parâmetros ajustados da região de compactação.....	64
Tabela 4.12 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\epsilon_0 = 0,88$).....	71
Tabela 4.13 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$).....	72
Tabela 4.14 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\epsilon_0 = 0,933$).....	73
Tabela 4.15 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$).....	74
Tabela 4.16 - Resultados de ϵ^* para a suspensão particulada de barita ($\epsilon_0 = 0,88$).....	75
Tabela 4.17 - Resultado de ϵ^* para a suspensão particulada de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$).....	75
Tabela 4.18 - Resultado de ϵ^* para a suspensão particulada de barita ($\epsilon_0 = 0,933$).....	75

Tabela 4.19 - Resultado de ε^* para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	75
Tabela 4.20 - Resultados de β_0	76
Tabela 4.21 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	76
Tabela 4.22 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	77
Tabela 4.23 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	77
Tabela 4.24 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).....	78
Tabela 4.25 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	79
Tabela 4.26 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	80
Tabela 4.27 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	81
Tabela 4.28 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$)..	82
Tabela 4.29 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	83
Tabela 4.30 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	84
Tabela 4.31 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	85
Tabela 4.32 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).....	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Regiões da modelagem da sedimentação em batelada.....	30
Figura 2.2 - Curva da sedimentação em batelada na qual são apresentadas as linhas de equi-concentração previstas pela teoria de Kynch (1952).....	30
Figura 2.3 - Perfil de sedimentação de uma suspensão inicialmente homogênea.....	32
Figura 2.4 - Etapas do ensaio de proveta (a) e curva de sedimentação resultante do ensaio (b)..	35
Figura 3.1 - Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.....	40
Figura 4.1 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	57
Figura 4.2 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	57
Figura 4.3 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	58
Figura 4.4 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).....	58
Figura 4.5 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	62
Figura 4.6 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	62
Figura 4.7 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	63
Figura 4.8 - Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).....	63
Figura 4.9 - Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	65
Figura 4.10 - Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).....	66
Figura 4.11 - Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).....	67

Figura 4.12 - Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$).....	68
Figura 4.13 - Exemplo de construção das Tabelas 4.12-4.15 para um tempo de 10 min.....	69
Figura 4.14 - Exemplo de construção das Tabelas 4.12-4.15 para um tempo de 30 min.....	70

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a_1	Aceleração do constituinte fluido
a_2	Aceleração do constituinte sólido
A	Função comprimento arbitrária
A_0	Função comprimento arbitrária constante
A_1	Energia de Helmholtz do constituinte fluido
A_2	Energia de Helmholtz do constituinte sólido
A_m	Constante da função arbitrária comprimento
c	Constante da equação para localização da interface inferior ascendente
d_1	Função densidade arbitrária do constituinte fluido
d_2	Função densidade arbitrária do constituinte sólido
E_1	Energia de interação do constituinte fluido
E_2	Energia de interação do constituinte sólido
g	Aceleração da gravidade
g_1	Força de campo sobre o fluido
g_2	Força de campo sobre o sólido
h	Altura da onda de aceleração
H	Altura inicial da suspensão na proveta
I_1	Força de interação do constituinte fluido
I_2	Força de interação do constituinte sólido
k	Constante física responsável pela variação da porosidade no fundo da proveta
l_a	Força de interação arbitrária
L_0	Comprimento constante
m	Parte constitutiva da força de interação

N	Comprimento função da porosidade
N_0	Comprimento função da porosidade constante
p_1	Função escalar arbitrária do constituinte fluido
p_2	Função escalar arbitrária do constituinte sólido
P_f	Pressão do constituinte fluido
P_s	Pressão do constituinte sólido
Q	Função arbitrária
t	Variável tempo
t_0	Instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
t_c	Instante de encontro das duas interfaces
T_1	Tensor tensão do constituinte fluido
T_2	Tensor tensão do constituinte sólido
u_0	Velocidade de sedimentação livre
V_0	Velocidade constante
V_1	Velocidade do constituinte fluido
V_2	Velocidade do constituinte sólido
w	Função velocidade
w_0	Velocidade da onda de aceleração
W	Função velocidade
x	Altura da interface superior descendente
x_0	Altura de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração
x_c	Altura de encontro das duas interfaces
x_f	Altura final da interface superior descendente
y	Coordenada espacial
z	Altura da interface inferior ascendente

Símbolos Gregos

β	Constante da função arbitrária comprimento e da função porosidade para a região de transição
β_0	Constante que contém razão de compressibilidade por resistividade
γ	Constante da equação para localização da interface superior de descendente na região de transição
Δ	Constante da função porosidade para a região de transição
ε	Porosidade da suspensão na proveta
ε_0	Porosidade inicial
ε_m	Porosidade no fundo da proveta
ε_{mf}	Porosidade final no fundo da proveta
ε^*	Função da porosidade
$\bar{\varepsilon}$	Porosidade média da região de compressão
ε_∞	Porosidade crítica
ρ_1	Densidade do constituinte fluido
ρ_2	Densidade do constituinte sólido
ρ_f	Massa específica do fluido puro
ρ_s	Massa específica do sólido puro
σ_1	Parte constitutiva do tensor tensão para o fluido
σ_2	Parte constitutiva do tensor tensão para o sólido
τ	Função arbitrária
φ_0	Velocidade inicial da interface inferior ascendente
\emptyset	Função do tempo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. REVISÃO DA LITERATURA	19
2.1 QUEDA ACELERADA DE UMA PARTÍCULA ESFÉRICA NUM FLUIDO	19
2.2 MEIO POROSO SATURADO COM FLUIDO	20
2.2.1 Balanços básicos	20
2.3 MEIO POROSO COM RESTRIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE (MPRI)	23
2.4 MOVIMENTO GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA.....	29
2.4.1 Aspectos Teóricos do Movimento Gravitacional.....	34
2.4.2 Sedimentação de Adensantes	35
3. MATERIAIS E MÉTODOS	39
3.1 MODELO MATEMÁTICO	40
3.2 REGIÃO DE SEDIMENTAÇÃO LIVRE.....	41
3.3 REGIÃO DE TRANSIÇÃO	42
3.3.1 Caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes:.....	44
3.3.2 Caso $A(\varepsilon)$ variável:.....	44
3.4 REGIÃO DE COMPACTAÇÃO:	45

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
4.1 REGIÃO DE SEDIMENTAÇÃO LIVRE.....	53
4.2 REGIÃO DE TRANSIÇÃO	54
4.2.1 Caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes:.....	55
4.2.2 Caso $A(\varepsilon)$ variável:.....	59
4.3 REGIÃO DE COMPACTAÇÃO	64
4.4 CURVAS REPRESENTATIVAS DO MOVIMENTO DE SEDIMENTAÇÃO EM PROVETA	65
4.5 CÁLCULO DAS POROSIDADES	69
4.6 CÁLCULO DAS VELOCIDADES.....	75
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	88
5.1 CONCLUSÕES	88
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	88
REFERÊNCIAS	90
APÊNDICE A	95

1. INTRODUÇÃO

O estudo do movimento gravitacional de uma suspensão particulada é importante tanto do ponto de vista teórico, como em diferentes situações que podem ocorrer na prática e que podem ser aplicadas nas diversas áreas da Engenharia. Na Engenharia de Processos Químicos diversas operações unitárias envolvem esta aplicação, como por exemplo, na sedimentação e projetos de sedimentadores (CREMASCO, 2014).

Na Engenharia de Petróleo, os fluidos de perfuração utilizados para perfuração de poços de petróleo são exemplos de suspensões particuladas, que possuem diversas funções, tais quais: manter estáveis a parede do poço, controlar a hidrostática do poço para evitar influxos indesejados da formação para dentro do poço, limpar o fundo do poço dos cascalhos gerados pela broca e transportá-los até a superfície e resfriar e lubrificar a coluna de perfuração e a broca (THOMAS, 2001).

Em perfurações *overbalance*, que são as mais utilizadas na perfuração de poços de petróleo, nas quais a pressão hidrostática do fluido é maior do que a pressão de poros da formação, são utilizados adensantes para aumentar a massa específica do fluido e assim, elevar a sua pressão hidrostática, visto que há uma tendência da pressão de poros aumentar com a profundidade (ROCHA e AZEVEDO, 2009). O adensante que é comumente utilizado durante a fase de perfuração de um poço é a barita. Porém, um problema que ocorre com frequência devido ao movimento gravitacional deste adensante dentro do poço é conhecido como “*Barite Sag*”.

Barite Sag é um problema persistente e potencialmente sério que pode ocorrer em poços direcionais, com maior frequência, ao se usar fluidos com adensantes. Este fenômeno é complexo e envolve a sedimentação dinâmica e estática do material adensante, formando leitos de deposição no poço. A formação desses leitos de alta densidade pode levar a problemas operacionais graves, incluindo problemas de controle de poço, perda de circulação, instabilidade do poço e prisão de coluna (ZAMORA E BELL, 2004). Por isso é importante a elaboração de modelos que consigam prever a formação deste fenômeno e assim tentar mitigá-lo (BERN *et al.*, 1998).

Do ponto de vista de um meio poroso saturado com fluido, modelado pela Teoria Contínua de Misturas Sólido-Fluido sem reações químicas, considerando que a densidade do sólido e do fluido puros são constantes, ou seja, com restrição de incompressibilidade, a formulação teórica proposta por Silva *et al.* (2013) fornece equações de balanço generalizadas,

envolvendo grandezas constitutivas e arbitrárias para o movimento gravitacional de uma suspensão particulada.

Para um problema unidimensional, pode ser utilizada modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, que não é simplesmente um problema puro de sedimentação. A modelagem envolvida é mais complexa, visto que, são envolvidas sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais. Além disso, é necessário estabelecer condições de contorno e iniciais para a resolução das equações diferenciais, considerar as condições de salto através da interface em movimento para caracterizar o problema que será modelado. As soluções de todas as regiões, considerando as interfaces em movimento, devem ser compatibilizadas. Este é um problema rico em informações (LIBÓRIO, 2016).

A principal motivação deste trabalho está em contribuir para o cálculo de porosidades e velocidades de suspensões particuladas (fluidos de perfuração) que não dependam do tamanho das partículas que estão em suspensão ou das densidades destes fluidos e das partículas, mas unicamente de dados experimentais de altura da interface superior descendente *versus* tempo obtidos a partir do teste de proveta desta suspensão. Os resultados de porosidades e velocidades também podem ser aplicados no dimensionamento de um sedimentador convencional contínuo.

Este trabalho desenvolve um estudo acerca das funções porosidades e velocidades nas regiões de transição e compactação do movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta, através de modelagem matemática. Além disso, compatibiliza as soluções encontradas para estas regiões e compara dados experimentais com resultados teóricos de altura da interface superior descendente *versus* tempo.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1 QUEDA ACELERADA DE UMA PARTÍCULA ESFÉRICA NUM FLUIDO

O trabalho realizado por Basset (1888) é considerado como pioneiro na área de estudo de queda de corpos em fluidos. Basset em seu trabalho estabelece uma equação íntegro-diferencial para a velocidade de queda acelerada de uma partícula esférica num fluido newtoniano incompressível, sob o regime de Stokes, envolvendo a história da aceleração e apresenta um estudo sobre soluções aproximadas para a equação estabelecida.

De acordo com Massarani (2002), a força resistiva exercida pelo fluido sobre a partícula depende da sua forma e dimensões e, além disso, do campo de velocidades do fluido não perturbado pela presença da partícula. É mostrado também que ela é influenciada pela presença de contornos rígidos e de outras partículas e, no movimento acelerado, depende da história da aceleração da partícula.

Soares *et al.* (2012) analisaram o movimento de uma esfera caindo verticalmente num fluido viscoso, considerando os efeitos da massa adicionada, combinando a solução analítica para o movimento da partícula através de métodos numéricos iterativos para determinar parâmetros da suspensão. Os resultados foram validados através de dados experimentais encontrados na literatura e através destes, foi possível compreender as interações fluido/partícula do ponto de vista desta abordagem,

O trabalho de Silva e Jesus (2015) mostrou que a equação íntegro-diferencial, estabelecida em Basset (1888), pode ser transformada em uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficiente constantes, não homogênea, a qual gera alternativas para a determinação da velocidade. A EDO foi resolvida por dois métodos, uma solução em série assintótica e pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, e foi constatado que transformar a equação íntegro-diferencial em equação diferencial abre caminho para estudos de quedas de corpos em fluidos que requerem termos adicionais, de modo que para não envolver história de aceleração, estes termos sejam colocados em um problema de valor inicial definido pelos autores do trabalho.

Liu *et al.* (2017) realizaram um estudo numérico da queda livre de uma esfera em diferentes números de Reynolds utilizando um *software* de Fluidodinâmica Computacional (CFD). O objetivo do trabalho era analisar a dinâmica de partículas (movimento da esfera, forças hidrodinâmicas na esfera e as características do campo de fluxo circundante) de minério em tubos verticais utilizados na mineração em águas profundas. Foi constatado que o campo de

fluxo circundante nas esferas perde sua simetria gradualmente com o aumento do número de Reynolds, a simetria varia entre axial e plana, podendo tornar-se caótica.

Mehrabian *et al.* (2017) fizeram um estudo do efeito da viscosidade e tensão interfacial na separação de óleo de uma partícula esférica revestida com óleo que escoava em queda através de uma solução aquosa. Foi utilizado solvente para modificar a viscosidade do óleo e surfactante para modificar a tensão interfacial. Constatou-se que o óleo é melhor removido quando a proporção da viscosidade aumenta.

Estes trabalhos anteriormente citados apresentam componentes que podem ser utilizados como ponto de partida para o estudo do movimento gravitacional de suspensões particuladas, principalmente aqueles gerados da resistência dinâmica. Contudo, a teoria contínua de misturas sem reações químicas proporcionará equações de balanço mais generalizadas, que envolvem forças constitutivas e pressões arbitrárias, para o estudo do movimento gravitacional de uma suspensão particulada.

2.2 MEIO POROSO SATURADO COM FLUIDO

Segundo Silva *et al.* (2013) ao se admitir uma suspensão particulada como um meio poroso saturado com fluido, sem a ocorrência de reações químicas e modelada pela teoria contínua de misturas sólido-fluido, as seguintes relações são válidas para a densidade do constituinte fluido ρ_1 e a densidade do constituinte sólido ρ_2 :

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (2.1)$$

na qual ρ_f representa a densidade do fluido puro, ρ_s a densidade do sólido puro e ε é a função porosidade.

2.2.1 Balanços básicos

De acordo com os trabalhos de Green *et al.* (1970), Atkin e Craine (1976a,b), Demiray (1981) e Ahmadi (1985), na conjuntura da teoria contínua de misturas sólido-fluido sem a ocorrência de reações químicas, definem-se a seguir os balanços de massa e de quantidade de movimento linear.

a) Balanço de massa:

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} V_\alpha = 0 \quad \dot{\rho}_\alpha \equiv \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + (\operatorname{grad} \rho_\alpha) \cdot V_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.2)$$

tal que ρ_α é a densidade, o sub-índice α indica o constituinte, no qual $\alpha = 1$ indica constituinte fluido e $\alpha = 2$ que o constituinte é sólido, div é o operador divergente espacial, V_α é a velocidade, t é a variável tempo e $grad$ é o operador gradiente espacial.

b) Balanços de quantidade de movimento linear:

$$\rho_\alpha a_\alpha = div T_\alpha + I_\alpha + \rho_\alpha g_\alpha \quad a_\alpha \equiv \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (grad V_\alpha) V_\alpha \quad (2.3)$$

em que a_α é a aceleração, T_α é o tensor tensão, I_α é a força de interação e g_α é a força de campo.

Além da força de interação I_α , a energia de interação E_α também é um outro tipo de interação importante para que a teoria quase mecânica para o Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade (MPRI) possa ser formulada. Assim, além das equações (2.2) e (2.3) para a mistura como um todo, também se escreve:

$$I_1 + I_2 = 0 \quad E_1 + E_2 = 0 \quad (2.4)$$

Acerca do escoamento em meio poroso, os trabalhos que seguem podem ser destacados.

Wei e Muraleetharan (2002) propuseram uma teoria contínua para meios porosos saturados por múltiplos fluidos imiscíveis com base na teoria das misturas com interfaces. Os resultados obtidos podem ser utilizados para desenvolver um modelo em macroescala, onde o estado do meio poroso seria descrito através de macrovariáveis obtidas por meio de experimentos. Neste modelo, as formulações são apresentadas na configuração Lagrangiana e foi estabelecida uma ligação entre as teorias de mistura e a teoria de meios porosos de Biot.

Madhi *et al.* (2015) realizaram uma revisão de artigos publicados acerca da transferência de calor por convecção e fluxo de fluido em meios porosos com nanofluidos. A vantagem dos meios porosos na transferência de calor é que estes possuem uma área de dissipação maior que aletas convencionais, fazendo com que a convecção de calor aumente e que o movimento irregular do fluxo de fluido faz com que este seja misturado de forma mais eficaz. Os nanofluidos são originados de misturas de fluidos com nanopartículas de dimensões de 1-10 nm, com condutividades térmicas muito altas.

Madhi *et al.* (2015) resumiram os artigos publicados em relação à porosidade, permeabilidade, coeficiente de inércia e condutividade térmica para meios porosos e propriedades termofísicas de nanofluidos. Concluíram que meios porosos com nanofluidos são altamente recomendados para a aplicação de processos de transferência de calor e que

desenvolver equipamentos de transferência de calor com estas características, já que eles devem ser altamente compactos e efetivos, é o próximo passo da engenharia.

A tese de doutorado de Ângulo (2015) consistiu em estudar teórica e experimentalmente a possibilidade de causar fratura hidráulica em um meio poroso de baixa permeabilidade preenchido com água ao variar a temperatura. Observou-se que ao variar a temperatura a pressão também se alterava, provocando um colapso do material poroso e aumentando a permeabilidade deste. Também se analisou no trabalho o escoamento de um fluido Newtoniano generalizado através de um canal poroso limitado por duas placas planas utilizando equações de balanço que empregam a Teoria de Misturas e a introdução de outros termos adicionais que são responsáveis pela interação entre os constituintes que representam o meio poroso e o fluido.

O trabalho de Ângulo (2015) propôs equações constitutivas para o tensor parcial de tensões, fonte de momentum, permeabilidade e pressão para a solução das equações de conservação. Através da modelagem matemática mostrou-se que os resultados obtidos tanto teoricamente quanto experimentalmente fornecem informações importantes para solução de problemas de fratura hidráulica, podendo minimizar o uso de produtos químicos em processos de fratura, o que faria com que a poluição de fontes de água subterrâneas próximas a lugares de extração de gás natural diminuísse. Para o estudo do fluido escoando através de um meio poroso, os resultados obtidos da expressão proposta para relacionar permeabilidade e porosidade estão em concordância com os da literatura e os perfis de velocidade do fluido escoando através da matriz porosa foi determinado através do método de Runge-Kutta de quarta ordem com o método do tiro. Os resultados obtidos mostraram que a metodologia proposta por Ângulo forneceu informações válidas e importantes para a resolução de problemas que tinham aplicação prática, além de ter um baixo custo computacional, porém não aparecem grandezas arbitrárias em suas equações.

Gajo *et al.* (2016) fizeram um estudo acerca da modelagem de um meio poroso saturado por três fluidos imiscíveis, além de simulações de testes de injeção. Foram desenvolvidas relações constitutivas para saturações efetivas, permeabilidades relativas e pressões capilares e esquemas computacionais para simular processos em uma rocha deformável através do método dos elementos finitos.

O trabalho de Gajo *et al.* (2016) tem aplicações na área de engenharia ambiental, a exemplo de problemas envolvendo poluição de águas subterrâneas e sequestro de dióxido de carbono e na área de engenharia de petróleo, a qual lida com escoamento de água-óleo-gás

constantemente. Os resultados encontrados forneceram a pressão e saturação de cada um dos constituintes, além do fluxo mássico para as diversas simulações realizadas.

Jin *et al.* (2017) investigaram o efeito da rugosidade na deposição de partículas em um meio poroso saturado com fluido, pois até então acreditava-se que a rugosidade do meio poderia aumentar a deposição de partículas, contudo não fora observado de forma consistente, nem descrito sistematicamente na literatura. As condições adotadas foram de baixa força iônica (condição desfavorável para a deposição de partículas), as partículas coloidais utilizadas foram microesferas de poliestireno com dois diâmetros diferentes e também foram utilizadas duas colunas de experimentos com dimensões diferentes.

Os resultados encontrados por Jin *et al.* (2017) demonstraram que a presença de rugosidade no meio pode fazer com que a deposição das partículas aumente ou diminua a depender de mudanças no retardo hidrodinâmico, campo de fluxo e força de adesão. A deposição de partículas diminui com o aumento da rugosidade quando a rugosidade do meio é menor do que o tamanho da rugosidade crítica e aumenta com o aumento da rugosidade quando o tamanho da rugosidade é maior do que o valor crítico. Notavelmente, esses resultados são consistentes com as investigações realizadas em condições favoráveis para a deposição de partículas. As relações encontradas por Jin *et al.* (2017) podem fornecer uma visão para o desenvolvimento de modelos de filtração físico-químicos para descrever a deposição de partículas em meios rugosos.

2.3 MEIO POROSO COM RESTRIÇÃO DE INCOMPRESSIBILIDADE (MPRI)

Ao se estudar um meio poroso saturado com fluido, onde densidades de sólido e fluido puros são constantes, há a necessidade de caracterizá-lo por uma restrição de incompressibilidade. A Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo para sistemas sólido-fluido onde não ocorrem reações químicas apresenta as equações de quantidade de movimento para um MPRI envolvendo grandezas arbitrárias e grandezas constitutivas.

Silva (1990) propôs uma teoria puramente mecânica para um meio poroso saturado com fluido modelado a partir da teoria das misturas da mecânica do contínuo com as características citadas anteriormente, ou seja, com restrição de incompressibilidade. Segundo sua teoria, decompõe-se cada tensor tensão em duas partes, uma constitutiva e a outra arbitrária, não sendo determinada pela história do movimento e a força de interação também é decomposta nestas duas partes. Com base na desigualdade entrópica, determina-se as partes arbitrárias, sob o fundamento de que a soma das produções entrópicas das partes arbitrárias é nula para todo

movimento compatível com restrição de incompressibilidade. Por ser uma teoria simplificada, pois uma das consequências observadas foi que a pressão arbitrária para as fases sólida e fluida são iguais, esse modelo não é adequado quando o meio poroso apresenta uma diferença de pressão entre fases significativa.

No trabalho de Silva *et al.* (2013) adiciona-se ao axioma puramente mecânico formulado por Silva (1990) a produção entrópica da parte arbitrária de cada energia livre de Helmholtz, estabelecendo assim uma teoria quase mecânica para o MPRI, não envolvendo produções entrópicas com derivadas e/ou gradientes de temperatura. Este novo axioma produz pressões arbitrárias diferentes para as fases sólida e fluida e, além disso, influencia bastante nos balanços de quantidade de movimento linear, visto que surgem novos termos de interação.

A formulação das equações do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade proposta por Silva *et al.* (2013), parte da consideração que ρ_s e ρ_f são constantes. Logo, das equações (2.1) a (2.4), pode-se escrever para cada fase:

$$\varepsilon \mathbf{1} \cdot L_1 + V_1 \cdot \text{grad} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad L_1 \equiv \text{grad} V_1 \quad (2.5)$$

$$(1 - \varepsilon) \mathbf{1} \cdot L_2 - V_2 \cdot \text{grad} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad L_2 \equiv \text{grad} V_2 \quad (2.6)$$

em que $\mathbf{1}$ é o tensor identidade.

Para se estabelecer uma teoria quase mecânica para o MPRI as formas das equações (2.5) e (2.6), o tensor tensão T_α , a força de interação I_α , a energia de interação E_α e a energia livre de Helmholtz A_α são parâmetros necessários. As seguintes decomposições são válidas:

$$I_\alpha = I_\alpha^a + I_\alpha^c \quad (2.7)$$

$$T_\alpha = T_\alpha^a + T_\alpha^c \quad (2.8)$$

$$E_\alpha = E_\alpha^a + E_\alpha^c \quad (2.9)$$

$$A_\alpha = A_\alpha^a + A_\alpha^c \quad (2.10)$$

tal que o índice superior a indica parte arbitrária, não determinada pela história do movimento, e o índice superior c indica parte constitutiva.

