



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Estudo das singularidades das soluções em  
problemas de atração gravitacional

José Jefferson da Silva Andrade

SÃO CRISTÓVÃO – SE  
AGOSTO DE 2022

Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Estudo das singularidades das soluções em  
problemas de atração gravitacional

por

José Jefferson da Silva Andrade

sob a orientação do

Prof. Dr. Angelo Alberti

São Cristóvão – SE  
Agosto de 2022

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

A554e Andrade, José Jefferson da Silva  
Estudo das singularidades das soluções em problemas de  
atração gravitacional / José Jefferson da Silva Andrade ; orientador  
Angelo Alberti. – São Cristóvão, 2022.  
93 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2022.

1. Problema de muitos corpos. 2. Singularidades  
(Matemática). 3. Colisões (Física). I. Alberti, Angelo, orient. II.  
Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **Estudo das singularidades das soluções em problemas de atração gravitacional**

*por*

*José Jefferson da Silva Andrade*

Aprovada pela banca examinadora:

---

Prof. Dr. Angelo Alberti - UFS  
Orientador

---

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS  
Primeiro Examinador

---

Prof. Dr. Jose Claudio Vidal Diaz - UBB/CHILE  
Segundo Examinador

São Cristóvão  
30 de Agosto de 2022

*Aos meus pais.*

# Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus, pela oportunidade de iniciar e agora finalizar esta etapa que é importante para mim.

Agradeço aos meus familiares, especialmente , aos meus pais e irmãos, que apesar de ter tido um ano muito difícil, nunca deixaram de me apoiar na minha trajetória no mestrado.

Agradeço aos meus amigos e colegas de classe, em especial, Tatiane, Daiane e Alessandro, que sempre me deram bons conselhos que pude aproveitar e que foram bastante construtivos na minha formação.

Aos professores do Promat-UFS, em especial ao meu orientador Angelo Alberti, pela orientação e paciência, uma pessoa que tenho admiração e respeito pelo trabalho que exerce.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo o estudo da natureza das singularidades das soluções em problemas da mecânica celeste em particular no problema de atração gravitacional de  $N$ -corpos e em problemas do movimento de partículas devido a força gravitacional determinada por corpos massivos. Além disso estudamos as singularidades no problema de dois corpos com potencial homogêneo. Para atingir nosso objetivo, incluímos um capítulo de preliminares onde fornecemos a teoria básica de sistemas Hamiltonianos autônomos com  $n$  graus de liberdade, a formulação do problema de  $N$ -corpos e resultados clássicos da teoria do problema gravitacional dos  $N$ -corpos. No capítulo 2 apresentamos resultados relacionados as singularidades das soluções no problema de  $N$ -corpos. O principal resultado desta seção consiste em mostrar que no problema de três corpos, todas as singularidades são devido a colisões. No capítulo seguinte, estudamos a natureza das singularidades no problema de uma partícula de massa infinitesimal se movimentando sob a força gravitacional devida a um corpo massivo. Em particular, estudamos o problema onde o corpo massivo tem a forma de um anel circular homogêneo e determinamos a natureza das singularidades deste problema, quando a partícula se movimenta no plano. No último capítulo, estudamos as singularidades do problema de dois corpos com potencial homogêneo no plano.

**Palavras-chave:** Problema de  $N$ -corpos; Singularidades; Colisões; Potencial homogêneo; atração gravitacional por corpos massivos.

# Abstract

This work has as main objective the study of the nature of the singularities of the solutions in problems of celestial mechanics. In particular, the study of the singularities in the Newtonian  $N$ -body problem, in the problems of the movement of particles due to gravitational force induced by massive bodies and the two body problem with homogeneous potential. To achieve our objective, we have included a chapter of preliminaries where we provide the basic theory of autonomous Hamiltonian systems with  $n$  degrees of freedom, the formulation of the  $N$ -body problem and classic results of the theory of the newtonian  $N$ -body problem. In chapter 2, we present results related to singularities of the solutions in the  $N$ -body problem. The main result of this section shows that in the three-body problem, all singularities are due to collisions. In the next chapter, We study the nature of singularities in the problem of a infinitesimal particle moving under the gravitational force due to a massive body. In particular, we studied the problem where the massive body has the shape of a homogeneous circular ring and determine the nature of the singularities of this problem, when the particle moves in the plane. In the last chapter, we study the singularities of the planar two body problem with homogeneous potential.

**Keywords:**  $N$ -body problem; Singularities; Collisions; homogeneous potential; Gravitational attraction due to massive bodies.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Preliminares: Definições e Resultados Básicos</b>                  | <b>6</b>  |
| 1.1 Sistemas Hamiltonianos . . . . .                                    | 6         |
| 1.2 O Problema de N-corpos . . . . .                                    | 12        |
| 1.2.1 Formulação Matemática do Problema de N-corpos . . . . .           | 13        |
| 1.2.2 Existência e Unicidade no Problema de N-corpos . . . . .          | 17        |
| 1.2.3 Leis de Conservação . . . . .                                     | 20        |
| 1.3 Soluções de equilíbrio relativo . . . . .                           | 25        |
| <b>2 Singularidades no Problema de N-corpos</b>                         | <b>30</b> |
| 2.1 Colisões e Colapso Total . . . . .                                  | 31        |
| 2.2 Uma Caracterização das Singularidades . . . . .                     | 38        |
| 2.3 Colisões e Pseudocolisões . . . . .                                 | 40        |
| 2.4 Teorema de Von Zeipel . . . . .                                     | 44        |
| <b>3 Singularidades em Problema de Atração Gravitacional por corpos</b> |           |
| <b>massivos</b>   | <b>54</b> |
| 3.1 Formulação do Problema . . . . .                                    | 55        |
| 3.2 Singularidades no Problema de Atração Gravitacional por um Corpo    |           |
| Massivo . . . . .   | 58        |
| 3.3 Singularidade no Problema do Anel Circular Homogêneo . . . . .      | 64        |
| 3.4 O Problema Equatorial do Anel circular Homogêneo . . . . .          | 67        |
| 3.5 Singularidades no Plano Equatorial do Anel Circular Homogêneo . .   | 74        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4 Singularidades no problema de <math>N</math>-corpos com potencial Homogê-</b> |           |
| <b>neo</b>   | <b>83</b> |
| 4.1 Singularidades no Problema de dois corpos homogêneo . . . . .                  | 85        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>92</b> |

# Introdução

No estudo de equações diferenciais ordinárias, depara-se com o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= f(y), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ . O Teorema de Cauchy-Picard nos assegura que este PVI tem solução única no intervalo  $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  para  $\delta$  suficiente pequeno. Um problema básico consiste em saber se a solução pode ser estendida para um intervalo de tempo maior ou se há um intervalo maximal no qual a solução está definida. Quando o intervalo maximal não é toda a reta, por exemplo,  $J = (-\infty, t^*)$  com  $t^* < +\infty$ , a solução não pode ser prolongada além deste intervalo e diz-se que a solução tem uma singularidade em  $t = t^*$ .

O objetivo principal desta dissertação é discutir alguns resultados sobre as singularidades das soluções em diferentes problemas da mecânica celeste, mais precisamente, em problemas de atração gravitacional. Afim de desenvolvermos nosso estudo com maior clareza possível, é interessante começarmos explicando de forma breve os problemas que serão estudados nesta dissertação.

O problema fundamental da mecânica celeste é o problema dos N-corpos, que consiste em dar informações sobre o movimento de N-partículas materiais submetidas unicamente a ação de suas atrações gravitacionais. Mais precisamente, se  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  denotam os vetores posição das partículas de massas  $m_1, \dots, m_N$ , o problema consiste em resolver o sistema de equações diferenciais

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = - \sum_{j \neq i}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

onde as unidades são escolhidas de tal forma que a constante de gravitação é  $G = 1$ . Para resolver o sistema de equações (2) é necessário tomar condições iniciais sobre o conjunto  $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \times \mathbb{R}^{3N}$  onde  $\Delta$  é chamado de *conjunto singular* e definido por  $\Delta = \cup_{1 \leq i < j \leq N} \Delta_{ij}$ , com  $\Delta_{ij} = \{q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ .

O problema gravitacional de  $N$ -corpos é uma questão que desperta curiosidade entre os cientistas desde que Newton estabeleceu a sua *Lei da Gravitação Universal*. A solução para o caso  $N = 2$  é conhecida como o *problema de Kepler* o qual é um exemplo de um sistema integrável. As soluções podem ser divididas em duas classes: as soluções periódicas e as soluções abertas, dependendo do valor da energia do sistema. Já para o caso  $N = 3$ , durante muitos anos as únicas soluções periódicas conhecidas foram as determinadas por Euler (1765) e Lagrange (1772). Muitos esforços foram feitos para generalizar estas soluções, devido ao grande interesse de aplicá-las na análise do movimento dos planetas do sistema solar.

A questão da natureza das singularidades no problema de  $N$ -corpos se deve aos trabalhos de Poincaré e Painlevé. Uma singularidade é dita uma *singularidade de colisão* ou uma singularidade devido a colisão (o conjunto de colisão representa as singularidades do potencial associado ao problema) se a solução se aproxima de um ponto bem definido do conjunto singular  $\Delta$  quando  $t$  se aproxima de  $t^*$  (supondo que a solução tem uma singularidade em  $t^*$ ). Caso contrário a solução com singularidade é chamada sem colisão ou diz-se que solução possui uma pseudocolisão. Veja por exemplos as referências [11] e [22]. O principal resultado que trataremos neste trabalho, com respeito as singularidades no problema de 3-corpos se deve a Painlevé, o qual provou que todas as singularidades são devidas a colisão. A prova original deste resultado pode ser encontrada em [16].

Outro resultado importante se deve a von Zeipel, que demonstra que uma singularidade não devida a uma colisão ocorre se, e somente se, o sistema de inércia do sistema diverge a tempo finito, o que implica no escape dos corpos que constituem o sistema. Esse fato é bastante surpreendente, uma vez que a força gravitacional é atrativa e durante muitos anos serviu de entendimento para reforçar

uma conjectura feita por Painlavé: “Não existem pseudocolisões no problema de  $N$ -corpos para todo  $N$ ”. A idéia que está por trás deste resultado devido a von Zeipel, é que se um dos corpos se afasta para muito longe dos outros, sua velocidade se torna aproximadamente constante (pois a força resultante sobre ele se anula), o momento de inércia não diverge, mas também não escapa. Por outro lado, para que este corpo escape de vez do sistema, é necessário que um outro corpo oscile para muito perto dele, com uma frequência muito alta, aumentando bruscamente sua aceleração. Neste caso então, a singularidade está associada à oscilação da distância entre esses corpos.

No problema de  $N$ -corpos considera-se os corpos como partículas pontuais. Para uma melhor aproximação do movimento de corpos celeste, considera-se o problema do movimento de uma partícula infinitesimal no espaço  $\mathbb{R}^3$  cujo movimento se deve exclusivamente pela força gravitacional induzida por um corpo massivo de dimensão finita e com distribuição de massa uniforme. Chamamos este problema de *problema de atração gravitacional por corpos massivos*. Na literatura encontramos uma série de trabalhos neste sentido onde o corpo massivo tem por exemplo a forma de um segmento linear, a forma de um fio circular ou de um anel circular (veja por exemplo as referências [1], [2], [8] e as referências citadas neles). Estes modelos são usados para aproximar o campo gravitacional originado por corpos celestes massivos de forma irregular como asteróides, núcleo de cometas e luas planetárias.

Em relação ao estudo das singularidades em problemas de atração gravitacional por corpos massivos podemos citar o trabalho realizado em [5]. Neste artigo os autores consideram o corpo massivo na forma de um fio circular homogêneo e mostram que todas as singularidades do problema são devidas a colisão. Ou seja, se uma solução do problema não está definida para todo tempo então a solução se aproxima de um ponto determinado do fio circular (colide). Os autores em [2], estudam as singularidades no problema de atração gravitacional devido a um anel ou um segmento ambos com distribuição de massa uniforme. Seguindo os resultados destes autores, estudaremos a natureza das singularidades no problema do anel circular homogêneo. O problema das singularidades no caso espacial, quando o corpo massivo tem a forma de um anel homogêneo ainda é um problema aberto.

Uma generalização do problema gravitacional de  $N$ -corpos (Newtoniano) consiste no movimento de  $N$  partículas de massa  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  movendo-se no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , cujas equações de movimento são dadas pelo sistema

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\alpha \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^{\alpha+2}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

onde  $\alpha > 0$ . Quando  $\alpha = 1$  obtém-se o problema clássico de  $N$ -corpos e quando  $\alpha > 2$  o problema é chamado de problema de força forte [12]. O problema (3) é chamado de *problema de  $N$ -corpos com potencial homogêneo*. Existem muitos resultados sobre as singularidades neste problema, veja por exemplo [11]. Em particular é possível estender o resultado obtido por Painlavé (se uma solução tem uma singularidade em um instante  $t^*$  então a solução necessita se aproximar do conjunto das singularidades) e também o resultado obtido por von Zeipel para  $\alpha \geq 1$ . Podemos encontrar na literatura um trabalho recente [9] onde os autores estudam propriedades das soluções singulares. Em particular, eles caracterizam o conjunto de condições iniciais que levam a soluções globalmente definidas ou que levam a soluções singulares.

Neste trabalho vamos abordar o estudo das singularidades nos três problemas mencionados acima: O problema gravitacional (newtoniano) de  $N$ -corpos, problema de atração gravitacional de corpos massivos e no problema de  $N$ -corpos com potencial homogêneo. Para atingir nosso objetivo dividimos a dissertação em quatro capítulos, sendo que o primeiro deles tem como objetivo servir como um breve estudo do que será discutido ao decorrer dos demais capítulos. Inicialmente será abordado uma teoria inicial de sistemas Hamiltonianos, e em sequência, um estudo sobre um dos principais problema da mecânica celeste, o problema de  $N$ -corpos. Discutiremos a formulação matemática do problema, que consiste em um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, o teorema de existência e unicidade, e por fim, um estudo sobre a existência ou não de soluções de equilíbrios para este tipo de problema.

No capítulo 2, dando continuidade ao estudo do problema de  $N$ -corpos, vamos estudar os resultados clássicos sobre existência de singularidades das soluções deste tipo de problema e a natureza das mesmas. Estudamos primeiramente quando acontece o colapso total do sistema dos  $N$ -corpos. Em seguida, apresentaremos

os resultados clássicos a respeito das singularidades devidos aos matemáticos Paul Painlevé e Von Zeipel. O principal resultado deste capítulo consiste em mostrar que as singularidades no problema de três corpos são devidas a colisão. Finalizamos o capítulo com a demonstração do Teorema de von Zeipel e uma aplicação deste teorema para o problema colinear de  $N$ -corpos. Neste capítulo seguimos os resultados das referências [11], [14] e [20].

No capítulo três, trataremos do estudo de resultados sobre as singularidades em problemas de atração gravitacional por corpos massivos. Estabeleceremos condições sobre a função potencial para obter uma condição suficiente para determinar a natureza das singularidades neste problema. Considerando um caso particular, vamos investigar a existência de singularidades assim como sua natureza quando o corpo massivo é um anel circular homogêneo. As singularidades são completamente caracterizadas quando a partícula se move no mesmo plano do anel. Este capítulo disserta sobre os resultados principais obtidos em [1] e [2].

O último capítulo, tem como objetivo apresentar resultados sobre as singularidades no problema de dois corpos com potencial homogêneo. Vamos considerar o movimento dos corpos no plano com o parâmetro satisfazendo  $\alpha > 2$  (problema de força forte). Veremos que este problema possui uma particularidade quando comparado ao problema de dois corpos newtoniano, visto que, neste último, as colisões (colapso) só podem ocorrer para valores do momento angular não nulo, enquanto que neste problema podem ocorrer para valores do momento angular não nulo. Vamos dar uma caracterização do conjunto das condições iniciais que determinam uma solução singular e as que determinam soluções globalmente definidas. Discutiremos aqui os resultados obtidos em [9].

# Capítulo 1

## Preliminares: Definições e Resultados Básicos

Este capítulo tem como proposta apresentar a linguagem e os fatos básicos necessários para a compreensão dos principais resultados deste trabalho.

Ao decorrer deste capítulo, apresentaremos definições e resultados gerais da teoria de sistemas Hamiltonianos e o problema de  $N$ -corpos.

### 1.1 Sistemas Hamiltonianos

O sistema Hamiltoniano é um sistema com  $2n$  equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = H_p, \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_q \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$  é uma função escalar definida em um aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  denominada função Hamiltoniana do sistema. Os vetores  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  são chamadas de posição e momento, respectivamente, e  $t$  é o tempo. O número natural  $n$  é dito *grau de liberdade do sistema*. As variáveis  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  são ditas *variáveis conjugadas*. Quando a função Hamiltoniana depende do tempo, dizemos que o sistema Hamiltoniano tem  $n$  graus e meio de liberdade.

Podemos descrever o sistema Hamiltoniano de forma matricial, para isto, defina

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla_{\mathbf{z}}H = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Logo o sistema (1.1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z}, t), \quad (1.3)$$

onde  $J$  é denominada matriz padrão. Temos que  $J$  é uma matriz anti-simétrica  $J^T = -J$ , ortogonal  $J^{-1} = J^T$  e além disso,  $J^2 = -I$  e  $\det J = 1$ .

No caso especial em que a função Hamiltoniana  $H$  independe do tempo, ou seja,  $H : O \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $O \subset \mathbb{R}^{2n}$  é um conjunto aberto, a equação diferencial (1.3) é autônoma e o sistema Hamiltoniano é dito conservativo. Neste caso, se  $\varphi$  é solução de (1.3), para qualquer  $a$  em  $\mathbb{R}$ , a função  $\varphi^a : I + a \rightarrow O \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  definida no intervalo  $I + a = \{s + a : s \in I\}$  por  $\varphi^a = \varphi(t - a)$  também é solução de (1.3), ou seja, as trasnlações no tempo não alteram as soluções. Em particular, tomando  $a = t_0$  temos

$$\varphi(t - t_0, z_0, 0) = \varphi(t, z_0, t_0).$$

Neste caso, também pode-se eliminar a dependência de  $t_0$  na solução, podendo-se escrever a solução como  $\varphi(t, z_0)$  assim podemos dizer que as soluções são curvas parametrizadas em  $O \subset \mathbb{R}^{2n}$ , e  $O$  é denominado de espaço de fase.

A seguir exibiremos uma definição e um resultado referente a sistemas Hamiltonianos autônomos

**Definição 1.1.** *Uma integral primeira para (1.1) é uma função não constante  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é aberto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  que é constante ao longo das soluções de (1.1), ou seja,*

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t, \mathbf{z}_0)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

onde  $\varphi(t, z)$  é a solução de (1.1) com condição inicial  $\varphi(0, z_0) = z_0$ .

**Proposição 1.1.1.** *Em um sistema Hamiltoniano autônomo a função  $H$  é uma integral primeira.*

**Demonstração:** Consideremos a função Hamiltoniana  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e seja  $\varphi(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  solução de (1.1). Definimos  $H$  ao longo de  $\varphi$  por

$$H(\varphi(t)) = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

Assim, para todo  $t$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt}H(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \\ &= H_{q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + H_{q_n} \cdot \dot{q}_n + H_{p_1} \cdot \dot{p}_1 + \dots + H_{p_n} \cdot \dot{p}_n \\ &= \langle H_q \cdot \dot{\mathbf{q}}, H_p \cdot \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \langle -\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Desta forma,  $H(\varphi(t)) = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  é uma quantidade preservada ou uma constante de movimento, ou seja,  $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$ , para qualquer  $t$  no intervalo da solução, onde  $h$  é uma constante em  $\mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que o sistema Hamiltoniano (1.1) é *conservativo*, e dizemos simplesmente que  $H$  representa a energia do sistema. E ainda, o conjunto definido por  $\sum_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U; H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}$ , para um valor arbitrário de  $h \in \mathbb{R}$ , é chamado de *superfície (ou variedade) de energia*.

Notemos que, o fato de  $H$  ser uma integral primeira implica que as soluções estão contidas em alguma superfície de energia  $h$ , ou seja, se  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  denota uma solução de (1.1) então  $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$ , onde  $h$  pode ser negativo, nulo ou positivo dependendo da solução. Portanto,  $\sum_h$  é um conjunto invariante, isto é, se uma solução com condição inicial está sobre  $\sum_h$  então ela permanecerá em  $\sum_h$ , para todo  $t$ .

Na literatura, a maioria dos fenômenos estudados que tem como formulação matemática os sistemas Hamiltonianos, prevalecendo os sistemas Hamiltonianos não lineares que são complexos de serem estudados. Sabendo disto, tenta-se recorrer de alguma forma a um sistema linear correspondente. Assim, nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre sistemas Hamiltonianos lineares.

Dizemos que o sistema Hamiltoniano (1.3) é linear quando for possível escrevê-lo na forma

$$\dot{\mathbf{z}} = JS(t)\mathbf{z} = A(t)\mathbf{z}, \tag{1.4}$$

onde  $A(t) = JS(t)$  é chamada de matriz dos coeficientes do sistema e  $S(t)$  uma matriz simétrica para cada  $t$ . Neste caso, a função Hamiltoniana é uma forma quadrática dada por

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S(t) \mathbf{z}. \quad (1.5)$$

Vamos verificar que de fato a função (1.5) é a função Hamiltoniana do sistema (1.4) para o caso  $2 \times 2$ . Isto é,  $\dot{\mathbf{z}} = \nabla_{\mathbf{z}} H$ . Inicialmente vamos denotar  $S$ , uma matriz simétrica, por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Assim, para  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ , o sistema (1.4) pode ser reescrito da forma,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bq + cp \\ -(aq + bp) \end{pmatrix}.$$

Por sua vez,

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

ou seja,  $H = \frac{1}{2}(aq^2 + 2bpq + cp^2)$ . Consequentemente,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \end{pmatrix},$$

como queríamos verificar.

A seguir, enunciaremos a definição de matrizes Hamiltonianas e alguns resultados relevantes para compreensão de certos aspectos que abordaremos no texto.

**Definição 1.2.** Uma matriz  $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  é dita Hamiltoniana se satisfaz  $A^T J + JA = 0$ .

Observe que a matriz  $A(t)$  do sistema (1.4) é Hamiltoniana. Pois,

$$JA(t) = J^2 S(t) = -S(t) = S(t) J^2 = S(t)^T J J = -(JS(t))^T J = -A(t)^T J.$$

Agora, vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

**Teorema 1.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $A$  é Hamiltoniana
2.  $A = JA^T J$
3.  $A = JR$ , com  $R$  simétrica
4.  $JA$  é simétrica

**Demonstração:** Inicialmente, suponhamos que a matriz  $A$  seja Hamiltoniana. Lembremos que  $J^{-1} = -J$ . Então, usando a definição de Hamiltoniana

$$\begin{aligned}A^T J + JA &= 0 \\JA &= -A^T J \\A &= J^{-1}(-A^T J) \\A &= JATJ.\end{aligned}$$

Isto mostra que 1. implica 2.. Agora, consideremos  $A = JA^T J$ . Tome  $R = A^T J$ , notemos que  $R$  é simétrica, pois

$$R^T = J^T A = -J(JA^T J) = -J^2(A^T J) = A^T J = R.$$

Suponha  $A = JR$ , com  $R$  simétrica. Então,  $JA = J^2 R = -R$ . Daí, como  $-R$  é simétrica, segue que  $JA$  é simétrica. Por fim, se  $JA$  é simétrica então  $JA = (JA)^T = A^T J^T = -A^T J$ . Assim,  $A^T J + JA = 0$  e pela Definição (1.2)  $A$  é Hamiltoniana. ■

Como consequência deste teorema e da definição de sistemas Hamiltonianos lineares, a matriz  $A(t)$  dos coeficientes de um sistema Hamiltoniano linear é uma matriz Hamiltoniana.

**Proposição 1.1.2.** *O polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana  $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  é uma função par.*

**Demonstração:** Considere o polinômio característico de  $A$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I), \tag{1.6}$$

Pelo teorema anterior temos que  $A = JS$ , onde  $S$  é uma matriz simétrica e pelas propriedades da matriz padrão  $J$ , segue

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(JS - \lambda I) = \det([JS - \lambda]^{T}) = \det(S^{T} J^{T} - \lambda I) = \det(-SJ - \lambda I) \\ &= \det(J^{2} S J + \lambda J^{2}) = \det(J(JS + \lambda I)J) \\ &= \det J \cdot \det(JS + \lambda I) \cdot \det J = \det(JS + \lambda I) = p(-\lambda) \end{aligned}$$

■

Segue da proposição acima que o polinômio característico  $p(\lambda)$  dado em (1.6), contém apenas potências pares de  $\lambda$ . Portanto, se este tem uma raiz do tipo  $\lambda = a + ib$ , necessariamente,  $-\lambda = -a - ib$  também será raiz. Se  $\lambda = 0$  é um autovalor, este terá multiplicidade par. Por outro lado, desde que  $A$  é uma matriz com coeficientes reais, então  $\bar{\lambda}$  também será um autovalor de  $A$ . De fato,

$$p(\bar{\lambda}) = \det(A - \bar{\lambda}I) = \det(\bar{A} - \bar{\lambda}I) = 0.$$

Resumindo, se  $\lambda$  é um autovetor de  $A$  então  $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$  também serão.

**Teorema 1.2.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes Hamiltonianas de mesma ordem. Então  $A^T, \alpha A$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $A \pm B$  e  $[A, B] = AB - BA$  também são Hamiltonianas.*

**Demonstração:** Observe que, pelo fato de  $A$  ser Hamiltoniana, usando o teorema (1.1) podemos afirmar que  $A = JA^T J$  e pelo fato de  $J^2 = -I$ ,

$$(A^T)^T J + JA^T = AJ + JA^T = (JA^T J)J + JA^T = -JA^T + JA^T = 0.$$

Assim,  $A^T$  é Hamiltoniana.

