Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência, Analiticidade e Comportamento de Soluções Brandas para as Equações MHD Próximo ao Equilíbrio em Espaços Críticos de Lei-Lin

Caroline Pereira Santos

São Cristóvão – SE
Maio de 2022

Caroline Pereira Santos

Existência, Analiticidade e Comportamento de Soluções Brandas para as Equações MHD Próximo ao Equilíbrio em Espaços Críticos de Lei-Lin

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo .

São Cristóvão – SE
Maio de 2022

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237e

Santos, Caroline Pereira.
Existência, analiticidade e comportamento de soluções brandas para as equações MHD próximo ao equilíbrio em espaços críticos de Lei-Lin / Caroline Pereira Santos ; orientador Wilberclay Gonçalves Melo. – São Cristóvão, SE, 2022.
88 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Equações diferenciais. 2. Fourier, Transformadas de. 3. Teoria das medidas. I. Melo, Wilberclay Gonçalves, orient. II. Título.

CDU 519.63

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Existência, Analiticidade e Comportamento de Soluções Brandas para as Equações MHD Próximo ao Equilíbrio em Espaços Críticos de Lei-Lin

por

Caroline Pereira Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Wilberclay Gonçalves Melo

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS
Orientador

Marcelo Fernandes de Almeida

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato - UFPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Maio de 2022

Aos meus.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus por me permitir viver para ver este dia chegar. À minha família, sou grata pelo respeito e apoio ao meu afastamento durante todo este processo, vocês são incríveis. Agradeço ao meu companheiro, Thyago Souza, por sempre estar presente, principalmente quando mais precisei/preciso. Agradeço a minha mais que amiga, Isabela, pelos desabafos deste mestrado. Obrigada aos amigos presenteados pelo PROMAT: Claudemir, Alexandre, Pablo e Dantas, pelos intervalos de discussões, cafezinhos e gargalhadas, com vocês o estudar se tornou mais leve. Ao meu orientador Wilberclay, pela orientação, dedicação, paciência e pela amizade. Ao professor Angelo Alberti, que me acompanha desde a graduação, sou grata por sua amizade e pelas orientações. Aos professores Cilon Valdez Ferreira Perusato e Marcelo Fernandes de Almeida, por aceitarem participar da Banca Examinadora. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos como determinar a existência e a unicidade de soluções brandas para as Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD), com dissipação fracionária, próximo ao equilíbrio, em espaços críticos de Lei-Lin. Em adição, buscamos estudar a analiticidade e algumas taxas de decaimento para esta mesma. Com o objetivo de sermos mais específicos, analisamos estes decaimentos com respeito às normas do Espaço de Lebesgue usual L^2 e do Espaço de Lei-Lin $X^{1-2\alpha}$. É importante ressaltar também que aplicamos um Teorema do Ponto Fixo e técnicas canônicas envolvendo a Transformada de Fourier para alcançarmos tais metas.

Palavras-chave: Equações MHD; Existência de soluções; Analiticidade de soluções; Decaimento de soluções; Espaços de Lei-Lin.

Abstract

In this work, we present how to determine the existence and uniqueness of mild solutions for the Magnetohydrodynamics equations (MHD) near equilibrium, with fractional dissipation, in critical Lei-Lin spaces. Furthermore, we study the analyticity and some decay rates for these same solutions. In order to be more specific, we establish the large time behavior for the solutions previously cited with respect to the norms of the usual Lebesgue space $L^2(\mathbb{R}^3)$ and Lei-Lin space $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$. It is also important to point out that we apply the Fixed Point Theorem and some usual techniques involving the Fourier Transform to achieve our goals.

Keywords: MHD equations; Existence of solutions; Analyticity of solutions; Decay rates; Lei-Lin spaces.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentamos um estudo a respeito do sistema de equações da Magnetohidrodinâmica incompressíveis, tridimensionais e próximo ao equilíbrio (MHDE) abaixo:

$$\begin{cases} \partial_t u + \Lambda^{2\alpha} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla P = (b \cdot \nabla) b + \partial_1 b, \\ \partial_t b + \Lambda^{2\alpha} b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u + \partial_1 u, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $t \geq 0$ é a variável temporal, $x \in \mathbb{R}^3$ é a variável espacial, e as aplicações $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ é o campo velocidade, $b(x,t) = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ é o campo magnético, e $p(x,t)$ é a pressão escalar do fluido (com $P = p + \frac{1}{2}|b|^2$). Estamos assumindo que a viscosidade cinemática, a constante magnética de Reynolds e os coeficientes correspondentes são todos iguais a 1. Aqui, $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro dissipativo fracionário correspondente à velocidade e ao campo magnético. A terceira equação do sistema (1) diz respeito a incompressibilidade do fluido. Vale enfatizar que assumiremos, em todo o trabalho, por compatibilidade, que $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$. Além disso, $\Lambda^{2\alpha}$ representa o Laplaciano fracionário $(-\Delta)^\alpha$ (ver [32,34,35], para mais detalhes).

Afim de desenvolvermos nosso estudo com maior clareza possível, é interessante começarmos explicando de forma breve o que descreve fisicamente o sistema de equações MHDE (1), o qual estudamos no decorrer desta dissertação. Como já mencionado, este sistema considera as equações da Magnetohidrodinâmica e somente com este argumento conseguimos entender, mesmo que de maneira superficial, do que se trata. O sistema MHDE (1) descreve o comportamento macroscópico de um fluido incompressível eletricamente condutor em um campo magnético.

Vale ressaltar que, um fluido trata-se de uma substância que se deforma continuamente, quando submetida a uma tensão de cisalhamento de qualquer valor e, além disso, este é dito incompressível quando apresenta uma resistência à redução do seu volume quando submetido a uma força de compressão.

As equações usuais da Magnetohidrodinâmica (MHD) (ver [1, 15, 16, 18, 19, 23–29, 36, 37, 39] e referências inclusas) refletem as leis básicas da física que governam o movimento de fluidos eletricamente condutores, como plasmas, metais líquidos e eletrólitos. Além disso, o campo velocidade obedece às equações de Navier-Stokes enquanto o campo magnético satisfaz as equações de eletromagnetismo de Maxwell. Estas são descritas de forma precisa pelo sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = (b \cdot \nabla)b + \Delta u, \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u + \Delta b, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

onde $t \geq 0$ é a variável temporal, $x \in \mathbb{R}^3$ é a variável espacial, e as aplicações $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ é o campo velocidade, $b(x,t) = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ é o campo magnético, e $p(x,t)$ é a pressão escalar do fluido (com $P = p + \frac{1}{2}|b|^2$). Estamos assumindo que a viscosidade cinemática, a constante magnética de Reynolds e os coeficientes correspondentes são todos iguais a 1. A terceira equação do sistema (2) diz respeito a incompressibilidade do fluido.

As equações MHD (2) são matematicamente significativas, pois elas representam uma generalização das equações de Navier-Stokes (ver [2–9, 12–14, 20–22, 30, 31] e referências inclusas) que são dadas por:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \Delta u, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

onde $t \geq 0$ é a variável temporal, $x \in \mathbb{R}^3$ é a variável espacial, e as aplicações $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ é o campo velocidade e $p(x,t)$ é a pressão hidrostática do fluido. Estamos assumindo que a viscosidade é igual a 1. A segunda equação do sistema (3) diz respeito a incompressibilidade do fluido. De fato, quando $b = 0$ no sistema MHD (2), encontramos as equações de Navier-Stokes (3), as quais constituem o problema (ainda em aberto) da existência e unicidade de soluções clássicas que foi proposto pelo Instituto Clay de Matemática, nos anos 2000, como um dos sete problemas do milênio. Além disso, as características distintivas das equações MHD (2) tornam os estudos analíticos um desafio ainda maior em Análise Matemática.

Neste estudo, trabalharemos com o problema de estabilidade que considera perturbações próximo a uma solução estável do tipo $(\tilde{u}, \tilde{b})$ dada por

$$\tilde{u}(x,t) = (0,0,0), \quad \tilde{b}(x,t) = (1,0,0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0. \tag{4}$$

Uma vez que $\Lambda^{2\alpha}\tilde{b} = (0,0,0)$, por meio de um breve cálculo, encontramos que $(\tilde{u}, \tilde{b})$ é uma solução para o seguinte sistema 3D MHD incompressível generalizado (ver [19, 26, 28, 29, 36, 39] e referências inclusas):

$$\begin{cases} \partial_t U + \Lambda^{2\alpha} U + (U \cdot \nabla) U + \nabla P = (B \cdot \nabla) B, \\ \partial_t B + \Lambda^{2\alpha} B + (U \cdot \nabla) B = (B \cdot \nabla) U, \\ \nabla \cdot U = \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \tag{5}$$

para $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$, em que denotamos $U = U(x,t), B = B(x,t)$ e $p = p(x,t)$ o campo de velocidade, o campo magnético e pressão escalar (com $P = p + \frac{1}{2}|b|^2$) do fluido, respectivamente. Para entender este problema de estabilidade, consideraremos a perturbação (u, b) em torno do equilíbrio, onde $u = U - \tilde{u}$ e $b = B - \tilde{b}$ em que (u, b) satisfaz o sistema (1). Este fato é comprovado por meio de substituição direta no sistema em questão, valendo ressaltar que $(B \cdot \nabla)\tilde{b} = (\tilde{b} \cdot \nabla)\tilde{b} = (U \cdot \nabla)\tilde{b} = 0$, e que $(\tilde{b} \cdot \nabla) B = \partial_1 B$ e $(\tilde{b} \cdot \nabla) U = \partial_1 U$. É também importante destacar que o sistema MHD (2) é um caso particular de (5) (basta tomar $\alpha = 1$). Também gostaríamos de citar [38] (e referências inclusas) para mais detalhes sobre as equações MHDE (1).

Inspirados nos trabalhos de Y. Xiao e B. Yuan [38] e, posteriormente, de X. Zhao e M. Zhu [40], os objetivos desta dissertação residem em investigar a existência global, unicidade, analiticidade e o decaimento de soluções (ver [1, 2, 5, 6, 8–11, 16, 19–21, 28, 30, 31, 36–40]) brandas para o sistema MHDE (1) no espaço de Lei-Lin (ver também [2, 5, 8, 9, 20, 26, 29, 33, 39]) com expoente crítico, o qual será definido formalmente no decorrer desse trabalho.

Uma vez que, comparado com as equações de Navier-Stokes (3) e com o sistema MHD (2) (ver [2, 5, 36]), a dificuldade para obter uma estimativa *a priori* é a presença dos termos lineares $\partial_1 u$ e $\partial_1 b$ em (1). Para sanar este problema, introduzimos e provamos um resultado (ver Lema 2.1) que descreve uma caracterização para uma solução do sistema MHDE (1). Através disso, conseguimos chegar ao nosso primeiro objetivo deste estudo: o resultado abaixo.

Assuma que $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ *e* $(u_0, b_0) \in X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$. *Considere que existe uma constante positiva* $\mathbb{C}_\alpha$ *tal que* $\|(u_0, b_0)\|_{X^{1-2\alpha}} < \mathbb{C}_\alpha$, *então o sistema MHDE* (1) *admite uma única solução global no tempo*

$$(u, b) \in C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$$

tal que

$$\|(u, b)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|(u, b)\|_{L^1(X^1)} \leq 8\|(u_0, b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.$$

Para tal feito, usamos algumas propriedades da transformada de Fourier sobre a caracterização, dada pelo Lema 2.1, de uma solução para o sistema MHDE (1). Diante disto, conseguimos um operador bilinear contínuo que satisfaz todas as hipóteses do Lema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo), o que nos garantiu assim, a existência e unicidade da solução, como desejado.

O segundo objetivo nos diz respeito a analiticidade da solução obtida acima, como sugere o seguinte resultado.

A solução $(u, b) \in C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ *obtida acima é analítica no seguinte sentido:*

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\}, \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\}, \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{L^1(X^1)}$$
$$\leq 12\sqrt{e}\|(u_0, b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.$$

Para a demostração deste resultado acima, ainda utilizando-se do Lema 2.1 e das propriedades da transformada de Fourier e de sua inversa, fizemos uma mudança de coordenadas e, novamente conseguimos obter todas as condições para o uso do Lema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo), e chegamos a nossa analiticidade.

Com o intuito de sermos mais específicos, motivados por X. Zhao e M. Zhu [40], analisamos o decaimento da solução estimada nos resultados acima, com respeito à norma do espaço de Lebesgue usual $L^2(\mathbb{R}^3)$ (ver Lema 3.1) e, usamos esse fato na obtenção do último objetivo deste trabalho, isto é, o decaimento da solução com respeito à norma do espaço crítico de Lei-Lin $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$.

Seja $(u_0, b_0) \in X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, *onde* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ *e* $r^* := r^*(u_0) = r^*(b_0) \in (-\frac{3}{2}, \infty)$. *A solução global obtida acima para as equações MHDE* (1) *satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{5}{4\alpha}-1} \|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} = 0,$$

onde $r^*(u_0)$ *e* $r^*(b_0)$ *são as características de decaimento para* u_0 *e* b_0, *respectivamente.*

Afim de garantirmos esta taxa de decaimento, utilizamos os Lemas 2.4 e 3.1, e os Teoremas 3.1 e 3.2.

Permita-nos esclarecer o caminho percorrido nesta dissertação para que nossos objetivos, citados acima, fossem alcançados. Em adição, informamos que este trabalho está dividido em três capítulos.

Nosso primeiro capítulo é formado por três seções. Na primeira, trouxemos algumas terminologias e notações a respeito dos termos presentes nas equações do sistema MHDE (1), além de definirmos o produto tensorial entre duas funções, e ainda, definimos o Projetor de Helmholtz. A segunda seção trata de um breve estudo a respeito dos Espaços de Lebesgue $L^p(X)$. Nela, constam as definições dos espaços $L^p(X)$ e $L^p_{loc}(X)$, as desigualdades de Hölder, Minkowski, Minkowski para integrais e Young. A terceira seção retrata a transformada de Fourier no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sua definição e principais propriedades; além disso, definimos a característica de decaimento para uma determinada aplicação.

No Capítulo 2, a primeira seção traz um estudo relevante e introdutório sobre os espaços de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$. Além da sua definição, provamos que o mesmo é um espaço de Banach para $s \in (-\infty, 0]$, e que o espaço $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ com $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ é um espaço crítico para as equações MHDE (1), isto é, sua norma é invariante por mudança de escala. Na segunda e última seção, encontram-se os lemas (e suas demonstrações) de suma importância para alcançarmos os objetivos deste trabalho.

No Capítulo 3, situam-se os principais resultados. Ele é subdividido em duas seções. Na primeira, constam os resultados que garantem a existência e unicidade de soluções, além da analiticidade destas mesmas. Já na segunda seção, estão as informações que garantem a taxa de decaimento da solução para a norma do espaço usual de Lebesgue $L^2(X)$ e para a norma do espaço crítico de Lei-Lin $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$.

Por fim, é importante destacar que, este trabalho disserta sobre os resultados principais apresentados em [38] e algumas informações estabelecidas em [40]. Sendo assim, estas são as referências principais para este estudo.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

Este presente capítulo tem como proposta apresentar a linguagem e os fatos básicos necessários para a compreensão dos principais resultados deste trabalho. Começaremos expondo algumas terminologias e notações dos principais objetos deste estudo. Introduziremos os espaços de Lebesgue usuais L^p juntamente com alguns de seus resultados relevantes para o nosso trabalho. Por conseguinte, definiremos a transformada de Fourier de uma função no espaço de Schwartz juntamente com algumas de suas propriedades e apresentaremos esta mesma transformada com respeito a uma distribuição temperada. Além disso, estabeleceremos o conceito de característica de decaimeto para uma determinada aplicação.

1.1 Terminologias e Notações

Consideremos o espaço $\mathbb{C}^n$ munido com o produto interno padrão

$$x \cdot y := x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} \tag{1.1}$$

e a norma induzida por este mesmo produto como sendo

$$|x| := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \tag{1.2}$$

com $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Se Ω é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e k um inteiro não negativo, a classe $C^k(\Omega)$ consiste de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que tem derivadas parciais de ordem menor ou igual a k contínuas . Denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis.

Denotamos, por simplicidade, $u = u(t) = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_m(x,t))$, onde $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}$.

O campo gradiente de u é definido como $\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2, ..., \nabla u_m)$, onde $\nabla u_j = (D_1 u_j, D_2 u_j, ..., D_n u_j)$ em que D_k significa a derivada parcial de ordem 1 com respeito à k-ésima coordenada, isto é, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ e com $j = 1, 2, .., m$.

O Laplaciano usual é dado por $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$ onde $\Delta u_j = \sum_{k=1}^{i} D_k^2 u_j$ $(i = 1, 2, 3)$.

O divergente de u como sendo $\nabla \cdot u = \sum_{k=1}^{n} D_k u_k$, onde $u = (u_1, ..., u_n)$.

A notação $u \cdot \nabla b$ significa $\sum_{i=1}^{3} u_i D_i b$, onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Dadas duas funções $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, o produto tensorial é dado por $f \otimes g := (g_1 f, ..., g_n f)$, onde $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ e $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$.

Dado um campo vetorial $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, existem w e ψ tais que

$$v = w - \nabla \psi, \quad \nabla \cdot w = 0, \tag{1.3}$$

Neste caso, $w = P_H(v)$ é chamado Projetor de Helmholtz e v deve satisfazer algumas restrições apropriadas (ver [22] e referências inclusas, para mais detalhes sobre esta aplicação).

Vale ressaltar que as constantes podem mudar seus valores de linha para linha, embora o mesmo símbolo é aplicado. As constantes positivas absolutas são denotadas por C. Além disso, escrevemos C_s para indicar sua dependência; mais precisamente, C_s depende de s.

1.2 Espaços de Lebesgue L^p

Um espaço de importância necessária para o desenvolvimento deste trabalho são os denominados espaços de Lebesgue L^p (ver [17], para mais detalhes). Vejamos sua definição e suas principais propriedades.

Definição 1.1. Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou seja, X é um conjunto não vazio, $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ uma medida. Se f é uma função mensurável sobre X e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p}. \tag{1.4}$$

Também, para $p = \infty$, estabelecemos a seguinte norma:

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{a \geq 0; \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}, \tag{1.5}$$

com a convenção de que $\inf \emptyset = \infty$. Em alguns casos $\|f\|_{L^\infty}$ é chamada supremo essencial de f e escrevemos

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{supess}\{|f(x)| : x \in X\}. \tag{1.6}$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}. \tag{1.7}$$

Definição 1.2. Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diremos que f é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos isso por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty. \tag{1.8}$$

Nós também podemos definir o espaço L^p envolvendo uma variável temporal T, como segue.

