



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Um Estudo sobre Soluções Brandas para as Equações  
de Navier-Stokes e Quase-geostrófica Fracionárias

Natielle dos Santos Costa

SÃO CRISTÓVÃO – SE  
NOVEMBRO DE 2022

Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Um Estudo sobre Soluções Brandas para as Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica Fracionárias

por

Natielle dos Santos Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de  
Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Cristóvão – SE  
Novembro de 2022

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

C837e Costa, Natielle dos Santos  
Um estudo sobre soluções brandas para as equações de Navier-Stokes e Quase-Geostrófica fracionárias / Natielle dos Santos Costa ; orientador Wilberclay Gonçalves Melo. – São Cristóvão, SE, 2022.  
140 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Matemática - Estudo ensino. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Sobolev, Espaço de. 4. Equações. I. Melo, Wilberclay Gonçalves, orient. II. Título.

CDU 517.9



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Um Estudo sobre Soluções Brandas para as Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica Fracionárias**

*por*

*Natielle dos Santos Costa*

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS  
Orientador

Prof. Dr. Arlucio da Cruz Viana - UFS  
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz - UFPE  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 25 de Novembro de 2022

*À minha família.*

# Agradecimentos

É preciso lembrar daqueles que estiveram comigo. Por isso, agradeço:

- Ao meu bom Deus, que é muito maior que qualquer instituição!
- À minha mãe Ivaneide, meu pai Valter e meus irmãos Gabriel e Mikael, por toda ajuda!
- À minha vó Josina (em memória), que me ensinou uma profissão.
- A minha tia Iran, por ter me incentivado a ir cada vez mais longe. Tem muito da senhora em mim, obrigada tia!
- À família que eu escolhi: meu esposo Wil e nosso filho de patas Richard. Meus companheiros de vida e de ninho. Meu amor por vocês é imensurável.
- À minha irmã da matemática Liliane, que esteve comigo nos melhores e piores momentos nesses seis anos de universidade. Lili, você é a própria definição de amizade. Te amo.
- Aos meus amigos queridos: Stenio, Nathalia e Marquinhos. Nossos encontros de muita pizza e baralho são impagáveis. Stenio, você é raridade!
- Ao meu orientador Wilberclay, por ter aceito novamente o desafio (nós sabemos!) de me orientar.
- Aos professores Arlúcio, Felipe Wergete e Gerson por aceitarem o convite para avaliar este trabalho.
- Aos meus professores da Universidade Federal de Sergipe, Paulo Rabelo e Gerson. Obrigada por cada conversa, por cada risada.
- Aos meus professores do ensino básico: Genivaldo, Maria José, Tereza e Silvânia. Obrigada por todos os ensinamentos, motivação e cuidado comigo.
- A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo incentivo e financiamento deste mestrado (bolsa 88887.620886/2021-00).
- Por fim, gostaria de agradecer a cada movimento social, que busca igualdade de raça, classe social e gênero (em sua ampla diversidade), por garantir que filhos de pedreiro e merendeira, assim como eu, tenham a oportunidade de ingressar numa universidade.

É pelo pobre, pelo preto, pelo periférico, pelo favelado, pela comunidade LGBTQIA+ e por tantas outras minorias, que a luta continua.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos como estabelecer a existência e unicidade de soluções brandas globais no tempo para as Equações Quase-geostrófica 2D e de Navier-Stokes 3D com dissipação fracionária crítica em Espaços de Sobolev-Gevrey e Lei-Lin-Gevrey, respectivamente. Além disso, mostramos como obter algumas taxas de decaimento para o caso quase-geostrófico e soluções brandas locais no tempo para o sistema de Navier-Stokes com dissipação fracionária subcrítica, nestes mesmos espaços citados previamente. É importante frisar que as técnicas aplicadas nesta dissertação estão relacionadas à Análise de Fourier, à aplicação do Teorema do Ponto Fixo e do comportamento das soluções para a Equação do Calor associada a estes problemas.

**Palavras-chave:** Equações de Navier-Stokes; Equação Quase-geostrófica; Existência de soluções; Analiticidade de soluções; Decaimento de soluções; Espaços de Lei-Lin-Gevrey; Espaços de Sobolev-Gevrey.

# Abstract

This work studies the existence of a unique global in time mild solution for the 2D Quasi-geostrophic and 3D Navier-Stokes equations with critical fractional dissipation in Sobolev-Gevrey and Lei-Lin-Gevrey spaces, respectively. Furthermore, we establish some decay rates for the quasi-geostrophic case and local in time mild solutions for the Navier-Stokes system with subcritical fractional dissipation, in these same spaces cited previously. It is important to point out that the techniques applied in this research are related to Fourier Analysis, the use of Fixed Point Theorem and the behavior of the solutions for the Heat equation associated to these problems.

**Keywords:** Navier-Stokes equations; Quasi-geostrophic equation; Existence of solutions; Analyticity of solutions; Decay rates; Lei-Lin-Gevrey spaces; Sobolev-Gevrey spaces.

# Sumário

|                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Introdução</b>                                               | <b>1</b>   |
| <b>1 Definições e Resultados Básicos</b>                        | <b>9</b>   |
| 1.1 Terminologias e Notações . . . . .                          | 9          |
| 1.2 Espaços de Lebesgue $L^p$ . . . . .                         | 12         |
| 1.3 A Transformada de Fourier . . . . .                         | 17         |
| 1.4 Espaços de Sobolev-Gevrey e Lei-Lin-Gevrey . . . . .        | 22         |
| <b>2 Resultados Introdutórios</b>                               | <b>26</b>  |
| 2.1 Resultados Preliminares para o Capítulo 3 . . . . .         | 26         |
| 2.2 Resultados Preliminares para o Capítulo 4 . . . . .         | 43         |
| <b>3 Equação Quase-geostrófica em Espaços de Sobolev-Gevrey</b> | <b>58</b>  |
| 3.1 Soluções Brandas Globais e Analíticas . . . . .             | 58         |
| 3.2 Decaimento de Soluções . . . . .                            | 84         |
| <b>4 Equações de Navier-Stokes em Espaços de Lei-Lin-Gevrey</b> | <b>107</b> |
| 4.1 Soluções Brandas Globais . . . . .                          | 108        |
| 4.2 Soluções Brandas Locais . . . . .                           | 117        |



# Introdução

O estudo do comportamento dos fluidos (estes podem ser entendidos como substâncias capazes de escoar e que podem ser deformadas) é de fato uma teoria muito antiga, sendo que os primeiros relatos de estudos em Mecânica dos Fluidos remetem a Arquimedes (287-212 a.C.). Com o decorrer dos anos, muitos outros trabalhos surgiram nesta mesma área e em áreas afins (por exemplo, Engenharias Civil e Aeronáutica). Um grande desafio para a Matemática e para a Física moderna é descrever a trajetória das moléculas de um certo fluido, levando em conta suas características específicas.

A principal dificuldade em analisar ou prever o “caminho” descrito por um fluido deve-se aos fenômenos caóticos que podem surgir ao longo deste percurso, a estes fenômenos damos o nome turbulência. Observe, por exemplo, o vapor saindo de uma xícara de café (ou qualquer outro líquido aquecido). A trajetória desenhada no ar pelas moléculas de água, ora parecem seguir um padrão formado por pequenas ondas até desaparecerem, ora formam redemoinhos, dividem-se, novamente se juntam, chocam-se e mais uma série de movimentos estranhos acontecem. As características de cada fluido podem (e, em geral, devem) interferir na maneira como a matéria se desloca num determinado espaço, no decorrer de um certo intervalo de tempo. Algumas destas características são: viscosidade, sistema molecular ordenado ou não ordenado (um gás é um exemplo de matéria com sistema molecular não ordenado), densidade, capacidade de expansão ou compressão, escoamento, propriedades térmicas, entre outras.

Com o objetivo de ser mais preciso, uma das abordagens para descrever a trajetória de um fluido foi dada pelo matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813). A teoria de Lagrange defende, a grosso modo, que um caminho para modelar tal percurso é estudar os “pedaços” do fluido (substancialmente pequenos, mas grandes o suficiente para manter as propriedades deste mesmo), ou ainda, cada partícula individualmente, de modo a acompa-

nhar e descrever a curva que cada partícula “desenharia” na matéria. Desse modo, o caminho realizado por uma partícula seria modelado por uma função que depende somente do tempo. A reunião dessas observações, isto é, varrendo todas as partículas ou “pedaços” do fluido, definiria a trajetória da matéria como um todo. Tal processo, apesar de parecer exaustivo é utilizado em algumas situações práticas como, por exemplo, a migração de pássaros e rastreamento de veículos por satélites.

Uma outra teoria, desenvolvida na primeira metade do século XVIII pelo matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783), apresenta uma outra forma de descrever tais movimentos. Imagine um fluxo de água em um rio. É fácil perceber que em pontos distintos deste mesmo, a velocidade do escoamento da água é diferente. Assim, Euler propõe determinar em cada ponto do espaço (ocupado pelo fluido), a direção, o sentido e a velocidade da água, obtendo assim, um campo vetorial, ou melhor, um campo velocidade do fluido. Nesta abordagem, a trajetória do fluido é modelada por uma função que depende não somente do tempo, mas também do espaço.

Euler, portanto, propôs o seguinte modelo:

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

onde  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  são as variáveis de tempo e espaço, respectivamente. Além disso, a aplicação  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$  define o campo velocidade comentado anteriormente,  $p(x, t)$  é a pressão hidrostática sofrida pela matéria e  $f$  representa uma força externa exercida sobre o fluido como, por exemplo, a gravidade. Perceba que o sistema acima [\(1\)](#) trata-se de um conjunto com  $n$  equações. Quando adicionamos a estas mesmas equações, a hipótese  $\nabla \cdot u = 0$  ( $u$  é dito ser livre de divergente) para todo  $t$  positivo, restringimos sua modelagem a fluidos incompressíveis (a relação entre incompressibilidade e o divergente do campo velocidade, surge do fato que, esta mesma é equivalente a densidade do fluido ser constante (ver [\[42\]](#) para mais detalhes)). É importante frisar que, o modelo apresentado por Euler foi obtido à luz das leis de Newton, dos princípios de conservação de energia e das propriedades do fluido, além de muitos argumentos cinemáticos. Todavia, este modelo projetado por Euler abrange exclusivamente os chamados fluidos perfeitos, ou ainda, fluidos invíscidos, ou simplesmente fluidos com viscosidade nula. A viscosidade de um fluido, pode ser vista como sua resistência à deformação, ou de outra maneira, como a capacidade das partículas deslizarem entre si (para um melhor entendimento físico, ver [\[42\]](#)). Com isso, tal sistema não poderia descrever um fluido realístico, visto que toda matéria (real) possui

viscosidade positiva. No entanto, o modelo visto em [1] representa uma boa aproximação para o comportamento de fluidos com viscosidade muito baixa como, por exemplo, ar e água.

Adiante, por continuar o trabalho de Euler, em 1820, na École des Ponts et Chaussées, o matemático e engenheiro Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) começou a estudar a matemática envolvida neste movimento, e já nos dois anos decorrentes descreveu as, hoje denominadas, Equações de Navier-Stokes. O trabalho deste francês tinha um raciocínio imperfeito do ponto de vista matemático. Porém, as equações encontradas descreviam corretamente este movimento. Esta imprecisão na derivação do modelo inspirou o matemático e físico irlandês George Gabriel Stokes (1819-1903) a escrever de forma precisa como encontrar as famosas Equações de Navier-Stokes fornecidas a seguir:

$$u_t - \gamma \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2)$$

No sistema acima,  $\gamma$  é uma constante positiva e representa a viscosidade do fluido. As equações de Navier-Stokes, assim como as de Euler e Lagrange, preocupam-se em modelar o comportamento dos fluidos; mas, agora, por adicionar o termo  $-\gamma \Delta u$ , podemos entender como se comportam as moléculas de fluidos com viscosidade alta tais como: mel e petróleo. Assim, como na abordagem de Euler, adicionar a hipótese  $\nabla \cdot u = 0$ , para todo  $t > 0$ , é considerar matematicamente que o fluido é incompressível.

O modelo descrito pelas Equações de Navier-Stokes [2] é considerado pela Física como um modelo ideal para descrever o comportamento dos fluidos. Entretanto, do ponto de vista matemático, encontrar uma solução para o sistema proposto não é nada simples. Na verdade, ainda não foi possível esclarecer se existe ou não uma solução, definida em todo o tempo, para tal problema sob certas condições. Alguns trabalhos, no entanto, surgiram no decorrer do último século. Em 1934, o matemático francês Jean Leray (1906-1998) provou a existência de soluções fracas para o sistema [2], considerando a hipótese de incompressibilidade, em dimensão três (ver [26] para mais informações). Adiante, mais precisamente, na década de 60, a matemática russa Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) demonstrou que em dimensão dois as equações de Navier-Stokes incompressíveis possuem solução suave global (ver [24] para mais detalhes).

O Instituto de Matemática Clay (Clay Mathematics Institute - CMI) estabeleceu um prêmio de um milhão de dólares para aquele que garantir a existência e suavidade ou a não

existência de soluções globais no tempo (isto é, para todo  $t \geq 0$ ) do seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t - \gamma \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0; \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0; \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3)$$

Neste caso, exige-se ainda que o dado inicial  $u_0$  seja também livre de divergente. O problema acima é conhecido como o problema do milênio das Equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis e está em aberto até a atual data. Na literatura, encontramos resultados envolvendo casos particulares para este problema em aberto. Estas manipulações mais simples já garantem a criação de projetos de aeronaves, cascos de navios e um estudo mais detalhado sobre o acúmulo de resíduos que entopem as veias e artérias. O desconhecimento de uma solução global para o sistema tridimensional em questão nos conduz a um estudo computacional conhecido como Simulação de Sistemas Contínuos. A descoberta desta solução acarretará grandes desenvolvimentos nas Engenharias Aeronáutica e Naval, e também disponibilizará outras maneiras de combater problemas cardíacos.

Se considerarmos que nenhuma força externa está sendo exercida sobre um fluido de viscosidade um no espaço  $\mathbb{R}^3$  e introduzirmos em (2) o conceito do Laplaciano fracionário (generalizando o Laplaciano usual), encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\alpha > 0$ . A motivação para substituir o Laplaciano usual em (2) pelo Laplaciano fracionário, como em (4), advém do fato de que este último é capaz de descrever interações de longa distância e não somente entre partículas vizinhas (para uma melhor compreensão, ver [18]). O sistema (4) é também conhecido como Equações de Navier-Stokes Fracionárias.

Quando consideramos um campo magnético externo agindo sobre o fluido, obtemos um sistema ainda proveniente das Equações de Navier-Stokes (4) unido às Equações de Maxwell,

chamado Magnetohidrodinâmico, ou simplesmente MHD, descrito abaixo:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u + (u \cdot \nabla)u + \nabla(p + |b|^2) = (b \cdot \nabla)b, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0; \\ b_t + (-\Delta)^\beta b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0; \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0; \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), b(\cdot, 0) = b_0(\cdot), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (5)$$

onde  $b(x, t) = (b_1(x, t), b_2(x, t), b_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$  representa o campo magnético, com  $\alpha$  e  $\beta > 0$ . É importante dizer que no sistema acima (5), assumimos que a viscosidade cinemática, a constante magnética de Reynolds são iguais a um, por simplicidade matemática. Fisicamente, estas equações modelam o comportamento de fluidos incompressíveis e condutores de energia (com a influência de um campo elétrico) como, por exemplo, plasmas, metais líquidos e eletrólitos.

Por considerar fluidos que apresentam alta velocidade de rotação, um outro sistema derivado das Equações de Navier-Stokes (4) é o que segue:

$$\begin{cases} \theta_t + (-\Delta)^\alpha \theta + u_\theta \cdot \nabla \theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0; \\ \theta(\cdot, 0) = \theta_0(\cdot), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\theta$  é a temperatura potencial e  $u_\theta$ , definido por

$$u_\theta(x, t) = (D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(x, t), -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(x, t)),$$

representa a velocidade do fluido. Tal sistema é fortemente utilizado para prever o comportamento de fluidos geofísicos (invólucros fluidos do planeta Terra tais como: a atmosfera, os oceanos e o fluido ionizado que compõe o núcleo externo da Terra ou de outros planetas e estrelas) e é denominado Equação Quase-geostrófica para fluidos geofísicos.

É importante ressaltar que os sistemas apresentados anteriormente são utilizados na cinemática, na meteorologia, na oceanografia e muitas outras áreas da ciência.

Conhecido alguns dos principais sistemas da Mecânica dos Fluidos, esta dissertação apresenta uma análise sobre as possíveis soluções das Equações de Navier-Stokes (4) e da Equação Quase-geostrófica (6) nos espaços de Sobolev-Gevrey  $\dot{H}_{a,\sigma}^s$  e de Lei-Lin-Gevrey  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s$ , respectivamente, ambas com expoente do Laplaciano fracionário de ordem  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

O principal objetivo desta dissertação é, inicialmente, estudar a existência e unicidade de soluções brandas (ver definição [3.1](#)) para o sistema Quase-Geostrófico [\(6\)](#) nos espaços de Sobolev-Gevrey homogêneos  $\dot{H}_{a,\sigma}^s$  (sobre determinadas hipóteses para  $s$ ,  $a$  e  $\sigma$ ), de modo a estabelecer sua analiticidade e, por fim, encontrar taxas de decaimento para a solução obtida em tempo infinito. Em seguida, propomos garantir a existência de soluções brandas, ver definições [4.2](#) e [4.1](#), locais (com dado inicial de tamanho arbitrário) e globais (com dado inicial pequeno) para o sistema de Navier-Stokes [\(4\)](#) nos espaços de Lei-Lin-Gevrey  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s$  (sobre determinadas hipóteses para  $s$ ,  $a$ ,  $\sigma$  e da ordem do Laplaciano fracionário).

É relevante citar alguns trabalhos recentemente publicados na literatura que nos motivaram a escrever esta dissertação, juntamente com os artigos [\[36–38\]](#). Começamos ressaltando que, no Capítulo 3, trabalhamos assumindo que a ordem fracionária do Laplaciano é dada por  $\alpha = \frac{1}{2}$  na equação Quase-geostrófica. Esta suposição foi levada em consideração por causa da descoberta do Lema [2.6](#). Mais especificamente, W. G. Melo e T. S. R. Santos [\[33\]](#) (ver também o artigo primordial [\[1\]](#)) provaram resultados similares aos obtidos no Capítulo 3; porém, a técnica aplicada utiliza o Lema [2.7](#), o qual inviabiliza o caso  $\alpha = \frac{1}{2}$ , e estabelece o estudo de soluções para equações semelhantes (matematicamente) às estudadas neste texto por tomar  $\alpha > \frac{1}{2}$  (denominado caso subcrítico se  $\alpha$  não ultrapassa 1). Por isso, decidimos avançar na pesquisa considerando este caso  $\alpha = \frac{1}{2}$  (chamado caso crítico). Vale informar que os espaços de Sobolev-Gevrey adotados nesta dissertação tem relação estreita com a nossa leitura dos seguintes trabalhos: [\[2, 3, 5, 6, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 28, 29, 31–33, 37–40\]](#).

O Capítulo 4 foi motivado por J. Wu [\[47\]](#) (referenciamos também [\[1–8, 12, 13, 16, 20, 21, 23, 27–36, 40, 43, 46–48\]](#)). Este trabalho prova que as equações de Navier-Stokes fracionárias admite solução clássica global se  $u_0$  é suficientemente suave e  $\alpha \geq \frac{5}{4}$ . Precisamente, [\[47\]](#) considera que  $\alpha \geq \frac{5}{4}$ ,  $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ , com  $s > 2\alpha$ , para estabelecer uma solução para este mesmo sistema. Desta forma, decidimos substituir estes espaços de Sobolev usuais pelos espaços de Lei-Lin-Gevrey e verificar quais são as condições que devemos considerar para o dado inicial com o objetivo de obter soluções globais e locais para as Equações de Navier-Stokes com ordem fracionária  $\alpha = \frac{1}{2}$  (para o caso global) e  $\alpha > \frac{1}{2}$  (para o caso local). Vale lembrar que tais espaços de Lei-Lin-Gevrey foram estudados, primeiramente, por Z. Lei e F. Lin [\[23\]](#) em 2011. Através deste artigo, alguns outros trabalhos vêm sendo publicados na literatura (ver [\[1, 4, 7–9, 12, 13, 23, 30, 34–36, 43, 46, 48\]](#) e referências inclusas).

Permita-nos, agora, descrever o que foi feito nos quatro capítulos deste texto.

No primeiro capítulo, reunimos conceitos essenciais para a manipulação das equações trabalhadas. Destacamos as definições dos operadores Laplacianos usual e fracionário, potência e derivada multi-índice. Além disso, reforçamos as ideias básicas da Análise Funcional e da Medida e Integração; mais especificamente, acerca dos espaços de Lebesgue tais como: as desigualdades de Hölder, Minkowski e duas de Young. Em seguida, introduzimos as definições da transformada de Fourier, juntamente com algumas de suas propriedades mais elementares. Deixe-nos ainda frisar que, nesse capítulo, apresentamos a identidade de Plancherel e as definições dos espaços de Sobolev-Gevrey homogêneos e os espaços de Lei-Lin-Gevrey.

No segundo capítulo, fornecemos, em duas seções, resultados importantes sobre os dois sistemas de equações escolhidos para a nossa pesquisa, bem como sobre os espaços trabalhados. Veremos que  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$  e  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$  são espaços vetoriais normados completos sob determinadas condições para  $s$ ,  $a$  e  $\sigma$ . Vale destacar que todo esse capítulo é dedicado a informações que serão utilizadas nas demonstrações dos teoremas principais deste texto (ver Capítulos 3 e 4). Desse modo, serão apresentadas inclusões e desigualdades que nos auxiliam a atingir os objetivos aqui descritos. Permita-nos enfatizar um resultado primordial para a construção desta dissertação: o Teorema do Ponto Fixo (ver Teorema 2.1). Tal resultado, fornece condições suficientes para garantir a existência e unicidade de soluções brandas para as Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica. Ainda no segundo capítulo, realçamos uma informação que é frequentemente aplicada nas verificações dos resultados que introduzimos neste texto, a saber, a transformada do semigrupo do calor  $e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ . De forma mais detalhada, a transformada de Fourier de tal operador nos dará condições de manipular as equações, de modo a estabelecer a continuidade de certos operadores (ver demonstrações dos Teoremas 3.1, 3.2, 4.1 e 4.2).

O capítulo seguinte preocupa-se em garantir a existência de soluções brandas para a Equação Quase-geostrófica no espaço  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Esse capítulo, está dividido em duas seções, nas quais começamos a busca para estabelecer uma solução única  $\theta$  para este sistema, de maneira global no tempo (quando o dado inicial é suficientemente pequeno). Além disso, fornecemos critérios que caracterizam a analiticidade da aplicação  $\theta$ . Na segunda seção, nosso interesse é deduzir algumas taxas de decaimento para a solução obtida quando o tempo é arbitrariamente grande.

Estabelecida a existência de uma única solução para o sistema Quase-geostrófico, empenhamo-nos, no último capítulo desta dissertação, em garantir algo similar para as Equações de Navier-Stokes no espaço de Lei-Lin-Gevrey  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Para isso, preocupamos-nos em

concluir a existência de uma única solução branda global, considerando que o dado inicial é pequeno, e uma única solução branda local no tempo, assumindo que o dado inicial não precisa de pequenez, para este mesmo sistema.

Para finalizar esta introdução, gostaríamos de informar que esta dissertação serviu como base para a confecção de três artigos envolvendo os mesmos principais temas abordados neste texto. Desta forma, salientamos que os nossos resultados (ver [36–38]), aqui expostos, estão submetidos para publicação em jornais de grande circulação internacional e nacional.

# Capítulo 1

## Definições e Resultados Básicos

Este primeiro capítulo, objetiva descrever definições e resultados preliminares para o desenvolvimento do presente texto. Além disso, tal capítulo, está dividido em quatro seções, as quais estão organizadas da seguinte maneira: a seção inicial preocupa-se em listar definições e informações envolvendo as notações e aplicações básicas tais como: campos vetoriais, gradiente, produto tensorial, convolução, derivada multi-índice, divergente e o operador Laplaciano usual. A segunda seção fornece a definição dos espaços de Lebesgue, as desigualdades de Hölder, de Minkowski e Young, e os Teoremas da Mudança de Variáveis e de Fubini (além de propriedades significativas para o escopo deste trabalho). A seção seguinte aborda o operador transformada de Fourier e sua inversa, bem como suas principais características. Ademais, esta mesma seção apresenta o espaço de Schwartz, as distribuições temperadas, o operador Laplaciano fracionário, os Teoremas de Plancherel, a definição do semigrupo do calor e o projetor de Helmholtz, que serão fortemente utilizados no decorrer desta dissertação. Por fim, a última seção expõe as definições dos espaços em que busca-se as soluções para as equações abordadas neste contexto, a saber, os espaços de Lei-Lin-Gevrey e Sobolev-Gevrey homogêneos.

### 1.1 Terminologias e Notações

Nesta seção, estabelecemos as notações e os conceitos mais básicos que serão utilizados neste trabalho.

**Definição 1.1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Consideramos o espaço  $\mathbb{C}^n$  (ou também  $\mathbb{R}^n$ ) munido com o

produto interno padrão

$$x \cdot y := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n} \quad (1.1)$$

e a norma induzida por este mesmo produto como sendo

$$|x| := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \quad (1.2)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ . Este produto interno e esta norma satisfazem a seguinte desigualdade:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (1.3)$$

Esta é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vale enfatizar que (1.1), (1.2) e (1.3) são também verdadeiras para vetores de  $\mathbb{R}^n$ .

A seguir, determinamos como denotar os campos vetoriais do nosso trabalho. Em particular, relembremos a definição do campo gradiente.

**Definição 1.2.** Sejam  $n, m \in \mathbb{N}$ . Considere uma função  $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , isto é,

$$f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_m(x, t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Denotamos o campo gradiente de  $f$  por  $\nabla f$  e o definimos como

$$\nabla f = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m).$$

Aqui,  $\nabla f_j = (D_1 f_j, D_2 f_j, \dots, D_n f_j)$ , com  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $D_k$  a derivada parcial de ordem 1, com respeito à  $k$ -ésima coordenada, ou ainda,  $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

É importante frisar que, em alguns momentos deste texto, omitimos alguns (ou todos os) valores que os campos e as funções estão sendo avaliadas. Mais precisamente, escrevemos  $f$ ,  $f(x)$  ou  $f(t)$  para representar  $f(x, t)$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $n, m \in \mathbb{N}$ . Assuma que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função. O Laplaciano usual da função  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , o qual denotamos por  $\Delta f$ , é definido como

$$\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_m).$$

Aqui  $\Delta f_j = \sum_{k=1}^n D_k^2 f_j$  com  $j = 1, \dots, m$ .

Uma aplicação escalar bastante importante no nosso trabalho é conhecida como divergente. No caso das Equações de Navier-Stokes, esta será responsável por determinar se o fluido estudado é incompressível ou não.