Por sua vez, para  $\alpha A$ , temos  $(\alpha A)^T J + J(\alpha A) = \alpha(A^T J + JA) = 0$ .

Note que  $(A + B)^T J + J(A + B) = A^T J + B^T J + JA + JB = 0$ , logo  $A + B$  é Hamiltoniana, e de maneira análoga mostra-se que  $A - B$  é Hamiltoniana.

Por fim, consideremos o caso de  $[A, B]$ . Como  $A$  e  $B$  são Hamiltoniana, temos que  $A = JR$  e  $B = JS$  com  $R$  e  $S$  simétricas. Então,

$$[A, B] = JRJS - JSJR = J(RJS - SJR).$$

Escrevendo  $P = (RJS - SJR)$  temos que  $P$  é simétrica. De fato,

$$P^T = S^T J^T R^T - R^T J^T S^T = -SJR + RJS = P.$$

Com isso, pelo teorema (1.1) concluímos que  $[A, B]$  é Hamiltoniana. ■

A seguir vamos caracterizar uma matriz Hamiltoniana quadrada de ordem 2.

**Proposição 1.1.3.** *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$$

*é Hamiltoniana se, e somente se,  $a^T + d = 0$  e  $b$  e  $c$  são simétricas.*

**Demonstração:** Escrevendo a matriz  $A$  em forma de blocos,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

temos

$$A^T J + J A = 0 \iff \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a - d^T & b^T - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$c - c^T = 0, b^T - b = 0 \text{ e } a^T + d = 0.$$

Portanto,  $c = c^T, b = b^T$  e  $a^T + d = 0$ . ■

## 1.2 O Problema de N-corpos

Para apresentar a formulação matemática do problema fundamental da Mecânica Celeste, o chamado problema de N-corpos, precisamos lembrar de algumas noções de Física.

Começamos com seguintes pressupostos da Física Newtoniana:

- **a mecânica clássica:** ou seja, pressupomos o espaço tempo Newtoniano e a existência de referenciais inerciais, isto é, em relação aos quais valem as três Leis de Newton da Dinâmica, a saber: a *1a. Lei* ou lei da inércia afirma que um corpo permanece em estado de movimento retilíneo e uniforme a menos

que sofra a ação de uma força; a *2a. Lei* diz que a ação de uma força sobre um corpo é a taxa de variação de seu momento linear,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

(no caso de uma partícula com massa  $m > 0$  e velocidade  $v$ , tem-se  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  e a *2a. Lei* fica:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração da partícula; note que a massa é uma medida da inércia); a *3a. Lei* ou lei da ação e reação, diz que se um corpo exerce uma força sobre outro, este também exerce uma força sobre o primeiro, de mesma intensidade mas em sentido contrário.

- **a lei da gravitação universal:** a força de atração gravitacional entre quaisquer duas partículas de massas  $m$  e  $M$ , a uma distância  $r > 0$  entre si, tem intensidade:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

onde  $G$  é a constante de atração gravitacional.

Como em todo modelo matemático de problemas físicos, vamos trabalhar sob certas simplificações ou idealizações, a saber:

- (i) os corpos celestes (por exemplo, planetas) são consideradas como partículas (ou "pontos materiais"), logo destituídos de estrutura interna, sendo a massa a sua única propriedade intrínseca;
- (ii) não há outro tipo de interação entre as partículas além da atração gravitacional e supomos que o sistema de N-corpos estudado está isolado do "resto do universo".

### 1.2.1 Formulação Matemática do Problema de N-corpos

Suponha escolhido um referencial inercial, que modelamos como o  $\mathbb{R}^3$ . Considere então  $N \geq 2$  partículas, indexadas por  $j = 1, 2, \dots, N$ , com massas  $m_j > 0$  e que ocupam, no instante  $t \in \mathbb{R}$ , as posições  $\mathbf{q}_j(t) = (q_{j1}(t), q_{j2}(t), q_{j3}(t))$ . O problema fundamental da mecânica celeste é o de *estudar a evolução do sistema sob a ação das forças gravitacionais*.

A força de atração gravitacional que a  $k$ -ésima partícula exerce sobre a  $j$ -ésima, onde  $k \neq j$ , é dada pela Lei de Gravitação Universal,

$$\mathbf{F}_{jk} = Gm_j m_k \frac{\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j\|^3}.$$

Note que  $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$ , é uma consequência da 3ª Lei de Newton. Assim, a formulação matemática do problema de N-corpos gravitacional Newtoniano é a seguinte: dadas as posições  $\mathbf{q}_j(t_0)$  e velocidades  $\dot{\mathbf{q}}_j(t_0)$  de todas as partículas ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) num instante inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$ , satisfazendo  $\mathbf{q}_j(t_0) \neq \mathbf{q}_k(t_0)$ , se  $j \neq k$ ; estudar o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N Gm_j m_k \frac{\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j\|^3}, \quad (1.7)$$

para  $j = 1, \dots, N$ .

Aqui usamos a notação de Newton para derivadas em relação ao tempo; por exemplo, a velocidade da  $j$ -ésima partícula no instante  $t$  se escreve

$$\mathbf{v}_j(t) = \frac{d\mathbf{q}_j}{dt}(t) = \dot{\mathbf{q}}_j(t).$$

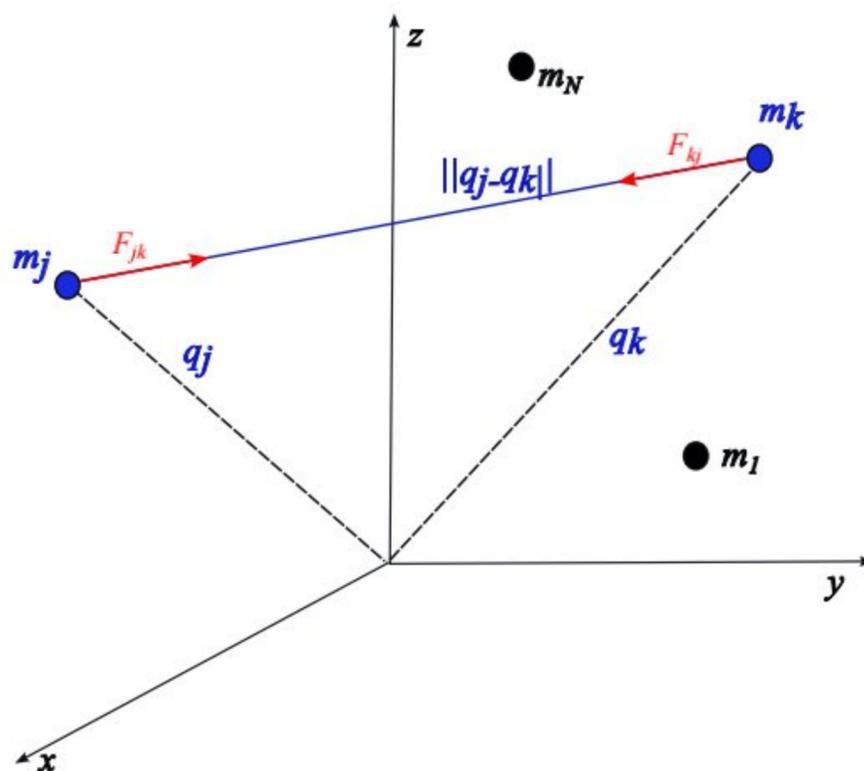


Figura 1.1: Interação entre as partículas  $m_j$  e  $m_k$  na formulação do problema de  $N$ -corpos.

Denotamos também a norma (ou distância) Euclideana usual em  $\mathbb{R}^3$  por:

$$q_{jk} = \|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j\| := \sqrt{\sum_{i=1}^3 (q_{ji} - q_{ki})^2}.$$

Note que para cada  $j = 1, \dots, N$ , a equação 1.7 é tão somente a *2a. Lei* de Newton (equações de movimento) para a  $j$ -ésima partícula, sendo o lado esquerdo da resultante (ou soma) das forças de atração gravitacionais exercidas pelas outras partículas sobre ela. Vemos que do ponto de vista matemático trata-se de *estudar um problema de valores iniciais, ou seja um sistema de  $3N$ -equações diferenciais ordinárias (não-linear) de  $2a.$  ordem.*

É conveniente reformular o problema introduzindo a chamada função energia potencial (gravitacional) do sistema:

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta &\longrightarrow (0, +\infty) \\ \mathbf{q} &\longrightarrow U(\mathbf{q}) := \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{Gm_j m_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|}. \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  é um vetor  $6N$ -dimensional cuja a norma Euclideana correspondente denotamos por  $|\mathbf{q}| = \sqrt{\|\mathbf{q}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{q}_N\|^2}$ .

Note que a função  $U(\mathbf{q})$  só está definida para  $q$  fora do conjunto  $\Delta = \cup_{1 \leq j < k \leq N} \Delta_{jk}$ , com

$$\Delta_{jk} = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_k\}, \quad (1.8)$$

chamado *conjunto singular*.

Em  $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ , chamado *espaço de configurações* do sistema, a função  $U$  é "suave", ou seja, de classe  $C^\infty$  e, mais ainda, *real analítica*.

O problema de  $N$ -corpos pode ser reescrito na forma

$$m_j \ddot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial U}{\partial q_{j1}}(\mathbf{q}), \frac{\partial U}{\partial q_{j2}}(\mathbf{q}), \frac{\partial U}{\partial q_{j3}}(\mathbf{q}) \right), \quad (1.9)$$

com  $j = 1, \dots, N$ , com condições iniciais  $\mathbf{q}_i(t_0) \neq \mathbf{q}_j(t_0)$ , se  $i \neq j$ , e  $\mathbf{v}_j(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_j(t_0)$ .

Por sua vez, este sistema é equivalente ao seguinte sistema de  $6N$ - equações de *primeira* ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{v}_j \\ \dot{\mathbf{v}}_j = \frac{1}{m_j} \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}), \quad j = 1, \dots, N \\ (\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde definimos os vetores  $\mathbf{q}(t_0) = (\mathbf{q}_1(t_0), \dots, \mathbf{q}_N(t_0))$  e  $\mathbf{v}(t_0) = (\mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0))$ .

O conjunto  $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \times \mathbb{R}^{3N}$  chama-se *espaço de fases* do sistema. Assim, denotando por  $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{v})$  os pontos deste espaço, onde  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  e  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ , o sistema de equações acima pode ser reescrito no formato ainda mais abstrato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde

$$f(\mathbf{y}) := \left( \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \frac{1}{m_1} \nabla_{\mathbf{q}_1} U(\mathbf{q}), \dots, \frac{1}{m_N} \nabla_{\mathbf{q}_N} U(\mathbf{q}) \right).$$

Vemos então que, do ponto de vista matemático, o problema de N-corpos consiste em estudar o *sistema dinâmico* acima.

No intuito de obter a função Hamiltoniana para o problema de N-corpos, temos que, considerando N pontos materiais movendo-se em um sistema de referência Newtoniano em  $\mathbb{R}^3$ , em que a única força atuante, seja a força gravitacional entre os mesmos. Seja  $q_i$  o vetor posição da  $i$ -ésima partícula com massa  $m_i$ , então pela segunda lei de Newton e pela lei da gravitação universal temos a seguinte equação do movimento para a  $i$ -ésima massa,

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (1.12)$$

onde  $U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  é o potencial Newtoniano definido por,

$$U = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}, \quad (1.13)$$

e  $G$  é a constante gravitacional universal.

O sistema de equações diferenciais (1.12) define o problema de N-corpos (formulação Newtoniana). Seja  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ . O sistema (1.12) escrito em

sua forma vetorial é dado por:

$$M\ddot{\mathbf{q}} - \nabla U(\mathbf{q}) = 0, \quad (1.14)$$

com  $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N)$ . A formulação Hamiltoniana do problema é obtida introduzindo os vetores dos momentos lineares. Defina  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  por  $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ , portanto  $p_i = m_i\dot{q}_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula. As equações do movimento dadas em (1.14) assumem a forma,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = H_p = M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_q = -U_{\mathbf{q}} \end{cases}$$

onde  $M^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_N}\right)$  e a função Hamiltoniana associada ao sistema acima tem a seguinte forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U(\mathbf{q}). \quad (1.15)$$

### 1.2.2 Existência e Unicidade no Problema de N-corpos

A seguir iremos enunciar o teorema fundamental de existência e unicidade de soluções para o problema de N-corpos. Mas antes, precisaremos enunciar o Teorema de Cauchy-Picard, cujo, é bastante importante para a demonstração.

Para assegurar a existência e unicidade de soluções é preciso impor alguma hipótese adicional sobre o campo vetorial  $F$ . Uma hipótese suficiente é a chamada *condição de Lipschitz*.

**Definição 1.3.** Uma função  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\Omega$  é um aberto, é dita Lipschitziana em  $\Omega$  se existe uma constante  $K > 0$  (dita constante de Lipschitz) tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ,

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

A função  $F$  é dita localmente Lipschitziana em  $\Omega$  se, para todo  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , a  $F$  restrita á bola  $B_b(\mathbf{x}_0)$  satisfaz a condição de Lipschitz (com uma constante de Lipschitz correspondente, que pode depender de  $\mathbf{x}_0$ ).

Seguimos ao Teorema.

**Teorema 1.3. (Teorema de Cauchy-Picard)** *Seja  $F : B_b(\mathbf{u}_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e lipschitziana na bola  $B_b(\mathbf{u}_0)$ , com constante de Lipschitz  $K$ , e tal que  $|F(\mathbf{u})| \leq M$  para  $\mathbf{u} \in \Omega$ . Então o problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} &= F(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução no intervalo  $I_\delta = ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  onde  $0 < \delta < \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ .*

**Demonstração:** Ver a demonstração em [18]. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de existência e unicidade para o problema de valores iniciais.

**Teorema 1.4.** *Considere o problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}) \\ (\mathbf{q}_1(t_0), \dots, \mathbf{q}_N(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0)) \in (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases} \quad (1.16)$$

**Demonstração:** Por simplicidade, vamos tomar a constante de gravitação  $G = 1$ . Seja  $D > 0$  tal que  $\min_{j \neq k} q_{jk}(t_0) \geq \frac{D}{2}$ ; então, o problema tem uma única solução, ao menos em um intervalo  $|t - t_0| < \delta$ , onde  $\delta$  depende apenas de  $D$ , das massas e da energia total. Consideramos o problema equivalente de 1a. ordem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= f(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \in (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases}$$

onde

$$f(\mathbf{y}) = \left( \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \frac{1}{m_1} \nabla_{\mathbf{q}_1} U(\mathbf{q}), \dots, \frac{1}{m_N} \nabla_{\mathbf{q}_N} U(\mathbf{q}) \right).$$

e  $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{v})$ . A idéia então é checar que para  $|y - y_0| < b$  tem-se  $|f(\mathbf{y})| \leq M$  e aplicar o teorema de existência e unicidade, uma vez que  $f(\cdot)$  é suave (analítica). Começamos notando que, como  $q_{jk}(t_0) > 0$  para todo  $j \neq k$ , existe uma constante  $D > 0$  tal que a separação mínima entre as partículas no instante inicial satisfaz

$$q_{min}(t_0) := \min_{j \neq k} q_{jk}(t_0) > \frac{D}{2}.$$

Suponha então que  $|y - y_0| < \frac{D}{8}$ . Como  $|y - y_0| = \sqrt{|q - q_0|^2 + |v - v_0|^2}$ , segue que  $|q - q_0| < \frac{D}{8}$  e  $|v - v_0| < \frac{D}{8}$ .

Lembrando que  $|q - q_0| = \sqrt{\sum_{j=1}^N \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j(t_0)\|^2}$ , segue que para  $j = 1, \dots, N$  temos  $\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j(t_0)\| < \frac{D}{8}$ . Afirmamos que para  $j \neq k$ ,

$$q_{jk} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\| \geq \frac{D}{4}.$$

De fato, isto segue da desigualdade triangular:

$$\frac{D}{2} \leq q_{jk}(t_0) = \|\mathbf{q}_j(t_0) - \mathbf{q}_k(t_0)\| \leq \|\mathbf{q}_j(t_0) - \mathbf{q}_j\| + \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\| + \|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k(t_0)\|,$$

logo,

$$\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\| \geq \frac{D}{2} - \|\mathbf{q}_j(t_0) - \mathbf{q}_j\| - \|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k(t_0)\| \geq \frac{D}{2} - \frac{D}{8} - \frac{D}{8} = \frac{D}{4}.$$

Portanto, temos que  $\min_{j \neq k} q_{jk} \geq \frac{D}{4}$ , logo  $\frac{1}{q_{min}} \leq \frac{4}{D}$  e com isso vamos obter uma estimativa para  $\nabla_{\mathbf{q}_k} U(\mathbf{q})$ . Mais precisamente, como

$$\frac{1}{m_k} \nabla_{\mathbf{q}_k} U(\mathbf{q}) = \sum_{j \neq k} \frac{m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^3},$$

segue que, para  $k = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{1}{m_k} \|\nabla_{\mathbf{q}_k} U(\mathbf{q})\| \leq \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{q_{jk}^2} \leq c_1 \frac{16}{D^2},$$

onde a constante  $c_1$  depende apenas das massas.

Agora,

$$\frac{1}{2} m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 \leq T_{t_0} = U_{t_0} + h,$$

onde  $h$  é a energia total do sistema em  $t_0$ . Mas de  $r_{min}(t_0) > \frac{D}{2}$ , vem que  $\frac{1}{q_{min}(t_0)} < \frac{2}{D}$  e obtemos a seguinte estimativa:

$$U_{t_0} \leq \frac{1}{r_{min}(t_0)} \sum_{1 \leq j < k \leq N} m_j m_k \leq A,$$

onde a constante  $A$  depende apenas de  $D$  e das massas. Assim, para  $k = 1, \dots, N$ ,

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 \leq \frac{2}{m_k} \sqrt{A + h}.$$

Como  $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0))$ , segue que

$$|\mathbf{v}(t_0)| \leq c_2 \sqrt{A + h},$$

onde a constante  $c_2$  só depende das massas. Pela desigualdade triangular,

$$|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| + |\mathbf{v}(t_0)| < \frac{D}{8} + c_2\sqrt{A+h} := c_3.$$

Em suma, concluímos que se  $|y - y_0| < \frac{D}{8}$ , então

$$|f(\mathbf{y})| \leq \sqrt{c_3^2 + Nc_1 + \left(\frac{16}{D^2}\right)} := M$$

onde  $M$  só depende de  $D, h$  e das massas. Aplicando o teorema [1.3](#) a prova está terminada. ■

### 1.2.3 Leis de Conservação

Munidos do teorema de existência e unicidade podemos passar ao estudo de uma das noções cruciais na análise do problema de N-corpos: as *integrais*, constantes de movimento ou ainda "integrais primeiras". São também chamadas *Leis de Conservação*, pois usualmente estão associadas a certas grandezas de significado físico fundamental e que permanecem constantes ao longo do tempo. No que se segue supomos que  $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  é a solução do problema de N-corpos com dadas condições iniciais.

A existência de integrais de movimento é muito importante pois fornece informações valiosas sobre o comportamento das soluções (ver definição [\(1.1\)](#) de integral primeira). Por exemplo, se a função  $I(\mathbf{y})$  é uma integral, então sabemos que a solução do problema de valores iniciais está restrita a uma superfície de nível desta função, reduzindo de uma unidade a "dimensão" do problema.

Diz-se que integrais  $I_1, \dots, I_n$  são independentes se os gradientes  $\nabla_{q,p,t} I_1, \dots, \nabla_{q,p,t} I_n$ , são vetores linearmente independentes.

Vejam os a seguir uma proposição que descreve propriedades relacionada a integrais de movimento no problema de N-corpos.

**Proposição 1.2.1.** *As dez integrais de movimento clássicas do problema de N-corpos são:*

1. a energia total  $H$ ;
2. as componentes do momento linear total  $P$ ;

3. as componentes do centro de massa do sistema  $R_{cm}$ ;

4. as componentes do momento angular total  $L$ ,

e ligadas, respectivamente, às leis de conservação da energia, do momento linear, do movimento do centro de massa e do momento angular.

**Demonstração:** 1. A demonstração desse item é obtida a partir da proposição (1.1.1), usando a função Hamiltoniana  $H$  associada ao problema.

2. Primeiramente, definimos o *momento linear total do sistema*:

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{p}_j,$$

que é simplesmente a soma dos momentos lineares das partículas individuais. Para deduzir sua lei de conservação, soma-se os termos nos dois lados da equação de movimento para obter:

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{Gm_j m_k}{q_{kj}^3} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j) = \mathbf{0},$$

uma vez que cada termo é cancelado por um outro com sinal oposto. Segue que,

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{q}}_j \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{p}_j \right) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (1.17)$$

que é a Lei de Conservação do Momento Linear. Temos então que

$$\mathbf{P} = \mathbf{a},$$

para um vetor constante  $\mathbf{a}$ . Note que temos três integrais de movimento, correspondendo a cada componente do vetor  $P$ .

Agora, como

$$\mathbf{P} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \right),$$

segue que,

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (1.18)$$

para um vetor constante  $\mathbf{b}$ , o que resulta em mais três integrais.

3. A equação (1.18) tem a seguinte interpretação. Considere a massa total do sistema,  $M = \sum_{j=1}^N m_j$ , então o vetor posição do *centro de massa* ( $CM$ ) do sistema é definido por

$$\mathbf{R}_{cm} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j,$$

que é a média ponderada das posições das partículas onde os "pesos" são as respectivas massas. Do que vimos acima decorre que  $\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{0}$  e podemos reescrever a equação acima como

$$\mathbf{R}_{cm} = \mathbf{P}_{cm}t + \mathbf{R}_0, \quad (1.19)$$

onde  $\mathbf{P}_{cm} = \frac{\mathbf{P}}{M} = \frac{\mathbf{a}}{M}$  é a velocidade do  $CM$  e  $\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{b}}{M}$  sua posição inicial. Esta equação diz que, não importa quão complicado é o movimento das partículas, o  $CM$  do sistema tem movimento retilíneo e uniforme.

A equação (1.18) também equivale a chamada *Lei de Conservação para o Movimento do Centro de Massa*,

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{0},$$

onde

$$\mathbf{G} \equiv \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j - t\mathbf{P}.$$

Uma vez que o  $CM$  tem movimento retilíneo e uniforme, então o referencial do  $CM$  é um referencial inercial, e portanto no qual valem as Leis de Newton.

Considerando as posições das partículas **em relação ao  $CM$** ,

$$\tilde{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j - \mathbf{R}_{cm},$$

então, como  $\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{0}$ , segue que as equações de movimento têm a mesma forma quando escritas em termos dos vetores  $\tilde{\mathbf{q}}_j$  quanto em termos dos vetores  $\mathbf{q}_j$ . Sem perda de generalidade vamos supor de agora em diante que o centro de massa está fixo na origem:

$$\mathbf{R}_{cm} = \mathbf{0}.$$

Assim, as leis de conservação do momento linear e do movimento do  $CM$  ficam:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j = \mathbf{0}, \\ \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}. \end{cases}$$

totalizando 6 integrais de movimento independentes.

4. Finalmente, definimos o momento angular total do sistema de partículas, em relação a origem (no caso, o *CM*) por:

$$\mathbf{L} := \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \times \dot{\mathbf{q}}_j, \quad (1.20)$$

que é uma medida da "rotação" do sistema (em relação a origem).

Fazendo o produto vetorial pelo vetor  $\mathbf{q}_j$  nas equações de movimento, e somando, obtemos:

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \times \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{Gm_j m_k}{q_{kj}^3} \mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k = \mathbf{0},$$

onde usamos  $\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_j = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k = -\mathbf{q}_k \times \mathbf{q}_j$ . Comparando com a equação (1.20), obtemos a *Lei de Conservação do Momento Angular*,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \times \dot{\mathbf{q}}_j \right) = \mathbf{0}.$$

Portanto,  $\mathbf{L} = \mathbf{c}$ , para um vetor constante  $\mathbf{c}$ , 3 integrais de movimento adicionais. ■

Em resumo obtivemos as dez integrais de movimento clássicas. Observe que todas são funções algébricas das posições, velocidades e do tempo.

As Leis de Conservação têm muitas aplicações no estudo do problema de *N*-corpos. A seguir, veremos dois resultados importantes que serão utilizados em resultados do próximo capítulo, são eles: a *identidade de Lagrange-Jacobi* e a *desigualdade de Sundman*.

Estes resultados são expressos através de uma grandeza muito útil chamada momento de inércia do sistema de partículas, definido por:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j\|^2, \quad (1.21)$$

que, a grosso modo, é uma medida da distribuição espacial das massas do sistema.

Agora enunciaremos o Teorema de Euler, que será um resultado importante para a demonstração da Identidade de Lagrange-Jacobi (uma das aplicações do problema de N-corpos), que usaremos com certa frequência ao decorrer do texto.

**Lema 1.2.1.** *Dada uma função  $f(x)$  homogênea de grau  $\alpha$ , isto é,  $f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$  então*

$$x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x).$$

Lembrando que na mecânica, a energia cinética total do sistema de partículas é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{v}_j\|^2,$$

obtemos uma identidade importante para o problema de  $N$ -corpos envolvendo esta quantidade.

**Lema 1.2.2. (Identidade de Lagrange-Jacobi)** *No problema de  $N$ -corpos temos*

$$\ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h.$$

**Demonstração:** Basta fazer o cálculo explicitamente. Derivando a expressão (1.21) com respeito a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \dot{I} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \cdot \dot{\mathbf{q}}_j &\Rightarrow \ddot{I} = \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{v}_j\|^2 + \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \\ &= 2T + \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_j \cdot \nabla_{\mathbf{q}_j} U = 2T - U, \end{aligned}$$

onde na última identidade usamos que

$$-U(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_j \cdot \nabla_{\mathbf{q}_j} U(x),$$

que segue do fato da energia potencial  $U$  ser uma função homogênea de grau  $-1$  e da aplicação do seguinte resultado, se  $f$  é homogênea e diferenciável em  $U$ , então  $x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)$ , onde  $\alpha$  é o grau da função (ver Teorema 1.2.1). As duas últimas igualdades no enunciado seguem imediatamente da conservação da energia. ■

Outro resultado importante é dado pela seguinte desigualdade.

