UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Álgebras de Rees de Ideais perfeitos de altura dois em três variáveis

Daynara Guimarães Melo

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Álgebras de Rees de Ideais perfeitos de altura dois em três variáveis

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Daynara Guimarães Melo

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Melo, Daynara Guimarães
M528a Álgebras de Rees de ideais perfeitos de altura dois em três variáveis / Daynara Guimarães Melo ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão, 2018.
60 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Anéis (Álgebra). 4. Matrizes (Matemática). I. Ramos, Zaqueu Alves, orient. II. Título.

CDU 512

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Álgebras de Rees de ideais perfeitos de altura dois em três variáveis

por

Daynara Guimarães Melo

Aprovada pela banca examinadora:

Zaqueu A. S. Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador

André V. S. Dória

Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória - UFS
Primeiro Examinador

Rainelly Cunha de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Rainelly Cunha de Medeiros - IFRN
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Fevereiro de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que sempre foi meu alicerce de vida e não foi diferente no mestrado.

Aos meus pais, que são meus anjos do céu, Carlos (in memoriam) e Gilvania (in memoriam) pelos ensinamentos durante o tempo que viveram fisicamente ao meu lado, pois graças aos conselhos que me foram dados e principalmente por me mostrarem a importância da educação, hoje pude concluir esta etapa da minha vida.

À minha família, especialmente, às minhas cadelinhas que me enchem de amor diariamente, me acalmando nos momentos mais tensos.

Ao meu companheiro que foi paciente, professor, colega de estudo e acima de tudo AMOR, André Dosea, por toda paciência, disponibilidade e compreensão durante esse período exaustivo da minha vida acadêmica. Foi muito especial e essencial aprender ao seu lado, você realmente me inspira como Matemático.

A todos os professores do PROMAT-UFS que compreenderam a minha situação diferenciada de viver este mestrado principalmente nos dias em que não pude comparecer as aulas devido ao horário de trabalho.

Ao meu orientador Zaqueu pelo apoio e dedicação durante essa jornada intensa e, principalmente, por ter acreditado na minha capacidade.

Aos professores André Vinícius e Rainelly por aceitarem participar da banca na minha defesa de mestrado e por contribuírem positivamente no resultado deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que indireta ou diretamente contribuíram para a finalização desta dissertação.

Resumo

Nessa dissertação estudamos as álgebras de ”Blowing-up”de ideais perfeitos de codimensão dois em três variáveis. Nosso interesse é discutir propriedades dessas álgebras tais como equações de definição, Cohen-Macaulicidade e normalidade. O modelo de ideal que aqui abordamos foram considerados por [10] e [20].

Palavras Chave: Álgebra de Rees, Cohen-Macaulay, Normalidade.

Abstract

In the dissertation we study the ”Blowing-up”algebras of perfect ideals of condimension 2 in three variables. We pretend to discuss the algebras properties such as definition equations, Cohen-Macaulity and normality. The type of ideal that we approached in this paper was considered by [10] e [20].

Keywords: Rees Algebra, Cohen-Macaulay, Normality.

Sumário

Lista de símbolos

Símbolo	**Descrição**
$\mathrm{Im}(\varphi)$	imagem de um homomorfismo φ
$\ker\varphi$	núcleo de um homomorfismo φ
$Z_A(M)$	conjunto dos divisores de zero de um A-módulo M
$\mathrm{Ass}_A(M)$	conjunto dos primos associados de um A-módulo M
$\mathrm{Min}_A(M)$	conjunto dos primos associados mínimos de M
$\mathrm{Supp}_A M$	conjunto suporte de um A-módulo M
$\dim A$	dimensão de Krull do anel A
$\mu(M)$	número mínimo de geradores de um módulo M
$\mathrm{Sym}(M)$	álgebra simétrica de um módulo M
$\mathcal{R}_A(I)$	álgebra de Rees do ideal I
$\mathrm{alt}\, I$	altura de um ideal I
$I_t(\varphi)$	ideal gerado por todos os menores de ordem t da matriz φ
$\dim .\mathrm{proj}_A M$	dimensão projetiva de um A-módulo M
$\mathrm{grade}(I, M)$	grade de I em M
$\mathtt{prof}_A(M)$	profundidade de um A-módulo M
$N : M$	condutor de um A-módulo M em um submódulo N.
$\mathrm{Gl}_n(k)$	grupo das matrizes quadradas de ordem n invertíveis com entradas em k

Introdução

Seja I um ideal de um anel Noetheriano A. A *álgebra de Rees de I* é uma construção que reúne o anel A e todas as potências do ideal I em um único anel. Precisamente, ela é definida pela seguinte igualdade:

$$\mathcal{R}_A(I) := \sum_{n \in \mathbb{N}} I^n t^n \subset A[t].$$

Este é um exemplo das chamadas *álgebras de blowing-up*. Outros exemplos dessas álgebras são:

- $\mathrm{gr}_I(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n-1}$ (*anel graduado associado de* I).
- $\mathrm{Sym}_A(I)$ (*álgebra simétrica de* I).
- $\mathcal{R}^s_A(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)} t^n \subset A[t]$ (*álgebra de Rees simbólica de* I).
- Para $(A, \mathfrak{m})$ local (ou $(A, \mathfrak{m})$ graduado standard com ideal irrelevante homogêneo $\mathfrak{m}$), $\mathcal{F}_A(I) = \mathcal{R}_A(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(I)$ (*fibra especial de* I).

A terminologia utilizada para designar estas álgebras tem origem na geometria birracional através do problema de resolução de singularidades. Um processo utilizado para tratar esse problema é o da explosão de uma variedade ao longo de uma subvariedade. Ocorre que a realização algébrica dos principais elementos desse processo são descritos pelas álgebras de "blowing-up."

Uma outra situação geométrica onde as álgebras de "blowing-up" tem importante significado é quando o ideal I é gerado por polinômios homogêneos $f_1, \ldots, f_m$ de mesmo grau g num anel de polinômios $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ com coeficientes sobre um corpo k. Nessa situação, podemos considerar o mapa racional $\mathfrak{F} = (f_1 : \cdots : f_m) : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$. Acontece nesse contexto os seguintes fatos:

- A álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ corresponde ao ideal de coordenadas bi-homogêneas do fecho do gráfico do mapa racional $\mathfrak{F}$.

- A fibra especial $\mathcal{F}_A(I)$ corresponde ao anel de coordenadas homogêneas do fecho da imagem do mapa racional $\mathfrak{F}$.

Do ponto de vista algébrico as álgebras de "blowing-up"são importantes, pois capturam informações homológicas das potências do ideal I. Por exemplo, a função de Hilbert da fibra especial $\mathcal{F}_A(I)$ calculada em um inteiro positivo t fornece o número mínimo de geradores da potência I^t.

Nesse trabalho nosso objetivo é estudar a álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ na situação em que A é um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo algebricamente fechado k e I é um ideal gerado pelos menores maximais de uma matriz de ordem $n \times (n-1)$ com entradas lineares em A. O estudo da álgebra de Rees desses ideais é tema de bastante interesse na álgebra comutativa. Por exemplo, uma pequena lista de trabalhos nessa perspectiva compreende os seguintes artigos: [10], [15], [18], [20], [21] e [24].

De forma mais precisa, nosso foco nessa dissertação será no caso em que $A = k[x_1, x_2, x_3]$ e I é o ideal gerado pelos menores maximais de uma matriz com o seguinte formato:

$$\varphi = \left[\begin{array}{c|cccc} x_1 + \ell & \ell_{1,2} & \dots & \ell_{1,n-1} \\ \hline \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \dots & \ell_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} \end{array}\right] \tag{1}$$

onde ℓ e $\ell_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1$ e $(i,j) \neq (1,1))$ são formas lineares que dependem apenas das variáveis x_2 e x_3. Denotando por $f_1, \dots, f_n$ os menores (ordenados e com sinal) de φ temos $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ e $\mathcal{R}_A(I) = A[f_1 t, \dots, f_n t]$. O nossa meta será responder questões do seguinte tipo:

(Q_1) Qual é o núcleo do homomorfismo de k-álgebras

$$k[x_1, x_2, x_3, t_1, \dots, t_n] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_A(I) \qquad (x_i \mapsto x_i, t_i \mapsto f_i t)?$$

(Q_2) $\mathcal{R}_A(I)$ é um anel Cohen-Macaulay?

(Q_2) $\mathcal{R}_A(I)$ é um anel normal?

Para tratar dessas questões dividimos o texto em cinco capítulos. Nos quatro primeiros capítulos nos dedicamos em fazer uma apresentação sucinta de todas as noções e resultados de álgebra comutativa que se fazem necessários para entender e resolver os principais problemas do trabalho. Explicamos conceitos como Cohen-Macaulicidade, normalidade, anéis graduados, álgebra de Rees, birracionalidade, etc. Como esses primeiros capítulos se tratam de resultados bem estabelecidos, as demonstrações são omitidas e as remetemos a referências clássicas tais como [1], [2], [11],

[14] e [17]. Compensamos a falta dessas demonstrações apresentando exemplos para explicar os conceitos e teoremas. Acreditamos que essa é uma atitude positiva, uma vez que nas referências tradicionais não é muito comum a apresentação de exemplos com cálculos explícitos. Finalmente, no último capítulo nos dedicamos a responder completamente as questões (Q_1), (Q_2) e (Q_3).

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo desse capítulo é situar o leitor menos experiente sobre as principais noções e resultados básicos de álgebra comutativa que serão necessários para chegarmos ao objetivo principal desse trabalho. Por esse motivo, não realizaremos provas das proposições e teoremas aqui enunciados. Em vez disso, focaremos nossa atenção em mostrar como esses resultados podem ser aplicados através da exibição de uma série de exemplos.

1.1 Primos associados e decomposição primária

Seja M um módulo sobre um anel A. Um ideal primo P de A é dito *primo associado* de M se existe um elemento x de M tal que $P = 0 :_A x$. O conjunto de todos os primos associados de M será denotado por $\mathrm{Ass}_A(M)$. Os elementos minimais de $\mathrm{Ass}_A(M)$, com respeito a relação de inclusão, são chamados de *primos associados mínimos* de M. Denotaremos a coleção dos primos associados mínimos de M por $\mathrm{Min}_A(M)$. Os primos associados de M que não pertencem a $\mathrm{Min}_A(M)$ serão chamados de *primos associados imersos* de M.

Na proposição a seguir, bem como no resto do texto, usaremos $Z_A(M)$ para denotar o conjunto dos divisores de zero de um A-módulo M (recordemos que, por definição, $Z_A(M)$ é o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tal que $ax = 0$ para algum $x \in M$ não nulo).

Proposição 1.1.1. *Seja A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Então:*

(a) $\mathrm{Ass}_A(M)$ *é vazio se, e somente se,* $M = 0$.

(b) $\mathrm{Ass}_A(M)$ *é um conjunto finito.*

(c) $Z_A(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}_A(M)} P$.

(d) *Se* N *é um submódulo de* M *então* $\mathrm{Ass}_A(N) \subset \mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Ass}_A(N) \cup \mathrm{Ass}_A(M/N)$.

Prova. Ver [17, Theorem 6.1, 6.3, 6.5]. □

Seja M um módulo sobre um anel A e N um submódulo de M. É verificável que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mathrm{Ass}_A(M/N)$ tem um único elemento.

(b) $Z_A(M/N) = \sqrt{N : M}$.

(c) Dados $a \in A$ e $x \in M$ tais que $ax \in N$ então $a \in \sqrt{N : M}$ ou $x \in N$.

Se N satisfaz uma (e portanto todas) dessas condições dizemos que N é um *submódulo primário* de M. Além disso, se P é o único primo de $\mathrm{Ass}_A(M/N)$, também dizemos que N é submódulo P-*primário* de M.

Observação 1.1.2. Seja I um ideal de um anel A. Dizer que I é um *ideal primário* de A significa que I é um submódulo primário de A. Observe que $I : A = I$. Assim, I é ideal primário se satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mathrm{Ass}_A(A/I)$ tem um único elemento.

(b) $Z_A(A/I) = \sqrt{I}$.

(c) Dados $a, x \in A$ tais que $ax \in I$ então $a \in \sqrt{I}$ ou $x \in I$.

Exemplo 1.1.3. Seja P um ideal primo de um anel A. Notemos que nesse caso a condição (c) da Observação 1.1.2 é automática. Assim, todo ideal primo é primário.

Exemplo 1.1.4. Seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de um anel A. Afirmamos que para qualquer inteiro positivo n o ideal $\mathfrak{m}^n$ é primário. Para provar essa afirmação iniciamos observando que $Z_A(A/\mathfrak{m}^n)$ é não vazio pois $A/\mathfrak{m}^n \neq 0$. Dito isso, suponhamos P sendo um primo associado de $A/\mathfrak{m}^n$. Então, $P = 0 : x$ para algum $x \in A/\mathfrak{m}^n$ não nulo. Em particular, temos $\mathfrak{m}^n x = 0$, ou seja, $\mathfrak{m}^n \subset P$. Como P é primo, segue dessa inclusão que $\mathfrak{m} \subset P$. Pela maximalidade de $\mathfrak{m}$ segue que $P = \mathfrak{m}$. Dessa forma, $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{m}^n) = \{\mathfrak{m}\}$. Portanto, da Observação 1.1.2(a) segue o afirmado.

Definição 1.1.5. Seja N um submódulo de um A-módulo M. Uma *decomposição primária* de N em M é uma interseção $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ onde cada Q_i é submódulo P_i-primário de M. A decomposição primária $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ é dita *reduzida* se $\mathrm{Ass}_A(M/Q_i) \neq \mathrm{Ass}_A(M/Q_j)$ sempre que $i \neq j$ e N não pode ser expresso como interseção de uma subcoleção própria dos Q_i.

Exemplo 1.1.6. Seja $A = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz\rangle$. Claramente, cada gerador do ideal I pertence a interseção $\langle x, y\rangle \cap \langle x, z\rangle \cap \langle y, z\rangle$. Agora, suponhamos que f é um elemento arbitrário da interseção $\langle x, y\rangle \cap \langle x, z\rangle \cap \langle y, z\rangle$. Em particular, existem $a_i, b_i \in A$, com $1 \leqslant i \leqslant 3$, tais que

$$f = a_1x + b_1y = a_2x + b_2z = a_3y + b_3z.$$

Dessas igualdades segue, por exemplo, que:

$$a_1x = (a_3 - b_1)y + b_3z \quad \text{e} \quad b_1y = (a_2 - a_1)x + b_2z.$$

Logo, $a_1x \in \langle y, z\rangle$ e $b_1y \in \langle x, z\rangle$. Como $\langle y, z\rangle$ e $\langle x, z\rangle$ são ideais primos de A com $x \notin \langle y, z\rangle$ e $y \notin \langle x, z\rangle$ então $a_1 \in \langle y, z\rangle$ e $b_1 \in \langle x, z\rangle$. Assim, existem $\alpha_i, \beta_i \in A$, com $i = 1, 2$, tais que $a_1 = \alpha_1y + \alpha_2z$ e $b_1 = \beta_1x + \beta_2z$. Desse modo, $f = (\alpha_1 + \beta_1)xy + \alpha_2xz + \beta_2yz$, ou seja, $f \in I$. Com isso segue que a interseção $\langle x, y\rangle \cap \langle x, y\rangle \cap \langle x, y\rangle$ está contida no ideal I. Portanto, temos a igualdade

$$I = \langle x, y\rangle \cap \langle x, z\rangle \cap \langle y, z\rangle.$$

Como cada membro dessa interseção é ideal primo, segue que esta é uma decomposição primária para o ideal I.