**Definição 1.4.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Definimos o divergente de  $f$  por

$$\nabla \cdot f = \sum_{k=1}^n D_k f_k,$$

onde  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

Os termos não lineares das Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica apresentam uma notação que será precisamente descrita logo abaixo.

**Definição 1.5.** Seja  $n, k \in \mathbb{N}$ . Considere que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  são funções. A notação  $f \cdot \nabla g$  representa a seguinte soma:

$$\sum_{i=1}^n f_i D_i g,$$

onde  $f = (f_1, \dots, f_n)$  e  $g = (g_1, \dots, g_k)$ .

Abaixo estabelecemos o significado do produto tensorial que será utilizado no estudo da existência de soluções para as Equações de Navier-Stokes.

**Definição 1.6.** Seja  $n, k, m \in \mathbb{N}$ . Assuma  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções. Denotamos por  $f \otimes g$ , o produto tensorial de  $f$  por  $g$  da seguinte forma:

$$f \otimes g := (g_1 f, \dots, g_n f),$$

com  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  e  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Aqui,  $g_i f = (g_i f_1, \dots, g_i f_m)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Nesta dissertação também precisamos do conceito de convolução entre duas aplicações (ver [15, 19, 22] e referências inclusas para mais detalhes).

**Definição 1.7.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Admita que  $f$  e  $g$  são funções definidas sobre  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . A convolução de  $f$  e  $g$  é denotada por  $f * g$  e definida como

$$f * g(x) = \int_{\Omega} f(x - y) g(y) dy, \quad \forall x \in \Omega,$$

sempre que a integral acima existir.

Vejamos agora, as definições de potência e derivação multi-índice. Estas são relevantes para a definição dos espaços de Schwartz e para as propriedades da transformada de Fourier (ver [15, 19, 22] e referências inclusas para mais detalhes).

**Definição 1.8.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Chamamos de potência multi-índice o número real

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

A derivada multi-índice de  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  é dada por

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Para finalizar esta seção, gostaríamos de informar que as constantes que aparecem em todo trabalho apresentam sua dependência na própria notação. Por exemplo,  $C_{q,r}$  é uma constante que depende de  $q$  e  $r$ . Além disso, as constantes podem mudar seus valores linha a linha; porém, em alguns momentos, vão ser denotadas pela mesma representação.

Outras definições e notações básicas que não são muito utilizadas nesta dissertação são apresentadas no decorrer do texto ou estão determinadas nas referências citadas neste trabalho.

## 1.2 Espaços de Lebesgue $L^p$

Nesta seção, estamos empenhados em listar definições e resultados importantes sobre os espaços de Lebesgue  $L^p$  (ver [15, 19, 22] e referências inclusas para mais detalhes). Tais espaços gozam de propriedades que permitem o desenvolvimento deste texto e, portanto, são frequentemente utilizadas aqui. Alguns destes nos dão o suporte necessário para verificar desde resultados simples como, por exemplo, que os espaços  $(L^p; \|\cdot\|_{L^p})$  são, de fato, espaços vetoriais normados, a resultados mais sofisticados como a completude destes mesmos e os Teoremas da Mudança de Variáveis, das Coordenadas Polares e de Fubini. Vejamos inicialmente, sua definição e, em seguida, algumas de suas principais implicações.

**Definição 1.9.** Considere  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Para cada  $p$  satisfazendo  $1 \leq p < \infty$ , definimos  $L^p = L^p(X)$  o espaço de todas as funções  $f$  mensuráveis sobre  $X$  tais que

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Além disso,  $L^p$  é um espaço vetorial munido da seguinte norma:

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_X |f|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

O espaço das funções  $f$  mensuráveis sobre  $X$  tais que  $|f(x)| \leq c$  em quase toda parte de  $X$ , para alguma constante real  $c$ , é denotado por  $L^\infty = L^\infty(X)$ . Ademais,  $L^\infty$  é um espaço vetorial munido da norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0; |f(x)| \leq c \text{ em quase toda parte de } X\}. \quad (1.4)$$

Para mais informações sobre as normas definidas acima, ver [\[19\]](#).

É importante destacar que, em alguns momentos do nosso trabalho, omitimos o espaço de medida na notação da norma dos espaços de Lebesgue. Por exemplo, escrevemos  $\|\cdot\|_{L^p}$  ao invés de  $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ .

**Definição 1.10.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que uma função  $f$  definida em  $\Omega$ , um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R}^n$ , é localmente integrável em  $L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , se  $f$  for uma função mensurável e para qualquer compacto  $K \subseteq \Omega$ , tem-se que

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty. \quad (1.5)$$

Além disso, denotamos o espaço das funções  $f$  localmente integráveis por  $L^p_{loc}(\Omega)$ .

A definição a seguir, descreve o espaço  $L^p$  envolvendo uma variável temporal  $T$ .

**Definição 1.11.** Considere que  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço vetorial normado e  $T$  um número real positivo. O espaço  $L^p([0, T]; X)$ , ou por simplicidade,  $L^p_T(X)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , é o conjunto das funções mensuráveis  $f : [0, T] \rightarrow X$  de modo que a norma

$$\|f\|_{L^p([0, T]; X)} := \left[ \int_0^T \|f\|_X^p dt \right]^{1/p} \quad (1.6)$$

é finita. Analogamente, definimos  $L^\infty([0, T]; X) = L_T^\infty(X)$  o espaço das funções mensuráveis  $f : [0, T] \rightarrow X$  tais que  $\|f(t)\|$  é limitada em quase toda parte de  $[0, T]$ . Além disso, uma norma para este espaço é dada por

$$\|f\|_{L_T^\infty(X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|. \quad (1.7)$$

Em paralelo, definimos o conjunto  $C([0, T]; X) = C_T(X) = \{f : [0, T] \rightarrow X \text{ contínua}\}$  munido com a norma do supremo essencial  $\|\cdot\|_{L_T^\infty(X)}$ .

Os três resultados a seguir fazem parte da base da teoria dos espaços de Lebesgue  $L^p$ .

**Teorema 1.1** (Desigualdade de Hölder). *Assuma que  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ . Sejam  $p$  e  $q$  números reais tais que  $1 \leq p, q \leq \infty$  e  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Então,  $fg \in L^1$ . Além disso,*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.8)$$

*Demonstração.* Ver [19], p. 182. □

O próximo teorema refere-se a desigualdade triangular dos espaços de Lebesgue  $L^p$ .

**Teorema 1.2** (Desigualdade de Minkowski). *Considere  $p \in \mathbb{R}$  de modo que  $1 \leq p \leq \infty$  e  $f, g \in L^p$ . Então,  $f + g \in L^p$ . Além disso,*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \quad (1.9)$$

*Demonstração.* Ver [19], p. 183. □

Os Teorema 1.1 e 1.2 são consequências do seguinte resultado elementar.

**Teorema 1.3** (Desigualdade de Young). *Sejam  $a$  e  $b$  números reais não negativos e  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 < p, q < \infty$  e  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Então, verifica-se que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \quad (1.10)$$

*Demonstração.* Ver [19], p. 174. □

O resultado abaixo é também conhecido como desigualdade de Young. No entanto, este estabelece informações envolvendo a convolução de funções no espaço  $L^p$ .

**Teorema 1.4** (Desigualdade de Young para Convolução). *Sejam  $p$  e  $q$  números reais tais que  $1 \leq p, q \leq \infty$  e  $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Considere que  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ . Então,  $f * g \in L^r$ . Além disso,*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (1.11)$$

*Demonstração.* Ver [19], p. 240. □

Os próximos dois resultados dizem respeito a completude dos espaços de Lebesgue  $L^p$ .

**Teorema 1.5.** *Seja  $p$  um número real tal que  $1 \leq p \leq \infty$ . Então,  $L^p$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Ver [19], p. 183. □

Quando consideramos que  $p = 2$  no expoente dos espaços de Lebesgue  $L^p$ , obtemos um espaço de Hilbert. Mais precisamente, podemos escrever o seguinte resultado.

**Teorema 1.6.** *Considere que  $f$  e  $g$  estão em  $L^2$ . É verdade que*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_X f(x) \bar{g}(x) dx$$

*define um produto interno no espaço de Lebesgue  $L^2$ , o qual gera a norma  $\|\cdot\|_{L^2}$  definida previamente. Aqui  $\bar{g}$  representa o conjugado da função  $g$ . Neste caso, dizemos que  $L^2$  é um espaço de Hilbert.*

*Demonstração.* Ver [19], p. 183. □

O resultado a seguir fornece o enunciado do famoso Teorema da Mudança de Variáveis.

**Teorema 1.7** (Teorema da Mudança de Variáveis). *Considere  $\omega$  e  $\omega_1$  conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^m$  e  $\varphi : \omega \rightarrow \omega_1$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Seja  $A \subseteq \omega$ . Então, os seguintes itens são verdadeiros:*

- i) *Se  $A$  é um Boreliano (ver [19] para definição precisa) de  $\omega$ ,  $\varphi(A)$  é um Boreliano de  $\omega_1$ .*

ii) Se  $A \in \Lambda(\omega) = \{A \subseteq \omega : A \text{ é } \lambda\text{-mensurável}\}$ , então  $\varphi(A) \in \Lambda(\omega_1)$  e

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_A |\det \varphi'(x)| dx.$$

iii) Em particular, se  $A \in \Lambda(\omega)$  e  $\lambda(A) = 0$ , tem-se  $\lambda(\varphi(A)) = 0$ .

iv) Dados  $A \in \Lambda(A)$  e  $f : \varphi(A) \rightarrow [-\infty, +\infty], \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  uma função  $\lambda$ -mensurável. Então,  $f \circ \varphi$ , dada por  $f \circ \varphi(x) = f(\varphi(x))$ , definida sobre  $A$ , é também  $\lambda$ -mensurável. Ademais,  $f$  é integrável em relação a  $\lambda$  se, e somente se, a função  $x \mapsto |\det \varphi'(x)| f(\varphi(x))$  também o é. Neste caso,

$$\int_{\varphi(A)} f(y) dy = \int_A |\det \varphi'(x)| f(\varphi(x)) dx.$$

*Demonstração.* A demonstração desse resultado é obtida em [22], p. 193.  $\square$

Permita-nos enunciar o resultado que nos garante como resolver uma integral específica através de coordenadas polares.

**Teorema 1.8** (Teorema das Coordenadas Polares). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $|f|$  é integrável em  $\mathbb{R}^n$ . Então, a seguinte igualdade vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left( \int_{S_r[x_0]} f dS \right) dr,$$

onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $S_r[x_0] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$  é a esfera de centro  $x_0$  e raio  $r$ . Aqui a integral dentro dos parênteses acima está relacionada à integral de superfícies.

*Demonstração.* Para detalhes da verificação deste resultado, ver [19].  $\square$

Finalizamos esta seção com o Teorema de Fubini, o qual permite a permutação de integrais.

**Teorema 1.9** (Teorema de Fubini). *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espaços de Medida tais que  $\mu$  e  $\nu$  são medidas  $\sigma$ -finitas. Considere  $f \in L^1(\mu \times \nu)$ . Então,*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x, \cdot) d\nu d\mu = \int_Y \int_X f(\cdot, y) d\mu d\nu.$$

*Demonstração.* Para detalhes da verificação deste resultado, ver [15], p. 129.  $\square$

Alguns conceitos básicos que aparecem nesta seção como, por exemplo, Espaços de Medida, Borelianos ou Integração de Funções Mensuráveis, e outras informações relevantes sobre os espaços de Lebesgue podem ser obtidos nas seguintes referências: [15, 19, 22] e trabalhos inclusos.

### 1.3 A Transformada de Fourier

Com o objetivo de iniciarmos um breve estudo sobre a transformada de Fourier, introduzimos a noção de espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  (ver [19, 44] para mais detalhes). O estudo de tal espaço nos permitirá abordar o operador transformada como um isomorfismo e, consequentemente, obter propriedades sobre sua inversa. Vale ressaltar que, o dual destes mesmos espaços desenvolvem o significado dos espaços das distribuições temperadas  $\mathcal{S}'$ , os quais são considerados na busca por soluções brandas para as equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica.

**Definição 1.12.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Assuma que  $\nu, \beta$   $n$ -uplas em  $\mathbb{N}^n$ . Definimos a seminorma  $\|\cdot\|_{(\nu, \beta)}$  de uma função  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , por

$$\|f\|_{(\nu, \beta)} = \|x^\nu \partial_x^\beta f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x^\nu \partial_x^\beta f(x)|\}, \quad (1.12)$$

onde  $x^\nu$  é a potência fracionária de base  $x$  e expoente  $\nu$  e  $\partial_x^\beta f$  é a derivada multi-índice de  $f$ .

Estamos prontos para definir o espaço de Schwartz.

**Definição 1.13.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Assuma que  $\nu, \beta$   $n$ -uplas em  $\mathbb{N}^n$ . O conjunto  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , definido como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\nu, \beta)} < \infty, \nu, \beta \in \mathbb{N}^n\}, \quad (1.13)$$

é denominado espaço de Schwartz.

Estabelecida a definição do espaço de Schwartz, podemos definir a transformada de Fourier sobre estes mesmos.

**Definição 1.14.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere  $f$  uma função em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . A transformada de Fourier de  $f$  é a aplicação

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.14)$$

onde  $i$  representa a unidade imaginária dos números complexos.

É possível provar que  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mais é verdade: o resultado abaixo garante que o operador  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , além de linear, é invertível.

**Teorema 1.10.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere o operador, denominado transformada de Fourier,  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dado por  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ . Afirmamos que  $\mathcal{F}$  é bijetor, linear e contínuo. Além disso, sua inversa, denominada transformada de Fourier inversa, dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

*é também um operador (linear) contínuo.*

*Demonstração.* Para detalhes desta demonstração, ver [\[44\]](#). □

O próximo teorema estabelece algumas propriedades do operador transformada de Fourier.

**Teorema 1.11.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $\alpha$  uma  $n$ -upla de  $\mathbb{N}^n$ . Então, as seguintes informações são verdadeiras:*

- i)  $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi);$
- ii)  $\mathcal{F}(x^\alpha f(x))(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}(\xi);$
- iii)  $\int \widehat{f} g dx = \int f \widehat{g} dx;$
- iv)  $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f} \widehat{g};$
- v)  $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \widehat{f} * \widehat{g}.$

*Demonstração.* A prova destes itens são encontradas em [\[44\]](#). □

O próximo resultado associa as normas, e os produtos internos, do espaço  $L^2$  de uma aplicação com a da sua própria transformada de Fourier. Isto pode ser realizado devido ao fato de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ser denso em  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e por uma aplicação direta do Teorema da Representação de Riesz (ver [11, 19] para mais detalhes).

**Teorema 1.12** (Identidade de Plancherel). *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Assuma  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Então,*

$$(2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

*Mais geralmente, se  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , é verdade que*

$$(2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Encontramos a demonstração deste teorema em [44]. □

Vejamos, agora, a definição de uma distribuição temperada (ver [19, 44] e referências inclusas para mais detalhes).

**Definição 1.15.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que uma aplicação  $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma distribuição temperada se  $\Psi$  é linear e contínua. Além disso, denotamos por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  o espaço das distribuições temperadas.*

A seguir, mostramos como estender o conceito de transformada de Fourier para o contexto das distribuições temperadas.

**Definição 1.16.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Definimos a transformada de Fourier de  $\Psi$  por*

$$\mathcal{F}(\Psi)(f) = \hat{\Psi}(f) = \Psi(\hat{f}), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.16)$$

É também possível demonstrar que  $\mathcal{F}(\Psi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Mais é verdade: o resultado a seguir informa que o operador  $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , além de linear, é invertível.

**Teorema 1.13.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere o operador, denominado transformada de Fourier,  $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , dado por  $\mathcal{F}(\Psi) = \hat{\Psi}$ . Afirmamos que  $\mathcal{F}$  é bijetor, linear e contínuo. Além disso, sua inversa, denominada transformada de Fourier inversa, dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\Psi)(f) := \Psi(\mathcal{F}^{-1}(f)), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (1.17)$$

é também um operador (linear) contínuo.

*Demonstração.* Para detalhes desta demonstração, ver [44]. □

O teorema a seguir fornece um exemplo de distribuição temperada. Além disso, ele garante uma identificação entre os espaços  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e o espaço  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 1.14.** *Considere  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , com  $p = 1, 2$ . A aplicação  $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{f(x)} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

*é uma distribuição temperada; isto é,  $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

*Demonstração.* Para detalhes da demonstração deste resultado, ver [19, 44]. □

Definimos abaixo um operador que é utilizado nesta dissertação como parte dos termos difusivos das Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica (ver [41] e referências inclusas para mais detalhes). Tal definição faz uso dos conceitos que foram abordados nesta seção.

**Definição 1.17.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Considere  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Definimos o Laplaciano fracionário de ordem  $s$  de  $v$ , como sendo o operador

$$[(-\Delta)^s v](x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \widehat{v}(\xi))(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Na definição anterior, devemos observar que, desde que a transformada de Fourier (e sua inversa) é um operador linear, conclui-se que o Laplaciano fracionário é do mesmo tipo.

Finalizemos esta seção estabelecendo a definição do projetor de Helmholtz (para mais informações, citamos os trabalhos [25, 27] e referências inclusas). Começemos, primeiramente, pela transformada de Riesz.

**Definição 1.18.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . A transformada de Riesz de  $f$  é dada e denotada por

$$(\mathcal{R}_j f)(x) = C_n \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x - y) dy \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

onde  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $C_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$  ( $\Gamma$  é a função gama usual, a qual é dada por  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$  para todo  $t > 0$ ).

Esta definição pode ser generalizada com respeito ao espaço das distribuições temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ , quocientado por um anel de polinômios sobre  $\mathbb{C}$ , da seguinte forma.

**Definição 1.19.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P}$  é o anel de polinômios com  $n$  variáveis sobre  $\mathbb{C}$  (ou seja,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$  é o conjunto das classes de distribuições temperadas módulo  $\mathcal{P}$ ). A transformada de Riesz de  $\Psi$  (identificado com sua própria classe) é dada e denotada por

$$(\mathcal{R}_j\Psi)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\widehat{\Psi}(\xi)\right)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

onde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Agora estamos prontos para definir o projetor de Helmholtz.

**Definição 1.20.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . O projetor de Helmholtz é definido através da seguinte igualdade:

$$P \equiv I + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R},$$

onde  $I$  é o operador identidade definido sobre  $[\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}]^n$  e  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ .

Algumas propriedades básicas do projetor de Helmholtz estão descritas abaixo.

**Lema 1.1.** *Sejam  $P$  projetor de Helmholtz,  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$  e  $f \in [\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}]^n$ . Então, é verdade que:*

- i)  $P$  é um operador linear;
- ii)  $\mathcal{F}[P(f)](\xi) = \widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2}\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$
- iii)  $\nabla \cdot [P(f)] = 0;$
- iv)  $P(f) = f$ , se  $\nabla \cdot f = 0;$
- v)  $P(\nabla g) = 0.$

*Demonstração.* Ver [25, 27] para mais detalhes. □

Alguns outros resultados relevantes sobre transformada de Fourier, espaços de Schwartz ou distribuições temperadas podem ser encontrados em [44]. Com respeito ao projetor de Helmholtz (algumas vezes chamado projetor de Helmholtz-Leray), referenciamos a [25, 27] para mais detalhes sobre o mesmo.

## 1.4 Espaços de Sobolev-Gevrey e Lei-Lin-Gevrey

Iniciemos esta seção por definir os espaços de Sobolev-Gevrey homogêneos (ver [2, 3, 5, 6, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 28, 29, 31-33, 37-40] e referências inclusas), de modo a estabelecê-los como espaços normados e, posteriormente, como espaços completos. Estes mesmos são o ambiente onde buscamos soluções brandas globais para a Equação Quase-geostrófica nesta dissertação.

**Definição 1.21.** Considere  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Chamamos espaço de Sobolev-Gevrey homogêneo (ou espaço de Sobolev usual se  $a = 0$ ) o seguinte conjunto:

$$\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) = \{f \in S'(\mathbb{R}^2) : \widehat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}.$$

Este espaço está munido da norma

$$\|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$\langle f, g \rangle_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} [\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)] d\xi$$

é um produto interno em  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$  que gera a norma acima.

É importante destacar que, em alguns momentos do nosso trabalho, omitimos o espaço  $\mathbb{R}^2$  na notação da norma e do produto interno dos espaços de Sobolev-Gevrey. Por exemplo, escrevemos  $\|\cdot\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}$  ao invés de  $\|\cdot\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}$ .

A próxima definição relaciona os espaços de Lebesgue com os espaços de Sobolev-Gevrey.

**Definição 1.22.** Considere  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))$  o

seguinte espaço:

$$\{f \in C(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s) : \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\widehat{f}(\xi, t)|\}^2 d\xi < \infty\}.$$

Além disso, definimos a norma deste espaço por

$$\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} = \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\widehat{f}(\xi, t)|\}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De maneira análoga, relacionamos o espaço de Lebesgue  $L^2$  com os espaços de Sobolev-Gevrey.

**Definição 1.23.** Sejam  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \in \mathbb{R}$ . O espaço  $L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$  é dado da seguinte forma:

$$\{f \in S'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) : \widehat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \text{ e } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi, t)|^2 d\xi dt < \infty\}.$$

A norma deste espaço é dada por

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))} = \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi, t)|^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Permita-nos informar que, em algumas passagens, omitimos o espaço  $\mathbb{R}^2$  na notação da norma dos espaços dados acima. Por exemplo, escrevemos  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}$  ao invés de  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}$ .

No Capítulo 3, nosso interesse é encontrar uma única solução global para as Equação Quase-geostrófica e estudar o comportamento desta mesma no infinito. Aproveitamos este momento do trabalho para informar que o espaço que contém esta mesma solução é dado através de interseção dos espaços que definimos acima.

**Definição 1.24.** Considere  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$  e  $s \in [0, 1)$ . No Capítulo 3, trabalhamos com o seguinte espaço de funções:

$$H := \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)).$$

A norma deste espaço é a que segue:

$$\|f\|_H = (\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H.$$

A definição a seguir apresenta os espaços de Lei-Lin-Gevrey (ver [1, 4, 7–9, 12, 13, 23, 30, 34–36, 43, 46, 48] e referências inclusas), que adiante serão descritos como espaços de Banach. Permita-nos salientar que estes espaços são o ambiente que buscamos por soluções globais e locais para as Equações de Navier-Stokes neste trabalho.

**Definição 1.25.** Para  $s \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$  e  $\sigma \geq 1$ , definimos o espaço de Lei-Lin-Gevrey (ou Lei-Lin, se  $a = 0$ ) por

$$\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \widehat{f} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty\}.$$

Tal espaço está munido da norma

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi.$$

Vale também frisar que, em alguns momentos da nossa dissertação, omitimos o espaço  $\mathbb{R}^3$  na notação da norma dos espaços de Lei-Lin-Gevrey. Mais especificamente, escrevemos  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}$  ao invés de  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)}$ .

No Capítulo 4, obtemos uma única solução global (e também local no caso crítico) para as Equações de Navier-Stokes. Neste momento da dissertação, apresentamos o espaço que contém esta mesma através da interseção de espaços que definimos anteriormente.

**Definição 1.26.** Considere  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $s \in [-1, 0]$  e  $T > 0$ . No Capítulo 4, trabalhamos com o seguinte espaço de funções:

$$\mathcal{X}_{T,\alpha} := C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

A norma deste espaço é a que segue:

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} = \|f\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))}, \quad \forall f \in \mathcal{X}_{T,\alpha}.$$

Quando  $\alpha = \frac{1}{2}$ , denotamos também  $\mathcal{X}_T := \mathcal{X}_{T,\frac{1}{2}}$ .

Os espaços de Lei-Lin-Gevrey e Sobolev-Gevrey vêm sendo utilizados como espaços para a busca de soluções das Equações de Navier-Stokes, da Magnetohidrodinâmica, Micropolares e Quase-geostrófica na literatura através dos seguintes artigos [\[1\]](#), [\[10\]](#), [\[12\]](#), [\[13\]](#), [\[16\]](#), [\[20\]](#), [\[21\]](#), [\[23\]](#), [\[28\]](#), [\[40\]](#), [\[43\]](#), [\[46\]](#), [\[48\]](#) (ver também referências inclusas).

# Capítulo 2

## Resultados Introdutórios

Neste capítulo, reunimos as proposições preliminares mais importantes que serão usadas na construção dos resultados principais deste trabalho (ver Capítulos 3 e 4). Mais precisamente, apresentamos a completude dos Espaços de Sobolev-Gevrey e Lei-Lin-Gevrey, a Transformada de Fourier do Semigrupo do Calor, o Teorema do Ponto Fixo, algumas características do Projetor de Helmholtz e o comportamento das soluções da Equação do Calor.

### 2.1 Resultados Preliminares para o Capítulo 3

Nesta seção, apresentamos algumas proposições que desempenharão papel relevante nas provas dos nossos resultados principais expostos no Capítulo 3.

**Lema 2.1.** *Considere que  $u_\theta = (D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta, -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta)$ , onde  $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ . Afirmamos que  $|\widehat{u}_\theta| = |\widehat{\theta}|$  e  $\nabla \cdot u_\theta = 0$ .*

*Demonstração.* Pela definição do divergente, resulta

$$\nabla \cdot u_\theta = D_1(D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta) + D_2(-D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta) = 0.$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\widehat{u}_\theta &= \mathcal{F}(D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta, -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta) \\ &= (\mathcal{F}\{D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta\}, \mathcal{F}\{-D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta\}) \\ &= (\mathcal{F}\{D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta\}, -\mathcal{F}\{D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta\}).\end{aligned}$$

Com isso, pelo item i) do Teorema 1.11, encontramos

$$\widehat{u}_\theta(\xi) = ((i\xi)^{(0,1)}\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(\xi)\}, -(i\xi)^{(1,0)}\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(\xi)\}).$$

Assim, pela definição 1.17, segue que

$$\widehat{u}_\theta(\xi) = ((i\xi)^{(0,1)}|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -(i\xi)^{(1,0)}|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi)). \quad (2.1)$$

Mas, pela definição da potência multi-índice, dada na definição 1.8, sabemos que

$$(i\xi)^{(0,1)} = (i\xi_1)^0(i\xi_2)^1 = i\xi_2 \quad \text{e} \quad (i\xi)^{(1,0)} = (i\xi_1)^1(i\xi_2)^0 = i\xi_1. \quad (2.2)$$

Logo, substituindo as informações de (2.2) em (2.1), temos que

$$\widehat{u}_\theta(\xi) = (i\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -i\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi)) = i(\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi)). \quad (2.3)$$

Portanto, pela definição da norma euclidiana, chegamos a

$$\begin{aligned}|\widehat{u}_\theta(\xi)| &= |i| |(\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi))| = |(\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi))| \\ &= \sqrt{(\xi_2^2|\xi|^{-2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2) + (\xi_1^2|\xi|^{-2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2)} \\ &= \sqrt{\frac{\xi_2^2 + \xi_1^2}{|\xi|^2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2} = \sqrt{\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2} \\ &= \sqrt{|\widehat{\theta}(\xi)|^2} = |\widehat{\theta}(\xi)|.\end{aligned}$$

Isto finaliza a nossa verificação. □

Agora estamos prontos para verificar quais são as condições para que os espaços de Sobolev-Gevrey homogêneos sejam completos.