Definição 1.3. Assuma que $(X, \|\cdot\|)$ seja um espaço vetorial normado e $T > 0$. O espaço $L^p([0,T]; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, contém todas as funções mensuráveis $f : [0,T] \to X$ para as quais as seguintes normas são finitas

$$\|f\|_{L^p([0,T];X)} := \left[\int_0^T \|f\|^p dt\right]^{1/p}, \quad \forall\, 1 \leq p < \infty \tag{1.9}$$

e também

$$\|f\|_{L^\infty([0,T];X)} = \text{supess}\{\|f(t)\| : t \in [0,T]\}. \tag{1.10}$$

Analogamente, $C([0,T]; X) = \{f : [0,T] \to X \text{ contínua}\}$ munido com a norma do supremo essencial $\|\cdot\|_{L^\infty([0,T];X)}$.

Definição 1.4. Sejam f e g funções mensuráveis sobre $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy, \tag{1.11}$$

para todo x tal que a integral acima exista.

A convolução entre funções, desde que a integral exista, zela de algumas propriedades como, por exemplo, $f * g = g * f$ e $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Abaixo, listamos alguns resultados importantes sobre a teoria dos espaços de Lebesgue que serão utilizados nesta dissertação.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis sobre X, então*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.12}$$

Demonstração. Ver [17], p. 182. □

Teorema 1.2. *Para $1 \leq p \leq \infty$, L^p é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [17], p. 183. □

Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p$, então*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{1.13}$$

Demonstração. Ver [17], p. 183. □

A Desigualdade de Minkowski afirma que a norma L^p de uma soma de aplicações é no máximo a soma das normas L^p detas mesmas. Há uma outra desigualdade, também conhecida pelo nome de Minkowski, que declara informações relacionadas a integrais e aos espaços de Lebesgue usuais L^p.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sejam espaços de medida σ-finito, e seja f uma função mensurável em $X \times Y$.*

a) *Se $f \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$\left[\int \left(\int f(x,y) d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y). \tag{1.14}$$

b) *Se $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ em quase todo ponto y, e a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ está em $L^1(\nu)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ em quase todo ponto x, a função $x \mapsto \displaystyle\int f(x,y) d\nu(y)$ está em $L^p(\mu)$, e*

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y). \tag{1.15}$$

Demonstração. Ver [17], p. 194. □

O Teorema seguinte contém um fato básico sobre a convolução de funções no espaço L^p.

Teorema 1.5 (Desigualdade de Young)**.** *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$, com $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e, além disso, temos que*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.16}$$

Demonstração. Ver [17], p. 240. □

1.3 A Transformada de Fourier

Para definirmos a transformada de Fourier de uma função f é necessário introduzirmos a noção de espaço de Schwartz (ver [34], para mais detalhes). Para isso, primeiro precisamos da seguinte família de seminormas.

Para cada $\nu, \beta \in (\mathbb{Z}^+)^n$ denotamos a seminorma $\| \cdot \|_{(\nu,\beta)}$ definida como

$$\|f\|_{(\nu,\beta)} = \|x^\nu \partial_x^\beta f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\nu \partial_x^\beta f(x)|, \tag{1.17}$$

onde $x^\nu = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} ... x_n^{\nu_n}$ e $\partial_x^\beta = \dfrac{\partial^{\beta_1 + ... + \beta_n} f}{\partial^{\beta_1} x_1 \cdots \partial^{\beta_n} x_n}$, com $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definimos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que decaem no infinito, isto é,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\nu,\beta)} < \infty, \nu, \beta \in (\mathbb{Z}^+)^n\}. \tag{1.18}$$

Definição 1.5. Definimos a transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.19}$$

onde i é a unidade imaginária e $\xi \cdot x$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. Além disso, definimos o operador Laplaciano fracionário $\Lambda^{2\alpha} = (-\Delta)^\alpha$, através da transformada de Fourier como sendo $\widehat{\Lambda^{2\alpha} f}(\xi) = |\xi|^{2\alpha} \widehat{f}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Esta definição faz sentido, pois

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\xi\cdot x}||f(x)|dx \\
&= \int_{B_1(0)} |f(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n/B_1(0)} |x|^{n+1}\frac{|f(x)|}{|x|^{n+1}}dx \\
&\leq \int_{B_1(0)} |f(x)|dx + \|x^{n+1}f\|_{L^\infty}\cdot \mathrm{vol}(\partial B_1(0)) < \infty.
\end{aligned}
$$

É verdade que o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definido através da transformada de Fourier, é um isomorfismo. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6. *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear e contínuo, continuamente inversível, cuja transformada inversa é dada por:*

$$
\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} f(x)dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.20}
$$

Demonstração. A prova deste resultado encontra-se em [34]. □

Logo a seguir, estabelecemos algumas propriedades que são satisfeitas pela transformada de Fourier.

Teorema 1.7. *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então temos as seguintes igualdades:*

i) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

ii) $\mathcal{F}(x^\alpha f(x))(\xi) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

iii) $\displaystyle\int \widehat{f} g dx = \int f\,\widehat{g} dx$;

iv) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}\,\widehat{g}$;

v) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n}\widehat{f} * \widehat{g}$;

vi) $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = (2\pi)^{-n} f(-\xi)$.

Demonstração. A demonstração deste resultado situa-se em [34]. □

Uma última propriedade, envolvendo a transformada de Fourier, de grande relavância para este trabalho, é dada no próximo resultado.

Teorema 1.8 (Identidade de Plancherel)**.** *Suponha que* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, onde* $n \in \mathbb{N}$*. Então, temos as seguintes igualdades:*

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx;$

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$

Demonstração. A demonstração deste resultado situa-se em [34]. □

Abaixo vamos definir quando um funcional linear Ψ, definido sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é uma distribuição temperada e como se define a transformada desta mesma.

Definição 1.6. Dizemos que $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ define uma distribuição temperada, e escrevemos $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, se

i) Ψ é linear;

ii) Ψ é contínua, isto é, se toda $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz $\varphi_j \to 0$, com $j \to \infty$, tem-se que $\Psi(\varphi_j) \to 0$, quando $j \to \infty$.

Definição 1.7. Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de $\widehat{\Psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\widehat{\Psi}(f) = \Psi(\widehat{f}), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.21}$$

Introduziremos agora as definições de indicador e característica de decaimento (ver [11, 30], para mais detalhes).

Definição 1.8. Suponha que $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $B_\rho = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \rho\}$. Se os dois limites, inferior e superior, existirem, eles são indicadores de decaimento inferior e superior de $\Lambda^s v_0$:

$$P_r^s(v_0)_- = \liminf_{\rho \to 0^+} \rho^{-2r-n}\int_{B_\rho} |\xi|^{2s}|\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi, \ s \geq 0 \tag{1.22}$$

e também

$$P_r^s(v_0)_+ = \limsup_{\rho \to 0^+} \rho^{-2r-n}\int_{B_\rho} |\xi|^{2s}|\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi, \ s \geq 0. \tag{1.23}$$

Se $P_r^s(v_0)_- = P_r^s(v_0)_+$, então definimos $P_r^s(v_0) = P_r^s(v_0)_- = P_r^s(v_0)_+$ como o indicador de decaimento relacionado a v_0.

Definição 1.9. As características de decaimento superior e inferior para $\Lambda^s v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ são definidas como

$$r_s(v_0)_+ = \sup\{r \in \mathbb{R} : P_r^s(v_0)_+ < \infty\}, \tag{1.24}$$

e também

$$r_s(v_0)_- = \inf\{r \in \mathbb{R} : P_r^s(v_0)_- > 0\}. \tag{1.25}$$

Quando $\Lambda^s v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que existe $r_s^*(v_0) \in (-\frac{n}{2} + s, \infty)$ que satisfaz

$$r_s^*(v_0) = \max\{r \in \mathbb{R} : P_r^s(v_0)_+ < \infty\} = \min\{r \in \mathbb{R} : P_r^s(v_0)_- > 0\}, \tag{1.26}$$

então $r_s^*(v_0)$ é chamado característica de decaimento de v_0. Em particular, quando $s = 1$, $r^*(v_0)$ denota a característica de decaimento de v_0. A característica de decaimento de $\Lambda^s v_0$ $(s \geq 0)$ nos dois casos é dada por:

$$r_s^*(v_0) = +\infty, \quad \text{se } r_s(v_0)_+ = r_s(v_0)_- = +\infty \tag{1.27}$$

e também

$$r_s^*(v_0) = -\frac{n}{2}, \quad \text{se } r_s(v_0)_+ = r_s(v_0)_- = -\frac{n}{2}. \tag{1.28}$$

Capítulo 2

Espaços de Lei-Lin e Lemas Preliminares

Neste capítulo, sobre os espaços de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$ (ver [2, 5, 8, 9, 20, 26, 29, 33] e referências inclusas), exibiremos a definição, provaremos que este é um espaço de Banach para $s \leq 0$ e mostraremos que $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço crítico para as equações (1). Além disso, determinaremos os lemas necessários como, por exemplo, o Teorema do Ponto Fixo, para as demonstrações dos resultados principais que estão presentes no último capítulo.

2.1 Espaços de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$

O interesse deste presente estudo está em estabelecer a boa colocação global, analiticidade e estimativas de decaimento, considerando um dado inicial pequeno, para o sistema (1) no espaço $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$, denominado espaço crítico de Lei-Lin, onde $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Deste modo, nesta seção, apresentaremos a definição e algumas características relevantes deste espaço.

Definição 2.1. Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço funcional de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$ é definido por

$$X^s(\mathbb{R}^3) = \Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty \Big\}. \tag{2.1}$$

Este é equipado com a norma

$$\|f\|_{X^s} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| d\xi, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \tag{2.2}$$

A próxima definição é acerca de espaços que dependem do tempo.

Definição 2.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, \infty)$. Uma função $f(x,t) \in L^p([0,T] : X^s(\mathbb{R}^3))$ se*

$$\|f\|_{L^p(X^s)} := \left(\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{X^s}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty; \tag{2.3}$$

e $f(x,t) \in \widetilde{L^p}([0,T]; X^s(\mathbb{R}^3))$ quando

$$\|f\|_{\widetilde{L^p}(X^s)} := \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\int_0^T (|\xi|^s |\hat{f}(\xi,t)|)^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} d\xi < \infty, \tag{2.4}$$

ou ainda, $f(x,t) \in \widetilde{L^\infty}(X^s)$ quando

$$\|f\|_{\widetilde{L^\infty}(X^s)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s \sup_{0 \leq t < \infty} \{|\hat{f}(t)|\} d\xi < \infty. \tag{2.5}$$

Pela desigualdade de Minkowski podemos deduzir que se $p > 1$ então

$$\widetilde{L^p}([0,T]; X^s(\mathbb{R}^3)) \hookrightarrow L^p([0,T] : X^s(\mathbb{R}^3)). \tag{2.6}$$

Claramente se $p = 1$ então

$$L^1([0,T] : X^s(\mathbb{R}^3)) \equiv \widetilde{L^1}([0,T] : X^s(\mathbb{R}^3)). \tag{2.7}$$

O resultado seguinte mostra que o espaço de Lei-Lin X^s para $s \leq 0$ é um espaço completo.

Teorema 2.1. *Seja $s \in (-\infty, 0]$. O espaço de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Considere $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Primeiramente, perceba que

$$\|f\|_{X^s} = \||\xi|^s |\widehat{f}(\xi)|\|_{L^1}.$$

Precisamos agora mostrar que o espaço $X^s(\mathbb{R}^3)$, com $s \leq 0$, é um espaço completo. Com efeito, considere uma sequência de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^s(\mathbb{R}^3)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ tem-se que

$$\|f_n - f_m\|_{X^s} < \epsilon, \tag{2.8}$$

ou seja,

$$\||\xi|^s\widehat{f}_n - |\xi|^s\widehat{f}_m\|_{L^1} < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0. \tag{2.9}$$

Em (2.9), temos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} := (|\xi|^s\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\mathbb{R}^3)$. Com isso, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $L^1(\mathbb{R}^3)$ para uma função f (ver Teorema 1.2).

Considere $\varphi = |\xi|^{-s}f$. Note que $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. De fato, seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um compacto; logo, $K \subset B_r(0)$, para algum $r > 0$. Então,

$$\begin{aligned}\int_K |\varphi(\xi)|d\xi &\leq \int_{B_r(0)} |\xi|^{-s}|f(\xi)|d\xi \leq r^{-s}\int_{B_r(0)} |f(\xi)|d\xi \\ &\leq r^{-s}\int_{\mathbb{R}^3} |f(\xi)|d\xi = r^{-s}\|f\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$

Deste modo, $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Então, $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Defina $F = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para F em $X^s(\mathbb{R}^3)$. De fato, é verdade que

$$\begin{aligned}\|f_n - F\|_{X^s} = \|f_n - \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\|_{X^s} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^s|\widehat{f}_n - \varphi|d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} ||\xi|^s\widehat{f}_n - |\xi|^s|\xi|^{-s}f|d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} ||\xi|^s\widehat{f}_n - f|d\xi \\ &= \|g_n - f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - F\|_{X^s} = \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_{L^1} = 0.$$

E assim, concluímos que f_n converge em $X^s(\mathbb{R}^3)$. Logo, $X^s(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Banach. □

Um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço crítico para as soluções do sistema (1) se

$$\|f_\lambda\|_X = \lambda^{2(1-\alpha)}\|f\|_X, \quad \forall \lambda > 0, f \in X, \tag{2.10}$$

onde

$$f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x).$$

Agora vejamos quais são os valores de s para que o espaço de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$ seja um espaço crítico.

Teorema 2.2. *O espaço de Lei-Lin* $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *é um espaço crítico para o sistema MHDE* (1).

Demonstração. Assuma que $\lambda > 0$ e $f \in X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ e defina $f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|_{X^{1-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} |\widehat{f_\lambda}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} f_\lambda(x) dx \right| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} \lambda f(\lambda x) dx \right| d\xi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Realizando uma mudança de coordenadas em (2.11) do tipo $y = \lambda x$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|_{X^{1-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\lambda^{-1}y)\cdot\xi} \lambda f(y) \lambda^{-3} dy \right| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \lambda^{-2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iy\cdot(\lambda^{-1}\xi)} f(y) dy \right| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \lambda^{-2} |\widehat{f}(\lambda^{-1}\xi)| d\xi. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Novamente, aplique a mudança de variáveis $\eta = \lambda^{-1}\xi$ em (2.12) para inferir

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|_{X^{1-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda\eta|^{1-2\alpha} \lambda^{-2} |\widehat{f}(\eta)| \lambda^3 d\eta \\ &= \lambda^{2-2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{1-2\alpha} |\widehat{f}(\eta)| d\eta \\ &= \lambda^{2-2\alpha} \|f\|_{X^{1-2\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto, o espaço de Lei-Lin $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço crítico para o sistema MHDE (1). □

2.2 Lemas Preliminares

Nesta seção, encontram-se os lemas que desempenham um papel de grande importância neste trabalho.

Primeiramente, com o propósito de eliminar os termos lineares $\partial_1 u$ e $\partial_1 b$ do sistema MHDE dado por

$$\begin{cases} \partial_t u + \Lambda^{2\alpha} u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = (b\cdot\nabla)b + \partial_1 b, \\ \partial_t b + \Lambda^{2\alpha} b + (u\cdot\nabla)b = (b\cdot\nabla)u + \partial_1 u, \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

anunciamos o Lema 2.1 (ver [38]). Este fornece uma escrita alternativa para as transformadas de Fourier de uma solução (u,b) para as equações MHDE (2.13), onde não mais há termos lineares.

Lema 2.1. *Uma solução (u,b) para as equações MHDE (2.13) deve satisfazer as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi,t) =& \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t}\right)\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t [\left(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\right)\hat{F}(\xi,\tau) \\ &+ \mathrm{sgn}(\xi_1)\left(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\right)\hat{E}(\xi,\tau)]d\tau \end{aligned} \tag{2.14}$$

e também

$$\begin{aligned} \hat{b}(\xi,t) =& \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t [\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\hat{F}(\xi,\tau) \\ &+ (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\hat{E}(\xi,\tau)]d\tau, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $t \geq 0$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1(\xi) = -|\xi|^{2\alpha} - i|\xi_1|$, $\lambda_2(\xi) = -|\xi|^{2\alpha} + i|\xi_1|$, $F = -u\cdot\nabla u + b\cdot\nabla b - \nabla P$, $E = -u\cdot\nabla b + b\cdot\nabla u$ e

$$\mathrm{sgn}(\xi_1) = \begin{cases} 1, & \xi_1 \geq 0, \\ -1, & \xi_1 < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Demonstração. Nosso intuito aqui presente se resume em eliminar os termos lineares do sistema MHDE (2.13). Para tal feito, vamos introduzir um processo de diagonalização sobre a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -|\xi|^{2\alpha} & i\xi_1 \\ i\xi_1 & -|\xi|^{2\alpha} \end{bmatrix}, \quad \xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3. \tag{2.17}$$

Para iniciarmos, vamos entender como obtemos a matriz dada em (2.17). Perceba que se aplicarmos a transformada de Fourier ao sistema MHDE (2.13), temos que

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(\xi) + \widehat{\Lambda^{2\alpha} u}(\xi) + (\widehat{u \cdot \nabla) u}(\xi) + \widehat{\nabla P}(\xi) = (\widehat{b \cdot \nabla) b}(\xi) + \widehat{\partial_1 b}(\xi), \\ \widehat{\partial_t b}(\xi) + \widehat{\Lambda^{2\alpha} b}(\xi) + (\widehat{u \cdot \nabla) b}(\xi) = (\widehat{b \cdot \nabla) u}(\xi) + \widehat{\partial_1 u}(\xi), \\ \hat{u}(x,0) = \hat{u}_0(x), \hat{b}(x,0) = \hat{b}_0(x). \end{cases} \tag{2.18}$$

Consequentemente, podemos escrever as igualdades abaixo:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi) + |\xi|^{2\alpha} \hat{u}(\xi) + (\widehat{u \cdot \nabla) u}(\xi) + \widehat{\nabla P}(\xi) = (\widehat{b \cdot \nabla) b}(\xi) + i\xi_1 \hat{b}(\xi), \\ \partial_t \hat{b}(\xi) + |\xi|^{2\alpha} \hat{b}(\xi) + (\widehat{u \cdot \nabla) b}(\xi) = (\widehat{b \cdot \nabla) u}(\xi) + i\xi_1 \hat{u}(\xi). \end{cases} \tag{2.19}$$

Passando nossa análise às coordenadas de cada termo do sistema (2.19) e usando as notações

$$\widehat{F_j}(\xi) = -(\widehat{u \cdot \nabla) u_j}(\xi) + (\widehat{b \cdot \nabla) b_j}(\xi) - \widehat{\partial_j P}(\xi) \tag{2.20}$$

e

$$\widehat{E_j}(\xi) = -(\widehat{u \cdot \nabla) b_j}(\xi) + (\widehat{b \cdot \nabla) u_j}(\xi), \tag{2.21}$$

deduzimos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_j(\xi) + |\xi|^{2\alpha} \hat{u}_j(\xi) - i\xi_1 \hat{b}_j(\xi) = \widehat{F_j}(\xi), \\ \partial_t \hat{b}_j(\xi) + |\xi|^{2\alpha} \hat{b}_j(\xi) - i\xi_1 \hat{u}_j(\xi) = \widehat{E_j}(\xi), \end{cases} \tag{2.22}$$

que na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} \partial_t \hat{u}_j(\xi) \\ \partial_t \hat{b}_j(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|\xi|^{2\alpha} & i\xi_1 \\ i\xi_1 & -|\xi|^{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_j(\xi) \\ \hat{b}_j(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{F_j}(\xi) \\ \widehat{E_j}(\xi) \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

para todo $j = 1, 2, 3$.