Exemplo 1.1.7. Seja $A = k[x, y]$ um anel de polinômios em duas variáveis sobre um corpo k e $I = \langle x^2, xy\rangle$. Considere a interseção $\langle x\rangle \cap \langle x, y\rangle^2$. Claramente, os geradores de I pertencem a interseção citada. Além disso, seja $f \in \langle x\rangle \cap \langle x, y\rangle^2$. Observe que $\langle x, y\rangle^2 = \langle x^2, y^2, xy\rangle$, assim, existem $a, b, c, d \in A$, tais que

$$f = ax = bx^2 + cy^2 + dxy.$$

Desse modo:

$$cy^2 = ax - bx^2 - dxy.$$

Então, $cy^2 \in \langle x\rangle$. Como $\langle x\rangle$ é primo e $y^2 \notin \langle x\rangle$, temos que $c \in \langle x\rangle$. Logo, existe $p \in A$, tal que $c = px$. Então, $f = bx^2 + cy^2 + dxy = bx^2 + pxy^2 + dxy \in \langle x^2, xy\rangle = I$. Desse modo,

$$I = \langle x\rangle \cap \langle x, y\rangle^2.$$

Pelo Exemplo 1.1.3 segue que $\langle x\rangle$ é primário e pelo Exemplo 1.1.4 segue que $\langle x, y\rangle^2$ também é primário. Portanto, $I = \langle x\rangle \cap \langle x, y\rangle^2$ é uma decomposição primária de I.

Teorema 1.1.8. *Seja* M *um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano* A *e* N *um* *submódulo de* M. *Então* N *admite uma decomposição primária reduzida* $N = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$. *Além disso,*

(i) $\mathrm{Ass}_A(M/N) = \{\sqrt{Q_1 : M}, \ldots, \sqrt{Q_r : M}\}$. *Em particular, os radicais* $\sqrt{Q_i : M}$ *em uma decomposição primária reduzida de* N *em* M *são unicamente determinados pelo quociente* M/N.

(ii) *Os submódulos primários* Q_i *que correspondem aos primos associados mínimos de* M/N *são unicamente determinados pelo quociente* M/N.

Prova. Ver [16, Theorem 3.2]. □

Exemplo 1.1.9. Seja $A = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 1.1.6 vimos que uma decomposição primária de I é:

$$I = \langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle.$$

É imediato observar que essa é de fato uma decomposição primária reduzida. Segue do teorema da decomposição primária que para esse exemplo temos:

$$\mathrm{Ass}_A(A/I) = \mathrm{Min}_A(A/I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}.$$

Observação 1.1.10. Seja A um anel noetheriano e I um ideal de A. Afirmamos que um ideal primo P é primo associado mínimo de A/I se, e somente se, P é mínimo (com respeito a ordem de inclusão) entre os ideais primos de A que contém I. Com efeito, suponhamos que $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ seja uma decomposição primária de I. Se P é um elemento mínimo na coleção dos ideais que contem I então, em particular, $P \supset \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$. Como P é ideal primo, P contém um certo Q_i. Logo, $P = \sqrt{P} \supset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é ideal primo e contém I segue da minimalidade de P que $P = \sqrt{Q_i}$. Obviamente, $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo, pois caso contrário, $P = \sqrt{Q_i}$ não seria primo mínimo (em relação à inclusão). Por outro lado, consideremos $\sqrt{Q_i}$ sendo um primo associado mínimo de A/I. Seja P_1 um ideal primo tal que $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Da primalidade de P_1 segue que $Q_j \subset P_1$ para algum j. Logo, $\sqrt{Q_j} \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo devemos ter $\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q_j}$, ou seja, $P_1 = \sqrt{Q_i}$. Sendo assim, $\sqrt{Q_i}$ é minimo entre os ideais primos que contém I.

1.2 A dimensão de Krull

Seja A um anel. Dizemos que uma cadeia de ideais primos de A da forma $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ tem comprimento n. A *dimensão de Krull* de A, denotada $\dim A$, é o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ em A. Se não existe uma cota superior para os comprimentos das cadeias de ideais primos de A então dizemos que $\dim A = \infty$.

A *altura* de um ideal primo P de A, denotada $\mathrm{alt}(P)$, é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideias primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$. Segue das definições de altura e dimensão e das propriedades de localização que

$$\mathrm{alt}(P) = \dim A_P. \tag{1.1}$$

A definição de altura para um ideal arbitrário $I \subsetneq A$ é realizada através da igualdade

$$\mathrm{alt}(I) := \min\{\mathrm{alt}(P) \mid P \in \mathrm{Min}_A(A/I)\}. \tag{1.2}$$

Enunciamos agora um dos principais resultados da teoria da dimensão

Teorema 1.2.1 (Teorema do ideal principal de Krull Generalizado)**.** *Sejam* $x_1, \ldots, x_r$ *elementos de um anel noetheriano* A *e* $I = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. *Então para cada* $P \in \mathrm{Min}(A/I)$ *tem-se* $\mathrm{alt}(P) \leqslant r$. *Em particular,* $\mathrm{alt}(I) \leqslant r$.

Prova. Ver [11, Theorem 10.2]. □

Exemplo 1.2.2. Seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo k. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos o ideal primo $P_i = \langle x_1, \ldots, x_i \rangle$. A cadeia de ideais primos $\langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_i$ implica que $\mathrm{alt}(P_i) \geqslant i$. Por outro lado, pelo teorema do ideal principal de Krull generalizado segue que $\mathrm{alt}(P_i) \leqslant i$. Portanto, segue dessas desigualdades que $\mathrm{alt}(P_i) = i$.

Exemplo 1.2.3. Seja $A = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 1.1.9 obtemos que

$$\mathrm{Min}_A(A/I) = \{\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle\}$$

Assim, por definição,

$$\mathrm{alt}(I) = \min\{\mathrm{alt}\langle x, y \rangle, \mathrm{alt}\langle x, z \rangle, \mathrm{alt}\langle y, z \rangle\} \tag{1.3}$$

Mas, pelo exemplo anterior, $\mathrm{alt}\langle x, y \rangle = \mathrm{alt}\langle x, z \rangle = \mathrm{alt}\langle y, z \rangle = 2$. Logo, $\mathrm{alt}(I) = 2$.

Exemplo 1.2.4. Sejam $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1 z - t_2 y, t_2 y - t_3 x \rangle$. Podemos olhar $t_1 z - t_2 y$ como um polinômio de grau 1 na varíavel z com coeficientes em $k[x, y, t_1, t_2, t_3]$. Aplicando o critério de Eisenstein neste polinômio concluímos que ele é um irredutível. Observe que o ideal $\langle t_1 z - t_2 y \rangle$ está propriamente contido em I pois, $t_2y - t_3x$ não pode ser múltiplo de $t_1z - t_2y$, uma vez que $t_2y - t_3x$ tem grau zero na variável t_1. Assim, se $P \in \mathrm{Min}_A(A/I)$ então temos a seguinte cadeia de ideais primos:

$$\{0\} \subsetneq \langle t_1z - t_2y\rangle \subsetneq P.$$

Logo, $\mathrm{alt}(P) \geqslant 2$. Com isso, segue que $\mathrm{alt}(I) \geqslant 2$. Por outro lado, pelo Teorema 1.2.1 segue que $\mathrm{alt}(I) \leqslant 2$. Portanto, dessas duas desigualdades segue $\mathrm{alt}(I) = 2$.

Uma importante classe de ideais nesse trabalho será a dos ideais gerados por menores de tamanho fixo de uma matriz. Mais especificamente, considere Ψ sendo uma matriz de ordem $m \times n$ com entradas em um anel A. Para cada $1 \leqslant t \leqslant \min\{m, n\}$, denotaremos por $I_t(\Psi)$ o ideal de A gerado por todos os menores de ordem t da matriz Ψ. Para ideais desse tipo temos a seguinte estimativa para a altura:

Teorema 1.2.5. $\mathrm{alt}(I_t(\Psi)) \leqslant (m - t + 1)(n - t + 1)$.

Prova. Ver [2, Theorem 2.1]. □

Seja M um A-módulo. A *dimensão de Krull* de M, também denotada por $\dim M$, é a dimensão de Krull do anel $A/0 : M$. Um fato notável da dimensão de Krull de um A-módulo M é que ela é detectável através dos primos mínimos de M. De fato, pode ser provado que

$$\dim M = \max\{\dim A/P \mid P \in \mathrm{Min}(M)\}. \tag{1.4}$$

1.3 Sistema de Parâmetros

No caso em que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local também podemos obter a dimensão de um A-módulo M através da noção de *sistema de parâmetros*.

Definição 1.3.1. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um A-módulo finitamente gerado. Um *sistema de parâmetros* de M é um conjunto de elementos $a_1, \ldots, a_s$, com s menor possível, tal que $\dim M/\langle a_1, \ldots, a_s\rangle M = 0$.

Como na definição de sistema de parâmetros estamos supondo que $(A, \mathfrak{m})$ é anel noetheriano local então $\mathfrak{m}$ é finitamente gerado. Assim, podemos supor $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Por razões óbvias, $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset 0 : M/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle M$. Assim, como $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ é ideal maximal, $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = 0 : M/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle M$. Logo,

$$\dim M/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle M = \dim A/\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = 0.$$

Com essa igualdade segue que realmente a noção de sistema de parâmetros está bem definida.

A conexão entre os sistemas de parâmetros e a dimensão de Krull de um A-módulo é dada pelo seguinte teorema

Teorema 1.3.2. *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* M *um* A*-módulo finitamente gerado. Então a dimensão de Krull de* M *é igual a cardinalidade de um sistema de parâmetros de* M.

Prova. Ver [11, Proposition 10.8 (c)]. □

Observação 1.3.3. A maneira de se obter um sistema de parâmetros $a_1, \dots, a_s$, (lembrando que $s = \dim M$) é baseada na igualdade (1.4) e é realizada da seguinte maneira: Iniciamos definindo S_1 sendo a união de todos os primos associados mínimos de M tais que $\dim M = \dim A/P$. Feito isso, escolhemos $a_1 \in A \setminus S_1$. Para uma tal escolha, é possível provar que $\dim M/\langle a_1 \rangle M = \dim M - 1$. Agora, suponhamos escolhidos $a_1, \dots, a_{i-1}$ tais que

$$\dim M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M = \dim M - (i - 1).$$

Definimos S_i sendo a união de todos os primos associados mínimos de $M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M$ tais que $\dim M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M = \dim A/P$. Feito isso, escolhemos $a_i \in A \setminus S_i$. Para uma tal escolha teremos

$$\begin{aligned}
\dim M/\langle a_1, \dots, a_i \rangle M &= \dim(M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M)/(\langle a_1, \dots, a_i \rangle M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M) \\
&= \dim M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M - 1 \\
&= \dim M - (i - 1) - 1 \\
&= \dim M - i
\end{aligned}$$

Procedendo dessa maneira encontraremos ao final de s etapas um sistema de parâmetros para M.

1.4 Anéis e módulos graduados

Seja A um anel com identidade. Dizemos que A é um *anel* $\mathbb{Z}$*-graduado* (ou simplesmente, *anel graduado*) se existir uma decomposição

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i = \cdots \oplus A_{-2} \oplus A_{-1} \oplus A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots,$$

em grupos abelianos A_i, tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$. Esta noção também é generalizada para A-módulos. Com efeito, dizemos que um A-módulo M é $\mathbb{Z}$*-graduado* se existir uma decomposição

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i = \cdots \oplus M_{-2} \oplus M_{-1} \oplus M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots ,$$

em grupos abelianos M_i, tal que $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$.

Segue diretamente da definição que cada elemento $\mathbf{x} \in M$ se escreve de forma única como

$$\mathbf{x} = \cdots + \mathbf{x}_{-1} + \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \cdots$$

com cada $\mathbf{x}_i \in M_i$ e diferentes de zero apenas para uma quantidade finita de índices $i \in \mathbb{Z}$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, chamaremos o grupo abeliano M_i de *parte homogênea de grau* i do A-módulo M e cada elemento $\mathbf{x}$ de M_i será chamado de *elemento homogêneo de grau* i. Escreveremos $\deg(x) = i$ significando que $x \in M_i$.

Exemplo 1.4.1. Seja R um anel. O protótipo padrão de anel $\mathbb{Z}$-graduado é o anel de polinômios em n-variáveis $A = R[x_1, \ldots, x_n]$. Fixemos uma n-upla de inteiros $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$. Podemos definir as partes homogêneas nesse caso da seguinte maneira:

- $A_0 = R$.
- Para cada $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, A_i é o R-módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ tais que $\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_n d_n = i$ (se a equação $\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_n d_n = i$ não tem solução $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ então $A_i = \{0\}$).

Pode ser verificado que $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado. Em particular, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, a variável x_i é um polinômio homogêneo de grau d_i. Na situação especial em que $d_1 = \cdots = d_n = 1$ temos a *graduação usual* do anel de polinômios $A = R[x_1, \ldots, x_n]$. Observe que na graduação usual o polinômio $f(x, y) = x^2 + y \in R[x, y]$ não é homogêneo. Todavia, se considerarmos a graduação em que $\deg(x) = 1$ e $\deg(y) = 2$ temos que $f(x, y) = x^2 + y$ é um polinômio homogêneo.

Observação 1.4.2. Se $M_1, \ldots, M_n$ são A-módulos graduados então $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ tem estrutura natural de A-módulo graduado. A i-ésima parte graduada de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ nesse caso é definida por

$$(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n)_i = (M_1)_i \oplus \cdots \oplus (M_n)_i.$$

Em particular, para qualquer inteiro positivo n o A-módulo livre A^n é graduado.

Proposição 1.4.3. *Seja* $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ *um anel graduado. Então* A_0 *é um subanel de* A.

Prova. Pela definição de anel graduado segue que A_0 é fechado para as operações de adição e multiplicação e que o zero de A pertence a A_0. Assim, resta provar que a identidade de A pertence a A_0. Para isso, escrevemos

$$1 = \cdots + a_{-1} + a_0 + a_1 + \cdots , \tag{1.5}$$

onde $a_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Seja $\ell \in \mathbb{Z}$ não nulo. Multiplicando (1.5) à esquerda por a_ℓ obtemos:

$$a_\ell = \cdots + a_\ell a_{-1} + a_\ell a_0 + a_\ell a_1 + \cdots \tag{1.6}$$

Assim, da unicidade da escrita dos elementos de A como soma de elementos homogêneos, segue que $a_\ell a_k = 0$ se k for não nulo e $a_\ell = a_\ell a_0$. Por outro lado, multiplicando (1.5) à direita por a_0 obtemos:

$$a_0 = \cdots + a_{-1}a_0 + a_0^2 + a_1 a_0 + \cdots \tag{1.7}$$

Mais um vez usando a unicidade da escrita dos elementos de A como soma de elementos homogêneos obtemos $a_\ell a_0 = 0$ para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ não nulo. Mas já havíamos deduzido antes que $a_\ell = a_\ell a_0$ para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ não nulo. Portanto, $1 = a_0$ e segue daí que $1 \in A_0$. □

Segue da proposição acima que a inclusão de anéis $A_0 \hookrightarrow A$ confere ao anel graduado A estrutura de A_0-álgebra. Dizemos nesse caso que A é uma A_0-*álgebra graduada*.

Sejam $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ e $M' = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M'_i$ módulos graduados. Um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \to M'$ é dito um *homomorfismo de* A*-módulos graduados* se $\varphi(M_i) \subseteq M'_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Seja M um A-módulo graduado. Um submódulo N de M é chamado de *submódulo graduado* se N é um módulo graduado tal que o mapa inclusão é um homomorfismo graduado. Os A-submódulos graduados de A são chamados de *ideais graduados* (ou *ideais homogêneos*) de A.

Proposição 1.4.4. *Seja* $\varphi : M \to M'$ *um homomorfismo de* A*-módulos graduados. Então* $\ker(\varphi)$ *é submódulo graduado de* M.