**Lema 1.2.3. (Desigualdade de Sundman)** *Considere o momento angular total do sistema,  $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \times \mathbf{v}_j$ , e seja  $c = \|\mathbf{c}\|$ . Então*

$$c^2 \leq 4I(\ddot{\mathbf{I}} - h).$$

**Demonstração:** Trata-se de uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz da álgebra linear. Temos que

$$\begin{aligned} c = \|\mathbf{c}\| &\leq \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j \times \mathbf{v}_j\| \leq \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j\| \|\mathbf{v}_j\| = \left( \sum_{j=1}^N \sqrt{m_j} \|\mathbf{q}_j\| \right) \left( \sum_{j=1}^N \sqrt{m_j} \|\mathbf{v}_j\| \right) \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{v}_j\|^2} \leq \sqrt{2I} \sqrt{2T} = \sqrt{4IT}, \end{aligned}$$

e o resultado segue da identidade de Lagrange-Jacobi na forma  $T = \ddot{\mathbf{I}} - h$ . ■

### 1.3 Soluções de equilíbrio relativo

Como já mencionado anteriormente o principal problema no estudo de  $N$ -corpos é exhibir explicitamente uma solução do problema. Dado um sistema autônomo de equações diferenciais as primeiras soluções buscadas são as soluções de *equilíbrio* ou estacionárias. Uma solução de equilíbrio para o problema de  $N$ -corpos (1.12) é uma solução satisfazendo  $\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{q}_i(t_0)$ , para todo  $i = 1, \dots, N$ . Se existisse tal solução teríamos  $\ddot{\mathbf{q}}_i = 0$  ou equivalente

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.22)$$

No entanto, a função potencial  $U$  é homogênea de grau  $-1$ , então pelo teorema de Euler para funções homogêneas,

$$\sum_{i=1}^N q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = -U \quad (1.23)$$

Como  $U$  é a soma de termos positivos, logo também é positivo. Se (1.22) fosse verdade, então o lado esquerdo de (1.23) seria zero, o que dá uma contradição. Assim não há soluções de equilíbrio do problema de  $N$ -corpos.

Um *equilíbrio relativo* do problema de  $N$ -corpos é uma solução onde a configuração permanece uma isometria da configuração inicial, como se a configuração fosse um corpo rígido. Mais precisamente temos a seguinte definição

**Definição 1.4.** Uma solução  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \dots, \mathbf{q}_N(t))$  do problema de  $N$ -corpos é chamada de *equilíbrio relativo* se existe  $\omega(t) \in SO(3)$ <sup>1</sup> tal que

$$\mathbf{q}_i(t) = \Omega(t)q_i(0),$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

Soluções de *equilíbrio relativo* são portanto soluções para as quais cada corpo está fixo relativamente a um sistema móvel de coordenadas baricêntricas. Isto porque as forças de atração mútua seriam compensadas pelas forças centrífugas devidas à rotação de cada corpo em torno do centro de massa do sistema. Para um observador que girasse em torno do eixo ortogonal ao plano das órbitas, com a mesma velocidade angular, as partículas pareceriam estar paradas, daí o nome solução de equilíbrio relativo. Por exemplo, no problemas de três corpos estas soluções existem e foram descobertas por Euler no caso colinear e por Lagrange no caso não colinear.

Para estudar estas soluções vamos escrever as equações do movimento em um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular  $\omega$  constante em torno de um eixo fixo. Consideremos o referencial móvel  $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$  em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1.24)$$

---

<sup>1</sup>O grupo de rotação ou  $SO(3)$  é o grupo de todas as rotações sobre a origem de um espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  sob a operação de composição

Então, temos

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\theta}\mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\theta}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = 0.$$

Usando estas fórmulas, se denotamos

$$\mathbf{q}_i = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_3, \quad (1.25)$$

obtemos para a velocidade e a aceleração as seguintes expressões

$$\dot{\mathbf{q}}_i = (\dot{\xi} - \eta\dot{\theta})\mathbf{e}_1 + (\dot{\eta} + \xi\dot{\theta})\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3, \quad (1.26)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = [(\ddot{\xi} - \xi\dot{\theta}^2) - (\eta\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta})]\mathbf{e}_1 + [(\ddot{\eta} - \eta\dot{\theta}^2) + (\xi\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\theta})]\mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta}\mathbf{e}_3. \quad (1.27)$$

Para um sistema rotatório com velocidade constante,  $\theta(t) = \omega t$ , temos  $\dot{\theta} = \omega$  e  $\ddot{\theta} = 0$  de modo que por (1.26) e (1.27) temos

$$\dot{\mathbf{q}}_i = (\dot{\xi} - \omega\eta)\mathbf{e}_1 + (\dot{\eta} + \omega\xi)\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3, \quad \ddot{\mathbf{q}}_i = (\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi)\mathbf{e}_1 + (\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta)\mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta}\mathbf{e}_3.$$

Observemos que

$$\mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i = (\eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta} - \omega\xi\zeta)\mathbf{e}_1 + (\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta} + \omega\eta\zeta)\mathbf{e}_2 + (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} + \omega(\xi^2 + \eta^2))\mathbf{e}_3.$$

Em particular, se  $\mathbf{q}_i$  move-se no plano  $\xi\eta$ , temos  $\zeta = 0$  e obtemos

$$\mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i = (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} + \omega(\xi^2 + \eta^2))\mathbf{e}_3.$$

Logo as equações do movimento do problema dos  $N$ -corpos no sistema giratório (que gira com uma velocidade angular constante  $\omega$ ) é dado pelo sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i - 2\omega\dot{\eta}_i - \omega^2\xi_i &= \frac{1}{m_i}U_{1,i} \\ \ddot{\eta}_i + 2\omega\dot{\xi}_i - \omega^2\eta_i &= \frac{1}{m_i}U_{2,i} \\ \ddot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i}U_{3,i} \end{aligned} \quad (1.28)$$

para  $i = 1, \dots, N$ , onde  $U_{j,i} = \nabla_{\mathbf{q}_i} U \cdot \mathbf{e}_j$ , para  $j = 1, 2, 3$ .

Suponhamos agora que cada partícula move-se no plano  $\xi\eta$ , e sejam  $(\xi_i, \eta_i, 0)$  suas coordenadas na base  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Então, as equações do movimento (1.28) se reduzem às seguintes:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i - 2\omega\dot{\eta}_i - \omega^2\xi_i &= \frac{1}{m_i}U_{1,i} \\ \ddot{\eta}_i + 2\omega\dot{\xi}_i - \omega^2\eta_i &= \frac{1}{m_i}U_{2,i}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

**Teorema 1.5.** Fixada a velocidade angular  $\omega$ , uma solução  $\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , do sistema (1.29) é uma solução de equilíbrio relativo se, e somente se,  $(\xi_i(t_0), \eta_i(t_0))$  é uma solução do sistema algébrico

$$\begin{aligned} -\omega^2 \xi_i &= \frac{1}{m_i} U_{1,i} \\ -\omega^2 \eta_i &= \frac{1}{m_i} U_{2,i}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

para  $i = 1, \dots, N$ .

**Demonstração:**

Para uma solução de equilíbrio relativo pela definição da base considerada para colocar as equações de movimento, temos  $\xi_i(t) = \xi_i(t_0)$  e  $\eta_i(t) = \eta_i(t_0)$ , de modo que as derivadas em (1.29) se anulam e, por conseguinte, as condições iniciais dão uma solução para o sistema algébrico (1.30).

Reciprocamente, se  $(\xi_i, \eta_i)$  representa uma solução para o sistema (1.30) então pondo  $\mathbf{q}_i(t) = \xi_i \mathbf{e}_1(t) + \eta_i \mathbf{e}_2(t)$ , obtemos uma solução de equilíbrio relativo  $\xi_i(t)$ ,  $\eta_i(t)$  com velocidade angular  $\omega$ . ■

De maneira análoga podemos escrever a função Hamiltoniana do problema de  $N$ -corpos (1.15) em coordenadas giratórias. Para isso defina

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \exp(\omega K t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \text{sen } \omega t \\ -\text{sen } \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

matrizes  $2 \times 2$ , e considere o problema de  $N$ -corpos em  $\mathbb{R}^2$ . Então os vetores  $q_i, p_i$  são 2-vetores. Introduza um conjunto de coordenadas que gira uniformemente com frequência  $\omega$  por

$$\mathbf{u}_i = \exp(\omega K t) \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{v}_i = \exp(\omega K t) \mathbf{p}_i \quad (1.32)$$

Como  $K$  é simétrica,  $\exp(\omega K t)$  é ortogonal para todo  $t$ , então a mudança de variáveis é simplética. A função restante é  $-\sum \omega u_i^T K v_i$ , é chamada de termo de Coriolis ou *força de Coriolis*. Assim o Hamiltoniano do problema de  $N$ -corpos em coordenadas giratórias é dado por

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{v}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^N \omega u_i^T K v_i - U(\mathbf{u}) \quad (1.33)$$

e as equações de movimento são

$$\dot{u}_i = v_i + \omega K u_i, \quad \dot{v}_i = \omega K v_i + \frac{\partial U}{\partial u_i}. \quad (1.34)$$

Para encontrar um equilíbrio em coordenadas giratórias, temos que resolver  $\dot{u}_i = \dot{v}_i = 0$ , e estas condições levadas à equação (1.34) nos fornece

$$\omega^2 u_i + \frac{\partial U}{\partial u_i} = 0$$

Para o problema de N-corpos em  $\mathbb{R}^3$  basta considerar (1.32), (1.33) e (1.35) com

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Capítulo 2

# Singularidades no Problema de N-corpos

Pelo Teorema [1.4](#), (Teorema de existência e unicidade do problema de  $N$ -corpos) obtivemos que o problema de  $N$ -corpos (por simplicidade consideremos  $t_0 = 0$ ):

$$\begin{cases} m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}), & j = 1, \dots, N \\ (\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \in (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N} \end{cases}$$

possui uma única solução  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t))$ , ao menos num intervalo de tempo  $(\omega_-, \omega_+)$ , talvez muito pequeno (solução local). Para fixar idéias, consideramos apenas a evolução futura do sistema, ou seja em  $[0, \omega_+)$ .

Por outro lado, novamente da teoria das EDO's, sabemos que existe um intervalo maximal de existência, digamos  $[0, t^*)$ , com  $0 < t^+ \leq t^* \leq +\infty$ . É natural perguntar se este intervalo coincide ou não com  $[0, +\infty)$ . Isso leva a noção de uma singularidade no problema de  $N$ -corpos.

**Definição 2.1.** *Se  $t^* < +\infty$ , diz-se que a solução  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t))$  tem uma singularidade no instante  $t = t^*$ . Caso  $t^* = +\infty$  a solução é dita regular.*

Um exemplo de singularidades no problema de  $N$ -corpos são as *colisões*, que será discutido na seção seguinte. Mas, será que existem outros tipos de singularidades?

A questão da *natureza das singularidades* no problema de  $N$ -corpos foi abordada pelo matemático francês Paul Painlevé, o qual obteve vários resultados fundamentais, os quais veremos neste capítulo. Finalizamos este capítulo com os

resultados obtidos por von Zeipel, onde há uma caracterização das singularidades em termos do comportamento do momento de inércia total do sistema quando  $t$  se aproxima da singularidade. Como aplicação do Teorema de von Zeipel, estudamos as singularidades no problema colinear dos  $N$ -corpos.

## 2.1 Colisões e Colapso Total

Considere o vetor  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t))$  que fornece as posições das partículas correspondentes a uma solução do problema de  $N$ -corpos dado por (1.12).

**Definição 2.2.** Diz-se que ocorre uma colisão no instante  $t^*$  se cada  $\mathbf{q}_j(t)$  tem limite finito,  $j = 1, \dots, N$  quando  $t \rightarrow t^*$ , sendo que dois deles ao menos são iguais, isto é, para algum  $i \neq k : \mathbf{q}_i(t^*) = \mathbf{q}_k(t^*)$ .

Equivalentemente, uma colisão ocorre quando o vetor  $q(t) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t))$  converge, quando  $t \rightarrow t^*$ , para um ponto  $q^* \in \Delta$ , onde  $\Delta$  é o conjunto singular (1.8).

As colisões são exemplos de singularidades das soluções do problema de  $N$ -corpos. Note que se ocorre colisão em  $t^* < \infty$ , então

$$\lim_{t \rightarrow t^*} U(\mathbf{q}(t)) = +\infty,$$

De fato, existe um par  $i, k$  tal que o

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \frac{1}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_k\|} = +\infty,$$

e as equações de movimento (1.12) não fazem mais sentido. Em particular, pela conservação da energia, a velocidade de alguma(s) das partículas diverge quando  $t \rightarrow t^*$ . Uma questão natural que abordaremos adiante é de saber se existem outros tipos de singularidades além das colisões.

As colisões são eventos "raros" ou "atípicos": pode-se provar que o subconjunto das condições iniciais do problema de  $N$ -corpos que levam o sistema a uma colisão, é um subconjunto "pequeno" no espaço de fase no sentido de terem volume (medida de Lebesgue) zero (ver detalhes em [17]).

Devemos mencionar que as colisões são idealizações matemáticas, uma vez que estamos lidando com pontos materiais. As colisões reais entre objetos celestes

são eventos extremamente complexos e de grande importância, por exemplo, para entender a formação do sistema solar. Ademais, tudo indica que os efeitos de uma colisão da Terra com um asteróide foram a causa provável da extinção dos dinossauros há cerca de 65 milhões de anos atrás.

Definiremos a seguir um conceito relacionado a colisões em relação ao problema de N-corpos.

**Definição 2.3.** *Diz-se que ocorre o colapso total no instante  $t^*$  (finito ou não) se todas as partículas colidem no mesmo ponto.*

No problema de N-corpos podem ocorrer colisões duplas, triplas, quádruplas, etc. No caso  $N = 3$  as únicas possibilidades são colisões duplas ou triplas (colapso total).

Veremos a seguir um resultado importante relacionado ao estudo do colapso total. Seguimos ao seguinte Lema:

**Lema 2.1.1.** *O momento de inércia  $I$  do sistema de partícula do problema de N-corpos definido por (1.21) pode ser expresso como*

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j < k}^N m_j m_k \|q_{jk}\|^2.$$

**Demonstração:** Lembrando que  $q_{jk} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|$ , temos para  $j, k = 1, \dots, N$ ,

$$\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^2 = \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j\|^2 + \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_k\|^2 - 2\mathbf{q}_k \left( \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{q}_j \right).$$

Como por hipótese o CM está em repouso na origem, o último termo é zero, assim a equação acima fica:

$$\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^2 = 2I + M\mathbf{q}_k^2.$$

Multiplicando agora por  $m_k$  e somando em  $k$  de 1 até  $N$  vem que

$$\sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=1}^N m_j q_{jk}^2 = 2IM + 2IM = 4IM,$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=1}^N m_j q_{jk}^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N m_k m_j q_{jk}^2 = 2 \sum_{j<k}^N m_k m_j q_{jk}^2,$$

assim,

$$2 \sum_{j<k}^N m_k m_j q_{jk}^2 = 4IM \quad \longrightarrow \quad I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^N m_j m_k \|q_{jk}\|^2,$$

como desejado. ■

O importante corolário a seguir mostra que  $\sqrt{I}$  é uma estimativa da separação máxima entre as partículas enquanto que  $U^{-1}$  é uma estimativa da sua separação mínima.

**Corolário 2.1.1.** *Sejam  $I$  o momento de inércia do sistema de partículas e o  $U$  o potencial gravitacional, existem constantes positivas  $A, B, C$  e  $D$ , que dependem somente das massas  $m_1, \dots, m_N$ , tais que:*

$$A\sqrt{I} \leq Q \leq B\sqrt{I},$$

e

$$CU^{-1} \leq q \leq DU^{-1}$$

onde  $q = q_{min} = \min_{j \neq k} q_{jk}$  e  $Q = q_{max} = \max_{j \neq k} q_{jk}$  são, respectivamente, a separação mínima e máxima entre as partículas.

**Demonstração:** Considere  $m_0 = \min_{1 \leq i \leq N} m_i$ . Pela definição de  $Q$ , temos

$$Q^2 \leq \sum_{j<k}^N q_{jk}^2,$$

Usando o Lema [2.1.1](#) e a definição de  $m_0$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^N m_0^2 q_{jk}^2 &\leq I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^N m_j m_k q_{jk}^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^N m_j m_k \right) Q^2 = \left( \frac{1}{4M} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N m_j m_k \right) Q^2 = \frac{MQ^2}{4}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{m_0^2}{2M}Q^2 \leq I \leq \frac{M}{4}Q^2,$$

ou ainda, trabalhando de modo separado as desigualdades acima, tem-se

$$\frac{2M}{m_0^2}I \geq Q^2 \geq \frac{4}{M}I \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{M}\sqrt{I} \leq Q \leq \frac{\sqrt{2M}}{m_0}\sqrt{I},$$

e tomando  $A = \frac{2}{M}$  e  $B = \frac{\sqrt{2M}}{m_0}$ , chega-se na primeira desigualdade.

Por outro lado, como  $\sum_{j < k}^N m_j m_k = \frac{M^2}{2}$ , temos

$$U \leq \sum_{j < k}^N \frac{Gm_j m_k}{q} \leq \frac{GM^2}{2q}. \quad (2.1)$$

Além disso, para  $1 \leq j, k \leq N$ ,

$$U \geq \frac{Gm_j m_k}{q_{jk}} \geq \frac{Gm_0^2}{q_{jk}},$$

e como em cada instante ao menos um dos  $q'_{jk}$ s é igual a  $q$ , temos

$$U \geq \frac{Gm_0^2}{q}, \quad (2.2)$$

Juntando (2.1) e (2.2), vem que

$$\frac{Gm_0^2}{q} \leq U \leq \frac{GM^2}{2q} \quad \longrightarrow \quad \frac{Gm_0^2}{U} \leq q \leq \frac{GM^2}{2U}.$$

Tomamos então  $C = Gm_0^2$  e  $D = \frac{GM^2}{2}$ , e obtemos a segunda desigualdade. Sendo assim, finalizando a demonstração. ■

Uma consequência deste corolário é que se o colapso ocorre, ele se dá na origem.

**Corolário 2.1.2.** *Se ocorre o colapso total no instante  $t = t^*$  (finito ou não), então ele ocorre na origem.*

**Demonstração:** Como por hipótese todas as partículas colidem, temos que, para todo  $j = 1, \dots, N$ , existem e coincidem os limites  $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}_j(t^*)$ . Portanto, se  $j \neq k$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} q_{jk}(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \|\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_k(t)\| = \|\mathbf{q}_j(t^*) - \mathbf{q}_k(t^*)\| = 0.$$

Como  $0 \leq q_{min}(t) \leq q_{jk}$  para todo  $j \neq k$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0$  e pelo Corolário 2.1.1 vem que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} I(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{q}_j\|^2(t^*) = 0,$$

temos que  $\|\mathbf{q}_j\| = 0$ , e daí que para todo  $j = 1, \dots, N$ , temos  $\mathbf{q}_j(t^*) = 0$  ■

O resultado seguinte mostra que o colapso total não demora um tempo infinito para ocorrer.

**Proposição 2.1.1.** *Se o colapso total ocorre no instante  $t = t^*$ , então  $t^* < +\infty$ .*

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que o colapso ocorra para  $t^* = +\infty$ . (raciocínio análogo vale para o caso  $t^* = -\infty$ ). Pelo Corolário 2.1.2, para todo  $j \neq k$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q_{jk}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{q}(t) = 0,$$

onde  $\mathbf{q}(t) = \min_{j \neq k} q_{jk}$  é a separação mínima das partículas. Portanto, pela estimativa do Corolário 2.1.1,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U(\mathbf{q}(t)) = +\infty.$$

De fato,

$$\frac{C}{U(\mathbf{q}(t))} \leq \mathbf{q}(t) \leq \frac{D}{U(\mathbf{q}(t))} \implies \frac{C}{\mathbf{q}(t)} \leq U(\mathbf{q}(t)),$$

calculando o limite com  $t$  tendendo  $+\infty$  da última desigualdade chega-se ao resultado.

Mas, da identidade de Lagrange-Jacobi,  $\ddot{I}(t) = U(\mathbf{q}(t)) + 2h$ , decorre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{I}(t) = +\infty.$$

Portanto, existe  $t_1 > 0$  tal que para todo  $t > t_1$  tem-se  $\ddot{I}(t) \geq 1$ . Integrando esta desigualdade duas vezes no intervalo  $[t_1, t]$ , obtemos

$$I(t) \geq \left( I(t_1) - I(t_1) - \frac{t_1^2}{2} \right) + (I(t_1) - t_1)t + \frac{t^2}{2}$$

então segue que

$$I(t) \geq \frac{1}{2}t^2 + at + b,$$

onde  $a$  e  $b$  dependem apenas de  $t_1$ . Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty,$$

o que é uma contradição. ■

Note então que o colapso total em  $t = t^*$  (necessariamente  $< \infty$ ) se, e somente se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ .

Podemos agora enunciar o teorema do colapso total, devido a Sundman (1907), resultado já conhecido por Weierstrass para o caso do problema de três corpos (sem, porém, tê-lo publicado).

**Lema 2.1.2.** *Seja*

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x), \end{aligned}$$

*uma função duas vezes diferenciável em  $(a, b)$  com  $f(x) > 0$  e  $f''(x) > 0$  em  $(a, b)$ . Se  $f(b) = 0$ , então  $f'(x) < 0$  em  $(a, b)$ .*

**Teorema 2.1. (Teorema de Sundman-Weierstrass)** *Se ocorre o colapso total no problema de  $N$ -corpos, então o momento angular total é nulo:  $\mathbf{c} = 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $t^* < \infty$  o instante do colapso total, que supomos positivo, sem perda de generalidade. Então, como visto na seção anterior, para todo  $j \neq k$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} q_{\min}(t) = 0,$$

e portanto pelo Corolário 2.1.1

$$\lim_{t \rightarrow t^*} U(t) = +\infty.$$

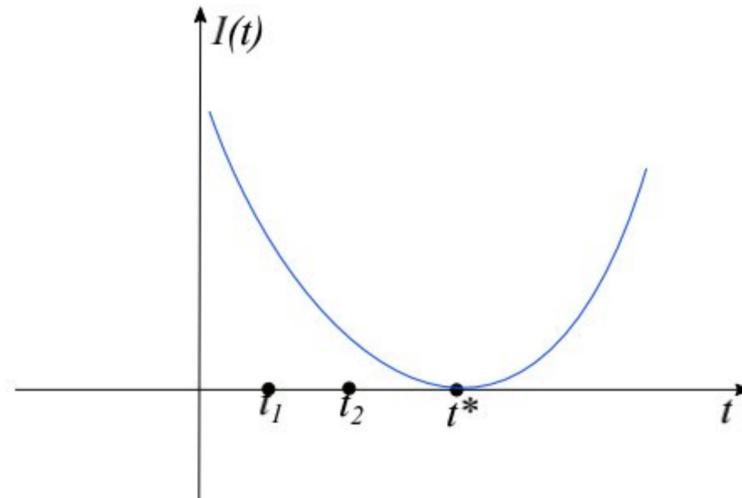


Figura 2.1: Gráfico da função  $I(t)$ .

Portanto, pela desigualdade de Lagrange-Jacobi,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \ddot{I}(t) = +\infty.$$

Logo, para  $t$  numa vizinhança de  $t^*$  temos  $\ddot{I}(t) > 0$ . Por definição temos que  $I(t) > 0$ , e como  $I(t^*) = 0$ , usando o Lema [2.1.2](#) tem-se que  $I(t)$  é estritamente decrescente nesta vizinhança (ver Figura [2.1](#)).

se  $t \in [t_1, t_2]$ , onde  $t_2 < t^*$ , então  $-\dot{I}(t) > 0$ .

Considere agora a desigualdade de Sundman na forma:

$$\ddot{I}(t) \geq \frac{c^2}{4I} + h,$$

para  $t \in [t_1, t_2]$ . Multiplicando por  $-\dot{I}(t) > 0$ , obtemos:

$$-\ddot{I}I \geq -\frac{c^2}{4} \frac{\dot{I}}{I} - h\dot{I},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{I}^2 \geq -\frac{c^2}{4} \frac{d}{dt} \ln(I) - h \frac{d}{dt} I.$$

Integrando ambos os lados de  $t_1$  a  $t_2$  obtemos:

$$-\frac{1}{2} [\dot{I}^2(t_2) - \dot{I}^2(t_1)] \geq \frac{c^2}{4} \ln \left[ \frac{I(t_1)}{I(t_2)} \right] - h[I(t_2) - I(t_1)].$$

ou, reagrupando,

$$\frac{c^2}{4} \ln \left[ \frac{I(t_1)}{I(t_2)} \right] \leq h[I(t_2) - I(t_1)] - \frac{1}{2}[\dot{I}^2(t_2) - \dot{I}^2(t_1)].$$

Mas,  $I(t_2) - I(t_1) \leq I(t_2)$  e  $\dot{I}^2(t_1) - \dot{I}^2(t_2) \leq \dot{I}^2(t_1)$ , e temos então que

$$\frac{c^2}{4} \leq \frac{hI(t_2) + \dot{I}^2(t_1)}{\ln \left[ \frac{I(t_1)}{I(t_2)} \right]}.$$

Observe que

$$\lim_{t_2 \rightarrow t^*} I(t_2) = 0 \text{ e } \lim_{t_2 \rightarrow t^*} \left( \frac{I(t_1)}{I(t_2)} \right) = +\infty,$$

com  $t_1$  fixo, então o limite do lado direito da desigualdade acima é igual a zero. Logo  $c^2 \leq 0 \Rightarrow c = 0$ , concluindo assim a demonstração do teorema. ■

## 2.2 Uma Caracterização das Singularidades

Veremos em seguida uma caracterização demonstrada por Painlevé, que nos diz, sobre a ocorrência de singularidades examinada das equações de movimento, que esteja ligada a possibilidade de que as distâncias  $q_{jk}(t)$  entre alguma(s) partículas tornarem-se arbitrariamente pequenas quando  $t$  tende  $t^*$ .