**Lema 2.2.** *Sejam  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$ ,  $s < 1$ . Então,  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$  é um espaço de Banach (ou Hilbert).*

*Demonstração.* Considere  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Assim, por definição, dado  $\epsilon > 0$ , existe um número natural  $m_0$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} < \epsilon, \quad (2.4)$$

para todo  $m, n \geq m_0$ . Afirmamos que a sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dada por  $g_n(\xi) = |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n(\xi)$ , é uma sequência de Cauchy em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Primeiro, perceba que

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_n|^2 d\xi \\ &= \|f_n\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $g_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, por (2.4), infere-se

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_m - |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} (\widehat{f}_m - \widehat{f}_n) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_m(\xi) - \widehat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f_m - f_n\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo  $m, n \geq m_0$ . Portanto,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Desde que,  $L^2(\mathbb{R}^2)$  é um espaço completo (ver Teorema 1.5), existe  $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0. \quad (2.5)$$

Além disso, segue do fato de  $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$  que  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ .

Considere agora, a função  $v(\xi) = |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} g(\xi)$ . A aplicação  $v$  pertence a  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  (note que  $v$  é uma distribuição temperada através da identificação com  $T_v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ , dada no Teorema 1.14). Vamos provar esta pertinência em dois itens.

- $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ .

Com efeito, para cada compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , obtemos

$$\int_K |v(\xi)| d\xi = \int_K |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |g(\xi)| d\xi,$$

mas, observe que,  $e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq 1$  e por  $\xi \mapsto |\xi|^{-s}$  ser função contínua em  $K$ , tal função atinge um máximo, digamos  $M$ , em  $K$ . Portanto,

$$\int_K |v(\xi)| d\xi \leq M \int_K |g(\xi)| d\xi < \infty. \quad (2.6)$$

Vamos, agora, estimar a integral de  $v$  sobre compactos contendo a origem. Por simplicidade, basta considerarmos a integral de  $v$  sobre  $B_1[0]$ . Sendo assim, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.1), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{B_1[0]} |v(\xi)| d\xi &= \int_{B_1[0]} |\xi|^{-s} |\xi|^s |v(\xi)| d\xi \\ &\leq \left( \int_{B_1[0]} |\xi|^{2s} |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{B_1[0]} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{B_1[0]} e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |g|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{B_1[0]} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |g|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{B_1[0]} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left( \int_{B_1[0]} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mas, fazendo uso das coordenadas polares (ver Teorema 1.8),

$$\int_{B_1[0]} |\xi|^{-2s} d\xi = \int_0^1 \int_{|\xi|=r} r^{-2s} dS_\xi dr = \int_0^1 r^{-2s+1} 2\pi dr = \frac{\pi}{-s+1}, \quad (2.8)$$

pois, por hipótese,  $s < 1$ , garantindo que integral acima é finita e como consequência das informações dadas em (2.6), (2.7) e (2.8), a função  $v$  pertence a  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ .

- $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ .

Perceba que, como  $a > 0$ , então

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi|^{-2s} e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}}{|\xi|^{2s}} = 0.$$

Logo, pela definição de limite no infinito, existe  $A > 0$  tal que  $|\xi|^{-2s} e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq 1$ , para todo  $|\xi| > A$ . Desse modo, concluímos que

$$|\xi|^{-2s} e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi \in B_A^c[0], \quad (2.9)$$

onde  $B_A^c[0]$  representa o complementar de  $B_A[0]$  (bola fechada de centro 0 e raio  $A$ ).

Note ainda que, podemos escrever  $v = \chi_{B_A[0]}v + \chi_{B_A^c[0]}v$ , onde  $\chi_D$  é a função característica do conjunto  $D$ . Como  $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ , resulta que  $\chi_{B_A[0]}v \in L^1(\mathbb{R}^2)$  e, conseqüentemente,  $\chi_{B_A[0]}v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  (através do Teorema 1.14).

Por outro lado, por (2.9), é verdade que

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_A^c[0]}v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_A^c[0]}(\xi) |v(\xi)|^2 d\xi = \int_{B_A^c[0]} |v(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{B_A^c[0]} |\xi|^{-2s} e^{-2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |g(\xi)|^2 d\xi \leq C_{a,\sigma,s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Logo,  $\chi_{B_A^c[0]}v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  e, por conseguinte,  $\chi_{B_A^c[0]}v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  (ver Teorema 1.14). Portanto,  $v = \chi_{B_A^c[0]}v + \chi_{B_A[0]}v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ .

O operador transformada de Fourier define uma bijeção (ver Teorema 1.13). Ou seja, podemos considerar a função  $f = \mathcal{F}^{-1}(v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  (note que  $\widehat{f} = v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ ). Por fim, percebe-se que, utilizando a linearidade da transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_n(\xi) - v(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_n(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |g_n - g|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Passando ao limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , e usando (2.6), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Portanto,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f$  em  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Por conseguinte,  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$  é um espaço de Banach.  $\square$

Abaixo estabelecemos dois resultados elementares que serão aplicados no Lema 2.5, estes foram provados em [3].

**Lema 2.3.** *Assuma que  $a$  e  $b$  são números reais, de modo que  $0 \leq a \leq b$  e  $r \in [0, 1]$ . Então,*

a desigualdade a seguir é válida:

$$(a + b)^r \leq ra^r + b^r.$$

*Demonstração.* Para o caso em que  $b = 0$ , segue das hipóteses sobre  $a$  e  $b$ , que  $a = 0$ . Neste caso, a desigualdade requerida é trivial. Desse modo, assumindo que  $b > 0$ , podemos considerar  $c = a/b$ . Perceba que  $c \in [0, 1]$ , pois  $0 \leq a \leq b$ . A fórmula de Taylor com resto de Lagrange nos garante que existe  $\gamma \in [0, c]$  tal que a função  $t \mapsto (1 + t)^r$ , com  $t \in [0, c]$ , pode ser reescrita na forma

$$(1 + c)^r = 1 + rc + \frac{r(r-1)(1+\gamma)^{r-2}}{2}c^2,$$

para algum  $\gamma \in [0, 1]$ . Assim, como  $r, \gamma \in [0, 1]$ , então  $(r-1) \leq 0$  e  $r(1+\gamma) \geq 0$ . Consequentemente,

$$\frac{r(r-1)(1+\gamma)^{r-2}}{2}c^2 \leq 0.$$

Portanto, podemos escrever

$$(1 + c)^r \leq 1 + rc.$$

Além disso, como consequência do fato que  $c, r \in [0, 1]$ , obtemos  $c \leq c^r$ . Desse modo,  $(1 + c)^r \leq 1 + rc^r$ . Logo, pela definição de  $c$ , concluimos

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^r \leq 1 + r\left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

ou ainda,

$$(a + b)^r \leq ra^r + b^r,$$

como queríamos. □

O próximo lema trabalha com a aplicação exponencial usual.

**Lema 2.4.** *Assuma  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \geq 0$  e  $\sigma \geq 1$ . Então, é verdade que*

$$e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq e^{a \max\{|\xi-\eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma} \min\{|\xi-\eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

*Demonstração.* Inicialmente, não é difícil ver que se  $a = 0$ ; então, a desigualdade acima é trivial.

Agora, considere que  $a > 0$  e perceba que dados  $c$  e  $d$ , números reais quaisquer, podemos escrever

$$c + d = \max\{c, d\} + \min\{c, d\}.$$

Em particular,

$$|\xi - \eta| + |\eta| = \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\} + \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\},$$

para todo  $\xi$  e  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Portanto, pela desigualdade triangular, encontramos

$$a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}} = a|\xi - \eta + \eta|^{\frac{1}{\sigma}} \leq a(|\xi - \eta| + |\eta|)^{\frac{1}{\sigma}} = a(\max\{|\xi - \eta|, |\eta|\} + \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\})^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Consequentemente, pelo Lema [2.3](#), tomando  $r = \frac{1}{\sigma} \in [0, 1]$ , infere-se

$$\begin{aligned} a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}} &\leq a(\max\{|\xi - \eta|, |\eta|\})^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= a \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{a}{\sigma} \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Por fim, sabendo que a exponencial é uma função crescente, resulta que

$$e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq e^{a \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{a}{\sigma} \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}} = e^{a \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma} \min\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\frac{1}{\sigma}}},$$

o que finaliza a prova deste resultado. □

O próximo lema (provado em [32](#)) fornece uma importante desigualdade para a norma no espaço de Sobolev-Gevrey  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$  do produto de funções que estão no espaço  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) \cap X_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^2)$ . Este nos auxiliará a determinar a existência e unicidade de soluções brandas para a Equação Quase-geostrófica (ver Teorema [3.1](#)). Permita-nos lembrar que  $\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^2)$  denota um espaço de Lei-Lin-Gevrey específico.

**Lema 2.5.** *Sejam  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \geq 0$ . Então, existe uma constante positiva  $C_s$  de modo que*

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_s [\|f\|_{\dot{\mathcal{X}}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 + \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \|g\|_{\dot{\mathcal{X}}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2],$$

para todo  $f, g \in \dot{H}_{a,\sigma}^s \cap X_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0$ .

*Demonstração.* Veja que, por definição, podemos escrever

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{fg}(\xi)|^2 d\xi.$$

Mas, pelo item v) do Teorema 1.11, segue que  $\widehat{fg} = (2\pi)^{-2}(\widehat{f} * \widehat{g})$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |(2\pi)^{-2}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} (2\pi)^{-4} |(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Agora, usando a definição da convolução (ver definição 1.7), resulta que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &= (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{|\eta| \leq |\xi - \eta|} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\eta| > |\xi - \eta|} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular, temos que, para todo  $s \geq 0$ ,  $\xi$  e  $\eta \in \mathbb{R}^2$ , vale

$$\begin{aligned} |\xi|^s &= |\xi - \eta + \eta|^s \leq (|\xi - \eta| + |\eta|)^s \leq (2 \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\})^s \\ &= 2^s (\max\{|\xi - \eta|, |\eta|\})^s. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, utilizando a desigualdade acima, bem como o Lema 2.4 (com  $n = 2$ ), conclui-se

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &= (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{|\eta| \leq |\xi - \eta|} 2^s |\xi - \eta|^s e^{a|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma} |\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\eta| > |\xi - \eta|} 2^s |\eta|^s e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma} |\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Observe ainda que, para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}(a - b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2.\end{aligned}$$

Sendo assim, fazendo

$$a = \int_{|\eta| \leq |\xi - \eta|} 2^s |\xi - \eta|^s e^{a|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta$$

e também

$$b = \int_{|\eta| > |\xi - \eta|} 2^s |\eta|^s e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta,$$

resulta que

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ 2 \left( \int_{|\eta| \leq |\xi - \eta|} 2^s |\xi - \eta|^s e^{a|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \int_{|\eta| > |\xi - \eta|} 2^s |\eta|^s e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 \right] d\xi \\ &= (2\pi)^{-4} 2^{2s+1} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{|\eta| \leq |\xi - \eta|} |\xi - \eta|^s e^{a|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{|\eta| > |\xi - \eta|} |\eta|^s e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 d\xi \right].\end{aligned}$$

Portanto, chegamos a

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-4} 2^{2s+1} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi - \eta|^s e^{a|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^s e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi - \eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| \, d\eta \right)^2 d\xi \right].\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-4} 2^{2s+1} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|) * [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)|])^2 d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} ([e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|] * [|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)|])^2 d\xi \right] \\
&= (2\pi)^{-4} 2^{2s+1} [\| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \| e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + \| [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|] * [|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)|] \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2].
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a desigualdade de Young para convolução (ver Teorema 1.4) e denotando  $C_s = 2^{2s+1}(2\pi)^{-4} > 0$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_s [\| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \| e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| \|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + \| [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)|] \|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2] \\
&= C_s [\|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|g\|_{\dot{\mathcal{X}}_{a,\sigma}^0}^2 + \|f\|_{\dot{\mathcal{X}}_{a,\sigma}^0}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2].
\end{aligned}$$

□

Aplicando o conceito da função usual Gama, podemos enunciar a seguinte consequência do Lema 2.5. Mais especificamente, este próximo lema é o que nos permite estudar a Equação Quase-geostrófica no caso crítico (ver [37] e Capítulo 3).

**Lema 2.6.** *Considere  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$ ,  $s \geq 0$  e  $q < 1$ . Afirmamos que existe uma constante positiva  $C_{a,\sigma,q,s}$  tal que*

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \leq C_{a,\sigma,q,s} [\|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 + \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2].$$

para todo  $f, g \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}_{a,\sigma}^q(\mathbb{R}^2)$ .

*Demonstração.* Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\dot{\mathcal{X}}_{a,\sigma}^0} &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{q-q} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-q} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\xi|^q e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Com isso, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema [1.1](#)), segue que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} &\leq \| |\xi|^{-q} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \| |\xi|^q e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2q} e^{2(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2q} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2q} e^{2(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q} \\
&= \frac{2\pi\sigma\Gamma(2\sigma(1-q))}{[2(a-\frac{a}{\sigma})]^{2\sigma(1-q)}} \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q},
\end{aligned}$$

sempre que  $a > 0, \sigma > 1, q < 1$ , onde esta última igualdade é obtida pela definição da função Gama, a qual é dada por  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$  (com  $t > 0$ ). Por denotar  $C_{a,\sigma,q} = \frac{2\pi\sigma\Gamma(2\sigma(1-q))}{[2(a-\frac{a}{\sigma})]^{2\sigma(1-q)}}$ , temos que  $C_{a,\sigma,q} > 0$ , desde que  $q < 1, a > 0$  e  $\sigma > 1$ . Assim, chegamos a

$$\|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \leq C_{a,\sigma,q} \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q},$$

sempre que  $a > 0, \sigma > 1, q < 1$ . Analogamente, verificamos que

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \leq C_{a,\sigma,q} \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q},$$

fornecido que  $a > 0, \sigma > 1, q < 1$ . Agora, pelo que foi feito no Lema [2.5](#), obtemos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 &\leq C_s [\|f\|_{\dot{\mathcal{X}}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}^2] \\
&\leq C_s [C_{a,\sigma,q}^2 \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + C_{a,\sigma,q}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2] \\
&= C_s C_{a,\sigma,q}^2 [\|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2].
\end{aligned}$$

Por fim, denotando  $C_s C_{a,\sigma,q}^2 := C_{a,\sigma,q,s}$ , fica verificado, para  $s \geq 0, a > 0, \sigma > 1$  e  $q < 1$ , que

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \leq C_{a,\sigma,q,s} [\|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|g\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^q}^2 \|f\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2].$$

□

O resultado abaixo é devido a Chemin (ver [6](#) e [17](#)). Este será aplicado na nossa prova do decaimento da solução branda global para a Equação Quase-geostrófica em  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (ver Lema [3.2](#)).

**Lema 2.7.** *Assuma  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $s_1 < 1$  e  $s_1 + s_2 > 0$ . Afirmamos que existe uma constante positiva  $C_{s_1, s_2}$  de modo que, para todo  $f, g \in \dot{H}_{a, \sigma}^{s_1} \cap \dot{H}_{a, \sigma}^{s_2}$ , acontece*

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_1+s_2-1}} \leq C_{s_1, s_2} [\|f\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_1}} \|g\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_2}} + \|f\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_2}} \|g\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_1}}].$$

*Além disso, se  $s_1 < 1$ ,  $s_2 < 1$  e  $s_1 + s_2 > 0$ , existe uma constante positiva  $C_{s_1, s_2}$  tal que*

$$\|fg\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_1+s_2-1}} \leq C_{s_1, s_2} \|f\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_1}} \|g\|_{\dot{H}_{a, \sigma}^{s_2}}.$$

*Demonstração.* A prova deste lema pode ser encontrada em [6]. □

O resultado a seguir foi provado em [7] e será útil na demonstração de algumas taxas de decaimento, em espaços de Sobolev-Gevrey, para a solução branda global da Equação Quase-geostrófica (ver Teorema 3.3).

**Lema 2.8.** *Assuma que  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função contínua tal que*

$$f(t) \leq M_0 + \theta_1 f(\theta_2 t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.11)$$

*onde  $M_0 \geq 0$  e  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ . Então,*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq \frac{M_0}{1 - \theta_1}. \quad (2.12)$$

*Demonstração.* Fixe  $T > 0$ . Desde que  $f$  é contínua e o intervalo  $I = [0, T]$  é compacto,  $f$  atinge um máximo em  $I$ . Isto é, existe um  $t_0 \in [0, T]$  tal que

$$f(t_0) = \sup_{0 \leq t \leq T} \{f(t)\}.$$

Além disso, como  $f$  é positiva, obtém-se

$$0 \leq f(t_0) = \sup_{0 \leq t \leq T} \{f(t)\}.$$

Desse modo, utilizando a hipótese (2.11) de  $f$ , encontramos

$$f(t_0) \leq M_0 + \theta_1 f(\theta_2 t_0) \leq M_0 + \theta_1 f(t_0), \quad (2.13)$$

onde a última desigualdade é obtida por observar que  $0 \leq \theta_2 t_0 \leq T$  e  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ ; por conseguinte,  $f(\theta_2 t_0) \leq f(t_0)$ . Assim, segue, de (2.13), que

$$f(t_0)(1 - \theta_1) \leq M_0,$$

ou ainda,

$$f(t_0) \leq \frac{M_0}{1 - \theta_1}.$$

Equivalentemente,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{f(t)\} \leq \frac{M_0}{1 - \theta_1}.$$

Finalmente, aplicando a definição de ínfimo, quando  $T > 0$ , na desigualdade acima, resulta que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) \leq \frac{M_0}{1 - \theta_1}.$$

□

Abaixo estabelecemos outro resultado elementar que também será aplicado nas nossas taxas de decaimento para a solução branda global da Equação Quase-geostrófica em Espaços de Sobolev-Gevrey (ver Teorema 3.3).

**Lema 2.9.** *Sejam  $a, b > 0$  fixos. Então, para cada  $\lambda$  real positivo, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\lambda^a e^{-b\lambda} \leq a^a (eb)^{-a}.$$

*Demonstração.* Para demonstrar tal desigualdade, considere a função auxiliar  $f(\lambda) = \lambda^a e^{-b\lambda}$ , para todo  $\lambda > 0$ . Por derivar  $f$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= a\lambda^{a-1}e^{-b\lambda} + \lambda^a e^{-b\lambda}(-b) = a\lambda^a \lambda^{-1}e^{-b\lambda} + \lambda^a e^{-b\lambda}(-b) \\ &= \frac{a}{\lambda}(\lambda^a e^{-b\lambda}) + (\lambda^a e^{-b\lambda})(-b) = (\lambda^a e^{-b\lambda})\left(\frac{a}{\lambda} - b\right). \end{aligned}$$

Agora, perceba que

$$\begin{aligned} f''(\lambda) &= (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left( \frac{a}{\lambda} - b \right) \left( \frac{a}{\lambda} - b \right) + (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left( \frac{-a}{\lambda^2} \right) \\ &= (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left( \frac{a}{\lambda} - b \right)^2 + (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left( \frac{-a}{\lambda^2} \right) \\ &= (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left[ \left( \frac{a}{\lambda} - b \right)^2 + \left( \frac{-a}{\lambda^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $a, \lambda$  e  $b$  são positivos, segue que

$$f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda^a e^{-b\lambda}) \left( \frac{a}{\lambda} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{a}{\lambda} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{b}.$$

Desse modo, temos que  $\frac{a}{b}$  é o único ponto crítico de  $f$ . Além disso, como

$$f''\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-b\frac{a}{b}} \left[ \left(\frac{a}{\frac{a}{b}} - b\right)^2 - \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] = \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a} \left( -\frac{b^2}{a} \right) < 0,$$

segue, então, que  $\frac{a}{b}$  é ponto de máximo de  $f$ . Isto é,

$$f(\lambda) \leq f\left(\frac{a}{b}\right), \quad \forall \lambda > 0,$$

ou ainda

$$\lambda^a e^{-b\lambda} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-b\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a} = a^a (eb)^{-a}.$$

Isso prova o resultado. □

Para enunciar e provar o Teorema do Ponto Fixo que será aplicado neste trabalho, precisamos relembrar o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Lema 2.10** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Considere um espaço métrico  $(X, d)$ , onde  $X \neq \emptyset$ . Suponha que  $X$  é completo e que  $T : X \rightarrow X$  é uma contração sobre  $X$  (ou seja, existe  $C \in (0, 1)$  tal que  $d(Tx, Ty) \leq Cd(x, y)$ , para todo  $x, y \in X$ ). Então,  $T$  admite um único ponto fixo em  $X$  (isto é,  $\exists! x_0 \in X$  tal que  $Tx_0 = x_0$ ).*

*Demonstração.* Ver [11] para mais detalhes. □

Agora, estamos interessados em enunciar e provar o Teorema do Ponto Fixo (obtido em [14]), o qual é utilizado fortemente nas existências de soluções brandas para as Equações de Navier-Stokes e Quase-geostrófica.

**Teorema 2.1.** *Assuma que  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach e  $B : X \times X \rightarrow X$  é um operador bilinear contínuo, ou equivalentemente, existe  $C_1$ , constante positiva, de modo que*

$$\|B(x, y)\| \leq C_1 \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (2.14)$$

*Assim, para cada  $x_0 \in X$  satisfazendo*

$$4C_1 \|x_0\| < 1, \quad (2.15)$$

*existe  $x \in X$  solução da equação  $a = x_0 + B(a, a)$ . Ademais,  $x$  obedece  $\|x\| \leq 2\|x_0\|$  e é a única solução tal que  $\|x\| \leq \frac{1}{2C_1}$ .*

*Demonstração.* Iniciemos por considerar a bola fechada  $B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$  em  $X$ , com  $R$  escolhido da forma

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|}}{2C_1}. \quad (2.16)$$

Perceba que,

$$\begin{aligned} \|x_0\| + C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|}}{2C_1} \right)^2 &= \|x_0\| + C_1 \left( \frac{1 - 2\sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|} + 1 - 4C_1 \|x_0\|}{4C_1^2} \right) \\ &= \|x_0\| + \frac{C_1 - 2C_1 \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|} + C_1 - 4C_1^2 \|x_0\|}{4C_1^2} \\ &= \|x_0\| + \frac{C_1 - 2C_1 \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|} + C_1}{4C_1^2} - \|x_0\| \\ &= \frac{2C_1 - 2C_1 \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|}}{4C_1^2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1 \|x_0\|}}{2C_1} \\ &= R. \end{aligned}$$

Isto nos diz que  $R$  satisfaz a igualdade

$$\|x_0\| + C_1 R^2 = R. \quad (2.17)$$

Além disso, veja que

$$\begin{aligned}
1 \geq 1 - 4C_1\|x_0\| &\Leftrightarrow 1 - 4C_1\|x_0\| \geq (1 - 4C_1\|x_0\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} \geq (1 - 4C_1\|x_0\|) \\
&\Leftrightarrow 4C_1\|x_0\| \geq (1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|}) \\
&\Leftrightarrow 2\|x_0\| \geq \frac{(1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|})}{2C_1} \\
&\Leftrightarrow 2\|x_0\| \geq R.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto, segue que  $R \leq 2\|x_0\|$ .

Agora, defina  $F(x) = x_0 + B(x, x)$ , para todo  $x \in X$ . Observe que para todo  $x$  e  $x'$  em  $B_R$ , resulta da bilinearidade de  $B$ , que

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(x')\| &= \|x_0 + B(x, x) - x_0 - B(x', x')\| \\
&= \|B(x, x) - B(x', x')\| \\
&= \|B(x, x) - B(x', x) + B(x', x) - B(x', x')\| \\
&= \|B(x - x', x) + B(x', x - x')\| \\
&\leq \|B(x - x', x)\| + \|B(x', x - x')\|.
\end{aligned}$$

Segue ainda, da hipótese (2.14), que

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(x')\| &\leq C_1\|x - x'\|\|x\| + C_1\|x'\|\|x - x'\| \\
&= C_1\|x - x'\|(\|x\| + \|x'\|) \\
&\leq 2C_1R\|x - x'\|,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato de  $x$  e  $x'$  pertencerem a bola fechada  $B_R$ . Desse modo, como, por (2.16), tem-se que

$$2C_1R = 1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} < 1,$$

implica que  $F : B_R \rightarrow B_R$  é uma contração. Por utilizar o usual Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver Lema 2.10),  $F$  admite um único ponto fixo em  $B_R$ . Isto é,  $F(x) = x$ , ou equivalentemente,  $x = x_0 + B(x, x)$ , para algum  $x \in B_R$ . Ademais, do fato que  $x \in B_R$ , do

que foi encontrado em (2.17), (2.18) e da hipótese (2.14), obtemos

$$\|x\| \leq \|x_0\| + \|B(x, x)\| \leq \|x_0\| + C_1\|x\|^2 \leq \|x_0\| + C_1R^2 = R \leq 2\|x_0\|.$$

Por fim, veja que, como  $x \in B_R$ , e aplicando (2.16), conclui-se

$$\|x\| \leq R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|}}{2C_1} \leq \frac{1}{2C_1}.$$

□

Finalizamos esta seção com uma definição frequentemente empregada neste texto. Esta está relacionada ao semigrupo do calor.

**Definição 2.1.** *Assuma que  $n \in \mathbb{N}$ . Sejam  $f$  uma função em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Definimos o semigrupo do calor  $e^{-t(-\Delta)^\alpha}$  aplicado em  $f$  por:*

$$e^{-t(-\Delta)^\alpha} f = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \widehat{f}\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

A motivação para a definição anterior, surge do fato que  $u(x, t) = e^{-t(-\Delta)^\alpha} f(x)$  é solução do seguinte sistema do calor:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.19)$$

Com efeito, pelas propriedades da transformada de Fourier e pela definição do Laplaciano fracionário (ver definição 1.17), uma solução para o sistema (2.19) é também solução do sistema

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u)_t + |\xi|^{2\alpha} \widehat{u} = 0, & \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.20)$$

Assim, pela primeira equação do sistema (2.20), deduzimos, para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , que

$$\frac{d}{dt} \widehat{u} = -|\xi|^{2\alpha} \widehat{u},$$

ou, por aplicar o método de separação de variáveis, visto em Equações Diferenciais Ordinárias, chegamos a

$$\widehat{u}(\xi, t) = K e^{-|\xi|^{2\alpha} t}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

onde  $K$  é uma constante positiva. Além disso, pela segunda equação de (2.20) e pelo que foi

obtido acima, infere-se

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{u}(\xi, 0) = K.$$

Portanto, podemos escrever

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^{2\alpha}t} \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Assim, por utilizar a transformada inversa, concluímos que

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-|\xi|^{2\alpha}t} \widehat{f}\}(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

**Observação 2.1.** Permita-nos observar que

$$\begin{aligned} e^{-t(-\Delta)^\alpha} \{(-\Delta)^\alpha f\} &= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-|\xi|^{2\alpha}t} |\xi|^{2\alpha} \widehat{f}\} = \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{2\alpha} e^{-|\xi|^{2\alpha}t} \widehat{f}\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{2\alpha} \mathcal{F}\{e^{-t(-\Delta)^\alpha} f\}\} = (-\Delta)^\alpha \{e^{-t(-\Delta)^\alpha} f\}, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Esse fato garante que o semigrupo do calor e o Laplaciano Fracionário, vistos nas Definições [2.1](#) e [1.17](#), respectivamente, comutam. Além disso, pela própria definição [2.1](#), o semigrupo do calor é um operador linear.