Prova. Seja $\mathbf{x} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbf{x}_i \in \ker(\varphi)$ a escrita (única) do elemento $\mathbf{x} \in M$ como soma de elementos homogêneos. Como φ é homomorfismo graduado temos que $\varphi(\mathbf{x}_i) \subseteq M'_i$ e assim, $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi(\mathbf{x}_i)$ é a escrita (única) de $\varphi(\mathbf{x}) \in M'$ como soma de elementos homogêneos. Por outro lado, como $\mathbf{x} \in \ker(\varphi)$, $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi(\mathbf{x}_i) = 0$. Mas isso ocorre se, e somente se, $\varphi(\mathbf{x}_i) = 0$ para cada i, ou seja, $\mathbf{x} \in \ker(\varphi)$ se, e somente se, cada $\mathbf{x}_i \in \ker(\varphi) \cap M_i$. Portanto, $\ker(\varphi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(\ker(\varphi) \cap M_i)$. □

Dados dois anéis graduados $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ e $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ dizemos que um homomorfismo de anéis $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo de anéis graduados* se $\varphi(A_i) \subset B_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. De forma análoga a Proposição 1.4.4 temos aqui o seguinte resultado

Proposição 1.4.5. *Sejam* $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ *e* $A' = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A'_i$ *anéis graduados. Se* $\varphi : A \to A'$ *é um homomorfismo de anéis graduados então* $\ker(\varphi)$ *é um ideal homogêneo de* A.

Prova. A prova nesse caso é uma mera adequação da feita para a Proposição 1.4.4. $\square$

Dado um A-módulo graduado $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ e $a \in \mathbb{Z}$ podemos definir um novo módulo graduado, denotado $M(a)$, da seguinte maneira

$$M(a) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M(a)_i,$$

onde $M(a)_i = M_{i+a}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Note que os elementos de M e $M(a)$ são os mesmos, a única diferença está nos graus dos seus elementos.

Exemplo 1.4.6. Seja A um anel graduado arbitrário. Naturalmente, A é um A-módulo graduado sobre ele próprio. Nessa perspectiva, o elemento identidade de A tem grau zero. Todavia, no A-módulo graduado $A(a)$, com $a \in \mathbb{Z}$, a identidade de A terá grau $-a$.

O que podemos esperar sobre os primos associados de um módulo graduado? A proposição a seguir nos dá uma resposta para essa questão.

Proposição 1.4.7. *Seja M um módulo graduado sobre uma anel graduado A. Então os primos associados de M são ideais graduados de A.*

Prova. Ver [1, Lemma 1.5.6]. $\square$

No decorrer desse trabalho será necessário considerarmos também *anéis bi-graduados*. Dizemos que um anel A é bi-graduado se existir uma decomposição

$$A = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} A_{(i,j)}$$

em grupos abelianos $A_{(i,j)}$, tal que $A_{(i,j)} A_{(i',j')} \subseteq A_{(i+i',j+j')}$ para cada $(i,j), (i',j') \in \mathbb{Z}^2$.

Para cada $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, chamaremos o grupo abeliano $A_{(i,j)}$ de *parte bi-homogênea de bi-grau* (i,j) do anel A. Cada elemento a de $A_{(i,j)}$ será chamado de *elemento bi-homogêneo de bi-grau* (i,j). Também temos aqui que a parte bi-homogênea $A_{(0,0)}$ é um anel, cada $A_{(i,j)}$ é um $A_{(0,0)}$-módulo e que A é uma $A_{(0,0)}$-álgebra.

Exemplo 1.4.8. Seja R um anel e $A = R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ um anel de polinômios sobre R. Fixando $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathbb{Z}^m$ observamos que

$$A = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} A_{(i,j)}$$

é um anel bi-graduado onde:

- $A_{(0,0)} = R$.

- Para cada $(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definimos $A_{(i,j)}$ sendo o R-módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}$ tais que $\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_n d_n = i$ e $\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m = j$.

De forma inteiramente análoga ao caso graduado, podemos definir ideais bi-homogêneos e homomorfismos de anéis bi-graduados. Também pode ser verificado de modo completamente semelhante a Proposição 1.4.5 que o núcleo de um homomorfismo bi-graduado é um ideal bi-homogêneo.

Capítulo 2

Noções homológicas

Uma das propriedades que desejamos investigar nas álgebras de Rees dos ideais que consideraremos nesse trabalho é a Cohen-Macaulicidade. Mas o que significa essa propriedade? O objetivo desse capítulo é responder essa pergunta e listar alguns resultados fundamentais em torno da noção de módulos Cohen-Macaulay.

2.1 Resolução projetiva de um módulo

Seja A um anel Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Digamos que $M = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$. Uma *sizígia* de M (com respeito aos geradores $g_1, \ldots, g_n$) é um elemento $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tal que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = 0 \tag{2.1}$$

O conjunto de todas as sizígias (com respeito ao conjunto de geradores dado) é um submódulo de A^n chamado de *módulo de sizígias* de M. Observamos que o módulo de sizígias é o núcleo do homomorfismo

$$\varphi_0 : A^n \twoheadrightarrow M, \quad \mathbf{e}_i \mapsto g_i, \tag{2.2}$$

onde os $\mathbf{e}_i$'s correspondem aos elementos da base canônica de A^n. Digamos que $\ker(\varphi_0) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Podemos considerar a aplicação

$$\varphi_1 : A^m \to A^n, \quad \epsilon_i \mapsto f_i, \tag{2.3}$$

onde os ϵ_i's correspondem aos elementos da base canônica de A^m. Notemos que $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \ker(\varphi_0)$ e assim temos a sequência exata:

$$A^m \xrightarrow{\varphi_1} A^n \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0 \tag{2.4}$$

Definição 2.1.1. A sequência exata (2.4) é chamada uma *apresentação livre* do A-módulo M. A representação matricial de φ_1 nas bases canônicas de A^m e A^n é chamada uma *matriz de apresentação* (ou *matriz de sizígias*) do A-módulo M.

Exemplo 2.1.2. Sejam k um corpo e $A = k[x, y, z]$. Consideremos o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Observamos que $z \cdot (xy) - y \cdot (xz) + 0 \cdot (yz) = 0 \quad \text{e} \quad 0 \cdot (xy) + y \cdot (xz) - x \cdot (yz) = 0$. Logo, $(z, -y, 0)$ e $(0, y, -x)$ são sizígias de I. Agora suponhamos (a_1, a_2, a_3) uma sizígia arbitrária de I. Então, $a_1xy + a_2xz + a_3yz = 0$. Assim, $a_1xy = -(a_2x + a_3y)z$, ou seja, z divide a_1xy. Como z é elemento primo de A e z não divide xy então z divide a_1. Em particular, $a_1 = b_1z$ para um certo $b_1 \in A$. Um raciocínio análogo nos permite concluir que $a_2 = b_2y$ e $a_3 = b_3x$ para certos $b_2, b_3 \in A$. Desse modo, também temos $b_1xyz + b_2xyz + b_3xyz = 0$, ou seja, $b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Assim, $(a_1, a_2, a_3) = b_1(z, -y, 0) - b_3(0, y, -x)$. Portanto, $(z, -y, 0)$, $(0, y, -x) \in A^3$ são geradores do módulo de sizígias. Além disso, uma apresentação livre de I é da forma

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \to 0$$

onde a matriz de apresentação de I é $\varphi_1 = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}$.

De forma mais geral, o processo de construção de φ_0 e φ_1 em (2.4) pode ser iterado fornecendo uma sequência exata da forma

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{r+1}} A^{n_r} \xrightarrow{\varphi_r} A^{n_{r-1}} \xrightarrow{\varphi_{r-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0 \tag{2.5}$$

Uma sequência exata como esta é chamada de *resolução livre* de M enquanto $\ker \varphi_{i-1}$ é chamado de i-*ésimo módulo de sizígias* de M.

Definição 2.1.3. Um A-módulo P é dito *projetivo* se P for somando direto de um A-módulo livre[1].

Segue direto da definição que todo A-módulo livre é um A-módulo projetivo. Entretanto, a recíproca desse fato não é verdadeira. Por exemplo, fixemos um anel R. Consideremos o anel $A := R \times R$ e os A-módulos $P_1 := R \times \{0\}$ e $P_2 := \{0\} \times R$. Temos $A = P_1 \oplus P_2$. Logo, P_1 e P_2 são

[1]Um A-módulo M é dito *livre* (sobre A) quando admite uma base

módulos projetivos. Todavia, $(0,1)P_1 = \{0\}$ e $(1,0)P_2 = \{0\}$. Em particular, P_1 e P_2 não podem ser A-módulos livres. Apesar da existência de exemplos desse tipo, existem diversas situações importantes para os quais as noções de módulos livres e projetivos são equivalentes.

Teorema 2.1.4. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local. Então todo A-módulo projetivo é livre.*

Prova. Ver [17, Theorem 2.5]. □

Teorema 2.1.5 (Teorema de Quillen-Suslin)**.** *Seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo k. Então todo A-módulo projetivo finitamente gerado é livre.*

Prova. Ver [16, Theorem 2.9]. □

Seja M um módulo sobre um anel A. Uma *resolução projetiva* de M é uma sequência exata

$$\cdots \to P_r \to P_{r-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{2.6}$$

onde cada P_i é um A-módulo projetivo. Diante do que expomos anteriormente, podemos observar imediatamente que resoluções livres são casos particulares de resoluções projetivas. Assim, em particular, todo módulo finitamente gerado admite uma resolução projetiva.

Dizemos que um A módulo M tem *dimensão projetiva finita* se existe uma resolução projetiva

$$0 \to P_r \to P_{r-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0. \tag{2.7}$$

O menor desses r é chamado de *dimensão projetiva* de M. Se M não admite resolução projetiva como em (2.7) (isto é, resolução projetiva encerrando em 0) então dizemos que M é um A-módulo de *dimensão projetiva infinita*. Usaremos a notação $\dim.\mathrm{proj}_A M$ para indicar a dimensão projetiva de um A-módulo M. Obviamente, um A-módulo M é projetivo se, e somente se, $\dim.\mathrm{proj}_A M = 0$. Assim, de um certo modo podemos imaginar que o invariante $\dim.\mathrm{proj}_A M$ nos informa o quanto o módulo M deixa de ser projetivo.

Exemplo 2.1.6. No Exemplo 2.1.2 observamos que uma apresentação livre para o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subset A = k[x,y,z]$ é da forma

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \to 0$$

onde a matriz de apresentação de I é $\begin{bmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}$. Notemos que se (a_1, a_2) pertence ao núcleo de φ_1 então $(a_1 z, (-a_1 + a_2)y, -a_2 x) = (0,0,0)$. Dessa igualdade segue que $(a_1, a_2) = (0,0)$. Assim, φ_1 é um homomorfismo injetor de A-módulos. Com isso temos que uma resolução projetiva para o ideal I é

$$0 \to A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \to 0$$

Logo, $\dim.\mathrm{proj}_A I \leqslant 1$.

Exemplo 2.1.7. Seja $A = k[x]/(x^2)$ onde $k[x]$ é um anel de polinômios em uma variável com coeficientes em um corpo k. Usaremos $\overline{x}$ para denotar a classe residual de x em A. Pelo teorema da correspodência dos ideais em um anel quociente, segue que $(\overline{x})$ é ideal maximal de A (neste caso $(\overline{x})$ é de fato o único ideal maximal de A). Consideremos o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : A \twoheadrightarrow (\overline{x}) \quad a \mapsto a\overline{x}.$$

Claramente, $(\overline{x}) \subset \ker \varphi$. Mas, pela maximalidade do ideal $(\overline{x})$ segue que $\ker \varphi = (\overline{x})$. Com isso, podemos criar um mapa sobrejetor

$$\varphi_1 = \varphi_0 : A \twoheadrightarrow \ker \varphi_0 = (\overline{x}) \quad a \mapsto a\overline{x}$$

cujo núcleo também será $(\overline{x})$. De fato, podemos repetir esse processo indefinidamente construindo uma resolução livre para o ideal $(\overline{x})$ da forma

$$\cdots \to A \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} A \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_0} (\overline{x}) \to 0$$

onde $\varphi_i = \varphi_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

2.2 Sequências regulares e profundidade

Seja M um A-módulo e x um elemento de A. Dizemos que x é *divisor de zero* de M se existe um elemento $m \in M$ diferente de zero tal que $xm = 0$. Lembremos que o conjunto de todos os divisores de zero de M é denotado por $Z_A(M)$. Os elementos de A que não são divisores de zero de M são chamados elementos *regulares* de M (ou elementos M-regulares).

Observação 2.2.1. Segue da Proposição 1.1.1 e do Teorema 1.1.8 que na situação em que A é noetheriano e M é um A-módulo finitamente gerado podemos investigar os elementos regulares de M encontrando inicialmente a decomposição primária do submódulo nulo de M. A partir dessa decomposição primária extraímos os primos associados de M e para obter os elementos regulares selecionamos os elementos de A que não pertencem a nenhum desses primos associados.

Para ilustrar o que detalhamos na observação acima apresentamos o seguinte exemplo

Exemplo 2.2.2. Seja $A = k[x,y,z]$, com k sendo um corpo, $I = \langle xy, xz, yz\rangle$ e $M = A/I$. Conforme visto no Exemplo 1.1.6, uma decomposição primária para o ideal I é

$$I = \langle x,y\rangle \cap \langle x,z\rangle \cap \langle y,z\rangle.$$

Com isso, $\mathrm{Ass}_A(M) = \{\langle x,y\rangle, \langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle\}$ e o conjunto dos elementos regulares de M será $A - (\langle x,y\rangle \cup \langle x,z\rangle \cup \langle y,z\rangle)$. Por exemplo, sabemos que o elemento $x+y+z \in A - (\langle x,y\rangle \cup \langle x,z\rangle \cup \langle y,z\rangle)$. Logo, $x+y+z$ é um elemento regular de M.

Definição 2.2.3. Seja M um módulo sobre um anel A. Dizemos que $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$ é uma *sequência regular* de M (ou uma M-*sequência*) se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $\mathbf{x}M \neq M$.

(b) x_i é um elemento $M/\langle x_1,\dots,x_{i-1}\rangle M$-regular para cada $1 \leqslant i \leqslant n$.

Uma sequência que satisfaz apenas a condição (b) é chamada de M-*sequência fraca*.

Exemplo 2.2.4. O exemplo mais natural de sequência regular ocorre na situação em que A é um anel de polinômios em n variáveis $X_1,\dots,X_n$ com coeficiente sobre um anel S. Uma vez que e

$$A/\langle X_1,\dots,X_{i-1}\rangle A \simeq S[X_i,\dots,X_n]$$

segue facilmente que X_i é $A/\langle X_1,\dots,X_{i-1}\rangle$-regular para qualquer $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemplo 2.2.5. Seja $A = k[x,y,z,t_1,t_2,t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k. Consideremos a sequência $\{t_1z - t_2y, t_2y - t_3x\}$. Como A é um domínio, temos que $t_1z - t_2y$ é elemento A-regular. Por outro lado, como visto no Exemplo 1.2.4, o anel $A/\langle t_1z - t_2y\rangle$ é domínio. Assim, como $t_2y - t_3x \notin \langle t_1z - t_2y\rangle$, segue que $t_2y - t_3x$ é elemento $A/\langle t_1z - t_2y\rangle$-regular. Portanto, a sequência $\{t_1z - t_2y, t_2y - t_3x\}$ é A-regular.

Observação 2.2.6. Temos as seguintes considerações sobre a definição de sequência regular:

(a) Se $(A,\mathfrak{m})$ é um anel local e $\mathbf{x} \subset \mathfrak{m}$ então segue pelo Lema de Nakayama que a condição (a) da Definição 2.2.3 é automática.