**Teorema 2.2. (Painlevé, 1895)** *Uma solução do problema de N-corpos possui uma singularidade no instante  $t^*$  se, e somente se,*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0,$$

onde  $q_{min}(t) = q(t) \equiv \min_{j \neq k} q_{jk}(t)$

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0$  e que, por absurdo, não ocorra uma singularidade no instante  $t = t^*$ . Então a solução  $\mathbf{q}(t)$  é uma função suave para todo  $t$  num intervalo limitado  $[t_1, t^*]$  com extremidade  $t^*$ . Portanto existe uma constante  $b_1 > 0$  tal que

$$|\ddot{\mathbf{q}}(t)| \leq b_1,$$

neste mesmo intervalo. Segue das equações de movimento que os vetores  $\nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t))$ ,  $j = 1, \dots, N$  também são limitados. Pelo teorema fundamental do cálculo (componente a componente) e usando a desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}(t^*)| &= \left| \int_t^{t^*} \ddot{\mathbf{q}}(s) ds \right| \\ &\leq \int_t^{t^*} |\ddot{\mathbf{q}}(s)| ds \leq b_1 |t^* - t| = b_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Logo, pela desigualdade triangular,

$$|\dot{\mathbf{q}}(t)| \leq |\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}(t^*)| + |\dot{\mathbf{q}}(t^*)| \leq b_2 + |\dot{\mathbf{q}}(t^*)| = b_3,$$

para todo  $t \in [t_1, t^*]$ .

Como  $\|\dot{\mathbf{q}}_j(t)\| \leq |\dot{\mathbf{q}}(t)|$  para  $j = 1, \dots, N$  e

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{q}(t)) = \sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j,$$

aplicando a desigualdade de cauchy schwarz, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} U(\mathbf{q}(t)) \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |\nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j| \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^N |\nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N |\dot{\mathbf{q}}_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla_{\mathbf{q}_j} U(\mathbf{q}(t))\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq b_4, \end{aligned}$$

segue que  $\frac{d}{dt} U(\mathbf{q}(t))$  é limitado e portanto  $U(\mathbf{q}(t))$  é limitado.

Mas pela estimativa do Corolário [2.1.1](#),

$$\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t^*} sup U(\mathbf{q}(t)) = +\infty,$$

donde  $U(\mathbf{q}(t))$  não poderia ser limitado. Esta contradição leva a concluir que  $t^*$  tem de ser uma singularidade.

( $\implies$ ) Suponha que ocorra uma singularidade em  $t = t^*$  e se quer mostrar que,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0.$$

Como  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) \geq \liminf_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) \geq 0$ , basta mostrar que  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0$ . Suponha, por absurdo, que fosse

$$\limsup_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = D > 0.$$

Então existe uma sequência  $\{t_\nu\}_{\nu \geq 1}$  com  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (t_\nu) = t^*$  e tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} q_{min}(t_\nu) = D > 0.$$

Ademais, para  $\nu$  suficientemente grande e para todo  $j \neq k$ , temos

$$q_{jk}(t_\nu) \geq q_{min}(t_\nu) > \frac{D}{2}.$$

Ora, então estamos em condições de aplicar o teorema de existência e unicidade (Teorema 1.4) com condições iniciais  $\mathbf{y}(t_\nu) = (\mathbf{q}(t_\nu), \mathbf{p}(t_\nu))$ . Ou seja, se  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}(t_\nu)| < \frac{D}{8}$  temos  $|f(\mathbf{y})| \leq M$ , onde  $M$  depende apenas de  $D$ , das massas e da energia total  $h$  (e esta última é a mesma que em  $t = 0$  pois o sistema é conservativo). Portanto, o problema de N-corpos com condição inicial  $\mathbf{y}(t_\nu)$  tem uma única solução num intervalo  $|t - t_\nu| < \frac{\delta}{2}$ , onde  $\delta > 0$  depende apenas de  $D$ , das massas e  $h$ .

Tomando  $\nu$  suficientemente grande tal que  $|t_\nu - t^*| < \frac{\delta}{2}$ , vemos que as equações de movimento tem uma única solução no intervalo:

$$|t - t^*| \leq |t - t_\nu| + |t_\nu - t^*| < \delta.$$

Mas, nesse caso (e usando o teorema de soluções máximas) a solução partindo de  $t = 0$  foi prolongada para além do instante  $t^*$  e portanto, este último não poderia ser um instante de ocorrência de uma singularidade. Esta contradição conclui o teorema. ■

## 2.3 Colisões e Pseudocolisões

Considere a distância entre um ponto  $q$  e o conjunto singular  $\Delta$ , definida por

$$\rho(q, \Delta) = \inf_{z \in \Delta} |q - z|,$$

temos a seguinte classificação das singularidades do problema de N-corpos:

- **Colisões** : quando  $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* \in \Delta$ , isto é, seja  $\mathbf{q}(t)$  atinge um dado ponto de  $\Delta$ , ou ainda  $\rho(\mathbf{q}^*, \Delta) = 0$ ;
- **Pseudocolisões** : quando  $\mathbf{q}(t)$  se aproxima de  $\Delta$  quando  $t \rightarrow t^*$ , sem aproximar de um ponto de  $\Delta$ .

Ou seja, de um lado temos o caso "intuitivo" das colisões, em que a distância entre ao menos duas partículas é zero em  $t = t^*$ ; o conjunto singular é atingido. Por outro, temos o caso em que a distância mínima entre as partículas tende a zero sem que haja colisão. Este tipo de singularidade é bem menos intuitivo. Assim, ainda que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0$  poderíamos ter, para certo par  $jk$  de partículas, que

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} q_{jk}(t) = 0 \text{ e } \limsup_{t \rightarrow t^*} q_{jk}(t) > 0,$$

de forma que elas poderiam "oscilar", ora se aproximando ora se afastando entre, sem nunca colidirem.

A seguir veremos que não existem pseudocolisões para  $N = 2$ , e quanto para  $N = 3$  veremos um teorema, demonstrado por Painlevé mostrando que o único tipo de singularidade são as colisões.

De fato, se ocorre uma singularidade em  $t = t^*$ , então pelo Teorema [2.2](#)

$$q_{min}(t) = q_{12}(t) = \|\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow t^*.$$

Então,

$$I(t) = \frac{1}{2M} q_{12}^2(t) \longrightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow t^*,$$

e lembrando que  $I(t) = \frac{1}{2}(m_1 \mathbf{q}_1^2(t) + m_2 \mathbf{q}_2^2(t))$ , concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_1(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_2(t) = \mathbf{0},$$

assim ocorrendo uma colisão.

A seguir, veremos um lema que nos trará informação que ajudará na demonstração em um dos principais resultados desse capítulo, que só existe colisões para o problema de  $N=3$ . No caso, o lema seguinte afirma que o momento de inércia tem limite quando  $t$  tende a  $t^*$ .

**Lema 2.3.1.** *Se ocorre uma singularidade em  $t = t^*$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} I(t) = I^* \in [0, +\infty].$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.2 ocorre uma singularidade no instante  $t = t^*$  se, e só se  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{min}(t) = 0$ . Disto segue que  $\limsup_{t \rightarrow t^*} U(\mathbf{q}(t)) = +\infty$  e, pela identidade de Lagrange-Jacobi,  $\lim_{t \rightarrow t^*} \ddot{I}(t) = +\infty$ . Logo, para  $t$  suficientemente próximo de  $t^*$ , temos  $\ddot{I}(t) > 0$ , donde que  $\dot{I}(t)$  é crescente numa vizinhança de  $t^*$ . Daí que  $I(t)$  é monótona (crescente ou decrescente) nesta vizinhança. Lembrando que  $I(t) \geq 0$ , o lema segue. ■

Diante disto, seguiremos com o seguinte teorema

**Teorema 2.3. (Painlevé, 1895)** *No problema de três corpos, todas as singularidades são colisões.*

**Demonstração:** Pelo Lema,  $I^* \in [0, +\infty]$ . Se  $I^* = 0$ , segue do teorema de Sundman-Weierstrass que ocorre o colapso total, ou seja uma colisão múltipla, e não há nada a demonstrar.

Suponha então que  $I^* > 0$  (possivelmente  $= +\infty$ ). Mostremos inicialmente que a partir de certo instante em diante o mesmo par de partículas assume a separação mínima  $q_{min}$ . Como  $\lim_{t \rightarrow t^*} I(t) = I^* > 0$  segue do Corolário 2.1.1 que, de certo instante em diante e para uma certa constante  $D > 0$  temos

$$q_{max}(t) = \max_{j \neq k} q_{jk}(t) \geq D > 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.2, vem que de certo instante em diante  $q_{min}(t) < \frac{D}{2}$ , ou seja, para ao menos um par  $jk$  de partículas tem-se:  $q_{jk}(t) < \frac{D}{2}$ .

Afirmamos que de certo instante em diante o mesmo par de partículas assume a distância mínima  $q_{min}$ . Caso contrário, em algum instante  $\bar{t}$  dois pares (digamos 12 e 23) trocariam o papel de  $q_{min}$  e teríamos:  $q_{min}(\bar{t}) = q_{12}(\bar{t}) = q_{23}(\bar{t}) < \frac{D}{2}$ . Mas isso não é possível pois, por um lado, da desigualdade triangular aplicada ao triângulo com vértices nas partículas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , ver Figura 2.2, tem-se:

$$q_{13}(\bar{t}) \leq q_{12}(\bar{t}) + q_{23}(\bar{t}) < D.$$

Por outro lado, teríamos  $q_{13}(\bar{t}) = q_{max}(\bar{t})$ , ao passo que  $q_{max}(t) \geq D$  a partir de certo instante em diante.

Mostremos agora que os vetores posição  $\mathbf{q}_j(t)$ , com  $j = 1, 2, 3$ , têm limites bem definidos quando  $t$  tende a  $t^*$ . De fato, como uma das partículas, digamos a  $m_3$  (seguindo o exemplo acima) acaba por afastar-se definitivamente das restantes  $m_1$  e  $m_2$  (e com  $q_{13} \geq \frac{D}{2}$  e  $q_{23} \geq \frac{D}{2}$ ), segue das equações de movimento que para  $t$  numa vizinhança de  $t^*$ ,

$$\|\ddot{\mathbf{q}}_3\| \leq \frac{Gm_1}{q_{13}^2} + \frac{Gm_2}{q_{23}^2} \leq Gm_1 \frac{4}{D^2} + Gm_2 \frac{4}{D^2} := A,$$

para uma constante  $A$ . Portanto, para instantes  $t_n$  e  $t_m$  numa vizinhança de  $t^*$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_3(t_n) - \mathbf{v}_3(t_m)\| &= \left\| \int_{t_m}^{t_n} \ddot{\mathbf{q}}_3(s) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_m}^{t_n} \|\ddot{\mathbf{q}}_3(s)\| ds \leq A|t_n - t_m| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois  $t_n, t_m \rightarrow t^*$ . Segue do critério de convergência de Cauchy que  $\mathbf{v}_3(t) = \dot{\mathbf{q}}_3(t)$  tem limite bem definido quando  $t$  tende a  $t^*$ . Em particular é limitado: para  $t$  numa vizinhança de  $t^*$  temos

$$\|\mathbf{v}_3\| = \|\dot{\mathbf{q}}_3\| \leq B,$$

para uma constante  $B$ . Um argumento análogo ao que acabamos de fazer nos leva então a concluir que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_3(t) = \mathbf{C},$$

onde  $\mathbf{C}$  é um vetor constante.

Mas pela lei de conservação relativa ao movimento do centro de massa, temos

$$m_1 \mathbf{q}_1(t) + m_2 \mathbf{q}_2(t) = -m_3 \mathbf{q}_3(t),$$

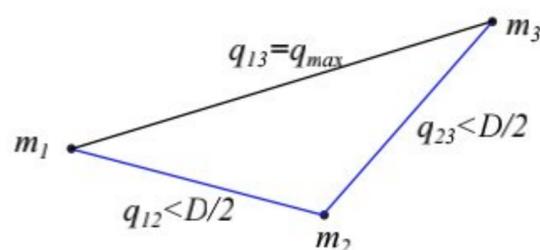


Figura 2.2: Triângulo com vértices nas partículas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ .

adicionando  $m_1\mathbf{q}_2(t) - m_1\mathbf{q}_2(t)$ , ao primeiro membro da igualdade acima, obtemos

$$m_1(\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)) + (m_1 + m_2)\mathbf{q}_2(t) = -m_3\mathbf{q}_3(t).$$

Como  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{12}(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \|\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)\| = 0$ , segue que,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_2(t) = -\frac{m_3}{m_1 + m_2} \mathbf{C} = \lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}_1(t).$$

Em outras palavras, temos uma colisão binária em  $t = t^*$  e o teorema está demonstrado. ■

Uma das ferramentas importante que nos auxilia na demonstração no caso para  $N = 3$ , é aplicar a desigualdade triangular no triângulo de vértices de massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , no qual, impossibilitando, aplicar para o caso de  $N > 3$ .

Do resultante relevante para o problema de N corpos levantado por Painlevé há cerca de um século atrás, para  $N = 3$ , que todas as singularidades são devido à colisão, não conseguindo estender seu resultado para  $N \geq 4$ , Painlevé propôs o seguinte desafio:

**Conjectura 2.1. (Conjectura de Painlevé, 1895)** *O problema de N-corpos, para  $N \geq 4$  admite soluções com singularidades do tipo pseudocolisões.*

Esta conjectura mostrou-se extremamente difícil e ficou em aberto até recentemente. O primeiro progresso foi obtido pelo físico e astrônomo sueco E. H. von Zeipel, que propôs uma caracterização alternativa para colisões e, a fortiori, para pseudocolisões, resultado conhecido como, O Teorema de von Zeipel, que será visto na próxima seção.

Para  $N \geq 5$  foi comprovado que existem singularidades pseudocolisionais (ver [16]). Mas, para o caso  $N = 4$  este problema ainda permanece aberto.

## 2.4 Teorema de Von Zeipel

Um dos resultados mais importantes sobre as singularidades é fornecido por Hugovon Zeipel. Em seu trabalho [21], o autor mostrou que se as posições de todas as partículas permanecem limitadas quanto  $t$  se aproxima de  $t^*$  (supondo

que a solução experimenta uma singularidade em  $t^*$ ), então esta singularidade se deve a uma colisão. Em outras palavras, uma pseudocolisão só pode ocorrer se o sistema de partículas se torna ilimitado em tempo finito.

Uma etapa importante para demonstrar o Teorema de Von Zeipel é construir uma decomposição apropriada do espaço  $(\mathbb{R}^3)^N$  e em especial decompor o momento de inércia  $I$  como uma soma. Antes de passar a demonstração do teorema, vamos trabalhar com o processo de decomposição e resultados associados a esta decomposição. Os resultados desta seção foram baseados nas referências [11] e [14].

Começamos definindo um produto interno em  $(\mathbb{R}^3)^N$  de maneira a simplificar o momento de inércia. Considere o espaço  $(\mathbb{R}^3)^N$  com produto interno

$$\langle q, p \rangle := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_i, \quad (2.4)$$

onde o produto interno no somatório é o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$ . O momento de inércia é redefinido em termos da norma induzida pelo produto interno definido em (2.4), assumindo a forma

$$I(\mathbf{q}) := \|\mathbf{q}\|^2 = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{q}_i|^2, \quad (2.5)$$

onde  $|\cdot|$  é a norma canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Denotamos  $\nabla U$  o gradiente de  $U$  com respeito ao produto interno (2.4), ou seja,  $\nabla U(\mathbf{q})$  é o vetor de  $(\mathbb{R}^3)^N$  tal que

$$DU(\mathbf{q})\mathbf{p} = \langle \nabla U(\mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle, \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in (\mathbb{R}^3)^N,$$

onde  $DU : (\mathbb{R}^3)^N \rightarrow \mathbb{R}$  é a derivada de  $U$ . As equações de movimento do problema de  $N$ -corpos podem ser escrita na forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q}) \quad (2.6)$$

Desde que as partículas são identificadas pelos inteiros de 1 até  $N$ , denotamos ainda por  $\mathcal{N}$  o conjunto das  $N$  partículas

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}.$$

Se  $\mu$  é um subconjunto de  $\mathcal{N}$ , nós identificamos este conjunto como um *subsistema* formado pelas partículas do subconjunto  $\mu$ . O conjunto de pontos do conjunto

singular  $\Delta$ , correspondente ao subsistema de partículas  $\mu$  é o conjunto

$$\Delta_\mu = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3)^N; \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, \text{ para todo } i, j \in \mu\}.$$

Os pontos de  $\Delta_\mu$  podem ser denominados como os pontos do colapso total do subsistema  $\mu$ . Se  $\mu$  tem um único ponto então  $\Delta_\mu = (\mathbb{R}^3)^N$ . Se  $\mu = \{i, j\}$  então  $\Delta_\mu = \Delta_{ij} = \{q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ .

Seja  $\Gamma$  uma partição de  $\mathcal{N}$ , ou seja,  $\Gamma$  é um conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{N}$  mutualmente disjuntos cuja união é todo  $\mathcal{N}$ . A partição de  $\mathcal{N}$  corresponde a *decomposição* do sistema inicial em subsistemas, cada um dos quais, corresponde a um elemento da partição. O conjunto correspondente ao colapso total em cada subsistema é o subespaço

$$\Delta_\Gamma = \bigcap_{\mu \in \Gamma} \Delta_\mu.$$

Se  $\mu$  é um subconjunto de  $\mathcal{N}$ , então o centro de massa do correspondente subsistema é definido como

$$R_\mu \mathbf{q} = \left( \sum_{i \in \mu} m_i \mathbf{q}_i \right) / \sum_{i \in \mu} m_i$$

Usamos o centro de massa para definir o seguinte mapa linear

$$\pi_\Gamma : (\mathbb{R}^3)^N \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^N,$$

onde a  $i$ -ésima componente da aplicação é  $(\pi_\Gamma \mathbf{q})_i := R_\mu \mathbf{q}$  se  $i \in \mu \in \Gamma$ .

Então  $\pi_\Gamma$  é uma projeção ortogonal cujo núcleo é o espaço

$$X_\Gamma = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3)^N; \sum_{i \in \mu} m_i \mathbf{q}_i = 0 \text{ para todo } \mu \in \Gamma\},$$

e cuja imagem é o conjunto  $\Delta_\Gamma$ .

Desta maneira, para cada partição  $\Gamma$

$$(\mathbb{R}^3)^N = Ker(\pi_\Gamma) \oplus Im(\pi_\Gamma) = X_\Gamma \oplus \Delta_\Gamma,$$

ou seja, o espaço  $(\mathbb{R}^3)^N$  pode ser escrito como uma soma direta dos subespaços  $\Delta_\Gamma$  e  $X_\Gamma$ . Se escrevemos  $\Pi_\Gamma = id - \pi_\Gamma$ , então  $\Pi_\Gamma$  é a projeção ortogonal de  $(\mathbb{R}^3)^N$  em  $X_\Gamma$ . Desde que  $\Pi_\Gamma(\mathbf{q}) \in Ker(\pi_\Gamma)$ , chegamos a

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \|\pi_\Gamma \mathbf{q}\|^2 + \|\Pi_\Gamma \mathbf{q}\|^2. \quad (2.7)$$

Discutimos agora brevemente o significado físico desta última expressão. Observe que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}) := \|\pi_{\Gamma}\mathbf{q}\|^2 = \sum_{\mu \in \Gamma} \left( \sum_{i \in \mu} m_i \right) |R_{\mu}\mathbf{q}|^2,$$

é o momento de inércia de um sistema de partículas consistindo, para cada  $\mu \in \Gamma$ , a uma *partícula fictícia* de massa  $\sum_{i \in \mu} m_i$  localizada no centro de massa do subsistema correspondente a  $\mu$ .

Também podemos obter

$$J_{\Gamma}(\mathbf{q}) := \|\Pi_{\Gamma}\mathbf{q}\|^2 = \sum_{\mu \in \Gamma} J_{\mu}(\mathbf{q}),$$

onde

$$J_{\mu}(\mathbf{q}) := \sum_{i \in \mu} m_i |\mathbf{q}_i - R_{\mu}\mathbf{q}|^2.$$

Então  $J_{\Gamma}(\mathbf{q})$  é o momento e inércia com respeito ao centro de massa do subsistema de partículas correspondente a  $\mu$ . A equação (2.7) nos diz que o momento de inércia do sistema pode ser decomposto na soma dos momentos de inércia de cada subsistema com a soma do momento de inércia do sistema composto de uma partícula fictícia (com massa  $\sum_{i \in \mu} m_i$ ) no centro de massa de cada subsistema.

O potencial  $U$  pode ser decomposto seguindo o mesmo caminho acima. Definimos

$$U_{ij}(\mathbf{q}) := \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}, & \text{se } i \neq j, \\ 0, & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (2.8)$$

então o potencial  $U$  é escrito como

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} U_{ij}(\mathbf{q}).$$

Quando visto como um sistema isolado do resto do sistema, o subsistema correspondente a  $\mu$  tem a função potencial dada por

$$V_{\mu}(\mathbf{q}) := \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \mu} U_{ij}(\mathbf{q}).$$

Para uma partição  $\Gamma$ , escrevemos

$$V_{\Gamma}(\mathbf{q}) := \sum_{\mu \in \Gamma} V_{\mu}(\mathbf{q}), \quad (2.9)$$

que é a energia potencial total de todos subsistemas isolados. A energia potencial restante é

$$U_{\Gamma}(\mathbf{q}) := U(\mathbf{q}) - V_{\Gamma}(\mathbf{q}), \quad (2.10)$$

que se deve a interação entre as partículas do subsistema. Para ser mais preciso no processo da decomposição da energia potencial, se nós escrevemos

$$U_{\mu\nu}(\mathbf{q}) := \begin{cases} \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \nu} U_{ij}(\mathbf{q}), & \text{se } \mu \cap \nu = \emptyset, \\ 0, & \text{se } \mu = \nu, \end{cases} \quad (2.11)$$

então temos que

$$U_{\Gamma}(\mathbf{q}) = \sum_{\mu \in \Gamma} \sum_{\nu \in \Gamma} U_{\mu\nu}(\mathbf{q}). \quad (2.12)$$

A partir da fórmula (2.9) obtemos a seguinte identidade

$$V_{\Gamma}(\mathbf{q} + \mathbf{z}) = V_{\Gamma}(\mathbf{q}), \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in \Delta_{\Gamma}. \quad (2.13)$$

De fato, basta observar que se  $\mathbf{z} \in \Delta_{\Gamma}$  então  $z_i = z_j$  para algum  $\mu$  e portanto  $z_i = z_j$ . Então  $U_{ij}(\mathbf{q} + \mathbf{z}) = U_{ij}(\mathbf{q})$  e segue a identidade (2.13) segue.

Lembrando que  $\Delta_{\Gamma} = \text{Im}(\pi_{\Gamma})$ , então da identidade (2.13) segue que

$$V_{\Gamma}(\mathbf{q} + \pi_{\Gamma}\mathbf{p}) = V_{\Gamma}(\mathbf{q}) \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in (\mathbb{R}^3)^N.$$

Diferenciando a última equação com respeito a  $p$  e fazendo  $p = 0$  obtemos que

$$DV_{\Gamma}(\mathbf{q})\pi_{\Gamma} = 0,$$

e desde que  $\pi_{\Gamma}$  é uma projeção ortogonal, temos que

$$\pi_{\Gamma}\nabla V_{\Gamma}(\mathbf{q}) = 0.$$

Combinando esta última equação com as equações (2.6) e (2.10) obtemos que

$$\pi_{\Gamma}\ddot{\mathbf{q}} = \pi_{\Gamma}\nabla U_{\Gamma}(\mathbf{q}), \quad (2.14)$$

onde usando esta última equação, podemos obter a identidade

$$\frac{d^2}{dt^2}I_{\Gamma}(\mathbf{q}(t)) = 2\|\pi_{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + 2\langle \pi_{\Gamma}\mathbf{q}(t), \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{q}(t)) \rangle. \quad (2.15)$$

Com os resultados desenvolvidos acima, estamos com condições de provar o seguinte Teorema

**Teorema 2.4 (Teorema de Von Zeipel).** *Seja  $q(t)$  uma solução do problema de  $N$ -corpos (2.6). Se  $\mathbf{q}(t)$  experimenta uma singularidade em  $t^*$  e se  $I(\mathbf{q}(t)) \rightarrow I^* < \infty$  quando  $t \rightarrow t^*$  então existe  $\mathbf{q}^* \in \Delta$  tal que  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}^*$  quando  $t \rightarrow t^*$ .*

**Demonstração:** Seja

$$\Delta^* := \bigcap_{t < t^*} cl(\mathbf{q}(t, t^*)),$$

onde  $(\mathbf{q}(t, t^*))$  é o conjunto imagem da solução no intervalo  $(t, t^*)$  e  $cl$  denota o fecho topológico em  $(\mathbb{R}^3)^N$ . Desde que  $(\mathbf{q}(t, t^*))$  é não vazio e limitado, seu fecho é não vazio e compacto. Desde que  $\Delta^*$  é a interseção de conjuntos não vazios e compactos então  $\Delta^*$  é não vazio e compacto.