A ideia a partir de agora é diagonalizar a matriz descrita em (2.17) afim de encontrarmos uma outra mais simples para chegarmos a conclusão da demonstração. Deste modo, sabendo que o polinômio característico da matriz estabelecida em (2.17) é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2|\xi|^{2\alpha}\lambda + |\xi|^{4\alpha} + \xi_1^2$$

e seus autovalores (ou seja, suas raízes) são os seguintes:

$$\lambda_1(\xi) = -|\xi|^{2\alpha} - i|\xi_1| \quad \text{e} \quad \lambda_2(\xi) = -|\xi|^{2\alpha} + i|\xi_1|, \tag{2.24}$$

onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$.

Considere, primeiramente, $\xi_1 \neq 0$. Os autovetores associados a $\lambda_1(\xi)$ e $\lambda_2(\xi)$ são, respectivamente, $(i\xi_1, -i|\xi|)$ e $(i\xi_1, i|\xi|)$. Estes vetores são claramente (linearmente) independentes (ver (2.24)). Denote $G(\xi)$ como a matriz formada por estes autovetores em coluna, a saber

$$G(\xi) = \begin{bmatrix} i\xi_1 & i\xi_1 \\ -i|\xi| & i|\xi| \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

A matriz $G(\xi)$ é invertível e sua inversa é dada por

$$[G(\xi)]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2i\xi_1} & -\dfrac{1}{2i|\xi_1|} \\ \dfrac{1}{2i\xi_1} & \dfrac{1}{2i|\xi_1|}. \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Sendo assim, pela teoria dos operadores diagonalizáveis, podemos escrever

$$[G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} -|\xi|^{2\alpha} & i\xi_1 \\ i\xi_1 & -|\xi|^{2\alpha} \end{bmatrix} [G(\xi)] = \begin{bmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\xi) \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Definamos agora

$$\begin{bmatrix} \widehat{A_j}(\xi, t) \\ \widehat{D_j}(\xi, t) \end{bmatrix} = [G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{u_j}(\xi, t) \\ \widehat{b_j}(\xi, t) \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Assim, $\widehat{A_j}(\xi)$ e $\widehat{D_j}(\xi)$ satisfazem, por (2.23) e (2.28), as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_\tau \widehat{A_j}(\xi) \\ \partial_\tau \widehat{D_j}(\xi) \end{bmatrix} &= [G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\tau \widehat{u_j}(\xi) \\ \partial_\tau \widehat{b_j}(\xi) \end{bmatrix} \\ &= [G(\xi)]^{-1} \left[\begin{bmatrix} -|\xi|^{2\alpha} & i\xi_1 \\ i\xi_1 & -|\xi|^{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_j(\xi) \\ \hat{b}_j(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{F_j}(\xi) \\ \widehat{E_j}(\xi) \end{bmatrix} \right] \\ &= [G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} -|\xi|^{2\alpha} & i\xi_1 \\ i\xi_1 & -|\xi|^{2\alpha} \end{bmatrix} [G(\xi)] \begin{bmatrix} \widehat{A}_j(\xi) \\ \widehat{D}_j(\xi) \end{bmatrix} + [G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{F_j}(\xi) \\ \widehat{E_j}(\xi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, 3$ e $0 \leq \tau \leq t$. Além disso, por (2.27), segue que

$$\begin{bmatrix} \partial_\tau \widehat{A_j}(\xi) \\ \partial_\tau \widehat{D_j}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{A}_j(\xi) \\ \widehat{D}_j(\xi) \end{bmatrix} + [G(\xi)]^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{F_j}(\xi) \\ \widehat{E_j}(\xi) \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Multiplicando a equação (2.29) pela matriz

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} \end{bmatrix}, \quad 0 \le \tau \le t, \tag{2.30}$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} \partial_\tau(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\widehat{A}_j(\xi)) \\ \partial_\tau(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\widehat{D}_j(\xi)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\left(\frac{\widehat{F}_j(\xi)}{2i\xi_1} - \frac{\widehat{E}_j(\xi)}{2i|\xi_1|}\right) \\ e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\left(\frac{\widehat{F}_j(\xi)}{2i\xi_1} + \frac{\widehat{E}_j(\xi)}{2i|\xi_1|}\right) \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Multiplicando agora a equação (2.31) pela matriz $G(\xi)$ (dada em (2.25)), inferimos que

$$\begin{bmatrix} i\xi_1\partial_\tau(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\widehat{A}_j(\xi)) + i\xi_1\partial_\tau(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\widehat{D}_j(\xi)) \\ -i|\xi_1|\partial_\tau(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\widehat{A}_j(\xi)) + i|\xi_1|\partial_\tau(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\widehat{D}_j(\xi)) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \\ \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Agora, integrando de 0 a t ambos os lados de (2.32), chegaremos a

$$[G(\xi)]\begin{bmatrix} \hat{A}_j(t) \\ \hat{D}_j(t) \end{bmatrix} - [G(\xi)]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\xi)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(\xi)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}_j(0) \\ \hat{D}_j(0) \end{bmatrix} =$$
$$\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \\ \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \end{bmatrix} d\tau,$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Consequentemente, por (2.28), concluímos que

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j(t) \\ \hat{b}_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_j(0) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_j(0) \\ \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_j(0) + \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_j(0) \end{bmatrix}$$
$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \\ \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\widehat{F}_j(\xi) + \frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\widehat{E}_j(\xi) \end{bmatrix} d\tau,$$

para todo $j = 1, 2, 3$. Portanto, chegamos a

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) =& \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t}\right)\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi) \\ =& \frac{1}{2}\int_0^t [\left(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}\right)\hat{F}(\xi, \tau) \\ &+ \mathrm{sgn}(\xi_1)\left(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}\right)\hat{E}(\xi, \tau)]d\tau \end{aligned}$$

e também a

$$\begin{aligned}\hat{b}(\xi,t)=&\frac{1}{2}\text{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\frac{1}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)\\ =&\frac{1}{2}\int_0^t[\text{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}-e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\hat{F}(\xi,\tau)\\ &+(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}+e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\hat{E}(\xi,\tau)]d\tau.\end{aligned}$$

Perceba que se considerarmos $\xi_1=0$, a equação matricial (2.23) torna-se

$$\begin{bmatrix}\partial_\tau\hat{u}_j(\xi)\\ \partial_\tau\hat{b}_j(\xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-|\xi|^{2\alpha} & 0\\ 0 & -|\xi|^{2\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{u}_j(\xi)\\ \hat{b}_j(\xi)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\widehat{F_j}(\xi)\\ \widehat{E_j}(\xi)\end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

ou seja,

$$\begin{cases}\partial_\tau\hat{u}_j(\xi)=-|\xi|^{2\alpha}\hat{u}_j(\xi)+\widehat{F_j}(\xi),\\ \partial_\tau\hat{b}_j(\xi)=-|\xi|^{2\alpha}\hat{b}_j(\xi)+\widehat{E_j}(\xi),\end{cases}$$

para todo $j=1,2,3$. Isto nos diz que

$$\begin{cases}\partial_\tau\hat{u}(\xi)=-|\xi|^{2\alpha}\hat{u}(\xi)+\widehat{F}(\xi),\\ \partial_\tau\hat{b}(\xi)=-|\xi|^{2\alpha}\hat{b}(\xi)+\widehat{E}(\xi),\end{cases} \tag{2.34}$$

Multiplicando ambas as equações do sistema (2.34) por $e^{-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}$ e depois integrando de 0 a t, deduzimos que

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-|\xi|^{2\alpha}t}\hat{u}_0+\int_0^t e^{-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}\widehat{F}(\xi,\tau)d\tau$$

e também que

$$\hat{b}(\xi,t)=e^{-|\xi|^{2\alpha}t}\hat{b}_0+\int_0^t e^{-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}\widehat{E}(\xi,\tau)d\tau.$$

Estes argumentos provam o Lema 2.1.

□

Com carácter técnico, o lema abaixo (ver [39]) fornece uma desigualdade a respeito de vetores em $\mathbb{R}^3$ e será útil nas demonstrações dos resultados de existência de solução para as equações MHDE (2.13).

Lema 2.2. *Assuma que $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$, então vale a seguinte desigualdade:*

$$|\xi|^{2-2\alpha}\leq 2^{1-2\alpha}[|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha}+|\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|], \tag{2.35}$$

para todo $\xi,\eta\in\mathbb{R}^3$.

Demonstração. Inicialmente se tomarmos $\alpha = \frac{1}{2}$, obtemos

$$2^{1-2\alpha}[|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} + |\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|] = |\eta| + |\xi-\eta|, \tag{2.36}$$

e, desta forma, a desigualdade (2.35) é satisfeita pela desigualdade triangular, haja vista que $|\xi|^{2-2\alpha} = |\xi|$.

Agora, vamos verificar a veracidade de (2.35) para $\alpha = 1$. De fato, é verdade que

$$2^{1-2\alpha}[|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} + |\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|] = \frac{|\eta|^2 + |\xi-\eta|^2}{|\xi-\eta||\eta|} \geq 2. \tag{2.37}$$

Consequentemente, as seguintes afirmações valem:

$$|\xi|^{2-2\alpha} = 1 < 2 \leq 2^{1-2\alpha}[|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} + |\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|].$$

Como acabamos de ver, para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$ o resultado é válido. Vejamos agora o caso $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\xi \neq 0$ ($\xi = 0$ é um caso ordinário). Nestas condições, a desigualdade (2.35) pode ser reescrita como abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{1-2\alpha}} &\leq \frac{|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha}}{|\xi|^{2-2\alpha}} + \frac{|\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|}{|\xi|^{2-2\alpha}} \\ &= \frac{|\eta|}{|\xi|}\left(\frac{|\xi-\eta|}{|\xi|}\right)^{1-2\alpha} + \left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right)^{1-2\alpha}\frac{|\xi-\eta|}{|\xi|}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Por conveniência, vamos denotar

$$x = \frac{|\eta|}{|\xi|} \quad \text{e} \quad y = \frac{|\xi-\eta|}{|\xi|}. \tag{2.39}$$

Veja que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Além disso, pela desigualdade triangular, chegamos a

$$x + y = \frac{|\eta| + |\xi-\eta|}{|\xi|} \geq \frac{|\xi|}{|\xi|} = 1. \tag{2.40}$$

Desse modo, ficamos com a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2^{1-2\alpha}} \leq xy^{1-2\alpha} + x^{1-2\alpha}y. \tag{2.41}$$

Agora defina a aplicação abaixo:

$$f(x,y) = xy^{1-2\alpha} + x^{1-2\alpha}y, \quad \forall x, y \geq 0. \tag{2.42}$$

Observe que se mostrarmos que a função f atinge um valor mínimo $\frac{1}{2^{1-2\alpha}}$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), então a desigualdade (2.35) é válida. Sendo assim, primeiramente, considere que $y = kx$ para $0 \leq k \leq \infty$. Com esta escolha, por compatibilidade com (2.40), devemos tomar $x \geq \frac{1}{k+1}$. Deste modo, defina

$$\begin{aligned} g(x) &:= f(x, kx) = x(kx)^{1-2\alpha} + x^{1-2\alpha}(kx) \\ &= x^{2(1-\alpha)}(k^{1-2\alpha} + k), \quad \forall x \geq \frac{1}{k+1}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

A seguir, mostraremos que g atinge um valor mínimo, independente de k, que chamaremos g_p. Mais precisamente, provaremos que

$$g_p = \frac{1}{2^{1-2\alpha}}. \tag{2.44}$$

Com efeito, é fácil ver que

$$g'(x) = 2(1-\alpha)x^{1-2\alpha}(k^{1-2\alpha} + k), \quad \forall x \geq \frac{1}{k+1}. \tag{2.45}$$

para $0 \leq k \leq \infty$, ou seja, g' é positiva em seu domínio (pois $\alpha < 1$). Portanto, g é crescente neste mesmo conjunto. Além disso, como g está definida para $x \geq \frac{1}{k+1}$ (ver (2.40)), então o valor mínimo para g é dado por:

$$g\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{k^{1-2\alpha} + k}{(k+1)^{2(1-\alpha)}}, \quad \forall 0 \leq k \leq \infty. \tag{2.46}$$

Perceba que a expressão exposta no lado direito de (2.46) é um valor mínimo que depende de k. Vamos denotá-lo por $g_m(k)$. Como um resultado, vale a igualdade abaixo:

$$g_m(k) = \frac{k^{1-2\alpha} + k}{(k+1)^{2(1-\alpha)}}, \quad \forall 0 \leq k \leq \infty. \tag{2.47}$$

Assim, passando ao limite, quando $k \to \infty$, inferimos que

$$\lim_{k \to 0} g_m(k) = \lim_{k \to 0} \frac{k^{1-2\alpha} + k}{(k+1)^{2(1-\alpha)}} = +\infty \tag{2.48}$$

e também que

$$\lim_{k \to \infty} g_m(k) = \lim_{k \to \infty} \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^{1-2\alpha}} \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \frac{1}{(k+1)^{1-2\alpha}}\right] = +\infty, \tag{2.49}$$

pois $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Por outro lado, ao derivar g_m (ver (2.47)), obtemos

$$g'_m(k) = \frac{1 + (2\alpha - 1)k - (2\alpha - 1 + k)k^{-2\alpha}}{(k+1)^{3-2\alpha}}, \quad \forall 0 \leq k \leq \infty. \tag{2.50}$$

Vamos analisar o numerador no lado direito da igualdade (2.50), chame-o

$$h(k) = 1 + (2\alpha - 1)k - (2\alpha - 1 + k)k^{-2\alpha}, \quad \forall 0 \leq k \leq \infty. \tag{2.51}$$

Por conseguinte, podemos escrever a igualdade abaixo:

$$h'(k) = 2\alpha - 1 + [(2\alpha - 1)k + 2\alpha(2\alpha - 1)]k^{-2\alpha-1}, \quad \forall 0 \leq k \leq \infty. \tag{2.52}$$

Logo, $h'(k) \geq 0$, para todo $0 \leq k \leq \infty$ (pois $\frac{1}{2} < \alpha < 1$). Isto nos diz que h é não decrescente em seu domínio. Além disso, $h(1) = 0$ (ver (2.51)). Portanto, temos o seguinte comportamento para h:

$$\begin{aligned} h(k) &\leq h(1) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq 1; \\ h(k) &\geq h(1) = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq +\infty, \end{aligned}$$

ou seja, por (2.50), chegamos a

$$g'_m(k) = \frac{h(k)}{(k+1)^{3-2\alpha}} \leq 0, \quad \forall 0 \leq k \leq 1; \tag{2.53}$$

$$g'_m(k) = \frac{h(k)}{(k+1)^{3-2\alpha}} \geq 0, \quad \forall 1 \leq k \leq \infty. \tag{2.54}$$

Consequentemente, por (2.47), (2.48) e (2.49), podemos escrever

$$g_p = g_m(1) = \frac{1^{1-2\alpha} + 1}{(1+1)^{2(1-\alpha)}} = \frac{1}{2^{1-2\alpha}}. \tag{2.55}$$

Através dos argumentos estabelecidos acima, o Lema 2.2 está provado. $\square$

A fim de apresentarmos o resultado que será usado para provar a existência e unicidade de soluções para as equações MHDE (2.13) (ver as provas dos Teoremas 3.1 e 3.2), enunciamos o próximo lema (conhecido como Teorema do Ponto Fixo) (ver [14]).

Lema 2.3. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $B : X \times X \to X$ um operador bilinear contínuo, isto é, existe uma constante C_1 positiva tal que*

$$\|B(x,y)\| \leq C_1\|x\|\|y\| \quad \forall\, x, y \in X. \tag{2.56}$$

Então, para cada $x_0 \in X$ que satisfaça

$$4C_1\|x_0\| < 1, \tag{2.57}$$

a equação $a = x_0 + B(a,a)$, com $a \in X$, admite uma solução $x \in X$. Além disso, x obedece a desigualdade $\|x\| \leq 2\|x_0\|$ e é a única tal que $\|x\| \leq \frac{1}{2C_1}$.

Demonstração. Para demonstrar este resultado, vamos considerar a bola fechada de centro 0 e raio R em X, ou seja, $B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$, onde

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|}}{2C_1}. \tag{2.58}$$

Veja que R é positivo (ver desigualdade (2.57)) e satisfaz a igualdade

$$\|x_0\| + C_1R^2 = R. \tag{2.59}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|x_0\| + C_1\Big(\frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|}}{2C_1}\Big)^2 &= \|x_0\| + \frac{2C_1 - 2C_1\sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} - 4C_1^2\|x_0\|}{4C_1^2} \\
&= \frac{2C_1 - 2C_1\sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|}}{4C_1^2} \\
&= R.
\end{aligned}$$

E, além disso, por (2.58), podemos escrever

$$\begin{aligned}
1 - 4C_1\|x_0\| \leq \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} \leq 4C_1\|x_0\| \\
&\Leftrightarrow R \leq 2\|x_0\|.
\end{aligned}$$

Observe que a primeira desigualdade acima é verdadeira por (2.57). Por conseguinte, $R \leq 2\|x_0\|$.

Agora, defina $F : B_R \to X$ por

$$F(x) = x_0 + B(x,x), \quad \forall x \in B_R.$$

Note que, para todo $x, x' \in B_R$, concluímos, do fato que B é bilinear, que

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(x')\| &= \|B(x,x) - B(x',x')\| \\ &= \|B(x,x) - B(x',x) + B(x',x) + B(x',x')\| \\ &= \|B(x-x',x) + B(x',x-x')\| \\ &\leq \|B(x-x',x)\| + \|B(x',x-x')\|.\end{aligned}$$

Usando que B é um operador contínuo (ver (2.56)), chegamos a

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(x')\| &= \|B(x,x) - B(x',x')\| \\ &\leq C_1\|x-x'\|\|x\| + C_1\|x'\|\|x-x'\| \\ &= C_1\|x-x'\|(\|x\| + \|x'\|) \\ &\leq 2RC_1\|x-x'\|. \qquad (2.60)\end{aligned}$$

Perceba que, por (2.58) e (2.57), deduzimos

$$2RC_1 = 1 - \sqrt{1 - 4C_1\|x_0\|} < 1.$$

Assim, (2.60) torna-se

$$\|F(x) - F(x')\| \leq C\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in B_R,$$

onde $0 \leq C < 1$. Por outro lado, aplicando (2.56) e (2.59), é verdade que

$$\begin{aligned}\|F(x)\| \leq \|x_0\| + \|B(x,x)\| &\leq \|x_0\| + C_1\|x\|^2 \\ &\leq \|x_0\| + C_1R^2 = R,\end{aligned}$$

para todo $x \in B_R$. Ou seja, $F(B_R) \subseteq B_R$. Isto nos diz que $F : B_R \to B_R$ é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach usual (veja B_R é completa como um subconjunto fechado contido em um espaço de Banach), F possui um único ponto (fixo) $x \in B_R$ tal que $F(x) = x$. Além disso, novamente por (2.56) e (2.59), inferimos que

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x_0\| + \|B(x,x)\| &\leq \|x_0\| + C_1\|x\|^2 \\ &\leq \|x_0\| + C_1R^2 = R \leq 2\|x_0\|.\end{aligned}$$

Isto prova o Lema 2.3. $\square$

O lema (ver [8]) a seguir será importante na prova do Teorema 3.3. Ele traz uma propriedade a respeito das funções contínuas.