## 2.2 Resultados Preliminares para o Capítulo 4

Nesta seção, apresentamos algumas proposições que desempenharão papel relevante nas provas dos nossos resultados principais expostos no Capítulo 4.

**Lema 2.11.** *Sejam  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $s \leq 0$ . Então,  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Considere que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Vamos mostrar que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência convergente. Pela definição de sequência de Cauchy, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $N \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned}
\| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_m \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_m \| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_n - \widehat{f}_m| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{f_n - f_m\}| \, d\xi \\
&= \|f_n - f_m\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s},
\end{aligned}$$

para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ . Sendo assim,

$$\| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_m \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} < \epsilon,$$

para todo  $m, n \geq N$ . Isto é,  $(|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $L^1(\mathbb{R}^3)$ . Desde que,  $L^1(\mathbb{R}^3)$  é um espaço de Banach, existe  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$  de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - f \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (2.21)$$

Note ainda, que dado  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  um conjunto compacto, existe um raio  $r > 0$ , tal que  $K \subseteq B_r[0] = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq r\}$ . Portanto, segue do fato de  $e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq 1$  (pois,  $a \geq 0$ ) e  $s \leq 0$ , que

$$\int_K \| |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi) \| \, d\xi \leq r^{-s} \int_K |f(\xi)| \, d\xi = r^{-s} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} < \infty.$$

Isso garante que  $|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ . Analogamente à prova do Lema 2.2, temos que  $|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ . Desta forma, definindo  $g = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi))$ , concluimos que  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  (pois, o operador transformada de Fourier define uma bijeção em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ ). Além disso,  $\widehat{g} = |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ . Assim, desde que  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$  e

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi))\}| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |f(\xi)| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |f(\xi)| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |f(\xi)| \, d\xi = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

temos que  $g \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Por fim, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{f_n - \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi))\}| d\xi \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_n - |\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} f(\xi)| d\xi \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} (|\xi|^{-s} e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}) ||\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - f(\xi)| d\xi \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} ||\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - f(\xi)| d\xi \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \||\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Assim, por (2.21), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} = 0.$$

Ou seja,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência convergente em  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Por conseguinte,  $\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$  é espaço de Banach.  $\square$

Enunciamos abaixo um lema (provado em [36]) que relaciona Espaços de Lei-Lin-Gevrey.

**Lema 2.12.** *Suponha  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $p \geq 1$ . Assuma que  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ , então  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, é verdade que*

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Note inicialmente que para  $p = 1$ , não há nada a ser feito. Deste modo, assuma  $p > 1$  e observe que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+\frac{2\alpha}{p}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \||\xi|^{s+\frac{2\alpha}{p}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \widehat{f}(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \||\xi|^{\frac{sp-s+s+2\alpha}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p} \frac{p-a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}+a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{p-1+1}{p}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \||\xi|^{\frac{s(p-1)}{p}} |\xi|^{\frac{s+2\alpha}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}(p-1)}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{p-1}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{1}{p}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \||[\xi]^{\frac{s(p-1)}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}(p-1)}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \||\xi|^{\frac{s+2\alpha}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{1}{p}}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Agora, veja que, como  $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ , segue da desigualdade de Hölder dada no Teorema 1.1,

que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}} &\leq \| |\xi|^{\frac{s(p-1)}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}(p-1)}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{p-1}{p}} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^3)} \| |\xi|^{\frac{s+2\alpha}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{1}{p}} \|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^3} [ |\xi|^{\frac{s(p-1)}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}(p-1)}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{p-1}{p}} ]^{\frac{p}{p-1}} d\xi \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^3} [ |\xi|^{\frac{s+2\alpha}{p}} e^{\frac{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{1}{p}} ]^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Isto nos diz que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Desde que  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ , inferimos que  $\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} < \infty$  e  $\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} < \infty$ . Consequentemente  $\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}} < \infty$  e, portanto,  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, a desigualdade desejada é obtida em [\(2.22\)](#).  $\square$

Como caso particular do Lema [2.12](#), apresentamos o seguinte resultado.

**Lema 2.13.** *Considere  $a \geq 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  e  $\sigma \geq 1$ . Se  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ , então  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ . Ademais, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

*Demonstração.* Para verificar este resultado, basta observar que estamos com as hipóteses do Lema [2.12](#). Desse modo, tomando  $p = 2\alpha$  segue que  $p \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  e, por conseguinte, chegamos a

$$f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3)$$

e vale

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)} \leq \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{p}},$$

ou equivalentemente ( $p = 2\alpha$ ),

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Assim, obtemos o resultado desejado.  $\square$

Uma consequência imediata do Lema 2.12 está dada no resultado a seguir (obtido por [36]).

**Corolário 2.1.** *Considere  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  e  $p \geq 1$ . se  $f \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ , então  $f \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3))$ . Além disso, é verdade que*

$$\|f\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} \leq \|f\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Observe que para  $p = 1$ , a desigualdade é óbvia. Assuma, então, que  $p > 1$ . É importante notar que, se  $\varphi \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ , então  $\varphi(t) \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Do mesmo modo,  $g \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$  implica que  $g(t) \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Portanto, temos que  $h \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$  nos garante que  $h \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ . Consequentemente, pelo Lema 2.12, segue que  $h \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)$ . Para mostrar que uma função  $f \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$  também está em  $L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3))$ , basta verificar que  $\|f\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} < \infty$ . Para isso note que, novamente pelo Lema 2.12, podemos concluir

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})}^p &= \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}}^p dt \leq \int_0^T [\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{p}}]^p dt \\ &= \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt = \| \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} \|_{L^1([0,T])}. \end{aligned}$$

Por fazer uso da desigualdade de Hölder, dada no Teorema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})}^p &\leq \| \|f(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{p-1} \|_{L^\infty([0,T])} \| \|f(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} \|_{L^1([0,T])} \\ &= \sup_{t \in [0,T]} \{ \|f(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{p-1} \} \left( \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt \right). \end{aligned}$$

Desse modo, utilizando as propriedades do supremo, segue que

$$\|f\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})}^p \leq \sup_{t \in [0,T]} \{ \|f(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \}^{p-1} \left( \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt \right) = \|f\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{p-1} \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}. \quad (2.23)$$

Assim, como  $f \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ , temos que

$$\|f\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} < \infty,$$

e, portanto,  $f \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3))$ . Observe que a desigualdade desejada é obtida em (2.23).  $\square$

Agora, vejamos como estimar as soluções da Equação do Calor não homogênea, através de seus dados iniciais e sua não homogeneidade, em Espaços de Lei-Lin-Gevrey. Tal resultado foi provado em [36] e será útil na prova da existência de soluções brandas para as Equações de Navier-Stokes.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $T > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$  e  $v_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Se  $v \in C_T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))$  é solução do sistema*

$$\begin{cases} v_t + (-\Delta)^\alpha v = f, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T]; \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (2.24)$$

Então, para todo  $p \geq 1$ , vale

$$v \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)).$$

Além disso, é verdade que

- i)  $\|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}$ ;
- ii)  $\|v\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}$ .

*Demonstração.* Vamos, inicialmente, aplicar o semigrupo do calor  $e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha}$ , onde  $0 \leq \tau \leq t \leq T$ , na primeira equação do sistema (2.24), de modo a obter

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha}(v_\tau + (-\Delta)^\alpha v) = e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} f,$$

ou ainda, por utilizar a linearidade deste semigrupo,

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} v_\tau + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} (-\Delta)^\alpha v = e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} f. \quad (2.25)$$

Mas, observe que pela transformada de Fourier do semigrupo do calor, obtida na Definição 2.1, temos que

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} v_\tau = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}_\tau\} \quad (2.26)$$

e também

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} f = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}\}. \quad (2.27)$$

Além disso, pela definição do Laplaciano fracionário e sabendo que este mesmo comuta com o semigrupo do calor (ver observação [2.1](#)), deduzimos que

$$\begin{aligned} e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} (-\Delta)^\alpha v &= (-\Delta)^\alpha e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} v = \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{2\alpha} \mathcal{F}\{e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} v\}\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{2\alpha} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Agora, substituindo [\(2.26\)](#), [\(2.27\)](#) e [\(2.28\)](#), em [\(2.25\)](#), segue que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}_\tau\} + \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{2\alpha} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}\}. \quad (2.29)$$

Por aplicar a transformada de Fourier em [\(2.29\)](#), e observando sua linearidade, resulta que

$$e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}_\tau + |\xi|^{2\alpha} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v} = e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}.$$

Vamos, agora, integrar a igualdade acima sobre o intervalo  $[0, t]$ , de forma que

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}_\tau(\tau) d\tau + \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Utilizando integração por partes na primeira integral, deduzimos que

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}_\tau(\tau) d\tau = \hat{v}(t) - e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}(0) - \int_0^t \hat{v}(\tau) e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\xi|^{2\alpha} d\tau.$$

Então, substituindo em [\(2.30\)](#), temos

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) - e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}(0) - \int_0^t \hat{v}(\tau) e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\xi|^{2\alpha} d\tau + \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}(\tau) d\tau \\ = \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{v}(t) - e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \hat{v}(0) = \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Portanto, passando o módulo na igualdade acima, chegamos a

$$|\widehat{v}(t)| \leq e^{-t|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{v}_0| + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{f}(\tau)| d\tau. \quad (2.31)$$

Note ainda que  $e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \leq 1$  (pois  $t \geq \tau$ , logo  $-(t-\tau) \leq 0$ ), bem como  $e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \leq 1$  (pois,  $-t \leq 0$ ). Desse modo,

$$|\widehat{v}(t)| \leq |\widehat{v}_0| + \int_0^t |\widehat{f}(\tau)| d\tau.$$

Sendo assim, sabendo que  $[0, t] \subseteq [0, T]$ , podemos escrever

$$|\widehat{v}(t)| \leq |\widehat{v}_0| + \int_0^T |\widehat{f}(\tau)| d\tau. \quad (2.32)$$

Procedemos agora, manipulando as expressões de modo a obter a norma de  $v$  nos referidos espaços do enunciado deste teorema. Para isso, iniciemos multiplicando a desigualdade obtida em (2.32), por  $|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$ , chegando a

$$|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| \leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^T |\widehat{f}(\tau)| d\tau. \quad (2.33)$$

Aplicando agora a norma do espaço  $L^1(\mathbb{R}^3)$ , na desigualdade acima, infere-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^T |\widehat{f}(\tau)| d\tau \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_0^T |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\tau)| d\tau \right) d\xi. \end{aligned}$$

Ou equivalentemente, pelo Teorema 1.9, encontramos

$$\|v(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.34)$$

Como por hipótese,  $v \in C_T(\mathcal{S}')$ , usando (2.33) e o fato da Transformada de Fourier ser um operador contínuo (ver Teorema 1.13), tem-se que  $v \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)$ . Observado o fato de que, o lado direito da desigualdade acima não depende de  $t$ , temos, passando ao supremo em  $t \in [0, T]$ , que

$$\|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}. \quad (2.35)$$

Note que, o fato de  $v_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s$  e  $f \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)$ , nos garante a finitude da norma  $\|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}$ . Além disso, a desigualdade desejada no primeiro item deste resultado é obtida em (2.35). Este comentário finaliza o item i).

Permita-nos retornar a (2.31) e multiplicar tal desigualdade por  $|\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$ , de modo a encontrar

$$|\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| \leq |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{f}(\tau)| d\tau.$$

Utilizando a norma do espaço  $L^1([0, T])$ , observamos que

$$\begin{aligned} \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt &\leq \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{v}_0| dt \\ &\quad + \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{f}(\tau)| d\tau \right) dt \\ &= |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| \int_0^T e^{-t|\xi|^{2\alpha}} dt \\ &\quad + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^T \left( \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{f}(\tau)| d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de convolução (ver definição 1.7), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt &\leq |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| \int_0^T e^{-t|\xi|^{2\alpha}} dt \\ &\quad + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^T [e^{-t|\xi|^{2\alpha}}] * [|\widehat{f}(t)|] dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mas, verificamos facilmente que

$$\|e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\|_{L^1([0,T])} = \int_0^T e^{-t|\xi|^{2\alpha}} dt = \frac{-e^{-T|\xi|^{2\alpha}} + 1}{|\xi|^{2\alpha}} \leq \frac{1}{|\xi|^{2\alpha}}. \quad (2.37)$$

Sendo assim, (2.36) implica que

$$\begin{aligned} \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt &\leq \frac{|\xi|^{s+2\alpha}}{|\xi|^{2\alpha}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^T [e^{-t|\xi|^{2\alpha}}] * [|\widehat{f}(t)|] dt \\ &= |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|[e^{-t|\xi|^{2\alpha}}] * [|\widehat{f}(t)|]\|_{L^1([0,T])}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Young para convolução (ver Teorema 1.4), e utilizando

novamente o que foi observado em (2.37), chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt &\leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\|_{L^1([0,T])} \|\widehat{f}(t)\|_{L^1([0,T])} \\
&\leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + \frac{|\xi|^{s+2\alpha}}{|\xi|^{2\alpha}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|\widehat{f}(t)\|_{L^1([0,T])} \\
&= |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|\widehat{f}(t)\|_{L^1([0,T])}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt &\leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^T |\widehat{f}(t)| dt \\
&= |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| + \int_0^T |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(t)| dt.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da norma do espaço  $L^1(\mathbb{R}^3)$ , segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_0^T |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| dt \right) d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_0^T |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(t)| dt \right) d\xi. \quad (2.38)$$

Por trocar a ordem das integrais em (2.38) (ver Teorema 1.9), encontramos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(t)| d\xi dt \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}_0| d\xi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(t)| d\xi dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \|v(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \int_0^T \|f(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} dt,$$

isto é,

$$\|v(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} \leq \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}. \quad (2.39)$$

Portanto, obtemos do fato de  $v_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$  e  $f \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ , que  $v \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ . Sendo assim, pelo que foi feito acima, juntamente ao item i) deste teorema, temos que  $v \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ . Desse modo, segue do Corolário 2.1, para todo  $p \geq 1$  e todo

$T > 0$ , que  $v \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3))$ . Além disso, vale

$$\|v\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} \leq \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{p}} \|v\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{p}},$$

e, então, por (2.35) e (2.39), resulta

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}})} &\leq [\|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}]^{1-\frac{1}{p}} [\|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}]^{\frac{1}{p}} \\ &= [\|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}]^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}} \\ &= \|v_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|f(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Com isso, a desigualdade requerida em ii) é obtida em (2.40).  $\square$

Apresentamos a seguir uma outra forma de relacionar espaços de Lei-Lin-Gevrey. Esta foi determinada em [35].

**Lema 2.14.** *Assuma  $a, \sigma$  e  $s$  reais tais que  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times (-\infty, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$ . Seja  $f \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Então,  $f \in \mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, existe  $C_{a,s,\sigma}$  constante positiva, de modo a satisfazer*

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \leq C_{a,s,\sigma} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} &:= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^0 e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{(-s+s)} e^{(\frac{a}{\sigma}-a+a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Agora, note que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{|\xi|^{-s}}{e^{(a-\frac{a}{\sigma})|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}} = 0,$$

sempre que  $a > 0, \sigma > 1$  e  $s \leq 0$  (pois  $a - \frac{a}{\sigma} > 0$ ). Por isso,  $|\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq C_{a,s,\sigma}$ , sempre que  $|\xi| > A$  (aqui,  $A$  é proveniente da definição de limite no infinito). Também note que se  $a = 0$  ou  $\sigma = 1$ , temos que  $s = 0$  e, portanto,  $|\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} = 1$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}^3$ .

Logo, por continuidade (já que  $[0, A]$  é compacto),  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \{|\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}\}$  existe. Denotemos,  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \{|\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}\} := C_{a,s,\sigma}$ . Assim, segue de (2.41) que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^0} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \{|\xi|^{-s} e^{(\frac{a}{\sigma}-a)|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}\} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} C_{a,s,\sigma} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = C_{a,s,\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &= C_{a,s,\sigma} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

O próximo resultado (dado em [34]) estabelece como podemos estimar a norma em espaços de Lei-Lin-Gevrey de um produto de aplicações.

**Lema 2.15.** *Assuma que  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \geq -1$ . Considere que  $f, g \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ . Então,  $fg \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, existe uma constante positiva  $C_s$  tal que*

$$\|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq C_s [\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^0} \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^0}].$$

*Demonstração.* Temos, por definição, que

$$\|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{fg}(\xi)| d\xi.$$

Por utilizar o item v) do Teorema 1.11, concluímos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} (2\pi)^{-3} |[\widehat{f} * \widehat{g}](\xi)| d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |[\widehat{f} * \widehat{g}](\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Agora, pela definição da convolução (ver definição 1.7), segue que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \right| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi - \eta)| |\widehat{g}(\eta)| d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \int_{|\eta| \leq |\xi-\eta|} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\eta| > |\xi-\eta|} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right] d\xi. \end{aligned}$$

Mas, observe que,  $s+1 \geq 0$ . Logo, pelo que foi feito em (2.10) (com  $n=3$ ), na prova do Lema 2.5, além do resultado visto no Lema 2.4 (com  $n=3$ ), concluímos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \int_{|\eta| \leq |\xi-\eta|} 2^{s+1} |\xi-\eta|^{s+1} e^{a|\xi-\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\eta| > |\xi-\eta|} 2^{s+1} |\eta|^{s+1} e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi-\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right] d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} 2^{s+1} |\xi-\eta|^{s+1} e^{a|\xi-\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} 2^{s+1} |\eta|^{s+1} e^{a|\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi-\eta|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi-\eta)| |\hat{g}(\eta)| d\eta \right] d\xi. \end{aligned}$$

Novamente pela definição da convolução (ver definição 1.7), bem como as propriedades da integral, obtemos

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &\leq (2\pi)^{-3} 2^{s+1} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)|] * [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)|] d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)|] * [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)|] d\xi \right] \\ &= (2\pi)^{-3} 2^{s+1} [\| [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)|] * [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)|] \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \| [e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)|] * [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)|] \|_{L^1(\mathbb{R}^3)}]. \end{aligned}$$

Por utilizar a desigualdade de Young para convolução (ver Teorema 1.4), infere-se

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &\leq (2\pi)^{-3} 2^{s+1} [\| [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)|] \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \| e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)| \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + \| e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{f}(\xi)| \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \| [|\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{g}(\xi)|] \|_{L^1(\mathbb{R}^3)}] \\ &= (2\pi)^{-3} 2^{s+1} [\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} + \|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}}]. \end{aligned}$$

Portanto, definindo  $C_s := (2\pi)^{-3} 2^{s+1}$ , encontramos a desigualdade desejada, isto é,

$$\|fg\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq C_s [\|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} + \|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}}].$$

Desde que  $f, g \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1} \cap \mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0$  segue que o lado direito da desigualdade acima é finito. Desse modo,  $fg \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}$ .  $\square$

O corolário abaixo determina como devemos proceder para generalizar o Lema [2.15](#) para funções vetoriais.

**Corolário 2.2.** *Sejam que  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \geq -1$ . Assuma que  $f, g \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0(\mathbb{R}^3)$ . Então,  $f \otimes g \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ . Além disso, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|f \otimes g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq C_s [\|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}],$$

onde  $C_s$  é uma constante positiva.

*Demonstração.* Note inicialmente que, pela definição do produto tensorial, escrevendo  $f = (f_1, f_2, f_3)$  e  $g = (g_1, g_2, g_3)$  (aqui,  $f_i$  e  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as funções-coordenada de  $f$  e  $g$ , respectivamente), temos que

$$f \otimes g = (g_1 f_1, g_1 f_2, g_1 f_3, g_2 f_1, g_2 f_2, g_2 f_3, g_3 f_1, g_3 f_2, g_3 f_3).$$

Com isso, pelas propriedades da transformada de Fourier, chegamos a

$$\mathcal{F}\{f \otimes g\} = (\widehat{g_1 f_1}, \widehat{g_1 f_2}, \widehat{g_1 f_3}, \widehat{g_2 f_1}, \widehat{g_2 f_2}, \widehat{g_2 f_3}, \widehat{g_3 f_1}, \widehat{g_3 f_2}, \widehat{g_3 f_3}).$$

Consequentemente, podemos escrever

$$|\mathcal{F}\{f \otimes g\}(\xi)|^2 = \sum_{i,j=1}^3 |\widehat{g_i f_j}(\xi)|^2.$$

Logo, infere-se que

$$\begin{aligned} \|f \otimes g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left[ \sum_{i,j=1}^3 |\widehat{g_i f_j}(\xi)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &\leq \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g_i f_j}(\xi)| d\xi \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \|g_i f_j\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema [2.15](#), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|f \otimes g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &\leq \sum_{i,j=1}^3 C_s [\|g_i\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|g_i\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}] \\
&= C_s \left[ \sum_{i,j=1}^3 \|g_i\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \sum_{i,j=1}^3 \|g_i\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \right]. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 \|g_i\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} &= \left[ \sum_{i=1}^3 \|g_i\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \right] \left[ \sum_{j=1}^3 \|f_j\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \right] \\
&= \left[ \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}_i(\xi)| \, d\xi \right] \left[ \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}_j(\xi)| \, d\xi \right] \\
&= \left[ \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sum_{i=1}^3 |\widehat{g}_i(\xi)| \, d\xi \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sum_{j=1}^3 |\widehat{f}_j(\xi)| \, d\xi \right] \\
&\leq 9 \left[ \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{a}{\sigma}|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{g}(\xi)| \, d\xi \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{f}(\xi)| \, d\xi \right] \\
&= 9 \|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma}}^0} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos escrever

$$\sum_{i,j=1}^3 \|g_i\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|f_j\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \leq 9 \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma}}^0}.$$

Assim, segue de [\(2.42\)](#) que

$$\|f \otimes g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq 9C_s [\|g\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma}}^0} \|f\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|g\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|f\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma}}^0}],$$

donde concluimos o nosso resultado. □

## Capítulo 3

# Equação Quase-geostrófica em Espaços de Sobolev-Gevrey

Este capítulo divide-se em duas seções, as quais foram postas de modo a estudar, primeiramente, a existência e unicidade de soluções brandas para a Equação Quase-geostrófica crítica em espaços de Sobolev-Gevrey, bem como sua analiticidade e, em seguida, preocupamo-nos em determinar taxas de decaimento para estas mesmas aplicações quando o tempo tende a infinito.

Permita-nos informar que todos os resultados discutidos neste capítulo são baseados nos artigos produzidos por W. G. Melo, T. S. R. Santos e N. S. Costa [38] e W. G. Melo, N. F. Rocha e N. S. Costa [37]. Citamos também os seguintes trabalhos e referências inclusas: [1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 40, 43, 46].

### 3.1 Soluções Brandas Globais e Analíticas

Estudamos, nesta seção, o problema de valor inicial relacionado ao caso crítico da Equação Quase-geostrófica a seguir:

$$\begin{cases} \theta_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta + u_\theta \cdot \nabla \theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0; \\ \theta(\cdot, 0) = \theta_0(\cdot), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Aqui  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  é a variável espacial,  $t \geq 0$  é a variável temporal e  $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada temperatura potencial. Além disso,  $\theta_t$  denota a derivada de  $\theta$  com respeito a variável temporal,  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta$  é o Laplaciano Fracionário de ordem  $\frac{1}{2}$  de  $\theta$ .

Ainda sobre o sistema (3.1), temos que  $u_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$u_\theta(x, t) = (D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(x, t), -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(x, t)),$$

representa a velocidade do fluido, onde  $D_1$  e  $D_2$  são as derivadas com respeito as variáveis espaciais.

Começamos estabelecendo a existência e unicidade de soluções brandas para a Equação Quase-geostrófica (3.1). Para este fim, precisamos do significado destas mesmas soluções.

Sendo assim, vamos aplicar na primeira equação do sistema (3.1) o semigrupo do calor  $e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}$ , onde  $\tau \in [0, t]$ , para obter

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[\theta_\tau + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta] = e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(0).$$

Sabendo que o semigrupo é um operador linear, chegamos a

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_\tau + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[u_\theta \cdot \nabla\theta] = 0. \quad (3.2)$$

Agora, integrando (3.2) sobre o intervalo  $[0, t]$ , resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_\tau \, d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta \, d\tau \\ + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[u_\theta \cdot \nabla\theta] \, d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Consequentemente, (3.3) é da forma

$$\begin{aligned} \theta(t) - e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta \, d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta \, d\tau \\ + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[u_\theta \cdot \nabla\theta] \, d\tau = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\theta(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_\theta \cdot \nabla \theta] d\tau.$$

Portanto, estamos aptos a estabelecer o seguinte conceito.

**Definição 3.1.** Uma aplicação  $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$  é dita solução branda para a Equação Quase-geostrófica (3.1) se esta satisfaz a seguinte igualdade:

$$\theta(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_\theta \cdot \nabla \theta] d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.4)$$

onde  $e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}$  representa o semigrupo do calor, para  $t \geq 0$ .

É importante ressaltar que esta solução que estamos em busca é caracterizada por ser global no tempo.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$ , e  $0 \leq s < 1$ . Suponha que  $\theta_0 \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Afirmamos que existe uma constante positiva  $\mathbb{C}_{a,\sigma,s}$  de modo que, se  $\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} < \mathbb{C}_{a,\sigma,s}$ ; então, obtemos uma única solução branda global  $\theta \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ , para a Equação Quase-geostrófica (3.1) satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$\|\theta\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \leq 6 \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

*Demonstração.* Primeiramente, aplicando a igualdade (3.4), podemos escrever

$$\theta(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0 + B(\theta, \theta)(t), \quad (3.5)$$

onde

$$B(w, v)(\xi, t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_w \cdot \nabla v(\xi, \tau)] d\tau, \quad (3.6)$$

para todo  $w, v \in H := \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ . Nesta prova, utilizamos a norma exposta na definição 1.24.