(b) Segue da Observação 2.2.1 que se A é anel noetheriano e M é um A-módulo finitamente gerado então para construir uma sequência regular $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$ de M devemos, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, escolher um elemento x_i que não pertença a nenhum primo associado de $M/\langle x_1,\dots,x_{i-1}\rangle M$.

(c) A permutação de uma sequência regular pode não ser uma sequência regular. Por exemplo, considere $A = k[x,y,z]$, com k sendo um corpo, visto como A-módulo. Afirmamos que a sequência $\{x, y(1-x), z(1-x)\}$ é A-regular mas a permutação $\{y(1-x), z(1-x), x\}$ não é A-regular. Com efeito, A, $A/(x) \simeq k[y,z]$ e $A/(x, y(1-x)) \simeq k[z]$ são domínios. Além disso, x, $y(1-x)$ e $z(1-x)$ são não nulos em A, $A/(x)$ e $A/(x, y(1-y))$, respectivamente. Logo, a sequência $\{x, y(1-x), z(1-x)\}$ é A-regular. Por outro lado, $z(1-x)$ não é $A/(y(1-x))$-regular, pois $y \notin (y(1-x))$ e $z(1-x)y \in (y(1-x))$. Logo, $\{y(1-x), z(1-x), x\}$ não é A-regular. Apesar da existência de exemplos desse tipo existe uma hipótese que abrange uma enorme quantidade de situações onde permutação não afeta a propriedade de ser sequência regular. De fato, se M é um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma M-sequência que está contida no radical de Jacobson[2] de A então qualquer permutação de $\mathbf{x}$ é M-sequência (ver [1]). Em particular, se $(A, \mathfrak{m})$ é anel local e $\mathbf{x}$ é uma M-sequência tal que $\mathbf{x}M \neq M$ então qualquer permutação de $\mathbf{x}$ é M-sequência.

Seja I um ideal de um anel noetheriano A e M um A-módulo finitamente gerado com $IM \neq M$. Uma M-*sequência maximal* em I é uma M-sequência $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset I$ tal que não pode ser aumentada, isto é, para qualquer $y \in I$, $\mathbf{x}' = \{x_1, \dots, x_n, y\}$ não é M-sequência.

Exemplo 2.2.7. Sejam $A = k[x,y,z]$, com k sendo um corpo, $I = \langle xy, xz, yz \rangle$, $M = A/I$ e $\mathfrak{m} = \langle x, y, z \rangle$. Como visto no Exemplo 2.2.2, $\{x + y + z\}$ é uma M-sequência em $\mathfrak{m}$. Por outro lado, observe que

$$M/\langle x + y + z \rangle M \simeq k[x,y,z]/\langle x + y + z, I \rangle.$$

Mas um primo associado P de $k[x,y,z]/\langle x + y + z, I \rangle$ deve conter o ideal $\langle x + y + z, I \rangle$. Em particular, P deve conter um dos seguintes ideais: $\langle x+y+z, x, y \rangle$, $\langle x+y+z, x, z \rangle$ ou $\langle x+y+z, y, z \rangle$. Mas estes três ideais são iguais a $\mathfrak{m}$. Logo, $\mathfrak{m} \subset P$. Pela maximalidade de $\mathfrak{m}$ segue que $P = \mathfrak{m}$. Logo, $\mathrm{Ass}_A(M/\langle x + y + z \rangle M) = \mathrm{Ass}_A(k[x,y,z]/\langle x + y + z, I \rangle) = \{\mathfrak{m}\}$. Assim, não existe $\gamma \in \mathfrak{m}$ que seja $M/\langle x + y + z \rangle M$-regular, ou seja, não existe $\gamma \in \mathfrak{m}$ tal que $\{x + y + z, \gamma\}$ seja M-sequência. Logo, $\{x + y + z\}$ é M-sequência maximal em $\mathfrak{m}$.

Observe que se $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma M-sequência então temos a cadeia de ideais $\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ onde cada inclusão é própria. Assim, se A é anel noetheriano toda M-sequência pode ser estendida para uma M-sequência maximal. Em particular, toda M-sequência contida em um ideal I se estende para uma M-sequência maximal em I.

Teorema 2.2.8. *Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Então duas M-sequências maximais em I tem o mesmo número de elementos.*

[2] O *radical de Jacobson* de um anel A é o ideal obtido pela interseção de todos os ideais maximais de A.

Prova. Ver [1, Theorem 1.2.5]. $\square$

Utilizamos esse teorema para definir o *grade* de I em M como o número de elementos de uma M-sequência maximal em I. Denotaremos esse número por $\mathrm{grade}(I, M)$. Em algumas situações especiais, costumamos empregar notações e terminologias distintas para o número $\mathrm{grade}(I, M)$. Por exemplo:

(1) Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ então chamamos o grade de $\mathfrak{m}$ em M de *profundidade* de M e denotaremos esse número por $\mathrm{prof}_A(M)$.

(2) Se $I = 0 :_A M$ então chamamos o grade de I em A de grade de M e denotamos esse número por $\mathrm{grade}(M)$.

(3) O grade de I em A é chamado de grade de I e denotado por $\mathrm{grade}(I)$.

Observe que $I = 0 :_A (A/I)$. Assim,

$$\mathrm{grade}(I) = \mathrm{grade}(A/I).$$

Exemplo 2.2.9. Sejam $A = k[x, y, z]$, com k sendo um corpo, $I = \langle xy, xz, y, z\rangle$, $M = A/I$ e $\mathfrak{m} = \langle x, y, z\rangle$. Da discussão feita no Exemplo 2.2.7 segue que $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M) = 1$.

Proposição 2.2.10. *Sejam A um anel Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Então*

$$\mathrm{grade}(M) \leqslant \dim .\mathrm{proj}_A(M). \tag{2.8}$$

Prova. Ver [1, Theorem 1.2.5]. $\square$

Na situação especial em que a desigualdade da Proposição 2.2.10 é uma igualdade dizemos que M é um *módulo perfeito*. Diremos que um ideal I é perfeito se o A-módulo A/I é perfeito.

Exemplo 2.2.11. Sejam $A = k[x, y, z]$, com k sendo um corpo e $I = \langle xy, xz, yz\rangle$. Afirmamos que $\{xy, (x + y)z\} \subset I$ é uma A-sequência. Com efeito, como A é domínio então xy é A-regular. Por outro lado, os primos associados de $A/\langle xy\rangle$ são $\langle x\rangle$ e $\langle y\rangle$ e $(x+y)z \notin \langle x\rangle \cup \langle y\rangle$. Assim, $(x+y)z$ é elemento $A/\langle xy\rangle$-regular e disso segue o afirmado. Desse modo,

$$2 \leqslant \mathrm{grade}(I) \leqslant \dim .\mathrm{proj}_A(A/I).$$

Mas pelo Exemplo 2.1.6, uma resolução projetiva de A/I é

$$0 \to A^2 \to A^3 \to A \to A/I \to 0,$$

ou seja, $\dim.\text{proj}_A(A/I) \leqslant 2$. Portanto, $\dim.\text{proj}_A(A/I) = \text{grade}(I) = 2$. Em particular, I é um ideal perfeito.

Seja M um módulo sobre um anel noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$. Suponhamos que $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathfrak{m}$ é uma M-sequência. Pelo que já comentamos, cada x_i é escolhido no complementar em A da união de todos os primos associados de $M/\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle M$. Assim, segue da Observação 1.3.3 que

$$\dim M/\langle x_1, \ldots, x_i\rangle = \dim M - i$$

para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. Em particular, segue dessas igualdades o seguinte resultado

Proposição 2.2.12. *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* M *um módulo finitamente gerado. Então* $\text{prof}_A(M) \leqslant \dim M$.

Uma variante dessa proposição que não supõe uma situação local é dado pelo seguinte corolário

Proposição 2.2.13. *Se* A *é um anel noetheriano e* $I \subsetneq A$ *é um ideal então* $\text{grade}(I) \leqslant \text{alt}(I)$.

Prova. Ver [1, Proposition 1.2.14]. $\square$

As noções de profundidade e dimensão projetiva são conectadas pelo célebre teorema de Auslander-Buchsbaum

Teorema 2.2.14 (Auslander-Buchsbaum)**.** *Seja* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel Noetheriano local e* M *um* A*-módulo finitamente gerado. Se* $\dim.\text{proj}_A M < \infty$ *então:*

$$\dim.\text{proj}_A M + \text{prof}_A M = \text{prof}_A A$$

Prova. Ver [1, Theorem 1.3.3]. $\square$

2.3 Módulos e anéis Cohen-Macaulay

Definição 2.3.1. Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado não nulo. Dizemos que M é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\text{prof}_A(M) = \dim M$. O anel A é dito um *anel Cohen-Macaulay* se o for como A-módulo.

Em geral, se A é um anel noetheriano arbitrário então um A-módulo M é *Cohen-Macaulay* se $M_\mathfrak{m}$ é $A_\mathfrak{m}$-módulo Cohen-Macaulay para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Supp}\, M$.[3]

Exemplo 2.3.2. Seja A um anel noetheriano de dimensão zero. Por razões óbvias temos nesse caso que A é Cohen-Macaulay.

[3] O suporte de um A-módulo M, denotado $\text{Supp}_A M$, é o conjunto de todos os ideais primos P de A tais que $M_P \neq 0$.

Exemplo 2.3.3. Seja A um anel Cohen-Macaulay. Então o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n]$ também é Cohen-Macaulay (ver [17, Theorem 17.7]). Em particular, se k é um corpo então $k[x_1, \dots, x_n]$ é Cohen-Macaulay.

Exemplo 2.3.4. Seja A um anel Cohen-Macaulay. Então todo módulo finitamente gerado M com dimensão projetiva finita e perfeito é Cohen-Macaulay (ver [1, Theorem 2.1.5]). Assim, em particular, o A-módulo do Exemplo 2.2.11 é Cohen-Macaulay.

Teorema 2.3.5. *Seja A um anel noetheriano e M um módulo finitamente gerado.*

(a) *Se $\mathbf{x}$ é uma M-sequência e M é um módulo Cohen-Macaulay então $M/\langle \mathbf{x} \rangle M$ é Cohen-Macaulay (sobre A ou $A/\langle \mathbf{x} \rangle$). A recíproca também é verdadeira se A é anel local.*

(b) *Se M é Cohen-Macaulay e S é um conjunto multiplicativo de A então $S^{-1}M$ é Cohen-Macaulay.*

(c) *Se A é Cohen-Macaulay e $I \subsetneq A$ é um ideal de A então* $\operatorname{alt}(I) + \dim A/I = \dim A$. *Em particular, se $I \subset J$ são ideais de A e os anéis A e A/I são Cohen-Macaulay então* $\operatorname{alt}(J/I) = \operatorname{alt}(J) - \operatorname{alt}(I)$.

(d) *Se A é anel Cohen-Macaulay $I \subsetneq A$ é um ideal de A então* $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{alt}(I)$.

Vejamos no exemplo a seguir uma aplicação do item (a) do teorema acima.

Exemplo 2.3.6. Pelo exemplo 2.3.3 sabemos que o anel de polinômios $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ com coeficientes em um corpo k é Cohen-Macalay. Além disso, pelo Exemplo 2.2.5, sabemos que $\{t_1z - t_2y, t_2y - t_3x\}$ é sequência regular. Assim, pelo item (a) do Teorema 2.3.5 segue que $A/\langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x \rangle$ é anel Cohen-Macaulay.

Um resultado fundamental na teoria dos anéis Cohen-Macaulay é o celebrado teorema de Hilbert-Burch

Teorema 2.3.7 (Hilbert-Burch)**.** *Seja A um anel noetheriano e I um ideal com uma resolução livre*

$$0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \to I \to 0 \tag{2.9}$$

Então existe um elemento a regular em A tal que $I = aI_n(\varphi)$. Se I é projetivo, então $I = (a)$ e se $\dim .\mathrm{proj}_A I = 1$ *então $I_n(\varphi)$ é perfeito de grade 2. Reciprocamente, se $\varphi : A^n \to A^{n+1}$ é um homomorfismo de A-módulos com* $\operatorname{grade} I_n(\varphi) \geqslant 2$ *então $I = I_n(\varphi)$ tem* (2.9) *como resolução livre.*

Prova. Ver [1, Theorem 1.4.17]. $\square$

O teorema de Hilbert-Burch é muito utilizado na situação em que A é Cohen-Macaulay. Observe que se I tem resolução como em (2.9) e dimensão projetiva 1 então pelo Teorema de Hilbert-Burch I é perfeito. Em particular, como A é Cohen-Macaulay segue do Exemplo 2.3.4 que A/I é Cohen-Macaulay.

Capítulo 3

O critério de normalidade de Serre

Como decidir se um dado anel é um domínio de integridade? Esse é um tipo de questionamento que se fará presente nessa dissertação quando estivermos tratando do principal resultado desse trabalho. Um recurso que utilizaremos para tratar essa questão é a teoria dos anéis normais. Nesse capítulo, iremos expor um pouco dessa teoria enfatizando os aspectos de maior interesse para os nossos objetivos.

3.1 Anéis normais

Seja $A \subset B$ uma inclusão de anéis. Um elemento $x \in B$ é dito integral sobre B se existe um inteiro positivo n e elementos $r_1, \ldots, r_n \in A$ tais que

$$x^n + r_1 x^{n-1} + r_2 x^{n-2} + \cdots + r_{n-1} x + r_n = 0 \tag{3.1}$$

Chamamos (3.1) de *equação de dependência integral* de x sobre A. Pode ser verificado que o conjunto dos elementos de B que são integrais sobre A é um subanel de B que contém A. Chamamos este subanel de B de *fecho integral* de A em B. O anel A é *integralmente fechado* em B se seu fecho integral em B é o próprio A.

Quando B é o anel total de frações de A chamamos o fecho integral de A em B de *fecho integral*. Um anel reduzido A é *integralmente fechado* se seu fecho integral é igual a A.

Definição 3.1.1. Dizemos que um anel A é *normal* se A_P é domínio integralmente fechado para todo ideal primo P de A.

Observamos que todo anel normal A é reduzido. Com efeito, suponhamos $a \in A$ tal que $a^n = 0$ para algum número natural n. Devemos mostrar que, necessariamente, $a = 0$. Para isso, é suficiente provar que $1 \in (0 : a)$. Suponhamos que este não seja o caso. Então existe um ideal primo P de A que contém $(0 : a)$. Em particular, $(a/1)^n = 0/1$ em A_P. Como A_P é domínio, segue que $a/1 = 0/1$ em A_P. Logo, existe $s \in A - P$ tal que $sa = 0$. Desse modo, $s \in (A-P) \cap (0 : a)$. Mas isso é um absurdo pois $(0 : a) \subset P$.

Proposição 3.1.2. *Seja A um anel reduzido cujo anel total de frações é um produto direto finito de corpos. Então, A é normal se, e somente se, A é integralmente fechado.*

Prova. Ver [14, Lemma 2.1.15]. □

Notemos que a hipótese do anel total de frações ser um produto direto finito de corpos é imediata quando A é um domínio.

Exemplo 3.1.3. Seja A um domínio de fatoração única. Afirmamos que A é um anel normal. Com efeito, suponha p/q um elemento no corpo de frações de A. Como A é domínio de fatoração única, podemos supor que o máximo divisor comum de p e q é 1. Digamos que p/q satisfaz uma equação de dependência integral

$$(p/q)^n + r_1(p/q)^{n-1} + r_2(p/q)^{n-2} + \cdots + r_{n-1}(p/q) + r_n = 0$$

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por q^n obtemos:

$$p^n + r_1 p^{n-1} q + r_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + r_{n-1} p q^{n-1} + r_n q^n = 0.$$

Logo,

$$p(p^{n-1} + r_1 p^{n-2} q + r_2 p^{n-3} q^2 + \cdots + r_{n-1} q^{n-1}) = r_n q^n$$

Dessa igualdade e do fato do máximo divisor de p e q ser 1 segue que q divide

$$p^{n-1} + r_1 p^{n-2} q + r_2 p^{n-3} q^2 + \cdots + r_{n-1} q^{n-1}.$$

Mas isso força $n - 1 = 0$, pois caso contrário q dividiria p. Assim, $p/q = -r_1 \in A$. Segue daí que o fecho integral de A em seu corpo de frações é de fato A. Portanto, A é normal como afirmado.