Lema 2.4. *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *uma função contínua tal que*

$$f(t) \leq M_0 + \theta_1 f(\theta_2 t), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.61}$$

com $M_0 \geq 0$ *e* $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. *Então, é verdade que*

$$\limsup_{t \to +\infty} f(t) \leq \frac{M_0}{1-\theta_1}. \tag{2.62}$$

Demonstração. Seja $T > 0$ fixo. Como f é contínua e positiva, então existe um $t_0 \in [0,T] \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 \leq f(t_0) = \sup_{0 \leq t \leq T} \{f(t)\}.$$

Por (2.61), temos que

$$f(t_0) \leq M_0 + \theta_1 f(\theta_2 t_0) \leq M_0 + \theta_1 f(t_0),$$

pois $\theta_1 \in (0,1)$. Isto é,

$$f(t_0) \leq \frac{M_0}{1-\theta_1}, \tag{2.63}$$

ou equivalentemente,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{f(t)\} \leq \frac{M_0}{1-\theta_1}. \tag{2.64}$$

Agora, passando ao limite superior quando $T \to \infty$, obtemos

$$\limsup_{t \to \infty} f(t) \leq \frac{M_0}{1-\theta_1}. \tag{2.65}$$

□

O próximo lema nos fornece caracterizações relacionadas ao decaimento da equação do calor, e será importante para a demonstração do Teorema 3.3. Sua prova será omitida por se tratar de equações que não são o foco deste trabalho.

Lema 2.5. *Assuma que* $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *com característica de decaimento* $r^* = r^*(v_0)$ (*ver definições* 1.8 *e* 1.9), *é uma solução da seguinte equação do calor generalizada:*

$$\begin{cases} v_t + \Lambda^{2\alpha} v = 0, \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t \geq 0$. *Então, valem as afirmações abaixo:*

i) *Se* $-\frac{n}{2} < r^* < +\infty$, *então existem duas contantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que*

$$C_1(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{n}{2}+r^*)} \leq \|v(t)\|_{L^2}^2 \leq C_2(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{n}{2}+r^*)}. \tag{2.66}$$

ii) *Se* $r^* = -\frac{n}{2}$, *então existe uma constante* $C = C_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \geq C(1+t)^{-\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{2.67}$$

iii) *Se* $r^* = +\infty$, *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq C(1+t)^{-m}, \quad \forall m > 0. \tag{2.68}$$

Demonstração. Para detalhes da prova, ver [11, 30] e referências inclusas. □

Capítulo 3

Equações MHD Próximo ao Equilíbrio em Espaços de Lei-Lin

Considere o seguinte sistema 3D de equações Magnetohidrodinâmicas (MHD) incompressível generalizado próximo ao equilíbrio:

$$\begin{cases} \partial_t u + \Lambda^{2\alpha} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla P = (b \cdot \nabla) b + \partial_1 b, \\ \partial_t b + \Lambda^{2\alpha} b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u + \partial_1 u, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

para $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$.

Neste capítulo, estudaremos o sistema acima usando os espaços de Lei-Lin $X^s(\mathbb{R}^3)$. Mais precisamente, obteremos soluções $(u,b) \in C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$, onde $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, para estas mesmas. Mostraremos que, diante de um dado inicial suficientemente pequeno no espaço crítico de Lei-Lin $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$, poderemos estabelecer a boa colocação global desta solução. Diante disto, exibiremos a analiticidade desta solução global e, por fim, obteremos uma taxa de decaimento para esta mesma.

3.1 Existência e Analiticidade de Soluções

Nosso primeiro resultado estabelece a existência e unicidade de soluções globais (também citamos [1, 2, 5, 6, 8–11, 16, 19–21, 28, 30, 31, 36–40] e referências inclusas) para as equações MHDE (3.1) nos espaços de Lei-Lin (ver [2, 5, 8, 9, 20, 26, 29, 33] e referências citadas), assumindo que os dados iniciais são suficientemente pequenos.

Permita-nos informar que (u,b) é uma solução branda para as equações MHDE (3.1) se (u,b) satisfaz a equação (3.3) abaixo.

Teorema 3.1. *Assuma que* $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ *e* $(u_0, b_0) \in X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$. *Considere que existe uma constante positiva* $\mathbb{C}_\alpha$ *tal que* $\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}} < \mathbb{C}_\alpha$, *então o sistema MHDE* (3.1) *admite uma única solução global no tempo*

$$(u,b) \in C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$$

tal que

$$\|(u,b)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|(u,b)\|_{L^1(X^1)} \leq 8\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Para provar este teorema vamos utilizar o Lema 2.3. Deste modo, é importante ressaltar que, preparamos os argumentos apresentados abaixo de forma a poder aplicar este mesmo resultado.

Comecemos reescrevendo as igualdades (2.14) e (2.15) como segue:

$$\begin{aligned}(u,b)(t) =&\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi) + \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)\right],\\ &\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi) + (e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)\right]\Big)\\ &+ B((u,b),(u,b))(t),\end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $t \geq 0$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, onde $\lambda_1(\xi)$ e $\lambda_2(\xi)$ são dados no Lema 2.1, e B é o operador definido por

$$B((v,\varphi),(w,\psi))(t) = (B_1((v,\varphi),(w,\psi))(t), B_2((v,\varphi),(w,\psi))(t)), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned}&B_1((v,\varphi),(w,\psi))(t) =\\ &\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^t [(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(v\cdot\nabla)w + (\varphi\cdot\nabla)\psi))\\ &+ \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(-(v\cdot\nabla)\psi + (\varphi\cdot\nabla)w)]d\tau\Big\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

e também

$$B_2((v,\varphi),(w,\psi))(t) =$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^t [\text{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(v\cdot\nabla)w + (\varphi\cdot\nabla)\psi))$$
$$+ (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(-(v\cdot\nabla)\psi + (\varphi\cdot\nabla)w)]d\tau\Big\}, \tag{3.6}$$

para todo $t \geq 0$. Aqui $\mathcal{P}$ é o conhecido operador de Helmholtz (ver [22] e referências inclusas para mais detalhes sobre esta aplicação).

Estamos interessados em provar que B é um operador bilinear contínuo sobre um espaço de Banach específico (definido a seguir) com a meta de estarmos aptos a aplicar o Lema 2.3 e obter, como resultado, uma única solução global no tempo para o problema MHDE (3.1).

Primeiramente, vamos checar que B é um operador bilinear sobre $(X\times X)^2$ (onde $X = C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ está munido da norma da soma entre as normas destes espaços que estabelecem a interseção). Com efeito, considere $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi) \in X\times X$ e γ uma constante real. Por simplicidade, vamos denotar

$$A(\tau) = e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} \quad \text{e} \quad D(\tau) = \text{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}),$$

para todo $t \geq 0$ e $\tau \in [0,t]$, com o objetivo de obter

$$\begin{aligned}
&B_1((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))(t) = B_1((r,s),(\gamma v + w, \gamma\varphi + \psi))(t)\\
=&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big[\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(-(r\cdot\nabla)(\gamma v + w) + (s\cdot\nabla)(\gamma\varphi+\psi))\\
&+ D(\tau)\mathcal{F}(-(r\cdot\nabla)(\gamma\varphi+\psi) + (s\cdot\nabla)(\gamma v + w))d\tau\Big]\\
=&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big[\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-\gamma(r\cdot\nabla)v - (r\cdot\nabla)w + \gamma(s\cdot\nabla)\varphi + (s\cdot\nabla)\psi))\\
&+ D(\tau)(-\gamma(r\cdot\nabla)\varphi - (r\cdot\nabla)\psi + \gamma(s\cdot\nabla)v + (s\cdot\nabla)w)d\tau\Big],
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, onde usamos a definição 3.5. Consequentemente, através das propriedades do operador de Helmholtz $\mathcal{P}$ (ver [22] e referências inclusas), encontramos o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
&B_1((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))(t)\\
&=\gamma\Big\{\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big[\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(r\cdot\nabla)v+(s\cdot\nabla)\varphi))+D(\tau)\mathcal{F}(-(r\cdot\nabla)\varphi+(s\cdot\nabla)v)d\tau\Big]\Big\}\\
&+\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big[\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(r\cdot\nabla)w+(s\cdot\nabla)\psi))+D(\tau)\mathcal{F}(-(r\cdot\nabla)\psi+(s\cdot\nabla)w)d\tau\Big]\\
&=\gamma B_1((r,s),(v,\varphi))(t)+B_1((r,s),(w,\psi))(t),
\end{aligned}
$$

para todo $t\geq 0$. Isto nos diz que

$$B_1((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))=\gamma B_1((r,s),(v,\varphi))+B_1((r,s),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. Analogamente, verifica-se que

$$B_2((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))=\gamma B_2((r,s),(v,\varphi))+B_2((r,s),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. Com isso, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&B((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))=B((r,s),(\gamma v+w,\gamma\varphi+\psi))\\
&=(B_1((r,s),(\gamma v+w,\gamma\varphi+\psi)),B_2((r,s),(\gamma v+w,\gamma\varphi+\psi)))\\
&=\gamma(B_1((r,s),(v,\varphi)),B_2((r,s),(v,\varphi)))+(B_1((r,s),(w,\psi)),B_2((r,s),(w,\psi)))\\
&=\gamma B((r,s),(v,\varphi))(t)+B((r,s),(w,\psi)),
\end{aligned}
$$

para todo $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. Por isso, infere-se que

$$B((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))=\gamma B((r,s),(v,\varphi))+B((r,s),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. De forma similar, podemos escrever a igualdade abaixo:

$$B((r,s)+\gamma(v,\varphi),(w,\psi))=B((r,s),(w,\psi))+\gamma B((v,\varphi),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi)$, $(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. Portanto, B é um operador bilinear.

Agora vamos mostrar que B é um operador bilinear contínuo. Para isto, precisamos da existência de uma constante positiva C tal que

$$\|B((v,\varphi),(w,\psi))\|_{X\times X}\leq C\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X},\quad\forall(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X.$$

Para darmos início, vamos estimar $B_1((v,\varphi),(w,\psi))$ e $B_2((v,\varphi),(w,\psi))$ nas normas dos espaços $C(\mathbb{R}^+;X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ e $L^1(\mathbb{R}^+;X^1(\mathbb{R}^3))$.

Sendo assim, primeiramente, aplicando a transformada de Fourier ao operador B_1, obtemos

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t [|e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}+e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}||\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(v\cdot\nabla)w+(\varphi\cdot\nabla)\psi)(\tau)|\\
&\quad + |e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}-e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}||\mathcal{F}(-(v\cdot\nabla)\psi+(\varphi\cdot\nabla)w)(\tau)|]d\tau. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
|e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}+e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}| &= |e^{(-|\xi|^{2\alpha}-i|\xi_1|)(t-\tau)}+e^{(-|\xi|^{2\alpha}+i|\xi_1|)(t-\tau)}|\\
&= |e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}[e^{-i|\xi_1|(t-\tau)}+e^{i|\xi_1|(t-\tau)}]|\\
&\leq e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}[|e^{-i|\xi_1|(t-\tau)}|+|e^{i|\xi_1|(t-\tau)}|]\\
&= 2e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

onde $t\geq 0$ e $0\leq\tau\leq t$ (ver Lema 2.1). Analogamente, pode-se inferir que

$$|e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}-e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}|\leq 2e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}, \qquad (3.9)$$

onde $t\geq 0$ e $0\leq\tau\leq t$. Por outro lado, lembre que o operador de Helmholtz $\mathcal{P}$ satisfaz a seguinte igualdade:

$$\mathcal{F}[\mathcal{P}(f)](\xi)=\widehat{f}(\xi)-\frac{\widehat{f}(\xi)\cdot\xi}{|\xi|^2}\xi, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^3. \qquad (3.10)$$

(ver [22] e referências inclusas). Sendo assim, aplicando (3.10), obtém-se

$$|\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(v\cdot\nabla)w+(\varphi\cdot\nabla)\psi))(\xi)|\leq|\mathcal{F}((v\cdot\nabla)w)(\xi)|+|\mathcal{F}((\varphi\cdot\nabla)\psi)(\xi)|.$$

Com isso, por (3.7), (3.8) e (3.9), as propriedades da transformada de Fourier e a desigualdade de Cauchy-Schwarz implicam que

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|\\
&\leq \int_0^t e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}(|-i\xi\cdot\widehat{w\otimes v}(\xi)|+|i\xi\cdot\widehat{\psi\otimes\varphi}(\xi)|+|-i\xi\cdot\widehat{\psi\otimes v}(\xi)|\\
&\quad +|i\xi\cdot\widehat{w\otimes\varphi}(\xi)|)d\tau\\
&\leq \int_0^t e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|(|\widehat{w\otimes v}(\xi)|+|\widehat{\psi\otimes\varphi}(\xi)|+|\widehat{\psi\otimes v}(\xi)|+|\widehat{w\otimes\varphi}(\xi)|)d\tau, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Multiplicando ambos os lados de (3.11) por $|\xi|^{1-2\alpha}$, encontramos

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^{1-2\alpha}|\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|^{2-2\alpha}(|\widehat{w\otimes v}(\xi)| + |\widehat{\psi\otimes\varphi}(\xi)| + |\widehat{\psi\otimes v}(\xi)| + |\widehat{w\otimes\varphi}(\xi)|)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Vamos analisar o primeiro termo à direita de (3.12) e, de maneira análoga, apresentaremos os resultados deste estudo para os demais. Comecemos aplicando o Lema 2.2 (desde que $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$) e o Teorema de Fubini para obter

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|^{2-2\alpha}|\widehat{w\otimes v}(\xi)|d\tau \leq \int_0^\infty |\xi|^{2-2\alpha}|\widehat{w\otimes v}(\xi)|d\tau \\
&\leq C\int_0^\infty |\xi|^{2-2\alpha}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta\, d\tau \\
&\leq C_\alpha\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}(|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} + |\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta|)|\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta\, d\tau \\
&\leq C_\alpha(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\right) \\
&\quad + C_\alpha(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|dt\right).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Consequentemente, usando (3.13) em (3.12), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
|\xi|^{1-2\alpha}|\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)| &\leq C_\alpha\Big[(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\right) \\
&+ (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|dt\right) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(t)|\}) \\
&* \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|dt\right) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|dt\right) \\
&+ (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|dt\right) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(t)|\}) \\
&* \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|dt\right) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\right) \\
&+ (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|dt\right)\Big],
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

para todo $t \geq 0$. Por outro lado, integrando sobre $\mathbb{R}^3$ e aplicando a desigualdade de Young (ver Teorema 1.8) ao primeiro termo do lado direito de (3.14), resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\right) d\xi \\
&= \left\| (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(t)|\}) * \left(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \||\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(t)|\}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \left\| \int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|w\|_{L^1(X^1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, passando ao supremo sobre $t \in [0, \infty)$ e calculando a integral sobre $\mathbb{R}^3$ na desigualdade (3.14), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\|B_1((v, \varphi), (w, \psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \\
&\leq C_\alpha(\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|w\|_{L^1(X^1)} + \|\psi\|_{L^1(X^1)}) \\
&\quad + (\|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|v\|_{L^1(X^1)} + \|\varphi\|_{L^1(X^1)}) \\
&= C_\alpha(\|(v, \varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|(w, \psi)\|_{L^1(X^1)} + \|(w, \psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|(v, \varphi))\|_{L^1(X^1)}).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ou seja, é verdade que

$$\|B_1((v, \varphi), (w, \psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \leq C_\alpha \|(v, \varphi)\|_{X\times X} \|(w, \psi)\|_{X\times X}. \tag{3.16}$$

para todo $(v, \varphi), (w, \psi) \in X \times X$.

Agora, para encontrar uma estimativa para $\|B_2((v, \varphi), (w, \psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}$ basta começarmos aplicando a transformada de Fourrier ao operador B_2 (ver (3.6)), as desigualdades elementares (3.22) e (3.16) e, em seguida, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(B_2((v, \varphi), (w, \psi)))(t)| \\
&= \frac{1}{2}\Big| \int_0^t \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(v \cdot \nabla)w + (\varphi \cdot \nabla)\psi)) \\
&\quad + (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(-(v \cdot \nabla)\psi + (\varphi \cdot \nabla)w)d\tau \Big| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} |\xi|(|\widehat{w \otimes v}(\xi)| + |\widehat{\psi \otimes \varphi}(\xi)| + |\widehat{\psi \otimes v}(\xi)| + |\widehat{w \otimes \varphi}(\xi)|)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

para todo $t \geq 0$. Multiplicando ambos os lados por $|\xi|^{1-2\alpha}$, chegamos a

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^{1-2\alpha}|\mathcal{F}(B_2((v,\varphi),(w,\psi)))(t)| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|^{2-2\alpha}(|\widehat{w\otimes v}(\xi)| + |\widehat{\psi\otimes\varphi}(\xi)| + |\widehat{\psi\otimes v}(\xi)| + |\widehat{w\otimes\varphi}(\xi)|)d\tau,
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$. Observe que o lado direito esta desigualdade acima corresponde ao mesmo lado de (3.12). Sendo assim, podemos deduzir, de forma análoga, que

$$
\begin{aligned}
&\|B_2((v,\varphi),(w,\psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \\
&\leq C_\alpha(\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)} + \|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi))\|_{L^1(X^1)}) \\
&\leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X},
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X$. (Para mais detalhes, siga os argumentos apresentados para determinar (3.15) e (3.16)).

Por (3.16) e (3.18), inferimos a seguinte estimativa para o operador B (ver (3.4)) em $C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$:

$$
\|B((v,\varphi),(w,\psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \tag{3.19}
$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X$.