Nosso objetivo, neste momento, é mostrar que  $B$  é um operador bilinear e contínuo em  $H \times H$ . Para checarmos a bilinearidade, considere  $\delta, \lambda$  escalares e  $w_1, w_2, v_1, v_2 \in H$  e note

que

$$B(\lambda w_1 + w_2, \delta v_1 + v_2)(x, t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_{\lambda w_1 + w_2} \cdot \nabla [\delta v_1 + v_2](x, \tau)] d\tau. \quad (3.7)$$

Por outro lado, observe que pela definição de  $u_\theta$  e sabendo que o Laplaciano fracionário (ver definição [1.17](#)), bem como as derivadas, são operadores lineares, deduzimos que

$$\begin{aligned} u_{\lambda w_1 + w_2} &= (D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[\lambda w_1 + w_2], -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}[\lambda w_1 + w_2]) \\ &= (D_2[\lambda(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1 + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2], -D_1[\lambda(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1 + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2]) \\ &= (\lambda[D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1] + [D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2], \lambda[-D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1] + [-D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2]) \\ &= \lambda(D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1, -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_1) + (D_2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2, -D_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}}w_2) \\ &= \lambda u_{w_1} + u_{w_2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, em coordenadas, segue que

$$u_{\lambda w_1 + w_2}^j = \lambda u_{w_1}^j + u_{w_2}^j, \quad \forall j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Logo, por [\(3.8\)](#), concluímos que

$$\begin{aligned} u_{\lambda w_1 + w_2} \cdot \nabla [\delta v_1 + v_2] &= \sum_{j=1}^2 u_{\lambda w_1 + w_2}^j D_j(\delta v_1 + v_2) \\ &= \sum_{j=1}^2 [\lambda u_{w_1}^j + u_{w_2}^j] D_j(\delta v_1 + v_2) \\ &= \sum_{j=1}^2 [\lambda u_{w_1}^j D_j(\delta v_1 + v_2) + u_{w_2}^j D_j(\delta v_1 + v_2)] \\ &= \sum_{j=1}^2 [\lambda \delta u_{w_1}^j D_j v_1 + \lambda u_{w_1}^j D_j v_2 + \delta u_{w_2}^j D_j v_1 + u_{w_2}^j D_j v_2]. \end{aligned}$$

Com isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
u_{\lambda w_1 + w_2} \cdot \nabla [\delta v_1 + v_2] &= \lambda \delta \sum_{j=1}^2 u_{w_1}^j D_j v_1 + \lambda \sum_{j=1}^2 u_{w_1}^j D_j v_2 \\
&\quad + \delta \sum_{j=1}^2 u_{w_2}^j D_j v_1 + \sum_{j=1}^2 u_{w_2}^j D_j v_2 \\
&= \lambda \delta [u_{w_1} \cdot \nabla v_1] + \lambda [u_{w_1} \cdot \nabla v_2] + \delta [u_{w_2} \cdot \nabla v_1] + u_{w_2} \cdot \nabla v_2.
\end{aligned}$$

Portanto, resulta de (3.7), que

$$\begin{aligned}
B(\lambda w_1 + w_2, \delta v_1 + v_2)(x, t) &= \\
&= - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \{ \lambda \delta [u_{w_1} \cdot \nabla v_1] + \lambda [u_{w_1} \cdot \nabla v_2] + \delta [u_{w_2} \cdot \nabla v_1] + u_{w_2} \cdot \nabla v_2 \}(x, \tau) d\tau \\
&= -\lambda \delta \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_{w_1} \cdot \nabla v_1](x, \tau) d\tau - \lambda \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_{w_1} \cdot \nabla v_2](x, \tau) d\tau \\
&\quad - \delta \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_{w_2} \cdot \nabla v_1](x, \tau) d\tau - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_{w_2} \cdot \nabla v_2](x, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
B(\lambda w_1 + w_2, \delta v_1 + v_2)(x, t) &= \lambda \delta B(w_1, v_1)(x, t) + \lambda B(w_1, v_2)(x, t) \\
&\quad + \delta B(w_2, v_1)(x, t) + B(w_2, v_2)(x, t).
\end{aligned}$$

Assim, concluimos que  $B$  é bilinear.

Resta-nos mostrar que  $B$  é contínuo. Para isto, primeiramente, use o Teorema 1.9 para obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{B(w, v)\}(\xi, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} B(w, v)(x, t) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} \left( - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_w \cdot \nabla v](x, \tau) d\tau \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left( - \int_0^t e^{-i\xi x} e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_w \cdot \nabla v](x, \tau) d\tau \right) dx \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [u_w \cdot \nabla v](x, \tau) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$\mathcal{F}\{B(w, v)\}(\xi, t) = - \int_0^t \mathcal{F}\{e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[u_w \cdot \nabla v]\}(\xi, \tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

Agora, utilizando a transformada do semigrupo do calor, dada na Definição [2.1](#), encontramos

$$\mathcal{F}\{B(w, v)\}(\xi, t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}(\xi, \tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

Por conseguinte, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(\xi, t)| &= \left| - \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}(\xi, \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |e^{-(t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}(\xi, \tau)| d\tau \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}(\xi, \tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por outro lado, observe que,

$$[u_w \cdot \nabla v](\xi, \tau) = \sum_{j=1}^2 u_w^j D_j v(\xi, \tau).$$

Além disso, usando o fato que  $u_w$  é livre de divergente (ver Lema [2.1](#)), inferimos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 D_j(u_w^j v) &= D_1(u_w^1 v) + D_2(u_w^2 v) = \frac{\partial u_w^1}{\partial \xi_1} v + u_w^1 \frac{dv}{d\xi_1} + \frac{\partial u_w^2}{\partial \xi_2} v + u_w^2 \frac{dv}{d\xi_2} \\ &= v \left( \frac{\partial u_w^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_w^2}{\partial \xi_2} \right) + u_w^1 \frac{dv}{d\xi_1} + u_w^2 \frac{dv}{d\xi_2} \\ &= v(\nabla \cdot u_w) + \sum_{j=1}^2 u_w^j D_j v \\ &= \sum_{j=1}^2 u_w^j D_j v. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{j=1}^2 u_w^j D_j v\right\} = \sum_{j=1}^2 \mathcal{F}\{D_j(u_w^j v)\} \\ &= (i\xi)^{(1,0)} \mathcal{F}\{u_w^1 v\} + (i\xi)^{(0,1)} \mathcal{F}\{u_w^2 v\},\end{aligned}$$

onde nesta última igualdade utilizamos a definição [1.8](#) da derivada multi-índice, juntamente com o Teorema [1.11](#). Sendo assim,

$$\mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\} = (i\xi_1) \mathcal{F}\{u_w^1 v\} + (i\xi_2) \mathcal{F}\{u_w^2 v\} = i \left( \sum_{j=1}^2 \xi_j \mathcal{F}\{u_w^j v\} \right).$$

Portanto, chegamos a

$$|\mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}| = |i| \left| \sum_{j=1}^2 \xi_j \mathcal{F}\{u_w^j v\} \right| = \left| \sum_{j=1}^2 \xi_j \mathcal{F}\{u_w^j v\} \right|. \quad (3.11)$$

Assim, voltando para [\(3.9\)](#), e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}\{B(w, v)\}| &\leq \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} \left| \sum_{j=1}^2 \xi_j \mathcal{F}\{u_w^j v\} \right| d\tau \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w) \cdot \xi| d\tau \\ &\leq \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora, vamos multiplicar ambos os lados de [\(3.12\)](#) por  $|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$  para obter

$$\begin{aligned}|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)| &\leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \\ &= |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \\ &\leq |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)(t)|\} d\tau \\ &= |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)(t)|\} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} d\tau,\end{aligned} \quad (3.13)$$

para todo  $t \geq 0$ . É fácil ver, com uma mudança de variável (ver Teorema 1.7), que

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} d\tau = \frac{1 - e^{-t|\xi|}}{|\xi|}$$

e, portanto, segue de (3.13), que

$$|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)| \leq |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)(t)|\} \left( \frac{1 - e^{-t|\xi|}}{|\xi|} \right), \quad \forall t \geq 0.$$

Mas, observe que  $1 - e^{-t|\xi|} < 1$ , sendo assim

$$|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)| \leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)(t)|\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.14)$$

Aplicando a norma  $L^2(\mathbb{R}^2)$  em (3.14), obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)(t)|\}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isto é,

$$\|B(w, v)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} \leq \|vu_w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.15)$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sum_{j=1}^2 |\mathcal{F}(vu_w^j)(t)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(vu_w^1)(t)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(vu_w^2)(t)|^2 d\xi \\ &= \|vu_w^1(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|vu_w^2(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned}$$

Agora, note que, como  $0 \leq s < 1$ ,  $a > 0$  e  $\sigma > 1$ , podemos tomar, no Lema 2.6,  $q = s$  de

modo que

$$\begin{aligned}
\|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 &= \|(vu_w^1)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|(vu_w^2)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \\
&\leq C_{a,\sigma,s} [\|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^1(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^1(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2] \\
&\quad + C_{a,\sigma,s} [\|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^2(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^2(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2] \\
&\leq 2C_{a,\sigma,s} [\|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^1(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^2(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2] \\
&= 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \left[ \sum_{j=1}^2 \|u_w^j(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \right], \tag{3.16}
\end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ . Com isso, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 &\leq 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \left[ \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(u_w^j)(t)|^2 d\xi \right] \\
&= 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sum_{j=1}^2 |\mathcal{F}(u_w^j)(t)|^2 d\xi \right] \\
&= 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(u_w)(t)|^2 d\xi \right], \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Então, utilizando o fato de que  $|\widehat{u}_w| = |\widehat{w}|$ , como foi verificado no Lema [2.1](#), segue que

$$\begin{aligned}
\|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 &\leq 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(w)(t)|^2 d\xi \right] \\
&= 2C_{a,\sigma,s} \|v(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|w(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, pela definição da norma  $\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))$  (ver definição [1.22](#)), obtemos

$$\|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \leq 2C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|(vu_w)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} &\leq [2C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende de  $t$ , passando ao supremo em  $t \geq 0$ ,

segue que

$$\|vu_w\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}. \quad (3.17)$$

Logo, por (3.15), bem como pelas definições de tais normas, inferimos

$$\begin{aligned} \|B(w, v)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} &\leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \\ &\leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_H \|w\|_H, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Novamente, passando ao supremo em  $t \geq 0$ , na desigualdade acima, conclui-se que

$$\|B(w, v)\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_H \|w\|_H. \quad (3.18)$$

Permita-nos, agora, voltar e multiplicar (3.12) por  $|\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$  de modo a obter

$$\begin{aligned} |\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)| &\leq |\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \\ &\leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^\infty e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aplicando a norma  $L^2(\mathbb{R}^+)$  em (3.19), chegamos a

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_0^\infty |\xi|^{2s+3} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left[ \int_0^\infty e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left\| \int_0^\infty e^{-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)(\tau)| d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mas, pela definição da convolução (ver definição 1.7), resulta que

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|[e^{-t|\xi|}] * [\mathcal{F}(vu_w)(t)]\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Young para convolução (ver Teorema [1.4](#)), segue que

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
& \leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \|e^{-t|\xi|}\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|\mathcal{F}(vu_w)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
& = |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^\infty e^{-t|\xi|} dt \right) \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Note que, fazendo uma mudança de variável (ver Teorema [1.7](#)), obtemos

$$\int_0^\infty e^{-t|\xi|} dt = \frac{1}{|\xi|}.$$

Portanto, segue de [\(3.21\)](#) que

$$\begin{aligned}
\left( \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 dt \right)^{1/2} & \leq \frac{|\xi|^{s+\frac{3}{2}}}{|\xi|} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = |\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar a norma  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , o Teorema [1.9](#) e a definição [1.23](#) em [\(3.22\)](#), de modo que

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 dt d\xi \right)^{1/2} \\
& \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left[ \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 dt \right] d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{B(w, v)\}(t)|^2 d\xi dt \right)^{1/2} \leq \|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})},$$

donde

$$\|B(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})} \leq \|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}. \tag{3.23}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &= \int_0^\infty \|vu_w\|_{\dot{H}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt = \int_0^\infty \sum_{j=1}^2 \|vu_w^j\|_{\dot{H}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \|vu_w^j\|_{\dot{H}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt.\end{aligned}$$

Agora, considerando os valores  $s + \frac{1}{2}$  e  $s$  no Lema 2.6, deduzimos que

$$\begin{aligned}\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &\leq \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty C_{a,\sigma,s} [\|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \|u_w^j\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w^j\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2] dt \\ &= C_{a,\sigma,s} \int_0^\infty [\|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \sum_{j=1}^2 \|u_w^j\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \sum_{j=1}^2 \|u_w^j\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2] dt \\ &= C_{a,\sigma,s} \int_0^\infty [\|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \|u_w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|u_w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2] dt.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Note ainda que, novamente pelo que foi verificado no Lema 2.1, resulta

$$\|u_w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_w|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{w}|^2 d\xi = \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2.$$

Analogamente, temos

$$\|u_w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 = \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2.$$

Logo, em (3.24), concluimos que

$$\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \leq C_{a,\sigma,s} \int_0^\infty [\|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2] dt.$$

Pelas definições [1.22](#) e [1.23](#), segue que

$$\begin{aligned}
\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &\leq C_{a,\sigma,s} \int_0^\infty [\|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \\
&\quad + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2] dt \\
&= C_{a,\sigma,s} [\|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \int_0^\infty \|v\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt \\
&\quad + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \int_0^\infty \|w\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt] \\
&= C_{a,\sigma,s} [\|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \\
&\quad + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Logo, por [\(3.25\)](#), infere-se

$$\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \leq 2C_{a,\sigma,s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2. \tag{3.26}$$

Consequentemente, por [\(3.23\)](#) e [\(3.26\)](#), concluímos que

$$\|B(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})} \leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|w\|_H \|v\|_H, \quad \forall w, v \in H. \tag{3.27}$$

Sendo assim, obtemos da definição [1.24](#), de [\(3.18\)](#) e [\(3.27\)](#), a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|B(w, v)\|_H^2 &= \|B(w, v)\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|B(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \\
&\leq 2C_{a,\sigma,s} \|v\|_H^2 \|w\|_H^2 + 2C_{a,\sigma,s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2 \\
&= 4C_{a,\sigma,s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, chegamos a

$$\|B(w, v)\|_H \leq 2\sqrt{C_{a,\sigma,s}} \|w\|_H \|v\|_H, \quad \forall w, v \in H. \tag{3.28}$$

Por tal fato, concluímos que  $B$  é um operador bilinear limitado em  $H \times H$ . Consequentemente,  $B$  é contínuo.

Além disso, note que

$$|\mathcal{F}(e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0)|^2 = |e^{-t|\xi|} \widehat{\theta}_0|^2 = e^{-2t|\xi|} |\widehat{\theta}_0|^2. \tag{3.29}$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0)|^2\} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{-2t|\xi|} |\widehat{\theta}_0|^2\} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}_0|^2 \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{-2t|\xi|}\} d\xi.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Mas, como  $e^{-2t|\xi|}$  é uma função decrescente em  $[0, \infty)$ , observamos que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{-2t|\xi|}\} = 1.$$

De modo que, por (3.30), resulta

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}_0|^2 d\xi = \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \tag{3.31}$$

Por outro lado, temos ainda que

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &= \int_0^\infty \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{\dot{H}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0)|^2 d\xi dt.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Novamente por (3.29), inferimos

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-2t|\xi|} |\widehat{\theta}_0|^2 d\xi dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}_0|^2 \int_0^\infty e^{-2t|\xi|} dt d\xi.
\end{aligned}$$

Com isso, usando o fato que

$$\int_0^\infty e^{-2t|\xi|} dt = \frac{1}{2|\xi|},$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}_0|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2} \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Sendo assim, por (3.31) e (3.33), concluimos

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0\|_H^2 &= \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \\ &= \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 = \frac{3}{2}\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Desse modo, assumindo que

$$\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} < \mathbb{C}_{a,\sigma,s} := \frac{1}{8\sqrt{\frac{3}{2}C_{a,\sigma,s}}},$$

onde  $C_{a,\sigma,s}$  é dado em (3.28), resulta, de (3.34), que

$$4[2\sqrt{C_{a,\sigma,s}}]\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0\|_H = 8\sqrt{\frac{3}{2}C_{a,\sigma,s}}\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, segue que a equação (3.5) admite uma única solução  $\theta$  tal que

$$\begin{aligned} \|\theta\|_H^2 &= \|\theta\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \\ &\leq 4\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\theta_0\|_H^2 = 6\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Isto é, existe uma única solução branda  $\theta$  para a Equação Quase-geostrófica (3.1), de modo a satisfazer (3.35). Assim, concluimos a prova deste resultado. □

Estabelecida a existência e unicidade de solução branda para a Equação Quase-geostrófica (3.1), procedemos agora com a meta de obter a analiticidade desta mesma. Para isso, debrucemo-nos no seguinte resultado.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$  e  $0 \leq s < 1$ . Assuma que  $\theta_0 \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Então, existe uma constante positiva  $\mathbb{C}'_{a,\sigma,s}$  tal que, se  $\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} < \mathbb{C}'_{a,\sigma,s}$ , a solução  $\theta \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ , obtida no Teorema 3.1, satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\|e^{\sqrt{t}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|e^{\sqrt{t}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \leq 8e\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

*Demonstração.* Na demonstração do Teorema 3.1, em (3.5), encontramos a seguinte igual-

dade:

$$\theta(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0 + B(\theta, \theta)(t).$$

Vamos aplicar a transformada de Fourier nesta mesma igualdade acima, de modo a obter

$$\widehat{\theta}(t) = \mathcal{F}(e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \theta_0) + \mathcal{F}(B(\theta, \theta)(t)) = e^{-t|\xi|} \widehat{\theta}_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta) d\tau. \quad (3.36)$$

Agora, multiplicando (3.36) por  $e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}}$ , encontramos

$$e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}(t) = e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\theta}_0 - \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-(t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta) d\tau. \quad (3.37)$$

Permita-nos definir  $\varphi(\xi, t) := \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}\}(\xi, t)$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$  e  $t \geq 0$ . Observe que

$$\widehat{\varphi}(t) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}\}(t)\} = e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}(t),$$

$$\varphi_0 := \varphi(0) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{0}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}\}(0) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{\theta}\}(0) = \theta(0) = \theta_0$$

e também

$$u_\varphi = (D_2(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \varphi, -D_1(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \varphi).$$

Resumidamente, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(t) = e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}(t); \\ \varphi_0 = \theta_0; \\ u_\varphi = (D_2(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \varphi, -D_1(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \varphi). \end{cases} \quad (3.38)$$

Note que a primeira equação do sistema (3.38) nos diz que

$$\theta(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{-t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\varphi})(t).$$

Desse modo, segue de (3.37) e do sistema (3.38) que

$$\widehat{\varphi}(t) = e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} - t|\xi|} \widehat{\varphi}_0 - \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} - (t-\tau)|\xi|} \mathcal{F}\{u_{\mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\varphi}]} \cdot \nabla \mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\varphi}]\}(\tau) d\tau.$$

Isto nos leva a concluir que

$$\varphi(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-t|\xi|}\hat{\varphi}_0) + Q(\varphi, \varphi)(t), \quad (3.39)$$

onde

$$Q(w, v)(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left\{\int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|}\mathcal{F}\{u_{\mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}]} \cdot \nabla \mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}]]}(\tau) d\tau\right\},$$

para todo  $w, v \in H$  (aqui, como na prova do Teorema [3.1](#),  $H = \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ ). Note, por outro lado, que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(Q(w, v))(t)| &= \left| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|}\mathcal{F}\{u_{\mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}]} \cdot \nabla \mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}]]}(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|} |\mathcal{F}\{u_{\mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}]} \cdot \nabla \mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}]]}(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mas, vimos em [\(3.11\)](#), na prova do Teorema [3.1](#), que

$$|\mathcal{F}\{u_w \cdot \nabla v\}| = |\mathcal{F}(vu_w) \cdot \xi| \leq |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)|,$$

onde a última desigualdade é obtida utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Desse modo, [\(3.40\)](#) pode ser reescrito na forma abaixo:

$$|\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| \leq \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}\}(\tau)| d\tau. \quad (3.41)$$

Porém, observe que, o item v) do Teorema [1.11](#) implica que

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}\} \\ &= (\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}^1\}, \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}^2\}) \\ &= (2\pi)^{-2}([e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}}] * \mathcal{F}[u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}^1], [e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{v}}] * \mathcal{F}[u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}\hat{w}})}^2]). \end{aligned}$$

Assim, pela definição da convolução (ver definição [1.7](#)), segue que

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{w})}\}|^2 \\ &= (2\pi)^{-4} \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} (e^{-\sqrt{\tau}|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}\hat{v}(\xi-\eta))\mathcal{F}(u_{\mathcal{F}^{-1}[e^{-\sqrt{\tau}|\eta|^{\frac{1}{2}}}\hat{w}]}^j(\eta)) d\eta \right|^2. \end{aligned}$$

No entanto, como vimos no Lema [2.1](#), mais precisamente em [\(2.3\)](#), temos que

$$\hat{u}_\theta(\eta) = (i\eta_2|\eta|^{-1}\hat{\theta}(\eta), -i\eta_1|\eta|^{-1}\hat{\theta}(\eta)) = \frac{i}{|\eta|}\hat{\theta}(\eta)(\eta_2, -\eta_1).$$

Isto nos diz, em coordenadas, que  $\hat{u}_\theta$  é da forma

$$\hat{u}_\theta^j(\eta) = i \frac{(-1)^{j+1}\hat{\theta}(\eta)\eta_{j+(-1)^{j+1}}}{|\eta|}, \quad j = 1, 2. \quad (3.42)$$

Portanto, podemos escrever

$$\hat{u}_\theta^j(\eta) = i \frac{(-1)^{j+1}e^{-\sqrt{\tau}|\eta|^{\frac{1}{2}}}\hat{w}(\eta)\eta_{j+(-1)^{j+1}}}{|\eta|}, \quad j = 1, 2.$$

Sendo assim, inferimos que

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{w})}\}|^2 = \\ &= (2\pi)^{-4} \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} (e^{-\sqrt{\tau}|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}\hat{v}(\xi-\eta))i \frac{(-1)^{j+1}e^{-\sqrt{\tau}|\eta|^{\frac{1}{2}}}\hat{w}(\eta)\eta_{j+(-1)^{j+1}}}{|\eta|} d\eta \right|^2 \\ &= (2\pi)^{-4} \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} (e^{-\sqrt{\tau}(|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}+|\eta|^{\frac{1}{2}})}\hat{v}(\xi-\eta))i \frac{(-1)^{j+1}\hat{w}(\eta)\eta_{j+(-1)^{j+1}}}{|\eta|} d\eta \right|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Agora, desde que  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  (para todo  $a, b \geq 0$ ) (ver Lema [2.3](#) com  $r = \frac{1}{2}$ ), então

$$|\xi|^{\frac{1}{2}} = |(\xi-\eta) + \eta|^{\frac{1}{2}} \leq |\xi-\eta|^{\frac{1}{2}} + |\eta|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.44)$$

Logo, como  $-\sqrt{\tau} \leq 0$ , resulta que

$$-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}} \geq -\sqrt{\tau}[|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}} + |\eta|^{\frac{1}{2}}].$$

Com isso, segue de (3.43), das observações feitas acima e de (3.42), que

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{w})}\}|^2 \\
& \leq (2\pi)^{-4} \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v}(\xi-\eta)\hat{u}_w^j(\eta) d\eta \right|^2 \\
& = (2\pi)^{-4} e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} \hat{v}(\xi-\eta)\hat{u}_w^j(\eta) d\eta \right|^2.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{w})}\}|^2 \leq (2\pi)^{-4} e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^2 |\hat{v} * \hat{u}_w^j|^2 \\
& = (2\pi)^{-4} e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |(\hat{v} * \hat{u}_w^1, \hat{v} * \hat{u}_w^2)|^2 \\
& = (2\pi)^{-4} e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |((2\pi)^2 \mathcal{F}(vu_w^1), (2\pi)^2 \mathcal{F}(vu_w^2))|^2,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida utilizando o item v) do Teorema 1.11. Desse modo,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{v})u_{\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}\hat{w})}\}|^2 & \leq (2\pi)^{-4} e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} (2\pi)^4 |(\mathcal{F}(vu_w^1), \mathcal{F}(vu_w^2))|^2 \\
& = e^{-2\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\mathcal{F}(vu_w)|^2.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Portanto, voltando a (3.41), chegamos a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| & \leq \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|} |\xi| e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \\
& = \int_0^t e^{[\sqrt{t}-\sqrt{\tau}]|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Mas, analogamente ao que foi feito em (3.44), encontramos que  $\sqrt{t} - \sqrt{\tau} \leq \sqrt{t-\tau}$ , para todo  $\tau, t$  da forma  $0 \leq \tau \leq t$ . Assim, por (3.46), deduzimos que

$$|\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| \leq \int_0^t e^{\sqrt{t-\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}-(t-\tau)|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau. \tag{3.47}$$

Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned}
\sqrt{t-\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}} - (t-\tau)|\xi| &= -\left[\frac{(t-\tau)}{2}|\xi| - \sqrt{t-\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}} + \frac{(t-\tau)}{2}|\xi|\right] \\
&= -\left[\frac{(t-\tau)}{2}|\xi| - \frac{2\sqrt{t-\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi| \\
&= -\left[\frac{(t-\tau)}{2}|\xi| - \frac{2\sqrt{t-\tau}|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi| \\
&= -\left[\sqrt{\frac{(t-\tau)}{2}}|\xi| - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \frac{1}{2} - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi| \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi|, \quad \forall 0 \leq \tau \leq t, \xi \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Sendo assim, segue de (3.47) que

$$|\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| \leq \int_0^t e^{\frac{1}{2} - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau. \quad (3.48)$$

Vamos, agora, proceder como no Teorema 3.1. Multiplique (3.48) por  $|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$ , de modo a obter

$$\begin{aligned}
|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| &\leq |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{\frac{1}{2} - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \\
&= |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \\
&\leq |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} d\tau \\
&= |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} d\tau. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} d\tau = \frac{2 - 2e^{-\frac{t|\xi|}{2}}}{|\xi|},$$

resulta, de (3.49), que

$$\begin{aligned} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| &\leq |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} \frac{2 - 2e^{-\frac{t|\xi|}{2}}}{|\xi|} \\ &= 2|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} (1 - e^{-\frac{t|\xi|}{2}}). \end{aligned}$$

Como  $1 - e^{-\frac{t|\xi|}{2}} \leq 1$ , chegamos a

$$|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| \leq 2|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\}. \quad (3.50)$$

Aplicando a norma  $L^2(\mathbb{R}^2)$  em (3.50), deduzimos que

$$\begin{aligned} &\left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left( |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left( 2|\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \|Q(w, v)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} &\leq 2e^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left( |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}(vu_w)|\} \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2e^{\frac{1}{2}} \|vu_w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como vimos na prova do Teorema 3.1 (as hipóteses sobre  $s, q, a$  e  $\sigma$  são as mesmas), em (3.17) (ver Lema 2.6), temos que

$$\|vu_w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \leq \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))},$$

onde  $C_{a,\sigma,s}$  é a constante proveniente do Lema 2.6. Portanto, segue de (3.51) que

$$\|Q(w, v)(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} \leq 2e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}, \quad \forall t \geq 0.$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende de  $t$ , passando ao supremo em  $t \geq 0$ , encontramos

$$\begin{aligned} \|Q(w, v)(t)\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} &\leq 2e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \|w\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \\ &\leq 2e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|w\|_H \|v\|_H, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde a última desigualdade é obtida observando as definições [1.22](#) e [1.23](#).