Proposição 3.1.4. *Sejam A um anel noetheriano normal e $P_1, \ldots, P_n$ os primos mínimos de A. Então, $A/P_1, \ldots, A/P_n$ são domínios normais e*

$$A \simeq A/P_1 \times \cdots \times A/P_r.$$

Prova. Ver [14, Corollary 2.1.13]. □

Esta proposição é bastante útil nesse trabalho em virtude da seguinte observação:

Observação 3.1.5. Digamos que A seja um anel Noetheriano e graduado cuja parte de grau zero é um corpo k. Então os primos mínimos de A são ideais graduados (ver Proposição 1.4.7). Assim, se A é normal e $P_1, \dots, P_r$ são os primos mínimos de A então $A/P_1, \dots, A/P_r$ são anéis graduados cuja parte de grau zero é k. Por um lado, a parte de grau zero de $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é $k \times \cdots \times k$ (r vezes). Por outro lado, como $A \simeq A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ segue que a parte de grau zero de $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é k. Desse modo, $r = 1$. Em particular, A é domínio.

3.2 O critério

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Denotemos por $\mu(\mathfrak{m})$ o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$. Segue do Teorema 1.2.1 a seguinte desigualdade

$$\text{alt}(\mathfrak{m}) \leqslant \mu(\mathfrak{m}).$$

Na situação em que esta desigualdade é uma igualdade dizemos que o anel noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ é *regular*. De modo geral, diremos que um anel noetheriano A é *regular* se A_P é regular para cada ideal primo P de A.

Definição 3.2.1. Sejam A um anel noetheriano e i um inteiro não-negativo.

(i) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição* (R_i) *de Serre* se para todo ideal primo P de A de altura $\leqslant i$ o anel local A_P é regular.

(ii) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição* (S_i) *de Serre* se para todo ideal primo P de A, prof $A_P \geqslant \min\{i, \text{alt}(P)\}$.

Observação 3.2.2. Suponhamos que A é um anel Cohen-Macaulay. Em particular, pelo item (b) do Teorema 2.3.5, A_P é Cohen-Macaulay para cada ideal primo P de A. Assim,

$$\begin{aligned} \text{prof}(A_P) &= \dim A_P \qquad (\text{pois } A_P \text{ é Cohen-Macaulay}) \\ &= \text{alt}(P) \qquad (\text{pela igualdade } (1.1)) \end{aligned}$$

para cada ideal primo P de A. Logo, $\text{prof}(A_P) \geqslant \min\{i, \text{alt}(P)\}$ para cada ideal primo P de A. Portanto, se A é anel Cohen-Macaulay então A satisfaz a condição (S_i) para qualquer inteiro não negativo i.

O teorema a seguir apresenta uma caracterização para a normalidade de um anel em termos das condições de Serre

Teorema 3.2.3 (Critério de Normalidade de Serre). *Um anel noetheriano A é normal se, e somente se, A satisfaz as condições (R_1) e (S_2) de Serre.*

Prova. Ver [14, Theorem 4.5.3]. □

3.3 Critério jacobiano

Seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo k. Dados $f_1, \ldots, f_m \in A$, consideremos a k-álgebra $R = A/I$ onde $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Uma matriz jacobiana de R sobre k é a seguinte matriz de ordem $m \times n$

$$\Theta = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \tag{3.2}$$

Digamos que $\mathrm{alt}(I) = h$. O *ideal jacobiano* de R sobre k, denotado $J_{R/k}$, é o seguinte ideal de R:

$$J_{R/k} := (I_h(\Theta), I)/I \tag{3.3}$$

Temos o seguinte resultado que garante que o ideal $J_{R/k}$ está bem definido.

Proposição 3.3.1. *Sejam R e R' k-álgebra finitamente geradas isomorfas. Então, o isomorfismo entre elas transforma o ideal jacobiano de uma no ideal jacobiano da outra.*

Prova. Ver [14, Proposition 4.4.4]. □

Exemplo 3.3.2. Sejam $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1 z - t_2 y, t_2 y - t_3 x \rangle$. Consideremos $R = A/I$. Uma matriz jacobiana de R sobre k é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -t_2 & t_1 & z & -y & 0 \\ -t_3 & t_2 & 0 & 0 & y & -x \end{bmatrix}$$

Como visto no Exemplo 1.2.4, $\mathrm{alt}(I) = 2$. Assim

$$J_{R/k} := \langle I_2(\Theta), I \rangle / I.$$

Um cálculo direto nos dá

$$I_2(\Theta) = \langle t_1 t_2, t_1 t_3, t_2 t_3, xy, xz, yz, t_1 x, t_1 y, t_2 x, t_2 y, t_2 z, t_3 y, t_3 z \rangle$$

Portanto,

$$J_{R/k} = \langle t_1 t_2, t_1 t_3, t_2 t_3, xy, xz, yz, t_1 x, t_1 y, t_2 x, t_2 y, t_2 z, t_3 y, t_3 z, I \rangle / I.$$

Teorema 3.3.3 (Critério Jacobiano)**.** *Seja* $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ *um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo* k *de característica zero. Seja* I *um ideal puro* [1] *de* A *e* $R = A/I$*. Suponha* P *sendo um ideal primo de* R*. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) R_P *é anel regular.*

(b) $J_{R/k}$ *não está contido em* P.

Prova. Ver [14, Theorem 4.4.9] □

A observação a seguir será bastante importante nesse trabalho

Observação 3.3.4. Seja $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k de característica zero. Seja I um ideal puro de A e $R = A/I$. Então R satisfaz a condição (R_1) de Serre se, e somente se, $\text{alt}(J_{R/k}) \geqslant 2$. Com efeito, suponhamos que R satisfaz a condição (R_1). Então, R_P é regular para cada ideal primo de R de altura $\leqslant 1$. Assim, pelo critério Jacobiano, os primos contendo $J_{R/k}$ tem que ter altura pelo menos 2. Por outro lado, suponha que $\text{alt}(J_{R/k}) \geqslant 2$. Então, não existe primo de altura $\leqslant 1$ contendo $J_{R/k}$. Logo, novamente pelo critério Jacobiano, R_P é regular para cada ideal primo de R de altura $\leqslant 1$

Vejamos uma ilustração da observação acima sendo utilizada para deduzir a normalidade de um anel.

Exemplo 3.3.5. Sejam $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1 z - t_2 y, t_2 y - t_3 x\rangle$. Consideremos $R = A/I$. No Exemplo 2.3.6 vimos que R é um anel Cohen-Macaulay. Então, como visto na Observação 3.2.2, R satisfaz, em particular, a condição (S_2) de Serre. Como $R = A/I$ e $A = k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ são anéis Cohen-Macaulay, então segue de 2.3.5 a seguinte igualdade

$$\text{alt}(J_{R/k}) = \text{alt}\langle I_2(\Theta), I\rangle - \text{alt}(I) = \text{alt}\langle I_2(\Theta), I\rangle - 2 \tag{3.4}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\text{alt}\langle I_2(\Theta), I\rangle &= \text{alt}\langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz, t_1x, t_1y, t_2x, t_2y, t_2z, t_3y, t_3z, I\rangle \\
&\geqslant \text{alt}\langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz\rangle \\
&= \text{alt}\langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3\rangle + \text{alt}\langle xy, xz, yz\rangle \\
&= 2 + 2 = 4.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

[1]Um ideal I é dito *puro* se todo primo associado a ele possui a mesma altura.

Assim, de (3.4) e (3.5) segue que $\mathrm{alt}(J_{R/k}) \geqslant 2$. Logo, da Observação 3.3.4 temos que R satisfaz a condição (R_1) de Serre. Portanto, como R satisfaz as condições (S_2) e (R_1) de Serre, R é normal. Da Observação 3.1.5 também temos que R é um domínio.

Capítulo 4

Generalidades sobre a álgebra de Rees

Nesse capítulo apresentamos o objeto central desse trabalho, a *álgebra de Rees*. São discutidos conceitos gerais da teoria dessas álgebras tais como dimensão, equações de definição e propriedade de tipo linear. Por fim, fazemos um breve apanhado de como essas álgebras são utilizadas na teoria dos mapas birracionais.

4.1 Álgebra de Rees

Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e t uma indeterminada sobre A. A *álgebra de Rees* de I, denotada por $\mathcal{R}_A(I)$ ou $A[It]$, é uma subálgebra $\mathbb{N}$-graduada de $A[t]$ que reune em si o anel A e todas as potências do ideal I. Mais precisamente,

$$\mathcal{R}_A(I) := \sum_{n=0}^{\infty} I^n t^n = A + It + \cdots + I^n t^n + \cdots \subseteq A[t].$$

Tipicamente, a dimensão da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ depende apenas do anel A. Esta afirmação é evidenciada pelo seguinte teorema

Teorema 4.1.1. *Seja* A *um anel Noetheriano cuja dimensão de Krull é finita. Se* I *é um ideal de* A *então*

$$\dim \mathcal{R}_A(I) = \begin{cases} \dim A + 1, & \textit{se } I \not\subset P \textit{ para algum ideal primo } P \\ & \textit{com } \dim A/P = \dim A. \\ \dim A, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Prova. Ver [14, Theorem 5.1.4]. □

Notemos que se I é ideal finitamente gerado, digamos $I = (f_1, \ldots, f_m)$, então

$$\mathcal{R}_A(I) = A[f_1 t, ..., f_m t].$$

Em tal caso, temos o seguinte homomorfismo sobrejetor de A-álgebras

$$\xi : A[t_1, ..., t_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_A(I), \quad t_i \mapsto f_i t \ (i = 1, ..., m).$$

O núcleo $\mathcal{J}$ de ξ é chamado de *ideal de apresentação* (*ou definição*) de $\mathcal{R}_A(I)$ com relação a $f_1, ..., f_m$. Em particular, a álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ pode ser olhada pela seguinte perspectiva:

$$\mathcal{R}_A(I) \simeq A[t_1, ..., t_m]/\mathcal{J}. \tag{4.1}$$

Como ξ é um homomorfismo graduado temos que $\mathcal{J}$ é um ideal homogêneo. Uma questão muito importante no estudo da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ é a determinação de geradores homogêneos para o ideal $\mathcal{J}$. Uma parte desses geradores pode ser obtido a partir de uma matriz de sizígias do ideal I como nos mostra o resultado a seguir.

Proposição 4.1.2. *Sejam* A *um anel noetheriano,* $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ *e* φ *uma matriz de sizígias de* I *com respeito aos geradores* $f_1, \ldots, f_m$. *Denotemos por* $\underline{t}$ *a matriz linha* $[t_1 \ \ldots \ t_m]$ *cujas entradas são variáveis sob o anel* A. *Então, nas notações acima,* $I_1(\underline{t} \cdot \varphi) \subset \mathcal{J}$.

Prova. Digamos que $\varphi = (\alpha_{ij})_{m \times r}$. Como φ é matriz de sizígias de I com respeito aos geradores $f_1, \ldots, f_m$ então

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i t = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Logo, para cada $j = 1, \ldots, r$ temos que o polinômio $L_j(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} t_i$ pertence ao ideal de apresentação de $\mathcal{R}_A(I)$. Segue daí a inclusão desejada. □

Definição 4.1.3. Consideremos as notações e hipóteses da proposição anterior. Dizemos que I é ideal de *tipo linear* se $I_1(\underline{t} \cdot \varphi) = \mathcal{J}$.

Exemplo 4.1.4. Sejam k um corpo, $A = k[x, y, z]$ e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 2.1.2 vimos que uma matriz de sizígias para esse ideal com respeito aos geradores dados é:

$$\varphi = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}.$$

Em particular, pela Proposição 4.1.2 temos que $I_1(\underline{t} \cdot \varphi) = \langle t_1 z - t_2 y, t_2 y - t_3 x \rangle \subset \mathcal{J}$. Observe que aqui a álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ é um subanel do domínio $A[t]$; logo, $\mathcal{R}_A(I)$ é também um domínio.

Assim, como $k[x,y,z,t_1,t_2,t_3]/\mathcal{J} \simeq \mathcal{R}_A(I)$, segue que $\mathcal{J}$ é um ideal primo. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(\mathcal{J}) &= \dim k[x,y,z,t_1,t_2,t_3] - \dim k[x,y,z,t_1,t_2,t_3]/\mathcal{J} \quad (\text{ver Teorema 2.3.5(c)})\\
&= \dim k[x,y,z,t_1,t_2,t_3] - \dim \mathcal{R}_A(I) \quad (\text{pois } k[x,y,z,t_1,t_2,t_3]/\mathcal{J} \simeq \mathcal{R}_A(I))\\
&= 6-4 \quad (\text{ver Teorema 4.1.1})\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $I_1(\underline{t}\cdot\varphi) = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x\rangle$ é um ideal primo (ver Exemplo 3.3.5) e tem altura 2 (ver Exemplo 1.2.4). Desse modo, $I_1(\underline{t}\cdot\varphi) = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x\rangle \subset \mathcal{J}$ é uma inclusão de ideais primos de mesma altura. Portanto, $\mathcal{J} = I_1(\underline{t}\cdot\varphi)$. Em particular, $I = \langle xy, xz, yz\rangle$ é um ideal de tipo linear.

Dizemos que um ideal I de um anel A satisfaz a *condição* G_∞ *de Artin-Nagata* se $\mu(I_p) \leqslant \mathrm{alt}(P)$, para cada ideal primo $P \supset I$ (onde $\mu(-)$ denota o número mínimos de geradores e $\mathrm{alt}(P)$ representa a altura de P). A condição de Artin-Nagata oferece um obstáculo para um ideal ser de tipo linear.

Proposição 4.1.5. *Seja* I *um ideal de um anel Noetheriano* A. *Se* I *é ideal de tipo linear então* I *satisfaz a condição* G_∞ *de Artin-Nagata.*

Prova. Ver [13, Proposition 2.4]. □

Doravante, a situação em que estaremos mais interessados em discutir é quando $A = k[x_1,\ldots,x_n]$ é um anel de polinômios em n-variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $f_1,\ldots,f_m \in A$ são polinômios homogêneos do mesmo grau d. Em tal situação, podemos decompor a álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_A(I) = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (I^j)_i t^j \tag{4.2}$$

É fácil perceber que com essa decomposição $\mathcal{R}_A(I)$ tem estrutura de k-álgebra bi-graduada induzida pela bi-graduação usual de $k[x_1,\ldots,x_n,t]$. Se regraduarmos $\mathcal{R}_A(I)$ fazendo $\deg(t_i) = (-d,1)$ segue que o homomorfismo

$$\xi : A[y_1,...,y_m] = k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_A(I), \quad x_i \mapsto y_i \;\text{ e }\; t_i \mapsto f_i t$$

é um homomorfismo de k-álgebras bi-graduadas. Em particular, o ideal $\mathcal{J}$ é bi-homogêneo e podemos decompô-lo da forma

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_{(i,j)},$$

onde $\mathfrak{J}_{(i,j)}$ é a parte bi-homogênea de bi-grau (i, j) de $\mathfrak{J}$.