Agora, vamos estimar $\|B_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)}$. Para este fim, multiplique ambos os lados de (3.11) por $|\xi|$ e integre o resultado obtido sobre $[0,\infty)$ para encontrar

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |\xi||\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|dt \leq \int_0^\infty\int_0^t |\xi|^{2\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|^{2-2\alpha}(|\widehat{w\otimes v}(\xi)| \\
+ |\widehat{\psi\otimes\varphi}(\xi)| + |\widehat{\psi\otimes v}(\xi)| + |\widehat{w\otimes\varphi}(\xi)|)d\tau dt.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Vamos analisar o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.20) e generalizar os demais de maneira análoga. Aplique o Lema 2.2 para obter

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^t |\xi|^{2\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}|\xi|^{2-2\alpha}|\widehat{w\otimes v}(\xi)|d\tau dt \\
&\leq C\int_0^\infty\int_0^t |\xi|^{2\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2-2\alpha}|\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt \\
&\leq C_\alpha\int_0^\infty\int_0^t |\xi|^{2\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}\int_{\mathbb{R}^3}|\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha}|\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt \\
&\quad + C_\alpha\int_0^\infty\int_0^t |\xi|^{2\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}}\int_{\mathbb{R}^3}|\eta|^{1-2\alpha}|\xi-\eta||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

O primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.21) pode ser trabalhado como segue:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} |\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)| d\eta d\tau dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} |\eta||\hat{w}(\eta)| d\tau dt d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} |\eta||\hat{w}(\tau)| d\tau dt d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} \int_0^\infty (e^{-|\xi|^{2\alpha t}}) * (|\eta||\hat{w}(t)|) dt d\eta.
\end{aligned}$$

Por isso, usando a desigualdade de Young (ver Teorema 1.8), deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta||\xi-\eta|^{1-2\alpha} |\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)| d\eta d\tau dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} \|e^{-|\xi|^{2\alpha t}}\|_{L^1([0,\infty))} \||\eta||\hat{w}(\eta)|\|_{L^1([0,\infty))} d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} \int_0^\infty |\eta||\hat{w}(\eta)| dt d\eta \\
&= (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)| dt\Big).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo este último resultado em (3.21), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-|\xi|^{2\alpha(t-\tau)}} |\xi|^{2-2\alpha} |\widehat{w \otimes v}(\xi)| d\tau dt \\
&\leq C_\alpha (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{v}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)| dt\Big) \\
&\quad + C_\alpha (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\hat{w}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)| dt\Big).
\end{aligned}$$

Assim sendo, (3.20) implica que

$$\int_0^\infty |\xi||\mathcal{F}(B_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|dt \leq C_\alpha\Big[(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\Big) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|dt\Big)$$
$$+ (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|dt\Big) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|dt\Big) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|dt\Big)$$
$$+ (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|dt\Big) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\Big) + (|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|dt\Big)\Big]. \quad (3.22)$$

Por outro lado, integrando sobre $\mathbb{R}^3$ o primeiro termo (o estudo dos outros termos é análogo) do lado direito de (3.22), segue da desigualdade de Young (ver Teorema 1.5) que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dt\Big)d\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\}d\xi\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|dtd\xi\\ &= \|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|w\|_{L^1(X^1)}.\end{aligned}$$

Portanto, integrando sobre $\mathbb{R}^3$ a desigualdade (3.22), podemos escrever os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}&\|B_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)}\\ &\leq C_\alpha[(\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|w\|_{L^1(X^1)}+\|\psi\|_{L^1(X^1)})\\ &\quad+(\|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|v\|_{L^1(X^1)}+\|\varphi\|_{L^1(X^1)})]\\ &= C_\alpha(\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)}+\|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}), \quad (3.23)\end{aligned}$$

Com isso, estabelecemos a seguinte desigualdade:

$$\|B_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)} \leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \quad (3.24)$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$.

De forma similar, podemos estimar a norma $\|B_2((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)}$. De fato, multiplique ambos os lados de (3.17) por $|\xi|$, integre o resultado obtido sobre $[0,\infty)$, integre sobre $\mathbb{R}^3$ e siga os argumentos estabelecidos para determinar (3.24) para encontrar a desigualdade abaixo:

$$\begin{aligned}\|B_2((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)} &\le C_\alpha(\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)} \\ &\quad + \|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}) \\ &\le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$.

Por (3.24) e (3.25), obtemos a estimativa desejada para o operador B em $L^1(X^1)$. Mais precisamente, temos que

$$\|B((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)} \le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \tag{3.26}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$ (ver (3.4)).

Portanto, a partir de (3.19) e (3.26), chegamos a conclusão que

$$\|B((v,\varphi),(w,\psi))\|_{X\times X} \le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \tag{3.27}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$. Deste modo, B é um operador bilinear contínuo, como queríamos demonstrar.

Ainda objetivando garantir as hipóteses apresentadas no Lema 2.3, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned}&4C_\alpha\Big\|\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)),\\ &\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big)\Big\|_{X\times X}<1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde C_α é dado em (3.27) (ver (3.3)). Para começar, vamos estimar cada entrada do vetor que está descrito na desigualdade acima nas normas dos espaços $C(\mathbb{R}^+;X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ e $L^1(\mathbb{R}^+;X^1(\mathbb{R}^3))$.

- Estimativa da norma $\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})$ para a primeira entrada do vetor dado em (3.28).

Aplicando a transformada de Fourier, obtemos, de (3.8) e (3.9), a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\right|\\
&\leq \frac{1}{2}[|e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t}||\hat{u}_0(\xi)|+|e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t}||\hat{b}_0(\xi)|]\\
&\leq e^{-|\xi|^{2\alpha}t}(|\hat{u}_0(\xi)|+|\hat{b}_0(\xi)|)\\
&\leq |\hat{u}_0(\xi)|+|\hat{b}_0(\xi)|,
\end{aligned}\tag{3.29}$$

para todo $t\geq 0$. Como o lado direito da última desigualdade acima não depende de t, então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sup_{0\leq t<\infty}\{|((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))|\}\\
&\leq |\hat{u}_0(\xi)|+|\hat{b}_0(\xi)|.
\end{aligned}$$

Desta forma, multiplicando por $|\xi|^{1-2\alpha}$ a desigualdade acima e integrando sobre $\mathbb{R}^3$ o resultado obtido, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)|\}d\xi\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{u}_0(\xi)|d\xi+\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{b}_0(\xi)|d\xi.
\end{aligned}$$

Isto nos diz que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)|\}d\xi\\
&\leq \|u_0\|_{X^{1-2\alpha}}+\|b_0\|_{X^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Com isso, é verdade que

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\right\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\\
&\leq \|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

- Estimativa $\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})$ para a segunda entrada do vetor dado em (3.28).

Realizando um processo similar ao apresentado no caso anterior, concluiremos que

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\\&\leq\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Assim, por (3.30) e (3.31), deduzimos que

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)),\\&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big)\Big\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\\&\leq 2\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

- Estimativa $L^1(X^1)$ para a primeira entrada do vetor dado em (3.28).

Multiplique por $|\xi|$ a desigualdade (3.29), integre o resultado obtido sobre $\mathbb{R}^3$, integre sobre $[0,\infty)$ e, posteriormente, use o Teorema de Fubini para obter

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\xi|}{2}|(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)|d\xi dt\\&\leq\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}e^{-|\xi|^{2\alpha}t}|\xi||\hat{u}_0(\xi)|d\xi dt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}e^{-|\xi|^{2\alpha}t}|\xi||\hat{b}_0(\xi)|d\xi dt\\&=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{u}_0(\xi)|\int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha}t}dtd\xi+\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{b}_0(\xi)|\int_0^\infty e^{-|\xi|^{2\alpha}t}dtd\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{u}_0(\xi)|d\xi+\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{b}_0(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big\|_{L^1(X^1)}\\&\leq\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

- Estimativa $L^1(X^1)$ para a segunda entrada do vetor dado em (3.28).

Realizando na segunda entrada um processo análogo ao que foi apresentado no caso anterior, teremos que

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big\|_{L^1(X^1)}\\&\leq\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Portanto, por (3.33) e (3.34), inferimos que

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)),\\&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big)\Big\|_{L^1(X^1)}\\&\leq 2\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Desta forma, aplicando (3.32) e (3.35), podemos escrever

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)),\\&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big)\Big\|_{X\times X}\\&\leq 4\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.36) por $4C_\alpha$ (onde C_α é dado em (3.27)), estabelecemos que (3.28) é válida se

$$\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}<\frac{1}{16C_\alpha}.$$

Portanto, pelo Lema 2.3, concluímos que a equação (3.3) admite uma única solução $(u,b)\in C(\mathbb{R}^+;X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))\cap L^1(\mathbb{R}^+;X^1(\mathbb{R}^3))$. Além disso, (u,b) satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned}\|(u,b)\|_{X\times X}\leq 2\Big\|\Big(&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}((e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)),\\&\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi)+(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi))\Big)\Big\|_{X\times X},\end{aligned}$$

isto é,

$$\|(u,b)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|(u,b)\|_{L^1(X^1)}\leq 8\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.$$

(Ver (3.36)). □

Agora estamos prontos para trabalharmos com a analiticidade da solução branda encontrada no Teorema 3.1 para as equações MHDE (3.1). Esta propriedade nos permitirá estabelecer o decaimento desta mesma solução nos espaços de Lei-Lin que estamos estudando (ver Teorema 3.3 para mais detalhes).

Teorema 3.2. *A solução* $(u,b) \in C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ *para as equações MHDE* (3.1)*, obtida no Teorema* 3.1*, é analítica no sentido que*

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\}, \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\}, \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{L^1(X^1)}\\ &\leq 12\sqrt{e}\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Demonstração. Afim de garantirmos a analiticidade da solução estabelecida no Teorema 3.1 do sistema MHDE (3.1), vamos definir uma mudança de coordenadas no sistema MHDE (3.1) com o intuito de obtermos condições necessárias para aplicarmos o Lema 2.3. Assim, comecemos multiplicando (2.14) e (2.15) por $e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}$ para obter

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}(\xi,t) =& \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}[(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{u}_0(\xi) + \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)]\\ &+ \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t [(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\hat{F}\\ &+ \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\hat{E}](\xi,\tau)d\tau\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}(\xi,t) =& \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}[\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{u}_0(\xi) + (e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{b}_0(\xi)]\\ &+ \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t [\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\hat{F}\\ &+ (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\hat{E}](\xi,\tau)d\tau,\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, onde $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$, E e F são dados no Lema 2.1. Definimos

$$(U,B)(\xi,t) := (\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\}, \mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, t \geq 0. \tag{3.38}$$

Deste modo, como $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$ e $(u(\cdot,0), b(\cdot,0)) = (u_0,b_0)(\cdot)$, podemos escrever

$$\begin{cases}(\hat{U}, \hat{B}) = (e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}, e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b});\\ \nabla \cdot U = \nabla \cdot B = 0;\\ (U_0, B_0)(\cdot) = (U(\cdot,0), B(\cdot,0)) = (u_0,b_0)(\cdot).\end{cases}$$

Observe que $\hat{U} = e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}$ e $\hat{B} = e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}$ ou, equivalentemente, $u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})$ e $b = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B})$ (ver (3.38)). Consequentemente, através do Lema 2.1, chegamos a

$$\begin{aligned}\hat{U}(\xi,t) =& \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}[(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0 + \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0] \\ &+ \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\Big[\int_0^t \{(e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})\cdot\nabla) \\ &\quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U}) + (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B}))) \\ &+ \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}[(-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B}) \\ &+ (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})]\}d\tau\Big],\end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $\mathcal{P}$ é o projetor de Helmholtz (ver [22] para mais detalhes), e também

$$\begin{aligned}\hat{B}(\xi,t) =& \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}[\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0 + (e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0] \\ &+ \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\Big[\int_0^t \{\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})\cdot\nabla) \\ &\quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U}) + (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B}))) \\ &+ (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)})\mathcal{F}[(-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B}) \\ &+ (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{B})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{U})]\}d\tau\Big],\end{aligned} \tag{3.40}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$. Agora, aplicando a transformada de Fourier inversa a (3.39) e (3.40), inferimos que

$$\begin{aligned}(U,B)(\xi,t) = (&\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0 + \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big), \\ &\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0 + \frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t} + e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)) \\ &+ Q((U,B),(U,B))(\xi,t),\end{aligned} \tag{3.41}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$, onde Q é o operador dado por

$$Q((v,\varphi),(w,\psi)) = (Q_1((v,\varphi),(w,\psi)), Q_2((v,\varphi),(w,\psi))), \quad \forall v,\varphi,w,\psi \in X, \tag{3.42}$$

onde $X = C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ (como na prova do Teorema 3.1) tal que

$$\begin{aligned}
&Q_1((v,\varphi),(w,\psi))(\xi,t) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\\
&\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w}) + (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))d\tau\Big\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t D(\tau)\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi})\\
&+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w}))d\tau\Big\},
\end{aligned}\tag{3.43}$$

e também que

$$\begin{aligned}
&Q_2((v,\varphi),(w,\psi))(\xi,t) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t D(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\\
&\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w}) + (\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))d\tau\Big\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi})\\
&+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w}))d\tau\Big\},
\end{aligned}\tag{3.44}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$, sendo

$$A(\tau) = (e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)} + e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)}) \quad \text{e} \quad D(\tau) = \operatorname{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)(t-\tau)} - e^{\lambda_1(\xi)(t-\tau)}).$$

Nosso intuito aqui é mostrar que o operador Q exposto acima é bilinear e contínuo sobre $(X\times X)^2$.

Vamos começar mostrando a bilinearidade de Q sobre $(X\times X)^2$. De fato, considere $(r,s),(v,\varphi),(w,\psi) \in X\times X$ e γ uma constante real. Assim,

$$\begin{aligned}
&Q_1(\gamma(r,s)+(v,\varphi),(w,\psi)) = Q_1((\gamma r+v,\gamma s+\varphi),(w,\psi))\\
&=\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}(\widehat{\gamma r+v}))\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w})\\
&\quad+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}(\widehat{\gamma s+\varphi}))\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))d\tau\Big\}\\
&\quad+\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t D(\tau)\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}(\widehat{\gamma r+v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi})\\
&\quad+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\widehat{\gamma s+\varphi}))\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w}))d\tau\Big\}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, através da linearidade da transformada de Fourier e das propriedades do operador de Helmholtz $\mathcal{P}$ (ver [22] para mais informações) encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&Q_1(\gamma(r,s)+(v,\varphi),(w,\psi))\\
=&\gamma\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{r})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w})\\
&+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{s})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))d\tau\Big\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t A(\tau)\mathcal{F}(\mathcal{P}(-(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w})\\
&+(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))d\tau\Big\}\\
&+\gamma\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t D(\tau)\Big[\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{r})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))\\
&+\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{s})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w})))\Big]d\tau\Big\}\\
&+\mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\int_0^t D(\tau)\Big[\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))\\
&+\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{w})))\Big]d\tau\Big\}\\
=&\gamma Q_1((r,s),(w,\psi))+Q_1((v,\varphi),(w,\psi)),
\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que

$$Q_1(\gamma(r,s)+(v,\varphi),(w,\psi))=\gamma Q_1((r,s),(w,\psi))+Q_1((v,\varphi),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. Realizando cálculos semelhantes, chegamos a

$$Q_2(\gamma(r,s)+(v,\varphi),(w,\psi))=\gamma Q_2((r,s),(w,\psi))+Q_2((v,\varphi),(w,\psi)).$$

para todo $(r,s),(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. E, desta maneira,

$$Q(\gamma(r,s)+(v,\varphi),(w,\psi))=\gamma Q((r,s),(w,\psi))+Q((v,\varphi),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$ e $\gamma\in\mathbb{R}$. De forma análoga ao feito acima, obtemos a igualdade a seguir:

$$Q((r,s),\gamma(v,\varphi)+(w,\psi))=\gamma Q((r,s),(v,\varphi))+Q((r,s),(w,\psi)),$$

para todo $(r,s),(v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Portanto, como queríamos, Q é um operador bilinear.

Agora vamos mostrar que exite uma constante positiva C_α tal que

$$\|Q((v,\varphi),(w,\psi))\|_{X\times X} \leq C_\alpha \|(v,\varphi)\|_{X\times X} |(w,\psi)\|_{X\times X}, \quad \forall (v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X,$$

isto é, vamos provar que o operador bilinear Q é contínuo.

Para iniciarmos, vamos estimar $Q_1((v,\varphi),(w,\psi))$ e $Q_2((v,\varphi),(w,\psi))$ nas normas dos espaços $C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ e $L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$. Para tal, aplicando a transforma de Fourier ao operador Q_1 (ver (3.43)), usando a propriedade (3.10) do operador de Helmholtz $\mathcal{P}$ e, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)| \\
&\leq \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v}) \cdot \nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))| d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi}) \cdot \nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))| d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v}) \cdot \nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))| d\tau \\
&\quad + \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi}) \cdot \nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))| d\tau. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Vamos analisar o primeiro termo do lado direito de (3.45) e, de maneira análoga, firmaremos os resultados obtidos deste estudo para os demais. Pelas propriedades da transformada de Fourier e usando o fato que

$$|\xi|^\alpha \leq [|\xi - \eta| + |\eta|]^\alpha \leq |\xi - \eta|^\alpha + |\eta|^\alpha, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3,$$

haja vista que $0 \leq \alpha \leq 1$, constatamos, pelas propriedades da transformada (ver

Teorema 1.7), que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}|\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau \\
&\leq \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}|\xi||\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w})\otimes\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v}))|d\tau \\
&\leq C\int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}|\xi|\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\sqrt{\tau}(|\xi-\eta|^\alpha+|\eta|^\alpha)}|\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau \\
&\leq C\int_0^t e^{(\sqrt{t}-\sqrt{\tau})|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, é verdade que

$$
(\sqrt{t-\tau}|\xi|^\alpha-1)^2\geq 0,
$$

sempre que $0\leq\tau\leq t$, o que significa dizer que

$$
\sqrt{t-\tau}|\xi|^\alpha-\frac{1}{2}(\sqrt{t-\tau}|\xi|^\alpha)^2\leq\frac{1}{2}, \qquad (3.47)
$$

sempre que $0\leq\tau\leq t$. Assim, por (3.47) podemos inferir que

$$
\begin{aligned}
e^{(\sqrt{t}-\sqrt{\tau})|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} &= e^{(\sqrt{t}-\sqrt{\tau})|\xi|^\alpha}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \\
&\leq e^{\sqrt{t-\tau}|\xi|^\alpha-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \\
&\leq e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}, \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

sempre que $0\leq\tau\leq t$. Deste modo, de (3.46) e (3.48), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}|\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\cdot\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau \\
&\leq C\int_0^t e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau \qquad (3.49) \\
&\leq C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

Agora multiplicando a integral no lado direito de (3.50) por $|\xi|^{1-2\alpha}$, e usando o

Lema 2.2, desde que $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2-2\alpha} |\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)| d\eta d\tau \\
&\le C_\alpha \int_0^\infty [|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{v}(\xi)|] * [|\xi||\hat{w}(\xi)|] d\tau + C_\alpha \int_0^\infty [|\xi||\hat{v}(\xi)|] * [|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{w}(\xi)|] d\tau \\
&\le C_\alpha (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\hat{v}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)| d\tau \Big) \\
&\quad + C_\alpha (|\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\hat{w}(\xi)|\}) * \Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)| d\tau \Big). \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Integrando o lado direito de (3.51) sobre $\mathbb{R}^3$ e usando a desigualdade de Young (ver Teorema 1.5), encontramos

$$
\begin{aligned}
&C_\alpha \| |\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\hat{v}(\xi)|\} \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \Big\| \int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)| d\tau \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&+ C_\alpha \| |\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\hat{w}(\xi)|\} \|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \Big\| \int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)| d\tau \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= C_\alpha [\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|w\|_{L^1(X^1)} + \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|v\|_{L^1(X^1)}]. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.45), (3.50) e (3.52), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))| d\tau d\xi \\
&\le C_\alpha [\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|w\|_{L^1(X^1)} + \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|v\|_{L^1(X^1)}]. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Portanto, aplicando toda a análise feita ao primeiro termo de (3.45) aos demais, podemos inferir a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))|\} d\xi \\
&\le C_\alpha [\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|w\|_{L^1(X^1)} + \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|v\|_{L^1(X^1)} + \|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|\psi\|_{L^1(X^1)} \\
&\quad + \|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|\varphi\|_{L^1(X^1)} + \|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|\psi\|_{L^1(X^1)} + \|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|v\|_{L^1(X^1)} \\
&\quad + \|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|w\|_{L^1(X^1)} + \|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \|\varphi\|_{L^1(X^1)}]. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

(Observe que o lado direito da desigualdade (3.50) não depende de t). Deste modo, deduzimos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty} \{|\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))|\} d\xi \\ &\le C_\alpha[\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}][\|w\|_{L^1(X^1)} + \|\psi\|_{L^1(X^1)}] \\ &\quad + C_\alpha[\|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} + \|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}][\|v\|_{L^1(X^1)} + \|\varphi\|_{L^1(X^1)}].\end{aligned}$$

Logo, é verdade que

$$\begin{aligned}&\|Q_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \\ &\le C_\alpha[\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)} + \|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}] \\ &\le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \qquad (3.55)\end{aligned}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X$.