Voltemos agora para [\(3.48\)](#). Multiplicando esta desigualdade por  $|\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} |\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)| &\leq |\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \int_0^t e^{\frac{1}{2}-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\xi| |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a norma  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , segue que

$$\begin{aligned} &\left[ \int_0^\infty [|\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)|]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[ \int_0^\infty \left( |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \left[ \int_0^\infty \left( \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \left[ \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \left\| \int_0^\infty e^{-\frac{(t-\tau)}{2}|\xi|} |\mathcal{F}(vu_w)| d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Isto nos diz que

$$\begin{aligned} &\left[ \int_0^\infty [|\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)|]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \\ &\times \left\| [e^{-\frac{t}{2}|\xi|}] * [|\mathcal{F}(vu_w)(t)|] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Temos, então, pela desigualdade de Young para convolução (ver Teorema [1.4](#)), que

$$\begin{aligned} &\left[ \int_0^\infty [|\xi|^{s+\frac{1}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)|]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \|e^{-\frac{t}{2}|\xi|}\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|\mathcal{F}(vu_w)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &= |\xi|^{s+\frac{3}{2}}e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \left( \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}|\xi|} dt \right) \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Assim, como

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}|\xi|} dt = \frac{2}{|\xi|},$$

temos, por (3.53), que

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\infty [|\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)|]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} &\leq |\xi|^{s+\frac{3}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \frac{2}{|\xi|} \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2|\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}}} \left( \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, passando a norma  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , pelo Teorema 1.9, inferimos

$$\begin{aligned} &\left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{Q(w, v)\}(t)|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} 4|\xi|^{s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+1}} \left[ \int_0^\infty |\mathcal{F}(vu_w)|^2 dt \right] d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty 4|\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}+1}} |\mathcal{F}(vu_w)|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2e^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(vu_w)|^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2e^{\frac{1}{2}} \|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|Q(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})} \leq 2e^{\frac{1}{2}} \|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}. \quad (3.54)$$

Além disso, na prova do Teorema 3.1, em (3.26), vimos que

$$\|vu_w\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 \leq 2C_{a, \sigma, s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2.$$

Dessa forma, segue de (3.54), a seguinte desigualdade:

$$\|Q(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})} \leq 2e^{\frac{1}{2}} \sqrt{2C_{a, \sigma, s}} \|w\|_H \|v\|_H. \quad (3.55)$$

Agora, combinando (3.52) e (3.55), chegamos a

$$\begin{aligned} \|Q(w, v)\|_H^2 &= \|Q(w, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 + \|Q(w, v)\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a, \sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \\ &\leq 8eC_{a, \sigma, s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2 + 8eC_{a, \sigma, s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2 \\ &= 16eC_{a, \sigma, s} \|w\|_H^2 \|v\|_H^2. \end{aligned}$$

Por conseguinte, é verdade que

$$\|Q(w, v)\|_H \leq 4\sqrt{eC_{a,\sigma,s}}\|w\|_H\|v\|_H, \quad \forall w, v, \in H. \quad (3.56)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|}\widehat{\varphi}_0)\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|}\widehat{\varphi}_0)]|^2\} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} |\widehat{\varphi}_0|^2\} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{2\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-2t|\xi|} |\widehat{\varphi}_0|^2\} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{2[\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} - t|\xi|]}\} d\xi. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Além disso, é verdade que

$$\begin{aligned} \sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} - t|\xi| &= -\left[\frac{t}{2}|\xi| - \sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{2}|\xi|\right] \\ &= -\left[\frac{t}{2}|\xi| - \frac{2\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{t}{2}|\xi| \\ &= -\left[\frac{t}{2}|\xi| - \frac{2\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}|\xi| \\ &= -\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}|\xi| \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{t}{2}|\xi|. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Assim, por (3.57), encontramos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|}\widehat{\varphi}_0)\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{2\frac{1-t|\xi|}{2}}\} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{1-t|\xi|}\} d\xi \\ &= e \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{-t|\xi|}\} d\xi. \end{aligned}$$

Como  $e^{-t|\xi|}$  é decrescente, então  $\sup_{0 \leq t < \infty} \{e^{-t|\xi|}\} = 1$ . Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 &\leq e \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 d\xi \\ &= e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ademais, podemos proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 = \\ &= \int_0^\infty \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} [|\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0\}]|^2 d\xi dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} [|\xi|^{s+\frac{1}{2}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0|^2 d\xi dt, \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{2\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-2t|\xi|} |\widehat{\varphi}_0|^2 d\xi dt. \end{aligned}$$

Trocando a ordem das integrais na última igualdade acima (pelo Teorema [1.9](#)), deduzimos

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \left[ \int_0^\infty e^{2\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-2t|\xi|} dt \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \left[ \int_0^\infty e^{2[\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}} - t|\xi|]} dt \right] d\xi. \end{aligned}$$

Assim, pelo que foi observado em [\(3.58\)](#), segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \left[ \int_0^\infty e^{2[\frac{1}{2} - \frac{t|\xi|}{2}]} dt \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \left[ \int_0^\infty e^{1-t|\xi|} dt \right] d\xi \\ &= e \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 \left[ \int_0^\infty e^{-t|\xi|} dt \right] d\xi. \end{aligned}$$

Com isso, sabendo que  $\int_0^\infty e^{-t|\xi|} dt = \frac{1}{|\xi|}$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 &\leq e \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 |\xi|^{-1} d\xi \\ &= e \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\varphi}_0|^2 d\xi \\ &= e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Portanto, por (3.59) e (3.60), obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_H^2 &= \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 \\ &\quad + \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \\ &\leq e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 + e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2 \\ &= 2e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Agora, se tomarmos

$$\|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} = \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} < \min \left\{ \frac{1}{16e\sqrt{2C_{a,\sigma,s}}}, \mathbb{C}_{a,\sigma,s} \right\} := \mathbb{C}'_{a,\sigma,s},$$

onde  $C_{a,\sigma,s}$  é a constante obtida em (3.56) e  $\mathbb{C}_{a,\sigma,s}$  é a constante proveniente do Teorema 3.1; então, por (3.61), chegamos a

$$4[4\sqrt{eC_{a,\sigma,s}}] \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_H^2 \leq 16e\sqrt{2C_{a,\sigma,s}} \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} < 1.$$

Pelo Teorema 2.1,  $\varphi \in H$  é a única solução de (3.39) que satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\|\varphi\|_H \leq 2 \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_H.$$

Logo, por (3.61), podemos escrever

$$\|\varphi\|_H^2 \leq 4 \|\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{-t|\xi|} \widehat{\varphi}_0)\|_H^2 \leq 8e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2.$$

Ou seja,

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \leq 8e \|\varphi_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Consequentemente, chegamos a

$$\|e^{\sqrt{t}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 + \|e^{\sqrt{t}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \leq 8e\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Isto prova nosso resultado.  $\square$

## 3.2 Decaimento de Soluções

A última seção deste capítulo nos fornece hipóteses necessárias para garantir o comportamento da nossa solução  $\theta$  global no tempo (ver Teoremas 3.1 e 3.2). Para este fim, é importante apresentar dois lemas que estabelecem características importantes acerca de  $\theta$ , obtida no Teorema 3.1. Estes nos darão condições de estudar algumas taxas de decaimento desta mesma solução quando o tempo é arbitrariamente grande.

Começemos estudando uma famosa desigualdade de energia proveniente da teoria da Mecânica dos Fluidos.

**Lema 3.1.** *Assuma que  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$  e  $s \in [0, 1)$ . Considere que  $\theta_0 \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . Então, a solução  $\theta$  da Equação Quase-geostrófica (3.1), obtida no Teorema 3.1 (ver também Teorema 3.2), estando em  $L^2(\mathbb{R}^2)$  para todo o tempo, deve satisfazer:*

$$\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2 \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = \|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Em particular,

$$\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \geq s \geq 0. \quad (3.62)$$

*Demonstração.* A primeira equação do sistema (3.1) nos diz que

$$\theta_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta + u_\theta \cdot \nabla \theta = 0,$$

isto é,

$$\theta_t = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta - u_\theta \cdot \nabla \theta. \quad (3.63)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \langle \theta, \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 \langle \theta, \theta_t \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \\ &= \langle \theta, \theta_t \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Logo, segue de (3.63), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta - u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Vamos analisar individualmente cada um dos termos do lado direito da expressão acima. Para isso, note que

$$\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \theta (u_\theta \cdot \nabla \theta) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \theta \left( \sum_{j=1}^2 u_\theta^j D_j \theta \right) \, d\xi.\tag{3.65}$$

Substituindo (3.10) em (3.65), encontramos

$$\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \theta \left( \sum_{j=1}^2 D_j (u_\theta^j \theta) \right) \, d\xi = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \theta D_j (u_\theta^j \theta) \, d\xi.\tag{3.66}$$

Deste modo, segue por integração por partes que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta D_j (u_\theta^j \theta) \, d\xi = - \int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j \theta D_j \theta \, d\xi.$$

Sendo assim, segue de (3.66) que

$$\begin{aligned}\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= - \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j \theta D_j \theta \, d\xi = - \int_{\mathbb{R}^2} \theta \sum_{j=1}^2 (u_\theta^j D_j \theta) \, d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \theta (u_\theta \cdot \nabla \theta) \, d\xi = - \langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Logo, chegamos a

$$\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0.\tag{3.67}$$

Ademais, observe que pela identidade de Plancherel (ver Teorema 1.12) e pela definição 1.17

do Laplaciano fracionário, obtemos

$$\langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (2\pi)^{-2} \langle \widehat{\theta}, \mathcal{F}\{ -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (2\pi)^{-2} \langle \widehat{\theta}, -|\xi| \widehat{\theta} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Utilizando a definição do produto interno de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , resulta

$$\langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -(2\pi)^{-2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\theta}(|\xi| \widehat{\theta}) d\xi \right) = -(2\pi)^{-2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta}) \overline{(|\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta})} d\xi \right),$$

donde, novamente pela definição [1.17](#) do Laplaciano fracionário, deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= -(2\pi)^{-2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\}) \overline{(\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\})} d\xi \right) \\ &= -(2\pi)^{-2} \langle \mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\}, \mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Pela identidade de Plancherel (ver Teorema [1.12](#)), segue que

$$\begin{aligned} \langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= -(2\pi)^2 (2\pi)^{-2} \langle (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta, (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= -\langle (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta, (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= -\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Desse modo, temos, por [\(3.64\)](#), que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \langle \theta, -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Por conseguinte, concluímos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 0. \tag{3.69}$$

Integrando [\(3.69\)](#) sobre  $[s, t]$ , tem-se que

$$\frac{1}{2} \int_s^t \frac{d}{d\tau} \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, resulta

$$\frac{1}{2} \|\theta(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \Big|_s^t + \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = 0.$$

Como um resultado, concluimos que

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \frac{1}{2}\|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = \frac{1}{2}\|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Finalmente concluimos que

$$\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2 \int_s^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau = \|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (3.70)$$

o que mostra que

$$\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\theta(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

□

Se acrescentarmos à condição inicial  $\theta_0$  do problema (3.1) o fato desta estar em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , podemos concluir que a norma  $L^2$  da solução  $\theta$ , obtida no Teorema 3.1 (ver também Teorema 3.2), deve decair a zero quando o tempo tende a infinito.

**Lema 3.2.** *Assuma que  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$  e  $s \in [0, 1)$ . Considere que  $\theta_0 \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ . Então, a solução  $\theta$  da Equação Quase-geostrófica (3.1), obtida no Teorema 3.1 (ver também Teorema 3.2), deve satisfazer:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

*Demonstração.* Permita-nos iniciar fixando  $\delta > 0$  e então defina as seguintes funções:

$$w_\delta(\xi, t) := \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \widehat{\theta})(\xi, t), \quad v_\delta(\xi, t) := \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| > \delta\}} \widehat{\theta})(\xi, t),$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$  e  $t \geq 0$ . Perceba que  $\theta = w_\delta + v_\delta$  e, pela definição de  $w_\delta$  e por (3.1), tal função satisfaz a igualdade

$$\partial_t w_\delta + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta + \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)) = 0. \quad (3.71)$$

Desse modo, fazendo uso do produto interno do espaço  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , segue que

$$\langle \partial_t w_\delta + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta + \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

ou ainda,

$$\langle \partial_t w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \langle (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0. \quad (3.72)$$

Agora, observe que, pelo que foi feito em (3.68) no Lema 3.1, infere-se

$$\langle (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (3.73)$$

Além disso, podemos escrever

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \operatorname{Re}(\langle \partial_t w_\delta, w_\delta \rangle),$$

onde  $\operatorname{Re}(z)$  representa a parte real do número complexo  $z$ . Desse modo, por (3.72), e do fato da função  $\operatorname{Re}$  ser uma função linear real, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \operatorname{Re}[-\langle (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \\ &= \operatorname{Re}[-\langle (-\Delta)^{\frac{1}{2}} w_\delta, w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}] - \operatorname{Re}[\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \\ &= -\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \operatorname{Re}[-\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}], \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a informação descrita em (3.73). Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \operatorname{Re}[-\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}] \\ &\leq |\operatorname{Re}[-\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}]| \\ &\leq |\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)), w_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}|. \end{aligned}$$

Por utilizar a identidade de Plancherel, fornecida no Teorema 1.12, resulta que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq (2\pi)^{-2} |\langle \chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta), \widehat{w}_\delta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}|.$$

Pela definição do produto interno utilizado, bem como a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\{|\xi| \leq \delta\}} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta) \widehat{w}_\delta d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-2} \int_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{w}_\delta| |\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla \theta)| d\xi. \end{aligned}$$

Observe ainda que, pelo que foi estudado em (3.11) no Teorema 3.1, temos que

$$|\mathcal{F}\{u_\theta \cdot \nabla \theta\}| \leq |\xi| |\mathcal{F}(\theta u_\theta)|.$$

Logo, chegamos a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2}^2 \leq (2\pi)^{-2} \int_{|\xi| \leq \delta} |\xi| |\widehat{w}_\delta| |\mathcal{F}(\theta u_\theta)| d\xi.$$

Considere  $q$  um número real positivo que satisfaz  $-2s + 1 \leq q \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-2} \int_{|\xi| \leq \delta} |\xi|^q |\xi|^{1-q} |\widehat{w}_\delta| |\mathcal{F}(\theta u_\theta)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-2} \int_{|\xi| \leq \delta} \delta^q |\xi|^{1-q} |\widehat{w}_\delta| |\mathcal{F}(\theta u_\theta)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-2} \delta^q \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{1-q} |\widehat{w}_\delta| |\mathcal{F}(\theta u_\theta)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-2} \delta^q \| |\xi|^{1-q} \widehat{w}_\delta \|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\mathcal{F}(\theta u_\theta)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Segue então, da desigualdade de Hölder, descrita no Teorema 1.1, que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq (2\pi)^{-2} \delta^q \| |\xi|^{1-q} \mathcal{F}(\theta u_\theta) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\widehat{w}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Com isso, novamente pela identidade de Plancherel (ver Teorema 1.12) e pela definição dos espaços estudados, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \delta^q \|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{1-q}(\mathbb{R}^2)} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo  $[0, t]$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq -2 \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau + 2 \int_0^t \delta^q \|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{1-q}(\mathbb{R}^2)} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\leq 2 \int_0^t \delta^q \|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{1-q}(\mathbb{R}^2)} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau, \end{aligned}$$

onde na primeira integral utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Portanto,

$$\|w_\delta(t)\|_{L^2}^2 - \|w_\delta(0)\|_{L^2}^2 \leq 2\delta^q \int_0^t \|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{1-q}(\mathbb{R}^2)} \|w_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau. \quad (3.74)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} \|w_\delta(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= (2\pi)^{-2} \|\widehat{w}_\delta(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{w}_\delta(\tau)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{|\xi| \leq \delta} |\widehat{\theta}(\tau)|^2 d\xi \leq (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(\tau)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \|\widehat{\theta}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

e, então, pela identidade de Plancherel (ver Teorema 1.12) e pelo Lema 3.1 (para  $s = 0$ ), obtemos

$$\|w_\delta(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (3.75)$$

Além disso, os Lemas 2.1 e 2.7 (com  $s_1 = s_2 = \frac{2-q}{2}$ ), nos garantem que

$$\|\theta u_\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{1-q}(\mathbb{R}^2)} \leq C_q \|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (3.76)$$

desde que  $0 < q < 2$ . Substituindo as informações (3.75) e (3.76), na desigualdade (3.74), encontramos

$$\begin{aligned} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\delta^q \int_0^t C_q \|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2 \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &= \|w_\delta(0)\|_{L^2}^2 + 2\delta^q C_q \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_0^t \|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Perceba ainda que, pela definição do Laplaciano fracionário, segue que

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2-q} |\widehat{\theta}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{\frac{2-q}{2}} \widehat{\theta}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\}|^2 d\xi = \|\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&= (2\pi)^2 \|(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Agora, desde que  $-2s+1 \leq q \leq 1$ , podemos escrever  $2-q = (1-t)(2s+1) + t$ , para algum  $t \in [0, 1]$  (fornecido que  $1 \leq 2-q \leq 2s+1$ ). Além disso, é fácil ver que  $2 = 2t + 2(1-t)$ . Consequentemente, pela identidade de Plancherel novamente (ver Teorema 1.12), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= (2\pi)^{-2} \| |\xi|^{\frac{2-q}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2-q} |\widehat{\theta}|^2 d\xi \\
&= (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{(1-t)(2s+1)+t} |\widehat{\theta}|^{2(1-t)+2t} d\xi \\
&= (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^{(1-t)(2s+1)} |\widehat{\theta}|^{2(1-t)}) (|\xi|^t |\widehat{\theta}|^{2t}) d\xi.
\end{aligned}$$

Assim, por utilizar a desigualdade de Hölder (com  $p = \frac{1}{1-t}$  e  $q = \frac{1}{t} \geq 1$ ), ver Teorema 1.1, encontramos

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq (2\pi)^{-2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s+1} |\widehat{\theta}|^2 d\xi \right]^{1-t} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| |\widehat{\theta}|^2 d\xi \right]^t \\
&= (2\pi)^{-2} \| |\xi|^{s+\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2(1-t)} \| |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2t}
\end{aligned}$$

e, então, pela desigualdade de Young, vista no Teorema 1.3, estabelecemos que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\frac{2-q}{4}} \theta\|_{L^2}^2 &\leq (2\pi)^{-2} [(1-t) \| |\xi|^{s+\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2}^2 + t \| |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2}^2] \\
&\leq (2\pi)^{-2} [\| |\xi|^{s+\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2}^2 + \| |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2}^2].
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Portanto, segue da informação dada em (3.79), que (3.78) é da forma

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}}^2 &\leq \| |\xi|^{s+\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \| |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(s+\frac{1}{2})} |\widehat{\theta}|^2 d\xi + \|\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

Como, para  $a > 0$  e  $\sigma > 1$ , é verdade que  $e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \geq 1$ , então

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{\dot{H}^{\frac{2-q}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(s+\frac{1}{2})} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}|^2 d\xi + (2\pi)^2 \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \|\theta\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2 + (2\pi)^2 \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Desse modo, voltando a expressão (3.77), observado a informação obtida em (3.80), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\delta^q C_q \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_0^t [\|\theta\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 + (2\pi)^2 \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2] d\tau \\ &\leq \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\delta^q C_q \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} [\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 + (2\pi)^2 \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Note ainda que, pelo que foi feito em (3.70), na prova do Lema 3.1, verifica-se que

$$\int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq 0,$$

e, portanto, (3.81) torna-se

$$\|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\delta^q C_q \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} [\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}})}^2 + \frac{1}{2} (2\pi)^2 \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2].$$

Mas, como  $\theta$  é a solução encontrada no Teorema 3.1, é sabido que

$$\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 \leq 6 \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Ou seja,

$$\|w_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2\delta^q C_q \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} [6 \|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{1}{2} (2\pi)^2 \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2],$$

para todo  $t \geq 0$ . Desde que,  $\delta$  é arbitrário, podemos tomá-lo tão pequeno quanto desejarmos e, como consequência da desigualdade acima, obteremos  $\|w_\delta(t)\|_{L^2}^2$  tão próximo de zero quanto quisermos (desde que  $\|w_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  e  $\delta^q$  tendem a 0, quando  $\delta$  tende a 0). Isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , de modo a satisfazer

$$\|w_\delta(t)\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.82)$$

Permita-nos agora, estudar a função  $v_\delta$ . Veja que, pela identidade de Plancherel (ver Teorema 1.12), infere-se

$$\begin{aligned}\|v_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= (2\pi)^{-2} \|\widehat{v}_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = (2\pi)^{-2} \int_{|\xi|>\delta} |\widehat{\theta}|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{|\xi|>\delta} |\xi|^{-1} |\xi| |\widehat{\theta}|^2 d\xi \leq (2\pi)^{-2} \delta^{-1} \int_{|\xi|>\delta} |\xi| |\widehat{\theta}|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-2} \delta^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| |\widehat{\theta}|^2 d\xi = (2\pi)^{-2} \delta^{-1} \| |\xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.\end{aligned}$$

Desse modo, utilizando a definição do Laplaciano fracionário, bem como a identidade de Plancherel mais uma vez (ver Teorema 1.12), deduzimos que

$$\|v_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq (2\pi)^{-2} \delta^{-1} \|\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \delta^{-1} \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo  $[0, \infty)$ , encontramos

$$\int_0^\infty \|v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt \leq \delta^{-1} \int_0^\infty \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt \leq [2\delta]^{-1} \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

onde na última igualdade utilizamos novamente o que foi obtido em (3.70) na demonstração do Lema 3.1. Agora, considere o conjunto  $A_{\epsilon,\delta} = \{t \geq 0 : \|v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ . Note que, fazendo uso de  $|\cdot|$ , a medida de Lebesgue usual, obtemos

$$\frac{\epsilon^2}{4} |A_{\epsilon,\delta}| \leq \int_{A_{\epsilon,\delta}} \|v_\delta(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \int_0^\infty \|v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dt \leq [2\delta]^{-1} \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Defina,  $T_{\epsilon,\delta} =: 2\epsilon^{-2}\delta^{-1} \|\theta_0\|_{L^2}^2$ . Assim, podemos escrever

$$|A_{\epsilon,\delta}| \leq 2(\epsilon^2\delta)^{-1} \|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = T_{\epsilon,\delta}.$$

Portanto,  $[0, T_{\epsilon,\delta} + 1] \setminus A_{\epsilon,\delta} \neq \emptyset$ , pois se o contrário ocorrer, teremos  $[0, T_{\epsilon,\delta} + 1] \subseteq A_{\epsilon,\delta}$ ; mas, neste caso,

$$T_{\epsilon,\delta} + 1 = |[0, T_{\epsilon,\delta} + 1]| \leq |A_{\epsilon,\delta}| \leq T_{\epsilon,\delta},$$

o que claramente é um absurdo. Por conseguinte, existe  $t_0 \in [0, T_{\epsilon,\delta} + 1]$  de tal modo que  $t_0 \notin A_{\epsilon,\delta}$ . Ou seja,

$$\|v_\delta(t_0)\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.83)$$

Finalmente, observadas as desigualdades (3.82) e (3.83), além do fato de  $\theta(t) = w_\delta(t) + v_\delta(t)$ , deduzimos que

$$\|\theta(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|w_\delta(t_0) + v_\delta(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|w_\delta(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|v_\delta(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \epsilon.$$

Por utilizar o Lema 3.1 (com  $s = t_0$ ),

$$\|\theta(t)\|_{L^2} \leq \|\theta(t_0)\|_{L^2} < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por fim, isto significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

□

Estamos, agora, preparados para estabelecer nossos critérios de decaimento para a solução  $\theta$  obtida no Teorema 3.1 (ver também Teorema 3.2).

**Teorema 3.3.** *Assuma  $a > 0$ ,  $\sigma > 1$  e  $s \in [0, 1)$ . Considere,  $\theta_0 \in \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  suficientemente pequeno em  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ . Então, a solução  $\theta$ , obtida no Teorema 3.1 (ver também Teorema 3.2), estando em  $L^2(\mathbb{R}^2)$  para todo o tempo, decai de modo a satisfazer:*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa} = 0, \quad \forall \kappa \geq 0.$$

*Demonstração.* A demonstração deste resultado será particionada em quatro passos.

*Passo 1:* É verdade que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = 0$ .