4.2 Aplicações birracionais

Seja k um corpo algebricamente fechado. Consideremos o espaço projetivo n-dimensional $\mathbb{P}^n_k$ sobre k (ou simplesmente $\mathbb{P}^n$, se o corpo envolvido for claro pelo contexto). O anel de coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$ é o anel de polinômios $k[\mathbf{x}] = k[x_0, ..., x_n]$ munido da graduação usual. Suponhamos V uma subvariedade projetiva reduzida e irredutível de $\mathbb{P}^n$. Denotaremos o ideal homogêneo de definição de V por $I(V)$ e o seu anel de coordenadas homogêneas por $R := k[\mathbf{x}]/I(V)$. Uma aplicação racional $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é definida por um conjunto ordenado de $m + 1$ formas $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\} \subset R$ de um mesmo grau, não todas nulas. O ideal $I_{\mathfrak{F}} = (f_0, ..., f_m)$ é chamado o *ideal base de $\mathfrak{F}$ com respeito ao conjunto de representantes* $\mathbf{f}$. O fecho de Zariski da imagem de $\mathfrak{F}$ é uma variedade projetiva irredutível de $\mathbb{P}^m$, que será denotada por W. O anel de coordenadas homogêneas de W identifica-se, a menos de normalização dos graus, com a k-subálgebra $S = k[\mathbf{f}] \subset R$.

Definição 4.2.1. Sejam $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva irredutítvel e $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional com imagem $W \subset \mathbb{P}^m$. Diremos que $\mathfrak{F}$ é uma *aplicação birracional sobre a imagem* quando existir uma aplicação racional $\mathfrak{G} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que a imagem de $\mathfrak{G}$ é V e as aplicações $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ são equivalentes às aplicações idênticas de W e V, respectivamente. A aplicação $\mathfrak{G}$ é denominada a *inversa* de $\mathfrak{F}$ e é denotada $\mathfrak{F}^{-1}$. Se $V = W = \mathbb{P}^n$ então dizemos que a aplicação birracional $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma *transformação de Cremona*

Exemplo 4.2.2. Seja $f = x_0 \cdots x_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ com $n \geqslant 1$. Consideremos

$$\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n, \quad (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (f/x_0 : \cdots : f/x_n).$$

Então:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(x_0 : \cdots : x_n) &= \mathfrak{F}(f/x_0 : \cdots : f/x_n) \\
&= \left(\frac{f(f/x_0, \dots, f/x_n)}{f/x_0} : \cdots : \frac{f(f/x_0, \dots, f/x_n)}{f/x_n} \right) \\
&= (f^{n-2}x_0 : \cdots : f^{n-2}x_n)
\end{aligned}$$

Dessas igualdades segue que $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}$ é equivalente, projetivamente, a aplicação identidade de $\mathbb{P}^n$. Portanto, $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma transformação de Cremona.

Exemplo 4.2.3. Seja $k[x_{i,j} | 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ o anel de polinômios em n^2 variáveis com coeficientes sobre o corpo k. Consideremos a matriz $\mathbf{X} = (x_{i,j})$ de ordem $n \times n$. Da teoria de matrizes temos a seguinte identidade

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(X)) = (\det X)^{n-2} \cdot X \tag{4.3}$$

onde $\mathrm{adj}(X)$ denota a matriz adjunta de X. Esta identidade nos mostra que a aplicação

$$\mathfrak{F} : \mathbb{P}^{n^2-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n^2-1}, \quad (\cdots : x_{ij} : \cdots) \mapsto (\cdots : \mathrm{adj}(X)_{ij} : \cdots)$$

é uma transformação de Cremona.

Observação 4.2.4. Seja $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ um polinômio homogêneo de grau $d \geqslant 2$. O mapa racional

$$\mathcal{P}_f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n, \quad (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (\partial f/\partial x_0 : \cdots : \partial f/\partial x_n)$$

é chamado *mapa polar* de f. Dizemos que f é polinômio *homaloidal* se o mapa polar de f é uma transformação de Cremona. Observamos que os exemplos 4.2.2 e 4.2.3 implicam que $f = x_0 \cdots x_n \in k[x_0, \ldots, x_n]$ e $f = \det X \in k[x_{i,j} | 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ são polinômios homaloidais. A menos de mudança de coordenadas, foi provado que no plano projetivo uma cônica suave, a união de três retas não concorrentes e a união de uma cônica suave com uma de suas retas tangentes são as únicas curvas homaloidais. Esse resultado foi estabelecido por Dolgachev em [8]. Vale a pena enfatizar que a parte central do resultado de Dolgachev é o fato que o grau de um polinômio homaloidal reduzido de $k[x_0, x_1, x_2]$ é no máximo 3. Infelizmente, para $n \geqslant 3$ não existe uma contrapartida para esse resultado. De fato, nos últimos anos famílias de polinômios homaloidais irredutíveis de grau d no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, para quaisquer $n \geqslant 3$ e $d \geqslant 2n-3$, foram produzidos em [4]. Estes exemplos são fortemente baseados na teoria dos scrolls normais e suas projeções. Recentemente, vários exemplos de polinômios homalóides de natureza determinantal tem sido sistematicamente investigados à luz dos métodos da álgebra comutativa (ver por exemplo [6, 7, 19]).

Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva com anel de coordenadas homogêneas $R := k[\mathbf{x}]/I(V)$ e $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação racional definida por um conjunto ordenado de $m + 1$ formas $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R$ de um mesmo grau, não todas nulas. Denotemos $I = \langle f_0, \ldots, f_m \rangle$. Escreveremos

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{J}_{(p,q)} \subseteq R[y_0, \ldots, y_m]$$

para denotar o ideal de apresentação da álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$. Uma parte importante de $\mathcal{J}$ é

$$\mathcal{J}_{(0,*)} := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_{(0,q)}.$$

Em particular, os elementos de $\mathcal{J}_{(0,*)}$ dependem apenas das variáveis $y_0, \ldots, y_m$ e portanto podem ser vistas como elementos de $k[\mathbf{y}] = k[y_0, \ldots, y_m]$. De fato, o ideal $\mathcal{J}_{(0,*)}$ corresponde a todas as relações polinomiais (sobre k) de $f_0, \ldots, f_m$. Assim,

$$S := k[\mathbf{y}]/\mathcal{J}_{(0,*)}k[\mathbf{y}] \simeq k[f_0, \ldots, f_m], \tag{4.4}$$

ou seja, o ideal gerado por $\mathcal{J}_{(0,*)}$ corresponde ao ideal homogêneo da variedade imagem de $\mathfrak{F}$.

Observação 4.2.5. Usaremos $\overline{x_i}$ (respectivamente, $\overline{y_j}$) para denotar a classe residual da variável x_i no anel R (repectivamente, y_j no anel S).

Para efeito do estudo da birracionalidade da aplicação $\mathfrak{F}$ uma parte importante do ideal bi-graduado $\mathcal{J}$ é:

$$\mathcal{J}_{(1,*)} := \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_{(1,q)}.$$

Notemos que uma forma de bi-grau $(1, q)$ pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{n} Q_i(\mathbf{y})\overline{x_i}$, para convenientes polinômios homogêneos $Q_i(\mathbf{y}) \in k[\mathbf{y}] \subset R[\mathbf{y}]$ de grau q. Como $\mathbf{y}$ são indeterminadas sobre R, duas tais representações da mesma forma implicam um sizígia de $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}\}$ com coeficientes em k. Assim, a representação é única a menos de dependência k-linear de $\{\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}\}$, i.e., a menos de elementos de $I(V)_1$.

Digamos que $\{P_1, \ldots, P_s\} \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ seja o levantamento de um conjunto de formas que geram o ideal $\langle \mathcal{J}_{(1,*)} \rangle$ e que $\{\ell_1, \ldots, \ell_r\}$ é uma base do k-espaço vetorial $I(V)_1$. Chamamos $\mathrm{dgi}(I(V)) := \dim_k I(V)_1 = r$ de *índice de degeneração* de $I(V)$ e $\mathrm{edim}(R) = n + 1 - \mathrm{dgi}(I(V))$ de *dimensão de imersão* de R. Observamos que a matriz jacobiana dos polinômios $\{\ell_1 \ldots, \ell_r, P_1, \ldots, P_s\}$ com respeito as variáveis $\mathbf{x}$ tem suas entradas no anel $k[\mathbf{y}]$. Denotaremos essa matriz por Ψ e a chamamos de *matriz jacobiana dual fraca* associada ao conjunto de geradores de $\langle \mathcal{J}_{(1,*)} \rangle$ dado. Em [9, Lemma 2.13] é mostrado que o posto da matriz Jacobiana dual fraca é igual para qualquer que seja o conjunto mínimo de geradores de $\langle \mathcal{J}_{(1,*)} \rangle$. Por causa desse lema, qualquer matriz Jacobiana dual fraca associada a um conjunto mínimo de geradores de $\langle \mathcal{J}_{(1,*)} \rangle$ é chamada de *matriz jacobiana dual fraca* de $\mathbf{f}$.

Definição 4.2.6. O posto de uma (logo, todas) matriz Jacobiana dual fraca de $\mathfrak{F}$ é chamado de *posto Jacobiano dual* e o denotamos por $\mathrm{jd\,rank}(\mathfrak{F})$. Além disso, definimos o *posto jacobiano dual não degenerado* de $\mathfrak{F}$ sendo $\mathrm{jd\,rank}_+(\mathfrak{F}) := \mathrm{jd\,rank}(\mathfrak{F}) - \mathrm{dgi}(I(V)_1)$

Teorema 4.2.7. *Seja* $V \subset \mathbb{P}^n$ *uma variedade projetiva com anel de coordenadas homogêneas* $R := k[\mathbf{x}]/I(V)$ *e* $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ *uma aplicação racional definida por um conjunto ordenado de* $m + 1$ *formas* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R$ *de um mesmo grau, não todas nulas. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{F}$ *é birracional sobre a imagem.*

(b) $\mathfrak{F}$ *tem posto jacobiano dual não degenerado satisfazendo*

$$\operatorname{jd\,rank}_+(\mathfrak{F}) = \operatorname{edim}(R) - 1.$$

Capítulo 5

Principais resultados

Em todo esse capítulo iremos supor que k é um corpo algebricamente fechado. Esse é o capítulo mais importante do trabalho, pois nele discutimos os resultados que motivaram essa dissertação.

5.1 Matrizes com entradas lineares

Seja $A = k[x_1, \ldots, x_d]$ um anel de polinômios em d variáveis com coeficientes em k. Seja $\Psi = (\ell_{i,j})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$ cujas entradas são formas lineares de A. Consideremos agora $t_1, \ldots, t_m$ variáveis sobre A. Denotaremos por $\underline{x}$ e $\underline{t}$ as matrizes $[x_1 \ldots x_d]$ e $[t_1 \ldots t_m]$ respectivamente.

Lema 5.1.1. *Nas notações acima, existe uma única matriz B de ordem $d \times n$ cujas entradas são formas lineares no anel de polinômios $k[t_1, \ldots, t_m]$ tal que*

$$\underline{t} \cdot \Psi = \underline{x} \cdot B.$$

Prova. Primeiro iremos provar a existência da matriz B. Para isso, dados $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ escreveremos

$$\ell_{i,j} = a_{i,j}^{(1)} x_1 + \cdots + a_{i,j}^{(d)} x_d. \tag{5.1}$$

Temos então que

$$\underline{t} \cdot \Psi = [q_1 \ldots q_n]$$

onde, para $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$q_j = \underline{t} \cdot \begin{bmatrix} \ell_{1,j} \\ \vdots \\ \ell_{m,j} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, cada q_j pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
q_j &= t_1(a_{1,j}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{1,j}^{(d)}x_d) + \cdots + t_m(a_{m,j}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{m,j}^{(d)}x_d) \\
&= x_1(a_{1,j}^{(1)}t_1 + \cdots + a_{m,j}^{(1)}t_m) + \cdots + x_d(a_{1,j}^{(d)}t_1 + \cdots + a_{m,j}^{(d)}t_m) \\
&= \underline{x} \cdot \begin{bmatrix} L_{1,j} \\ \vdots \\ L_{d,j} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde, para $1 \leqslant i \leqslant d$ e $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$L_{i,j} = a_{1,j}^{(i)}t_1 + \cdots + a_{m,j}^{(i)}t_m. \tag{5.2}$$

Sendo assim,

$$\underline{t} \cdot \Psi = \underline{x} \cdot B,$$

com $B = (L_{ij})$ tendo o formato afirmado.

Agora provaremos a unicidade da matriz B. Para isso, suponhamos uma matriz $B' = (L'_{i,j})$ com a mesma propriedade. Em particular, $\underline{x} \cdot B = \underline{x} \cdot B'$. Equivalentemente,

$$x_1(L_{1,j} - L'_{1,j}) + \cdots + x_d(L_{d,j} - L'_{d,j}) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Dessas igualdades segue

$$L_{1,j} = L'_{1,j}, \ldots, L_{d,j} = L'_{d,j}$$

para qualquer $1 \leqslant j \leqslant n$. Logo, $B = B'$. □

Observação 5.1.2. Das equações (5.1) e (5.2) segue que uma entrada $L_{i,j}$ de B é igual a zero se, e somente se, as entradas da j-ésima coluna de Ψ não dependem da variável x_i.

Lema 5.1.3. *Seja I um ideal homogêneo gerado por m formas $f_1, \ldots, f_m$ de mesmo grau g no anel de polinômios $A = k[x_1, \ldots, x_d]$. Suponhamos que a matriz de sizígias de I com respeito aos geradores $f_1, \ldots, f_m$ seja uma matriz Ψ de ordem $m \times n$ cujas entradas são formas lineares de A e $n \geqslant d$. Seja B a matriz do* Lema 5.1.1. *Então:*

(a) *O ideal $I_d(B)$ está contido no ideal de apresentação $\mathcal{J}$ da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$.*

(b) *Se $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^{d-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ é o mapa racional definido por $f_1, \ldots, f_m$ então B^t é uma submatriz da matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$.*

Prova. (a) Usando a Proposição 4.1.2 e o Lema 5.1.1 podemos concluir que as entradas da matriz $\underline{x} \cdot B$ pertencem a $\mathfrak{J}$. Seja $\widetilde{B}$ uma submatriz de B de ordem $d \times d$. Em particular, as entradas da matriz $\underline{x} \cdot \widetilde{B}$ também pertencem a $\mathfrak{J}$. Por outro lado, observe que as entradas da matriz $\underline{x} \cdot \widetilde{B} \cdot \operatorname{adj}(\widetilde{B})$ são combinações lineares das entradas da matriz $\underline{x} \cdot \widetilde{B}$; logo, as entradas de $\underline{x} \cdot \widetilde{B} \cdot \operatorname{adj}(\widetilde{B})$ também pertencem a $\mathfrak{J}$. Mas, $\underline{x} \cdot \widetilde{B} \cdot \operatorname{adj}(\widetilde{B}) = [\det(\widetilde{B})x_1 \ldots \det(\widetilde{B})x_d]$. Assim, $\det(\widetilde{B})x_1 \in \mathfrak{J}$. Como $x_1 \notin \mathfrak{J}$ e $\mathfrak{J}$ é ideal primo segue que $\det(\widetilde{B}) \in \mathfrak{J}$. Como $\widetilde{B}$ é uma submatriz arbitrária de B de ordem $d \times d$, temos $I_d(B) \subset \mathfrak{J}$ como desejado.