Outra postulação utilizada foi que as partes arbitrárias e constitutivas, de cada força de interação e cada energia de interação, devem satisfazer também a equação (2.4), isto é:

$$I_1^a + I_2^a = 0 \quad I_1^c + I_2^c = 0 \quad (2.11)$$

$$E_1^a + E_2^a = 0 \quad E_1^c + E_2^c = 0 \quad (2.12)$$

Ao se calcular as partes arbitrárias, cada constituinte deve obedecer ao seguinte axioma: a soma das produções entrópicas das partes arbitrárias das equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) é nula para todo movimento compatível com a restrição de incompressibilidade. De modo que é possível escrever:

$$\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha^a}{\partial t} + (I_\alpha^a + \rho_\alpha \text{grad} A_\alpha^a) \cdot V_\alpha - T_\alpha^a \cdot L_\alpha - E_\alpha^a = 0 \quad (2.13)$$

De modo que a Equação (2.5) do constituinte fluido não viole o axioma definido na Equação (2.13) para $\alpha = 1$, deve-se ter:

$$I_1^a = p_1 \text{grad} \varepsilon - \rho_1 \text{grad} A_1^a \quad (2.14)$$

$$T_1^a = -\varepsilon p_1 \mathbf{1} \quad (2.15)$$

$$E_1^a = \rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} - p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.16)$$

sendo p_1 uma função escalar arbitrária.

Além disso, para que a Equação (2.6) do constituinte sólido não viole o axioma expresso na Equação (2.13) para $\alpha = 2$, também deve-se ter:

$$I_2^a = -p_2 \text{grad} \varepsilon - \rho_2 \text{grad} A_2^a \quad (2.17)$$

$$T_2^a = -(1 - \varepsilon) p_2 \mathbf{1} \quad (2.18)$$

$$E_2^a = \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} + p_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.19)$$

sendo p_2 outra função escalar arbitrária.

Assim, das equações (2.7) a (2.10), (2.14) a (2.19) pode-se obter:

$$\rho_1 \text{grad} A_1^a + \rho_2 \text{grad} A_2^a = (p_1 - p_2) \text{grad} \varepsilon \quad (2.20)$$

$$\rho_1 \frac{\partial A_1^a}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial A_2^a}{\partial t} = (p_1 - p_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.21)$$

Ao introduzir as funções arbitrárias definidas por:

$$P_e = \rho_1 A_1^a + \rho_2 A_2^a \quad P_f = p_1 + \rho_f A_1^a \quad P_s = p_2 + \rho_s A_2^a \quad (2.22)$$

o par de equações (2.20) e (2.21) transforma-se em:

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + (P_s - P_f) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{grad}P_e + (P_s - P_f)\text{grad}\varepsilon = 0 \quad (2.24)$$

Fazendo o rearranjo das equações (2.23) e (2.24) para eliminar P_e , obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} (\text{grad}(P_s - P_f)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (P_s - P_f) \right) \text{grad}\varepsilon \quad (2.25)$$

Ao introduzir mais duas funções arbitrárias além dos resultados fornecidos pelas equações (2.23)-(2.25), pode-se obter outros resultados que podem ser destacados. Estas funções são:

$$P = \varepsilon p_1 + (1 - \varepsilon)p_2 \quad (2.26)$$

$$\Pi = P - P_f \quad (2.27)$$

Desse modo, das equações (2.20), (2.21), (2.26) e (2.27), é possível escrever:

$$(1 - \varepsilon)\text{grad}(P_s - P_f) = \text{grad}\Pi \quad (2.28)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} (P_s - P_f) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (2.29)$$

que por meio da Equação (2.25) produz a relação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{grad}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t} \text{grad}\varepsilon \quad (2.30)$$

Outra evidência é obtida ao usar as equações (2.14)-(2.19), (2.20)-(2.22), (2.26) e (2.27) para as partes arbitrárias de cada força de interação, expressas por:

$$l_1^a = -\varepsilon \text{grad}P + \text{grad}(\varepsilon p_1) + \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (2.31)$$

$$l_2^a = +\varepsilon \text{grad}P - \text{grad}(\varepsilon p_2) - \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (2.32)$$

Evidenciando que a grandeza l_α definida por:

$$l_\alpha = \varepsilon \text{grad}\Pi \quad (2.33)$$

é uma força de interação arbitrária que compõe l_1^a .

Além disso, outro resultado que pode ser destacado que tem característica de balanço de forças de interação é:

$$\varepsilon \text{grad}\Pi + (1 - \varepsilon) \text{grad}(P - P_s) = 0 \quad (2.34)$$

Através do desenvolvimento das relações entre grandezas arbitrárias e utilizando como base as equações de balanços de massa e de quantidade de movimento estabelecidas pela teoria das misturas da mecânica do contínuo, pode-se definir as equações de balanço de massa e de quantidade de movimento linear para o MPRI, obtidas das equações (2.1)-(2.4), as quais são dadas a seguir.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\varepsilon V_1) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \text{div}((1 - \varepsilon)V_2) = 0 \quad (2.36)$$

A partir das equações (2.7), (2.8), (2.14), (2.15), (2.17), (2.18), (2.20) e (2.22), também pode-se obter as seguintes equações:

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \text{grad}P_f + \text{div}\sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (2.37)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \text{grad}P_s + \text{div}\sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (2.38)$$

sendo os parâmetros m , σ_1 e σ_2 partes constitutivas da força de interação l_1 e de cada tensor tensão, respectivamente, podendo ser escritos da seguinte forma:

$$m = l_1^c \quad (2.39)$$

$$\sigma_1 = T_1^c \quad (2.40)$$

$$\sigma_2 = T_2^c \quad (2.41)$$

As acelerações a_1 e a_2 são definidas como:

$$a_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (\text{grad}V_1)V_1 \quad (2.42)$$

$$a_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + (\text{grad}V_2)V_2 \quad (2.43)$$

O movimento do MPRI, devido às grandezas arbitrárias e de relações entre elas, será constituído por uma das formas de sistemas de equações, destacados a seguir.

a) Sistema I

O Sistema I é estabelecido pelas equações (2.23), (2.24), (2.35)-(2.43) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f , P_s e P_e , uma vez que σ_1 , σ_2 e m são grandezas constitutivas.

b) Sistema II

As relações definidas pelas equações (2.1), (2.37) e (2.38) fornecem a equação de interseção:

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -grad(P_s - P_f) + \frac{1}{1 - \varepsilon} div \sigma_2 - \frac{1}{\varepsilon} div \sigma_1 - \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (2.44)$$

Logo, o Sistema II será o sistema formado pelas equações (2.25), (2.35), (2.36), (2.42), (2.43) e (2.44) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 e $P_s - P_f$.

c) Sistema III

As relações definidas pelas equações (2.28), (2.33), (2.34), (2.37) e (2.38) produzem as equações:

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon grad P + l_a + div \sigma_1 + m + \rho_1 g_1 \quad (2.45)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) grad P - l_a + div \sigma_2 - m + \rho_2 g_2 \quad (2.46)$$

Então, o Sistema III é formado pelas equações (30), (33), (35), (36), (42), (43), (45), (46) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P e Π .

d) Sistema IV

As relações definidas pelas equações (28), (33) e (38) fornecem a equação:

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) grad P_f + div \sigma_2 - m - \frac{l_a}{\varepsilon} + \rho_2 g_2 \quad (2.47)$$

O Sistema IV é formado pelas equações (2.30), (2.33), (2.35), (2.36), (2.37), (2.42), (2.43) e (2.47) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , P_f e Π .

e) Sistema V

As relações definidas pelas equações (2.1), (2.33), (2.37) e (2.47) fornecem a equação de interseção.

$$\varepsilon \rho_2 (a_2 - g_2) - (1 - \varepsilon) \rho_1 (a_1 - g_1) = \varepsilon div \sigma_2 - (1 - \varepsilon) div \sigma_1 - \varepsilon m - l_a \quad (2.48)$$

O Sistema V é formado pelas equações (2.30), (2.33), (2.35), (2.36), (2.42), (2.43) e (2.48) para as funções incógnitas ε , V_1 , V_2 , e Π .

Da Equação de interseção (2.48) do Sistema V, considerando-se os casos em que $div\sigma_1 = 0$, $div\sigma_2 = 0$ e $m = 0$, é possível obter informação acerca da interação arbitrária l_a . Para estes casos, as equações (2.1) e (2.48) mostram que l_a é função da porosidade e das acelerações reduzidas $a_2 - g_2$ e $a_1 - g_1$. A partir daí, a seguinte relação pode ser proposta para l_a , para todas as situações:

$$l_a = d_1(a_1 - g_1) + d_2(a_2 - g_2) \quad (2.49)$$

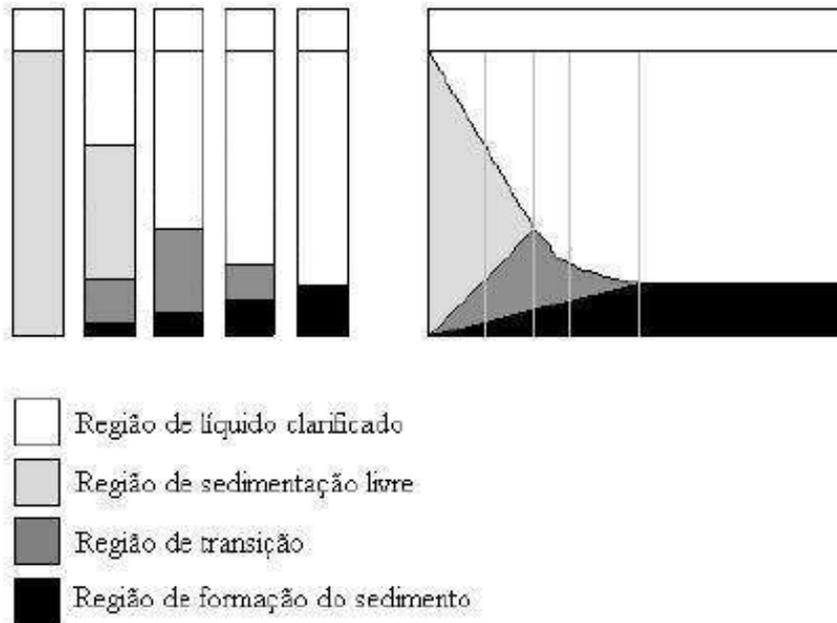
com d_1 e d_2 representando funções densidades arbitrárias, já discutidas em Silva Telles (1993) para toda parte arbitrária da força de interação. Para o trabalho de Libório (2016), l_a é apenas uma parte da força de interação arbitrária.

2.4 MOVIMENTO GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA

Kynch (1952) foi o primeiro a propor um modelo puramente cinemático de movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta com base apenas no desenvolvimento da equação da continuidade para a fase sólida, ou seja, somente através de balanços de massa. Sua teoria se baseou na hipótese de formação de sedimentos incompressíveis, sendo a sedimentação unidimensional, a concentração dos sedimentos aumentando no fundo do recipiente, a velocidade de sedimentação dependendo apenas da concentração local de sólidos e esta tendendo ao valor zero quando a concentração tende a seu valor máximo e desprezando-se os efeitos de parede.

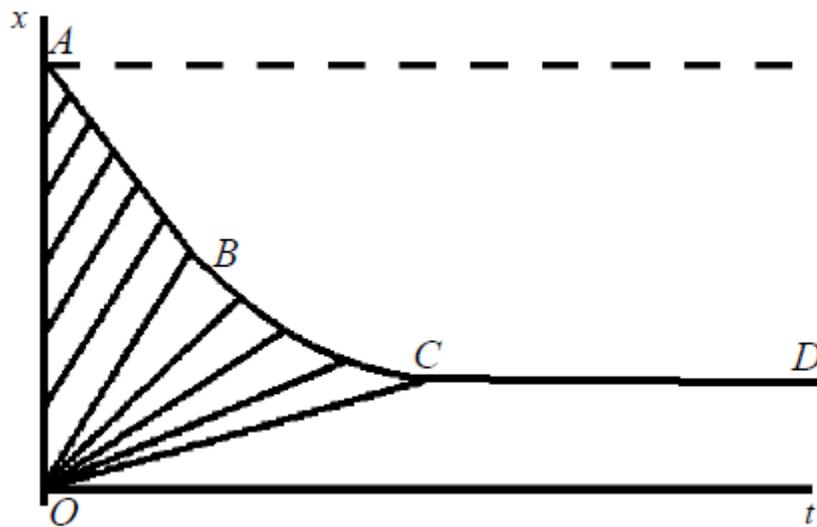
Seu estudo baseou-se no monitoramento da interface descendente e do conhecimento da concentração inicial em um teste de proveta. A teoria apresenta também a descrição de quatro regiões distintas do fenômeno da sedimentação em batelada (Figura 2.1): região de líquido clarificado, na qual não há presença de partículas, ou seja, a porosidade é igual a zero; região de sedimentação livre, na qual a concentração de partículas é igual à sua concentração inicial e a velocidade de sedimentação é constante; região de transição, em que ocorre o aumento na concentração da fase particulada, e a velocidade de sedimentação decresce; e região de formação de sedimento, em que é máxima a concentração de partículas e é nula a velocidade de sedimentação. A Figura 2.2 ilustra uma curva de sedimentação em batelada.

Figura 2.1 – Regiões da sedimentação em batelada.



Fonte: Arouca, 2007.

Figura 2.2 – Curva da sedimentação em batelada na qual são apresentadas as linhas de equi-concentração previstas pela teoria de Kynch (1952).



Fonte: Arouca, 2007.

A partir do trabalho de Kynch houve um avanço significativo no entendimento do processo de sedimentação e mesmo que, com o passar dos anos tenham surgido teorias mais elaboradas, seu método é utilizado até hoje por apresentar uma execução simples. Porém, como Kynch não incluiu os efeitos de pressão no sólido e força de interação em seus balanços de massa, outros pesquisadores, a exemplo de Tiller (1981), Fitch (1983) e Font (1988), foram motivados a revisar sua teoria e introduziram os balanços de quantidade de movimento linear.

Tiller (1981) revisou a teoria da sedimentação de Kynch (1952). O autor estudou o problema da sedimentação em batelada e utilizou como suposição que as características se originam na superfície do sedimento, e não no fundo do recipiente como afirmava Kynch (1952). O estudo acompanhou o crescimento do sedimento e tentou interpretar graficamente todos os parâmetros envolvidos no fenômeno, a fim de obter uma expressão a ser utilizada como condição de contorno para a equação diferencial não linear de segunda ordem por ele estabelecida. Sua metodologia produziu resultados aceitáveis apenas para sistemas pouco compressíveis. Contudo, seus resultados não têm aplicabilidade prática, já que é necessário monitorar o crescimento do sedimento, o que às vezes não é possível devido à visualização da interface de sedimento ser impraticável em alguns tipos de suspensões opacas.

Fitch (1983) estudou a estabilidade das discontinuidades de concentração em ensaios de sedimentação em batelada e demonstrou que as características partem tangencialmente à superfície do recipiente. O autor sugeriu uma maneira de determinar a altura do sedimento em função do tempo através da localização de um ponto crítico, no encontro das duas interfaces, em ensaios de sedimentação em proveta com mesma concentração inicial, mas com diversas alturas de coluna de suspensão.

Font (1988) estudou o efeito da região de compactação na sedimentação em batelada e desenvolveu um método que relaciona a concentração de sólidos com as variações da altura da interface superior descendente e da interface inferior ascendente. Além de relacionar também taxa de deposição e concentração de sólidos. Seus testes foram feitos a partir de suspensões de carbonato de cálcio.

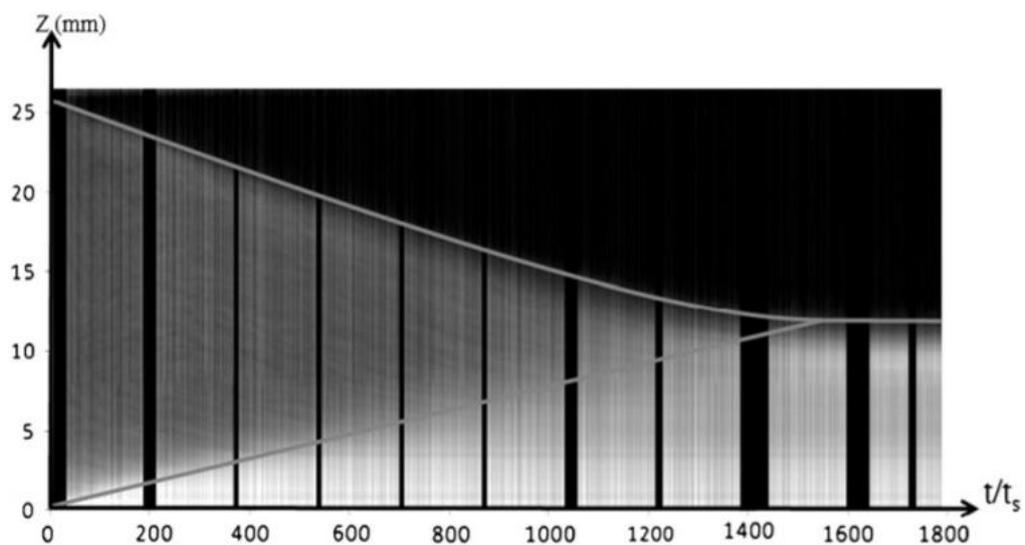
O trabalho de Bürger e Wendland (2001) foi de fundamental importância para o estudo dos fluxos de sedimentação e de suspensão particulada, visto que, eles fizeram um levantamento bibliográfico das contribuições para a pesquisa sobre sedimentação que foram feitas durante o século XX, fornecendo uma descrição concisa destas contribuições e mostrando o avanço realizado por Kynch (1952) em sua teoria de sedimentação cinemática. Também são mostradas as extensões desta teoria para a sedimentação contínua, suspensões flocculantes e polidispersas, ensaios com provetas com diferentes seções transversais, centrífugas e várias dimensões de espaço, bem como aplicações atuais foram colocadas no trabalho.

Lira (2010), em sua dissertação de mestrado, realizou um estudo sobre os parâmetros que influenciam a floculação na sedimentação contínua. Segundo a autora, partículas com diâmetros maiores sedimentam mais rapidamente, enquanto que partículas muito finas tendem a permanecer mais tempo em suspensão. Seu trabalho teve como objetivo estudar o efeito da concentração de flocculante e do pH da água sobre a velocidade de sedimentação. Seus

experimentos também objetivaram obter equações constitutivas para a pressão nos sólidos, bem como para a permeabilidade do sedimento e com elas efetuar simulações utilizando os modelos matemáticos propostos por Tiller e Chen (1988) e Arouca (2007), de modo a obter numericamente a altura final do sedimento em operações em estado estacionário, e comparar os resultados experimentais obtidos.

No estudo experimental de sedimentação de suspensões monodispersas concentradas para determinação das formas de sedimentação feito por Hernando *et al.* (2014), os autores observaram que o raio das partículas em suspensão quando modificados irão demonstrar a existência de zonas específicas de sedimentação (região de líquido puro, região de sedimentação livre, regiões de transição e compactação e ondas de aceleração). Como consequência, a concentração máxima dos sedimentos foi uma função inversa ao raio da partícula, o que pode ser confirmado através da correlação entre os resultados e a função de fluxo de Richardson e Zaki correspondente. Os autores consideraram a interface inferior ascendente como aproximada por uma reta, como ilustrado na Figura 2.3. Porém, esta aproximação não funciona para alguns tipos de suspensões particuladas, nas quais o formato desta interface é curvilíneo.

Figura 2.3 – Perfil de sedimentação de uma suspensão inicialmente homogênea.



Fonte: Hernando *et al.*, 2014.

Boscarino *et al.* (2016) utilizaram métodos de Runge-Kutta implícito-explícitos para explorar numericamente a formação e composição de sedimentos sob um modelo de sedimentação polidispersa fortemente degenerado. Estes métodos são adequados para a solução de problemas de transmissão de convecção lineares, em que há a possibilidade de forte

degeneração, já que as restrições de estabilidade que são provenientes da parte convectiva, explicitamente tratada, são muito menos severas do que aquelas que seriam deduzidas de um tratamento explícito do termo difusivo. Assim, em cada etapa de tempo, apenas um sistema linear precisa ser resolvido. Este trabalho é relevante do ponto de vista da modelagem matemática da sedimentação e de seu método numérico de resolução, entretanto, não são apresentados balanços de massa e de quantidade de movimento linear que possibilitem a construção de soluções analíticas.

Olatunji *et al.* (2016) fizeram uma aplicação da análise de sedimentação de partículas na avaliação da estabilidade de partículas de TiO_2 estabilizadas espacialmente através de um novo modelo analítico similar ao proposto por Kynch (1952), onde assume-se para a região da compactação o efeito de compressão desprezível e concentração de sólidos constante. Foram incluídas neste modelo novas expressões de forças devido à inércia e acelerações de fluido.

Libório (2016), em sua dissertação de mestrado, utilizou a teoria de meio poroso com restrição de incompressibilidade de Silva *et al.* (2013) para construir uma base de informações para o estudo de grandezas constitutivas e arbitrárias de uma suspensão particulada. O autor determinou duas soluções exatas de um sistema de equações do movimento da suspensão particulada e estas duas soluções foram inseridas em modelagem matemática do movimento gravitacional em proveta. Uma solução foi inserida na região de sedimentação livre e a outra na região de transição, produzindo algumas equações para o movimento da onda de aceleração e para as interfaces.

No trabalho de Libório (2016) também foram obtidas duas funções velocidades que serviram como base para cálculo de alguns parâmetros básicos, juntamente com dados experimentais da literatura de altura da interface superior descendente *versus* tempo do teste de proveta. Ele também propôs equações para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão. Resultados numéricos foram mostrados do cálculo da velocidade da onda de aceleração, do ponto de encontro da onda com a interface superior descendente, do ponto de encontro das interfaces e dos parâmetros estabelecidos envolvidos nas equações do modelo, como também na diferença de pressões arbitrárias.

O trabalho de Torfs *et al.* (2017) propõe um modelo para as funções constitutivas da velocidade de sedimentação para um modelo avançado unidimensional de decantador. O trabalho busca selecionar uma expressão matemática válida e seus parâmetros calibrados para obter um modelo que possa ser utilizado para operação e controle. A metodologia da modelagem matemática conduz a uma equação diferencial parcial não linear do tipo convecção-difusão, para a concentração dos sólidos em função da profundidade e do tempo. Ao ajustar a

solução a uma função exponencial, a aproximação se mostrou insuficiente e não foi capaz de descrever a verdadeira dinâmica de sedimentação de compactação. As funções de potência mostraram um melhor ajuste e preveem velocidades de sedimentação mais elevadas em altas concentrações de lodo, funcionando como esperado de uma função de sedimentação com uma leve sobrepressão da velocidade de decantação em regiões onde a compressão está ocorrendo.

Medeiros (2018) realizou uma pesquisa acerca do estabelecimento de uma base de informações para a parte arbitrária da força de interação em uma suspensão particulada utilizando a teoria formulada por Silva *et al.* (2013) para um meio poroso com restrição de incompressibilidade. Em seu trabalho foi obtida uma expressão para a parte arbitrária da força de interação, como função apenas da porosidade da suspensão. Esta expressão foi alcançada com base em relações entre grandezas arbitrárias e por meio da introdução de uma nova função arbitrária, chamada fração de pressões arbitrárias, o que representa uma grande contribuição ao estudo do movimento gravitacional de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade.