Defina a função  $v(x, \tau) = \theta(x, \tau + \frac{t}{2} + l)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , onde  $l \geq 0$  e  $t \geq 0$  estão fixos. Repare que  $v \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ , pois

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq \tau < \infty} \{|\widehat{v}(\tau)|^2\} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq \tau < \infty} \{|\widehat{\theta}(\tau + \frac{t}{2} + l)|^2\} d\xi. \end{aligned}$$

Agora, tomando  $p = \tau + \frac{t}{2} + l$ , e observando que se  $0 \leq \tau < \infty$ , segue que  $\frac{t}{2} + l \leq p < \infty$  e

também

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{\frac{t}{2}+l \leq p < \infty} \{|\widehat{\theta}(p)|^2\} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{0 \leq p < \infty} \{|\widehat{\theta}(p)|^2\} d\xi \\
&= \|\theta\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))}^2.
\end{aligned}$$

Desse modo, como  $\theta \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))$ , temos que

$$\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \leq \|\theta\|_{\widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} < \infty.$$

Isto garante que  $v \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))$ . Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 &= \int_0^\infty \|v(\tau)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{v}(\tau)|^2 d\xi d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(\tau + \frac{t}{2} + l)|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando novamente  $p = \tau + \frac{t}{2} + l$ , segue que

$$\begin{aligned}
\|v(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2 &= \int_{\frac{t}{2}+l}^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(p)|^2 d\xi dp \\
&\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(p)|^2 d\xi dp \\
&= \int_0^\infty \|\theta(p)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}}^2 d\xi \\
&= \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}^2.
\end{aligned}$$

Com isso, como  $\theta \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ , resulta que

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))} \leq \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))} < \infty,$$

isto é,  $v \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ . Consequentemente,  $v \in \widetilde{L^\infty}(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ . Note que, de maneira resumida, poderíamos garantir esta pertinência, observando o fato de  $v$  ser uma translação de  $\theta$  na variável temporal. É também verdade, pelo Teorema [3.1](#) aplicado

à Equação Quase-geostrófica (3.1), que

$$\|v_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} = \|\theta(\frac{t}{2} + l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s} \leq \|\theta\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s)} \leq \sqrt{6}\|\theta_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s},$$

e, como por hipótese,  $\theta_0$  é suficientemente pequeno em  $\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)$ , deduzimos que  $v_0$  também o é. Desse modo, como  $v$  é apenas uma translação de  $\theta$ , segue do fato de  $\theta$  ser solução branda do sistema (3.1), que  $v$  resolve o seguinte sistema:

$$\begin{cases} v_\tau + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} v + u_v \cdot \nabla v = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \tau > 0, \\ v(\cdot, 0) := v_0(\cdot) = \theta(\cdot, \frac{t}{2} + l), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.84)$$

Logo, podemos aplicar os Teoremas 3.1 e 3.2, no sistema (3.84) acima, de modo a obter uma única solução branda  $v \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$  tal que

$$\begin{aligned} \|e^{\sqrt{\tau}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} v(\tau)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} &\leq \|e^{\sqrt{\tau}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2))} \\ &\leq \sqrt{8e}\|v_0\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \\ &= \sqrt{8e}\|\theta(\frac{t}{2} + l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando  $\tau = \frac{t}{2}$ , inferimos, para todo  $t \geq 0$  e  $l \geq 0$  fixos, que

$$\|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{8e}\|\theta(\frac{t}{2} + l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}. \quad (3.85)$$

Por outro lado, considere  $r > 0$  fixo e note que

$$\begin{aligned} \|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Permita-nos definir as seguintes funções:

$$J_1^l(t) = \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi$$

e também

$$J_2^l(t) = \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi,$$

de modo que

$$\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = J_1^l(t) + J_2^l(t). \quad (3.86)$$

Façamos uma análise das funções  $J_1^l$  e  $J_2^l$  individualmente. Para isso, veja que

$$\begin{aligned} J_1^l(t) &= \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \leq \int_{|\xi| \leq r} r^{2s} e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \\ &= r^{2s} e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} \int_{|\xi| \leq r} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \leq r^{2s} e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \\ &= r^{2s} e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} \|\hat{\theta}(t+l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

Por isso, pela identidade de Plancherel (dada no Teorema 1.12) e pelo Lema 3.1, aplicado à solução  $\theta(t+l)$ , com  $l \geq 0$  fixo, inferimos que

$$\begin{aligned} J_1^l(t) &\leq (2\pi)^2 e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} r^{2s} \|\theta(t+l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq (2\pi)^2 e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}} r^{2s} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned} J_2^l(t) &= \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi \\ &\leq e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.1, sabemos que

$$e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\hat{\theta}(t+l)|^2 = |e^{\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \hat{\theta}(t+l)|^2 = |\mathcal{F}(e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t+l))|^2.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} J_2^l(t) &\leq e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t+l))(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t+l))(\xi)|^2 d\xi \\ &= e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2, \end{aligned}$$

isto é

$$J_2^l(t) \leq e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.88)$$

Voltando a (3.86) e multiplicando tal igualdade por  $t^{2s}$ , encontramos

$$t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = t^{2s}J_1^l(t) + t^{2s}J_2^l(t). \quad (3.89)$$

Agora por (3.87) e (3.88), (3.89) é da forma

$$\begin{aligned} t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq t^{2s}(2\pi)^{-2}e^{2ar^{\frac{1}{\sigma}}}r^{2s}\|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + t^{2s}e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}r^{\frac{1}{2}}} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Escolhendo  $r = \frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}$ , concluímos, por substituir este valor em (3.90), que

$$\begin{aligned} t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq t^{2s}(2\pi)^{-2} \exp\left\{2a\left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right\} \\ &\quad \times \left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{2s} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + t^{2s}e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}\left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{\frac{1}{2}}} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned}$$

Deste modo, denotando

$$C_s = (2\pi)^{-2} \left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2}\right]^{2s}$$

e também

$$C_{a,s,\sigma} = 2a \left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2}\right]^{\frac{1}{\sigma}},$$

segue que

$$\begin{aligned} t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_s \exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + t^{2s}e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}\left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{\frac{1}{2}}} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s}^2. \end{aligned}$$

Logo, por (3.85), temos

$$\begin{aligned} t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_s \exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + t^{2s}e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}\left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{\frac{1}{2}}} 8e \|\theta(\frac{t}{2}+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
[8e]e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}\left[\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]^2}{2t}\right]^{\frac{1}{2}}} &= [8e]e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}\frac{[\ln(2^{2s+4}e)]}{\sqrt{2t}}} = [8e]e^{-[\ln(2^{2s+4}e)]} \\
&= [8e]e^{\ln[(2^{2s+4}e)^{-1}]} = [8e]\frac{1}{2^{2s+4}e} \\
&= \frac{1}{2^{2s+1}}.
\end{aligned}$$

Segue então de (3.91) que

$$\begin{aligned}
t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_s \exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\}\|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + t^{2s}\frac{1}{2^{2s+1}}\|\theta(\frac{t}{2}+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&= C_s \exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\}\|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + 2^{-1}(\frac{t}{2})^{2s}\|\theta(\frac{t}{2}+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

Note ainda que, como  $\sigma > 1$ , em particular  $\sigma > 0$ , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\} = 1.$$

Desse modo,

$$\exp\{C_{a,s,\sigma}t^{-\frac{1}{\sigma}}\} \leq M_{a,s,\sigma},$$

para todo  $t$  suficientemente grande. Aqui  $M_{a,s,\sigma}$  é uma constante positiva. Portanto,

$$\begin{aligned}
t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_s M_{a,s,\sigma} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + 2^{-1}(\frac{t}{2})^{2s}\|\theta(\frac{t}{2}+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2,
\end{aligned}$$

ou de maneira reduzida, tomando  $C_s M_{a,s,\sigma} := N_{a,s,\sigma}$ , podemos escrever

$$t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \leq N_{a,s,\sigma} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2^{-1}(\frac{t}{2})^{2s}\|\theta(\frac{t}{2}+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Agora, observadas as hipóteses do Lema 2.8, obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{2s}\|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2N_{a,s,\sigma} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

ou ainda

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t+l)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{2N_{a,s,\sigma}} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Equivalentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{2N_{a,s,\sigma}} \|\theta(l)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Finalmente, passando ao limite, quando  $l \rightarrow \infty$ , e aplicando o Lema [3.2](#), deduzimos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \leq 0,$$

donde concluimos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = 0. \quad (3.92)$$

*Passo 2:* Nosso objetivo agora é mostrar que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0$ , para todo  $\kappa > s$ , sempre que  $s \in [0, 1)$ .

Para isso, observe que, por definição, podemos escrever

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi. \quad (3.93)$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} [|\xi|^{\frac{1}{2}}]^{(4\kappa-4s)} e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} &= |\xi|^{(2\kappa-2s+2s)} e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \\ &= |\xi|^{2\kappa} e^0 = |\xi|^{2\kappa}, \end{aligned}$$

segue de [\(3.93\)](#), que

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [|\xi|^{\frac{1}{2}}]^{(4\kappa-4s)} e^{-2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi. \quad (3.94)$$

Assim, fazendo  $\lambda = |\xi|^{\frac{1}{2}} > 0$ ,  $a = 4\kappa - 4s > 0$  (pois  $\kappa > s$ ) e  $b = 2\sqrt{\frac{t}{2}}$ , temos por [\(3.94\)](#), que

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda^a e^{-b\lambda} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi.$$

Utilizando o Lema [2.9](#), resulta que

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} a^a (eb)^{-a} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (4\kappa - 4s)^{(4\kappa-4s)} \left(2e\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^{-(4\kappa-4s)} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (4\kappa - 4s)^{(4\kappa-4s)} \left(\frac{2e}{\sqrt{2}}\right)^{-(4\kappa-4s)} t^{-(2\kappa-2s)} |\xi|^{2s} \\ &\quad \times e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Agora, denotando  $C_{\kappa,s} =: (4\kappa - 4s)^{(4\kappa-4s)} \left(\frac{2e}{\sqrt{2}}\right)^{-(4\kappa-4s)}$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} C_{\kappa,s} t^{-(2\kappa-2s)} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &= C_{\kappa,s} t^{-(2\kappa-2s)} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por conhecer a transformada do semigrupo do calor, dada na Definição [2.1](#), nos é fornecido

$$e^{2\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 = |e^{\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^{\frac{1}{2}}} \widehat{\theta}(t)|^2 = |\mathcal{F}(e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t))|^2.$$

Logo, para todo  $t > 0$ , infere-se

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_{\kappa,s} t^{-(2\kappa-2s)} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t))|^2 d\xi \\ &= C_{\kappa,s} t^{-(2\kappa-2s)} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Multiplicando a desigualdade obtida em [\(3.95\)](#), por  $t^{2\kappa} > 0$ , chegamos a

$$\begin{aligned} t^{2\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_{\kappa,s} t^{2s} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= 2^{2s} C_{\kappa,s} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s} \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$t^{\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^{\kappa}(\mathbb{R}^2)} \leq 2^s C_{\kappa,s}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^s \|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}} \theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Agora, por tomar  $l = 0$ , em (3.85) do Passo 1, deduzimos que

$$\|e^{\sqrt{\frac{t}{2}}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}}\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{8e}\|\theta(\frac{t}{2})\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Portanto, chegamos a

$$t^\kappa\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq 2^s C_{\kappa,s}^{\frac{1}{2}}(\frac{t}{2})^s \sqrt{8e}\|\theta(\frac{t}{2})\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Passando ao limite superior, quando  $t \rightarrow \infty$ , segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq 2^s C_{\kappa,s}^{\frac{1}{2}} \sqrt{8e} \limsup_{t \rightarrow \infty} (\frac{t}{2})^s \|\theta(\frac{t}{2})\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Equivalentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq 2^s C_{\kappa,s}^{\frac{1}{2}} \sqrt{8e} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Pelo que foi provado no Passo 1, temos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

ou seja,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq 0.$$

Por conseguinte,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \forall \kappa > s.$$

*Passo 3:* Nosso objetivo agora é mostrar que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0$ , para todo  $\kappa \in [0, s]$ , onde  $0 \leq s < 1$ .

Para isso, note que para  $0 \leq \kappa \leq s$ , com  $s \in [0, 1)$ , vale

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq 1} 1^{2\kappa} e^{2a1^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2\kappa-2s} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Deste modo, como  $2\kappa - 2s \leq 0$ , segue que  $|\xi|^{2\kappa-2s} \leq 1$  sempre que  $|\xi| > 1$ . Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq e^{2a} \int_{|\xi| \leq 1} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &\leq e^{2a} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{(\mathbb{R}^2)} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &= e^{2a} \|\widehat{\theta}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a identidade de Plancherel, dada no Teorema [1.12](#), resulta que

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq e^{2a} (2\pi)^2 \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= e^{2a} (2\pi)^2 \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + t^{-2s} [t^{2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2]. \end{aligned}$$

Desse modo, passando ao limite superior, quando  $t \rightarrow \infty$ , segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq e^{2a} (2\pi)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-2s} [t^{2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2]. \end{aligned}$$

Observado que  $s \geq 0$ , temos que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-2s} = 0$  (se  $s > 0$ ) ou  $t^{-2s} = 1$  (se  $s = 0$ ). Além disso, pelo Passo 1,  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = 0$ . Em adição, pelas características da solução  $\theta$ , sabemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 0$  (ver Lema [3.2](#)). Por conseguinte, é verdade que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 0.$$

Por fim, chegamos a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \forall \kappa \in [0, s], s \in [0, 1). \quad (3.96)$$

*Passo 4:* É verdade que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0$ , para todo  $\kappa \in (0, s)$ , sempre que  $s \in (0, 1)$ .

Vamos considerar agora  $r > 0$  fixo. Temos, então, para  $0 < \kappa < s$ , o seguinte:

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq r} r^{2\kappa} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2\kappa-2s} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Mas, desde que  $2\kappa - 2s < 0$ , segue que  $|\xi|^{2\kappa-2s} < r^{2\kappa-2s}$  se  $|\xi| > r$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq r^{2\kappa} \int_{|\xi| \leq r} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > r} r^{2\kappa-2s} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &\leq r^{2\kappa} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi + r^{2\kappa-2s} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} e^{2a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\hat{\theta}(t)|^2 d\xi \\ &= r^{2\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 + r^{2\kappa-2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Agora, fixemos  $t$  e definamos a seguinte função auxiliar  $f_t$ , dada por

$$f_t(r) = r^{2\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 + r^{2\kappa-2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall r > 0.$$

Perceba que, derivando  $f_t$ , temos

$$f'_t(r) = 2\kappa r^{2\kappa-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 + (2\kappa - 2s) r^{2\kappa-2s-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall r > 0,$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} f'_t(r_0) = 0 &\Leftrightarrow 2\kappa r_0^{2\kappa-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 + (2\kappa - 2s) r_0^{2\kappa-2s-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\kappa r_0^{2\kappa-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 = -(2\kappa - 2s) r_0^{2\kappa-2s-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\Leftrightarrow 2\kappa r_0^{2\kappa-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 = (2s - 2\kappa) r_0^{2\kappa-2s-1} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\Leftrightarrow r_0^{2\kappa-1-2\kappa+2s+1} = \frac{(2s - 2\kappa) \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2}{2\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} f'_t(r_0) = 0 &\Leftrightarrow r_0^{2s} = \frac{(s - \kappa)}{\kappa} \frac{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2}{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2} \\ &\Leftrightarrow r_0 = \left( \frac{s - \kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2s}} \left[ \frac{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}}{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}} \right]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$f'_t(r_0) = 0 \Leftrightarrow r_0 = C_{s,\kappa} \left[ \frac{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}}{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}} \right]^{\frac{1}{s}},$$

onde  $C_{s,\kappa} = \left( \frac{s-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2s}} > 0$ . Substituindo  $r = r_0$  em (3.97), chegamos a

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_{s,\kappa}^{2\kappa} \frac{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}}}{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^2 + C_{s,\kappa}^{2\kappa-2s} \frac{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa-2s}{s}}}{\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa-2s}{s}}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= C_{s,\kappa}^{2\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2\kappa}{s}} + C_{s,\kappa}^{2\kappa-2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa-2s}{s}+2} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2\kappa}{s}} \\ &= C_{s,\kappa}^{2\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2\kappa}{s}} + C_{s,\kappa}^{2\kappa-2s} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2\kappa}{s}}, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e  $\kappa \in (0, s)$ . Por conseguinte, podemos escrever

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)}^2 \leq M_{s,\kappa} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{2\kappa}{s}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{2\kappa}{s}}, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \kappa \in (0, s), \quad (3.98)$$

onde  $M_{s,\kappa} = C_{s,\kappa}^{2\kappa} + C_{s,\kappa}^{2\kappa-2s} > 0$ . Por multiplicar (3.98), por  $t^{2\kappa}$ , obtemos

$$\begin{aligned} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} &\leq t^\kappa M_{s,\kappa}^{\frac{1}{2}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}^{\frac{\kappa}{s}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{\kappa}{s}} \\ &= M_{s,\kappa}^{\frac{1}{2}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{\kappa}{s}} [t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}]^{\frac{\kappa}{s}}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, passando ao limite superior, quando  $t \rightarrow \infty$ , segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq M_{s,\kappa}^{\frac{1}{2}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{\kappa}{s}} [t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)}]^{\frac{\kappa}{s}} \}.$$

Considerando o Passo 1, temos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^s \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Além disso, por (3.96) (tomando  $\kappa = 0$  no Passo 3), temos ainda que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^0(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{\kappa}{s}} = 0,$$

desde que  $\kappa < s$ . Desse modo, resulta que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} \leq 0.$$

Consequentemente, chegamos a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \forall \kappa \in (0, s),$$

onde  $s \in (0, 1)$ . Uma breve análise dos passos descritos acima, deve esclarecer a demonstração deste resultado. Com efeito, inferimos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \|\theta(t)\|_{\dot{H}_{a,\sigma}^\kappa(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

para  $\kappa \in (0, s)$  e  $s \in (0, 1)$  (ver Passo 4),  $\kappa = s$  e  $s \in [0, 1)$  (ver Passos 1 e 3),  $\kappa > s$  e  $s \in [0, 1)$  (Passo 2) e  $\kappa = 0$  (ver Passo 3). Portanto, fica provado nosso resultado.

□

## Capítulo 4

# Equações de Navier-Stokes em Espaços de Lei-Lin-Gevrey

Neste capítulo, estamos interessados em solucionar o seguinte sistema de Equações de Navier-Stokes 3D fracionário que descreve a mecânica de um fluido incompressível:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Mais especificamente, trabalhamos em duas seções que estudam a existência e unicidade de soluções brandas globais (com dissipação fracionária crítica, ou seja  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) e locais (com dissipação fracionária subcrítica (caso  $\alpha$  não ultrapasse 1), isto é,  $\alpha > \frac{1}{2}$ ) no tempo para estas mesmas equações em Espaços de Lei-Lin-Gevrey.

É importante destacar que os resultados apresentados neste capítulo são baseados no trabalho produzido por W. G. Melo, N. F. Rocha e N. S. Costa [36]. Citamos também os seguintes artigos e referências inclusas: [1, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 23, 27, 37, 39, 40, 43, 46, 48].

## 4.1 Soluções Brandas Globais

Comecemos nosso estudo estabelecendo, através dos Teoremas 2.1 e 2.2, a existência e unicidade de soluções brandas globais no tempo para as Equações de Navier-Stokes abaixo:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.1)$$

É importante informar que no fluido incompressível descrito pelo sistema (4.1),  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$  denota um campo velocidade e  $p(x, t) \in \mathbb{R}$  é a pressão hidrostática. Além disso,  $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$  é o Laplaciano fracionário encontrado na definição 1.17. Temos ainda que,  $u_0$  é o dado inicial e assumimos que este é livre de divergente, isto é,  $\nabla \cdot u_0 = 0$ .

O significado de solução branda global no tempo para as Equações de Navier-Stokes (4.1), descrito acima, é dado da seguinte forma: analogamente ao que foi feito no caso quase-geostrófico, aplique o semigrupo do calor  $e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}$ , com  $\tau \in [0, t]$ , na primeira equação do sistema de Navier-Stokes (4.1), de modo a obter

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}[u_\tau + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + u \cdot \nabla u + \nabla p] = 0. \quad (4.2)$$

Sabendo que o semigrupo do calor é um operador linear, temos que

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_\tau + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(u \cdot \nabla u + \nabla p) = 0.$$

Mas, pela definição 1.20 e Lema 1.1, chegamos a

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_\tau + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}P(u \cdot \nabla u) = 0.$$

Por integrar a igualdade acima no intervalo  $[0, t]$ , deduzimos

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_\tau d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}P(u \cdot \nabla u) d\tau = 0. \quad (4.3)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} u(t) - e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u \, d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u \, d\tau \\ + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(u \cdot \nabla u) \, d\tau = 0. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$u(t) - e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(u \cdot \nabla u) \, d\tau = 0,$$

Portanto, estamos aptos a estabelecer o seguinte conceito.

**Definição 4.1.** Uma aplicação  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  é dita solução branda global para as Equações de Navier-Stokes (4.1) se esta satisfaz a seguinte igualdade:

$$u(t) - e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(u \cdot \nabla u) \, d\tau = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.4)$$

onde  $e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}$  representa o semigrupo do calor,  $P$  o projetor de Helmholtz e  $T > 0$  é qualquer.

É importante ressaltar que esta solução que estamos em busca é caracterizada por ser global no tempo.

**Teorema 4.1.** Se  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times [-1, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$  e  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ , então existe uma constante positiva  $\mathbb{C}_{a,\sigma,s}$  de modo que, sempre que  $\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} < \mathbb{C}_{a,\sigma,s}$ , obtém-se uma única solução branda global para as Equações de Navier-Stokes (4.1)

$$u \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3)),$$

para todo instante  $T > 0$ , satisfazendo

$$\|u\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|u\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, aplique a igualdade (4.4) para obter

$$u(t) = e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0 + B(u, u)(t),$$

onde, para todo  $w, v \in \mathcal{X}_T := C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3))$  (ver definição [1.26](#)) com  $T > 0$ , definimos

$$B(w, v)(t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} P(v \cdot \nabla w)(\tau) d\tau.$$

Aqui  $\mathcal{X}_T$  está munido da norma

$$\|g\|_{\mathcal{X}_T} = \|g\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|g\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})}, \quad \forall g \in \mathcal{X}_T.$$

Sabendo que  $\mathcal{X}_T$  é um espaço de Banach (ver Lema [2.11](#)), nosso objetivo agora é aplicar o Teorema [2.1](#) ao operador  $B$ . Para isso, vejamos que:

- $B$  é um operador Bilinear.

Com efeito, desde que o projetor de Helmholtz é linear (ver Lema [1.1](#)), segue que

$$\begin{aligned} B(\lambda w_1 + w_2, v) &= - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(v \cdot \nabla(\lambda w_1 + w_2))(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} [\lambda P(v \cdot \nabla w_1)(\tau) + P(v \cdot \nabla w_2)(\tau)] d\tau \\ &= -\lambda \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(v \cdot \nabla w_1)(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(v \cdot \nabla w_2)(\tau) d\tau \\ &= \lambda B(w_1, v) + B(w_2, v), \end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo  $w_1, w_2, v \in \mathcal{X}_T$  e escalar  $\lambda$  (ver também prova do Teorema [3.1](#)). Isso nos garante que  $B$  é linear na primeira variável. Para mostrar a linearidade da segunda entrada basta repetir o processo acima.

- $B$  é um operador contínuo.

Para isso, observe que, como

$$\partial_t B(w, v)(t) = \partial_t \left( - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} P(v \cdot \nabla w)(\tau) d\tau \right),$$

utilizando algumas regras de derivação, encontramos

$$\partial_t B(w, v)(t) = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} B(w, v)(t) - P(v \cdot \nabla w)(t),$$

ou ainda,

$$\partial_t B(w, v)(t) + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} B(w, v)(t) = -P(v \cdot \nabla w)(t).$$

Além disso, é fácil ver que  $B(w, v)(0) = 0$ . Portanto,  $B$  satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t B(w, v)(t) + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} B(w, v)(t) = -P(v \cdot \nabla w)(t); \\ B(w, v)(0) = 0, \end{cases}$$

isto é,  $B(w, v)(t)$  satisfaz o sistema (2.24) (com  $\alpha = \frac{1}{2}$ ). Para continuarmos verificando que  $B$  é um operador contínuo, faremos o uso do Teorema 2.2. Para isso, devemos mostrar que,  $B(w, v)(0) = 0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$  (o que é óbvio), e ainda que  $P(v \cdot \nabla w)(t)$  é uma função em  $L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ . Mas, este último também procede pois

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &= \int_0^T \|P(v \cdot \nabla w)(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[P(v \cdot \nabla w)(t)]| d\xi dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Observe que, pelas propriedades do Projetor de Helmholtz (ver Lema 1.1), deduzimos que

$$\mathcal{F}[P(f)](\xi) = \widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Logo, é verdade que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[P(f)](\xi)|^2 &= \left| \widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi \right|^2 = \left[ \widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi \right] \cdot \left[ \widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi \right] \\ &= |\widehat{f}(\xi)|^2 - [\widehat{f}(\xi)] \cdot \left[ \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi \right] - \left[ \frac{\widehat{f}(\xi) \cdot \xi}{|\xi|^2} \xi \right] \cdot [\widehat{f}(\xi)] + \frac{|\widehat{f}(\xi) \cdot \xi|^2}{|\xi|^4} |\xi|^2 \\ &= |\widehat{f}(\xi)|^2 - 2 \frac{|\widehat{f}(\xi) \cdot \xi|^2}{|\xi|^2} + \frac{|\widehat{f}(\xi) \cdot \xi|^2}{|\xi|^2} \\ &= |\widehat{f}(\xi)|^2 - \frac{|\widehat{f}(\xi) \cdot \xi|^2}{|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{|\widehat{f}(\xi) \cdot \xi|^2}{|\xi|^2} \geq 0$ , temos que

$$|\mathcal{F}[P(f)](\xi)|^2 \leq |\widehat{f}(\xi)|^2,$$

ou ainda

$$|\mathcal{F}[P(f)](\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|.$$

Desse modo, segue de (4.6), que

$$\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}\{(v \cdot \nabla w)(t)\}| \, d\xi \, dt. \quad (4.7)$$

Agora, análogo ao que foi feito em (3.11) na prova do Teorema 3.1, concluímos que (4.7) é da forma

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \left| \sum_{j=1}^3 \xi_j \mathcal{F}\{(w_j v)(t)\} \right| \, d\xi \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(v \otimes w)(t) \cdot \xi| \, d\xi \, dt. \end{aligned}$$

Com isso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\xi| |\mathcal{F}(v \otimes w)(t)| \, d\xi \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(v \otimes w)(t)| \, d\xi \, dt. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^s)} \leq \int_0^T \|(v \otimes w)(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \, dt.$$

Mas, segue do Corolário 2.2 (lembre que  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \geq -1$ ), que

$$\|(w \otimes v)(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \leq C_s [\|v\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}],$$

e, então,

$$\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^s)} \leq \int_0^T C_s [\|v\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{\frac{a}{\sigma},\sigma}^0}] \, dt.$$

Agora, perceba que, utilizando o Lema 2.14 (pois  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times (-\infty, 0) \times (1, +\infty)) \cup$

$([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$ ), deduzimos que

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(X_{a,\sigma}^s)} &\leq \int_0^T C_s [C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}] dt \\ &= C_s C_{a,\sigma,s} \int_0^T [\|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}] dt. \end{aligned}$$

Denotando  $C_s C_{a,\sigma,s} := C_{a,\sigma,s}$  e utilizando as propriedades da integral, segue que

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,s,\sigma} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt + C_{a,s,\sigma} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} dt \\ &\leq C_{a,s,\sigma} \int_0^T \sup_{t \in [0,T]} \{\|v(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt \\ &\quad + C_{a,s,\sigma} \int_0^T \sup_{t \in [0,T]} \{\|w(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt, \end{aligned}$$

então, pelas definições das normas (ver definição [1.26](#)), chegamos a

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,\sigma,s} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \int_0^T \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt \\ &\quad + C_{a,\sigma,s} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Portanto, encontramos

$$\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq C_{a,\sigma,s} [\|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|w\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} + \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|v\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})}].$$

No entanto, pela definição da norma do espaço  $\mathcal{X}_T$  (ver definição [1.26](#)), temos que  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_T} \geq \|\cdot\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_T} \geq \|\cdot\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,\sigma,s} [\|v\|_{\mathcal{X}_T} \|w\|_{\mathcal{X}_T} + \|w\|_{\mathcal{X}_T} \|v\|_{\mathcal{X}_T}] \\ &= 2C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\mathcal{X}_T} \|w\|_{\mathcal{X}_T}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Desde que  $v$  e  $w$  são funções em  $\mathcal{X}_T$ , segue que o lado direito da desigualdade obtida em [\(4.9\)](#) é finito. Consequentemente,  $P(v \cdot \nabla w) \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)$ , para todo  $T > 0$  e  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times [-1, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$ .