(b) Consideremos a decomposição de $\mathfrak{J}$ em componentes bi-graduadas

$$\mathfrak{J} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mathfrak{J}_{(p,q)}$$

Observemos que $I_1(\underline{x} \cdot B) \subset \langle \mathfrak{J}_{(1,*)} \rangle$. Assim, os geradores de $I_1(\underline{x} \cdot B)$ é um subconjunto dos geradores de $\langle \mathfrak{J}_{(1,*)} \rangle$. Lembre da Seção 4.2 que a matriz Jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ é obtida tomando a matriz Jacobiana dos geradores de $\langle \mathfrak{J}_{(1,*)} \rangle$ com respeito as variáveis $x_1, \ldots, x_d$. Assim, a matriz jacobiana Θ dos geradores de $I_1(\underline{x} \cdot B)$ com respeito as variáveis $x_1, \ldots, x_d$ será uma submatriz da matriz jacobiana dual. Denotemos $B = (L_{i,j})$. Então, os geradores de $I_1(\underline{x} \cdot B)$ são

$$P_j = x_1 L_{1,j} + \cdots + x_d L_{d,j}, \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Com isso, vem

$$\Theta = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \ldots & L_{d,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1,n} & \ldots & L_{d,n} \end{bmatrix} = B^t$$

o que prova o afirmado. □

5.2 Matrizes conjugadas

Seja $A = k[x_1, \ldots, x_d]$ um anel de polinômios em d variáveis com coeficientes em k. Dada uma matriz $Q \in \mathrm{Gl}_d(k)$ denotaremos por $\sigma_Q : A \to A$ a mudança de coordenadas tal $\underline{x} \mapsto \underline{x} \cdot Q$.

Sejam $\Psi_1 = (a_{i,j}(\underline{x}))$ e $\Psi_2 = (b_{ij}(\underline{x}))$ matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em A. Dizemos que Ψ_1 é *conjugada* à Ψ_2 se existe $(P, Q, R) \in \mathrm{Gl}_m(k) \times \mathrm{Gl}_d(k) \times \mathrm{Gl}_n(k)$ tal que

$$(a_{i,j}(\underline{x})) = P \cdot (\sigma_Q(b_{i,j}(\underline{x}))) \cdot R,$$

ou seja, Ψ_1 é igual a Ψ_2 a menos de uma sequência finita operações linhas/colunas ou mudança invertível de coordenadas. Obviamente, a relação de conjugação é de equivalência no conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em A.

Observação 5.2.1. Seja $\Psi = (b_{i,j})$ uma matriz de ordem $m \times n$ com entradas em A.

(a) Seja $R \in Gl_n(k)$. Afirmamos que $I_t(\Psi) = I_t(\Psi \cdot R)$. Com efeito, temos que as colunas de $\Psi \cdot R$ são combinações lineares com coeficientes em k das colunas de Ψ. Em particular, um t-menor de $\Psi \cdot R$ deverá ser uma combinação linear de t-menores da matriz Ψ. Assim, $I_t(\Psi \cdot R) \subset I_t(\Psi)$. Para inclusão contrária o argumento é o mesmo pois $\Psi = (\Psi \cdot R) \cdot R^{-1}$.

(b) Seja $P = (a_{i,j}) \in Gl_m(k)$. Observe que as linhas de $P \cdot \Psi$ são combinações lineares das linhas de Ψ. Assim, por um argumento análogo ao realizado no item (b) segue que $I_t(\Psi) = I_t(P \cdot \Psi)$.

(c) Combinando os itens (a) e (b) temos que $I_t(\Psi) = I_t(P \cdot \Psi \cdot R)$.

(d) Seja $Q \in Gl_d(k)$. Para cada submatriz $M = (b_{i',j'})$ de Ψ de ordem $t \times t$ temos $\sigma_Q(\det M) = \det(\sigma(b_{i',j'}))$ pois o determinante é a soma de produtos das entradas de M e σ_Q é um homomorfismo. Com esse fato e o item (c) segue que o ideal $I_t(\Psi)$ é transformado isomorficamente por σ_Q no ideal $I_t(P \cdot (\sigma_Q(b_{i,j}(\underline{x}))) \cdot R)$.

Lema 5.2.2. *Seja* $\Psi = (\ell_{i,j})$ *uma matriz de ordem* $m \times n$ *cujas entradas são formas lineares no anel de polinômios* $A = k[x_1, \ldots, x_d]$. *Seja* B *a matriz com entradas lineares no anel de polinômios* $k[t_1, \ldots, t_m]$ *tal como no* Lema 5.1.1. *Para cada* $(P, R) \in Gl_d(k) \times Gl_n(k)$, *defina* $B' = P \cdot B \cdot R$. *Então,*

$$\underline{t} \cdot \Psi' = \underline{x} \cdot B'$$

onde $\Psi' = (\sigma_P(\ell_{i,j})) \cdot R$.

Prova. Para cada $1 \leqslant i \leqslant d$, defina $x'_i = \sigma_P(x_i)$. Em particular, fazendo $\underline{x}' = [x'_1 \ldots x'_d]$, temos $\underline{x}' = \underline{x} \cdot P$. Com isso, e a forma que B é definida temos:

$$\underline{t} \cdot (\sigma_P(\ell_{i,j}(\underline{x}))) = \underline{t} \cdot (\ell_{i,j}(\underline{x}')) = \underline{x}' \cdot B = \underline{x} \cdot P \cdot B$$

Assim, multiplicando à direita cada membro da igualdade $\underline{t} \cdot (\sigma_P(\ell_{i,j}(\underline{x}))) = \underline{x} \cdot P \cdot B$ por R obtemos o resultado desejado. $\square$

Observação 5.2.3. Observe que por simetria podemos inverter os papéis de Ψ e B no lema acima.

5.3 Matrizes com entradas lineares em $k[x_2, x_3]$

Lema 5.3.1. *Seja M uma matriz quadrada de ordem $m \geqslant 2$ cujas entradas são formas lineares de $k[x_2, x_3]$. Se $\det M \neq 0$ então M é conjugada a uma matriz da forma*

$$\left(\begin{array}{c|c} x_2 & L \\ \hline 0 & M' \end{array}\right)$$

onde as formas lineares em L dependem apenas da variável x_3.

Prova. Escrevamos $M = x_2P + x_3Q$ onde P e Q são matrizes quadradas de ordem m com entradas em k. Como k é um corpo algebricamente fechado, existe uma solução (a, b) não nula para a equação $\det M = 0$. A menos de mudança de coordenadas, podemos supor $a \neq 0$. Em particular, a matriz $aP + bQ$ é não invertível. Logo, $0 \in k$ é um autovalor de $aP + bQ$. Em particular, existe um vetor não nulo $v \in k^m$ tal que $Pv = -(b/a)Qv$. Fixando uma base $\{v, v_2, \ldots, v_m\}$, obtemos uma matriz invertível T de ordem m com entradas em k tal que a primeira coluna de TPT^{-1} é igual a primeira coluna de TQT^{-1} vezes $-(b/a)$. Com isso, temos que as entradas da primeira coluna da matriz TMT^{-1} são múltiplos escalares de $-(b/a)x_2 + x_3$. Fazendo agora operações elementares sobre as linhas de TMT^{-1} (isto é, multiplicando TMT^{-1} a esquerda por uma matriz invertível P de ordem m com entradas em k) obtemos uma matriz M_1 conjugada a M tal que na primeira coluna a primeira entrada é $-(b/a)x_2 + x_3$ e as demais são zero. Fazendo agora a mudança de coordenadas invertível $(x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2 + (b/a)x_3)$ em M_1 segue que M é conjugada a uma matriz M_2 tal que na primeira coluna a primeira entrada é x_2 e as demais são iguais a zero. Finalmente, efetuando operações elementares nas colunas de M_2 de modo a eliminar a variável x_2 ao longo das entradas de índice $(1, j)$, com $2 \leqslant j \leqslant m$, obtemos uma matriz com o formato desejado. $\square$

Nas notações e hipóteses do Lema acima, denotemos por C a única matriz de ordem $2 \times m$ cujas entradas são formas lineares no anel $k[t_1, \ldots, t_m]$ tal que

$$\underline{t} \cdot M = \underline{x} \cdot C$$

(lembre que a existência e unicidade de C é garantida pelo Lema 5.1.1). Temos o seguinte resultado:

Lema 5.3.2. *Se* $\text{alt}(I_{m-1}(M)) = 2$ *então* $\text{alt}(I_2(C)) = m - 1$.

Prova. Da observação 5.2.1 segue que se Ψ_1 e Ψ_2 são duas matrizes conjugadas de mesma ordem então para cada inteiro positivo t o ideal $I_t(\Psi_1)$ é transformado isomorficamente no ideal $I_t(\Psi_2)$. Assim, $\text{alt}(I_t(\Psi_1)) = \text{alt}(I_t(\Psi_2))$ para cada inteiro positivo t. Por outro lado, pelo Lema 5.2.2, conjugação em M implica conjugação em C e vice-versa. Assim, pelo Lemma 5.3.1, podemos supor que M é da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} x_2 & L \\ \hline 0 & M' \end{array}\right),$$

com $L = [\alpha_2 x_3 \dots \alpha_m x_3]$.

Para completar a prova aplicaremos indução sobre $m \geqslant 2$. Se $m = 2$ então M tem o seguinte formato:

$$\left(\begin{array}{c|c} x_2 & \alpha x_3 \\ \hline 0 & \beta x_2 + \gamma x_3 \end{array}\right).$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in k$, $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$ (pois $\det M \neq 0$) e $(\alpha, \gamma) \neq (0,0)$ (pois $\mathrm{alt}(I_1(M)) = 2$, por hipótese de indução). Segue de (5.2) que

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & \beta t_2 \\ 0 & \alpha t_1 + \gamma t_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$I_2(C) = \langle t_1(\alpha t_1 + \gamma t_2) \rangle \neq \langle 0 \rangle \quad (\text{pois } (\alpha, \gamma) \neq (0,0)).$$

Em particular, $\mathrm{alt}(I_2(C)) = 1 = 2 - 1$. Logo, o resultado é verdadeiro para $m = 2$. Agora digamos que $m \geqslant 3$. Temos as seguintes observações:

- $\det M = x_2 \cdot \det M' \neq 0$. Logo, $\det M' \neq 0$.
- Do formato de M segue que $I_{m-1}(M) \subset I_{m-2}(M')$. Como $\mathrm{alt}(I_{m-1}(M)) = 2$ segue que $\mathrm{alt}(I_{m-2}(M')) \geqslant 2$. Mas como $I_{m-2}(M') \subset k[x_2, x_3]$ segue que $\mathrm{alt}(I_{m-2}(M')) = 2$.

Dessas duas observações segue que M' é uma matriz quadrada de ordem $m-1 \geqslant 2$ que satisfaz as hipóteses do Lemma. Assim, por hipótese de indução, segue que $\mathrm{alt}(I_2(C')) = m-1-1 = m-2$, onde C' é a única $2 \times (m-1)$ tal que

$$\underline{t}' \cdot M' = \underline{x} \cdot C'$$

e $\underline{t}' = [t_2 \dots, t_m]$. Digamos que

$$C' = \begin{bmatrix} \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,m} \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_{i,j}$ são formas lineares em $k[t_2, \dots, t_m]$. Levando em consideração o formato de M temos

$$C = \begin{bmatrix} t_1 & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & \lambda_{2,2} + \alpha_2 t_1 & \dots & \lambda_{2,m} + \alpha_m t_1 \end{bmatrix}$$

Afirmamos que as $\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1,\dots,\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1$ são k-linearmente independentes. Isso ocorre pois, caso contrário, a menos de conjugação, a matriz M teria duas colunas dependendo de uma única variável (ver Lema 5.2.2 e Observação 5.1.2). Isso implicaria que $\operatorname{alt}(I_2(C)) = 1$, o que é um absurdo.

Agora considere P sendo um ideal primo contendo $I_2(C)$. Em particular,

$$t_1(\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1),\dots,t_1(\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1) \in P.$$

Se $t_1 \notin P$ então

$$\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1,\dots,\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1 \in P.$$

Como $\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1,\dots,\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1$ são k-linearmente independentes segue

$$\operatorname{alt}\langle \lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1,\dots,\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1\rangle = m-1.$$

Em particular, $\operatorname{alt}(P) \geqslant m-1$. Por outro lado, se $t_1 \in P$ então P contém o ideal $\langle t_1, I_2(C')\rangle$. Como

$$\operatorname{alt}\langle t_1, I_2(C')\rangle = \operatorname{alt}\langle t_1\rangle + \operatorname{alt}\langle I_2(C')\rangle = m-1$$

segue que $\operatorname{alt}(P) \geqslant m-1$.

Assim, em todo caso temos $\operatorname{alt}(P) \geqslant m-1$. Logo, $\operatorname{alt}(I_2(C)) \geqslant m-1$. Mas, pelo Teorema 1.2.5, $\operatorname{alt}(I_2(C)) \leqslant (m-2+1)(2-2+1) = m-1$. Portanto, $\operatorname{alt}(I_2(C)) = m-1$ como queríamos mostrar. □

5.4 O resultado principal

Em todo essa seção iremos supor que φ é uma matriz de ordem $n \times (n-1), n > 3$ com entradas lineares no anel de polinômios $A = k[x_1, x_2, x_3]$, com o seguinte formato:

$$\varphi = \left[\begin{array}{c|ccc} x_1+\ell & \ell_{1,2} & \dots & \ell_{1,n-1} \\ \hline \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \dots & \ell_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} \end{array}\right] \tag{5.3}$$

onde ℓ e $\ell_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ e $(i,j) \neq (1,1)$) são formas lineares que dependem apenas das variáveis x_2 e x_3. Fixamos também as seguintes notações e hipóteses:

(A) O ideal gerado pelos menores maximais de φ será denotado por I.

(B) O menores maximais (ordenados e com sinal) da matriz φ serão denotados por $f_1, \dots, f_n$.

(C) A altura de I é igual a 2 e $I_1(\varphi) = (x_1, x_2, x_3)$.

Nosso objetivo aqui é determinar o ideal de apresentação $\mathcal{J}$ da álgebra de Rees $\mathcal{R}_A(I)$.

Observe que, pelo Teorema 2.3.7, I é um ideal perfeito com a seguinte resolução livre graduada e mínima:

$$0 \to A(-n)^{n-1} \xrightarrow{\varphi} A^n \to I \to 0.$$

Em particular, φ é a matriz de sizígias de I com respeito aos geradores $f_1, \dots, f_n$.

Consideremos agora B sendo a única matriz de ordem $3 \times (n-1)$ com entradas lineares em $k[t_1, \dots, t_n]$ tal que

$$\underline{t} \cdot \varphi = \underline{x} \cdot B$$

Segue do formato de φ e da igualdade (5.2) que B tem o seguinte formato:

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \dots & L_{2,n-1} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & \dots & L_{3,n-1} \end{bmatrix}$$

Focaremos especialmente na seguinte submatriz de ordem $2 \times (n-2)$ da matriz B :

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} L_{2,2} & \dots & L_{2,n-1} \\ L_{3,2} & \dots & L_{3,n-1} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Proposição 5.4.1. $(I_1(\underline{t} \cdot \varphi), I_2(\widetilde{B})) \subset \mathcal{J}$.

Prova. Já sabemos pela Proposição 4.1.2 que $I_1(\underline{t} \cdot \varphi) \subset \mathcal{J}$. Assim, resta provar que $I_2(\widetilde{B}) \subset \mathcal{J}$.

Mas, pelo Lema 5.1.3 temos $I_3(B) \subset \mathcal{J}$. Além disso, pelo formato de B temos $I_3(B) = t_1 \cdot I_2(\widetilde{B})$. Como $t_1 \notin \mathcal{J}$, pois $f_1 \neq 0$, e $\mathcal{J}$ é ideal primo, segue que $I_2(\widetilde{B}) \subset \mathcal{J}$ e isso conclui a prova. □

A inclusão verificada na proposição anterior nos dá o ideal $(I_1(\underline{t} \cdot \varphi), I_2(\widetilde{B}))$ como uma aproximação para o ideal $\mathcal{J}$. Veremos que na verdade ocorre algo mais preciso do que isso. Para isso, será conveniente verificar que a matriz $\widetilde{B}$ desfruta de propriedades especiais.