Além disso,  $\Delta^*$  é um subconjunto de  $\Delta$ . Seja  $I^* = \lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{q}(t))$  então temos que  $I(\mathbf{q}) = I^*$  para todo  $\mathbf{q} \in \Delta^*$ . Para cada partição  $\Gamma$  definimos

$$\Delta_\Gamma^* := \Delta^* \cap \Delta_\Gamma.$$

Sobre o conjunto de todas as partições  $\Gamma$  tais que  $\Delta_\Gamma^* \neq \emptyset$  escolha uma com a cardinalidade mínima. No restante desta demonstração,  $\Gamma$  denotará esta partição fixada com cardinalidade mínima. Esta escolha da partição nos assegura que todos os denominadores da função definida em (2.12) são não nulos para todo  $\mathbf{q} \in \Delta_\Gamma^*$  e daí que  $U_\Gamma(\mathbf{q})$  está definido neste conjunto. Desde que  $\Delta_\Gamma^*$  é compacto, existe uma vizinhança  $G$  de  $\Delta_\Gamma^*$  em  $(\mathbb{R}^3)^N$  e uma constante  $M$  (dependendo de  $G$ ) tal que

$$\|\nabla U_\Gamma(\mathbf{q})\| \leq M \quad \text{and} \quad |\langle \pi_\Gamma \mathbf{q}, \nabla U_\Gamma(\mathbf{q}) \rangle| \leq M, \quad \text{para todo } \mathbf{q} \in G. \quad (2.16)$$

Introduzimos as variáveis  $z \in \Delta_\Gamma$  e  $x \in X_\Gamma$  da seguinte maneira

$$z = \pi_\Gamma \mathbf{q} \in \Delta_\Gamma, \quad x = \Pi_\Gamma \mathbf{q} \in X_\Gamma.$$

Identificando o produto cartesiano de  $X_\Gamma$  com  $\Delta_\Gamma$  com a sua soma direta, podemos escrever

$$(x, z) := x + z = \mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3)^N.$$

Então temos que um dos dois casos abaixo deve ocorrer.

**Caso 1.**  $\Delta^*$  não é um subconjunto de  $\Delta_\Gamma$ .

**Caso 2.**  $\Delta^*$  é um subconjunto de  $\Delta_\Gamma$ .

Primeiro assumamos que vale o Caso 1. Escolha um subconjunto  $B \in \Delta_\Gamma$ , cujo fecho  $\bar{B}$  é compacto, tal que  $\Delta_\Gamma^* \subset B \subset \bar{B} \subset G$ . para cada  $\sigma > 0$  defina

$$D_\sigma := \{x \in X_\Gamma; \|x\| \leq \sigma\}$$

Denotamos  $\bar{D}_\sigma$  o fecho e  $\partial D_\sigma$  a fronteira de  $D_\sigma$ . Escrevemos

$$K_\sigma := \bar{D}_\sigma \times \bar{B} \subset (\mathbb{R}^3)^N.$$

Desde que  $\partial B$  é um conjunto compacto e desde  $\Delta^* \cap \partial B = \emptyset$  existe  $\sigma_0 > 0$  e  $t_o < t^*$  tal que

$$\mathbf{q}([t_o, t^*]) \cap (\bar{D}_{\sigma_0} \times \partial B) = \emptyset. \quad (2.17)$$

Escolhemos dentre os  $\sigma_0$  o menor de maneira que

$$K_{\sigma_0} \subset G. \quad (2.18)$$

Do fato de  $\Delta^*$  não ser um subconjunto de  $\Delta_\Gamma$ , existe um  $\sigma \in (0, \sigma_0)$  tal que para infinitos valores de  $t$  próximos a  $t^*$ , satisfazem  $\mathbf{q}(t) \notin K_\sigma$ . Daqui em diante nós fixamos  $\sigma$  este tal valor mencionado acima. Escolha  $t_1$  próximo a  $t^*$  tal que

$$|I(\mathbf{q}(t)) - I^*| < \sigma^2/12, \quad \text{para } t_1 \leq t \leq t^*. \quad (2.19)$$

Como  $\mathbf{q}(t)$  se aproxima do infinito de forma arbitrária próximo de  $\Delta_\Gamma^*$  quando  $t \rightarrow t^*$ , então  $\mathbf{q}(t)$  necessita entrar e permanecer em  $K_\sigma$  quando  $t \rightarrow t^*$ . A propriedade (2.17) implica que  $\mathbf{q}(t)$  entra e permanece em  $(\bar{D}_{\sigma_0} \times \partial B)$  para  $t$  suficientemente próximo de  $t^*$  ( $t > t_1$ ). Desta maneira podemos encontrar um intervalo  $[\tau_0, \tau_3]$  satisfazendo as seguintes condições:

- (I)  $\mathbf{q}(t) \in K_\sigma$ , para  $\tau_0 \leq t \leq \tau_3$ ,
- (II)  $J_\Gamma(\mathbf{q}(\tau_0)) = J_\Gamma(\mathbf{q}(\tau_3)) = \sigma^2$ ,
- (III)  $\min_{\tau_0 \leq \tau \leq \tau_3} J_\Gamma(\mathbf{q}(\tau)) < \sigma^2/2$ ,
- (IV)  $\tau_3 - \tau_0 < \sigma/\sqrt{3M}$ .

As condições (I) e (II) ocorrem conforme justicado no parrágrafo acima. A condição (III) pode ser encontrada pois  $\mathbf{q}(t)$  se aproxima arbitrariamente de  $\Delta_{\Gamma}^*$  para valores de  $t$  próximos de  $t^*$ . A condição (IV) segue do fato que as três primeiras ocorrem para  $t$  arbitrariamente próximo de  $t^*$ .

Seja  $\bar{\tau} \in (\tau_0, \tau_3)$  o instante em que  $I_{\Gamma}(\mathbf{q}(t))$  atinge seu valor máximo. A equação (2.7) implica que

$$I(\mathbf{q}) = J_{\Gamma}(\mathbf{q}) + I_{\Gamma}(\mathbf{q}).$$

As equações (2.19) e (III) implicam que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\bar{\tau})) > I^* - 7\sigma^2/12.$$

Por outro lado, as equações (2.19) e (II) implicam que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\tau_3)) < I^* - 11\sigma^2/12.$$

Das duas últimas desigualdades segue que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\bar{\tau})) - I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\tau_3)) > \sigma^2/3. \quad (2.20)$$

por outro lado, usando as expressões dadas em (2.15), (2.16), (2.18) e (I) obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2} I_{\Gamma}(\mathbf{q}(t)) \geq -2M, \quad \text{para } \tau \leq t \leq \tau_3.$$

Desde que em  $\bar{\tau}$  temos um máximo local para  $I_{\Gamma}$ , concluímos que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\tau_3)) - I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\bar{\tau})) \geq -M(\tau_3 - \bar{\tau})^2.$$

usando a condição (IV), obtemos que

$$I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\bar{\tau})) - I_{\Gamma}(\mathbf{q}(\tau_3)) < \sigma^2/3,$$

e esta última desigualdade contradiz a expressão dada em (2.20). Concluímos então que o caso 1 não pode ocorrer.

Precisamos mostrar que deve ocorrer o caso 2. É imediato verificar que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t^*$ . Além disso, como  $\Delta^* = \Delta_{\Gamma}^*$  então  $G$  é uma vizinhança de  $\Delta^*$ . Assim, existe  $t_2$  tal que  $\mathbf{q}(t) \in G$  para  $t_2 < t < t^*$ .

A equação (2.6) implica que

$$\ddot{z}(t) = \pi_\Gamma \nabla U_\Gamma(\mathbf{q}(t)),$$

que quando combinado com (2.16), implica que

$$\ddot{z}(t) \leq M, \quad \text{para } t_2 < t < t^*.$$

Desta maneira  $z(t)$  necessita se aproximar a  $\mathbf{q}^* \in \Delta_\Gamma$  quando  $t \rightarrow t^*$ . Portanto

$$\mathbf{q}(t) = x(t) + z(t) \rightarrow 0 + \mathbf{q}^* \quad \text{quando } t \rightarrow t^*,$$

e a prova está concluída. ■

Como consequência do resultado acima, vejamos um caso do problema de  $N$ -corpos que também não admite pseudocolisões, a saber, o caso retilíneo.

**Teorema 2.5. (Saari)** *Se as  $N$  partículas estão restritas a mover-se numa reta fixa com relação ao  $CM$ , então todas as singularidades são colisões.*

**Demonstração:** Vamos supor que a reta coincide com o eixo  $x$  do referencial do  $CM$ . Sejam  $q_1, \dots, q_N$  as posições das  $N$  partículas ao longo desta reta, da esquerda para a direita. Como estamos no referencial do  $CM$ , temos  $\sum_{j=1}^N m_j q_j = 0$ , e portanto temos segue que  $q_1 \leq 0$  e  $q_N \geq 0$  em cada instante. Veja Figura 2.3.

Suponha, por contradição, que exista uma singularidade pseudocolisional no instante  $t = t^*$ . Então, pelo teorema de von Zeipel, temos que  $\lim_{t \rightarrow t^*} I(t) = +\infty$ . Logo, da estimativa do Corolário 2.1.1 vem que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{max}(t) = +\infty$ . Como as partículas não podem trocar a ordem de seu posicionamento ao longo do eixo, temos que  $q_{max}(t) = |q_N(t) - q_1(t)|$  e portanto teríamos  $\lim_{t \rightarrow t^*} |q_N(t) - q_1(t)| = +\infty$ .

Afirmamos que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_N(t) = +\infty$ . De fato, suponha que  $q_N(t)$  fosse limitado e, portanto, do limite acima, temos que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_1(t) = -\infty$ . Então, como  $\sum_{j=1}^N m_i q_i = 0$ , temos que



Figura 2.3: Configuração do problema de  $N$ -corpos colinear.

$$\sum_{j=2}^N m_j q_j(t) = -m_1 q_1(t) \longrightarrow +\infty,$$

quando  $t \rightarrow t^*$ . Ora, isto implica que para algum  $i = 2, \dots, N-1$  tem-se  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_i(t) = +\infty$ , e como  $q_N$  está à direita de todos os outros  $q_i$ , segue que  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_N(t) = +\infty$ , contradizendo a hipótese de  $q_N(t)$  ser limitado. Em resumo até o aqui, se ocorre uma pseudocolisão em  $t = t^*$ , então  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_N(t) = +\infty$ .

Por outro lado, a equação de movimento para a  $N$ -ésima partícula é

$$m_j \ddot{q}_N(t) = \sum_{j \neq N} G m_N m_j \frac{q_j - q_N}{|q_j - q_N|^3},$$

e como  $q_j < q_N$  para  $j = 1, \dots, N-1$ , segue que  $\ddot{q}_N < 0$ . Ou seja,  $q_N(t)$  tem concavidade para baixo, logo não pode ser que  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_N(t) = +\infty$ . Essa contradição prova o teorema. ■

Note que no problema de  $N$  corpos retilíneo podemos afirmar que sempre ocorre uma singularidade (que será necessariamente uma colisão). De fato, suponha que não ocorra singularidades. Como estamos no referencial do  $CM$ , segue que sempre  $q_N(t) > 0$  ( $q_N = 0$  somente no caso do colapso total, que é uma singularidade colisional). Por outro lado, da equação de movimento acima temos sempre que  $\ddot{q}_N(t) < 0$ . Ora, estas duas condições são incompatíveis para uma função  $q_N(t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, necessariamente ocorre uma singularidade.

## Capítulo 3

# Singularidades em Problema de Atração Gravitacional por corpos massivos

Nesta seção nós consideramos o movimento de uma partícula no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  atraída pela força gravitacional criada por um corpo massivo com dimensões finitas e distribuição de massa uniforme (corpo massivo homogêneo). Denominamos este problema como *problema de atração gravitacional por um corpo massivo*. O objetivo principal deste capítulo é estudar a natureza das singularidades deste problema em especial quando o corpo massivo tem a forma de um anel circular.

No estudo do problema de  $N$ -corpos considera-se o movimento de partículas pontuais que se movem sob a ação da força gravitacional mútua entre elas. Para tratar de problemas mais realistas, baseado na astronomia e astrofísica, podemos considerar o problema de um corpo de massa muito pequena movimentando-se sob a atração gravitacional de um corpo massivo (ou um sistema de corpos massivos) de forma irregular. Em geral os asteróides possuem forma irregular, alguns planetas possuem a forma elipsoidal e não esférica. Além disso planetas e alguns asteróides possuem sistemas de anéis ao seu redor. Recentemente os autores em [6] encontraram um sistema de anéis em torno do asteróide *Chariklo*. Veja figura [3].

Há um interesse pelas agências espaciais em pousar sondas em planetas ou até mesmo em asteróides. Neste sentido é necessário conhecer a dinâmica de pequenos corpos ao redor destes objetos celestes. Devido a complexidade em obter a força gravitacional (e então o potencial gravitacional) induzido pelo corpo massivo de

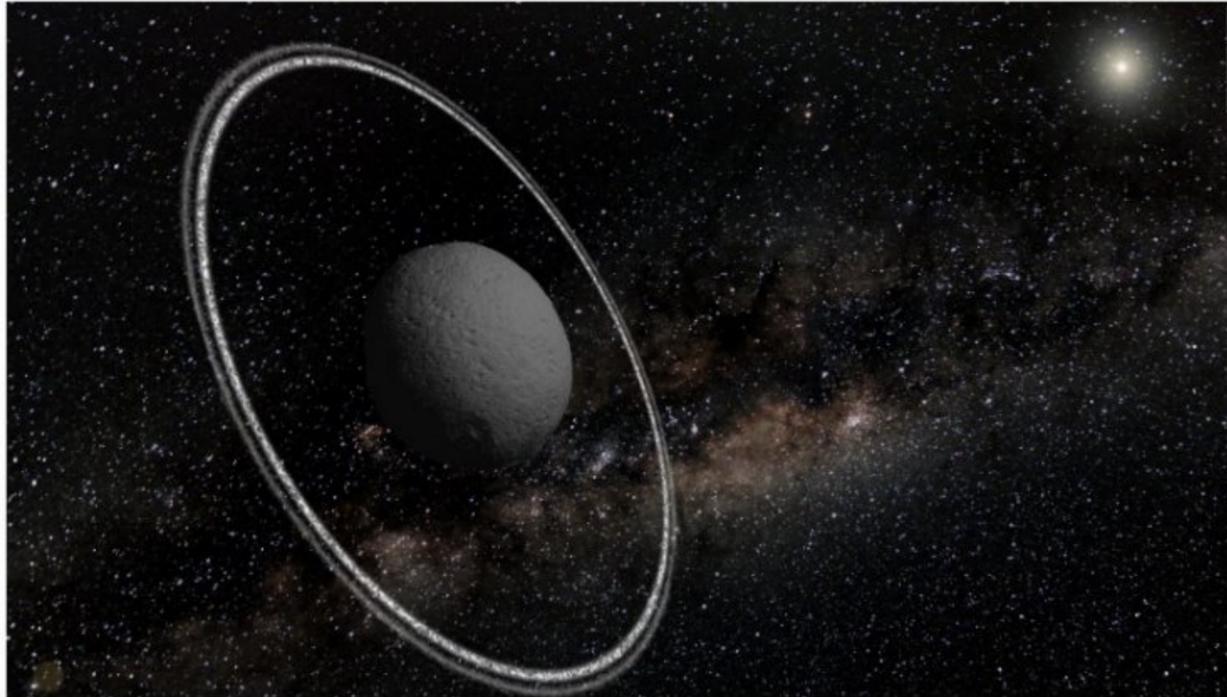


Figura 3.1: Animação artística do sistema de anéis ao redor do asteroide Chariklo. Foto retirada do endereço eletrônico: <https://skyandtelescope.org/astronomy-news/chariklo-an-asteroid-with-rings/>

forma irregular, considera-se, em uma primeira aproximação corpos massivos com certas simetrias o qual pode ser tratado matematicamente. Por exemplo, corpos massivos na forma de anel, disco ou um segmento linear.

Uma das motivações para considerar por exemplo o problema de uma anel circular, como foi mencionado por Broucke e Elpe em [8], é considerar o aspecto astronômico relacionado com a dinâmica dos anéis de Saturno, onde Maxwell em 1859 mostrou que um anel sólido seria instável. Por outro lado, o cinturão de asteroides pode ser aproximado por um anel contínuo e seu efeito global na órbita de Marte, por exemplo, é certamente não negligenciável e digno de investigação. Veja mais detalhes em [1].

Os resultados deste capítulo dissertam sobre os resultados obtidos por [1] e [3].

### 3.1 Formulação do Problema

Em uma primeira aproximação, consideraremos a atração de uma partícula material  $P$  e um corpo  $\mathcal{M}$  com distribuição de massa uniforme e com centro de massa  $O$  no sistema euclidiano tridimensional  $Oxyz$ .

Para obter uma expressão para o campo gravitacional gerado por um corpo massivo de dimensão finita consideramos o seguinte procedimento. Imaginemos o sólido massivo subdividido em  $n$  cubos por meio de retas paralelas aos eixos coordenados, excluindo-se se de consideração quaisquer cubos que toquem a fronteira. Vamos supor que haja  $m$  tais cubos e que o  $k$ -ésimo cubo tenha volume  $\Delta V_k$ . Designemos por  $Q_k = (\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*)$  o centro do  $k$ -ésimo cubo e vamos supor que toda a massa do  $k$ -ésimo fragmento cubo esteja concentrada no seu centro. A massa do  $k$ -ésimo fragmento cúbico é dada por

$$\Delta M_k = \delta(\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*) \Delta V_k.$$

Veja figura [3.1](#) abaixo.

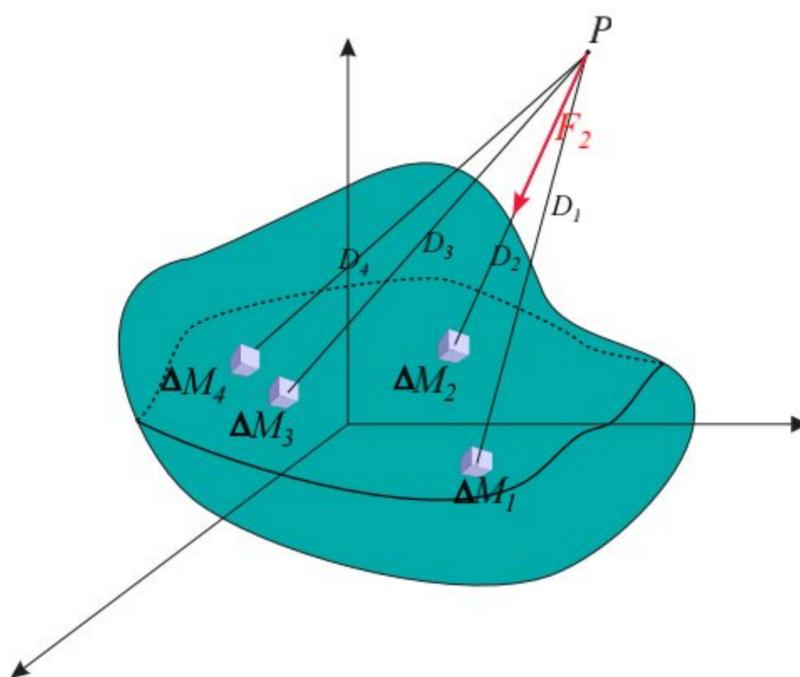


Figura 3.2: Esquema da aproximação da força gravitacional induzida pelo corpo massivo a partir da subdivisão do corpo massivo em cubos de massa  $\Delta M_k$  e centro  $Q_k = (\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*)$  cuja distância a partícula  $P$  é  $D_k = (Q_k - P)$ .

Pela lei de gravitação universal, a força agindo sobre a partícula  $P$  ( massa  $m$ ) pelo  $k$ -ésimo elemento de massa é dada por

$$\mathbf{F}_k = \frac{m \Delta M_k}{\|Q_k - P\|^3} (Q_k - P),$$

onde estamos supondo que a constante de gravitação  $G = 1$ .

Portanto a força induzida pelo corpo massivo sobre a partícula pontual  $P$  é aproximada por

$$\mathbf{F} \approx \sum_{k=1}^n \frac{m \Delta M_k}{\|Q_k - P\|^3} (\mathbf{Q}_k - \mathbf{P})$$

Desde que  $\mathbf{Q}_k - \mathbf{P} = (\xi_k^* - x, \eta_k^* - y, \zeta_k^* - z)$  e tomando uma partição com o números de elementos tendendo ao infinito e desta maneira passando ao processo de integração, obtemos que as componentes da força Gravitacional  $\mathbf{F}$  são dadas por

$$F_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{m(\xi_k^* - x) \delta(\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*) \Delta V_k}{D^2} = m \int_{\mathcal{M}} \frac{(\xi - x)}{D^2} dM$$

$$F_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{m(\eta_k^* - y) \delta(\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*) \Delta V_k}{D^2} = m \int_{\mathcal{M}} \frac{(\eta - y)}{D^2} dM$$

$$F_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{m(\zeta_k^* - z) \delta(\xi_k^*, \eta_k^*, \zeta_k^*) \Delta V_k}{D^2} = m \int_{\mathcal{M}} \frac{(\zeta - z)}{D^2} dM$$

onde  $dM = \delta(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$  e  $D^2 = (x - \xi)^2 + (\eta - y)^2 + (z - \zeta)^2$ .

De acordo com a segunda lei de Newton, se  $\mathbf{q} = (x, y, z)$  denota a posição da partícula  $P$  então devemos ter

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{F}.$$

O potencial gravitacional da partícula  $P = (x, y, z)$  atraída pela força gravitacional  $\mathbf{F}$  associada ao corpo  $\mathcal{M}$  é dado por

$$V(P) = - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{D}, \quad (3.1)$$

onde  $D$  é a distância da partícula  $P$  ao elemento de massa. Observe que explicitando  $D$  obtemos que a função potencial (3.1) é dada por

$$V(x, y, z) = - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}}, \quad (3.2)$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ .

Desta forma, considerando a lei Newtoniana, o movimento da partícula  $P$ , submetida unicamente a atração gravitacional induzida pelo corpo  $\mathcal{M}$ , é dado pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}),$$

ou equivalente em coordenadas

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(x - \xi)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{y} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(y - \eta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(z - \zeta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

As equações de movimento (3.3) podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com três graus de liberdade, dado pelo sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}, \end{cases}\tag{3.4}$$

onde a função Hamiltoniana associada é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}}.\tag{3.5}$$

O espaço de fase do sistema (3.4) é dado por

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3); \mathbf{q} \notin \mathcal{M}\},\tag{3.6}$$

e o espaço de configurações é  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$ . O conjunto  $\mathcal{M}$  é chamado de conjunto singular, o qual recebeu uma notação diferente àquela usada no capítulo anterior, pois coincide com o corpo massivo.

## 3.2 Singularidades no Problema de Atração Gravitacional por um Corpo Massivo

Nesta seção vamos discutir sobre as singularidades das soluções do problema gravitacional criado pelo corpo massivo com dimensão finita, isto é, queremos determinar características das singularidades do problema definido por (3.3) ou (3.4). No problema de  $N$ -corpos relacionam-se as singularidades do fluxo com as singularidades do potencial. Como veremos mais adiante, no problema de atração gravitacional o potencial pode permanecer limitado quando uma solução se aproxima do conjunto singular.

Se  $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^3/\mathcal{M} \times \mathbb{R}^3$  é uma condição inicial em  $t = 0$  então pelo Teorema de Existência e Unicidade de Equações diferenciais Ordinárias nós temos uma única solução de (3.4), definida no intervalo maximal  $(\omega_-, \omega_+)$ . Se  $\omega_+ < \infty$  (ou equivalentemente  $\omega_- > -\infty$ ) então dizemos que **a solução é singular** e tem uma singularidade em  $\omega_+$  (respectivamente  $\omega_-$ ). O conceito de singularidades de colisão é o mesmo que no problema de  $N$ -corpos, ou seja, se  $\mathbf{q}(t)$  solução de (3.3) tem uma singularidade em  $\omega^+$  (ou  $\omega^-$ ), então a singularidade é chamada de **singularidade de colisão** ou singularidade devida a uma colisão se existe  $\mathbf{q}^* \in \mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}^*$  quando  $t \rightarrow \omega_+$  (ou  $t \rightarrow \omega_-$ ). Caso contrário, a singularidade é chamada uma **singularidade sem colisão**.

Começaremos o estudo das singularidades provando o seguinte resultado geral.

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Seja  $\mathbf{q}(t)$ ,  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ , uma solução de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$  tal que existe:*

- 1)  $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ ,  $v_0 < v_1$ , com  $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$ ,
- 2)  $t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < t_2^{(1)} < t_2^{(2)} \dots$ , com  $t_i^{(j)} \in (\omega_-, \omega_+)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  e  $j = 1, 2$ , satisfazendo

$$V(\mathbf{q}(t_i^{(1)})) = v_0$$

$$V(\mathbf{q}(t_i^{(2)})) = v_1$$

Então  $\omega_+ = +\infty$ .

**Demonstração:** Uma vez que  $V(\mathbf{q}(t))$  é contínua, para todo  $[t_i^{(1)}, t_i^{(2)}]$ , podemos encontrar um subintervalo  $[\tau_i^1, \tau_i^2] \subseteq [t_i^{(1)}, t_i^{(2)}]$  tal que,

$$v_0 = V(\mathbf{q}(\tau_i^1)) \leq V(\mathbf{q}(t)) \leq V(\mathbf{q}(\tau_i^2)) = v_1, \text{ para todo } t \in [\tau_i^1, \tau_i^2]. \quad (3.7)$$

Como a energia

$$H = H(\mathbf{q}(t)) = V(\mathbf{q}(t)) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2$$

é constante, temos que  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{2(H - V)}$ , com  $V = V(\mathbf{q}(t))$  e  $H$  constante. Então, pela (3.7), temos  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \leq \sqrt{2(H - v_0)}$ , para todo  $t \in [\tau_i^1, \tau_i^2]$ .

Chamando  $d := \text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1))$ , segue que

$$\begin{aligned} d &\leq \int_{\tau_i^{(1)}}^{\tau_i^{(2)}} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \\ &\leq \int_{\tau_i^{(1)}}^{\tau_i^{(2)}} \sqrt{2(H - v_0)} dt \leq (\tau_i^{(2)} - \tau_i^{(1)}) \sqrt{2(E - v_0)} \leq (t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) \sqrt{2(H - v_0)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto,  $\frac{d}{\sqrt{2(H-v_0)}} \leq (t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$ , para todo  $i$ .