Para encontrar uma estimativa para $Q_2((v,\varphi),(w,\psi))$ em $C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$, basta aplicarmos todos os passos realizados acima para $Q_1((v,\varphi),(w,\psi))$, isto é, aplicar a transformada de Fourier a $Q_2((v,\varphi),(w,\psi))$ (ver (3.44) para mais detalhes), usar a desigualdade de Cauchy-Schwartz, (3.8), (3.9) e (3.10). Em seguida, encontramos uma desigualdade cujo lado direito corresponde exatamente ao analisado em (3.45). Desta forma, por (3.47) e (3.48), multiplicando a desigualdade obtida por $|\xi|^{1-2\alpha}$, usando o Lema 2.2 e, por último, integrando sobre $\mathbb{R}^3$ a desigualdade encontrada, obtemos

$$\begin{aligned}&\|Q_2((v,\varphi),(w,\psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \\ &\le C_\alpha[\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)} + \|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi))\|_{L^1(X^1)}] \\ &\le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}. \qquad (3.56)\end{aligned}$$

Portanto, por (3.55) e (3.56), uma estimativa para o operador bilinear Q (ver (3.42)) em $C(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ é dada por

$$\|Q((v,\varphi),(w,\psi))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \le C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \qquad (3.57)$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi) \in X \times X$.

Agora, vamos determinar uma estimativa para $\|Q_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)}$. Para isso, multiplicamos ambos os lados da desigualdade (3.45) por $|\xi|$ e integramos o resultado obtido sobre $[0,\infty)$ para encontrarmos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |\xi||\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|dt \\
&\le \int_0^\infty |\xi| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau dt \\
&\quad + \int_0^\infty |\xi| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))|d\tau dt \\
&\quad + \int_0^\infty |\xi| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\psi}))|d\tau dt \\
&\quad + \int_0^\infty |\xi| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{\varphi})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau dt.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Vamos explorar o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.58) e estender o estudo obtido para os demais termos. De (3.49), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |\xi| \int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - |\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} |\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau dt \\
&\qquad \le C \int_0^\infty \int_0^t e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Observe que podemos escrever $|\xi|^2$ como sendo $|\xi|^{2\alpha}|\xi|^{2-2\alpha}$. Deste modo, usando o Lema 2.2, o lado direito de (3.59) pode ser estimado como abaixo.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2-2\alpha} |\hat{v}(\xi-\eta)||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt \\
&\le C_\alpha \int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty}\{|\hat{v}(\xi-\eta)|\}|\eta||\hat{w}(\eta)|d\eta d\tau dt \\
&\quad + C_\alpha \int_0^\infty \int_0^t |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty}\{|\hat{w}(\eta)|\}|\xi-\eta||\hat{v}(\xi-\eta)|d\eta d\tau dt \\
&\le C_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty}\{|\hat{v}(\xi-\eta)|\} \int_0^\infty [e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}] *_t [|\eta||\hat{w}(\eta)|] dt d\eta \\
&\quad + C_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\le t<\infty}\{|\hat{w}(\eta)|\} \int_0^\infty [e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}] *_t [|\xi-\eta||\hat{v}(\xi-\eta)|] dt d\eta.
\end{aligned}$$

Consequentemente, aplicando a desigualdade de Young (ver Teorema 1.5) ao lado direito da desigualdade acima, chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi-\eta)|\}\|[e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}]*_t[|\eta||\hat{w}(\eta)|]\|_{L^1([0,\infty))}d\eta$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq \tau\leq t}\{|\hat{w}(\eta)|\}\|[e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}]*_t[|\xi-\eta||\hat{v}(\xi-\eta)|]\|_{L^1([0,\infty))}d\eta$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\xi-\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi-\eta)|\}\frac{2}{|\xi|^{2\alpha}}\||\eta||\hat{w}(\eta)|\|_{L^1([0,\infty))}d\eta$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\eta|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\eta)|\}\frac{2}{|\xi|^{2\alpha}}\||\xi-\eta||\hat{v}(\xi-\eta)|\|_{L^1([0,\infty))}d\eta$$
$$=2(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|d\xi\Big)$$
$$+2(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|d\xi\Big).$$

Por isso, (3.59) nos leva a concluir que

$$\int_0^\infty |\xi|\int_0^t e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}e^{-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}|\mathcal{F}((-\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{v})\nabla)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{w}))|d\tau dt$$
$$\leq C_\alpha(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|d\xi\Big)$$
$$+C_\alpha(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|d\xi\Big). \tag{3.60}$$

Utilizando um processo similar para os demais termos do lado direito de (3.58), o resultado encontrado em (3.60) implica que

$$\int_0^\infty |\xi||\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))|d\xi \leq C_\alpha\Big[(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|d\xi\Big)+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|d\xi\Big)$$
$$+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|d\xi\Big)+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|d\xi\Big)+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{v}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\psi}(\xi)|d\xi\Big)$$
$$+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\psi}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{v}(\xi)|d\xi\Big)+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{\varphi}(\xi)|\})$$
$$*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{w}(\xi)|d\xi\Big)+(|\xi|^{1-2\alpha}\sup_{0\leq t<\infty}\{|\hat{w}(\xi)|\})*\Big(\int_0^\infty |\xi||\hat{\varphi}(\xi)|d\xi\Big)\Big]. \tag{3.61}$$

Em vista disto, para finalmente encontrarmos uma estimativa de Q_1 (ver (3.43)) em $L^1(X^1)$, basta integrar (3.61) sobre $\mathbb{R}^3$, aplicar a desigualdade de Young (ver Teorema 1.5) novamente e, assim, obter

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty |\xi||\mathcal{F}(Q_1((v,\varphi),(w,\psi)))(t)|dtd\xi \\
&\leq C_\alpha[(\|v\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|\varphi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|w\|_{L^1(X^1)}+\|\psi\|_{L^1(X^1)}) \\
&\quad+(\|w\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|\psi\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})})(\|v\|_{L^1(X^1)}+\|\varphi\|_{L^1(X^1)})] \\
&= C_\alpha[\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)}+\|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\|Q_1((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)} \\
&\leq C_\alpha[\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)}+\|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}] \\
&\leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$.

Uma estimativa para o operador Q_2 (ver (3.44)) sobre o espaço $L^1(X^1)$ obtém-se de forma análoga ao que executamos para uma estimativa de Q_1 (ver (3.43)) sobre o mesmo espaço. Por conta disto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\|Q_2((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)} \\
&\leq C_\alpha[\|(v,\varphi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(w,\psi)\|_{L^1(X^1)}+\|(w,\psi)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\|(v,\varphi)\|_{L^1(X^1)}] \\
&\leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$.

Portanto, por (3.62) e (3.63) uma estimativa para o operador $Q((v,\varphi),(w,\psi))$ na norma do espaço $L^1(X^1)$ é dada por

$$\|Q((v,\varphi),(w,\psi))\|_{L^1(X^1)}\leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X} \tag{3.64}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$.

Averiguamos deste modo que a partir de (3.57) e (3.64) temos uma estimativa para Q sobre o espaço $[X\times X]^2$, a saber

$$\|Q((v,\varphi),(w,\psi))\|_{X\times X}\leq C_\alpha\|(v,\varphi)\|_{X\times X}\|(w,\psi)\|_{X\times X}, \tag{3.65}$$

para todo $(v,\varphi),(w,\psi)\in X\times X$. Isto é, Q é um operador bilinear contínuo, como queríamos demonstrar.

Ainda em busca de garantir as hipóteses presentes no Lema 2.3, necessitamos mostrar o seguinte:

$$4C_\alpha\Big\|\Big(\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big),$$
$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)\Big)\Big\|_{X\times X}<1, \tag{3.66}$$

onde C_α é dado em (3.65) (ver equação (3.41)). Para tal, vamos analisar cada entrada deste vetor em (3.66) encontrando estimativas nas normas dos espaços $C(\mathbb{R}^+;\,X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ e $L^1(\mathbb{R}^+;X^1(\mathbb{R}^3))$.

- Estimativa na norma $\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})$ para a primeira entrada. (Para a segunda coordenada, o processo é análogo.)

Aplicando a transformada de Fourier nesta primeira entrada do vetor em (3.66), a partir de (3.8), (3.9) e (3.48), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big|\\
&\leq\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}2e^{-|\xi|^{2\alpha}t}(|\hat{U}_0|+|\hat{B}_0|)\\
&\leq e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha-|\xi|^{2\alpha}t}(|\hat{U}_0|+|\hat{B}_0|)\\
&\leq\sqrt{e}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}(|\hat{U}_0|+|\hat{B}_0|) &(3.67)\\
&\leq\sqrt{e}(|\hat{U}_0|+|\hat{B}_0|), &(3.68)\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$. Observe que o lado direito da desigualdade (3.68) não depende de t, assim sendo podemos escrever a seguinte desigualdade:

$$\sup_{0\leq t<\infty}\Big\{\Big|\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big|\Big\}$$
$$\leq\sqrt{e}(|\hat{U}_0|+|\hat{B}_0|). \tag{3.69}$$

Em vista disto, multiplicando (3.69) por $|\xi|^{1-2\alpha}$ e integrando o resultado obtido sobre $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1-2\alpha} \sup_{0\leq t<\infty} \{|\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0|\}d\xi\\
&\leq \sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{U}_0|d\xi+\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{B}_0|d\xi\\
&=\sqrt{e}\|U_0\|_{X^{1-2\alpha}}+\sqrt{e}\|B_0\|_{X^{1-2\alpha}}\\
&=\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, realizando o mesmo estudo para a segunda entrada, conseguiremos uma estimativa para o vetor analisado em (3.66) no espaço $C(\mathbb{R}^+;X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3))$ como segue

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big),\\
&\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)\Big)\Big\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}\\
&\leq 2\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

- Estimativa no espaço $L^1(X^1)$ para a primeira entrada. (Para a segunda coordenada, o processo é similar.)

Multiplicando a desigualdade (3.67) por $|\xi|$, integrando o resultado encontrado sobre $[0,\infty)$ e, em seguida, integrando sobre $\mathbb{R}^3$, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty |\xi|\Big|\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big|dtd\xi\\
&\leq \sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty|\xi|e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}|\hat{U}_0|dtd\xi+\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty|\xi|e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}|\hat{B}_0|dtd\xi\\
&=\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{U}_0|\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}dtd\xi+\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{B}_0|\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}t}dtd\xi\\
&=2\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{U}_0|d\xi+2\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|\hat{B}_0|d\xi\\
&=2\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Através disso, sabendo que para a segunda entrada do vetor dado em (3.66) a análise é similar a realizada acima, encontramos uma estimativa para este mesmo vetor no espaço $L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ como sendo

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big),\\
&\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)\Big)\Big\|_{L^1(X^1)}\\
&\leq 4\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

Desta forma, por (3.70) e (3.72), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big),\\
&\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{U}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)\Big)\Big\|_{X\times X}\\
&\leq 6\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.73) por $4C_\alpha$ (onde C_α é dado em (3.65)), instituímos que (3.66) é verdadeira sempre que

$$\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}} < \frac{\sqrt{e}}{24eC_\alpha}.$$

Portanto, pelo Lema 2.3, determinamos que a equação (3.41) admite uma única solução $(U,B)\in X\times X$. Além disso, (U,B) satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned}
&\|(U,B)\|_{X\times X}\\
&\leq 2\Big\|\Big(\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0\Big),\\
&\quad\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}\mathrm{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)t})\hat{B}_0+\frac{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}}{2}(e^{\lambda_1(\xi)t}+e^{\lambda_2(\xi)t})\hat{B}_0\Big)\Big)\Big\|_{X\times X}.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.73), obtemos

$$\|(U,B)\|_{X\times X} \leq 12\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}},$$

isto é,

$$\|(U,B)\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|(U,B)\|_{L^1(X^1)} \leq 12\sqrt{e}\|(U_0,B_0)\|_{X^{1-2\alpha}},$$

que nas coordenada originais, dadas em (3.38), escreve-se

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\},\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})}+\|(\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{u}\},\mathcal{F}^{-1}\{e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\hat{b}\})\|_{L^1(X^1)}\\
&\leq 12\sqrt{e}\|(u_0,b_0)\|_{X^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}$$

□

Consideramos importante também citar trabalhos que estudam exsitência de soluções locais para as equações MHDE (2.13) ou sistemas relacionados, como também critérios de explosão para estas mesmas quando o tempo de existência maximal é finito. Por exemplo, ver [1, 3, 4, 7, 12, 13, 19, 22–27, 29] para artigos que pesquisam sobre os espaços de Lei-Lin, Sobolev ou Sobolev-Gevrey (ver também [4, 6, 7, 13, 15, 18, 19, 23–25, 27, 28, 31]).

3.2 Decaimento de Soluções

Agora que obtivemos a boa colocação global e analiticidade para uma solução das equações MHDE (3.1), podemos imediatamente obter uma taxa de decaimento para a norma $\|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}}$. Antes disso, gostaríamos de enunciar e demonstrar um resultado sobre a taxa de decaimento da solução para a norma do espaço usual de Lebesgue L^2.

Lema 3.1. *Seja $(u_0,b_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$, com (u_0,b_0) suficientemente pequeno em $X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$, onde $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ e $r^* := r^*(u_0) = r^*(b_0) \in (-\frac{3}{2},\infty)$. Então, a solução global (u,b) para as equações MHDE (3.1), estando em $L^2(\mathbb{R}^3)$, obtida no Teoremas 3.1 e 3.2, tem a seguinte taxa de decaimento:*

$$\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 \leq C_{u_0,b_0,\alpha,r^*} \ln(t+e)^{-2}, \quad \textit{para } t > 0 \textit{ grande}, \tag{3.74}$$

onde C_{u_0,b_0,α,r^*} é uma constante positiva que depende de α, r^*, $\|(u_0,b_0)\|_{L^2}$, sabendo que $r^*(u_0)$ e $r^*(b_0)$ são as características de decaimento para u_0 e b_0, respectivamente (ver definições 1.8 e 1.9).

Demonstração. Observemos o seguinte. Ao multiplicarmos $(3.1)_1$ e $(3.1)_2$ por $u(x,t)$ e $b(x,t)$, respectivamente, integrarmos sobre o $\mathbb{R}^3$ e somarmos as equações resultantes, obtemos a igualdade abaixo:

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2) = -2\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^{2\alpha} u \cdot u\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^{2\alpha} b \cdot b\, dx\Big), \tag{3.75}$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (b\cdot\nabla)b\cdot u dx &= \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3} b_i\partial_i b\cdot u dx = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3}\partial_i(b_i b)\cdot u dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3} b_i b\cdot\partial_i u dx = -\int_{\mathbb{R}^3} b\cdot\sum_{i=1}^{3} b_i\partial_i u dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} b\cdot(b\cdot\nabla)u dx
\end{aligned}
$$

e realizando cálculos análogos, encontramos

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\cdot u\,dx = \int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)b\cdot b\,dx = \int_{\mathbb{R}^3}\nabla P\cdot u\,dx = 0,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla)b\cdot u\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla)u\cdot b\,dx, \text{ e}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^3}\partial_1 b\cdot u\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\partial_1 u\cdot b\,dx.
$$

Aplicando a identidade de Plancherel (ver Teorema 1.8) em (3.75) e usando a transformada do Laplaciano fracionário, conseguimos

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi = -2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi.
$$

Isto é,

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi + 2\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi = 0. \tag{3.76}
$$

Pela igualdade acima, integrando de 0 a t, chegamos à seguinte estimativa:

$$
\|(\hat{u},\hat{b})(t)\|_{L^2} \leq \|(\widehat{u_0},\widehat{b_0})\|_{L^2}, \quad \forall t\geq 0. \tag{3.77}
$$

Para cada $t>0$, considere agora o conjunto

$$
B(t) = \Big\{\xi\in\mathbb{R}^3 : |\xi|^{2\alpha} \leq \frac{g'(t)}{2g(t)}\Big\},
$$

onde $g(0)=1, g'(t)>0$ e $2g(t)>g'(t)$ para todo $t>0$ (veremos exemplos para esta aplicação g ainda nesta demonstração).