Definição 5.4.2. Seja Ψ uma matriz de ordem $p \times q$ cujas entradas são formas lineares no anel de polinômios $R = k[x_1, \dots, x_d]$. Dizemos que Ψ é 1-*genérica* se qualquer sucessão finita de operações elementares nas linhas ou colunas não produzem zeros na entrada da matriz.

A noção de matriz 1-genérica foi introduzida por David Eisenbud em [12]. Uma propriedade importante de uma matriz 1-genérica é

Teorema 5.4.3 (D. Eisenbud). *Seja $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ um anel de polinômios com coeficientes em k e Ψ uma matriz 1-genérica de ordem $p \times q$ $(p \leqslant q)$. Então $I_p(\Psi)$ é um ideal primo de R de altura $q - p + 1$ e $R/I_p(\Psi)$ é um domínio Cohen-Macaulay. Além disso, se $p = 2$ então $R/I_2(\Psi)$ é um domínio Cohen-Macaulay normal.*

Prova. Ver [12, Theorem 2.1]. □

O resultado a seguir nos garante que a matriz $\widetilde{B}$ é 1-genérica.

Teorema 5.4.4. *A matriz $\widetilde{B}$ é 1-genérica. Em particular,*

(a) $\mathrm{alt}(I_2(\widetilde{B})) = n - 3$.

(b) $k[t_1, \ldots, t_n]/I_2(\widetilde{B})$ *é um domínio normal Cohen-Macaulay.*

Prova. (a) Faremos a prova por contradição. Assim, suponhamos que existem matrizes $P \in GL_2(k)$ e $Q \in GL_{n-2}(k)$ tais que $P \cdot \widetilde{B} \cdot Q$ tem uma entrada nula. Consideremos agora as seguintes matrizes

$$P' := \begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix} \in GL_3(k) \quad \text{e} \quad Q' = \begin{bmatrix} 1 & \\ & Q \end{bmatrix} \in GL_{n-1}(k).$$

Assim,

$$P'BQ' = \begin{bmatrix} t_1 & \mathbf{0} \\ D & P\widetilde{B}Q \end{bmatrix}$$

onde D é uma matriz de ordem 2×1 e $\mathbf{0}$ é a matriz nula de ordem $1 \times (n-2)$. Como $P\widetilde{B}Q$ tem uma entrada nula então o bloco do lado direito de $P'BQ'$ tem uma coluna com duas entradas nulas.

Pelo Lema 5.2.2, existe uma matriz φ' conjugada a φ tal que

$$\underline{t} \cdot \varphi' = \underline{x} \cdot P' \cdot B \cdot Q'.$$

Como $P' \cdot B \cdot Q'$ tem uma coluna com duas entradas nulas, segue dessa igualdade e da Observação 5.1.2 que φ' tem uma coluna dependendo de uma única variável. Assim, $I' = I_{n-1}(\varphi')$ está contido no ideal gerado por esse variável, em particular, $\mathrm{alt}(I') \leqslant 1$. Mas isso é um absurdo pois por hipótese $\mathrm{alt}(I) = 2$ e pela Observação 5.2.1 $\mathrm{alt}(I') = \mathrm{alt}(I)$. Com isso segue o desejado.

(b) É consequência imediata do item (a) e do Teorema 5.4.3. □

Corolário 5.4.5. *Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ o mapa racional definido por $f_1, \ldots, f_n$. Então:*

(a) *$\mathfrak{F}$ é uma mapa birracional sobre a imagem.*

(b) *O ideal homogêneo de definição da variedade imagem de $\mathfrak{F}$ é $I_2(\widetilde{B})$.*

Prova. (a) Pelo Lema 5.1.3, B^t é uma submatriz da matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Assim,

$$U = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

é também uma submatriz da matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Observe que $L_{2,2}$ é uma entrada de $\widetilde{B}$, em particular, $L_{2,2} \neq 0$ pois $\widetilde{B}$ é 1-genérica. Com isso,

$$\det U = t_1 \cdot L_{2,2} \neq 0$$

Observe que $\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$ é um ideal primo pois

$$k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n] \simeq k[f_1, \ldots, f_n].$$

Como $t_1 \notin \mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$, pois $f_1 \neq 0$, e $L_{2,2} \notin \mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$, pois $f_1, \ldots, f_n$ são linearmente independentes, segue que $\det U = t_1 \cdot L_{2,2}$ também é diferente de zero no anel $k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$. Lembre da Seção 4.2 que $k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$ é o anel de coordenadas da variedade imagem de $\mathfrak{F}$. Com isso segue que o posto da matriz jacobiana dual é 2. Portanto, do Teorema 4.2.7 segue que $\mathfrak{F}$ é uma aplicação birracional sobre a imagem.

(b) Como $\mathfrak{F}$ é uma aplicação birracional sobre a imagem, então a dimensão do anel de coordenadas da variedade imagem de $\mathfrak{F}$ é 3, isto é:

$$\dim k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n] = 3,$$

ou seja, $\operatorname{alt}(\mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]) = n - 3$. Por outro lado, temos:

(i) $I_2(\widetilde{B}) \subset \mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$ (ver Proposition 5.4.1).

(ii) $\operatorname{alt}(I_2(\widetilde{B})) = n - 3$ e $I_2(\widetilde{B})$ é ideal primo (ver Teorema 5.4.4).

Dessa maneira, $I_2(\widetilde{B}) \subset \mathfrak{J}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]$ é uma inclusão de ideais primos de mesma altura. Portanto, esses ideais são iguais e o resultado segue. □

Proposição 5.4.6. $\operatorname{alt}(I_2(B)) = n - 1$.

Prova. Podemos escrever a matriz φ da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} L \\ \hline M \end{array}\right]$$

onde M é uma matriz quadrada de ordem $n-1$ que depende apenas das variáveis x_2 e x_3. Seja D a única matriz com entradas lineares em $k[t_2, \ldots, t_n]$ satisfazendo a igualdade

$$[t_2 \ldots t_n] \cdot M = [x_2\, x_3] \cdot D.$$

Notemos que $\det M \neq 0$. Além disso, $\text{alt}(I_{m-2}(M)) = 2$ pois $I \subset I_{m-2}(M)$. Dessa forma, pelo Lema 5.3.2 concluímos que $\text{alt}(I_2(D)) = n-2$; logo $\text{alt}(I_2(D), t_1) = n-1$.

Por outro lado, considerando C a submatriz de B formada pelas duas últimas linhas, temos $(I_2(C), t_1) = (I_2(D), t_1)$; logo, $\text{alt}(I_2(C), t_1) = n-1$. Mas, $I_2(B) = (I_2(C), t_1\mathcal{L})$ onde $\mathcal{L}$ é o conjunto das entradas de

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} L_{2,2} & \ldots & L_{2,n-1} \\ L_{3,2} & \ldots & L_{3,n-1} \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 5.4.4, $\widetilde{B}$ é 1-genérica, logo $\mathcal{L}$ gera um espaço vetorial de dimensão de pelo menos $n-1$ (ver [12, Proposition 1.3]). Logo, $(I_2(C), \mathcal{L}) = (\mathcal{L})$ também tem altura pelo menos $n-1$ e isso prova a proposição. $\square$

Teorema 5.4.7. *Temos as seguintes conclusões:*

(a) $\mathcal{J} = (I_1(\underline{t} \cdot \varphi), I_2(\widetilde{B}))$.

(b) $\mathcal{R}_A(I)$ *é um domínio normal e Cohen-Macaulay.*

Prova. Para simplificar a notação escreveremos $\mathcal{K} = (I_1(\underline{t} \cdot \varphi), I_2(\widetilde{B}))$. Como visto na Proposição 5.4.1, $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$. Também sabemos que $\mathcal{J}$ é ideal primo de altura $n-1$. Assim, para concluir a igualdade $\mathcal{K} = \mathcal{J}$ é suficiente provar que $\mathcal{K}$ é um ideal primo de altura $n-1$. Nossa estratégia aqui será provar que o anel $k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{K}$ é um domínio normal e Cohen-Macaulay de dimensão 4. Feito isso, estaremos provando os itens (a) e (b) simultaneamente.

Observemos que

$$\begin{aligned} I_1(\underline{t} \cdot \varphi) &= I_1(\underline{x} \cdot B) \\ &= (t_1x_1 + L_{2,1}x_2 + L_{3,1}x_3, x_3L_{3,2} + x_2L_{2,2}, \ldots, x_3L_{3,n-1} + x_2L_{2,n-1}) \end{aligned}$$

Note que o subconjunto de geradores $x_3L_{3,2} + x_2L_{2,2}, \ldots, x_3L_{3,n-1} + x_2L_{2,n-1}$ de $I_1(\underline{t} \cdot \varphi)$ são os menores 2×2 da matriz

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} x_3 & L_{2,2} & \ldots & L_{2,n-1} \\ -x_2 & L_{3,2} & \ldots & L_{3,n-1} \end{bmatrix}$$

que fixam a primeira coluna. Observe também que $\overline{B}$ é a concatenação das matrizes $[x_3 \ \ -x_2]^t$ e $\widetilde{B}$. Desse modo, podemos escrever $\mathcal{K}$ da seguinte maneira

$$\mathcal{K} = (t_1x_1 + L_{2,1}x_2 + L_{3,1}x_3, I_2(\overline{B}))$$

A matriz $\overline{B}$ é 1-genérica pois é a concatenação de duas matrizes 1-genéricas com variáveis independentes. Assim, pelo Teorema 5.4.3 temos que

$$R := k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/I_2(\overline{B})$$

é um domínio Cohen-Macaulay de dimensão 5. Como $I_2(\overline{B})$ é gerado em grau 2 e seus geradores não dependem de x_1 então $t_1x_1 + L_{2,1}x_2 + L_{3,1}x_3$ não pertence a $I_2(\overline{B})$. Com isso e o fato de R ser domínio segue $t_1x_1 + L_{2,1}x_2 + L_{3,1}x_3$ é R-regular. Desse modo, pelo Teorema 2.3.5 (a) segue que

$$k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{K} = k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/(t_1x_1 + L_{2,1}x_2 + L_{3,1}x_3, I_2(\overline{B}))$$

é Cohen-Macaulay e tem dimensão 4. Assim, de acordo com a estratégia apresentada no início da demonstração, falta provar que $k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{K}$ é domínio normal. Já sabemos que ele é um anel que satisfaz a condição (S_2) de Serre pois ele é um anel Cohen-Macaulay. Sendo assim, resta provar que este anel satisfaz a condição (R_1) de Serre. Observamos que a matriz jacobiana desse anel tem o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} B^t & \varphi^t \\ 0 & \Theta' \end{bmatrix}$$

onde Θ' é a matriz jacobiana de $\widetilde{B}$ com respeito as variáveis $t_1, \ldots, t_n$. Temos que provar que o ideal $(I_{n-1}(\Theta), \mathcal{K})$ tem altura pelo menos $n + 1$. Um cálculo nos dá a seguinte inclusão de ideais:

$$(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(\widetilde{B}), I) \subset (I_{n-1}(\Theta), \mathcal{K}) \tag{5.5}$$

Considere P sendo um ideal primos contendo $(I_{n-1}(\Theta), \mathcal{K})$. Por 5.5, segue que

$$(I_{n-3}(\Theta'), I_2(\widetilde{B}), I) \subset P \quad \text{ou} \quad (I_2(B), I_2(\widetilde{B}), I)) \subset P$$

Pelo Teorema 5.4.4, $k[t_1, \ldots, t_n]/I_2(\widetilde{B})$ é domínio normal. Logo, da Observação 3.3.4 temos $\text{alt}(I_{n-3}(\Theta'), I_2(\widetilde{B})) \geqslant n + 1$. Em particular, $\text{alt}(P) \geqslant n + 1$ se ocorre a inclusão

$$(I_{n-3}(\Theta'), I_2(\widetilde{B}), I) \subset P.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(I_2(B), I_2(\widetilde{B}), I) &= \mathrm{alt}(I_2(B), I) \quad (\text{pois } (I_2(B), I_2(\widetilde{B}), I) = (I_2(B), I)) \\
&= \mathrm{alt}(I_2(B)) + \mathrm{alt}(I) \quad (\text{pois } I_2(B) \text{ e } I \text{ são gerados em variáveis independentes}) \\
&= (n-1) + 2 \quad (\text{ver Proposição 5.4.6}) \\
&= n+1
\end{aligned}$$

Logo, também temos $\mathrm{alt}(P) \geqslant n+1$ se $(I_2(B), I_2(\widetilde{B}), I)) \subset P$. Dessa forma,

$$\mathrm{alt}(I_{n-1}(\Theta), \mathcal{K}) \geqslant n+1.$$

Logo, a altura do ideal jacobiano do anel $k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{K}$ é

$$\mathrm{alt}(I_{n-1}(\Theta), \mathcal{K}) - \mathrm{alt}(\mathcal{K}) \geqslant (n+1) - (n-1) = 2.$$

Portanto, da Observação 3.3.4 concluímos que $k[x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{K}$ satisfaz a condição (R_1) de Serre e isso finaliza a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **60**, Cambridge Unniversity Press, 1993.

[2] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1327 Springer-Verlag, 1988.

[3] R. Burity, Álgebra de Rees, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (João Pessoa, Brasil), Dezembro 2011.

[4] C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis, Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian, Advances in Math., 218 (2008) 1759-1805.

[5] B. Costa, A. Simis, Cremona maps defined by monomials J. Pure Appl. Algebra, 216 (2012), pp. 202–215.

[6] R. Cunha, Z. Ramos and A. Simis, Degenerations of the generic square matrix. Polar map and determinantal structure, arXiv:1610.07681v1 [math.AC] 24 Oct 2016.

[7] R. Cunha, Degenerations of classical square matrices and their determinantal structure, PhD Thesis, Universidade Federal da Paraíba (João Pessoa, Brazil), March 2014.

[8] I. Dolgachev, Polar Cremona Transformations, Michigan Math. J. 48 (2000), 191-202.

[9] A. Doria, H. Hassanzadeh and A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, Adv. Math., **230** (2012), 390–413.

[10] A. Doria, Z. Ramos and A. Simis, Linearly presented perfect ideals of codimension 2 in three variables, J. Algebra, **512** (2018) 216–251.

[11] D. Eisenbud, Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150, New York, Springer-Verlag, 1995.

[12] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, Amer. J. Math. 110 (1988) 541–575.

[13] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, Koszul homology and blowing–up rings, Commutative Algebra, Lecture Notes in Pure and Applied Math., Vol. 84, 79–169, Marcel-Dekker, New York, 1983.

[14] C. Huneke and I. Swanson, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Society, Lecture Notes Series **336**, Cambridge University Press (2006).

[15] A. Kustin, C. Polini, B. Ulrich, Rational normal scrolls and the defining equations of Rees algebras, J. Reine Angew. Math. 650 (2011) 23–65.

[16] S. Lang, Algebra. Graduate Texts in Mathematics, 211 (Revised third ed.), New York, Springer-Verlag, 2002.

[17] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.

[18] S. Morey and B. Ulrich, Rees algebras of ideals of low codimension, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 3653–3661.

[19] M. Mostafazadehfard and A. Simis, Corrigendum to Homaloidal determinants [J. Algebra 450 (2016) 59-101].

[20] L. Nguyen, On Rees algebras of linearly presented ideals, J. Algebra 420 (2014) 186-200.

[21] L. Nguyen, On Rees algebras of linearly presented ideals in three variables, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017) 2180-2191.

[22] F. Russo and A. Simis, On birational maps and Jacobian matrices, Compositio Math. **126** (2001), 335-358.

[23] A. Simis, Cremona transformations and some related algebras, J. Algebra **280** (2004), 162–179.

[24] B. Ulrich, W. Vasconcelos, The equations of Rees algebras of ideals with linear presentation, Math. Z. 214 (1993) 79–92