Bian *et al.* (2018) realizaram um estudo experimental sobre a sedimentação de floculantes de rejeitos não classificados, visto que eles são os principais agregados em aterros de minas e quais seriam os principais fatores que causariam a deposição. Foram utilizados o projeto experimental ortogonal e o método das variáveis de controle para realização de experimento. Diversos experimentos foram realizados em proveta e foram elaborados os gráficos de altura da interface superior descendente *versus* tempo para as suspensões testadas. Os resultados mostraram que a velocidade de deposição dos floculantes diminui com o aumento da concentração e que esta velocidade de estabilização aumenta primeiro e depois diminui com o aumento do consumo da unidade floculante. Foram feitos experimentos também com aparatos que produzissem a sedimentação em condições dinâmicas e os resultados obtidos mostraram que com uma velocidade menor de entrada pode-se produzir um maior fluxo no fundo do sedimentador.

2.4.1 Aspectos Teóricos do Movimento Gravitacional

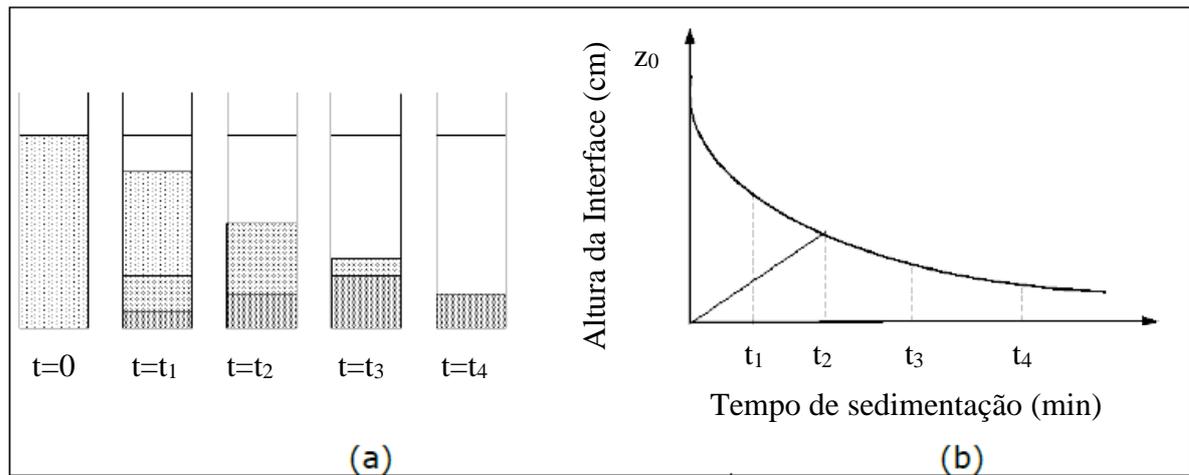
Segundo França e Casqueira (2007) ao considerar uma suspensão particulada homogênea em uma proveta submetida à força gravitacional no tempo $t = 0$ todas as partículas estão dispersas no meio líquido (Figura 2.4a). Quando $t = t_1$, as partículas de maior densidade começam a se movimentar, por ação da gravidade, no sentido do fundo da proveta. As partículas de densidade menor permanecem em equilíbrio com o meio líquido. No entanto, quando a força peso da partícula é maior do que a força exercida pelo líquido, no sentido oposto, as partículas

de menor densidade também iniciam o movimento no sentido do fundo da proveta ($t = t_2$). É neste instante que se observa uma interface de partículas descendentes, com velocidades diferentes, que vão formando a região de compactação.

No mesmo instante que essa interface desce, constituindo acima dela uma região de líquido clarificado, a interface inferior sobe, formando abaixo dela uma região de compactação (espessado). Nessa região, as partículas sólidas já começam a interagir entre si, iniciando o efeito de resistência ao movimento ($t = t_3$). Quando todas as partículas sólidas sedimentam, formando a região de compactação, o fenômeno que rege o processo é o de acomodação do leito de partículas compactadas ($t = t_4$).

Durante o ensaio de proveta registra-se o deslocamento da interface superior da polpa com o tempo, e é possível utilizar estes dados experimentais para construir um gráfico do tipo da Figura 2.4b, com base no qual serão obtidos parâmetros fenomenológicos do movimento gravitacional da suspensão de partículas.

Figura 2.4 – Etapas do ensaio de proveta (a) e curva de sedimentação resultante do ensaio (b).



Fonte: França e Casqueira, 2007.

2.4.2 Sedimentação de Adensantes

Hanson *et al.* (1990) investigaram o *Barite "Sag"* em fluidos de perfuração com adensantes em poços direcionais. Os autores perceberam variações significativas de peso de lama depois de operações de circulação. Este fenômeno pode gerar perda de circulação, falha em obter registros das ferramentas de fundo do poço, prisão de coluna, entre outros problemas em poços direcionais. Foi constatado que estas variações de densidade são causadas pela formação de um leito na parte de baixo do poço, quando as partículas sedimentam e quando a lama está circulando, o que difere de outros trabalhos que somente estudaram este efeito quando

a lama está estática. O artigo apresentou estudos de caso, resultados de estudos laboratoriais e diretrizes operacionais para minimizar a sedimentação e suas consequências.

Saasen *et al.* (1995) buscaram prever o efeito de *Barite Sag* em fluidos de perfuração através de medições reológicas em laboratório. A sedimentação estática está relacionada com as propriedades viscoelásticas dos fluidos, isto é, sua formação de gel precisa ser suficiente para manter a barita em suspensão. Em situações dinâmicas a compreensão da deposição dos adensantes é muito mais complicada de se prever, quando comparada com a deposição estática e ela está relacionada a baixas taxas de cisalhamento e viscosidade do fluido, como por exemplo, em operações com baixas taxas de circulação.

Bern *et al.* (1998) estudaram sobre a medição, modelagem e gerenciamento do *Barite Sag* a partir de casos na indústria a fim de desenvolver diretrizes de campo para gerenciar as consequências. Um modelo empírico simples foi desenvolvido para comparar o potencial de sedimentação para vários tipos de fluidos. Constatou-se que as propriedades físicas da lama, as condições do poço e as características do material adensante têm grande influência no comportamento da sedimentação. O estudo também incluiu medições diretas das propriedades dos leitos de materiais adensantes depositados. Estes resultados forneceram uma nova visão sobre o movimento gravitacional da barita, já que, ficou constatado que ocorre uma maior deposição quando a velocidade no anular do poço é baixa e a inclinação do poço está entre 60° e 75°. Rotacionar a coluna também ajuda a diminuir a taxa de deposição dos adensantes.

Segundo Zamora e Bell (2004), o Teste de Sedimentação em Viscosímetro (VST) é um dos poucos testes disponíveis para medir diretamente a tendência de deposição em fluidos de perfuração no local do poço e que apesar de seus benefícios práticos e técnicos, não é aceito pela indústria pela inconsistência de resultados. Os autores propuseram uma mudança simples e de baixo custo no VST e mostraram como esta modificação pode melhorar a utilidade do VST padrão. Alguns resultados preliminares de estudo de dinâmica de fluidos computacional (CFD) se mostraram favoráveis ao novo VST, até mesmo para poços direcionais.

Omland *et al.* (2007) realizaram um estudo sobre o efeito de deposição de materiais densos na eficiência de operações de perfuração de poços de petróleo. Segundo os autores, para um maior controle na perfuração, é necessário, à medida que a profundidade aumenta, adicionar adensantes ao fluido para aumentar sua densidade e controlar as pressões da formação. No entanto, experimentos mostraram que manter o material adensante em suspensão pode ser um desafio. Alguns tipos de fluidos impedem a geração de estruturas de gel suficientes para manter as partículas de alta densidade em suspensão e pode ocorrer deposição deste material adensante, causando problemas no poço como: colapso da formação, instabilidade do poço, perdas durante

a cimentação, perda de circulação, prisão de coluna, corte da lama por gás, entre outros. Os autores sugerem algumas medidas a serem tomadas para evitar esta deposição acentuada.

Nguyen *et al.* (2009) buscaram prever o *Barite Sag* em fluidos de perfuração à base de óleo newtonianos. Os autores comentaram que este evento causa problemas como perda de circulação, dificuldades de controle de poço, má cimentação e prisão de coluna, e que o estudo deste fenômeno e de como mitigar seus efeitos é de interesse da indústria de petróleo. O trabalho descreveu uma abordagem matemática para analisar o assentamento de partículas de barita em fluidos newtonianos a partir de resolução de equações diferenciais parciais acopladas e de equações de conservação de massa e momento para as fases líquida e sólida. A concentração de sólidos nas direções axial e radial em função do tempo foi calculada usando um método numérico explícito para resolver estas equações e apresentaram alguns resultados compatíveis com os dados experimentais.

Omland *et al.* (2013) fizeram um estudo sobre a sedimentação de materiais adensantes em fluidos de perfuração. Os autores descreveram testes que estudam a cinética de sedimentação para várias suspensões particuladas utilizadas na indústria de perfuração de poços de petróleo. Foram realizados experimentos com equipamentos que permitem o estudo do processo de sedimentação em função da temperatura, da rotação das colunas de perfuração e da composição dos fluidos. Foi detectado que com o aumento da rotação da coluna mais de 350% do material é depositado dentro do período de teste de 800 min, enquanto o aumento da temperatura de 20°C para 50°C duplica a taxa de sedimentação. As experiências também demonstraram que o efeito da quebra da estrutura do gel de um fluido à base de óleo e a incorporação de sólidos de perfuração no sistema de fluidos são os principais contribuintes para o aumento da sedimentação.

Ribeiro Júnior (2016) em sua dissertação de mestrado, avaliou a capacidade de predição de modelos matemáticos simplificados para descrever a dinâmica de sedimentação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração. O autor realizou experimentos de sedimentação de suspensões aquosas de barita e de calcita em proveta, concentrações volumétricas iniciais de 6,7%, 12% e 20% para cada sólido, e a variação da altura de interface superior descendente foi registrada ao longo do tempo. Em sua primeira abordagem, foram utilizados modelos conservativos, em que a velocidade relativa entre o sólido e o fluido é função somente da concentração volumétrica local do sólido, ou seja, modelos de conservação de massa e funções de densidade de fluxo. Estes modelos foram capazes de prever a variação temporal da interface de clarificação com erro relativo menor que 10% na maior parte do tempo, exceto na região de compactação.

Em sua segunda abordagem, Ribeiro Júnior (2016) utilizou um modelo simplificado, composto pela equação da continuidade e pela equação do movimento, considerando forças de interação entre as fases sólido e líquido, apresentando resultados mais satisfatórios do que o modelo conservativo. Porém, o modelo não foi capaz de estimar com acurácia a concentração de sólidos na região de compactação.

Silva *et al.* (2019) realizaram um estudo sobre a o efeito de sedimentação prévia nas propriedades de filtração e do filtrado de fluidos newtonianos e não newtonianos. Segundo os autores, os fluidos de perfuração ficam dentro do anular do poço durante alguns meses até que a produção de óleo comece e formam uma camada de deposição no fundo do poço. Quando a produção começa, há uma expansão volumétrica do fluido confinado aumentando a pressão anular, que pode causar problemas de colapso do poço e da coluna de produção. Foram realizados experimentos em laboratório para investigar como as propriedades do filtrado afetam esse processo de alívio de pressão anular, através de filtrações precedidas ou não por sete dias de sedimentação em fluidos newtonianos (compostos por glicerina, água desionizada e B-1 barita) e não newtonianos (solução de goma xantana ou carboximetilcelulose e PCS-150 barita).

O trabalho de Silva *et al.* (2019) mostrou que para fluidos newtonianos o volume do filtrado é menor quando a filtração é precedida pela sedimentação, diferentemente dos fluidos não newtonianos, nos quais o volume de filtração aumentou quando foi feita sedimentação antes. Foi também observado que, quando a sedimentação foi realizada, a espessura do filtrado aumentou para todos os fluidos, independentemente da pressão aplicada ou da reologia do fluido. Foram obtidos parâmetros como permeabilidade e porosidade também, além de curvas de sedimentação de adensantes com 2 concentrações diferentes. Outro ponto mostrado foi que para suspensões newtonianas as partículas sedimentaram totalmente após 24 horas, enquanto que para fluidos não-newtonianos elas permaneceram em suspensão após 7 dias de testes.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Da modelagem matemática proposta por Silva *et al.* (2013), da suspensão na proveta como um meio poroso com restrição de incompressibilidade, podem ser utilizadas as equações (3.1) e (3.2) de balanço de massa e as equações (3.3)-(3.7) de balanço de quantidade de movimento linear para formar o Sistema II.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon V_1) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} ((1 - \varepsilon) V_2) = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \frac{\partial P_f}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + m + \rho_1 g_1 \quad (3.3)$$

$$\rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \frac{\partial P_s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - m + \rho_2 g_2 \quad (3.4)$$

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s \quad (3.5)$$

$$a_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial y} \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial t} \quad , \quad \Pi_{sf} = P_s - P_f \quad (3.7)$$

sendo $P_f(y, t)$ e $P_s(y, t)$ pressões arbitrárias, a_α a aceleração, σ_1 e σ_2 a parte constitutiva do tensor tensão, $m(y, t)$ a força difusiva ou resistiva, ρ_f e ρ_s as massas específicas do fluido e do sólido, respectivamente, g a aceleração da gravidade e Π_{sf} a diferença de pressões arbitrárias.

Subtraindo as equações (3.3) de (3.4) e fazendo a substituição da equação (3.5) nestas equações, pode-se obter a seguinte equação de interseção:

$$\rho_s a_2 - \rho_f a_1 = -\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} + \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + \rho_s g_2 - \rho_f g_1 \quad (3.8)$$

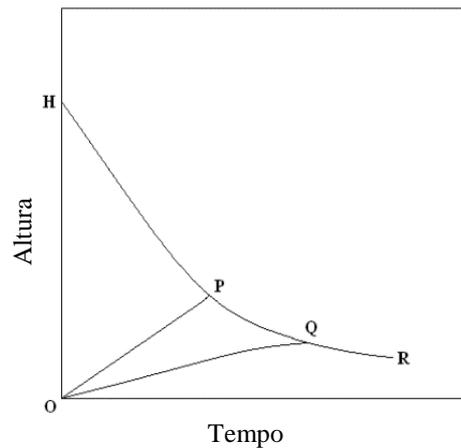
Libório (2016) buscou soluções exatas para o sistema formado pelas equações (3.1)-(3.8). A partir destas soluções foi possível definir algumas relações que serão utilizadas para encontrar funções porosidades e velocidades para as regiões de transição e compactação.

3.1 MODELO MATEMÁTICO

Conforme o modelo apresentado por Libório (2016), a sedimentação das partículas sólidas de um fluido particulado em proveta, que tem início com o movimento de queda das partículas do topo da proveta até o seu fundo, pode ser caracterizada por meio de uma curva Altura x Tempo. Esta curva é dividida em sub-regiões, que podem ser caracterizadas através da Figura 3.1.

Cada uma destas regiões possui denominação específica: HPQR até a altura H representa a Região de Líquido Puro, OPHO representa a Região de Sedimentação Livre (SL), OPQO representa a Região de Transição (RT) e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos representa a Região de Compactação. As curvas HPQR, OP e OQ dizem respeito, respectivamente, às alturas da Interface Superior Descendente, da Onda de Aceleração e da Interface Inferior Ascendente.

Figura 3.1 - Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.



Fonte: Libório, 2016.

As seguintes relações podem ser escritas de cada uma das curvas da Figura 3.1:

$$x(t), 0 \leq t \leq \infty \quad h(t), 0 \leq t \leq t_0 \quad z(t), 0 \leq t \leq t_c \quad (3.9)$$

sendo t a variável tempo, $x(t)$ a altura da interface superior descendente, $h(t)$ a altura da onda de aceleração e $z(t)$ a altura da interface inferior ascendente. O tempo t_0 indica o instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração e o tempo t_c indica o instante de encontro das duas interfaces. As alturas satisfazem as condições iniciais (3.10) e as condições de contorno (3.11).

$$x(0) = H \quad h(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad (3.10)$$

$$h(t_0) = x(t_0) \equiv x_0 \quad x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (3.11)$$

sendo H a altura inicial da suspensão na proveta. Além disso, considera-se y como a coordenada espacial (posição) orientada para cima de tal modo que $y = 0$ representa o fundo da proveta ou o eixo dos tempos na Figura 3.1. A função porosidade da suspensão na proveta é definida através da equação (3.12).

$$\varepsilon(y, t) \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.12)$$

A função porosidade satisfaz a condição inicial:

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad 0 \leq y \leq H \quad (3.13)$$

Com a seguinte notação no fundo da proveta:

$$\varepsilon(0, t) = \varepsilon_m(t) \quad 0 \leq t \leq \infty \quad \varepsilon_{mf} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_m(t) \quad (3.14)$$

na qual ε_{mf} é a porosidade final no fundo da proveta.

As velocidades dos constituintes fluido e sólido, são definidas, respectivamente, por:

$$V_1(y, t) \text{ e } V_2(y, t) \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.15)$$

e são nulas no fundo da proveta, expressando as condições de contorno:

$$V_1(0, t) = V_2(0, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.16)$$

Como, das equações (3.1) e (3.2), tem-se que a função $\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon)V_2$ não depende de y , a partir da equação (3.16), nota-se que:

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon)V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.17)$$

3.2 REGIÃO DE SEDIMENTAÇÃO LIVRE

De acordo com Libório (2016), esta região é limitada pela proveta e por $h(t) \leq y \leq x(t)$ e $0 \leq t \leq t_0$. A função porosidade para a região de sedimentação livre pode ser caracterizada por:

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.18)$$

e as velocidades V_1 e V_2 também são constantes.

A velocidade do constituinte sólido na região de sedimentação livre fica expressa por:

$$V_2(y, t) = cte = -u_0 \quad h(t) \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.19)$$

em que u_0 é velocidade de sedimentação livre.

Através das equações (3.17) e (3.19), pode-se expressar a velocidade do constituinte líquido na região de sedimentação livre como sendo:

$$V_1(y, t) = cte = \frac{(1 - \varepsilon_0)u_0}{\varepsilon_0} \quad h(t) \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.20)$$

Nesta região, a altura da interface superior descendente é dada por:

$$x(t) = H - u_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.21)$$

3.3 REGIÃO DE TRANSIÇÃO

A região de transição é limitada pela proveta e por

$$\begin{aligned} z(t) \leq y \leq h(t) \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ z(t) \leq y \leq x(t) \quad t_0 \leq t \leq t_c \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que,

$$h(t) = w_0 t \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.23)$$

w_0 é a velocidade da onda de aceleração, e, por (3.11) e (3.23),

$$t_0 = \frac{H}{u_0 + w_0} \quad x_0 = \frac{Hw_0}{u_0 + w_0} \quad (3.24)$$

Libório (2016), a partir das soluções exatas do sistema (3.1)-(3.8), determinou as seguintes relações:

$$V_2 = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \quad (3.25)$$

$$V_1 = w_0 + \frac{u_0 - \varepsilon_0(u_0 + w_0)}{\varepsilon} \quad (3.26)$$

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - y \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (3.27)$$

$$2 \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon \right) N(\varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2 \quad (3.28)$$

para as funções porosidades e velocidades, nas quais $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ são funções comprimento arbitrárias e $A(\varepsilon)$ possui significado físico de ser razão de compressibilidade por resistividade além dos efeitos de diferença de pressões arbitrárias.

Para o cálculo da altura da interface superior descendente no intervalo de tempo da curva de transição, as seguintes relações são válidas:

$$\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon = w_0 t - x \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (3.29)$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 - (u_0 + w_0) \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon^-} \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (3.30)$$

$$2 \left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) A(\varepsilon) d\varepsilon \right) N^- = (1 - \varepsilon_0) \left(\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon_0} A(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2 \quad N^- = N(\varepsilon^-) \quad (3.31)$$

O cálculo da função porosidade depende dos valores de u_0 , w_0 , x_0 , t_0 , x_c e t_c . A velocidade de sedimentação livre corresponde à inclinação de reta HP (Figura 3.1), e a velocidade da onda de aceleração é dada por:

$$w_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad (3.32)$$

quando o ponto final do segmento de reta HP é bem definido.

De acordo com Libório (2016), quando isto não ocorre, o valor de w_0 é dado como sendo o mínimo positivo da função velocidade w , definida por:

$$w = \frac{u_0 x^2}{2H(H - x) - (2H - x)u_0 t} \quad 0 < t < \frac{H}{u_0} \quad (3.33)$$

sendo o valor mínimo obtido por substituição em (3.33) de pontos experimentais x versus t da altura da interface superior descendente.

O ponto de encontro das interfaces (x_c, t_c) é o ponto onde ocorre o mínimo de

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t} \quad (3.34)$$

obtido do mesmo modo do mínimo de (3.33).

3.3.1 Caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes:

Por serem arbitrárias, pode-se escolher $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ como sendo funções constantes, A_0 e N_0 , respectivamente. Neste caso, o gradiente de porosidade é constante.

Da equação (3.28), pode-se obter a seguinte relação:

$$N_0 = (1 - \varepsilon_0)A_0 \quad (3.35)$$

Da equação (3.27), pode-se obter a função porosidade para a região de transição como sendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{(w_0 t - y)}{A_0} \quad (3.36)$$

Do trabalho de Libório (2016) e utilizando as equações (3.29)-(3.31), para este caso, a altura da interface superior descendente é definida por:

$$x(t) = N_0 + w_0 t - \sqrt{2N_0(u_0 + w_0)t - N_0(2H - N_0)}, \quad t_0 \leq t \leq t_c \quad (3.37)$$

com N_0 sendo a função:

$$N_0 = \frac{(w_0 t_c - x_c)^2}{2(x_c + u_0 t_c - H)} \quad (3.38)$$

Para este caso, a função porosidade fica estabelecida pelas equações (3.21), (3.23), (3.24) e (3.33)-(3.38).

3.3.2 Caso $A(\varepsilon)$ variável:

Nesta parte, considera-se a função comprimento arbitrária dada por:

$$A(\varepsilon) = A_m \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \right)^\beta, \quad A_m = A(\varepsilon_0) \quad (3.39)$$

em que A_m e β são constantes. Porém, vale ressaltar que outras formas de $A(\varepsilon)$ podem ser utilizadas. Nesta pesquisa, a equação (3.39) apresentou melhores aproximações.

Neste caso, como o gradiente de porosidade não é constante, têm-se outros efeitos, como por exemplo, o efeito do segundo gradiente.

Substituindo a equação (3.39) na equação (3.27), obtém-se a seguinte função porosidade para a região de transição:

$$\varepsilon = 1 - (1 - \varepsilon_0) \left[\frac{1}{1 - \Delta(w_0 t - y)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (3.40)$$

tal que Δ é uma constante obtida através da seguinte função:

$$\Delta = \frac{\beta - 1}{A_m(1 - \varepsilon_0)} \quad (3.41)$$

A partir das equações (3.29) e (3.39), a função porosidade na interface superior descendente pode ser escrita como:

$$\varepsilon^- = 1 - (1 - \varepsilon_0) \left[\frac{1}{1 - \Delta(w_0 t - x)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (3.42)$$

Utilizando as equações (3.30) e (3.42), obtém-se a seguinte expressão para a localização da interface superior descendente na região de transição:

$$x(t) = w_0 t - \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\Delta}{\gamma} (u_0 + w_0)(t - t_0) \right]^\gamma \right\} \quad (3.43)$$

sendo γ uma constante definida pela função a seguir:

$$\gamma = \frac{\beta - 1}{\beta - 2} \quad (3.44)$$

Assim, pelas equações (3.21), (3.23), (3.24), (3.33), (3.34), (3.40), (3.41), (3.43) e (3.44), a porosidade da região de transição fica completamente estabelecida, para este caso.

3.4 REGIÃO DE COMPACTAÇÃO:

A região de compactação é limitada pela proveta e por:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq z(t) & \quad 0 \leq t \leq t_c \\ 0 \leq y \leq x(t) & \quad t_c \leq t \leq \infty \end{aligned} \quad (3.45)$$

De Mendes e Silva (2018), o termo que representa as pressões arbitrárias da equação de interseção (3.8) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$-\frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} = -\tau \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} - (1 - \tau) \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} \quad (3.46)$$

no qual τ é uma função arbitrária.