Multiplicando $g(t)$ em ambos os lados de (3.76) e somando em cada lado $g'(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi$, obtemos

$$g(t)\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi+2g(t)\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi+g'(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi$$
$$=g'(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi.$$

Mais precisamente, chegamos a

$$\frac{d}{dt}\Big[g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\Big]+2g(t)\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi=g'(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi. \tag{3.78}$$

Analisando individualmente o segundo termo do lado esquerdo de (3.78) e usando as definições dos conjuntos $B(t)$ e $B(t)^c=\mathbb{R}^3\backslash B(t)$, vemos que

$$\begin{aligned}2g(t)\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi &\geq 2g(t)\int_{B(t)^c}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\\ &\geq 2g(t)\int_{B(t)^c}\frac{g'(t)}{2g(t)}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\\ &= g'(t)\int_{B(t)^c}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi.\end{aligned}$$

O que nos diz que

$$-2g(t)\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\alpha}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\leq -g'(t)\int_{B(t)^c}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi. \tag{3.79}$$

Usando (3.79) em (3.78) ficamos com

$$\frac{d}{dt}\Big[g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\Big]\leq g'(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi-g'(t)\int_{B(t)^c}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi,$$

e, assim, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\Big[g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi\Big]\leq g'(t)\int_{B(t)}(|\hat{u}|^2+|\hat{b}|^2)\,d\xi. \tag{3.80}$$

Agora integrando (3.80) sobre o intervalo $[0,t]$ e aplicando o Teorema 1.8, obtemos

$$\begin{aligned}&g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}(\xi,t)|^2+|\hat{b}(\xi,t)|^2)d\xi\\ &\leq(2\pi)^{-3}\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2+\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}(|\hat{u}(\xi,s)|^2+|\hat{b}(\xi,s)|^2)d\xi ds.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Pelo Lema 2.1 e analogamente ao que encontramos em (3.8), (3.9) e (3.11) chegamos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}|\hat{u}(\xi,s)| \leq & \frac{1}{2}\left| \left(e^{\lambda_1(\xi)s}+e^{\lambda_2(\xi)s}\right)\hat{u}_0(\xi)\right| + \frac{1}{2}|\text{sgn}(\xi_1)(e^{\lambda_2(\xi)s}-e^{\lambda_1(\xi)s})\hat{b}_0(\xi)| \\ & + \frac{1}{2}\left|\int_0^s [\left(e^{\lambda_1(\xi)(s-\tau)}+e^{\lambda_2(\xi)(s-\tau)}\right)\hat{F}(\xi,\tau)d\tau \right. \\ & \left. + \text{sgn}(\xi_1)\left(e^{\lambda_2(\xi)(s-\tau)}-e^{\lambda_1(\xi)(s-\tau)}\right)\hat{E}(\xi,\tau)]d\tau\right| \\ \leq & e^{-|\xi|^{2\alpha}s}(|\widehat{u_0}(\xi)|+|\widehat{b_0}(\xi)|) \\ & + \int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha(s-\tau)}}|\xi|(|\widehat{u\otimes u}(\xi)|+|\widehat{b\otimes b}(\xi)|+|\widehat{b\otimes u}(\xi)|+|\widehat{u\otimes b}(\xi)|)d\tau.\end{aligned} \tag{3.82}$$

Usando o Teorema 1.7, a desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.1) e identidade de Plancherel (ver Teorema 1.8), obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}|\widehat{u\otimes b}(\xi)|^2 &= (2\pi)^{-6}\sum_{i,j=1}^{3}(\widehat{b_j}*\widehat{u_k})^2 \\ &= (2\pi)^{-6}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{b_j}(\xi-\eta)\widehat{u_k}(\eta)d\eta\right)^2 \\ &\leq (2\pi)^{-6}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{b_j}(\xi-\eta)^2d\eta\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{u_k}(\eta)^2d\eta\right) \\ &= (2\pi)^{-12}\|b\|_{L^2}^2\|u\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\widehat{u\otimes b}(\xi)| \leq C(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2). \tag{3.83}$$

Assim, usando (3.83) em (3.82), conseguimos

$$|\hat{u}(\xi,s)| \leq e^{-|\xi|^{2\alpha}s}(|\widehat{u_0}(\xi)|+|\widehat{b_0}(\xi)|)+C\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha(s-\tau)}}|\xi|(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau.$$

Analogamente, encontramos

$$|\hat{b}(\xi,s)| \leq e^{-|\xi|^{2\alpha}s}(|\widehat{u_0}(\xi)|+|\widehat{b_0}(\xi)|)+C\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha(s-\tau)}}|\xi|(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau.$$

Com isso, (3.81) torna-se

$$\begin{aligned}
&g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}(\xi,t)|^2+|\hat{b}(\xi,t)|^2)d\xi\\
&\leq (2\pi)^{-3}\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2\\
&\quad + C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)} e^{-2|\xi|^{2\alpha}s}(|\widehat{u_0}(\xi)|^2+|\widehat{b_0}(\xi)|^2)d\xi ds\\
&\quad + C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds. \qquad (3.84)
\end{aligned}$$

Observe que o Teorema 1.8 implica que

$$\begin{aligned}
\int_{B(s)} e^{-2|\xi|^{2\alpha}s}|\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{B(s)}|e^{-|\xi|^{2\alpha}s}\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi\\
&= \int_{B(s)}|\mathcal{F}(e^{-\Lambda^{2\alpha}s}u_0)|^2 d\xi\\
&\leq (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}|(e^{-\Lambda^{2\alpha}s}u_0)|^2 d\xi\\
&= C\|e^{-\Lambda^{2\alpha}s}u_0\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.5, encontramos

$$\|e^{-\Lambda^{2\alpha}s}u_0\|_{L^2}^2 \leq C(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}, \qquad (3.85)$$

onde $r^*=r^*(u_0)$ é a característica de decaimento de u_0 (ver definições 1.8 e 1.9). Do mesmo modo, chegamos a

$$\|e^{-\Lambda^{2\alpha}s}b_0\|_{L^2}^2 \leq C(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)},$$

onde $r^*=r^*(b_0)$ é a característica de decaimento de b_0 (ver definições 1.8 e 1.9). Deste modo, utilizando (3.85) em (3.84) obtemos

$$\begin{aligned}
&g(t)\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}(\xi,t)|^2+|\hat{b}(\xi,t)|^2 d\xi\\
&\leq (2\pi)^{-3}\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2 + C\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&\quad + C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds. \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Agora vamos analisar individualmente o último termo da desigualdade acima. Usando integração em coordenadas polares e a estimativa dada em (3.77), achamos

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds\\
&=C\int_0^t g'(s)\int_0^\rho\int_{|\xi|=\tilde\rho}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 dSd\tilde\rho ds\\
&\leq C\int_0^t g'(s)\int_0^\rho\tilde\rho^2\int_{|\xi|=\tilde\rho}\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u_0\|_{L^2}^2+\|b_0\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 dSd\tilde\rho ds\\
&=C\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^4\int_0^t g'(s)\int_0^\rho\tilde\rho^2\int_{|\xi|=\tilde\rho}\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}d\tau\Big)^2 dSd\tilde\rho ds\\
&\leq C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)\int_0^\rho\tilde\rho^2\int_{|\xi|=\tilde\rho}s^2 dSd\tilde\rho ds,
\end{aligned}
$$

onde $\rho=[\frac{g'(s)}{2g(s)}]^{\frac{1}{2\alpha}}$ e C_{u_0,b_0} é uma constante positiva que depende de u_0,b_0,. Consequentemente, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds\\
&\leq C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)s^2\int_0^\rho\tilde\rho^2 4\pi\tilde\rho^2 d\tilde\rho ds\\
&=C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)s^2\int_0^\rho\tilde\rho^4 d\tilde\rho ds\\
&=C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)s^2\rho^5 ds.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\rho=[\frac{g'(s)}{2g(s)}]^{\frac{1}{2\alpha}}$, concluímos

$$
\begin{aligned}
&C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds\\
&\leq C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)s^2\Big(\frac{g'(s)}{2g(s)}\Big)^{\frac{5}{2\alpha}}ds.
\end{aligned}\tag{3.87}
$$

Especificamente, defina g como sendo $g(t)=(\ln(e+t))^3$. Claramente, temos que

$$g(0)=(\ln e)^3=1,\quad g'(t)=\frac{3(\ln(e+t))^2}{e+t}>0\quad \text{e}\quad 2g(t)>g'(t).$$

Então, estimando o lado direito de (3.87), inferimos que

$$\begin{aligned}
C_{u_0,b_0}\int_0^t g'(s)s^2\Big(\frac{g'(s)}{2g(s)}\Big)^{\frac{5}{2\alpha}}ds &= C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)s^2(e+s)^{-\frac{5}{2\alpha}}[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds\\
&\leq C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)(1+s)^2(1+s)^{-\frac{5}{2\alpha}}[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds\\
&= C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{5-4\alpha}{2\alpha}}[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds\\
&\leq C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds,
\end{aligned}$$

onde $C_{u_0,b_0,\alpha}$ é uma constante positiva que depende de u_0, b_0, α. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&C\int_0^t g'(s)\int_{B(s)}|\xi|^2\Big(\int_0^s e^{-|\xi|^{2\alpha}(s-\tau)}(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)d\tau\Big)^2 d\xi ds\\
&\leq C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

Combinando (3.88) com (3.86), alcançamos

$$\begin{aligned}
g(t)\int_{\mathbb{R}^3}(|\hat{u}(\xi,t)|^2+|\hat{b}(\xi,t)|^2)d\xi \leq (2\pi)^{-3}\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2 &+ C\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&+ C_{u_0,b_0,\alpha}\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2}^2+\|b(t)\|_{L^2}^2 \leq (2\pi)^{-3}&\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2(\ln(e+t))^{-3}\\
&+C(\ln(e+t))^{-3}\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&+C_{u_0,b_0,\alpha}(\ln(e+t))^{-3}\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds.
\end{aligned}$$

A partir de agora, vamos analisar cada integral do lado direito da desigualdade acima. Comecemos pela seguinte:

$$\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds. \qquad (3.89)$$

Por integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&= g(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}\Big|_0^t - \int_0^t g(s)\Big[-\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)\Big](1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}ds\\
&= g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} - g(0) + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)\int_0^t (\ln(e+s))^3(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}ds\\
&\le g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)\int_0^t (\ln(e+s))^3(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}ds.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $u = \ln(e+s)$, encontramos $du = (e+s)^{-1}ds$ e, além disso, veja que $e^u = e+s$. Logo, $s = e^u - e$ e $ds = e^u du$. Assim, chegamos a

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&\le g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)\int_1^{\ln(e+t)} u^3(1+e^u-e)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}e^u du.
\end{aligned}
$$

Observe o seguinte: se escolhermos um número real C tal que $0 < C < \frac{1}{e}$, então teremos

$$Ce^u \le 1 + e^u - e,$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds\\
&\le g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)\int_1^{\ln(e+t)} u^3(Ce^u)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}e^u du\\
&= g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)C^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}\int_1^{\ln(e+t)} u^3(e^u)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}e^u du\\
&= g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)C^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}\int_1^{\ln(e+t)} u^3 e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)u}du.
\end{aligned}
$$

Realizando integrações por partes sobre a integral $\displaystyle\int_1^{\ln(e+t)} u^3 e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)u}du$ e sobre suas integrais subsequentes, chegaremos a

$$\int_1^{\ln(e+t)} u^3 e^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)u}du \le C_{\alpha,r^*},$$

onde C_{α,r^*} é uma constante que depende de α e da característica de decaimento r^*. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g'(s)(1+s)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)}ds \\
&\leq g(t)(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{3}{2}+r^*\Big)C^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)-1}C_{\alpha,r^*} \\
&= (\ln(1+t))^3(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + C_{\alpha,r^*}. \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Feito nossa análise sobre a integral (3.89), analisaremos agora a seguinte expressão:

$$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds &= \int_0^t \frac{3[\ln(e+s)]^2}{e+s}[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds \\
&= 3\int_0^t [\ln(e+s)]^{2-\frac{5}{2\alpha}}\frac{ds}{e+s}.
\end{aligned}$$

Realizando a mudança de variável $u = \ln(e+s)$, obtemos

$$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds = 3\int_1^{\ln(e+t)} u^{2-\frac{5}{2\alpha}}du. \qquad (3.91)$$

Em (3.91) vamos analisar três casos:

- Caso $\alpha = \frac{5}{6}$, temos

  $$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds = 3\int_1^{\ln(e+t)} u^{-1}du = 3\ln|u|\Big|_1^{\ln(e+t)} = 3\ln(\ln(e+t)).$$

  Por conseguinte, pela Regra de L'Hospital, inferimos

  $$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds \leq 3\ln(e+t), \qquad \text{para } t>0 \text{ grande}. \qquad (3.92)$$

- Caso $\alpha > \frac{5}{6}$, temos

  $$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds = 3\int_1^{\ln(e+t)} u^{2-\frac{5}{2\alpha}}du = 3\frac{u^{3-\frac{5}{2\alpha}}}{3-\frac{5}{2\alpha}}\Big|_1^{\ln(e+t)}.$$

  Ou seja,

  $$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}}ds \leq \frac{3}{3-\frac{5}{2\alpha}}\ln(e+t)^{3-\frac{5}{2\alpha}}, \qquad \text{para } t>0 \text{ grande}. \quad (3.93)$$

- Caso $\alpha < \frac{5}{6}$, temos

$$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}} ds = 3\int_1^{\ln(e+t)} u^{2-\frac{5}{2\alpha}} du = 3\frac{u^{3-\frac{5}{2\alpha}}}{3-\frac{5}{2\alpha}}\Big|_1^{\ln(e+t)}.$$

Ou seja,

$$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}} ds \leq \frac{3}{\frac{5}{2\alpha}-3}, \qquad \text{para } t>0 \,\text{grande.} \tag{3.94}$$

Portanto, por (3.92), (3.93) e (3.94), chegamos a

$$\int_0^t g'(s)[\ln(e+s)]^{-\frac{5}{2\alpha}} ds \leq 3\ln(e+t) + C_\alpha \ln(e+t)^{3-\frac{5}{2\alpha}} + C_\alpha, \qquad \text{para } t>0 \,\text{grande,} \tag{3.95}$$

onde C_α é uma constante positiva que depende de α.

Assim, segue de (3.90) e (3.95) que

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2 \leq & (2\pi)^{-3}\|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2 \ln(e+t)^{-3} + C(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} \\ & + C_{\alpha,r^*}\ln(e+t)^{-3} + C_\alpha \ln(e+t)^{-2} + C_\alpha \ln(e+t)^{-\frac{5}{2\alpha}} \\ & + C_\alpha \ln(e+t)^{-3},\end{aligned}$$

para $t>0$ suficientemente grande. Ou seja,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2 \leq & C_{u_0,b_0,\alpha,r^*}\ln(e+t)^{-3} + C(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} + C_\alpha \ln(e+t)^{-2} \\ & + C_\alpha \ln(e+t)^{-\frac{5}{2\alpha}},\end{aligned} \tag{3.96}$$

para $t>0$ suficientemente grande, onde C_{u_0,b_0,α,r^*} é uma constante positiva que depende de u_0, b_0, α, r^*. Através de alguns cálculos elementares e Regra de L'Hospital, encontramos

$$(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{3}{2}+r^*)} \leq \ln(e+t)^{-2},$$

$$\ln(e+t)^{-3} \leq \ln(e+t)^{-2} \text{ e } \ln(e+t)^{-\frac{5}{2\alpha}} \leq \ln(e+t)^{-2},$$

para $t>0$ suficientemente grande. Sendo assim, (3.96) se resume a

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2 \leq C_{u_0,b_0,\alpha,r^*}\ln(e+t)^{-2}, \qquad \text{para } t>0 \text{ grande.}$$

□

É importante ressaltar que a desigualdade (3.74) mostra, em particular, que a solução global (u, b) para as equações MHDE (3.1), descritas nos Teoremas 3.1 e 3.2, satisfaz o limite abaixo:

$$\lim_{t\to\infty} \|(u, b)(t)\|_{L^2} = 0.$$

Teorema 3.3. *Sejam $(u_0, b_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)$, onde $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ e $r^* := r^*(u_0) = r^*(b_0) \in (-\frac{3}{2}, \infty)$. A solução global $(u, b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ para as equações MHDE (3.1), estando em $L^2(\mathbb{R}^3)$, construída nos Teoremas 3.1 e 3.2, satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{5}{4\alpha}-1} \|(u, b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} = 0,$$

sendo que $r^*(u_0)$ e $r^*(b_0)$ são as características de decaimento para u_0 e b_0, respectivamente (ver definições 1.8 e 1.9).

Demonstração. Para encontrarmos o decaimento da solução $(u, b) \in X \times X$ (onde $X = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(\mathbb{R}^+; X^1(\mathbb{R}^3))$ é dado na prova do Teorema 3.1) acima, começaremos reescrevendo a norma $\|(u, b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}}$ como segue.

$$\begin{aligned} \|(u, b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} &= \int_{|\xi|\leq\lambda} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi \\ &+ \int_{|\xi|>\lambda} e^{-\sqrt{t/2}|\xi|^\alpha} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^\alpha} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi, \end{aligned} \tag{3.97}$$

para $\lambda > 0$ fixo e $t > 0$ qualquer. Definamos

$$I_1 = \int_{|\xi|\leq\lambda} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi \tag{3.98}$$

e também

$$I_2 = \int_{|\xi|>\lambda} e^{-\sqrt{t/2}|\xi|^\alpha} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^\alpha} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi. \tag{3.99}$$

A partir de agora, vamos analisar I_1 e I_2 a fim de garantirmos que (3.97) satisfaça as hipóteses do Lema 2.4.