Uma vez que temos um número infinito de intervalos disjuntos  $(t_i^{(1)}, t_i^{(2)})$ , com  $0 < \frac{d}{\sqrt{2(H-v_0)}} \leq (t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$  para todo  $i$ . Somando em  $i = 1$  até  $i = +\infty$ ,

$$+\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{\sqrt{2(H-v_0)}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (t_i^{(2)} - t_i^{(1)}).$$

Logo concluímos que  $\omega_+ = +\infty$ .

Agora, veremos a prova dos seguintes resultados, os quais dependem somente da definição do potencial  $V$ .

**Lema 3.2.1.** *Seja  $\{\mathbf{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$ . Então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_n) = 0$  se, e somente se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}_n\| = +\infty$ .*

**Demonstração:** Considere  $d_M := \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{u}\|$ , segue que  $\|\mathbf{q}\| - d_M \leq \|\mathbf{q} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{q}\| + d_M$ , para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ . Portanto, se  $\|\mathbf{q}\| > d_M$  a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\frac{M}{\|\mathbf{q}\| + d_M} \leq -V(\mathbf{q}_n) = \lambda \int_{\mathcal{M}} \frac{du}{\|\mathbf{q}_n - \mathbf{u}\|} \leq \frac{M}{\|\mathbf{q}\| - d_M}.$$

Assim, concluímos a demonstração do lema ■

**Lema 3.2.2.** *Seja  $\mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$ . Se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_n) = -\infty \text{ então, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{M}) = 0$$

**Demonstração:** Considere  $n$  fixo, Desde que

$$\text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{M}) = \inf_n \|\mathbf{q}_n - \mathbf{u}\| \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\|\mathbf{q}_n - \mathbf{u}\|} \leq \frac{1}{\text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{M})},$$

então segue que

$$0 \leq -V(\mathbf{q}_n) = \int_{\mathcal{M}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{q}_n - u\|} du \leq \int_{\mathcal{M}} \frac{\lambda}{\text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{M})} = \frac{M}{\text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{M})}.$$

■

A fim de estudar as singularidades das soluções do problema de atração por um corpo massivo  $\mathcal{M}$ , é muito importante conhecer algumas propriedades do potencial  $V$ . No próximo resultado, estabelecemos condições suficientes sobre a função  $V$  para concluir a natureza das singularidades do problema.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  um corpo massivo em  $\mathbb{R}^3$  de dimensão finita e distribuição de massa uniforme (homogêneo). Seja  $e$  e  $V$  o potencial induzido por  $\mathcal{M}$  e assumamos que  $V^{-1}(\{k\})$  é fechado em  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$ . Suponha que  $\mathbf{q}(t)$  uma solução de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$ , definida no intervalo maximal  $(\omega_-, \omega_+)$ .*

*Se  $\omega_+ < +\infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{M}) = 0$ . Também, se  $\omega_- > -\infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \omega_-^+} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{M}) = 0$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, observamos que  $V^{-1}(\{k\})$  é compacto para todo  $k \in \text{Im}(V)$ . De fato, o conjunto  $V^{-1}(\{k\})$  é fechado em  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$  pela continuidade de  $V$ , também é fechado em  $\mathbb{R}^3$ . Então do Lema 3.2.1 segue que  $V^{-1}(\{k\})$  é limitado.

Agora, seja  $\mathbf{q}(t)$ ,  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_+ < +\infty$ , uma solução maximal de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$ . Então  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t))$  existe. De fato, caso contrário, pela continuidade de  $V$  existiriam sequências  $(t_n), (s_n)$  tal que  $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots, t_i, s_i \in (\omega_-, \omega_+)$ , com

$$V(\mathbf{q}(t_i)) \rightarrow v_0, \quad V(\mathbf{q}(s_i)) \rightarrow v_1, \quad v_0 < v_1.$$

Como  $V^{-1}(v_0)$  e  $V^{-1}(v_1)$  são conjuntos não vazios, disjuntos e compactos, temos que  $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$ . Então da Proposição 3.2.1, deveríamos ter  $\omega_+ = +\infty$ , o que é uma contradição.

Agora, vamos considerar dois casos, onde o primeiro  $\text{Im}(V) \subset (-\infty, 0)$ , e o outro caso onde  $\text{Im}(V) \subset (-\tilde{v}, 0)$ ,  $\tilde{v} < \infty$ . No primeiro caso, temos que deve ocorrer uma das seguintes possibilidades:

- (1)  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} V(\mathbf{q}(t)) = 0$ ;
- (2)  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} V(\mathbf{q}(t)) = L \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} V(\mathbf{q}(t)) = \infty$ .

Provaremos que as duas primeiras situações (1) e (2) não podem ocorrer, então deve ocorrer (3) e portanto pelo Lema 3.2.2 teremos  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{M}) = 0$ .

Suponha que vale (1), ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} V(\mathbf{q}(t)) = 0$ , então existe  $t_0$  tal que para todo  $t > t_0$ ,  $v_0 < V(\mathbf{q}(t)) < 0$ , com  $v_0 = V(\mathbf{q}(t_0))$ . Segue do Lema 3.2.1, que  $\|\mathbf{q}(t)\| \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow \omega_+$ . Desde que

$$h = V(\mathbf{q}(t)) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2, \quad t \in (t_0, \omega_+), \quad h \text{ constante},$$

então  $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| < \sqrt{2(h - v_0)}$ , para todo  $t \in (t_0, \omega_+)$ , ou seja, a velocidade é limitada neste intervalo.

Desde que o comprimento a curva solução  $q(t)$  no intervalo  $(t_0, t)$  é  $L = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{q}}\| dt$ , temos que

$$\int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| dt \geq \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t_0)\| \geq \text{dist}(\mathbf{q}(t), V^{-1}(v_0)) =: d_t,$$

pois  $\text{dist}(\mathbf{q}(t), V^{-1}(v_0)) = \inf_{\tilde{q} \in \mathcal{M}} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \tilde{q}) \leq \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t_0)) = \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t_0)\|$ . Assim,  $d_t \leq (t - t_0) \sqrt{2(h - v_0)}$ , e então,

$$t_0 + \frac{d_t}{\sqrt{2(h - v_0)}} \leq t, \quad \text{para todo } t \in (t_0, \omega_+).$$

Desde que  $V^{-1}(v_0)$  é compacto, existe  $r > 0$  tal que  $V^{-1}(v_0) \subset B(0, r)$  e como  $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \rightarrow +\infty$ , dado  $n > 0$ , existe  $t_n$  tal que para todo,  $t, \omega_+ > t > t_n$ ,  $\mathbf{q}(t) \notin B(0, n)$ . Isto implica que,  $d_t = \text{dist}(\mathbf{q}(t), V^{-1}(v_0)) > n - r$ , para todo  $\omega_+ > t > t_n$ . Em particular,  $d_{t_n} \geq n - r$ , e para  $\omega_+ > t_n > t_0$ , e temos que  $\omega_+ \geq t_n \geq t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(h-v_0)}}$ .

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(h-v_0)}} \right) = +\infty,$$

e concluímos que  $\omega_+ = +\infty$ , o que é uma contradição.

Finalmente, se supormos que vale (2), ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t)) = L$ , com  $0 \neq L < -\infty$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_\varepsilon$  tal que para todo  $t > t_\varepsilon$ ,  $V(\mathbf{q}(t)) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Seja  $v_0 = L - \varepsilon$ ,  $v_1 = L + \varepsilon$ ; nós podemos supor que  $0 < \varepsilon < |L|$ , assim  $v_1 < 0$ . Claramente o conjunto  $V^{-1}([v_0, v_1])$  é não vazio e desde que  $V$  é contínua, ele é fechado em  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$ . Além disso, pelo Lema 3.2.2, este conjunto é fechado em  $\mathbb{R}^2$  e pelo Lema 3.2.1 é limitado, já que  $v_1 < 0$ . Portanto  $V^{-1}([v_0, v_1])$  é compacto e  $\mathbf{q}(t) \in V^{-1}([v_0, v_1])$ , para todo  $t > t_\varepsilon$ .

Por outro lado, da equação de energia, nós temos  $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 = 2(h - V(\mathbf{q}(t)))$  e portanto  $t > t_\varepsilon$ , temos

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{2(h - v_0)} = c_2, \quad \text{para todo } t > t_\varepsilon.$$

Segue-se que a solução maximal  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ ,  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ , do sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla V(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

está contido no compacto  $V^{-1}([v_0, v_1]) \times \overline{B(0, c_2)}$ , para todo  $t$ ,  $t_\varepsilon < t < \omega_+$ . Portanto, da teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias<sup>1</sup> que  $\omega_+ = +\infty$ , o que é uma contradição. Então provamos o primeiro caso do teorema.

No segundo caso, isto é, assumindo que  $Im(V) \subset (-\tilde{v}, 0)$ , para algum  $\tilde{v} < \infty$ , temos que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t))$  ou é zero, ou um número real  $L$ ,  $0 \neq L \neq \tilde{v}$ , ou igual a  $\tilde{v}$ . De forma análoga ao primeiro caso é possível provar que as duas primeiras situações não são possíveis. Então, devemos ter que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t)) = \tilde{v}$  ou equivalente  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} dist(\mathbf{q}(t), \mathcal{M}) = 0$ . Assim concluímos a demonstração do teorema. ■

Este teorema garante que como  $t \rightarrow \omega_+^-, \omega_+ < \infty$  (ou análogamente, como  $t \rightarrow \omega_+^-, \omega_- < -\infty$ ) a solução  $\mathbf{q}(t)$  de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$  deve se aproximar do conjunto

<sup>1</sup>Seja  $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e considere o campo  $\dot{x} = f(x)$ . Se  $x \in \Delta$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  é tal que  $\omega_+(x) < \infty$  então a solução  $\varphi(t, x)$  tende a  $\partial\Delta$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$ , ou seja, para todo compacto  $K \subset \Delta$  existe  $\epsilon = \epsilon(K) > 0$  tal que se  $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x)]$  então  $\varphi(t, x) \notin K$ .

de singular  $\mathcal{M}$  de  $V$ . A versão análoga deste resultado para o problema de N-corpos é o Teorema de Painlevé (Teorema 2.2). Por outro lado, o resultado anterior não diz nada sobre a natureza da singularidade, ou seja, se a singularidade é devido a colisão ou não, porque quando a partícula infinitesimal  $\mathbf{q}(t)$  se aproxima do corpo massivo  $\mathcal{M}$  quando  $t \rightarrow \omega_+$  (por exemplo) pode oscilar descontroladamente enquanto se aproxima de  $\mathcal{M}$ , sem se aproximar de um ponto específico de  $\mathcal{M}$ .

### 3.3 Singularidade no Problema do Anel Circular Homogêneo

Nesta seção vamos considerar o problema das singularidades associadas ao movimento de uma partícula infinitesimal atraída pela força gravitacional criada por um corpo massivo homogêneo na forma de um anel.

Consideramos o anel homogêneo fixo  $\mathcal{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x^2 + y^2 \leq b, z = 0\}$  com raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , ( $0 < a < b$ ), com distribuição de massa uniforme e contido no plano  $xy$ . Consideramos uma partícula  $\mathbf{P}$  com massa infinitesimal movendo-se em  $\mathbb{R}^3$ , e assumindo que a única força que age sobre  $\mathbf{P}$  é a força gravitacional induzida pelo anel  $\mathcal{A}$ . Por (3.1) a função potencial  $V$  induzida por  $\mathcal{A}$  assume a forma

$$V(\mathbf{q}) = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\lambda du}{\|\mathbf{q} - \mathbf{u}\|}, \quad (3.9)$$

onde  $\lambda$  é a densidade de massa constante e  $\mathbf{q}$  é a posição da partícula  $\mathbf{P}$  e estamos considerando a constante de gravitação universal sendo igual a um.

Consideremos o elemento diferencial de massa  $dM = \lambda \rho d\theta d\rho$  e denotamos por  $\mathbf{u} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$  ( $a \leq \rho \leq b$ ) um ponto sobre o anel  $\mathcal{A}$  e  $\mathbf{P} = (x, y, z)$  um ponto no espaço onde queremos determinar potencial.

A distância  $D = d(P, u) = \|\vec{P} - \vec{u}\|$  é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} D^2 &= (x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x \cos \theta - 2\rho y \sin \theta + \rho^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observe que a massa do anel é dada por

$$M = \int_{\mathcal{A}} \lambda du = +\lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta = \pi\lambda(b^2 - a^2). \quad (3.11)$$

Então de acordo com a equação (3.9), e como a massa  $M$  do anel é dada por (3.11), segue que a função potencial assume a forma

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= -\lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos \theta - 2y\rho \sin \theta}} \rho d\theta d\rho \\ &= -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos \theta - 2y\rho \sin \theta}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para o nosso propósito, necessitamos obter uma forma explícita da função potencial (3.12), em particular para poder resolver a integração em questão. Para superar esta dificuldade, vamos descrever a função potencial usando integrais elípticas completas de primeiro tipo.

Consideremos o círculo  $C$  de raio  $\rho$ ,  $a < \rho < b$ . Sejam  $A$  o ponto sobre o círculo  $C$  que está mais próximo de  $P$ ,  $Q$  qualquer outro ponto no círculo  $C$  e seja  $D$  a distância de  $P$  a  $B$ , como na Figura 3.3. Se o ângulo  $BOA$  é representado por  $\psi = 2\omega$  a expressão para o potencial  $V$  é

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\psi d\rho}{\Delta}. \quad (3.13)$$

onde,  $\overline{QB}^2 = \rho^2 + (x^2 + y^2) - 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$  e segue que  $\Delta^2 = \overline{QB}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$ . Consequentemente,

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta)}},$$

e tomando  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  da expressão acima obtemos

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{r^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\theta)}}. \quad (3.14)$$

Seja  $P = (r, \theta, z)$  um ponto em coordenadas cilíndricas que não está sobre  $\mathcal{A}$ . A partir de  $P$  traçamos a perpendicular  $PQ = z$  ao plano do anel (veja figura 3.3). Determinamos o diâmetro do anel o qual estendemos passando até  $B$ . Tomando  $B = (\rho, \theta_0, 0)$  um ponto do anel, sobre  $C$  e denotamos  $QB = D$ ,  $PA = \rho_1$  e  $PF = \rho_2$ , onde  $A$  e  $F$  são os pontos sobre  $C$  mais próximo e mais distante de  $P$  respectivamente.

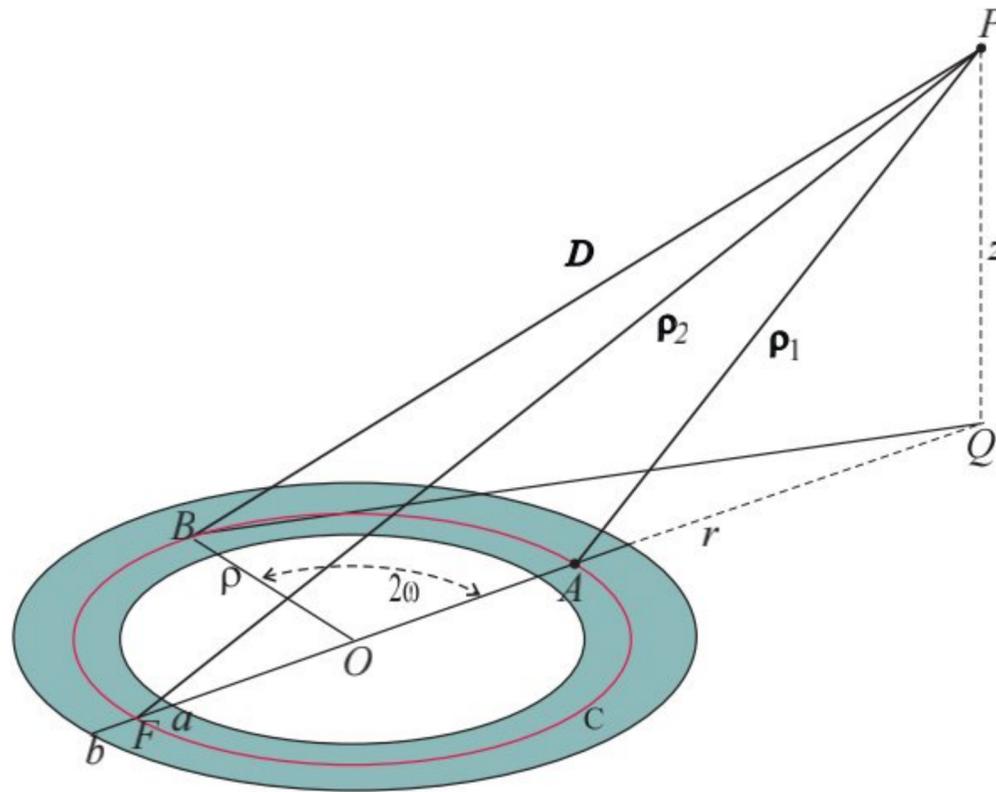


Figura 3.3: Anel e distâncias máximas e mínimas.

Evidentemente  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as distâncias máximas e mínimas respectivamente quando o ponto  $B$  percorre o círculo  $C$  de raio  $\rho$ . Se o ângulo  $QOB$  é representado por  $2\omega$ , então o elemento de arco é  $ds = 2\rho d\omega$  e a expressão para o potencial será dada por

$$V = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b 2\rho \int_0^\pi \frac{d\omega}{\Delta} d\rho. \quad (3.15)$$

Se o comprimento  $\overline{OQ}$  é representado por  $r$ , então

$$\rho_1^2 = (r - \rho)^2 + z^2, \quad \rho_2^2 = (r + \rho)^2 + z^2, \quad \overline{QB}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(2\omega).$$

Logo a equação para  $\Delta^2$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (r^2 + \rho^2 + z^2)(\cos^2 \omega + \sen^2 \omega) - 2r\rho(\cos^2 \omega - \sen^2 \omega) \\ &= [(r - \rho)^2 + z^2] \cos^2 \omega + [(r + \rho)^2 + z^2] \sen^2 \omega \\ &= \rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sen^2 \omega. \end{aligned}$$

A expressão para o potencial (3.15) é então dado por

$$V = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b 2\rho \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{\rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sen^2 \omega}} d\rho. \quad (3.16)$$

Para introduzir a integral elíptica de primeiro tipo, definimos o módulo

$$k^2 := 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} < 1,$$

e introduzimos um novo ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2} + \psi$  para a integração. Assim com a última definição e da mudança de variável na integração, da equação (3.16) obtemos a expressão

$$V(r, z) = -\frac{4M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \frac{\rho}{\rho_2} K(k) d\rho, \quad (3.17)$$

onde  $K(k)$  é a integral elíptica de primeira espécie.

### 3.4 O Problema Equatorial do Anel circular Homogêneo

A partir de agora restringiremos nossa atenção ao movimento da partícula infinitesimal no plano equatorial (plano que contém o anel). Vamos chamar este problema de *Problema equatorial do anel circular* ou simplesmente *problema equatorial*. Nesta situação, estamos com um problema de força central, isto é, a força que age sobre a partícula infinitesimal só depende da distância da mesma ao centro de massa. Também verifica-se que neste plano tanto na região interna quanto externa no problema do anel massivo, o potencial  $V$  associado é limitado. Essa é uma propriedade importante que desempenha um papel preponderante na nossa análise e nos permite obter os resultados sobre as singularidades do problema.

Nesta subseção denotaremos  $\mathbf{q} = (x, y, 0) \equiv (x, y)$ , e  $r = \|\mathbf{q}\|$ , então as equações de movimento da partícula infinitesimal são dadas por

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}). \quad (3.18)$$

Ainda, as distâncias máxima e mínima da partícula infinitesimal ao anel assumem a forma  $\rho_1^2 = (r + \rho)^2$  e  $\rho_2^2 = (r - \rho)^2$ , e a expressão para o potencial (3.16) fica determinada por

$$\begin{aligned} V &= -4\lambda \int_a^b \rho \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(r - \rho)^2 \sin^2 \theta + (\rho + r)^2 \cos^2 \theta}} d\rho \\ &= -4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{\rho + r} K(k) d\rho. \end{aligned} \quad (3.19)$$

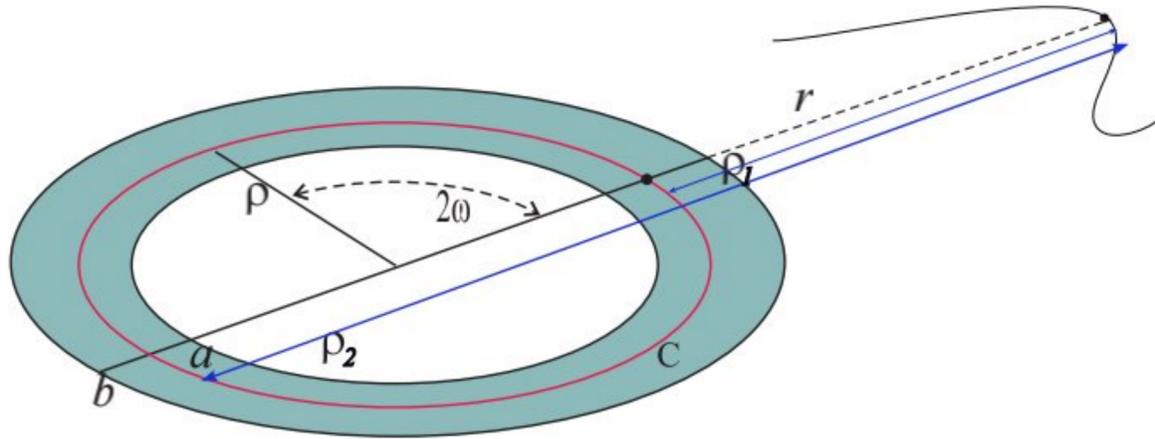


Figura 3.4: Movimento de uma partícula confinada no plano equatorial

Observe que o potencial  $V$  acima depende somente da variável radial  $r$ .

Desde que estamos com um problema de força central e no plano, vamos usar coordenadas polares. Para obter as equações de movimento em coordenadas polares, precisamos aplicar a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & p_x &= R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta, \\ y &= r \sin \theta, & p_y &= R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $(r, \theta)$  são as coordenadas da posição e  $(R, \Theta)$  são as coordenadas conjugadas associadas. A variável  $\Theta$  corresponde ao momento angular da partícula, ou seja,  $\Theta = \langle \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}_3 \rangle = x\dot{y} - y\dot{x}$ . Em coordenadas polares a função Hamiltoniana do problema equatorial assume a forma

$$H(r, R, \Theta) = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + U(r), \quad (3.21)$$

onde

$$U(r) = V(\mathbf{q}) = -4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{\rho + \mathbf{r}} \mathbf{K}(\mathbf{k}) d\rho. \quad (3.22)$$

Desta forma, as equações de movimento da partícula infinitesimal no problema planar equatorial, em coordenadas polares são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R, & \dot{R} &= \frac{\Theta^2}{r^3} + U'(r), \\ \dot{\theta} &= \frac{\Theta}{r^2}, & \dot{\Theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A partir da última equação do sistema (3.23) obtemos que o momento angular é constante ao longo das soluções, ou seja,  $\Theta = c$  onde  $c$  é uma constante real. Desta maneira, o sistema (3.23) possui duas integrais primeiras: a energia  $h = 1/2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + V(\mathbf{q})$  e o momento angular  $c$ .

Observe ainda que no problema equatorial, as equações de movimento (3.18) são explicitamente da forma

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{c^2}{r^3} - U'(r) \\ \dot{\theta} &= \frac{c}{r^2}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

As equações do sistema acima podem ser resolvidas de forma independente (dizemos que o sistema é desacoplado). De fato, dada uma condição inicial  $(r_0, \theta_0)$  resolvemos a primeira equação do sistema obtendo  $r(t)$ . Substituindo  $r(t)$  na segunda equação de (3.24) e integrando obtemos a solução para o sistema. Desta maneira é suficiente resolver a primeira equação do sistema (3.24) acima.

Note que  $\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - U'(r) = \frac{d}{dr} \left[ -\frac{c^2}{2r^2} - U(r) \right]$ . Desta maneira a primeira equação do sistema (3.24) é equivalente a

$$\ddot{r} = -U'_{eff}(r)\tag{3.25}$$

com

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} + U(r),$$

o qual é chamado de *potencial efetivo*. O sistema (3.25) acima corresponde ao seguinte sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{r} &= v, \\ \dot{v} &= -U'_{eff}(r),\end{aligned}$$

com um grau de liberdade. e cuja função Hamiltoniana dada por

$$H(r, v) = 1/2 v^2 + U_{eff}(r).\tag{3.26}$$

Para obter algumas propriedades importantes da função potencial, vamos precisar de alguns resultados importantes que envolvem integrais elípticas. Estes resultados podem ser encontrados em [13] e [7].

**Lema 3.4.1.** *Seja  $K(k)$  integral elíptica completa de primeira ordem. Então*

- a)  $K(k) > 0$  para  $0 < k < 1$ ,
- b)  $\frac{dK(k)}{dk} > 0$  para  $0 < k < 1$ .

Outro resultado sobre integrais elípticas de primeira espécie é dado por

**Lema 3.4.2.** *A função*

$$f(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta}}$$

*tem a seguinte propriedade*

$$f(p, q) = f\left(\frac{p+q}{2}, \sqrt{pq}\right).$$

A propriedade acima é chamada de média geométrica-aritmética da integral elíptica de primeira espécie. Para maiores detalhes desta propriedade veja [13] e [15]. Com estas propriedades de integrais elípticas obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 3.4.1.** *Na região conexa interna ao anel homogêneo  $0 < r < a$ ,  $U'(r) < 0$ , e na região externa,  $r > b$ ,  $U'(r) > 0$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema [3.4.2], o potencial na região exterior ao anel  $r > b$ , pode ser escrito como

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta}}, \quad (3.27)$$

Desde que

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2(1 - \sin^2 \theta) + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{r} k\left(\frac{\rho}{r}\right), \end{aligned}$$

podemos escrever Eq. (3.27) da seguinte maneira

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{r} K\left(\frac{\rho}{r}\right) d\rho. \quad (3.28)$$

Note que  $a \leq \rho \leq b < r$  e então  $\frac{\rho}{r} < 1$ .