Substituindo a equação (3.46) na equação (3.8), se obtém:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = -\tau \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} - (1 - \tau) \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} + \rho_s(g_2 - a_2) - \rho_f(g_1 - a_1) \quad (3.47)$$

A equação (3.47) pode ser reescrita utilizando os seguintes termos:

$$\tau \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = Q \beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} -(1-\tau) \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} - \frac{m}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \rho_s(g_2 - a_2) - \rho_f(g_1 - a_1) \\ = Q[\varepsilon(1-\varepsilon)(V_2 - V_1) + V_0(\varepsilon - \varepsilon^*)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

na qual Q é uma função arbitrária.

Portanto, as equações (3.47)-(3.49) fornecem a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \varepsilon(1-\varepsilon)(V_2 - V_1) + V_0(\varepsilon - \varepsilon^*) \\ \varepsilon^*(t) &= \varepsilon_\infty + \frac{3}{4}(\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t)$$

sendo β_0 uma constante que contém razão de compressibilidade por resistividade, V_0 uma velocidade constante, ε_∞ uma porosidade crítica e, com base na equação (3.14), ε_{mf} é a porosidade final no fundo da proveta.

Com isso, a partir das equações de balanço de massa (3.1) e (3.2) e das equações (3.17) e (3.50), obtém-se a seguinte equação diferencial parcial:

$$\beta_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (3.51)$$

Pelas equações (3.14), (3.16) e (3.50), tem-se a condição de contorno:

$$\beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(0, t) = V_0(\varepsilon_m(t) - \varepsilon^*(t)) \quad (3.52)$$

Adota-se outra condição de contorno:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(0, t) = -3k(\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \quad , \quad k = \frac{V_0^2}{16\beta_0} \quad (3.53)$$

sendo k uma constante física responsável pela variação da porosidade no fundo da proveta e tem unidade de min^{-1} .

Com base na solução estática da equação (3.50), introduz-se a função:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \exp\left(\frac{4y}{L_0}\right) \quad , \quad L_0 = \frac{V_0}{4k} \quad (3.54)$$

sendo L_0 um comprimento constante.

Desse modo, se obtém a condição final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(y, t) = \varepsilon(y) \quad (3.55)$$

Assim, as condições representadas pelas equações (3.10), (3.13), (3.52), (3.54) e (3.55) e a equação diferencial (3.51) formam um problema para a função porosidade, cuja solução exata é dada por:

$$\varepsilon(y, t) = (\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \exp\left(\frac{y}{L_0}\right) + \varepsilon(y) \quad (3.56)$$

Produzindo, pelas equações (3.14) e (3.16), a relação para a porosidade no fundo da proveta:

$$\varepsilon_m(t) = \varepsilon_{mf} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf}) \exp(-3kt) \quad (3.57)$$

Aplicando a equação (3.54) na equação (3.56), para $y = z(t)$ quando $0 \leq t \leq t_c$, obtém-se:

$$\varepsilon(z, t) = (\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \exp\left(\frac{z}{L_0}\right) + \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \exp\left(\frac{4z}{L_0}\right) \quad (3.58)$$

De modo a eliminar a função exponencial, adota-se que:

$$\frac{z}{L_0} = c \ln \varnothing(t) \quad (3.59)$$

na qual c é uma constante e $\varnothing(t)$ é uma função do tempo.

Assim, aplicar a expressão (3.59) na equação (3.58), resulta na seguinte equação:

$$\varepsilon(z, t) = (\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \varnothing(t)^c + \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \varnothing(t)^{4c} \quad (3.60)$$

Verificou-se que os valores de c e $\varnothing(t)$ que produzem resultados compatíveis para a interface inferior ascendente e para a porosidade na região de compactação são:

$$c = 2 \quad (3.61)$$

$$\varnothing(t) = kt + 1$$

A partir das equações (3.59) e (3.61) e da relação para L_0 da equação (3.54), a altura da interface inferior ascendente é dada por:

$$z(t) = \frac{V_0}{2k} \ln(kt + 1) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (3.62)$$

Com o objetivo de calcular k e V_0 , utiliza-se o encontro das interfaces, que fornece as relações:

$$V_0 = 2\varphi_0 \quad kx_c = \varphi_0 \ln(kt_c + 1) \quad \varphi_0 t_c > x_c \quad (3.63)$$

tal que φ_0 é a velocidade inicial da interface inferior ascendente.

Para encontrar a altura da interface superior descendente após o encontro das interfaces, utilizou-se a porosidade média da região de compressão, $\bar{\varepsilon}(t)$, após o encontro das interfaces, sendo expressa por:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} \varepsilon(y, t) dy \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (3.64)$$

Logo, das equações (3.54), (3.56), (3.57) e (3.64) tem-se:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf}) \frac{H}{x(t)} E_1 + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \frac{H}{x(t)} E_2 \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (3.65)$$

tal que

$$E_1 = r_0(\exp(-3kt)) \left(\exp\left(\frac{x(t)}{L_0}\right) - 1 \right) \quad (3.66)$$

$$E_2 = \frac{r_0}{4} \left(\exp\left(\frac{4x(t)}{L_0}\right) - 1 \right) \quad , \quad r_0 = \frac{L_0}{H} \quad (3.67)$$

Usando o balanço de massa, tem-se que:

$$(1 - \bar{\varepsilon}(t))x(t) = (1 - \varepsilon_0)H \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (3.68)$$

Assim, a partir das equações (3.64)-(3.68), chega-se à expressão:

$$\frac{x(t)}{H} = \alpha_0 + (\alpha_f - \alpha_0)E_1 + (1 - \alpha_f)E_2 \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (3.69)$$

A qual, com base nas equações (3.63), (3.66) e (3.67), fornece de forma implícita, a altura da interface superior descendente após o encontro das interfaces, sendo que:

$$\alpha_0 = \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_\infty} \quad \text{e} \quad \alpha_f = \frac{1 - \varepsilon_{mf}}{1 - \varepsilon_\infty} \quad (3.70)$$

A partir das equações (3.11) e (3.69) no ponto de encontro das interfaces tem-se:

$$\frac{x_c}{H} = \alpha_0 + (\alpha_f - \alpha_0)E_{1c} + (1 - \alpha_f)E_{2c} \quad (3.71)$$

em que,

$$E_{1c} = E_1 \quad \text{e} \quad E_{2c} = E_2 \quad \text{para} \quad x = x_c \quad \text{e} \quad t = t_c \quad (3.72)$$

Além disso, considerando-se o sedimento final ($t \rightarrow \infty$) :

$$\frac{x_f}{H} = \alpha_0 + (1 - \alpha_f)E_{2f}, \quad E_{2f} = E_2 \quad \text{para} \quad x = x_f \quad (3.73)$$

sendo x_f a altura final da interface superior descendente.

Com isso, das equações (3.71)-(3.73), obtêm-se:

$$\alpha_f = \frac{r_c - E_{2c} + (E_{2f} - r_f)(1 - E_{1c})}{E_{1c} - E_{2c} + E_{2f}(1 - E_{1c})} \quad (3.74)$$

$$\alpha_0 = r_f - (1 - \alpha_f)E_{2f} \quad (3.75)$$

sendo r_c e r_f razões entre alturas, dadas por:

$$r_c = \frac{x_c}{H} \quad (3.76)$$

$$r_f = \frac{x_f}{H} \quad (3.77)$$

As equações (3.74)-(3.77) fornecem, por (3.70), os resultados:

$$\varepsilon_\infty = 1 - \frac{1 - \varepsilon_0}{\alpha_0} \quad (3.78)$$

$$\varepsilon_{mf} = 1 - (1 - \varepsilon_0) \frac{\alpha_f}{\alpha_0} \quad (3.79)$$

Assim, através das equações (3.54), (3.56), (3.57), (3.62), (3.63), (3.78) e (3.79), a porosidade para a região de compactação fica completamente estabelecida.

A partir das equações (3.17) e (3.50), obtêm-se as velocidades dos constituintes sólido e líquido, respectivamente, por:

$$V_2 = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left[\beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - V_0(\varepsilon - \varepsilon^*) \right] \quad (3.80)$$

$$V_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - V_0(\varepsilon - \varepsilon^*) \right] \quad (3.81)$$

sendo que pelas equações (3.54) e (3.56),

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf})}{L_0} \exp(-3kt) \exp\left(\frac{y}{L_0}\right) + \frac{4(\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty)}{L_0} \exp\left(\frac{4y}{L_0}\right) \quad (3.82)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

É de primordial importância a obtenção dos parâmetros básicos: velocidade de sedimentação livre, velocidade da onda de aceleração, ponto de encontro da onda de aceleração com a interface superior descendente e ponto de encontro das interfaces, para a obtenção de valores numéricos para as porosidades e velocidades das regiões de transição e compactação.

Tais parâmetros podem ser obtidos com base na modelagem matemática descrita na metodologia, juntamente com dados experimentais do movimento gravitacional de suspensões particuladas, disponíveis na literatura, de altura da interface superior descendente *versus* tempo.

Do trabalho de Ribeiro Júnior (2016) podem ser tomados alguns destes dados experimentais, de altura da interface superior descendente *versus* tempo, de ensaios de sedimentação de fluidos de perfuração com adensantes. Três ensaios realizados pelo autor foram utilizados neste trabalho para obtenção dos parâmetros básicos. O primeiro ensaio é de um fluido com barita com uma concentração volumétrica inicial de 12% (Tabela 4.1), o segundo ensaio é de um fluido com calcita com uma concentração volumétrica inicial de 12% (Tabela 4.2) e o terceiro ensaio é de um fluido com barita com uma concentração volumétrica inicial de 6,7% (Tabela 4.3).

Para as suspensões de barita e calcita com concentrações volumétricas iniciais de 12%, os testes de proveta foram realizados em provetas de altura $H = 32,5$ cm e as suspensões particuladas testadas possuem porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,88$.

Para a suspensão de barita com concentração volumétrica inicial de 6,7%, o teste de proveta foi realizado em uma proveta de altura $H = 32,2$ cm e a suspensão particulada testada possui porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,933$.

Os dados experimentais de Tiller e Khatib (1984), para uma suspensão aquosa de atapulgita estão apresentados na Tabela 4.4. O teste de proveta foi realizado em uma proveta de altura $H = 40$ cm e a suspensão particulada testada possui porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,970$.

Tabela 4.1 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de barita com porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,88$.

Tempo (seg)	Altura da interface (cm)	Tempo (seg)	Altura da interface (cm)
0	32,5	2000	10,6
200	28,7	2200	10,3
400	25,7	2400	10,2
600	22,9	2600	10
800	20,3	2800	9,9
1000	17,9	3000	9,8
1200	15,9	3200	9,7
1400	14	3400	9,6
1600	12,4	3600	9,6
1800	11		

Fonte: Ribeiro Júnior, 2016.

Tabela 4.2 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de calcita com porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,88$.

Tempo (seg)	Altura da interface (cm)	Tempo (seg)	Altura da interface (cm)
0	32,5	2200	13,6
200	29,9	2400	12,9
400	27,6	2600	12,2
600	25,4	2800	11,6
800	23,3	3000	11,1
1000	21,2	3200	10,5
1200	19,4	3400	9,9
1400	17,8	3600	9,4
1600	16,5	3800	9
1800	15,4	4000	8,7
2000	14,5	4200	8,6

Fonte: Ribeiro Júnior, 2016.

Tabela 4.3 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de barita com porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,933$.

Tempo (seg)	Altura da interface (cm)	Tempo (seg)	Altura da interface (cm)
0	32,2	1600	5,7
200	22,1	1800	5,6
400	12,9	2000	5,4
600	9,1	2200	5,3
800	7	2400	5,3
1000	6,3	2600	5,1
1200	6	2800	5,1
1400	5,9	3000	5

Fonte: Ribeiro Júnior, 2016.

Tabela 4.4 - Dados experimentais de altura de interface superior descendente para a sedimentação de atapulgita com porosidade inicial $\varepsilon_0 = 0,970$.

Tempo (min)	Altura da interface (cm)	Tempo (min)	Altura da interface (cm)
0	40,00	137,68	17,5
11,02	37,62	163,04	15
33,05	33,46	196,67	12,5
50	30,74	216,67	11,88
67,51	27,59	233,33	11,56
92,37	23,60	250	11,25
117,75	20,00		

Fonte: Tiller e Khatib, 1984.

4.1 REGIÃO DE SEDIMENTAÇÃO LIVRE

Desta região, pode-se calcular a velocidade de sedimentação livre (u_0), que é obtida a partir da equação (3.21). Os valores de altura da interface superior descendente apresentados das Tabelas 4.1-4.3 foram convertidos de segundos para minutos, para a unidade de u_0 ser cm/min.

Os resultados de u_0 podem ser observados na Tabela 4.5 para as quatro suspensões estudadas. A porosidade para esta região é constante e de igual valor numérico à porosidade inicial, conforme apresentado na metodologia.

Tabela 4.5 - Velocidades de sedimentação livre (u_0).

Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,88$)	Suspensão de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$)	Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,933$)	Suspensão de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$)
$u_0 = 1,005$ cm/min	$u_0 = 0,72$ cm/min	$u_0 = 2,90$ cm/min	$u_0 = 0,18$ cm/min

4.2 REGIÃO DE TRANSIÇÃO

Os parâmetros que podem ser obtidos a partir da região de transição são a velocidade da onda de aceleração (w_0), definida através do mínimo positivo da equação (3.33), o ponto de encontro da onda com a interface superior descendente (x_0, t_0) foi calculados através de (3.24) e o ponto de encontro das interfaces (x_c, t_c) foi obtido através do mínimo positivo da equação (3.34). A Tabela 4.6 apresenta estes parâmetros calculados para as suspensões particuladas estudadas.

Tabela 4.6 - Parâmetros calculados.

Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,88$)					
Parâmetro	w_0 (cm/min)	x_0 (cm)	t_0 (min)	x_c (cm)	t_c (min)
Valor	2,057	21,824	10,609	11,744	28,500
Suspensão de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$)					
Parâmetro	w_0 (cm/min)	x_0 (cm)	t_0 (min)	x_c (cm)	t_c (min)
Valor	1,403	21,478	15,308	14,072	34,667
Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,933$)					
Parâmetro	w_0 (cm/min)	x_0 (cm)	t_0 (min)	x_c (cm)	t_c (min)
Valor	2,562	15,106	5,895	8,080	11,333
Suspensão de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$)					
Parâmetro	w_0 (cm/min)	x_0 (cm)	t_0 (min)	x_c (cm)	t_c (min)
Valor	0,219	21,955	100,251	12,5	196,67

4.2.1 Caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes:

O primeiro passo é o cálculo do N_0 através da equação (3.38), utilizando os dados das Tabelas 4.5 e 4.6. A partir do N_0 , a aproximação para a altura da interface superior descendente para a região de transição pode ser calculada através da equação (3.37). Posteriormente, calcula-se o A_0 , pela equação (3.35). Com o valor de A_0 , a porosidade pode ser calculada por meio da equação (3.36).

A Tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos de N_0 e A_0 para as quatro suspensões particuladas.

Tabela 4.7 – Resultados de N_0 e A_0 .

Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$)	
$N_0 = 139,365 \text{ cm}$	$A_0 = 1161,374 \text{ cm}$
Suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$)	
$N_0 = 91,440 \text{ cm}$	$A_0 = 762,004 \text{ cm}$
Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$)	
$N_0 = 25,123 \text{ cm}$	$A_0 = 374,970 \text{ cm}$
Suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$)	
$N_0 = 59,145 \text{ cm}$	$A_0 = 1971,500 \text{ cm}$

Os resultados numéricos de altura da interface superior descendente ($x(t)$) da região de transição, para o caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para as quatro suspensões estudadas estão apresentados na Tabela 4.8, com o erro relativo percentual entre o valor experimental (dados das Tabelas 4.1- 4.4) e a aproximação.

As aproximações gráficas para a altura da interface superior descendente em relação às curvas experimentais estão ilustradas nas Figuras 4.1-4.4 para as quatro suspensões estudadas, para o caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes.

Tabela 4.8 – Resultados numéricos para a altura da interface superior descendente da região de transição para o caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes.

Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
20,3 cm	19,335 cm	4,7%
17,9 cm	16,842 cm	5,9%
15,9 cm	14,876 cm	6,4%
14 cm	13,356 cm	4,6%
12,4 cm	12,222 cm	1,4%
Suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
21,2 cm	20,544 cm	3,1%
19,4 cm	18,590 cm	4,2%
17,8 cm	17,046 cm	4,2%
16,5 cm	15,844 cm	4,0%
15,4 cm	14,932 cm	3,0%
14,5 cm	14,273 cm	1,5%
Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
12,9 cm	13,171 cm	2,1 %
9,1 cm	8,821 cm	3,0 %
Suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,97$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
20 cm	19,175 cm	4,1%
17,5 cm	16,739 cm	4,3%
15 cm	14,466 cm	3,5%