Começando pela análise do termo I_1, observe que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|\xi|\leq\lambda} |\xi|^{1-2\alpha}|\hat{u}|d\xi + \int_{|\xi|\leq\lambda} |\xi|^{1-2\alpha}|\hat{b}|d\xi \\ &= \||\xi|^{1-2\alpha}|\hat{u}|\|_{L^1(\{|\xi|\leq\lambda\})} + \||\xi|^{1-2\alpha}|\hat{b}|\|_{L^1(\{|\xi|\leq\lambda\})} \\ &\leq \||\xi|^{1-2\alpha}\|_{L^2(\{|\xi|\leq\lambda\})}\|\hat{u}\|_{L^2} + \||\xi|^{1-2\alpha}\|_{L^2(\{|\xi|\leq\lambda\})}\|\hat{b}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Pela Identidade de Plancherel 1.8, temos que

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\|u\|_{L^2}. \tag{3.101}$$

Desta forma, de (3.100) e (3.101), inferimos que

$$I_1 \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}}\||\xi|^{1-2\alpha}\|_{L^2(\{|\xi|\leq\lambda\})}(\|u(t)\|_{L^2} + \|b(t)\|_{L^2}). \tag{3.102}$$

Utilizando a definição

$$\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 = \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2, \tag{3.103}$$

e derivando a mesma em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 =&\langle u_t, u\rangle_2 + \langle b_t, b\rangle_2\\ =&\langle (b\cdot\nabla)b, u\rangle_2 + \langle \partial_1 b, u\rangle_2 - \langle \Lambda^{2\alpha}u, u\rangle_2 - \langle \nabla P, u\rangle_2 - \langle (u\cdot\nabla)u, u\rangle_2\\ &+ \langle (b\cdot\nabla)u, b\rangle_2 + \langle \partial_1 u, b\rangle_2 - \langle \Lambda^{2\alpha}b, b\rangle_2 - \langle (u\cdot\nabla)b, b\rangle_2.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle (b\cdot\nabla)b, u\rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla)b\cdot u dx = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3} b_i\partial_i b\cdot u dx = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3}(\partial_i b_i b)\cdot u dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{i=1}^{3} b_i b\cdot\partial_i u dx = -\int_{\mathbb{R}^3} b\cdot\sum_{i=1}^{3} b_i\partial_i u dx = -\int_{\mathbb{R}^3} b\cdot(b\cdot\nabla)u dx\\ &= -\langle b, (b\cdot\nabla)u\rangle_2 = -\langle (b\cdot\nabla)u, b\rangle_2,\end{aligned} \tag{3.104}$$

e realizando cálculos análogos encontramos

$$\langle \partial_1 b, u\rangle_2 = -\langle \partial_1 u, b\rangle_2, \langle (u\cdot\nabla)u, u\rangle_2 = 0, \langle \nabla P, u\rangle_2 = 0, \langle (u\cdot\nabla)b, b\rangle_2 = 0, \tag{3.105}$$

segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 = -\langle \Lambda^{2\alpha}u, u\rangle_2 - \langle \Lambda^{2\alpha}b, b\rangle_2 \tag{3.106}$$

para todo $t \geq 0$. Integrando (3.106) em relação a t, resulta que

$$\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 - \|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2 = -2\int_0^t [\langle \Lambda^{2\alpha}u, u\rangle_2 + \langle \Lambda^{2\alpha}b, b\rangle_2]dt, \tag{3.107}$$

para todo $t \geqslant 0$. É verdade que $\langle \Lambda^{2\alpha} u, u\rangle_2$ é positivo, de fato

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{2\alpha} u, u\rangle_2 &= (2\pi)^3 \langle \widehat{\Lambda^{2\alpha} u}, \hat{u}\rangle_2 = (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}[\hat{u}\cdot\hat{u}]dx \\ &= (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha}|\hat{u}|^2 dx = (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} [|\xi|^{\alpha}|\hat{u}|]^2 dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

Logo, de (3.107) segue que

$$\begin{aligned}\|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 &\leqslant \|(u,b)(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle \Lambda^{2\alpha} u, u\rangle_2 + \langle \Lambda^{2\alpha} b, b\rangle_2 \, dt \\ &= \|(u_0,b_0)\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.108}$$

para todo $t \geqslant 0$. Portanto, pela desigualdade encontrada em (3.108), concluímos, para (3.102), que

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C\Big(\int_{|\xi|\leq\lambda} |\xi|^{2(1-2\alpha)}\Big)^{\frac{1}{2}} \|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\ &\leqslant C\Big(\int_0^{\lambda}\int_{|\xi|=r} r^{2(1-2\alpha)} dS_r dr\Big)^{\frac{1}{2}} \|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\ &= C\Big(\int_0^{\lambda} r^{2(1-2\alpha)} \int_{|\xi|=r} dS_r dr\Big)^{\frac{1}{2}} \|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\ &= C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}} \|(u_0,b_0)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ou seja, é verdade que

$$I_1 \leqslant C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}} \|(u_0,b_0)\|_{L^2}. \tag{3.109}$$

Agora, I_2 pode ser reescrito como segue.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi|>\lambda} e^{-\sqrt{t/2}|\xi|^{\alpha}} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^{\alpha}} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi \\ &\leqslant \int_{|\xi|>\lambda} e^{-\sqrt{t/2}\lambda^{\alpha}} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^{\alpha}} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi \\ &\leqslant e^{-\sqrt{t/2}\lambda^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^{\alpha}} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Objetivando estimar I_2, semelhante ao que foi feito para I_1, vamos realizar um estudo acerca do termo exibido em (3.110), a saber

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t/2}|\xi|^{\alpha}} |\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}| + |\hat{b}|)d\xi. \tag{3.111}$$

Sendo assim, para um $t > 0$ fixo, considere que

$$V(x,\tau) = u(x,\tau+\frac{t}{2}),\ W(x,\tau) = b(x,\tau+\frac{t}{2}),\ H(x,\tau) = P(x,\tau+\frac{t}{2}), \tag{3.112}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\tau \geqslant 0$. Dado $\epsilon > 0$ pequeno suficiente (este existe pelos Teoremas 3.1 e 3.2), se

$$\|V(x,0), W(x,0)\|_{X^{1-2\alpha}} < \epsilon,$$

pelos Teoremas 3.1 e 3.2, temos que (V,W) é a única solução global do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_\tau V + \Lambda^{2\alpha}V + (V\cdot\nabla)V + \nabla H = (W\cdot\nabla)W + \partial_1 W; \\ \partial_\tau W + \Lambda^{2\alpha}W + (V\cdot\nabla)W = (W\cdot\nabla)V + \partial_1 V; \\ \nabla\cdot V = \nabla\cdot W = 0; \\ V_0(x) := V(x,0) = u(x,t/2), W_0(x) := W(x,0) = b(x,t/2), \end{cases} \tag{3.113}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Este sistema é válido, pois

- $\partial_\tau V = \partial_\tau u(x,\tau+t/2) = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{d(\tau+t/2)}{d\tau} = u_t(x,\tau+t/2);$

- $\partial_\tau W = \partial_\tau b(x,\tau+t/2) = \dfrac{\partial b}{\partial t}\dfrac{d(\tau+t/2)}{d\tau} = b_t(x,\tau+t/2);$

- $V_0(x) = u(x,0+t/2) = u(x,t/2);$

- $W_0(x) = b(x,0+t/2) = b(x,t/2);$

Nos demais termos do sistema (3.113), as derivadas são tomadas apenas na variável x, e como a solução existe para todo tempo t, o sistema está verificado. Pela analiticidade da solução (ver (3.37)), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}|\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{V}|+|\hat{W}|)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{V}|d\xi + \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}|e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{W}|d\xi \\ &= \|(\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{V}), \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{z}|\xi|^\alpha}\hat{W}))\|_{X^{1-2\alpha}} \\ &\leq \|(\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{V}), \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{W}))\|_{\widetilde{L^\infty}(X^{1-2\alpha})} \\ &\quad + \|(\mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{V}), \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}\hat{W}))\|_{L^1(X^1)} \\ &\leq 12\sqrt{e}\|(V_0,W_0)\|_{X^{1-2\alpha}}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{\tau}|\xi|^\alpha}|\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}(\tau+t/2)|+|\hat{b}(\tau+t/2)|)d\xi \\
&\leq 12\sqrt{e}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}(t/2)|+|\hat{b}(t/2)|)d\xi. \qquad (3.115)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\tau = t/2$, concluímos que

$$
\int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^\alpha}|\xi|^{1-2\alpha}(|\hat{u}(t)|+|\hat{b}(t)|)d\xi \leq 12\sqrt{e}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.116)
$$

Por (3.110) e (3.116), temos uma estimativa para I_2, a qual segue

$$
I_2 \leq 12\sqrt{e}e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.117)
$$

Portanto, por (3.109) e (3.117), conseguimos encontrar a desigualdade

$$
\|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}}\|(u_0,b_0)\|_{L^2} + 12\sqrt{e}e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.118)
$$

Multiplicando ambos os lados de (3.118) por $t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq& C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\
&+ 12\sqrt{e}t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}} \\
=& C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\
&+ 12\sqrt{e}2^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Escolha $\lambda > 0$ tal que $12\sqrt{e}2^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha} = \frac{1}{2}$, isto é,

$$
\lambda = \left(\frac{\sqrt{2}\ln(24\sqrt{e}2^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}})}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (3.119)
$$

Deste modo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq& C_\alpha\left(\frac{\sqrt{2}\ln(24\sqrt{e}2^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}})}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{5-4\alpha}{2\alpha}} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u_0,b_0)\|_{L^2} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}} \\
=& C_\alpha\|(u_0,b_0)\|_{L^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}}\|(u,b)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}. \qquad (3.120)
\end{aligned}
$$

Perceba que se escolhermos $f(t) = t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}}$, $\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{1}{2}$ e $M_0 = C_\alpha \|(u_0, b_0)\|_{L^2}$ no Lema 2.4, chegaremos a

$$\limsup_{t \to +\infty} f(t) \leq \frac{M_0}{1-\theta_1}, \tag{3.121}$$

isto é,

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \|(u_0, b_0)\|_{L^2}. \tag{3.122}$$

Agora, vamos considerar um tempo $l > 0$ dado e definir

$$\varphi(x,t) = u(x, t+l), \;\; \psi(x,t) = b(x, t+l), \;\; h(x,t) = P(x, t+l),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$. Novamente, pelos Teoremas 3.1 e 3.2, podemos considerar um $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente de forma que se

$$\|\varphi(x,0), \psi(x,0)\|_{X^{1-2\alpha}} < \epsilon,$$

os Teoremas 3.1 e 3.2 implicam que (φ, ψ) é a única solução global do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \Lambda^{2\alpha} \varphi + (\varphi \cdot \nabla)\varphi + \nabla h = (\psi \cdot \nabla)\psi + \partial_1 \psi, \\ \partial_t \psi + \Lambda^{2\alpha} \psi + (\varphi \cdot \nabla)\psi = (\psi \cdot \nabla)\varphi + \partial_1 \varphi, \\ \nabla \cdot \varphi = \nabla \cdot \psi = 0, \\ \varphi_0(x) := \varphi(x,0) = u(x,l), \psi_0(x) := \psi(x,0) = b(x,l), \end{cases} \tag{3.123}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ (como fizemos acima). Sendo assim, vamos recomeçar nossa análise utilizando a solução (φ, ψ) de (3.123). Perceba que podemos escrever

$$\|(\varphi, \psi)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} = J_1 + J_2,$$

onde

$$J_1 = \int_{|\xi| \leq \lambda} |\xi|^{1-2\alpha} (|\hat{\varphi}| + |\hat{\psi}|) d\xi,$$

$$J_2 = \int_{|\xi| > \lambda} e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^\alpha} e^{\sqrt{\frac{t}{2}}|\xi|^\alpha} |\xi|^{1-2\alpha} (|\hat{\varphi}| + |\hat{\psi}|) d\xi.$$

Realizando os mesmos passos feitos para I_1 e I_2, vamos encontrar

$$J_1 \leq C_\alpha \lambda^{\frac{5-4\alpha}{2}} \|(\varphi_0, \psi_0)\|_{L^2} \tag{3.124}$$

e também

$$J_2 \leq e^{-\sqrt{\frac{t}{2}}\lambda^\alpha} 12\sqrt{e} \|(\varphi,\psi)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}}, \tag{3.125}$$

onde C_α é dado em (3.109) e, consequentemente,

$$t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(\varphi,\psi)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \|(\varphi_0,\psi_0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(\varphi,\psi)(t/2)\|_{X^{1-2\alpha}},$$

e, aplicando o Lema 2.4, obtemos

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(\varphi,\psi)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \|(\varphi_0,\psi_0)\|_{L^2}.$$

Ou equivalentemente, chegamos a

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(u,b)(t+l)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \|(u,b)(l)\|_{L^2}, \quad \forall l > 0.$$

Ou seja, determinamos a seguinte desigualdade:

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} \leq C_\alpha \|(u,b)(l)\|_{L^2}, \quad \forall l > 0. \tag{3.126}$$

Aplicando o limite superior em (3.126), quando $l \to \infty$, deduzimos que

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{5-4\alpha}{4\alpha}} \|(u,b)(t)\|_{X^{1-2\alpha}} = 0, \tag{3.127}$$

pois $\|(u,b)(l)\|_{L^2}$ tende a zero, quando l tende a infinito, pelo Lema 3.1. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alfvén, H. "Existência de Ondas Eletromagnéticas-Hidrodinâmicas". Nature **150**, 405-406 (1942).

[2] Bae, H., “Existence and analyticity of Lei-Lin solution to the Navier-Stokes equations", Proc. Am. Math. Soc. **143**, 2887-2892 (2015).

[3] Benameur, J., “On the blow-up criterion of 3D Navier-Stokes equations,"J. Math. Anal. Appl. **371**, 719-727 (2010).

[4] Benameur, J., “On the exponential type explosion of Navier-Stokes equations,"Nonlinear Analysis **103**, 87-97 (2014).

[5] Benameur, J., “Long time decay to the Lei-Lin solution of 3D Navier-Stokes equations,"J. Math. Anal. Appl., **422**, 424-434 (2015).

[6] Benameur, J., Jlali, L., “Long time decay for 3D Navier-Stokes equations in Sobolev-Gevrey spaces,"Electron. J. Differential Equations **3104**, 13pp. (2016).

[7] Benameur, J., Jlali, L., “On the blow-up criterion of 3D-NSE in Sobolev-Gevrey spaces,"J. Math. Fluid Mech. **18**, 805-822 (2016).

[8] Benameur, J., Bennaceur, M., “Large time behaviour of solutions to the 3D-NSE in X^σ spaces", J. Math. Anal. Appl. **482**, 123566 (2020).

[9] Benameur, J., Jlali, L., “Long time decay of 3D-NSE in Lei-Lin-Gevrey spaces". Math. Slovaca **70**, 877-892 (2020).

[10] Benameur, J., Abdallah, S. B., “Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space", J. Math. Anal. Appl. **497**, Paper No. 124873, 30 pp (2021).

[11] Brandolese, L., “Characterization of solutions to dissipative systems with sharp algebraic decay,"SIAM J. Math. Anal. **48**, 1616-1633 (2016).

[12] Braz e Silva, P., Melo, W. G., Zingano, P. R., “Some remarks on the paper “On the blow up criterion of 3D Navier-Stokes equations"by J. Benameur,"C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **352** 913-915 (2014).

[13] Braz e Silva, P., Melo, W. G., Rocha, N. F., “Existence, Uniqueness and Blow-up of Solutions for the 3D Navier-Stokes Equations in Homogeneous Sobolev-Gevrey Spaces,"J. Comput. Appl. Math., **39**, 1-11 (2020).

[14] Cannone, M., “Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes,"Diderot Editeur, Paris, x+191 pp. (1995).

[15] Chaabani, A., “On well-posedness of the Cauchy problem for 3D MHD system in critical Sobolev-Gevrey space,"Partial Differ. Equ. Appl. **2** (2021). (DOI 10.1007/s42985-021-00081-z).

[16] Dai, Y., Tan, Z., Wu, J., “A class of global large solutions to the magnetohydrodynamic equations with fractional dissipation,"Z. Angew. Math. Phys. **17**, 13 pp. (2019).

[17] Folland, Gerald B. "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications". Second Edition. ed. [S. l.: s. n.], 1999.

[18] Guterres, R. H., Melo, W. G., Nunes, J., Perusato, C., “Large time decay for the magnetohydrodynamics equations in Sobolev-Gevrey spaces,"Monatsh. Math. **192**, 591-613 (2020).

[19] Guterres, R., Melo, W. G., Rocha, N. F., Santos, T. S. R., “Well-Posedness, Blow-up Criteria and Stability for Solutions of the Generalized MHD Equations in Sobolev-Gevrey Spaces,"Acta Appl. Math. **176** (2021).

[20] Lei, Z., Lin, F., “Global mild solutions of Navier-Stokes equations", Comm. Pure Appl. Math., **64**, 1297-1304 (2011).

[21] Li, P., Zhai, Z., “Well-posedness and regularity of generalized Navier-Stokes equations in some critical Q-spaces", J. Funct. Anal. **259**, 2457-2519 (2010).

[22] Lorenz, L., Zingano, P. R., “Properties at potential blow-up times for the incompressible Navier-Stokes equations,"Bol. Soc. Paran. Mat., **35**, 127-158, (2017).

[23] Lorenz, L., Melo, W. G., Rocha, N. F., “The magneto-hydrodynamic equations: local theory and blow-up of solutions,"Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **24**, 3819-3841, (2019).

[24] Marcon, D., Schutz, L., Ziebell, J. S., “On the blow-up criterion of magnetohydrodynamics equations in homogeneous Sobolev spaces,"Appl. Anal. **97**, 1677-1687 (2018).

[25] Melo, W. G., “The magneto-micropolar equations with periodic boundary conditions: Solution properties at potential blow-up times", J. Math. Anal. Appl., **435**, 1194-1209 (2016).

[26] Melo, W. G., Perusato, C., Rocha, N. F., “On local existence, uniqueness and blow-up of solutions for the generalized MHD equations in Lei-Lin spaces", Z. Angew. Math. Phys., **70**, 74-98 (2019).

[27] Melo, W. G., Rocha, N. F., Zingano, P. R., “Local existence, uniqueness and lower bounds of solutions for the magnetohydrodynamics equations in Sobolev-Gevrey spaces,"J. Math. Anal. Appl., **482**, p.123524 (2020).

[28] Melo, W. G., Santos, T. S. R., “Time decay rates for the generalized MHD-α equations in Sobolev-Gevrey spaces,"Appl. Anal. (2021). (DOI 10.1080/00036811.2021.1939313)

[29] Melo, W. G., N. F., Rocha, “New Blow-up Criteria for Local Solutions of 3D Generalized MHD Equations in Lei-Lin-Gevrey Spaces,"Mathematische Nachrichteni, (2022). (DOI 10.1002/mana.202000309)

[30] Niche, C. J. and Schonbek, M. E., “Decay characterization of solutions to dissipative equations,"J. London Math. Soc. **91**(2), 573-595 (2015).

[31] Orf, H., “Long time decay for global solutions to the Navier-Stokes equations in Sobolev-Gevery spaces,"arXiv:1903.03034 (2019).

[32] Pozrikidis, C., “The fractional Laplacian,"CRC Press, Boca Raton, FL, xv+278 pp. (2016).

[33] Selmi, R., Chaabani, A., Zaabi, M., “Blow-up of the maximal solution to 3D Boussinesq system in Lei-Lin-Gevrey spaces", Math. Methods Appl. Sci. **43**, 2945-2952 (2020).

[34] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. "Fourier Analysis: an introduction". Princeton University Press Princeton and Oxford, 2007.

[35] Stein, E., “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,"Princeton University Press, Princeton, (1970).

[36] Wang, W.H., Qin, T.G., Bie, Q.Y.: "Global well-posedness and analyticity results to 3-D generalized magnetohydrodynamics equations". Appl. Math. Lett., **59**, 65-70 (2016)

[37] Wu, J., “Generalized MHD equations,"J. Differential Equations, **195** 284-312 (2003).

[38] Xiao, Yamin; Yuan, Baoquan. "Global Existence and Large Time Behavior of Solutions to 3D MHD System Near Equilibrium". Results in Mathematics, **73**, 01-14, (2021).

[39] Ye, Zhuan, "Global well-posedness and decay results to 3D generalized viscous magnetohydrodynamic equations". Ann. Mat. Pura Appl., **195**, 1111-1121 (2016).

[40] Zhao, Xiaopeng; Zhu, Mingxuan. "Decay characterization of solutions to generalized Hall-MHD system in $\mathbb{R}^3$". Journal of Mathematical Physics, **59**, 073502-(1-13), (2018).