Diferenciando com respeito a  $r$  a Eq. (3.28) verificamos que

$$U'(r) = 4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{r^2} \left[ K\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{\rho}{r} \frac{dK\left(\frac{\rho}{r}\right)}{dk} \right] d\rho. \quad (3.29)$$

Então se  $r > b$ , segue do Lema 3.4.1 e equação (3.29) que  $\frac{\rho}{r^2} \left[ K\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{\rho}{r} \frac{dK\left(\frac{\rho}{r}\right)}{dk} \right] > 0$ , portanto  $U'(r) > 0$ .

Se  $0 < r < a$ , usando o Lema 3.4.2, obtemos que

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta}{\sqrt{(\rho^2 - r^2) \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta}} d\rho. \quad (3.30)$$

Desde que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta}{\sqrt{(\rho^2 - r^2) \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta}{\rho \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2} \sin^2 \theta}} = k\left(\frac{r}{\rho}\right),$$

podemos escrever Eq. (3.30) como

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b K\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho. \quad (3.31)$$

Diferenciando Eq. (3.31) com respeito a  $r$  obtemos

$$U'(r) = -4\lambda \int_a^b \frac{1}{\rho} \frac{dK\left(\frac{r}{\rho}\right)}{dk} d\rho. \quad (3.32)$$

Novamente aplicando o Lema 3.4.1, segue que  $\frac{1}{\rho} \frac{dK\left(\frac{r}{\rho}\right)}{dk} > 0$ , e desta forma,  $U'(r) < 0$  se  $0 < r < a$ . Então concluímos a demonstração. ■

Nosso objetivo agora é obter expressões fechadas para o potencial (3.19), e também para o potencial efetivo. Na região interior ao anel homogêneo ( $0 < a < 1$ )

o potencial é dado por (3.31). Fazemos a seguir uma mudança de coordenadas definindo  $k = r/\rho$ . Então de (3.31) obtemos que

$$U(r) = 4\lambda r \int_{\frac{r}{a}}^r \frac{K(k)}{k^2} dk, \quad (3.33)$$

e esta integral pode ser calculada analiticamente (veja [13]). Resulta que o potencial do anel circular homogêneo, na região interior  $0 < r < a$  é dado por

$$U(r) = 4\lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a - E(r) \right], \quad (3.34)$$

onde  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$  é a integral elíptica completa de segunda espécie.

O seguinte resultado mostra uma propriedade importante de limitação do potencial na região interior ao anel.

**Lema 3.4.3.** *O potencial do anel fixo homogêneo na região interna ao anel, no plano horizontal, satisfaz a seguinte desigualdade*

$$L_{int} = 4\lambda[a - E(a)] < U(r) \leq 4\lambda[a - 1] = U(0), \quad \text{para todo } 0 < r < a.$$

**Demonstração:** Sabemos que  $U(r) < 0$  por (3.9), e pela proposição 3.4.1, temos que  $U'(r) < 0$ , ou seja,  $U(r)$  é decrescente no intervalo  $[0, a)$ . Também é claro que

$$\lim_{r \rightarrow a^-} U(r) = 4\lambda[a - E(a)] < 0. \quad (3.35)$$

Desde que  $E(a)$  é limitada,  $0 < a \leq 1$ , e  $U(r)$  é uma função decrescente, obtemos

$$4\lambda[a - E(a)] \leq U(r) < U(0) = 4\lambda[a - 1].$$

■

Da Equação (3.34) segue que o potencial efetivo do anel circular na região interior ao mesmo é dado por

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} + 4\lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a - E(r) \right].$$

Na região do plano, exterior ao anel circular ( $r > b$ ), consideremos (3.28) com a seguinte mudança de coordenadas  $k = R/r$  e calculando esta integral analiticamente (veja (13)) obtemos

$$\begin{aligned} U(r) &= -4\lambda r \int_{a/r}^{b/r} kK(k)dk \\ &= -4\lambda r \left\{ E\left(\frac{b}{r}\right) - \left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]K\left(\frac{b}{r}\right) - E\left(\frac{a}{r}\right) + \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]K\left(\frac{a}{r}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Lema 3.4.4.** *O potencial na região do plano exterior ao anel circular homogêneo  $A$  satisfaz*

$$L_{ext} = -4\lambda b \left[1 - E\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)K\left(\frac{a}{b}\right)\right] < U(r) < 0, \text{ para todo } r > b. \quad (3.37)$$

**Demonstração:** Sabemos que  $U(r) < 0$  por Eq. (3.9) e da proposição 3.4.1 segue que  $U'(r) > 0$ . Também temos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} U(r) = -4\lambda \left[ E(1) - E\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)K\left(\frac{a}{b}\right) \right] + 4\lambda \lim_{r \rightarrow 1^+} r \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)K\left(\frac{b}{r}\right).$$

Por outro lado, o limite  $\lim_{r \rightarrow b^+} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)K\left(\frac{b}{r}\right)$  é zero. De fato, fazendo a substituição  $u = 1/r$ , então este limite é equivalente a

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} (1 - u^2)K(u).$$

Agora usando a série para integrais elípticas  $K(k)$  (veja (15), pg. 203)

$$K(u) = \left[1 + \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{9}{64}u_1^4 + \dots\right] \ln \frac{4}{u_1} - \left[\frac{1}{4}u_1^2 + \frac{21}{128}u_1^4 + \dots\right],$$

com  $u_1^2 = 1 - u^2$ . Segue que

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow 1^-} (1 - u^2)K(u) \\ &= \lim_{u_1 \rightarrow 0^+} u_1^2 \left( \left[1 + \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{9}{64}u_1^4 + \dots\right] \ln \frac{4}{u_1} - \left[\frac{1}{4}u_1^2 + \frac{21}{128}u_1^4 + \dots\right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

E a última igualdade segue do fato que  $\lim_{u_1 \rightarrow 0} u_1^2 \ln \frac{4}{u_1} = 0$ . Usando (3.38), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} U(r) = -4\lambda \left[ E(1) - E\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)K\left(\frac{a}{b}\right) \right].$$

Desde que pela Proposição 3.4.1,  $U(r)$  é uma função crescente para todo  $r > b$ , provamos (3.37). ■

Devido aos Lemas 3.4.3 e 3.4.4 obtém-se que o potencial tem as propriedades de limitação da figura abaixo:

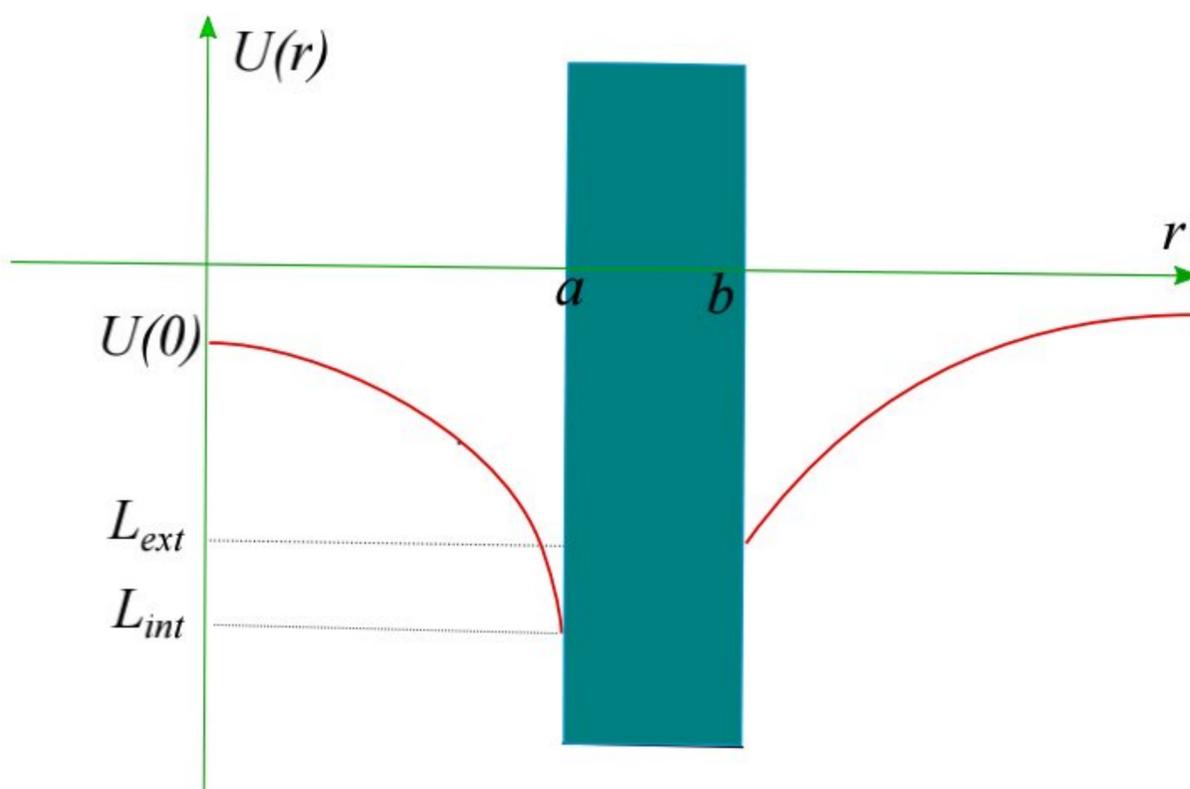


Figura 3.5: Esboço do potencial  $U(r)$ , no interior e no exterior do anel.

### 3.5 Singularidades no Plano Equatorial do Anel Circular Homogêneo

A seguir estudaremos a natureza das singularidades no problema do anel homogêneo no plano equatorial. Para isso considere o seguinte resultado preliminar.

**Lema 3.5.1.** *Seja  $\mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$  uma sequência no problema do anel no plano equatorial. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{A}) = 0$ , então existem subsequências  $q_{n_i}, q_{n_k}$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_{n_i}) = \frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} [a - bE(\frac{a}{b})], \text{ para todo } i, \text{ se } q_{n_i} < a,$$

e também,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_{n_k}) = \frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} [1 - E(\frac{a}{b}) + (1 - \frac{a^2}{b^2})K(\frac{a}{b})],$$

pra todo  $i$ , se  $q_{n_k} < b$ .

**Demonstração:** Primeiro vamos considerar a região fora do anel. Da equação [3.36](#), construímos a sequência  $\mathbf{q}_{n_i}$  como o conjuntos dos elementos  $\mathbf{q}_n$  tais que

$\|\mathbf{q}_n\| > b$  e a sequência  $\mathbf{q}_{n_k}$  como o conjuntos dos elementos  $\mathbf{q}_n$  tais que  $\|\mathbf{q}_n\| < a$ . Desde que  $\mathbf{q}_{n_i} > b$  isso significa que

$$V(\mathbf{q}_{n_i}) = -4\lambda\mathbf{q}_{n_i} \left\{ E\left(\frac{b}{\mathbf{q}_{n_i}}\right) - \left[1 - \frac{b}{\mathbf{q}_{n_i}^2}\right] K\left(\frac{b}{\mathbf{q}_{n_i}}\right) - E\left(\frac{a}{\mathbf{q}_{n_i}}\right) + \left[1 - \left(\frac{a}{\mathbf{q}_{n_i}}\right)^2\right] K\left(\frac{a}{\mathbf{q}_{n_i}}\right) \right\}.$$

Desde que,  $\mathbf{q}_{n_i} \rightarrow b^+$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_{n_i}) = -4\lambda b \left\{ 1 - E\left(\frac{a}{b}\right) + \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] K\left(\frac{a}{b}\right) \right\},$$

porque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{b^2}{\mathbf{q}_{n_i}^2}\right] K\left(\frac{b}{\mathbf{q}_{n_i}}\right) = 0$ . Por outro lado, vamos considerar  $\mathbf{q}_{n_k} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$  no interior do anel, novamente da equação [3.36](#), temos

$$V(\mathbf{q}_{n_k}) = 4\lambda \left\{ E\left(\frac{\mathbf{q}_{n_k}}{a}\right)a - E\left(\frac{\mathbf{q}_{n_k}}{b}\right)b \right\},$$

e desde que,  $\mathbf{q}_{n_k} \rightarrow a^-$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_{n_k}) = 4\lambda \left\{ a - bE\left(\frac{r}{b}\right) \right\}.$$

Finalmente, usando a expressão da massa do anel  $M = 4\pi(b^2 - a^2)$  concluímos a demonstração. ■

**Corolário 3.5.1.** *Seja  $\mathcal{A}$  um anel de massa  $M$ , contido no plano equatorial de  $\mathbb{R}^3$  e  $V$  o potencial induzido por  $\mathcal{A}$ . Seja  $\mathbf{q}(t)$  uma solução de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$  (problema planar), definida no intervalo maximal  $(\omega_-, \omega_+)$ . Se  $\omega_+ < +\infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$ . Também, se  $\omega_- > -\infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \omega_-^+} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$ .*

**Demonstração:** Considerando a constante real  $C^*(a, b) = \min \left\{ \frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} [a - bE\left(\frac{r}{b}\right)], \frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} [1 - E\left(\frac{a}{b}\right) + (1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2)K\left(\frac{a}{b}\right)] \right\}$ , que depende de  $a$  e  $b$ . Segue dos Lemas [3.4.3](#) e [3.4.4](#) que a imagem da função  $U(r)$  está no intervalo  $(0, C^*(a, b))$ , veja a Figura 3.3. Então, tomando  $k \in \mathbb{R}, C^*(a, b) < k < 0$ , do lema [3.5.1](#) obtemos que  $U^{-1}(\{k\})$  é fechado para todo  $k \in (C^*(a, b), 0)$ . De fato, da definição  $U^{-1}(\{k\}) = \{r \in \mathbb{R}^+, r \neq [a, b]; U(r) = k\}$ , temos que

- i.  $U^{-1}(\{k\}) = \{r_1\}$ ,
- ii.  $U^{-1}(\{k\}) = \{r_1, r_2\}$ ,

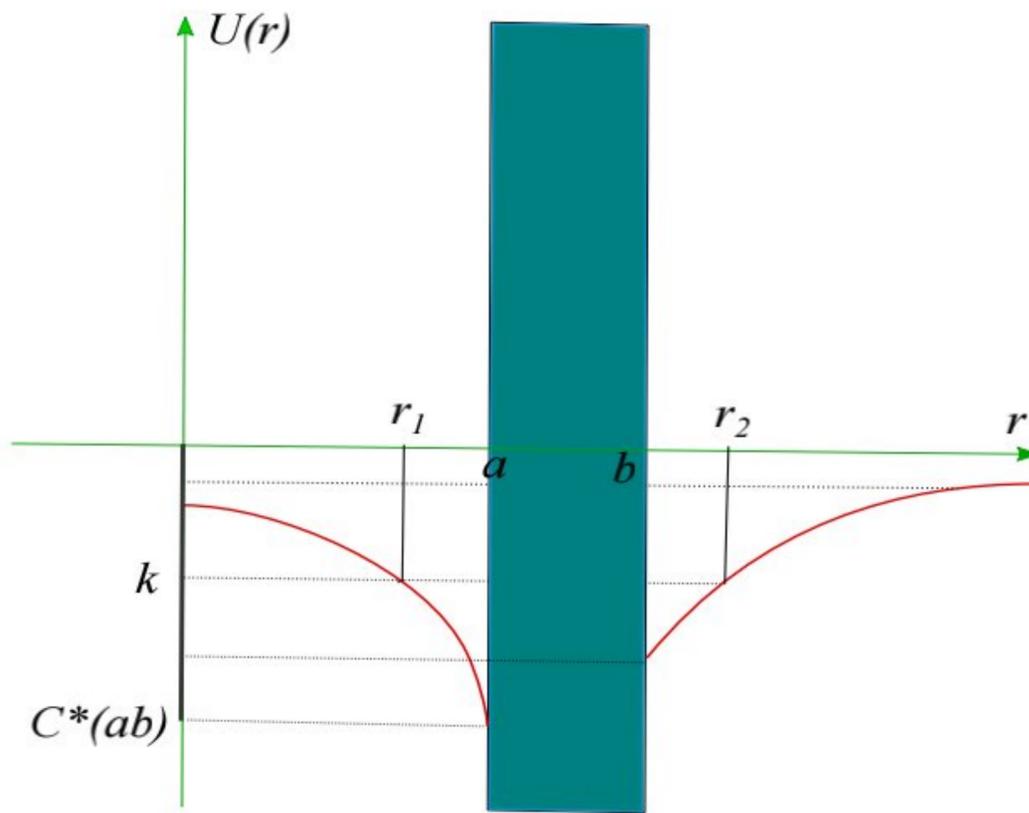


Figura 3.6: Ilustração dos conjuntos  $U^{-1}(\{k\})$ .

iii.  $U^{-1}(\{k\}) = \{r_2\}$ ,

onde  $0 < r_1 < a$  e  $r_2 > b$ , ou seja, a imagem inversa do potencial ou é um círculo no interior do anel (caso i.) ou dois círculos (caso ii.) ou um círculo no exterior do anel (caso iii.). Observe que em qualquer caso  $U^{-1}(\{k\})$  é compacto. Assim, a conclusão do corolário segue do Teorema [3.1](#).

■

A princípio,  $\mathbf{q}(t)$  poderia se aproximar do anel de várias formas, sem necessariamente tender a um ponto específico do anel. Se  $\mathbf{q}(t)$  aproxima-se de um ponto  $\mathbf{q}_\omega$  do anel quando  $t \rightarrow \omega_+$  (ou  $t \rightarrow \omega_-$ ) isto significa que a partícula deve colidir com o anel circular  $\mathcal{A}$ . O principal resultados sobre as singularidades do problema é dado pelo seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** *No problema do anel circular homogêneo no plano equatorial todas as singularidades se devem a colisões.*

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{q}(t)$ ,  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_+ < +\infty$ , uma solução maximal do sistema de equações  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$ . Pelo Teorema [3.1](#), temos que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) =$

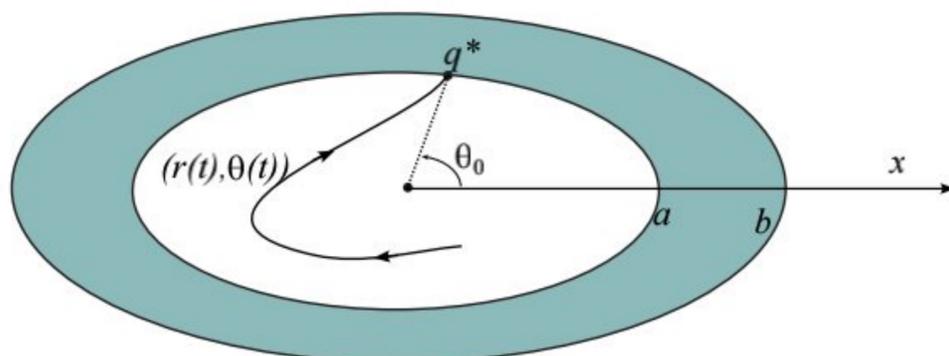


Figura 3.7: Uma solução devido a colisão no interior do anel.

0. Para provar que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* \in \mathcal{A}$ , escrevemos este sistema em coordenadas polares  $(r, \theta)$  como em (3.24).

Desde que o anel em coordenadas polares é dado por  $\mathcal{A} = \{(r, \theta), \theta \in [0, 2\pi], a < r < b\}$ , temos que mostrar, que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* \in \mathcal{A}$  que é equivalente a mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} r(t) = a$  no caso da região interior ao anel ou  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} r(t) = b$  no caso da região exterior ao anel e  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \theta(t) = \theta_0$ , para algum  $\theta_0$ . Os dois primeiros limites seguem do fato que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$ . Veja Figura 3.7.

Vamos provar agora que  $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \theta(t) = \theta_0$ . Se  $c = 0$ , então  $\theta(t)$  é constante, e não temos nada a provar.

Suponha que  $c > 0$ , logo  $\theta(t)$  é uma função crescente. Então para provar que o limite  $\theta(t)$  existe é suficiente provar que  $\theta(t)$  é limitado superiormente, para  $t$  em uma vizinhança de  $\omega_+$ .

Desde que  $r(t) \rightarrow a$  (o caso em que  $r(t) \rightarrow b$ , segue analogamente), existe  $t_0$  tal que,  $t > t_0$ ,  $r(t) > \frac{a}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \frac{c}{r(s)^2} ds + \theta(t_0) \right\| \leq 4 \int_{t_0}^t \left\| \frac{c}{a^2} \right\| ds + \|\theta(t_0)\| \\ &\leq \frac{4c}{a^2} (\omega_+ - t_0) + \theta(t_0) < +\infty \end{aligned}$$

para todo  $t \in (t_0, \omega_+)$ . Portanto, o limite de  $\theta(t) = \theta_0$ , quando  $t \rightarrow \omega_+$  para algum  $\theta_0$  e a demonstração do teorema está concluída. ■

**Observação 3.5.1.** Não podemos aplicar os mesmos argumentos descritas acima, para o estudo das singularidades do no problema espacial do anel. A expressão para o potencial do anel circular no problema espacial pode ser encontrada em [19]. Esta expressão é dada em coordenadas cilíndricas e tem algumas singularidades, de maneira que e não está definida para  $r = a$  e  $z \neq 0$  ou  $r = b$  e  $z \neq 0$  (considerando o anel de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ ). Desta maneira não obtemos informações precisas sobre o comportamento da função potencial numa vizinhança do anel. A existência de singularidades devido a colisões no problema espacial, ainda é um problema em aberto.

A seguir, discutiremos o problema da existência ou não de soluções com singularidades. Inicialmente, provaremos o seguinte lema.

**Lema 3.5.2.** Na região externa do anel no plano equatorial, as seguintes afirmações são verdadeiras.

1.  $U'(r) \rightarrow +\infty$ , se  $r \rightarrow b^+$ ,
2.  $U'(r) \rightarrow 0$ , se  $r \rightarrow +\infty$ .

**Demonstração:** A prova deste lema é consequência de várias propriedades das integrais elípticas de primeira e segunda espécie e suas derivadas. Diferenciando a função potencial (3.36) na região externa do anel obtemos

$$U'(r) = -4\lambda \left\{ E\left(\frac{b}{r}\right) + K\left(\frac{b}{r}\right) \left[ \frac{2b^2}{r^2} - 1 \right] + K\left(\frac{a}{r}\right) \left[ 1 - \frac{2a^2}{r^2} \right] - E\left(\frac{a}{b}\right) \right\}, \quad (3.39)$$

onde usamos as seguintes relações canônicas

$$K'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k} \text{ e } E'(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k},$$

veja [7] para mais detalhes das derivadas de funções elípticas. Agora, calculando o limite de  $U'(r)$  quando  $r \rightarrow b^+$ , obtemos

$$\lim_{r \rightarrow b^+} U'(r) = -4\lambda \left[ E(1) - E\left(\frac{a}{b}\right) + K\left(\frac{a}{b}\right) \left[ 1 - \frac{2a^2}{b^2} \right] \right] + 4\lambda \lim_{r \rightarrow b^+} K\left(\frac{b}{r}\right) \left[ \frac{2b^2}{r^2} - 1 \right] = +\infty,$$

pois  $K\left(\frac{b}{r}\right) \rightarrow \infty$ , quando  $r \rightarrow b^+$ . Assim, provamos o item 1. A prova do item 2 é consequência imediata da equação [3.39](#). ■

**Proposição 3.5.1.** *Seja  $r(t)$  uma solução do problema do interior do anel com momento angular  $c \neq 0$ . Então as seguintes situações não são possíveis:*

1.  $\lim_{t \rightarrow t^*} r(t) = 0$ , com  $t^* \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$  ou  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$

**Demonstração:** Para o primeiro item, supomos que exista uma única solução do problema do anel  $r(t)$  tal que  $r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t^*$  por aproximação pela esquerda de  $t^*$ , a demonstração do outro caso é feita de modo similar. Usando a seguinte relação de energia  $h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} + U(r)$ , no intervalo  $(t^* - \delta, t^*)$  com  $\delta > 0$ , onde  $U(r) = 4\lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a - E\left(\frac{r}{b}\right)b \right]$ .

Da equação da energia segue que

$$r^2 \left( h - \frac{1}{2}\dot{r}^2 \right) = \frac{c^2}{2} + r^2 U(r) = \frac{c^2}{2} + 4r^2 \lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a - E\left(\frac{r}{b}\right)b \right]. \quad (3.40)$$

Desde que  $\lim_{r \rightarrow 0} U(r) = 0$ , obtemos da equação [3.40](#) que

$$r^2 \left( h - \frac{1}{2}\dot{r}^2 \right) \rightarrow \frac{c^2}{2} > 0.$$

Por outro lado, no intervalo  $(t^* - \delta, t^*)$  a seguinte inequação é verificada

$$\frac{r^2 \left( h - \frac{1}{2}\dot{r}^2 \right)}{r^2} \leq h \quad \rightarrow \quad \infty = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \left( h - \frac{1}{2}\dot{r}^2 \right)}{r^2} < h,$$

chegamos a um absurdo porque  $h \in \mathbb{R}$ .

A prova do segundo item é a seguinte. Assumindo que existe uma solução de tal modo que  $r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  (os argumentos da prova no outro caso são completamente análoga). Da relação da energia, tiramos que  $\ddot{r}(t) \rightarrow \infty$ . De fato,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} + 4\lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a + E\left(\frac{r}{b}\right)b \right] \\ \dot{r}^2 &= 2h - \frac{c^2}{r^2} - 8\lambda \left[ E\left(\frac{r}{a}\right)a + E\left(\frac{r}{b}\right)b \right]. \end{aligned}$$

Derivando  $r$  em relação a  $t$  da última igualdade acima, obtemos

$$2\dot{r}\ddot{r} = 0 + \frac{c^2}{r^3} - 8\lambda \frac{d}{dt}U(r(t)) = \frac{c^2}{r^3}\dot{r} - 8\lambda U'(r(t))\dot{r},$$

assim

$$2\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - 8\lambda U'(r(t)),$$

agora, aplicando o Lema [3.5.2](#) temos que  $\ddot{r} \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , pois  $U'(r(t)) \rightarrow 0$ .