Figura 4.1 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

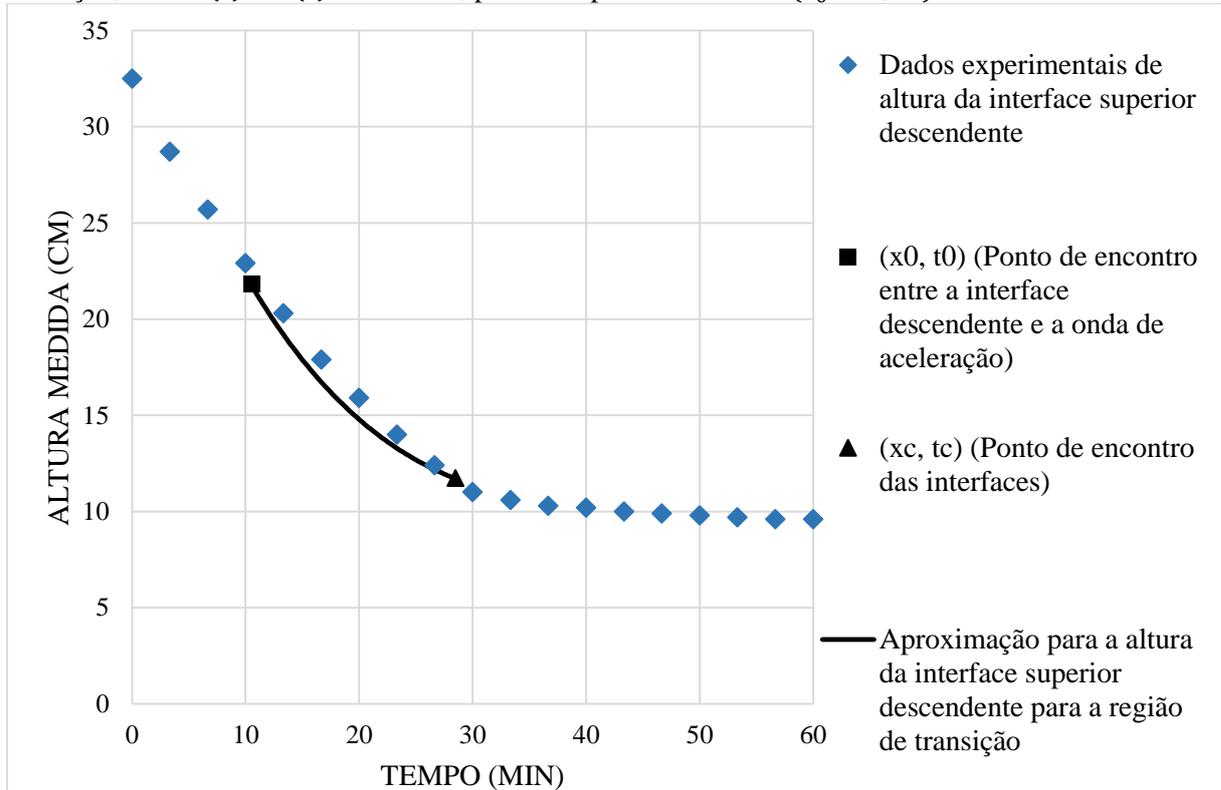


Figura 4.2 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

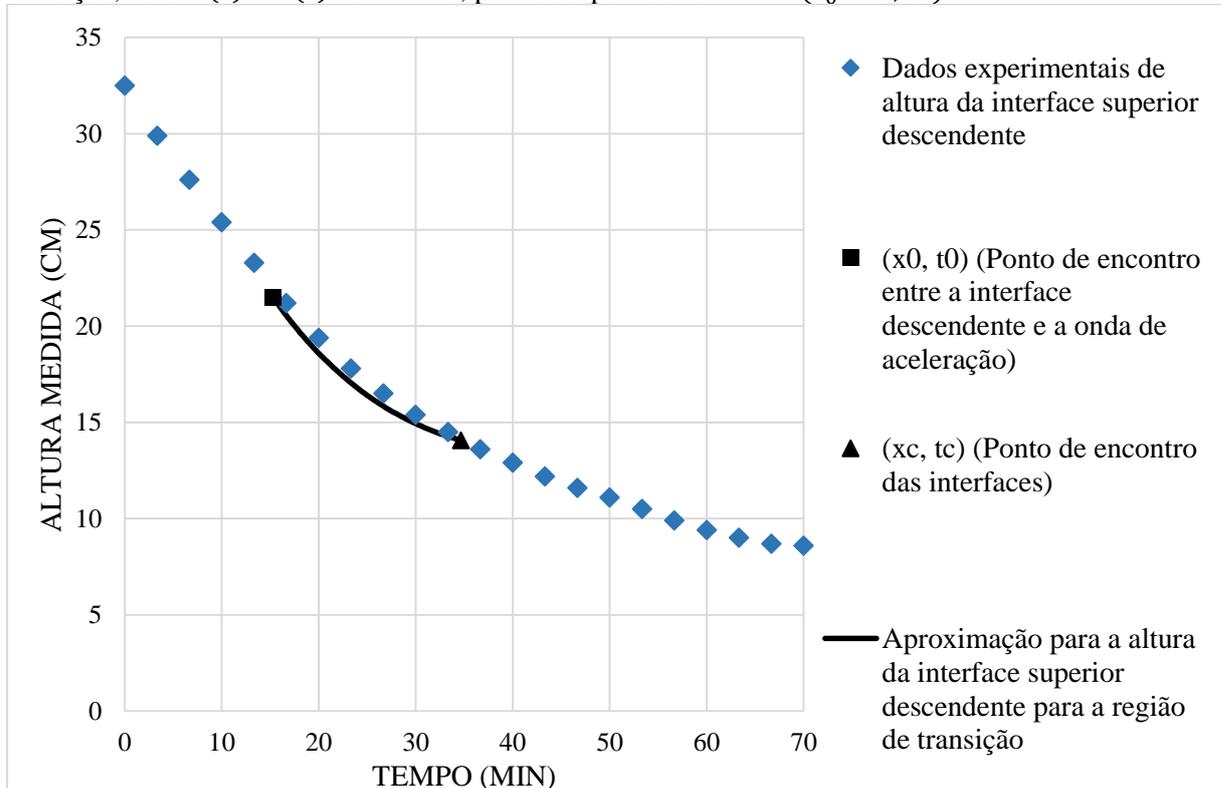


Figura 4.3 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

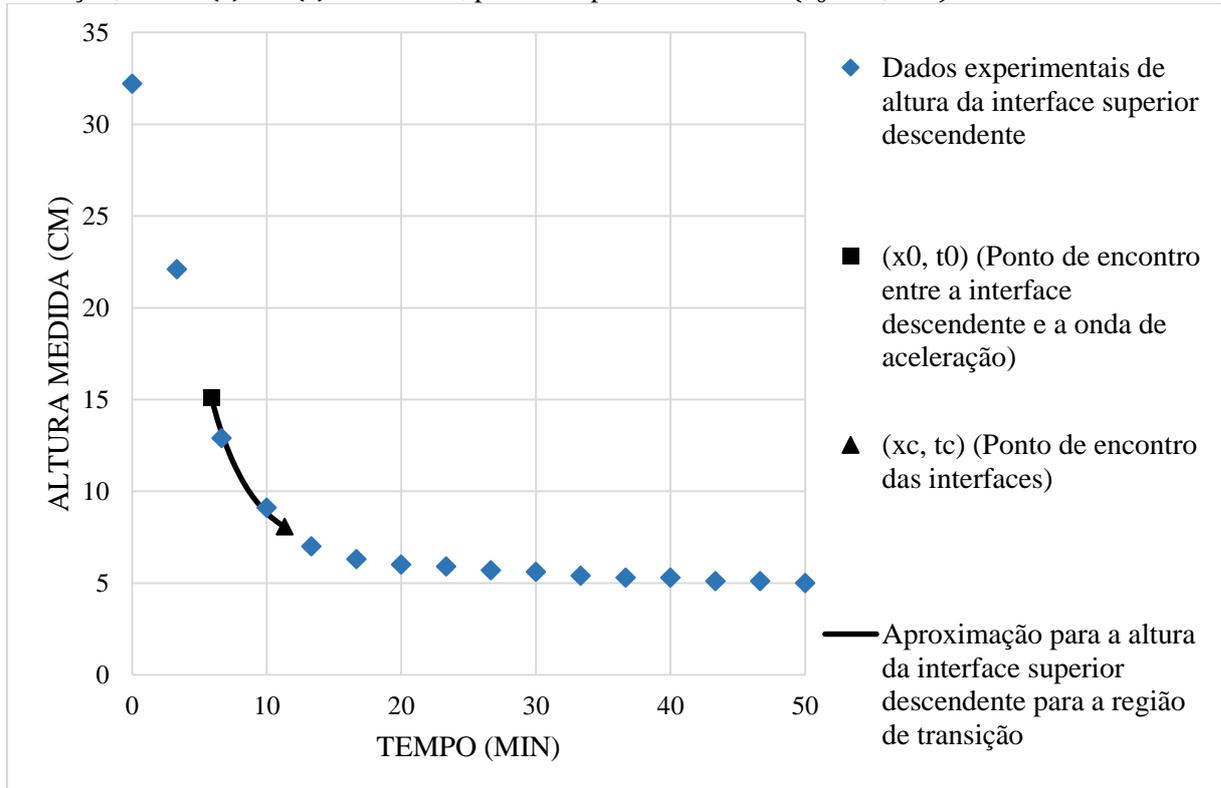
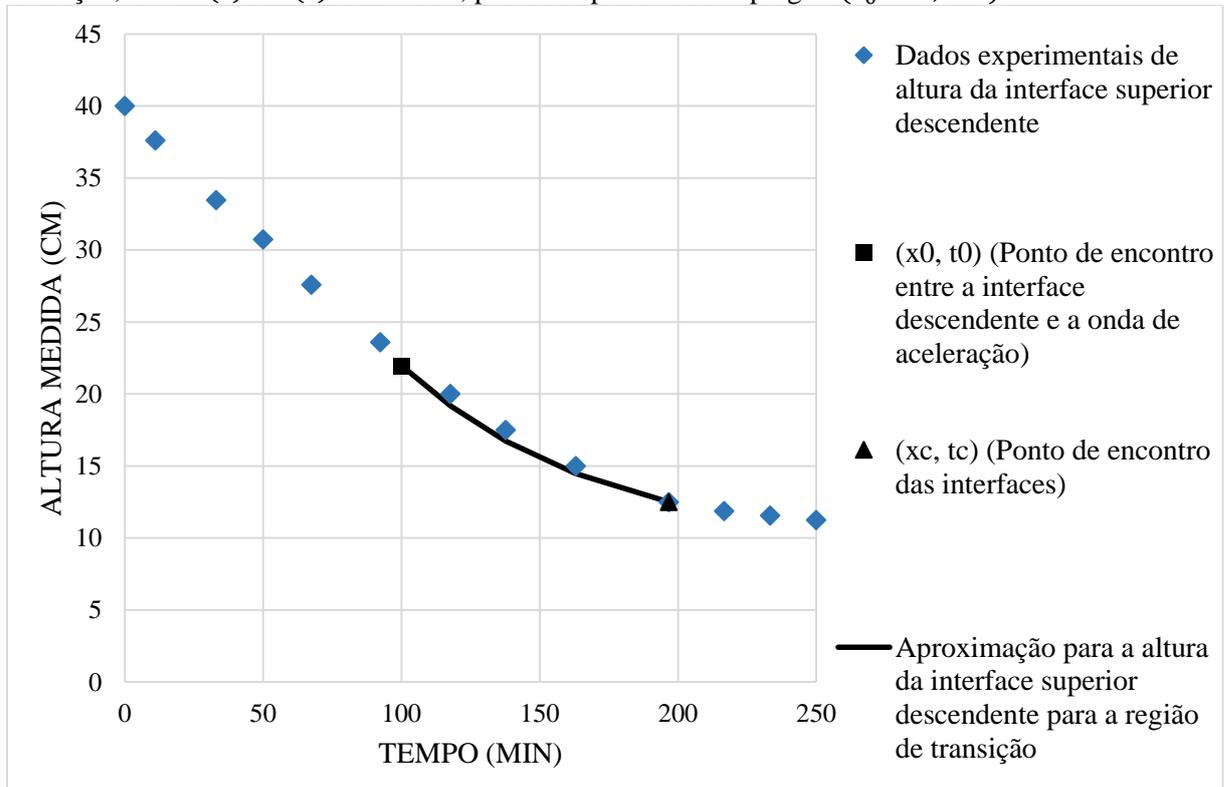


Figura 4.4 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon)$ constantes, para a suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).



A partir da Tabela 4.8 e das Figuras 4.1-4.4, pode ser observado que a aproximação proposta por Libório (2016), através da equação (3.37), apresenta resultados com uma aproximação com os dados experimentais, porém o $A(\varepsilon)$ constante utiliza somente o ponto de encontro das interfaces para realizar o ajuste. Logo, o ajuste entre os dados experimentais e os resultados numéricos apresentará um erro relativo menor se utilizado $A(\varepsilon)$ variável, como será relatado a seguir, já que este caso precisa de pelo menos dois pontos para fazer o ajuste.

4.2.2 Caso $A(\varepsilon)$ variável:

Para este caso, foi utilizada $A(\varepsilon)$ como sendo a função arbitrária (3.39), que produziu a equação (3.43) como aproximação para a altura da interface superior descendente para a região de transição. Para tanto, é necessário que o valor das constantes Δ , γ , β e A_m sejam calculados para cada uma das suspensões.

Primeiramente calcula-se Δ e γ . Como u_0 , w_0 , t_0 , t_c e x_c são parâmetros conhecidos e apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6, é possível reescrever a equação (3.43) para $t = t_c$ e $x(t) = x_c$, obtendo-se:

$$x_c = w_0 t_c - \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\Delta}{\gamma} (u_0 + w_0) (t_c - t_0) \right]^\gamma \right\} \quad (4.1)$$

E também é possível reescrever a equação (3.43), para um $t = \bar{t}$, tal que $t_0 < \bar{t} < t_c$ e seja \bar{x} seu $x(t)$ correspondente, da seguinte maneira:

$$\bar{x} = w_0 \bar{t} - \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\Delta}{\gamma} (u_0 + w_0) (\bar{t} - t_0) \right]^\gamma \right\} \quad (4.2)$$

As equações (4.1) e (4.2) formam um sistema de equações não lineares que fornecem os valores de Δ e γ . Com estes valores, podem ser obtidos β e A_m , a partir das equações (3.44) e (3.41), respectivamente. Estes valores calculados estão apresentados na Tabela 4.9 para as suspensões estudadas.

Tabela 4.9 – Constantes Δ , γ , β e A_m .

Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,88$)			
$\Delta = -1,8974$	$\gamma = 0,9582$	$\beta = -21,9234$	$A_m = 100,6789 \text{ cm}$
Suspensão de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$)			
$\Delta = -1,9924$	$\gamma = 0,9505$	$\beta = -18,2020$	$A_m = 80,3135 \text{ cm}$
Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,933$)			
$\Delta = -0,3996$	$\gamma = 0,8118$	$\beta = -3,3135$	$A_m = 161,1247 \text{ cm}$
Suspensão de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$)			
$\Delta = -1,2077$	$\gamma = 0,9231$	$\beta = -11,0039$	$A_m = 331,1847 \text{ cm}$

Os resultados numéricos de altura da interface superior descendente ($x(t)$) da região de transição, para o caso $A(\epsilon)$ variável, para as quatro suspensões estudadas estão apresentados na Tabela 4.10, com o erro relativo percentual entre o valor experimental (dados das Tabelas 4.1- 4.4) e a aproximação.

As aproximações gráficas para a altura da interface superior descendente em relação às curvas experimentais estão ilustradas nas Figuras 4.5-4.8 para as quatro suspensões estudadas, para o caso $A(\epsilon)$ variável.

Conforme observado através da Tabela 4.10 e ilustrado nas Figuras 4.5-4.8, este caso, utilizando $A(\epsilon)$ variável e conforme proposto pela equação (3.39), apresentou um ajuste com erro relativo percentual bem menor, variando entre 0% e 3,5%, melhor do que o caso anterior para as 4 suspensões testadas. Portanto, a função porosidade para obtenção de resultados numéricos, utilizada para a região de transição, foi a representada pela equação (3.40). Esta função porosidade será também necessária para compatibilizar as soluções entre a região de transição e a região de compactação, como será visto na seção 4.3.

Tabela 4.10 – Resultados numéricos para a altura da interface superior descendente da região de transição para o caso $A(\varepsilon)$ variável.

Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
20,3 cm	19,763 cm	2,6 %
17,9 cm	17,726 cm	1,0 %
15,9 cm	15,897 cm	0,02 %
14 cm	14,196 cm	1,4 %
12,4 cm	12,588 cm	1,5 %
Suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
21,2 cm	20,673 cm	2,5 %
19,4 cm	19,134 cm	1,4 %
17,8 cm	17,820 cm	0,1 %
16,5 cm	16,628 cm	0,8 %
15,4 cm	15,520 cm	0,8 %
14,5 cm	14,476 cm	0,2 %
Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
12,9 cm	13,356 cm	3,5 %
9,1 cm	9,266 cm	1,8 %
Suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,97$)		
$x(t)$ experimental	$x(t)$ aproximação	Erro Relativo Percentual
20 cm	19,592 cm	0,2 %
17,5 cm	17,500 cm	0 %
15 cm	15,198 cm	1,32 %

Figura 4.5 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

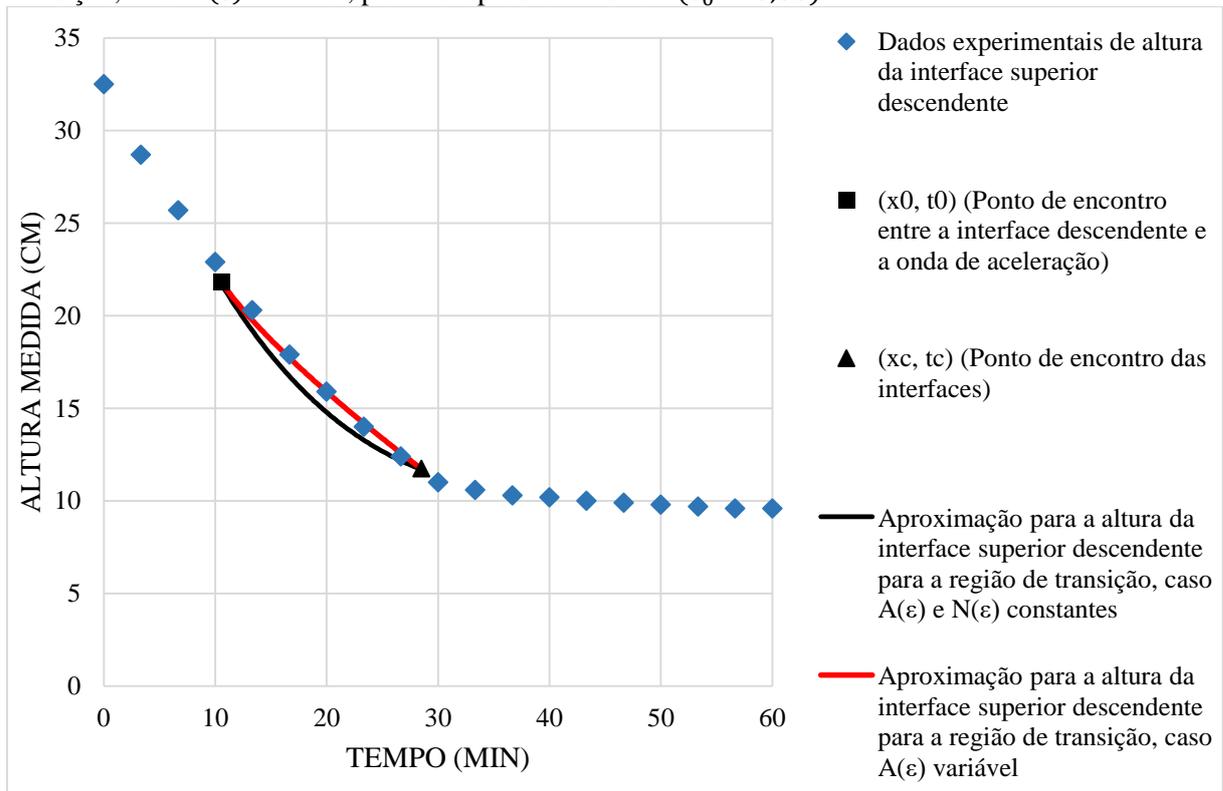


Figura 4.6 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

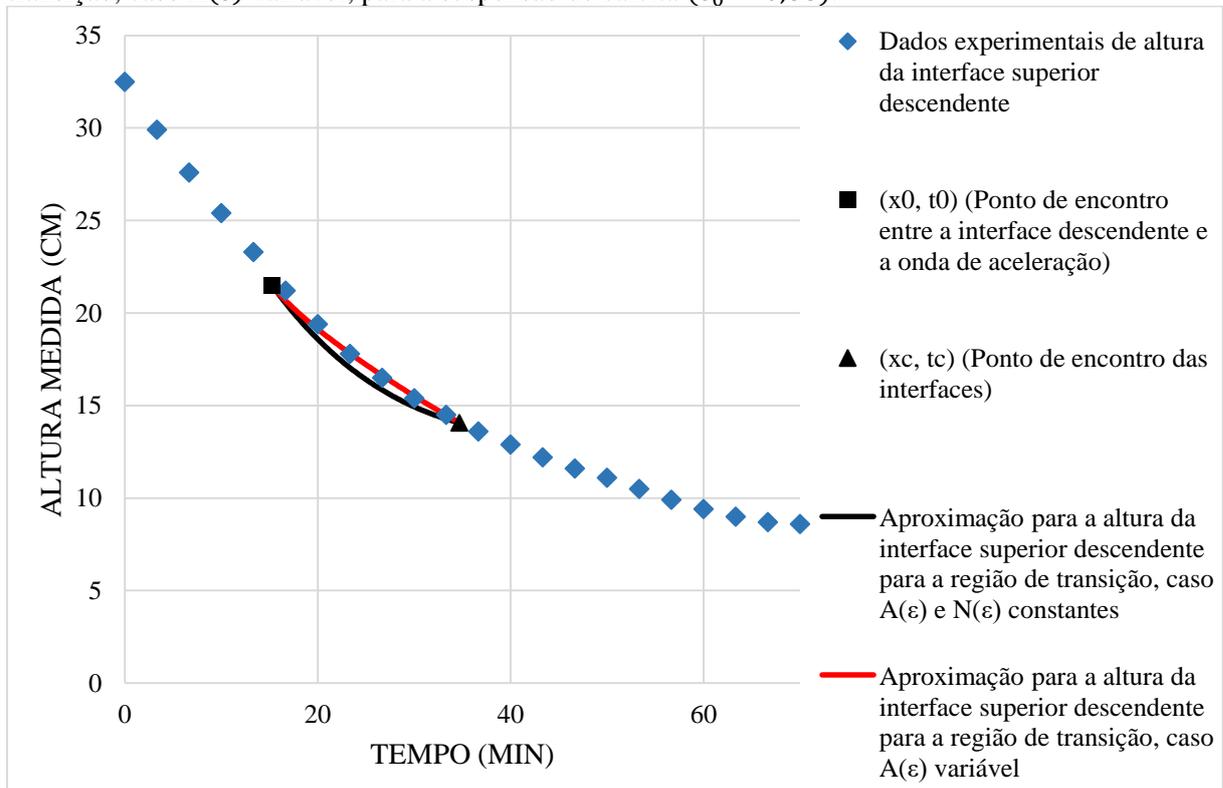


Figura 4.7 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

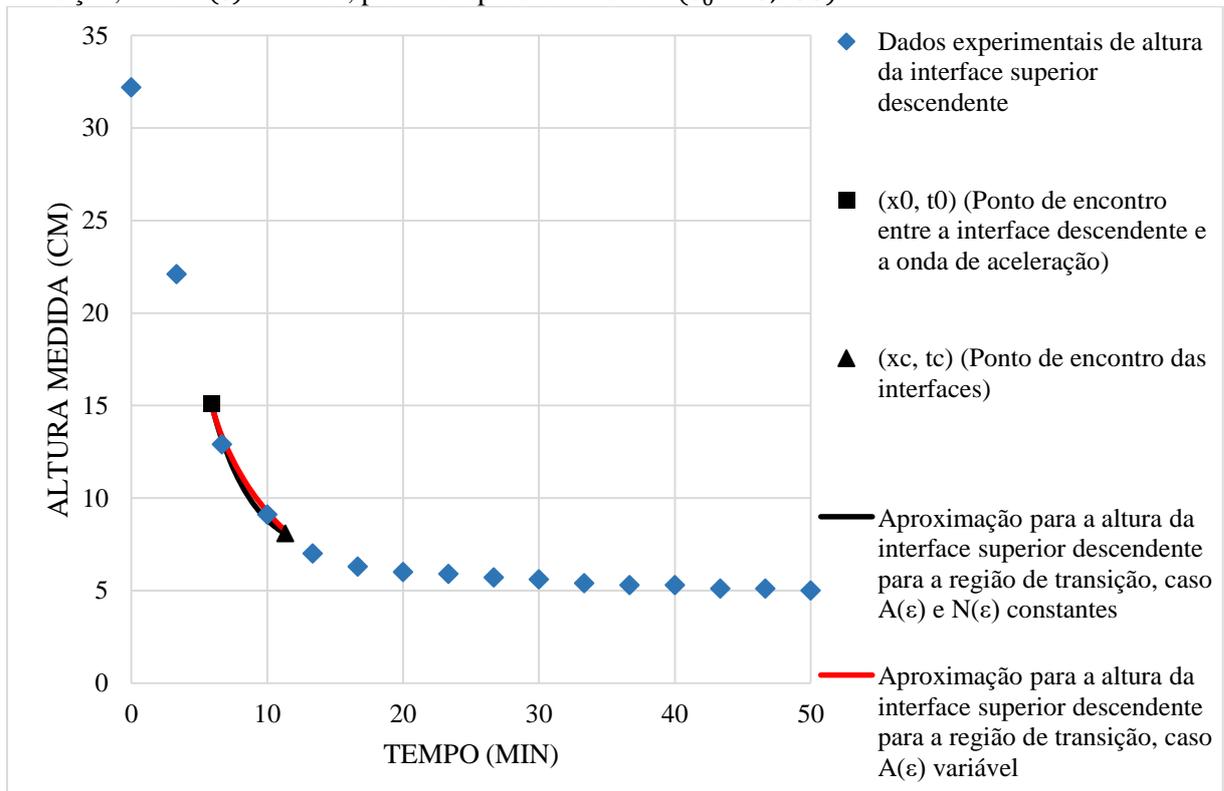
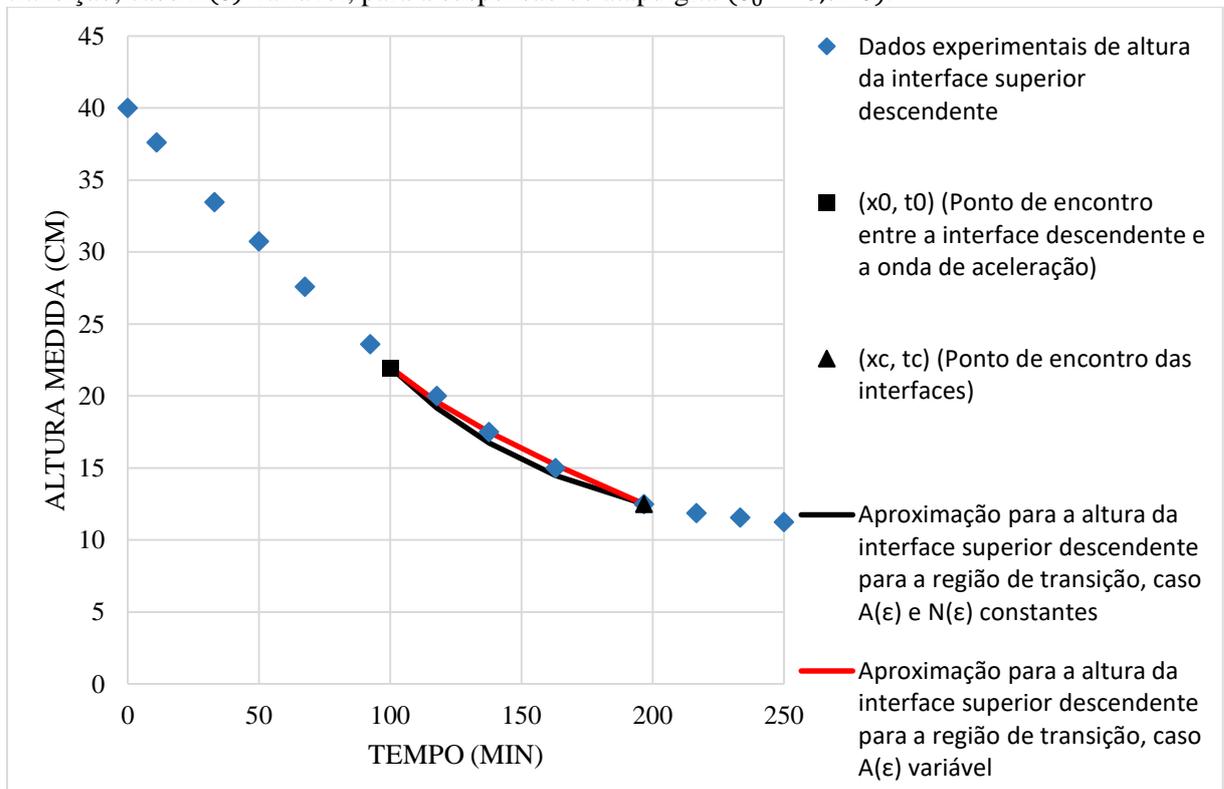


Figura 4.8 – Aproximação da curva de altura da interface superior descendente para a região de transição, caso $A(\varepsilon)$ variável, para a suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).



4.3 REGIÃO DE COMPACTAÇÃO

Os resultados para a função porosidade para a região de compactação dependem dos valores de φ_0 , V_0 , k , L_0 , ε_∞ e ε_{mf} . Para encontrar estes parâmetros, foi necessário compatibilizar a solução para a função porosidade encontrada na região de transição, com a função porosidade da região de compactação.

Para esta compatibilização, adotou-se que no ponto de encontro das interfaces o valor numérico da porosidade seria igual para as duas funções. Ou seja, o valor numérico obtido por (3.42) teria que ser igual ao valor obtido por (3.60) quando $z(t) = x(t) = x_c$ e $t = t_c$.

Os valores que ajustaram a função porosidade para a região de compactação para as suspensões particuladas em estudo, de modo a compatibilizar todo o movimento, estão representados na Tabela 4.11. O roteiro de cálculo de modo a permitir este ajuste está detalhado no Apêndice A.

Tabela 4.11 – Parâmetros ajustados da região de compactação.

Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$)						
Parâmetro	φ_0 (cm/min)	V_0 (cm/min)	k (min ⁻¹)	L_0 (cm)	ε_∞	ε_{mf}
Valor	0,5583	1,1166	0,02752	10,1435	0,572838842	0,574677058
Suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$)						
Parâmetro	φ_0 (cm/min)	V_0 (cm/min)	k (min ⁻¹)	L_0 (cm)	ε_∞	ε_{mf}
Valor	0,4782	0,9564	0,01084	22,0572	0,525320773	0,53411778
Suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$)						
Parâmetro	φ_0 (cm/min)	V_0 (cm/min)	k (min ⁻¹)	L_0 (cm)	ε_∞	ε_{mf}
Valor	0,868	1,736	0,04101	10,5820	0,548932607	0,555520527
Suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$)						
Parâmetro	φ_0 (cm/min)	V_0 (cm/min)	k (min ⁻¹)	L_0 (cm)	ε_∞	ε_{mf}
Valor	0,0945	0,189	0,00564	8,3777	0,88733331	0,887483792

4.4 CURVAS REPRESENTATIVAS DO MOVIMENTO DE SEDIMENTAÇÃO EM PROVETA

Utilizando os parâmetros calculados anteriormente e que estão apresentados nas Tabelas 4.5, 4.6, 4.9 e 4.11, o gráfico representativo do movimento de sedimentação em proveta para as suspensões particuladas testadas estão representados nas Figuras 4.9-4.12.

A curva para a interface superior descendente experimental ($x(t)$) foi plotada através dos dados das Tabela 4.1-4.4. As equações (3.21), (3.43) e (3.69) foram utilizadas para plotar $x(t)$ para as regiões de sedimentação livre, região de transição e região de compactação, respectivamente.

A onda de aceleração foi plotada através da equação (3.23) e a interface inferior ascendente foi localizada através da equação (3.62).

Figura 4.9 – Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

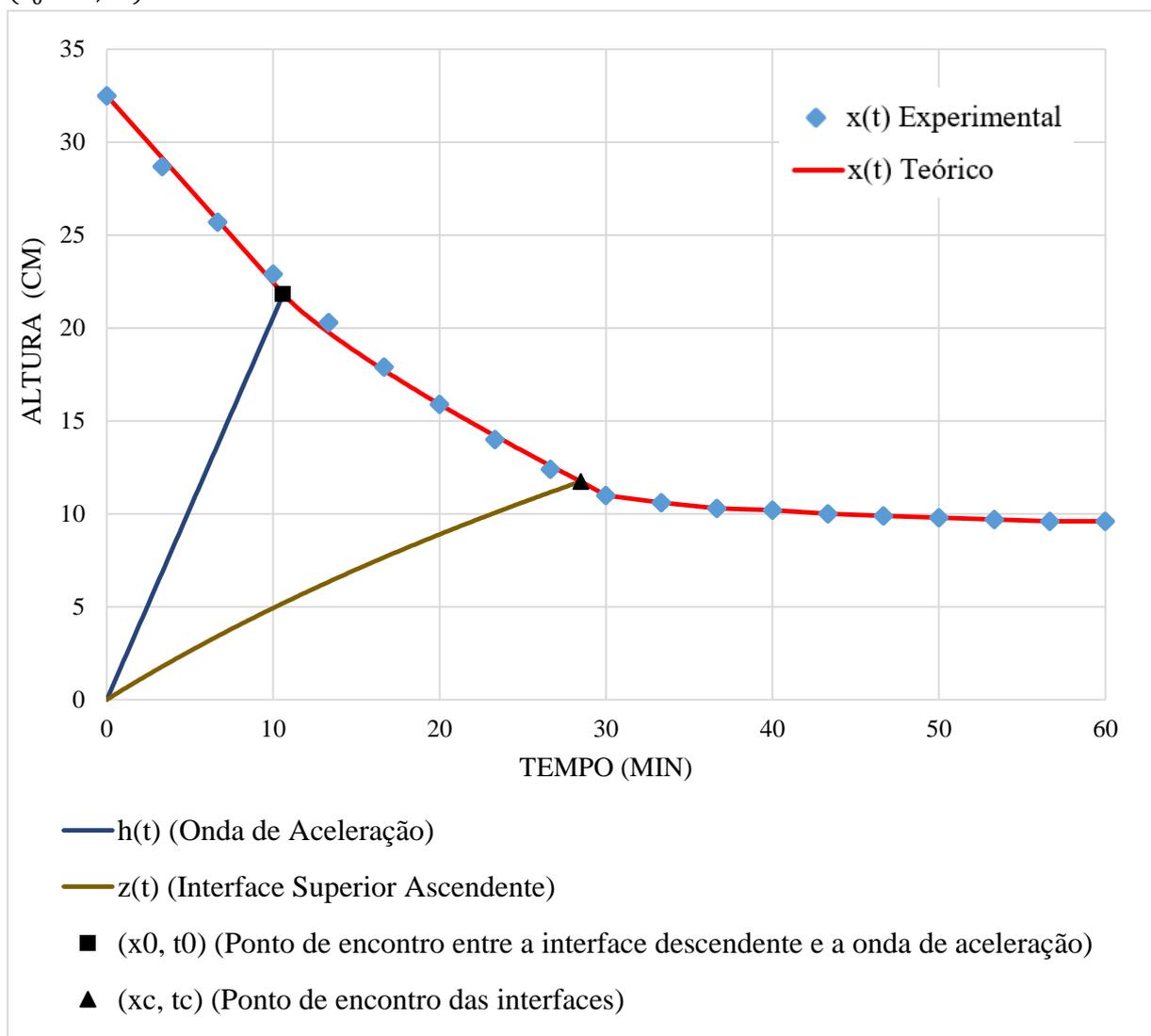


Figura 4.10 – Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

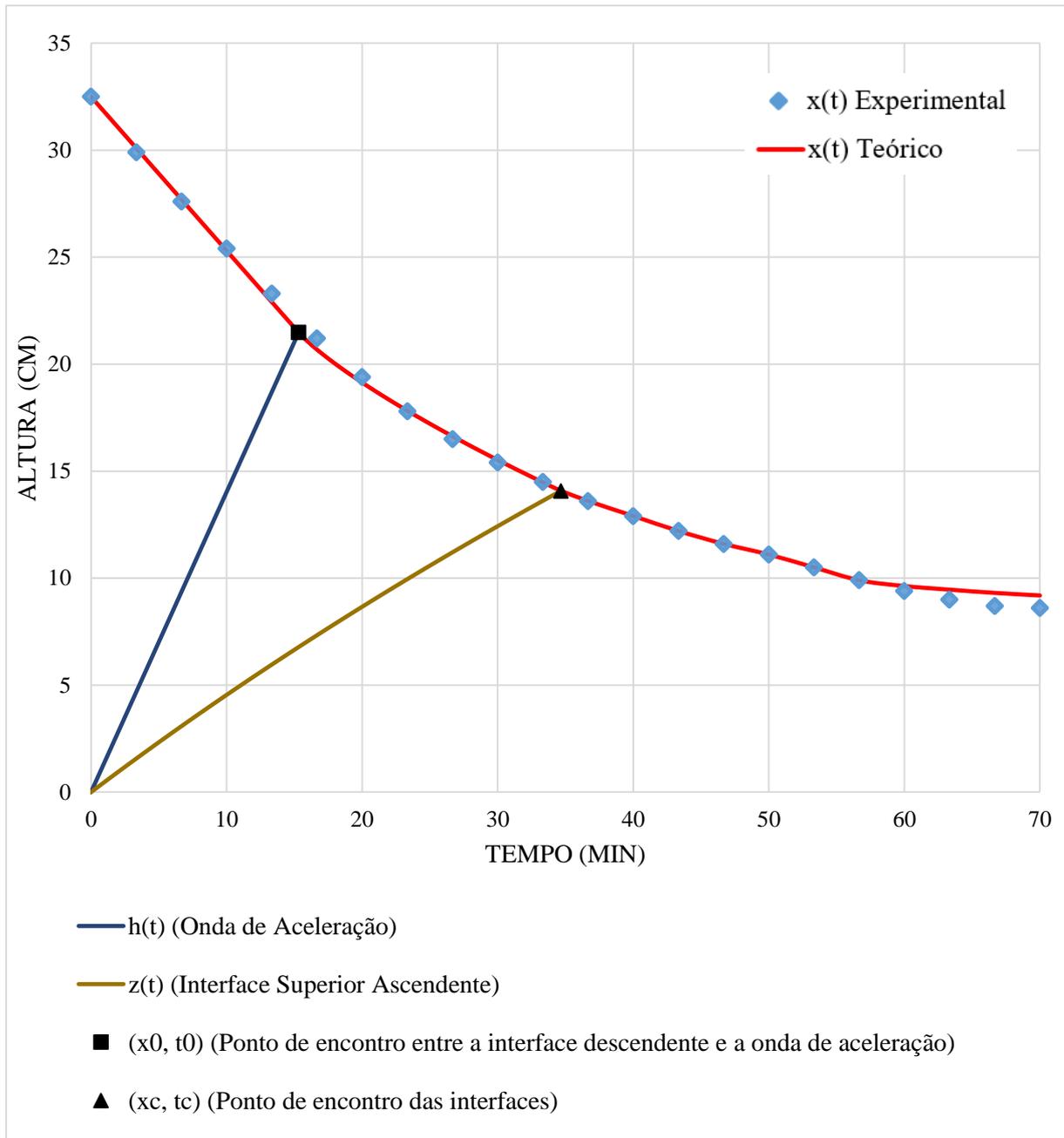


Figura 4.11 – Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,933$).

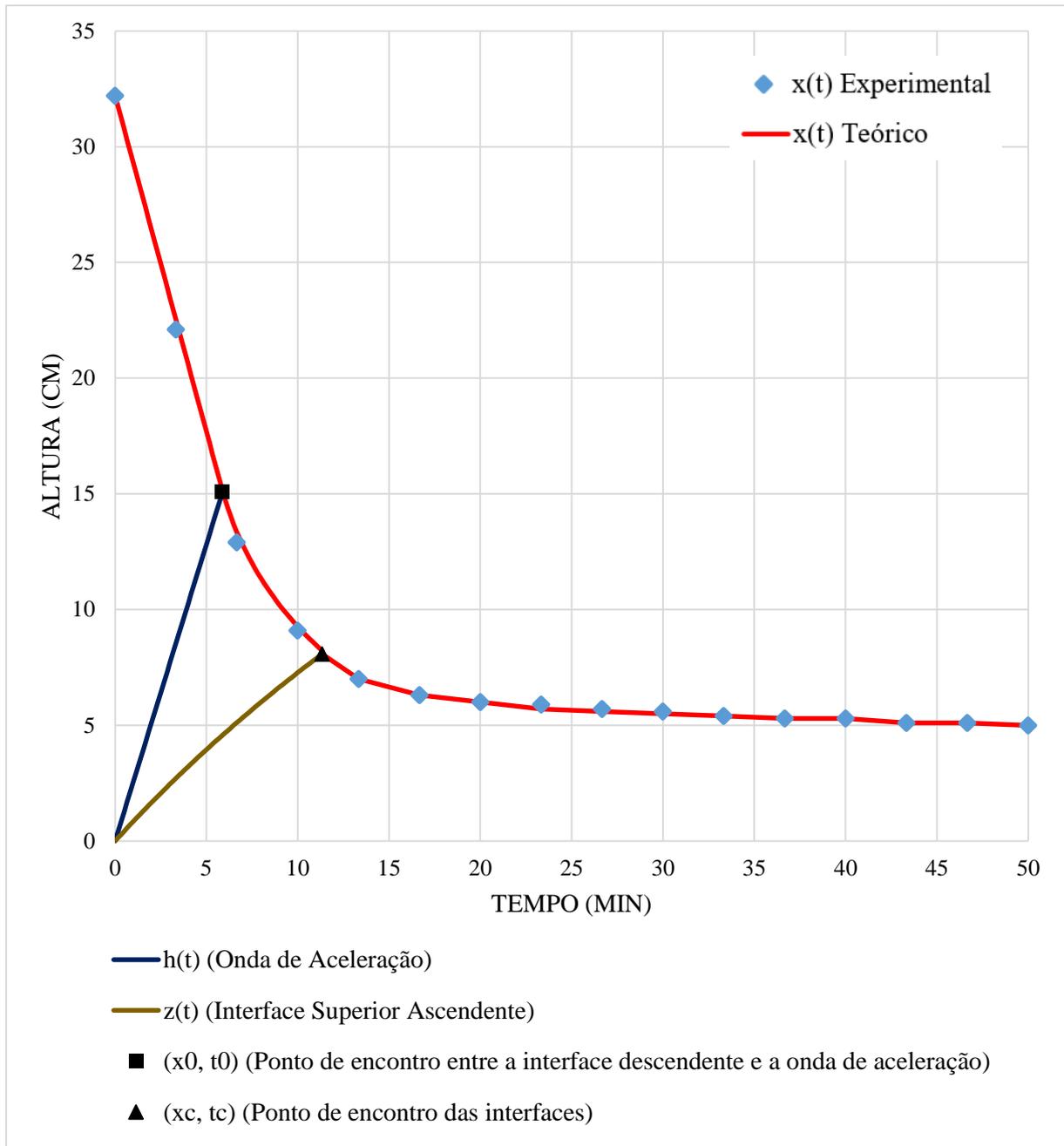
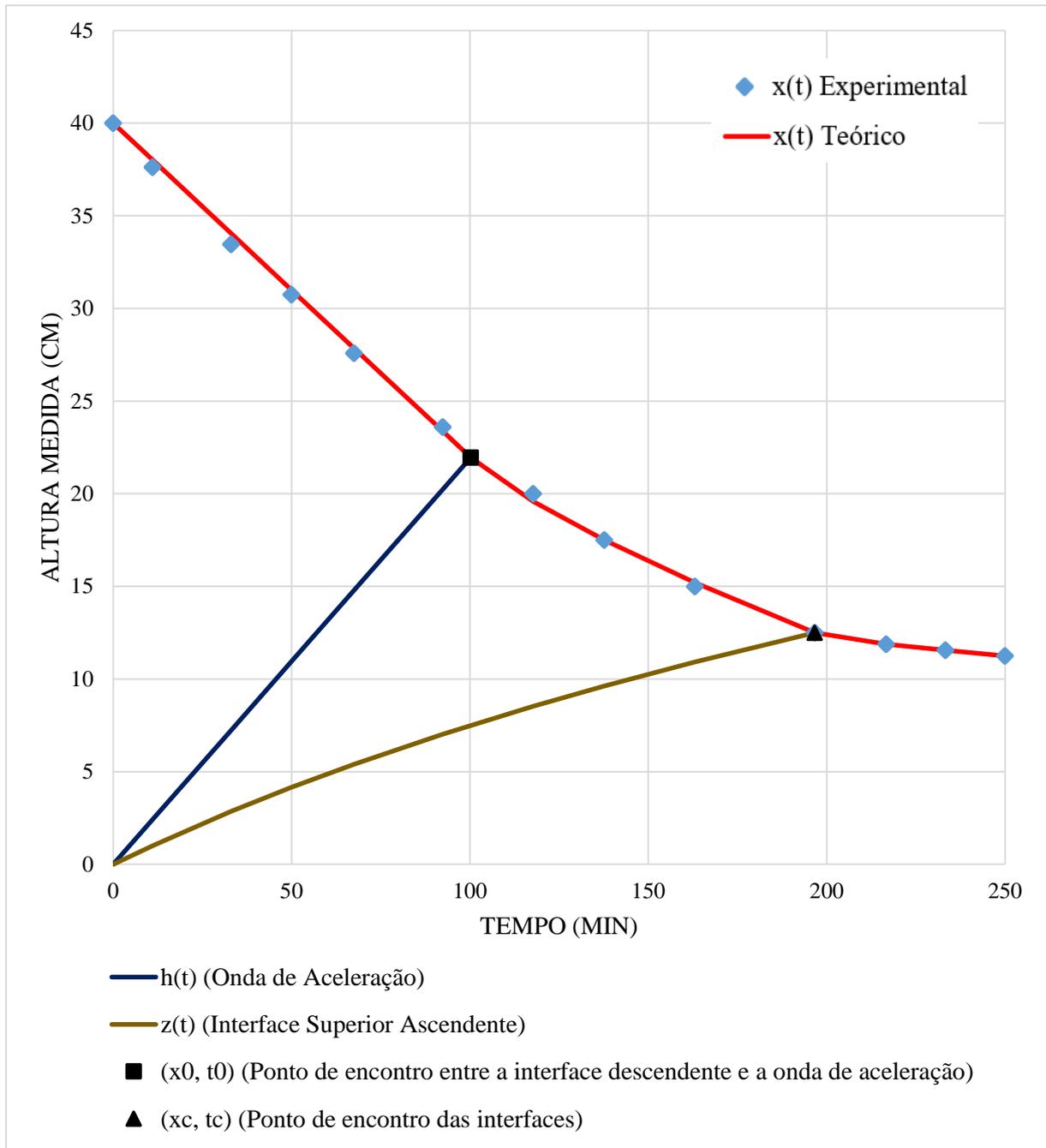


Figura 4.12 – Curva representativa do movimento de sedimentação em proveta para a suspensão de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).



Os gráficos apresentados nas Figuras 4.9-4.12 mostram uma boa aproximação obtida entre os resultados teóricos e os dados experimentais de altura da interface superior descendente.

A onda de aceleração, considerada como uma reta, se apresenta de maneira similar ao formato que aparece nos trabalhos de Tiller (1981), Silva (1985), Hernando *et al.* (2014) e Libório (2016).

Para a interface inferior ascendente, o comportamento também se apresenta concordante com resultados experimentais obtidos por Tiller e Khatib (1984), Font (1988), Landman e White (1994) e Diehl (2007).

4.5 CÁLCULO DAS POROSIDADES

Como ponto de partida para a construção das Tabelas 4.12-4.15, que apresentam os resultados numéricos para as porosidades nas regiões de transição e compactação, foi fixado um valor de tempo e a partir dele a porosidade foi calculada do fundo da proveta ($y = 0$ cm) até a altura da interface superior descendente, variando a altura de 1 em 1 cm, como ilustrado nas Figura 4.13 e 4.14.

Observa-se que na Figura 4.13, para um tempo fixado de 10 min, o movimento gravitacional passa da região de compactação para a região de transição ao cruzar a interface inferior ascendente. E passa da região de transição para a região de compactação ao cruzar a curva da onda de aceleração. Estes valores de $z(t)$ e $h(t)$ se encontram na parte inferior das Tabelas 4.12-4.15 construídas.

Já na Figura 4.14, na qual o tempo fixado foi de 30 min, o movimento gravitacional está em um tempo maior que t_c . Sendo assim, o movimento não passa de uma região para a outra, estando limitado na região de compactação. O valor numérico de $x(t)$ que delimita a fronteira da região de compactação está apresentado também na parte inferior das Tabelas 4.12-4.15 construídas.

Figura 4.13 – Exemplo de construção das Tabelas 4.12-4.15 para um tempo de 10 min.

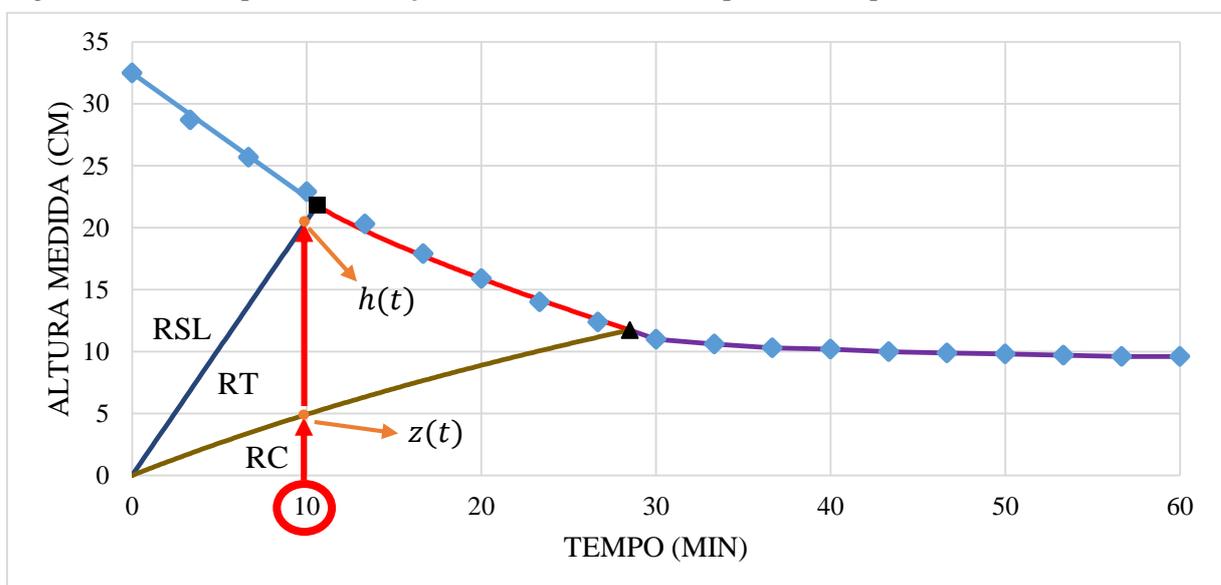
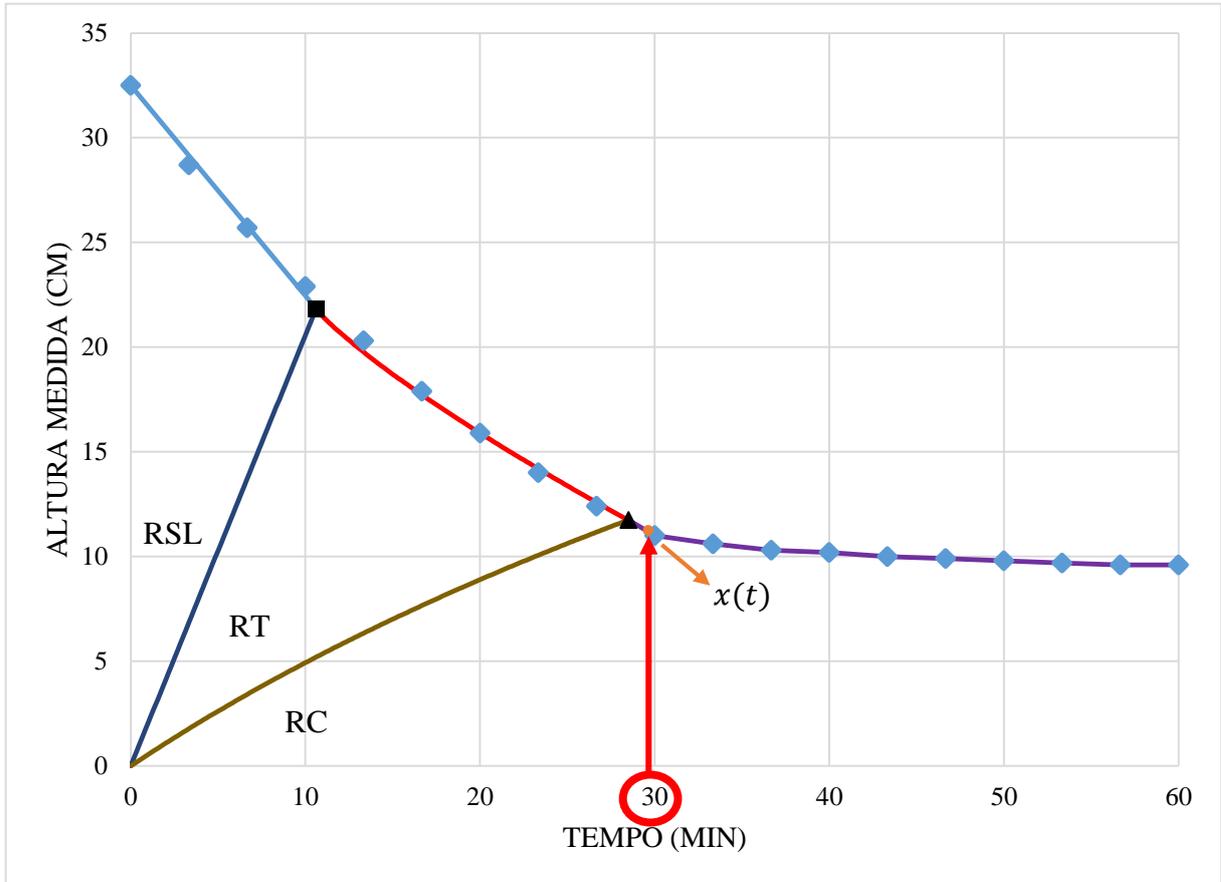


Figura 4.14 – Exemplo de construção das Tabelas 4.12-4.15 para um tempo de 30 min.