Sendo assim, por aplicar o item ii) do Teorema 2.2, com  $p = 1$ , encontramos

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} &\leq \|B(v, w)(0)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|P(v \cdot \nabla w)(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \\ &= \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq 2C_{a,\sigma,s} \|w\|_{\mathcal{X}_T} \|v\|_{\mathcal{X}_T}, \quad \forall w, v \in \mathcal{X}_T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Note ainda que, pelo item i) do Teorema 2.2, resulta

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq \|B(v, w)(0)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \\ &= \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq 2C_{a,\sigma,s} \|w\|_{\mathcal{X}_T} \|v\|_{\mathcal{X}_T}, \quad \forall w, v \in \mathcal{X}_T. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aqui, utilizamos novamente o resultado obtido em (4.9). Sendo assim, concluimos, pelo que foi encontrado nas desigualdades (4.10) e (4.11), que

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{\mathcal{X}_T} &= \|B(w, v)\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|B(w, v)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} \\ &\leq 4C_{a,\sigma,s} \|w\|_{\mathcal{X}_T} \|v\|_{\mathcal{X}_T}, \quad \forall w, v \in \mathcal{X}_T. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Isto nos garante que  $B$  é um operador limitado em  $\mathcal{X}_T$ . Ou equivalentemente,  $B$  é operador contínuo em  $\mathcal{X}_T$ .

Para concluir a demonstração desse resultado, devemos estimar a expressão  $e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0$ , de modo a garantir as hipóteses do Teorema 2.1.

Para isso, note que, utilizando a Transformada de Fourier do semigrupo do calor, dada na Definição 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0(\xi)]| \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-t|\xi|} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-t|\xi|}\} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Mas, como a função  $e^{-t|\xi|}$  é decrescente, então  $\sup_{t \in [0, T]} \{e^{-t|\xi|}\} = 1$  e, portanto,

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi = \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s},$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Sendo assim, passando ao supremo em  $t \in [0, T]$ , encontramos

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \quad (4.13)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} &= \int_0^T \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0(\xi)]| d\xi dt. \end{aligned}$$

Por novamente utilizar a transformada do semigrupo do calor, vista na Definição 2.1, e aplicar o Teorema 1.9, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-t|\xi|} |\widehat{u}_0(\xi)| d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| \left( \int_0^T e^{-t|\xi|} dt \right) d\xi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Note ainda que, por uma simples mudança de variáveis (ver Teorema 1.7) e observando o fato de que a exponencial é sempre positiva, resulta

$$\int_0^T e^{-t|\xi|} dt = \frac{1 - e^{-T|\xi|}}{|\xi|} \leq \frac{1}{|\xi|}. \quad (4.15)$$

Assim, substituindo o resultado encontrado em (4.15), na expressão obtida em (4.14), segue que

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} \frac{1}{|\xi|} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| d\xi = \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Desse modo, pelo que foi obtido em (4.13) e (4.16), concluímos que

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_T} \leq \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} = 2\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \quad (4.17)$$

Assim, segue de (4.12) que se assumirmos  $\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} < \mathbb{C}_{a,\sigma,s} := \frac{1}{32C_{a,\sigma,s}}$ , onde  $C_{a,\sigma,s}$  é a

constante positiva obtida em (4.12); então, (4.17) implica que

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_T} \leq 2\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} < 2\frac{1}{32C_{a,\sigma,s}} = \frac{1}{16C_{a,\sigma,s}},$$

ou ainda

$$4[4C_{a,\sigma,s}]\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_T} < 1.$$

Desse modo, pelo Teorema 2.1, existe uma única solução branda global  $u \in \mathcal{X}_T$  para as Equações de Navier-Stokes (4.1) de modo a satisfazer a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T} \leq 2\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}u_0\|_{\mathcal{X}_T},$$

logo, por (4.17), infere-se

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

Ou ainda,

$$\|u\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|u\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1})} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

Estes argumentos finalizam a demonstração deste resultado.

□

Vimos no Teorema 4.1 que a solução  $u$  para as Equações de Navier-Stokes (4.1) satisfaz a pertinência  $u \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3))$ . Abaixo, mostraremos que, na verdade, nossa solução está em  $L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^3))$ , para todo  $p \geq 1$ .

**Corolário 4.1.** *Suponha que  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times [-1, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$  e  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Seja*

$$u \in C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3))$$

*a solução para as Equações de Navier-Stokes (4.1) obtida no Teorema 4.1. Afirmamos que*

$$u \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^3)), \quad \forall p \geq 1.$$

*Demonstração.* Para verificar este resultado, basta notar que a primeira equação do sistema de Navier-Stokes (4.1) pode ser reescrita na forma

$$0 = u_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + u \cdot \nabla u + \nabla p = u_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u + P(u \cdot \nabla u),$$

onde  $P$  é o projetor de Helmholtz, dado na definição 1.20 (ver também Lema 1.1). Equivalentemente,

$$u_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u = -P(u \cdot \nabla u).$$

Assim, podemos reescrever o sistema (4.1), por

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u = -P(u \cdot \nabla u); \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Além disso, pelo que foi feito em (4.9), na prova do Teorema 4.1, observado o fato de  $u \in \mathcal{X}_T = C_T(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}(\mathbb{R}^3))$ , obtemos que  $P(u \cdot \nabla u) \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ ; já que,

$$\|P(u \cdot \nabla u)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq 2C_{a,\sigma,s}\|u\|_{\mathcal{X}_T}\|u\|_{\mathcal{X}_T},$$

onde  $\mathcal{X}_T$  é dado na definição 1.26.

Note ainda que,  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Desse modo, podemos aplicar o Teorema 2.2 ii) de modo a garantir que

$$u \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^3)),$$

para todo  $p \geq 1$ . Este argumento finaliza a demonstração deste corolário.  $\square$

## 4.2 Soluções Brandas Locais

Agora vamos estudar, através dos Teoremas 2.1 e 2.2, a existência e unicidade de soluções brandas locais no tempo para as Equações de Navier-Stokes abaixo:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\alpha}u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.18)$$

Vale frisar que este sistema descreve um fluido incompressível, onde  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$  denota um campo velocidade e  $p(x, t) \in \mathbb{R}$  é a pressão hidrostática. Além disso,  $(-\Delta)^\alpha$ , com  $\alpha > \frac{1}{2}$ , é o Laplaciano fracionário encontrado na definição [1.17](#). Temos ainda que,  $u_0$  é o dado inicial e assumimos que este é livre de divergente, isto é,  $\nabla \cdot u_0 = 0$ .

O significado de solução branda local no tempo para as Equações de Navier-Stokes [\(4.18\)](#), descrito acima, é dado da seguinte forma: Similarmente ao que foi explicado anteriormente, use o semigrupo do calor  $e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha}$ , com  $\tau \in [0, t]$  (com  $t \in [0, \bar{T}]$ ), no sistema [\(4.18\)](#) para estabelecer

$$e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} u_\tau + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} (-\Delta)^\alpha u + e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} P(u \cdot \nabla u) = 0.$$

Integrando este resultado sobre  $[0, t]$ , concluímos que

$$u(t) - e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} (P(u \cdot \nabla u)) d\tau = 0.$$

Portanto, estamos aptos a estabelecer o seguinte conceito.

**Definição 4.2.** Uma aplicação  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  é dita solução branda local para as Equações de Navier-Stokes [\(4.18\)](#) se existe um instante  $\bar{T} > 0$  tal que esta satisfaz a seguinte igualdade:

$$u(t) - e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} P(u \cdot \nabla u) d\tau = 0, \quad \forall t \in [0, \bar{T}], \quad (4.19)$$

onde  $e^{-t(-\Delta)^\alpha}$  representa o semigrupo do calor e  $P$  o projetor de Helmholtz.

É importante ressaltar que esta solução que estamos em busca é caracterizada por ser local no tempo.

**Teorema 4.2.** *Assuma que  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times [-1, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$  e  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Assim, existe um instante  $\bar{T} > 0$  e uma única solução branda local*

$$u \in C_{\bar{T}}(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

para as Equações de Navier-Stokes [\(4.18\)](#) de modo que

$$\|u\|_{L_{\bar{T}}^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|u\|_{L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

*Demonstração.* Esta prova apresenta explicações semelhantes às utilizadas no Teorema 4.1. Sendo assim, simplificaremos os detalhes das manipulações determinadas abaixo.

Pela igualdade (4.19), infere-se que

$$u(t) = e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0 + B(u, u)(t),$$

onde

$$B(w, v)(t) = - \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha} P(v \cdot \nabla w)(\tau) d\tau, \quad \forall w, v \in \mathcal{X}_{T, \alpha},$$

com  $\mathcal{X}_{T, \alpha} := C_T(\mathcal{X}_{a, \sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_T^1(\mathcal{X}_{a, \sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$  (com  $T > 0$  a ser determinado abaixo). Aqui,  $\mathcal{X}_{T, \alpha}$  (ver definição 1.26) está munido da norma

$$\|f\|_{\mathcal{X}_{T, \alpha}} = \|f\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a, \sigma}^s)} + \|f\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a, \sigma}^{s+2\alpha})}, \quad \forall f \in \mathcal{X}_{T, \alpha}.$$

Note que  $\mathcal{X}_{T, \alpha}$  é um espaço de Banach (ver Lema 2.11) e que  $B$  é um operador bilinear sobre este mesmo espaço (ver 4.5). Vamos verificar que  $B$  é contínuo. É simples ver que

$$\partial_t B(w, v)(t) = -(-\Delta)^\alpha B(w, v)(t) - P(v \cdot \nabla w)(t),$$

ou seja,

$$\partial_t B(w, v)(t) + (-\Delta)^\alpha B(w, v)(t) = -P(v \cdot \nabla w)(t).$$

Em adição, também temos que  $B(w, v)(0) = 0$ . Consequentemente,  $B$  resolve o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t B(w, v)(t) + (-\Delta)^\alpha B(w, v)(t) = -P(v \cdot \nabla w)(t); \\ B(w, v)(0) = 0. \end{cases}$$

Agora vamos provar que  $P(v \cdot \nabla w) \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ . Desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &= \int_0^T \|P(v \cdot \nabla w)(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[P(v \cdot \nabla w)(t)]| d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+1} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}(w \otimes v)(t)| d\xi dt \\
&= \int_0^T \|(w \otimes v)(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} dt.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pelo Corolário 2.2 (lembre que  $a \geq 0$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $s \geq -1$ ), temos que

$$\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \int_0^T C_s [\|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^0} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+1}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^0}] dt.$$

Aplique os Lemas 2.13 e 2.14 (lembre que  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times (-\infty, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$ ) para obter

$$\begin{aligned}
\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq \int_0^T C_s [C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \\
&\quad + C_{a,\sigma,s} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}] dt \\
&= \int_0^T C_s C_{a,\sigma,s} [\|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \\
&\quad + \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}] dt.
\end{aligned}$$

Denote  $C_s C_{a,\sigma,s} := C_{a,\sigma,s}$  para estabelecer que

$$\begin{aligned}
\|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,s,\sigma} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt \\
&\quad + C_{a,s,\sigma} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} dt \\
&\leq C_{a,s,\sigma} \int_0^T \sup_{t \in [0,T]} \{\|v(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\} \sup_{t \in [0,T]} \{\|w(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt \\
&\quad + C_{a,s,\sigma} \int_0^T \sup_{t \in [0,T]} \{\|v(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \sup_{t \in [0,T]} \{\|w(t)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}\} \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, chegamos a

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,\sigma,s} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \int_0^T \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt \\ &\quad + C_{a,\sigma,s} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder (com  $p = 2\alpha > 1$  e  $q = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ ) (ver Teorema 1.1), infere-se que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt &= \left[ \int_0^T \left( \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \right)^{2\alpha} dt \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \left[ \int_0^T 1^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} dt \right]^{1-\frac{1}{2\alpha}} \\ &= \left[ \int_0^T \|w\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \left[ \int_0^T 1 dt \right]^{1-\frac{1}{2\alpha}} \\ &= T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $1 - \frac{1}{2\alpha} > 0$ . Analogamente, obtemos

$$\int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} dt \leq T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}}. \quad (4.23)$$

Portanto, substituindo (4.22) e (4.23) em (4.21), encontramos

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}} \\ &\quad + C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}} \\ &= C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} [\|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}} \\ &\quad + \|w\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \|v\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})}^{\frac{1}{2\alpha}}]. \end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} [\|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} + \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}}] \\ &= C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} [\|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} + \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}] \\ &= 2C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Desde que  $v, w \in \mathcal{X}_{T,\alpha}$  (ver definição 1.26), segue que o lado direito da desigualdade obtida em (4.24) é finito. Por conseguinte,  $P(v \cdot \nabla w) \in L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)$ . Aplicando Teorema 2.2 ii) (com

$p = 1$ ) e (4.24) (com  $2C_{a,\sigma,s} =: C_{a,\sigma,s}$ ), encontramos

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} &\leq \|B(v, w)(0)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|P(v \cdot \nabla w)(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \\ &= \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq 2C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para todo  $w, v \in \mathcal{X}_{T,\alpha}$ . Além disso, Teorema 2.2 i) e (4.24) implicam que

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} &\leq \|B(v, w)(0)\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} + \|P(v \cdot \nabla w)(t)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \\ &= \|P(v \cdot \nabla w)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq 2C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

para todo  $w, v \in \mathcal{X}_{T,\alpha}$ . Deste modo, por (4.25) e (4.26), resulta que

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} &= \|B(w, v)\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|B(w, v)\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} \\ &\leq 4C_{a,\sigma,s} T^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|w\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \|v\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

para todo  $w, v \in \mathcal{X}_{T,\alpha}$ . Isto nos garante que  $B$  é um operador contínuo em  $\mathcal{X}_{T,\alpha} \times \mathcal{X}_{T,\alpha}$ , para cada  $T > 0$  fixo.

Para finalizar a prova deste teorema, vamos estimar  $e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0$  com o objetivo de verificar as suposições do Teorema 2.1. Deste modo, o Lema 2.1 implica que

$$\begin{aligned} \|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0](\xi)| \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi. \end{aligned}$$

Como  $e^{-t|\xi|^{2\alpha}}$  é uma aplicação decrescente, então  $\sup_{t \in [0, T]} \{e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\} = 1$  e, assim,

$$\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| \, d\xi = \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s},$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Com isso, passando ao supremo em  $t \in [0, T]$ , encontramos

$$\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{L_T^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \quad (4.28)$$

Por outro lado, é simples ver que o Lema [2.1](#) e o Teorema [1.9](#) nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} &= \int_0^T \|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}} dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\mathcal{F}[e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0(\xi)]| d\xi dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+2\alpha} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| \left( \int_0^T e^{-t|\xi|^{2\alpha}} dt \right) d\xi. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Note ainda que podemos escrever

$$\int_0^T e^{-t|\xi|^{2\alpha}} dt = \frac{1 - e^{-T|\xi|^{2\alpha}}}{|\xi|^{2\alpha}} \leq \frac{1}{|\xi|^{2\alpha}}. \tag{4.30}$$

Assim, substituindo [\(4.30\)](#) em [\(4.29\)](#), deduz-se que

$$\begin{aligned}
\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{L_T^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{s+2\alpha} \frac{1}{|\xi|^{2\alpha}} e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s e^{a|\xi|^{\frac{1}{\sigma}}} |\widehat{u}_0(\xi)| d\xi = \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Consequentemente, por [\(4.28\)](#) e [\(4.31\)](#), concluímos que

$$\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} \leq 2\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}. \tag{4.32}$$

Observe que, por hipótese,  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Assim, escolha  $T = \overline{T}$ , com

$$0 < \overline{T} < \left[ \frac{1}{32C_{a,\sigma,s}\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}} \right]^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}},$$

onde  $C_{a,\sigma,s}$  é a constante positiva obtida em [\(4.27\)](#), resulta de [\(4.32\)](#), que

$$4[4C_{a,\sigma,s}]^{\overline{T}^{1-\frac{1}{2\alpha}}} \|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{T,\alpha}} < 32C_{a,\sigma,s} \left[ \left( \frac{1}{32C_{a,\sigma,s}\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}} \right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} \right]^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s} = 1.$$

Logo, pelo Teorema [2.1](#), existe uma única solução branda local  $u \in \mathcal{X}_{\overline{T}}$  para as Equações de Navies-Stokes [\(4.18\)](#), satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_{\mathcal{X}_{\overline{T},\alpha}} \leq 2\|e^{-t(-\Delta)^\alpha} u_0\|_{\mathcal{X}_{\overline{T},\alpha}}.$$

Assim, pelo que foi obtido em (4.32), encontramos

$$\|u\|_{\mathcal{X}_{\bar{T},\alpha}^s} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

Ou ainda,

$$\|u\|_{L_{\bar{T}}^\infty(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s)} + \|u\|_{L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha})} \leq 4\|u_0\|_{\mathcal{X}_{a,\sigma}^s}.$$

Isto prova o teorema em questão. □

Vimos no Teorema 4.2 que a solução  $u$  para as Equações de Navier-Stokes (4.18) satisfaz a pertinência  $u \in L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ . Abaixo, mostraremos que, na verdade, nossa solução está em  $L_{\bar{T}}^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3))$ , para todo  $p \geq 1$ .

**Corolário 4.2.** *Suponha que  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $(a, s, \sigma) \in ((0, +\infty) \times [-1, 0) \times (1, +\infty)) \cup ([0, +\infty) \times \{0\} \times [1, +\infty))$  e  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Seja*

$$u \in C_{\bar{T}}(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

*a solução local obtida no Teorema 4.2 para as Equações de Navier-Stokes (4.18). Afirmamos que*

$$u \in L_{\bar{T}}^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)), \quad \forall p \geq 1.$$

*Demonstração.* Esta prova apresenta explicações semelhantes às utilizadas no Corolário 4.1. Sendo assim, simplificaremos os detalhes das manipulações determinadas abaixo.

Primeiramente note que a primeira equação do sistema de Navier-Stokes (4.18) pode ser reescrita na forma

$$u_t + (-\Delta)^\alpha u = -P(u \cdot \nabla u).$$

onde  $P$  é o projetor de Helmholtz, dado na definição 1.20. Consequentemente, (4.18) torna-se

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u = -P(u \cdot \nabla u); \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Além disso, como em (4.24) (ver prova do Teorema 4.2), usando que  $u \in \mathcal{X}_{\bar{T},\alpha} = C_{\bar{T}}(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+2\alpha}(\mathbb{R}^3))$  (ver definição 1.26), concluímos que  $P(u \cdot \nabla u) \in L_{\bar{T}}^1(\mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3))$ . Além disso, por hipótese,  $u_0 \in \mathcal{X}_{a,\sigma}^s(\mathbb{R}^3)$ . Com isso, podemos aplicar o Teorema 2.2 ii) para inferir que

$$u \in L_T^p(\mathcal{X}_{a,\sigma}^{s+\frac{2\alpha}{p}}(\mathbb{R}^3)),$$

para todo  $p \geq 1$ . Isto finaliza a prova deste corolário.

□

# Referências Bibliográficas

- [1] Bae, H., “Existence and analyticity of Lei-Lin solution to the Navier-Stokes equations”, Proc. Am. Math. Soc. **143**, 2887-2892 (2015).
- [2] Benameur, J., “On the blow-up criterion of 3D Navier-Stokes equations,” J. Math. Anal. Appl. **371**, 719-727 (2010).
- [3] Benameur, J., “On the exponential type explosion of Navier-Stokes equations,” Nonlinear Analysis **103**, 87-97 (2014).
- [4] Benameur, J., “Long time decay to the Lei-Lin solution of 3D Navier-Stokes equations,” J. Math. Anal. Appl., **422**, 424-434 (2015).
- [5] Benameur, J., Jlali, L., “Long time decay for 3D Navier-Stokes equations in Sobolev-Gevrey spaces,” Electron. J. Differential Equations **3104**, 13pp. (2016).
- [6] Benameur, J., Jlali, L., “On the blow-up criterion of 3D-NSE in Sobolev-Gevrey spaces,” J. Math. Fluid Mech. **18**, 805-822 (2016).
- [7] Benameur, J., Bennaceur, M., “Large time behaviour of solutions to the 3D-NSE in  $X^\sigma$  spaces”, J. Math. Anal. Appl. **482**, 123566 (2020).
- [8] Benameur, J., Jlali, L., “Long time decay of 3D-NSE in Lei-Lin-Gevrey spaces”. Math. Slovaca **70**, 877-892 (2020).
- [9] Benameur, J., Abdallah, S. B., “Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space”, J. Math. Anal. Appl. **497**, Paper No. 124873, 30 pp (2021).
- [10] Benameur, J., Katar, C., “Asymptotic study of supercritical surface quasi-geostrophic equation in critical space,” Nonlinear Anal. **224**, 12 pp. (2022).

- [11] Brezis, H., “Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations”. Springer, 2011.
- [12] Braz e Silva, P., Melo, W. G., Zingano, P. R., “Some remarks on the paper “On the blow up criterion of 3D Navier-Stokes equations” by J. Benameur,” C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **352** 913-915 (2014).
- [13] Braz e Silva, P., Melo, W. G., Rocha, N. F., “Existence, Uniqueness and Blow-up of Solutions for the 3D Navier-Stokes Equations in Homogeneous Sobolev-Gevrey Spaces,” J. Comput. Appl. Math., **39**, 1-11 (2020).
- [14] Cannone, M., “Ondelettes, paraproducts et Navier-Stokes,” Diderot Editeur, Paris, x+191 pp. (1995).
- [15] Castro Jr., A. Armando de. “Curso de teoria da medida”. 2<sup>o</sup> ed., 2008.
- [16] Chaabani, A., “On well-posedness of the Cauchy problem for 3D MHD system in critical Sobolev-Gevrey space,” Partial Differ. Equ. Appl. **2** (2021). (DOI 10.1007/s42985-021-00081-z).
- [17] Chemin, J. Y., “About Navier-Stokes Equations,” Publication du Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université de Paris VI, R96023 (1996).
- [18] De Carvalho, G.J., “Alguns resultados do Laplaciano Fracionário e Funções s-harmônicas,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, (2020).
- [19] Folland, Gerald B. “Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications”. Second Edition. ed. [S. l.: s. n.], 1999.
- [20] Guterres, R. H., Melo, W. G., Nunes, J., Perusato, C., “Large time decay for the magnetohydrodynamics equations in Sobolev-Gevrey spaces,” Monatsh. Math. **192**, 591-613 (2020).
- [21] Guterres, R., Melo, W. G., Rocha, N. F., Santos, T. S. R., “Well-Posedness, Blow-up Criteria and Stability for Solutions of the Generalized MHD Equations in Sobolev-Gevrey Spaces,” Acta Appl. Math. **176** (2021).
- [22] Isnard, Carlos. “Introdução à medida e integração”. 1<sup>o</sup> ed., 200.

- [23] Lei, Z., Lin, F., “Global mild solutions of Navier-Stokes equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64**, 1297-1304 (2011).
- [24] Ladyzhenskaya, O. (1969). “The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows,” 2° ed. New York: Gordon and Breach.
- [25] Lagoon, W. S., “As equações de Navier-Stokes e Semilinear do Calor em espaços de modulação,” Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo-Brasil, pp. 89 (2017).
- [26] Leray, J., “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace,” *Acta Math.* **63**, 193-248 (1934).
- [27] Lorenz, L., Zingano, P. R., “Properties at potential blow-up times for the incompressible Navier-Stokes equations,” *Bol. Soc. Paran. Mat.*, **35**, 127-158, (2017).
- [28] Lorenz, L., Melo, W. G., Rocha, N. F., “The magneto-hydrodynamic equations: local theory and blow-up of solutions,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **24**, 3819-3841, (2019).
- [29] Melo, W. G., “The magneto-micropolar equations with periodic boundary conditions: Solution properties at potential blow-up times”, *J. Math. Anal. Appl.*, **435**, 1194-1209 (2016).
- [30] Melo, W. G., Perusato, C., Rocha, N. F., “On local existence, uniqueness and blow-up of solutions for the generalized MHD equations in Lei-Lin spaces”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **70**, 74-98 (2019).
- [31] Melo, W. G., Rocha, N. F., Zingano, P. R., “Local existence, uniqueness and lower bounds of solutions for the magnetohydrodynamics equations in Sobolev-Gevrey spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, **482**, p.123524 (2020).
- [32] Melo, W. G., Rocha, N. F., Zingano, P. R., “Asymptotic behavior of solutions for the 2D micropolar equations in Sobolev-Gevrey spaces,” *Asymptot. Anal.* **123**, 157-179 (2021).
- [33] Melo, W. G., Santos, T. S. R., “Time decay rates for the generalized MHD- $\alpha$  equations in Sobolev-Gevrey spaces,” *Appl. Anal.* **18**, 6623-6644 (2022).
- [34] Melo, W. G., Rocha, N. F., “New Blow-up Criteria for Local Solutions of 3D Generalized MHD Equations in Lei-Lin-Gevrey Spaces,” *Mathematische Nachrichten*, (2022). (DOI 10.1002/mana.202000309)

- [35] Melo, W. G., de Souza, M.; Santos, T. S. R., “On the generalized Magnetohydrodynamics- $\alpha$  equations with fractional dissipation in Lei-Lin and Lei-Lin-Gevrey spaces,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **73**, 37 pp. (2022).
- [36] Melo, W. G., Rocha, N. F., Costa, N. S. “Mild Solutions for the Navier-Stokes Equations with Fractional Dissipation in Lei-Lin and Lei-Lin-Gevrey Spaces,” (2022). (Submetido)
- [37] Melo, W. G., Rocha, N. F., Costa, N. S. “Decay rates for mild solutions of the Quasi-geostrophic equation with critical fractional dissipation in Sobolev-Gevrey spaces,” (2022). (Submetido)
- [38] Melo, W. G., Santos, T. S. R., Costa, N. S. “Existence of solutions and their behavior for the anisotropic quasi-geostrophic equation in Sobolev and Sobolev-Gevrey spaces,” (2022). (Submetido)
- [39] Mustapha, A., Benameur, J., Katar, C., “Global solution of anisotropic quasi-geostrophic equations in Sobolev space,” *J. Math. Anal. Appl.* **516**, 15 pp. (2022).
- [40] Orf, H., “Long time decay for global solutions to the Navier-Stokes equations in Sobolev-Gevrey spaces,” *arXiv:1903.03034* (2019).
- [41] Pozrikidis, C., “The fractional Laplacian,” CRC Press, Boca Raton, FL, xv+278 pp. (2016).
- [42] Rieutord, M., “Fluid Dynamics: An Introduction”. 1<sup>o</sup>. ed., 2014.
- [43] Selmi, R., Chaabani, A., Zaabi, M., “Blow-up of the maximal solution to 3D Boussinesq system in Lei-Lin-Gevrey spaces”, *Math. Methods Appl. Sci.* **43**, 2945-2952 (2020).
- [44] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. “Fourier Analysis: an introduction”. Princeton University Press Princeton and Oxford, 2007.
- [45] Stein, E., “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,” Princeton University Press, Princeton, (1970).
- [46] Wang, W.H., Qin, T.G., Bie, Q.Y.: “Global well-posedness and analyticity results to 3-D generalized magnetohydrodynamics equations”. *Appl. Math. Lett.*, **59**, 65-70 (2016)
- [47] Wu, J., “Generalized MHD equations,” *J. Differential Equations*, **195** 284-312 (2003).
- [48] Ye, Zhuan, “Global well-posedness and decay results to 3D generalized viscous magnetohydrodynamic equations”. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **195**, 1111-1121 (2016).