Os resultados numéricos das porosidades para as regiões de transição e de compactação para as suspensões particuladas estudadas podem ser observados nas Tabelas 4.12-4.15. As porosidades foram calculadas para a região de transição por meio da equação (3.40), utilizando os parâmetros apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.9. Para a região de compactação, foram utilizadas as equações (3.54), (3.56) e (3.58) e os parâmetros apresentados na Tabela 4.11.

Os resultados apresentados sublinhados são os valores numéricos de porosidades para a região de compactação.

Tabela 4.12 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$\varepsilon(y, t), 0 \leq t \leq t_c$		$\varepsilon(y, t), t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	<u>0,708399998</u>	<u>0,633243979</u>	<u>0,600327737</u>	<u>0,585911341</u>	<u>0,579597361</u>	<u>0,576832014</u>
1	<u>0,723143393</u>	<u>0,640200594</u>	<u>0,60387396</u>	<u>0,587963907</u>	<u>0,580995747</u>	<u>0,577943887</u>
2	<u>0,739751812</u>	<u>0,648215461</u>	<u>0,60812509</u>	<u>0,590566624</u>	<u>0,582876506</u>	<u>0,579508448</u>
3	<u>0,758581632</u>	<u>0,657561364</u>	<u>0,613317302</u>	<u>0,593939636</u>	<u>0,585452758</u>	<u>0,581735742</u>
4	<u>0,780105015</u>	<u>0,668618219</u>	<u>0,61979011</u>	<u>0,598404758</u>	<u>0,589038571</u>	<u>0,584936441</u>
5	0,860697584	<u>0,68192229</u>	<u>0,628035188</u>	<u>0,604434139</u>	<u>0,594097537</u>	<u>0,589570394</u>
6	0,861086777	<u>0,698238941</u>	<u>0,638768694</u>	<u>0,612722383</u>	<u>0,601314825</u>	<u>0,596318632</u>
7	0,86150145	<u>0,718670267</u>	<u>0,653038415</u>	<u>0,624293492</u>	<u>0,611704018</u>	<u>0,606190179</u>
8	0,861945268	<u>0,74481442</u>	<u>0,67238257</u>	<u>0,640659438</u>	<u>0,626765591</u>	<u>0,620680473</u>
9	0,862422756	0,856329719	<u>0,699065224</u>	<u>0,664055316</u>	<u>0,648721952</u>	<u>0,642006366</u>
10	0,862939594	0,856524436	<u>0,736425325</u>	<u>0,697788103</u>		
11	0,863503045	0,856725125	<u>0,789394279</u>			
12	0,864122615	0,856932172				
13	0,86481108	0,857146005				
14	0,8655862	0,857367093				
15	0,866473722	0,85759596				
16	0,867513053					
17	0,868769149					
18	0,87036108					
19	0,872547124					
20	0,876097876					
	z(t), cm		x(t), cm			
	4,93	8,89	11	10,2	9,8	9,6
	h(t), cm	x(t), cm				
	20,57	15,89				

Tabela 4.13 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$\varepsilon(y, t), 0 \leq t \leq t_c$			$\varepsilon(y, t), t_c \leq t \leq \infty$		
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	<u>0,783977168</u>	<u>0,71461192</u>	<u>0,664503653</u>	<u>0,6283063</u>	<u>0,602157953</u>	<u>0,583268835</u>
1	<u>0,797314786</u>	<u>0,724732371</u>	<u>0,672300078</u>	<u>0,634423889</u>	<u>0,607062778</u>	<u>0,587297581</u>
2	<u>0,811537657</u>	<u>0,735588863</u>	<u>0,680724756</u>	<u>0,641091865</u>	<u>0,612461744</u>	<u>0,591779835</u>
3	<u>0,82673986</u>	<u>0,747268553</u>	<u>0,689859843</u>	<u>0,648388775</u>	<u>0,618430786</u>	<u>0,596789648</u>
4	<u>0,843030376</u>	<u>0,759873182</u>	<u>0,699801851</u>	<u>0,656407351</u>	<u>0,625059907</u>	<u>0,602415052</u>
5	0,860117358	<u>0,773521848</u>	<u>0,710664402</u>	<u>0,665257261</u>	<u>0,63245592</u>	<u>0,608760794</u>
6	0,860922493	<u>0,788354321</u>	<u>0,722581541</u>	<u>0,675068412</u>	<u>0,640745742</u>	<u>0,615951633</u>
7	0,86182259	<u>0,804535019</u>	<u>0,735711691</u>	<u>0,685994899</u>	<u>0,65008034</u>	<u>0,624136279</u>
8	0,862843981	<u>0,82225776</u>	<u>0,7502424</u>	<u>0,698219738</u>	<u>0,660639459</u>	<u>0,633492109</u>
9	0,864025915	0,854780735	<u>0,766396016</u>	<u>0,711960538</u>	<u>0,672637281</u>	<u>0,644230835</u>
10	0,865430769	0,855177063	<u>0,784436493</u>	<u>0,727476293</u>	<u>0,68632922</u>	
11	0,867166982	0,855594175	<u>0,804677546</u>	<u>0,745075526</u>	<u>0,702020048</u>	
12	0,869450417	0,85603444	<u>0,827492415</u>	<u>0,765126047</u>		
13	0,872823615	0,856500665	0,851616412			
14	0,87964639	0,856996206	0,851881847			
15		0,857525122	0,852156234			
16		0,858092388				
17		0,858704194				
18		0,859368382				
19		0,860095092				
	z(t), cm			x(t)		
	4,54	8,65	12,42	12,9	11,1	9,63
	h(t), cm	x(t), cm				
	14,03	19,13	15,51			

Tabela 4.14 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

y (cm)	$\varepsilon(y, t), 0 \leq t \leq t_c$	$\varepsilon(y, t), t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min
0	<u>0,665811291</u>	<u>0,587744936</u>	<u>0,564935753</u>	<u>0,558271438</u>	<u>0,55632428</u>
1	<u>0,679768437</u>	<u>0,59396495</u>	<u>0,568895157</u>	<u>0,561570344</u>	<u>0,559430203</u>
2	<u>0,6961991</u>	<u>0,601891658</u>	<u>0,574337206</u>	<u>0,566286433</u>	<u>0,563934184</u>
3	<u>0,715849244</u>	<u>0,612195023</u>	<u>0,581909658</u>	<u>0,573060976</u>	<u>0,570475596</u>
4	<u>0,739768822</u>	<u>0,625841465</u>	<u>0,592554528</u>	<u>0,582828856</u>	<u>0,57998724</u>
5	<u>0,769447584</u>	<u>0,644228924</u>	<u>0,60764293</u>	<u>0,59695335</u>	<u>0,593830102</u>
6	<u>0,80701289</u>	<u>0,669383851</u>			
7	<u>0,855517981</u>				
8	0,891374634				
9	0,892649967				
	z(t), cm	x(t), cm			
	7,27	6	5,5	5,3	5,0
	x(t), cm				
	9,27				

Tabela 4.15 - Valores das porosidades nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).

y (cm)	$\varepsilon(y, t), 0 \leq t \leq t_c$			$\varepsilon(y, t), t_c \leq t \leq \infty$	
	50 min	100 min	150 min	200 min	250 min
0	<u>0,922893809</u>	<u>0,902679222</u>	<u>0,894004577</u>	<u>0,890282043</u>	<u>0,8886846</u>
1	<u>0,927475224</u>	<u>0,904697808</u>	<u>0,894923381</u>	<u>0,8907289</u>	<u>0,888928931</u>
2	<u>0,93268216</u>	<u>0,907016995</u>	<u>0,896003354</u>	<u>0,891277092</u>	<u>0,889248921</u>
3	<u>0,938621263</u>	<u>0,909702238</u>	<u>0,897292274</u>	<u>0,891966811</u>	<u>0,889681506</u>
4	<u>0,945429438</u>	<u>0,912844024</u>	<u>0,89886071</u>	<u>0,892860078</u>	<u>0,890285039</u>
5	<u>0,964257492</u>	<u>0,916571287</u>	<u>0,900815152</u>	<u>0,894053753</u>	<u>0,891152247</u>
6	<u>0,964729638</u>	<u>0,921072792</u>	<u>0,903319074</u>	<u>0,895700457</u>	<u>0,892431095</u>
7	<u>0,965283609</u>	<u>0,926631326</u>	<u>0,906626771</u>	<u>0,898042256</u>	<u>0,8943584</u>
8	<u>0,965956149</u>	<u>0,961870361</u>	<u>0,911137763</u>	<u>0,901464893</u>	<u>0,897313993</u>
9	<u>0,966817058</u>	<u>0,962093052</u>	<u>0,917484358</u>	<u>0,90658515</u>	<u>0,901907994</u>
10	<u>0,968027967</u>	<u>0,962331142</u>	<u>0,926672627</u>	<u>0,914391604</u>	<u>0,909121472</u>
11		<u>0,96258704</u>	<u>0,96047432</u>	<u>0,926471434</u>	<u>0,920533149</u>
12		<u>0,962863781</u>	<u>0,960622535</u>	<u>0,945375947</u>	
13		<u>0,963165262</u>	<u>0,960777155</u>		
14		<u>0,963496616</u>	<u>0,960938789</u>		
15		<u>0,963864788</u>	<u>0,961108135</u>		
16		<u>0,964279531</u>	<u>0,961286005</u>		
17		<u>0,964755165</u>			
18		<u>0,96531402</u>			
19		<u>0,965993912</u>			
20		<u>0,966867227</u>			
21		<u>0,96810385</u>			
	z(t), cm			x(t), cm	
	4,16	7,49	10,27	12,3	11,25
	h(t), cm		x(t), cm		
	10,95	21,9	16,35		

As Tabelas 4.12-4.15 mostram que a função porosidade para as regiões de transição e compactação, antes e após o encontro das interfaces, comporta-se de acordo com a teoria de Tiller (1981), ou seja, para cada instante a porosidade aumenta do fundo da proveta até a interface superior descendente, diminuindo com o tempo em cada posição.

4.6 CÁLCULO DAS VELOCIDADES

Para o cálculo das velocidades para a região de compactação, primeiramente é necessário, a partir dos dados da Tabela 4.11, se calcular ε^* através da equação (3.50), β_0 através da equação (3.53) e $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ através da equação (3.82). Os resultados encontrados para estes termos estão expostos nas Tabelas 4.16-4.24.

Tabela 4.16 - Resultados de ε^* para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

$\varepsilon^*, 0 \leq t \leq t_c$		$\varepsilon^*, t_c \leq t \leq \infty$			
10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0,6731	0,6168	0,5921	0,5812	0,5765	0,5745

Tabela 4.17 - Resultado de ε^* para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

$\varepsilon^*, 0 \leq t \leq t_c$			$\varepsilon^*, t_c \leq t \leq \infty$		
10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0,7127	0,6607	0,6231	0,5960	0,5764	0,5622

Tabela 4.18 - Resultado de ε^* para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

$\varepsilon^*, 0 \leq t \leq t_c$	$\varepsilon^*, t_c \leq t \leq \infty$			
10 min	20 min	30 min	40 min	50 min
0,6317	0,5731	0,5560	0,5510	0,5495

Tabela 4.19 - Resultado de ε^* para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

$\varepsilon^*, 0 \leq t \leq t_c$			$\varepsilon^*, t_c \leq t \leq \infty$	
50 min	100 min	150 min	200 min	250 min
0,9139	0,8987	0,8922	0,8894	0,8882

Tabela 4.20 – Resultados de β_0 para as suspensões estudadas.

Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,88$)	Suspensão de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$)	Suspensão de barita ($\epsilon_0 = 0,933$)	Suspensão de atapulgita ($\epsilon_0 = 0,970$)
$\beta_0 = 2,8316$	$\beta_0 = 5,2739$	$\beta_0 = 4,5926$	$\beta_0 = 0,3958$
cm ² /min	cm ² /min	cm ² /min	cm ² /min

Tabela 4.21 - Resultados de $\frac{\partial \epsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de barita ($\epsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$\frac{\partial \epsilon}{\partial y}(y, t), 0 \leq t \leq t_c$		$\frac{\partial \epsilon}{\partial y}(y, t), t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	0,013907957	0,006498701	0,003253654	0,001832414	0,00120995	0,000937328
1	0,015624243	0,007447328	0,003866067	0,002297575	0,001610619	0,001309751
2	0,017651435	0,008627325	0,004675016	0,002944015	0,002185885	0,001853845
3	0,020086081	0,010126998	0,005765198	0,003854851	0,003018172	0,00265173
4	0,023065827	0,012074903	0,007261184	0,005152909	0,004229544	0,003825136
5		0,014659044	0,009346585	0,007019876	0,006000842	0,005554534
6		0,018155343	0,012292469	0,009724694	0,00860008	0,00810753
7		0,02296982	0,016499505	0,013665687	0,012424554	0,011880972
8		0,029701153	0,02256046	0,019433036	0,018063311	0,017463409
9			0,031352902	0,027901451	0,026389811	0,025727755
10			0,044176688	0,040367638		
11			0,062957901			

Tabela 4.22 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), 0 \leq t \leq t_c$			$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), t_c \leq t \leq \infty$		
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	0,012923	0,009778	0,007507	0,005866	0,00468	0,003824
1	0,013766	0,010475	0,008098	0,006381	0,00514	0,004244
2	0,014696	0,011252	0,008765	0,006968	0,00567	0,004733
3	0,015727	0,012124	0,009521	0,007641	0,006283	0,005302
4	0,016875	0,013105	0,010382	0,008414	0,006993	0,005967
5		0,014215	0,011366	0,009307	0,00782	0,006746
6		0,015477	0,012495	0,010341	0,008785	0,007661
7		0,016917	0,013796	0,011542	0,009914	0,008738
8		0,018567	0,015302	0,012943	0,01124	0,010009
9			0,017049	0,014581	0,012798	0,011511
10			0,019084	0,016501	0,014636	
11			0,02146	0,018758	0,016806	
12			0,024243	0,021416		

Tabela 4.23 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

y (cm)	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), 0 \leq t \leq t_c$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min
0	0,012913	0,005535	0,00338	0,00275	0,002566
1	0,01509	0,006981	0,004612	0,00392	0,003718
2	0,017894	0,008982	0,006378	0,005618	0,005395
3	0,021579	0,011783	0,008921	0,008085	0,007841
4	0,026506	0,015739	0,012594	0,011675	0,011406
5	0,033202	0,021369	0,017911	0,016901	0,016606
6	0,042431	0,029425			
7	0,055303				

Tabela 4.24 - Resultados de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).

y (cm)	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), 0 \leq t \leq t_c$			$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(y, t), t_c \leq t \leq \infty$	
	50 min	100 min	150 min	200 min	250 min
0	0,004299	0,001886	0,00085	0,000406	0,000215
1	0,004878	0,00216	0,000993	0,000492	0,000277
2	0,005553	0,00249	0,001175	0,000611	0,000369
3	0,006348	0,002896	0,001414	0,000779	0,000506
4	0,007298	0,003409	0,00174	0,001024	0,000716
5		0,004077	0,002196	0,001389	0,001042
6		0,004973	0,002854	0,001944	0,001554
7		0,006215	0,003827	0,002802	0,002363
8			0,005298	0,004144	0,003648
9			0,007559	0,006258	0,0057
10			0,011079	0,009613	0,008984
11				0,014962	0,014253
12				0,023516	

Os resultados numéricos das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) para as regiões de transição e de compactação para as suspensões particuladas estudadas podem ser observados nas Tabelas 4.25-4.28. As velocidades de sedimentação foram calculadas para a região de transição por meio da equação (3.25), utilizando os parâmetros apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6. Para a região de compactação, foi utilizada a equação (3.80) e os resultados apresentados nas Tabela 4.16-4.24.

Os resultados para V_2 estão negativos, visto que o sentido do eixo considerado para altura está no sentido inverso da ação da gravidade, ou seja, a altura aumenta de baixo para cima, enquanto que a gravidade atua de cima para baixo e a massa da partícula vai ocupando a massa do fluido. Os resultados apresentados sublinhados são os valores numéricos de velocidades para a região de compactação.

Tabela 4.25 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$V_2(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$		$V_2(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,04190868	-0,01412358	-0,00561848	-0,00236572	-0,00101889	-0,00044302
2	-0,09378558	-0,0303874	-0,01194729	-0,00500818	-0,002153	-0,0009354
3	-0,15963592	-0,04929066	-0,01911785	-0,00797351	-0,00342068	-0,00148485
4	-0,24618433	-0,07154735	-0,02731148	-0,0113247	-0,00484686	-0,00210181
5	-0,58067629	-0,09823903	-0,03679272	-0,01515275	-0,00646748	-0,00280133
6	-0,58806641	-0,13111968	-0,04797248	-0,01959754	-0,00833759	-0,00360644
7	-0,59598605	-0,17327681	-0,06153485	-0,02488859	-0,01054709	-0,00455465
8	-0,60451502	-0,23073506	-0,07871349	-0,03143087	-0,0132534	-0,0057115
9	-0,6137525	-0,50048413	-0,10196687	-0,04000462	-0,01675612	-0,00720105
10	-0,62382376	-0,50395507	-0,13692612	-0,05230279		
11	-0,63489024	-0,50754233	-0,19968654			
12	-0,64716487	-0,51125381				
13	-0,66093639	-0,5150982				
14	-0,67661014	-0,51908516				
15	-0,6947802	-0,52322544				
16	-0,71636772					
17	-0,74291391					
18	-0,77729671					
19	-0,82591081					
20	-0,90852988					
	z(t), cm		x(t), cm			
	4,93	8,89	11	10,2	9,8	9,6
	h(t), cm	x(t), cm				
	20,57	15,89				

Tabela 4.26 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$V_2(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$			$V_2(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$		
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	0	0	0	0	0	0
1	<u>-0,041011539</u>	<u>-0,021814257</u>	<u>-0,013236912</u>	<u>-0,008571417</u>	<u>-0,005760693</u>	<u>-0,003962126</u>
2	<u>-0,090258862</u>	<u>-0,046473152</u>	<u>-0,027802514</u>	<u>-0,017866251</u>	<u>-0,011952798</u>	<u>-0,008197042</u>
3	<u>-0,150708484</u>	<u>-0,07463534</u>	<u>-0,043935263</u>	<u>-0,027994708</u>	<u>-0,018635145</u>	<u>-0,012739191</u>
4	<u>-0,227020179</u>	<u>-0,107202978</u>	<u>-0,061945097</u>	<u>-0,039096558</u>	<u>-0,02588141</u>	<u>-0,017631421</u>
5	-0,418252713	<u>-0,145448906</u>	<u>-0,082243643</u>	<u>-0,051352368</u>	<u>-0,033785445</u>	<u>-0,022927893</u>
6	-0,428795676	<u>-0,191232655</u>	<u>-0,105391004</u>	<u>-0,065000156</u>	<u>-0,042468981</u>	<u>-0,028698241</u>
7	-0,440727579	<u>-0,247386982</u>	<u>-0,13217073</u>	<u>-0,080360748</u>	<u>-0,052093048</u>	<u>-0,03503363</u>
8	-0,454457071	<u>-0,318455439</u>	<u>-0,163714838</u>	<u>-0,09787761</u>	<u>-0,06287533</u>	<u>-0,042055783</u>
9	-0,470602012	-0,351327032	<u>-0,201722572</u>	<u>-0,118181687</u>	<u>-0,075117373</u>	<u>-0,049930825</u>
10	-0,49016087	-0,356127771	<u>-0,248866381</u>	<u>-0,142201645</u>	<u>-0,089248778</u>	
11	-0,514904627	-0,361208712	<u>-0,309602782</u>	<u>-0,171361371</u>	<u>-0,105902168</u>	
12	-0,548449131	-0,366603634	<u>-0,391952762</u>	<u>-0,207957459</u>		
13	-0,600206747	-0,372352759	-0,313917266			
14	-0,713762669	-0,378504481	-0,316993918			
15		-0,385117734	-0,320185935			
16		-0,392265277				
17		-0,400038359				
18		-0,408553525				
19		-0,417962869				
	z(t), cm			x(t)		
	4,54	8,65	12,42	12,9	11,1	9,63
	h(t), cm	x(t), cm				
	14,03	19,13	15,51			

Tabela 4.27 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

y (cm)	$V_2(y, t)$ (cm/min)	$V_2(y, t)$ (cm/min)			
	$0 \leq t \leq t_c$	$t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min
0	0	0	0	0	0
1	<u>-0,044442863</u>	<u>-0,010241143</u>	<u>-0,00281822</u>	<u>-0,000809662</u>	<u>-0,000235415</u>
2	<u>-0,098335931</u>	<u>-0,021925314</u>	<u>-0,005991385</u>	<u>-0,00171805</u>	<u>-0,000499267</u>
3	<u>-0,165642381</u>	<u>-0,035461141</u>	<u>-0,009610407</u>	<u>-0,002749741</u>	<u>-0,000798575</u>
4	<u>-0,253483272</u>	<u>-0,051510858</u>	<u>-0,013820723</u>	<u>-0,003943954</u>	<u>-0,001144536</u>
5	<u>-0,37620058</u>	<u>-0,071230224</u>	<u>-0,018871189</u>	<u>-0,00536749</u>	<u>-0,001556197</u>
6	<u>-0,567717366</u>	<u>-0,096823823</u>			
7	<u>-0,931969311</u>				
8	-0,8066947				
9	-0,846723339				
	z(t), cm	x(t), cm			
	7,27	6	5,5	5,3	5,0
	x(t), cm				
	9,27				

Tabela 4.28 - Valores das velocidades de sedimentação para o constituinte sólido (V_2) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).

y (cm)	$V_2(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$			$V_2(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$	
	50 min	100 min	150 min	200 min	250 min
0	0	0	0	0	0
1	-0,008774405	-0,002865419	-0,001115249	-0,000460214	-0,00019429
2	-0,02010466	-0,006246118	-0,002396521	-0,000983709	-0,000414406
3	-0,035213335	-0,010271526	-0,003875214	-0,001580988	-0,000664392
4	-0,056289146	-0,015124213	-0,005592898	-0,002265648	-0,000949434
5	-0,115895354	-0,021076255	-0,00760765	-0,003056308	-0,001276586
6	-0,120378425	-0,028562687	-0,010006262	-0,003980312	-0,00165615
7	-0,125793908	-0,038344238	-0,012929308	-0,005081177	-0,002104439
8	-0,132605342	-0,094929013	-0,016626799	-0,006434603	-0,002649649
9	-0,141727504	-0,096773248	-0,021595901	-0,008186129	-0,003345398
10	-0,155389708	-0,098769125	-0,028981132	-0,010652511	-0,004306197
11		-0,100942609	-0,08384109	-0,014658926	-0,005820484
12		-0,103326833	-0,08498097	-0,023154432	
13		-0,105964987	-0,086179293		
14		-0,108914803	-0,087442109		
15		-0,112255844	-0,088776443		
16		-0,116101985	-0,090190516		
17		-0,120624233			
18		-0,126096204			
19		-0,132995796			
20		-0,142273712			
21		-0,156280406			
	z(t), cm			x(t), cm	
	4,16	7,49	10,27	12,3	11,25
	h(t), cm		x(t), cm		
	10,95	21,9	16,35		

Os resultados numéricos das velocidades para o constituinte fluido (V_1) para as regiões de transição e de compactação para as suspensões particuladas estudadas podem ser observados nas Tabelas 4.29-4.32. As velocidades foram calculadas para a região de transição por meio da

equação (3.26), utilizando os parâmetros apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6. Para a região de compactação, foi utilizada a equação (3.81) e os resultados apresentados nas Tabela 4.16-4.24.

Os resultados apresentados sublinhados são os valores numéricos de velocidades para a região de compactação.

Tabela 4.29 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$V_1(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$		$V_1(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1	<u>0,016044807</u>	<u>0,007937602</u>	<u>0,003685578</u>	<u>0,001657859</u>	<u>0,000734805</u>	<u>0,000323523</u>
2	<u>0,03299421</u>	<u>0,016491147</u>	<u>0,007698813</u>	<u>0,003472117</u>	<u>0,001540753</u>	<u>0,000678729</u>
3	<u>0,05080408</u>	<u>0,025669127</u>	<u>0,012053375</u>	<u>0,005451274</u>	<u>0,002422116</u>	<u>0,001067597</u>
4	<u>0,069394117</u>	<u>0,03546043</u>	<u>0,016754213</u>	<u>0,007600114</u>	<u>0,003381566</u>	<u>0,001491418</u>
5	0,093981454	<u>0,045822882</u>	<u>0,021791131</u>	<u>0,009916565</u>	<u>0,004418745</u>	<u>0,001950148</u>
6	0,09486872	<u>0,056666581</u>	<u>0,027129009</u>	<u>0,012386833</u>	<u>0,005528007</u>	<u>0,002441398</u>
7	0,095813192	<u>0,067830714</u>	<u>0,032693681</u>	<u>0,01497822</u>	<u>0,006695055</u>	<u>0,002958919</u>
8	0,096823038	<u>0,079053597</u>	<u>0,038353035</u>	<u>0,017629315</u>	<u>0,007892307</u>	<u>0,003490499</u>
9	0,097908336	0,083968469	<u>0,043894868</u>	<u>0,020238283</u>	<u>0,009073311</u>	<u>0,004015425</u>
10	0,099081718	0,084417017	<u>0,049007354</u>	<u>0,02265233</u>		
11	0,100359328	0,084879108	<u>0,053275186</u>			
12	0,10176226	0,085355614				
13	0,10331884	0,085847493				
14	0,10506838	0,086355805				
15	0,107067777	0,086881724				
16	0,10940397					
17	0,112219943					
18	0,115777127					
19	0,120640714					
20	0,12848882					
	z(t), cm		x(t), cm			
	4,93	8,89	11	10,2	9,8	9,6
	h(t), cm	x(t), cm				
	20,57	15,89				

Tabela 4.30 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de calcita ($\epsilon_0 = 0,88$).

y (cm)	$V_1(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$			$V_1(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$		
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1	<u>0,010425534</u>	<u>0,008285485</u>	<u>0,006452082</u>	<u>0,004939135</u>	<u>0,003728759</u>	<u>0,002784243</u>
2	<u>0,020960699</u>	<u>0,01670501</u>	<u>0,013040005</u>	<u>0,010002222</u>	<u>0,007563194</u>	<u>0,005654464</u>
3	<u>0,031584026</u>	<u>0,025242193</u>	<u>0,019751968</u>	<u>0,015181098</u>	<u>0,011497807</u>	<u>0,008607009</u>
4	<u>0,042270449</u>	<u>0,033877113</u>	<u>0,026572956</u>	<u>0,020464868</u>	<u>0,015524877</u>	<u>0,011636475</u>
5	0,068021293	<u>0,042585739</u>	<u>0,033484178</u>	<u>0,025839376</u>	<u>0,019634001</u>	<u>0,014735329</u>
6	0,069269689	<u>0,051339308</u>	<u>0,040462437</u>	<u>0,031286613</u>	<u>0,02381157</u>	<u>0,017893471</u>
7	0,070662565	<u>0,060103651</u>	<u>0,047479439</u>	<u>0,036784071</u>	<u>0,028040198</u>	<u>0,021097749</u>
8	0,072239621	<u>0,06883849</u>	<u>0,054501085</u>	<u>0,042304062</u>	<u>0,03229811</u>	<u>0,024331442</u>
9	0,074059906	0,059687182	<u>0,061486745</u>	<u>0,047813029</u>	<u>0,036558526</u>	<u>0,027573731</u>
10	0,07621704	0,060309697	<u>0,068388595</u>	<u>0,053270904</u>	<u>0,040789075</u>	
11	0,078873316	0,060964232	<u>0,075151066</u>	<u>0,058630576</u>	<u>0,044951313</u>	
12	0,082350648	0,061654409	<u>0,081710507</u>	<u>0,063837574</u>		
13	0,087454238	0,062384509	0,054696186			
14	0,097657326	0,063159646	0,055116274			
15		0,063986	0,055550253			
16		0,064871137				
17		0,065824463				
18		0,066857874				
19		0,067986735				
	z(t), cm			x(t)		
	4,54	8,65	12,42	12,9	11,1	9,63
	h(t), cm	x(t), cm				
	14,03	19,13	15,51			

Tabela 4.31 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de barita ($\varepsilon_0 = 0,933$).

y (cm)	$V_1(y, t)$ (cm/min)	$V_1(y, t)$ (cm/min)			
	$0 \leq t \leq t_c$	$t_c \leq t \leq \infty$			
	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min
0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1	<u>0,020936552</u>	<u>0,007000856</u>	<u>0,002135628</u>	<u>0,00063212</u>	<u>0,000185397</u>
2	<u>0,042910921</u>	<u>0,014502029</u>	<u>0,004440439</u>	<u>0,001315838</u>	<u>0,000386061</u>
3	<u>0,065750447</u>	<u>0,022463442</u>	<u>0,006904883</u>	<u>0,002048599</u>	<u>0,000601266</u>
4	<u>0,089168735</u>	<u>0,030795702</u>	<u>0,009503245</u>	<u>0,002822962</u>	<u>0,000828845</u>
5	<u>0,112722367</u>	<u>0,03933641</u>	<u>0,01218519</u>	<u>0,003623983</u>	<u>0,001064413</u>
6	<u>0,135762557</u>	<u>0,047822366</u>			
7	<u>0,157393311</u>				
8	0,098306036				
9	0,101826899				
	z(t), cm	x(t), cm			
	7,27	6	5,5	5,3	5,0
	x(t), cm				
	9,27				

Tabela 4.32 - Valores das velocidades para o constituinte fluido (V_1) nas regiões de transição e compactação para a suspensão particulada de atapulgita ($\varepsilon_0 = 0,970$).

y (cm)	$V_1(y, t)$ (cm/min) $0 \leq t \leq t_c$			$V_1(y, t)$ (cm/min) $t_c \leq t \leq \infty$	
	50 min	100 min	150 min	200 min	250 min
0	0	0	0	0	0
1	0,000686123	0,000301847	0,000130946	5,64572E-05	2,42764E-05
2	0,001451086	0,000640322	0,000278158	0,000119998	5,1612E-05
3	0,002302686	0,00101956	0,000443573	0,000191486	8,23831E-05
4	0,003249032	0,001444021	0,00062931	0,000271869	0,000117004
5	0,004295938	0,001918416	0,000837645	0,000362176	0,000155926
6	0,004401016	0,002447552	0,001070956	0,000463486	0,000199624
7	0,004524173	0,003036014	0,001331586	0,000576883	0,000248576
8	0,004673501	0,003763094	0,001621593	0,000703338	0,000303218
9	0,004864349	0,003812914	0,001942267	0,000843502	0,000363847
10	0,005132212	0,003866154	0,00229327	0,000997324	0,00043046
11		0,003923346	0,00345025	0,001163392	0,000502465
12		0,003985162	0,003483507	0,001337869	
13		0,004052464	0,00351819		
14		0,004126386	0,003554435		
15		0,004208462	0,003592396		
16		0,004300846	0,003632254		
17		0,004406694			
18		0,00453093			
19		0,004681879			
20		0,00487546			
21		0,005148976			
	z(t), cm			x(t), cm	
	4,16	7,49	10,27	12,3	11,25
	h(t), cm		x(t), cm		
	10,95	21,9	16,35		

Pode-se notar, a partir das Tabelas 4.25-4.32, que tanto os valores numéricos das velocidades do constituinte sólido (V_2), em módulo, quanto os valores numéricos das

velocidades do constituinte fluido (V_1), tendem a diminuir, da altura da interface superior descendente até o fundo da proveta, estando de acordo com a condição de contorno (3.16) adotada, na qual as velocidades são nulas no fundo da proveta e como foi observado nos resultados.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentado neste trabalho fornece as funções porosidades e velocidades para as regiões de transição e compactação em termos de parâmetros, os quais podem ser determinados a partir do movimento da interface superior descendente dos testes de sedimentação gravitacional em proveta. Assim, dados experimentais mostrando a altura da interface superior descendente e as funções porosidades e velocidades para as regiões estudadas podem ser empregados para a determinação de parâmetros de sedimentação.

Para as suspensões testadas, verificou-se um bom ajuste das curvas propostas para aproximação da interface superior descendente em relação aos dados experimentais de teste de proveta. A onda de aceleração, considerada como uma reta, se apresenta de maneira similar ao formato que aparece nos trabalhos de Tiller (1981), Silva (1985), Hernando *et al.* (2014) e Libório (2016). Para a interface inferior ascendente, o comportamento também se apresenta conforme esperado, de acordo com resultados experimentais obtidos por Tiller e Khatib (1984), Font (1988), Landman e White (1994) e Diehl (2007).

Os resultados obtidos para as funções porosidades para as regiões de transição e compactação, antes e após o encontro das interfaces, comportam-se de acordo com a teoria de Tiller (1981), ou seja, para cada instante a porosidade aumenta do fundo da proveta até a interface superior descendente, diminuindo com o tempo em cada posição, em todas as suspensões testadas.

Os valores numéricos das velocidades do constituinte sólido (V_2), em módulo, e os valores numéricos das velocidades do constituinte fluido (V_1), tendem a diminuir, da altura da interface superior descendente até o fundo da proveta, o que condiz com as condições de contorno adotadas para o movimento.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Baseado na pesquisa realizada, sugere-se as seguintes possibilidades:

- a) As equações apresentadas neste trabalho para porosidades e velocidades podem ser utilizadas para o dimensionamento de um sedimentador convencional contínuo. Podem ser encontrados o valor de altura deste sedimentador e sua área transversal.

- b) Buscar dados experimentais de altura da interface inferior ascendente *versus* tempo e de porosidade no ponto de encontro das interfaces para comparar com os resultados numéricos.
- c) Utilizar o $A(\varepsilon)$ apresentado neste trabalho para buscar equações para as partes constitutivas da força de interação e de cada tensor tensão, como também para a função diferença de pressões arbitrárias.
- d) Utilizar dados experimentais de altura de interface superior descendente *versus* tempo de outros fluidos de perfuração não-newtonianos e calcular suas porosidades e velocidades a partir da metodologia apresentada neste trabalho.
- e) Utilizar dados experimentais de altura de interface superior descendente *versus* tempo de suspensões particuladas que possuam partículas de tamanhos mais variados.

REFERÊNCIAS

- ANGULO, J. A. P. **Escoamento em Meios Porosos: Efeito da Temperatura a Altas Pressões e Baixa Permeabilidade; Dependência da Permeabilidade/Porosidade em Misturas Sólido-Fluido**, 2015. 116 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, Brasil, 2015.
- AHMADI, G. A Generalized continuum theory for multiphase suspensions flows. **International Journal of Engineering Mathematics**, v. 23, n.1, p.1-25, 1985.
- AROUCA, F. de O. **Uma contribuição ao estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada**. 2007, 162 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia- MG, Brasil, 2007.
- ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: applications, **IMA Journal of Applied Mathematics**, v.17, n. 2, p. 153-207, 1976b.
- ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development, **Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics**. v. 29, n.2, p. 209-244, 197a.
- BASSET, A. B. Dynamic simulation of sheared suspensions. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 179, p. 43-63, 1888 (also in A treatise on hydrodynamics: with numerous examples, 2 vol. Dover Publications, 1961. 592 p).
- BERN, P. A.; OORT, E. V.; EBELTOFT, M.; ZURDO, C.; ZAMORA, M. SLATER, K. S. Barite sag: Measurement, modelling and management. **Society of Petroleum Engineers**, 1998.
- BIAN J.; WANG H.; XIAO C.; ZHANG D. An experimental study on the flocculating settling of unclassified tailings. **PLoS ONE** 13(9), p. 1-19, 2018.
- BOSCARINO, S.; BÜRGER, R.; MULET, P.; RUSSO, G.; VILLADA, L, M. On linearly implicit IMEX Runge-Kutta methods for degenerate convection-diffusion problems modeling polydisperse sedimentation. **Bull Braz Math Soc**, v. 47, n. 1, 2016.
- BÜRGER, R; WENDLAND, W. Sedimentation and suspension flows: Historical perspective and some recent developments. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 41, n. 2, p. 101-116, 2001.
- CREMASCO, M. A. **Operações unitárias em sistemas particulados e fluidodinâmicos**. 2nd ed. São Paulo: Blucher, 2014, 423 p.
- DEMIRAY, H. A. A continuum theory of chemical Reacting Mixtures of fluids and solids. **International Journal of Engineering Mathematics**, v. 19, n. 2, p. 253-68, 1981.
- DIEHL, S. Estimation of the batch-settling flux function for an ideal suspension from only two experiments. **Chemical Engineering Science**, v. 62, p. 4589-4601, 2007.

FITCH, B. Kynch theory and compression zones. **AIChE Journal**, v. 29, n. 2, p. 229-252, 1983.

FRANÇA, S. C. A.; CASQUEIRA, R. G.. Ensaio de sedimentação. IN: **Tratamento de Minérios: práticas laboratoriais**. Rio de Janeiro: CETEM/MCTI, 2007. p. 393-408.

FONT, R. Compression zone effect in batch sedimentation. **AIChE Journal**, v. 34, n. 2, p. 229-252, 1988.

GAJO, A.; CECINATO, F.; LORETZ, B. Deformable Porous Media Saturated by Three Immiscible Fluids: Constitutive Modelling and Simulations of Injection and Imbibition Tests. **Transp Porous Med.** v. 116, p. 19–51, 2016.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M.; TRAPP, J. A. thermodynamics for a continuum with internal constraints. **International Journal of Engineering Science**, v.8, n.11, p.891-908, 1970.

HANSON, P. M.; JR, T. K. T.; RACHAL, G.; ZAMORA, M. Investigation of barite sag in weighted drilling fluids in highly deviated wells. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, p.23-26, 1990.

HERNANDO, L.; OMARI, A.; REUNGOAT, D. Experimental study of sedimentation of concentrated mono-disperse suspensions: Determination of sedimentation modes. **Powder Technology**, v. 258, p. 265–271, 2014.

JIN, C.; ZHAO, W.; NORMANI, S.; ZHAO, P.; EMELKO, M. Synergies of media surface roughness and ionic strength on particle deposition during filtration. **Water Research**. v.114 286-295, 2017.

KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. **Transactions of the Faraday Society**, v. 48, p. 166-176, 1952.

LANDMAN, K. A.; WHITE, L. R. Solid/liquid separation of flocculated suspensions. **Advances in Colloid and Interface Science**, v.1, p. 175-246, 1994.

LIBÓRIO, D. O. **Construção de uma base de informações para a diferença de pressões arbitrarias em uma suspensão particulada**. 2016. 75 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, Aracaju-SE, Brasil, 2016.

LIRA, J. R. **Estudo dos parâmetros que influenciam a floculação na sedimentação contínua**. 2010, 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia- MG, Brasil, 2010.

LIU, L.; LU, H.; YANG, J.; PENG, T.; TIAN, X. Numerical Study of the Motion of a Freely Falling Sphere in Fluid. **Proceedings of the Twenty-seventh (2017) International Ocean and Polar Engineering Conference**, San Francisco, CA, USA, June 25-30, 2017.

MADHI, R. B.; MOHAMMED, H. A.; MUNISAMY, K. M.; SAEID, N. H. Review of convection heat transfer and fluid flow in porous media with nanofluid. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 41, p. 715-734, 2015.

MASSARANI, G. **Fluidodinâmica em sistemas particulados**. 2 ed. E-Papers, Rio de Janeiro, 2002. 152 p.

MEDEIROS, V. D. V. **Estabelecimento de uma base de informações para a parte arbitrária da força de interação em uma suspensão particulada**. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão-SE, Brasil, 2016.

MEHRABIAN, S.; ACOSTA, E.; BUSSMAN, M. Oil-particle separation in a falling sphere configuration: Effect of viscosity ratio & interfacial tension. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 98, p. 190-127, 2017.

MENDES, H. U. S.; SILVA, A. S. 2018. Um estudo sobre função porosidade da região de compactação no movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta. In: III CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO, 1., 2018, Salvador. **Anais do III CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO**, Salvador: Realize, 2018, p 1-8.

NGUYEN, T.; MISKA, S.; YU, M.; TAKACH, N. Predicting dynamic barite sag in newtonian oil based drilling fluids. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 2009.

OMLAND, T. H.; HODNE, H.; SAASEN, A.; MJØLHUS S.; AMUNDSEN, P. A. Drilling Fluid Weight Material Sedimentation—Sedimentation of Suspensions. **Petroleum Science and Technology**, v.31, n. 18, p.1908-1915, 2013.

OMLAND, T. H.; SAASEN, A.; VAN DER ZWAAG, C.; AMUNDSEN, P. A. *The Effect of Weighting Material Sag on Drilling Operation Efficiency. Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition. 30 October-1 November, Jakarta, Indonesia. 2007.*

OLATUNJI, O. N.; DU, J.; HINTZ, W.; TOMAS, J. Application of particle sedimentation analysis in sterically-stabilized TiO₂ particles stability assessment. **Advanced Powder Technology**, v. 27, n. 4, 2016.

RIBEIRO JÚNIOR, J. M. **Modelagem e simulação de sólidos adensantes em fluidos de perfuração**. 2016. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2016.

ROCHA, L. A. S.; AZEVEDO, C. T. de. **Projetos de Poços de Petróleo – Geopressões e Assentamento de Colunas de Revestimento**. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2009. 561 p.

SAASEN, A.; LIU, D.; MARKEN, C. D. Prediction of barite sag potential of drilling fluids from rheological measurements. **The Society of Petroleum Engineers**, 1995.

SILVA, K. C. da; SILVA, I. de J. da.; CALÇADA, L. A.; SCHEID, C. M. The effect of previous sedimentation on the filtration and mudcake properties of Newtonian and non-Newtonian

fluids. **Powder Technology**, 2019.

SILVA, A. S.; JESUS, E. S. Queda transiente de uma partícula esférica em num fluido viscoso: Transformação da equação íntegro-diferencial em uma equação diferencial. In: XXXV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 3., 2014, Natal. **Anais do XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**. São Carlos: SBMAC, 2015. p 1-7.

SILVA, A. S.; JESUS, E.; PAGANO, R. L.; MENESES, L. D. M.; ROCHA C. P. S. Equações do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade. **Scientia Plena**, v. 9, n. 11, p. 114201-1, 2013.

SILVA, A. S. Sobre Meio Poroso com Restrição de Incompressibilidade. In: XVIII CONGRESSO NACIONAL DE SISTEMAS PARTICULADOS, 1990, Nova Friburgo. **Anais do XVIII CONGRESSO NACIONAL DE SISTEMAS PARTICULADOS**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990.

SILVA, A. S. **Um modelo matemático para a sedimentação em batelada pelo uso da teoria de misturas**. 1985. 90 f. Tese (Doutorado em Engenharia Química) COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 90p.

SILVA TELLES, A. Considerações sobre as equações do movimento em sistemas polifásicos. In: XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS, 1., 1993, Ouro Preto. **Anais do XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS PARTICULADOS**. Ouro Preto.

SOARES, A. A; CAMELO, L; ANDRADE, M. A. P. M. Study of the motion a vertically falling sphere in a viscous fluid. **European Jornal Physics**, v.33, n.5, p. 1053-1062, 2012.

TILLER, F.M.; CHEN, W. Limiting Operation Condition for Continous Thickeners. **Chemical Engineering Science**, v. 43, n. 7, p. 1695-1704, 1988.

TILLER, F. M.; KHATIB, Z. The theory of sediment volumes of compressible, particulate structures. **Journal of Colloid and Interface Science**, v. 100, p 55-67, 1984.

TILLER, F. M. Revision of Kynch sedimentation theory. **AIChE Journal**. V. 27, p. 823-829, 1981.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 2nd ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001, 267 p.

TORFS, E; BALEMANS, S; LOCATELLI, F; DIEHL, S; BÜRGER, R; LAURENT, J; FRANÇOIS, P; NOPENS, I. On constitutive functions for hindered settling velocity in 1-D settler models: Selection of appropriate model structure. **Water Research**, v.110, p. 38-47, 2017.

WEI, C.; MURALEETHARAN, K. K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: II. Lagrangian description and variational structure. **Int. J. Eng. Sci.**, vol. 40, p. 1835–1854, 2002.

ZAMORA, M.; BELL, R. Improved wellsite test for monitoring barite sag. *AADE Drilling Fluids Technical Conference*. Houston, Texas, USA, 2004.

APÊNDICE A

Este apêndice apresenta o roteiro de cálculo para encontrar os valores de φ_0 , V_0 , k , L_0 , ε_∞ e ε_{mf} que ajustam a função porosidade (3.56) para a região de compactação, de modo a compatibilizar todo o movimento.

O primeiro passo é realizar o cálculo para o valor numérico da porosidade no ponto de encontro das interfaces, utilizando a equação (3.42), para $x = x_c$ e $t = t_c$:

$$\varepsilon^- = 1 - (1 - \varepsilon_0) \left[\frac{1}{1 - \Delta(w_0 t_c - x_c)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (3.42)$$

Após isto, se atribui um chute inicial para φ_0 . Este valor de φ_0 é aplicado na equação (3.63):

$$V_0 = 2\varphi_0 \quad kx_c = \varphi_0 \ln(kt_c + 1) \quad (3.63)$$

Assim, tem-se os valores de V_0 e k . Com estes valores é possível calcular V_0 , por meio da equação (3.54):

$$L_0 = \frac{V_0}{4k} \quad (3.54)$$

Com estes valores, calcula-se E_{1c} por meio da equação (3.66) e E_{2c} e r_0 por meio da equação (3.67), para $x = x_c$ e $t = t_c$:

$$E_{1c} = r_0(\exp(-3kt_c)) \left(\exp\left(\frac{x_c}{L_0}\right) - 1 \right) \quad (3.66)$$

$$E_{2c} = \frac{r_0}{4} \left(\exp\left(\frac{4x_c}{L_0}\right) - 1 \right) \quad , \quad r_0 = \frac{L_0}{H} \quad (3.67)$$

Também é possível o cálculo de E_{2f} por meio da equação (3.67), para $x = x_f$:

$$E_{2f} = \frac{r_0}{4} \left(\exp\left(\frac{4x_f}{L_0}\right) - 1 \right) \quad (3.67)$$

Calcula-se r_c e r_f , através das equações (3.76) e (3.77), respectivamente:

$$r_c = \frac{x_c}{H} \quad (3.76)$$

$$r_f = \frac{x_f}{H} \quad (3.77)$$

Assim, tem-se α_f e α_0 , por meio das equações (3.74) e (3.75):

$$\alpha_f = \frac{r_c - E_{2c} + (E_{2f} - r_f)(1 - E_{1c})}{E_{1c} - E_{2c} + E_{2f}(1 - E_{1c})} \quad (3.74)$$

$$\alpha_0 = r_f - (1 - \alpha_f)E_{2f} \quad (3.75)$$

E é possível calcular ε_∞ e ε_{mf} , através das equações (3.78) e (3.79):

$$\varepsilon_\infty = 1 - \frac{1 - \varepsilon_0}{\alpha_0} \quad (3.78)$$

$$\varepsilon_{mf} = 1 - (1 - \varepsilon_0) \frac{\alpha_f}{\alpha_0} \quad (3.79)$$

Por último, com estes valores de ε_{mf} e ε_∞ , calcula-se a porosidade para a região de compactação, utilizando as equações (3.54), (3.56) e (3.57), que para $x = x_c$ e $t = t_c$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon(x_c, t_c) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf}) \exp(-3kt_c) \exp\left(\frac{x_c}{L_0}\right) + \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \exp\left(\frac{4x_c}{L_0}\right)$$

Se a porosidade obtida pela equação acima tiver o mesmo valor numérico que a porosidade na região de compactação no ponto de encontro das interfaces, o chute inicial de φ_0 produziu valores de V_0 , k , L_0 , ε_∞ e ε_{mf} que compatibilizaram o movimento. Caso isto não ocorra, é necessário atribuir um novo φ_0 e repetir os cálculos.