Assim, existem números  $t_1, k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\ddot{r}(t) \geq k$  para todo  $t \geq t_1$ . Integrando duas vezes a desigualdade  $\ddot{r}(t) \geq K$  obtemos que

$$r(t) \geq r(t_1) + \dot{r}(t_1)(t - t_1) + \frac{K(t - t_1)^2}{2} + c,$$

de

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) \geq r(t_1) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \dot{r}(t_1)(t - t_1) + \frac{K(t - t_1)^2}{2} \right],$$

Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \dot{r}(t_1)(t - t_1) + \frac{K(t - t_1)^2}{2} \right] = +\infty$ , segue que  $r(t) \rightarrow +\infty$  o que é um absurdo. Desta forma, concluímos a prova. ■

**Proposição 3.5.2.** *Seja  $r(t)$  uma solução do problema do anel no plano equatorial. Então não podemos ter  $r(t) \rightarrow b$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:**

Para provar o item, assumimos que existe uma solução  $r(t)$  de [\(3.24\)](#) tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = b^+$ , o caso de  $(t \rightarrow -\infty)$  é feito de maneira similar. Desde que  $r(t) \rightarrow b$  quando  $t \rightarrow +\infty$  segue do primeiro item do Lema [3.5.2](#) que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{r}(t) = -\infty$ . Portanto, dado  $K > 0$  deve existir  $t_1 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\ddot{r}(t) < -K$  para todo  $t \geq t_1$ . Integrando esta desigualdade duas vezes no intervalo  $(t_1, t)$  chegamos em

$$r(t) < r(t_1) + \dot{r}(t_1)(t - t_1) - \frac{K}{2}(t - t_1)^2 + c.$$

Logo segue que  $r(t) \rightarrow -\infty$ , e como  $r(t) > 0$ , chegamos a uma contradição. ■

Esta proposição nos diz que é impossível ter uma solução de  $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$  no plano equatorial aproximando (região externa) do anel no tempo infinito e também diz que uma solução não pode escapar em tempo finito.

**Teorema 3.3.** *Considere o problema do anel no plano equatorial. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *Na região interna, isto é,  $(0 \leq r < a)$  temos que:*
  - (a) *Se  $c = 0$ , então todas as soluções devem começar e terminar em colisão;*
  - (b) *Para uma solução com momento angular não nulo ( $c \neq 0$ ) no interior do anel, deve começar e terminar em colisão;*
2. *No caso da região exterior, todas as soluções com momento angular nulo ( $c = 0$ ) não estão definidas para todo tempo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:**

Seja  $r(t)$  uma solução em coordenadas polares satisfazendo a equação (3.24) com  $c = 0$ . No caso interior, isto é,  $0 < r(t) < a$  para todo tempo  $t$  onde a solução está definida. Do Lema 3.4.3, temos que  $U(r)$  é limitado e da relação da energia  $h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r)$  nos obtemos que  $\dot{r}^2$  é limitado. Então, devemos ter que  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  são limitadas onde elas estão definidas. Então, pela teoria clássica das Equações Diferenciais Ordinárias qualquer  $\mathbf{q}(t)$  deve ser periódica ou deve começar e finalizar em colisão porque nós estamos considerando  $r(t) \neq 0$ . Mas a primeira possibilidade não é possível por causa da proposição 3.4.1. De fato, nesse caso  $\ddot{r} = -U'(r) > 0$  e como  $\dot{r}$  é estritamente monótona então a solução não é periódica, assim provando a) do item 1.

Para o subitem b) considere o caso  $c \neq 0$ , primeiro vamos relembrar que a relação da energia assume a forma

$$h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} + U(r).$$

Perceba que aqui aparece o fator  $\frac{c^2}{2r^2}$ . Agora, se  $r(t)$  é uma solução no interior do anel, é limitada e distante da origem. Então pela relação de energia, desde que  $U(r)$  é limitado no plano equatorial (ver Lema 3.4.3) segue que  $\dot{r}(t)$  também é

limitada. Usando os mesmo argumentos usados para o caso anterior, temos que todas as soluções no interior do anel devem começar e finalizar em colisão.

E para o item 2, na região exterior do anel, pela Proposição [3.4.1](#) segue que  $\ddot{r} = -U'(r) < 0$  e pela convexidade temos que pelo menos alguma solução não está definida para todo tempo em  $\mathbb{R}$ . ■

## Capítulo 4

# Singularidades no problema de $N$ -corpos com potencial Homogêneo

Neste capítulo generalizamos o problema de  $N$ -corpos Newtoniano considerando o problema de  $N$ -corpos movendo-se devido a força mútua entre as partículas, cuja magnitude agora é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional a uma potência  $(\alpha + 1)$  da distância entre as partículas. Uma motivação para este problema está na lei de atração entre certas moléculas que tem uma boa descrição quando a força (chamadas forças do tipo Van-der Waals) está associada a potenciais da forma  $V = Q/\|\mathbf{q}\|^6$  ou  $V = Q/\|\mathbf{q}\|^9$ .

O problema de  $N$ -corpos com potencial homogêneo ou simplesmente o problema de  $N$  corpos homogêneo consiste no movimento de  $N$  partículas movendo-se no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , cujas equações de movimento são dadas pelo sistema

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\nabla_{\mathbf{q}_i} U_\alpha(\mathbf{q}) = -\alpha \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^{\alpha+2}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $U_\alpha : (\mathbb{R}^3)^N - \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$U_\alpha(\mathbf{q}) = -\sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^\alpha}, \quad (4.2)$$

sendo  $\Delta$  o conjunto singular definido como em (1.8). Observe que a função  $U_\alpha$  é uma função homogênea de grau  $-\alpha$ . De fato:

$$U_\alpha(\lambda \mathbf{q}) = -\sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\lambda \mathbf{q}_i - \lambda \mathbf{q}_j\|^\alpha} = -\frac{1}{\lambda^\alpha} \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^\alpha} = \lambda^{-\alpha} U_\alpha(\mathbf{q}).$$

Segue daí a nomenclatura para este problema.

Assim como o problema Newtoniano de  $N$ -corpos ( $\alpha = 1$ ), o problema (4.1) pode ser descrito por um sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2 + U_\alpha(\mathbf{q}). \quad (4.3)$$

O problema de  $N$ -corpos com potencial homogêneo possui as seguintes integrais de movimento

1) A energia total  $H$ ;

2) As componentes do momento angular  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i$ ;

3) As componentes do momento linear  $P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ .

A demonstração destas propriedades são muito similares as demonstrações da proposição 1.2.1.

O Teorema de Painlavé 2.2 também é válido para o problema (4.1). Ou seja, a distância mínima entre todos os pares de partículas necessita aproximar de zero na singularidade. A demonstração deste resultado segue de maneira análoga a prova do Teorema 2.2. Uma demonstração independente deste resultado pode ser encontrada em [11].

O momento de inércia  $I$  para o problema de  $N$ -corpos homogêneo é definido da mesma forma que no problema Newtoniano de  $N$ -corpos cuja expressão é como em (1.21). A identidade de Lagrange-Jacobi para o problema de  $N$ -corpos homogêneo é dada por

$$\ddot{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) = 4(h + (\alpha/2 - 1)U_\alpha(\mathbf{q})), \quad (4.4)$$

onde  $h$  é a constante de energia do sistema. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{I}(\mathbf{q}(t)) &= 2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i(t)\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i(t) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i(t) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i(t)\|^2 - 2\mathbf{q} \cdot \nabla U_\alpha(\mathbf{q}(t)) = 2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i(t)\|^2 + 2\alpha U(\mathbf{q}(t)) \\ &= 4(h + (\alpha/2 - 1)U_\alpha(\mathbf{q})). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Quando  $\alpha > 2$  o problema associado a equação (4.1) é chamado de problema *de força forte* ("strong force"). Existem muitas aplicações na física e na mecânica celeste onde aparecem tais problemas de força forte. Um destes problemas, está associado ao potencial chamado de *potencial Schwarzschild*. O problema de dois corpos com potencial do tipo Schwarzschild consiste no problema de dois corpos cuja força é determinada pelo potencial

$$V(\mathbf{q}) = -\frac{A}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|} - \frac{B}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^3}, \quad (4.6)$$

Observe que o potencial  $V$  acima é a soma do potencial gravitacional newtoniano com o potencial  $U_3(\mathbf{q})$  (função homogênea de grau  $-3$ ). O potencial dado em (4.6) é chamado de *potencial quasi-homogêneo*, devido a esta propriedade mencionada anteriormente.

Existem substanciais diferenças entre a dinâmica do problema gravitacional newtoniano de  $N$ -corpos e do problema de  $N$ -corpos homogêneo ou no problema com potencial do tipo Schwarzschild. No caso  $N = 2$ , em relação as singularidades, como vimos no capítulo 2 as colisões são possíveis somente quando momento angular é nulo. No problema de dois corpos homogêneo (ou quase homogêneo com potencial Schwarzschild), as colisões podem ocorrer para momento angular diferente de zero. O estudo das colisões no problema problema de dois corpos com potencial quase homogêneo não é objetivo de estudo nesta dissertação, mas podemos indicar ao leitor o trabalho dos autores em [4] ou o trabalho recente dos autores em [10]

## 4.1 Singularidades no Problema de dois corpos homogêneo

Seguindo os resultados dos autores em [9], nesta seção vamos analisar as singularidades do problema de dois corpos homogêneo se movendo no plano. Mais precisamente, vamos considerar o problema dois corpos pontuais de massas  $m_1$  e  $m_2$  movendo-se no plano de maneira que o movimento destes corpos é dado pelas equações diferenciais

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\nabla_{\mathbf{q}_i} U_\alpha(\mathbf{q}), \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha > 0$  e  $U_\alpha : (\mathbb{R}^2)^2 - \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$U_\alpha(\mathbf{q}) = -\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^\alpha}, \quad (4.8)$$

sendo  $\Delta = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in (\mathbb{R}^2)^2; \mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_2\}$ .

Assim como no problema de 2-corpos newtoniano, podemos usar um sistema de referência em que a origem coincide com uma das partículas e descrever o movimento da segunda a partir da posição relativa entre ambas. Se  $\mathbf{q}$  denota a posição relativa entre os corpos, isto é,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$  então as equações de movimento (4.7) podem ser escritas como

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U_\alpha(\mathbf{q}), \quad U_\alpha(\mathbf{q}) = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^\alpha}, \quad (4.9)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ .

O principal objetivo neste capítulo é considerar o problema de dois corpos homogêneo com  $\alpha > 2$  e caracterizar o conjunto de condições iniciais do problema (4.7) que levam a soluções globalmente definidas ou a soluções singulares. Isto é, estamos interessados em determinar a finitude/infinitude de  $t^*$  com base nas restrições das condições iniciais. Soluções que são conhecidas como equilíbrios relativos do problema (4.9) parecem desempenhar um papel importante em tais caracterizações.

Em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , a equação diferencial (4.9) assume a forma

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -U'_\alpha, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

É fácil verificar que

$$\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = r^2\dot{\theta},$$

e então o momento angular  $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = r^2\dot{\theta} = c$ ,  $c$  uma constante, é uma integral primeira. Claramente a energia  $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é dada por

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + U_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{r^2}) + U_\alpha(r). \quad (4.11)$$

a qual também é uma quantidade preservada.

Desde que o momento angular é preservado, para cada  $c$  fixo a função Hamiltoniana (4.11) assume a forma

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} + U_\alpha(r), \quad (4.12)$$

donde  $V_c(r) := \frac{c^2}{2r^2} + U_\alpha(r)$  é o potencial efetivo. Desta maneira, obtemos um sistema conservativo unidimensional, isto é, o sistema

$$\dot{r} = -V'_c(r). \quad (4.13)$$

Sabemos que os pontos críticos do sistema (4.13) correspondem a soluções circulares do problema (4.9), ou em outras palavras, os pontos críticos do potencial efetivo  $V_c$  em coordenadas polares, são equilíbrios relativos do problema de 2 corpos (com potencial homogêneo). Observe que

$$V'_c(r) = -\frac{c^2}{r^3} + \frac{\alpha}{r^{\alpha+1}}, \quad (4.14)$$

e assim  $V'_c(r) = 0$  se, e somente se,  $r = r_0 = (c^2/\alpha)^{1/(2-\alpha)}$ . Existe somente um ponto crítico se  $\alpha \neq 2$ . Definimos

$$V_c^* := V(r_0) = \alpha^{\frac{2}{2-\alpha}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) c^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}}, \quad \alpha \neq 2.$$

Observe que se  $0 < c_1 < c_2$  então  $V_{c_1}(r) < V_{c_2}(r)$  (veja figura 4.1). Ou seja, a medida que  $c$  cresce as curvas  $V_c$  estão de forma ascendente.

Seja  $\mathbf{q}(t)$  uma solução circular de (4.13) então  $\mathbf{q}(t) = (r_0 \cos(\omega t), r_0 \sin(\omega t))$  onde  $\omega$  é chamada de frequência ( $\dot{\theta} = \omega$ ). Assim  $r_0^2 \dot{\theta} = r_0^2 \omega = c$ . Desta maneira obtemos as relações

$$\omega = \frac{c}{r_0^2} = \alpha^{\frac{2}{2-\alpha}} c^{\frac{\alpha+2}{\alpha-2}} \quad \Leftrightarrow \quad c = c(\omega) = \alpha^{\frac{2}{2+\alpha}} \omega^{\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}. \quad (4.15)$$

Observe que o problema de dois corpos (4.9) possui um único equilíbrio relativo. Assim dada uma das constantes,  $\alpha$ ,  $\omega$ , ou  $r_0$  as outras duas ficam unicamente determinadas pelas outras duas usando as equações (4.15).

Definimos

$$K_\omega(\mathbf{q}) = K_\omega(r) = \omega^2 \|\mathbf{q}\| - \frac{\alpha}{\|\mathbf{q}\|^\alpha}$$

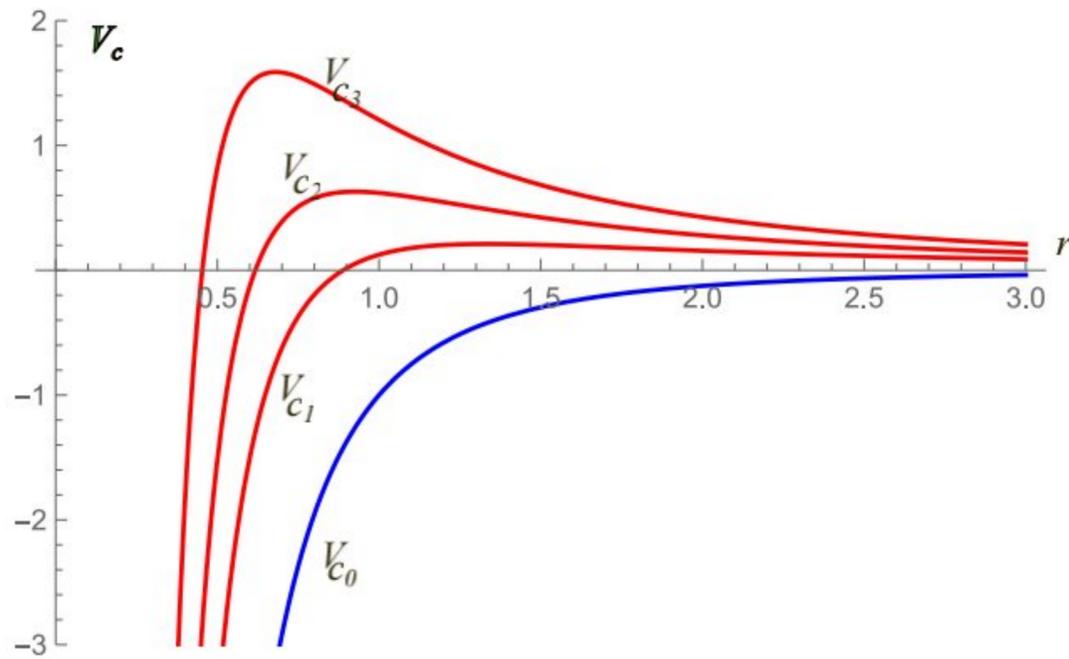


Figura 4.1: Evolução da função potencial efetivo  $V_c$  em função do momento angular  $c$  ( $0 = c_0 < c_1 < c_2 < c_3$ ) no caso  $\alpha > 2$

Desde que  $r^2\omega^2 = \frac{c^2}{r^2}$  então da definição de  $K_\omega(\mathbf{q})$ , segue que

$$K_\omega(r) = -rV'_c(r), \quad (4.16)$$

e segue que  $K_\omega(r_0) = 0$ . Além disso, note que  $K_\omega(\mathbf{q}) < 0$  é equivalente a  $\|\mathbf{q}\| < r_0$  e  $K_\omega(\mathbf{q}) \geq 0$  é equivalente a  $\|\mathbf{q}\| \geq r_0$ .

Desde que o sistema (4.13) é um sistema conservativo, podemos deduzir as seguintes informações a partir do estudo do potencial efetivo  $V_c$ . Veja a figura 4.2.

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $\alpha > 2$  e  $E = H$  um nível de energia fixado. Então temos as seguintes possibilidades para as soluções do sistema (4.13).*

- 1) *Quando  $E \leq 0$ , temos  $r_1 = V_c^{-1}(E)$  e a região permitida para o movimento é  $r < r_1$ . Portanto a solução irá colidir com a origem;*
- 2) *Quando  $0 < E < V_c^*$ , então  $V_c^{-1}(E) = \{r_1, r_2\}$ , ( $r_1 < r_2$ ) e a região permitida para o movimento é  $r < r_1$  ou  $r > r_2$ . Neste caso existem duas possibilidades: se  $r < r_1$  então a solução irá colidir com a origem e se  $r > r_2$  a solução irá ao infinito e está definida para todo tempo.*
- 3) *Quando  $E = V_c^*$  ( $\dot{r} = 0$ ) temos uma solução circular (definida para todo tempo).*

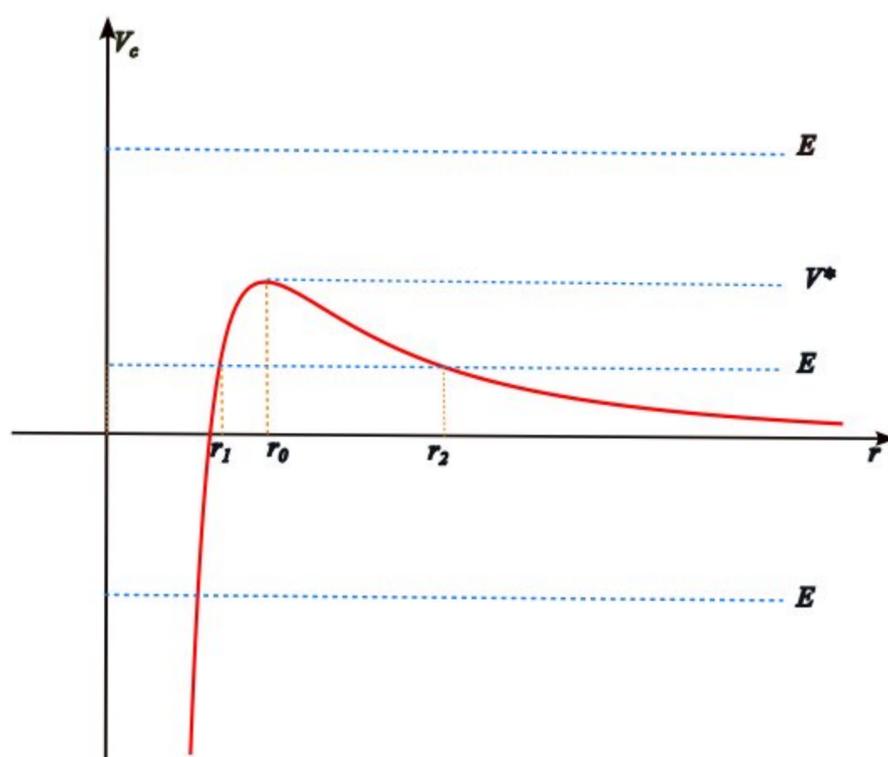


Figura 4.2: Fixado o momento angular  $c \neq 0$  e  $\alpha > 2$ . A figura mostra as diferentes possibilidades da interseção da Energia  $E$  com o potencial efetivo  $V_c(r) = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{1}{r^\alpha}$ .

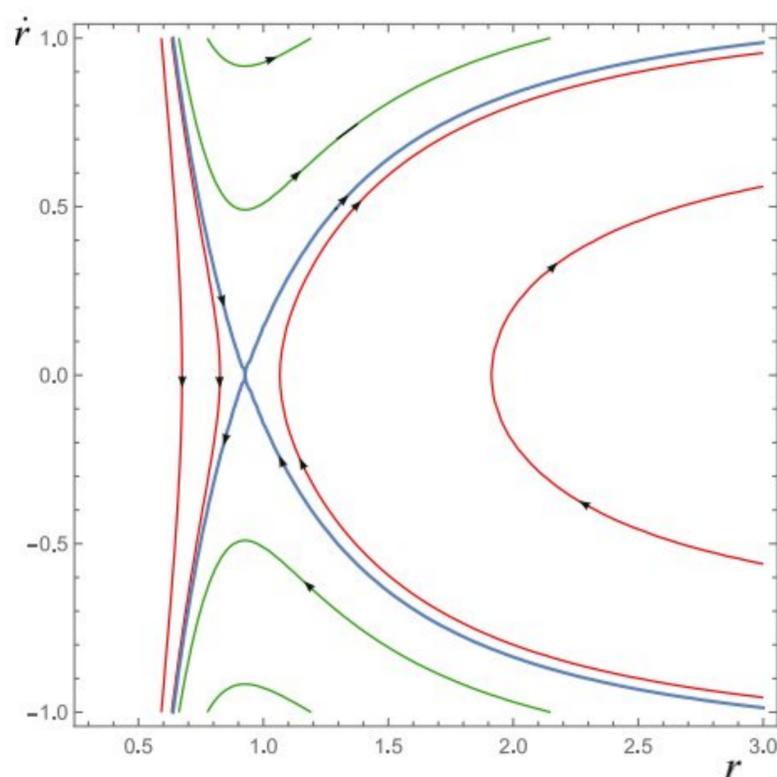


Figura 4.3: Fixado o momento angular  $c \neq 0$  e  $\alpha > 2$ , a figura mostra o retrato de phase no plano  $(r, \dot{r})$ . As curvas em verde tem energia maior que  $V_c(r_0) = V^*$  e as curvas em vermelho tem energia menor que  $V^*$ . A curva em azul é a curva com Energia igual a  $V^*$ .

4) Se  $E > V_C^*$  então a região permita do movimento é todo  $r > 0$  e portanto dada uma condição inicial  $r_0$  não conseguimos obter uma informação definitiva para o comportamento da solução. Vamos precisar neste caso de uma condição inicial para a componente radial da velocidade.

Veja Figura 4.3.

**Lema 4.1.1.** Fixe  $\alpha > 2$  e  $\omega$ . Defina os conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^+(\omega) &= \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < V_c^*(\omega), \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \geq c(\omega), K_\omega(\mathbf{q}) \geq 0\} \\ \mathcal{K}^-(\omega) &= \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < V_c^*(\omega), \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \geq c(\omega), K_\omega(\mathbf{q}) < 0\}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Então  $\mathcal{K}^\pm(\omega)$  são conjuntos invariantes do problema (4.9).

**Demonstração:** Desde que a energia e o momento angular são integrais primeiras então  $\mathcal{K}^+(\omega) \cup \mathcal{K}^-(\omega)$  é um conjunto invariante. Nós precisamos somente mostrar que  $\mathcal{K}^-(\omega)$  é invariante. Seja  $q(t)$  uma solução do problema (4.9) com condição inicial sobre  $\mathcal{K}^-(\omega)$ . Então a energia  $E < V_{c(\omega)}^*$  e momento angular  $c \geq c(\omega)$ . Suponha que existe  $t_1$  tal que  $K_\omega(\mathbf{q}(t_1)) = 0$ , ou seja,  $\|\mathbf{q}(t_1)\| = r_0$ , então

$$V_c(\|\mathbf{q}(t_1)\|) \geq V_{c(\omega)}(\|\mathbf{q}(t_1)\|) = V_{c(\omega)}^*$$

Portanto a Energia satisfaz a relação

$$E(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) \geq V_c(\|\mathbf{q}(t_1)\|) > V_{c(\omega)}^*,$$

o que é uma contradição. ■

**Teorema 4.1.** Considere o problema (4.9) com  $\alpha > 2$ . Então temos as seguintes afirmações:

- 1) As soluções com condições iniciais em  $\mathcal{K}^-(\omega)$  são singulares, ou seja, colidem em tempo finito.
- 2) As soluções com condições iniciais em  $\mathcal{K}^+(\omega)$  estão definidas globalmente para todo tempo.

**Demonstração:** Provamos o item 1). Fixado o valor de  $\omega$ , denotamos  $c = c(\omega)$  e  $r_0 = (c^2/\alpha)^{1/(2-\alpha)}$  o ponto crítico de  $V_c(r)$ . Seja  $\mathbf{q}(t)$  a solução com condição inicial sobre  $\mathcal{K}^-(\omega)$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que

$$E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) < V_{c(\omega)}^* - \delta = V_c(r_0) - \delta.$$

Seja  $I(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\|^2$ , então pela identidade de Lagrange-Jacobi (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} I(\mathbf{q}(t)) &= 4 \left( E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + (1 - \alpha/2) \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^\alpha} \right) \\ &< 4 \left( V_c(r_0) + (1 - \alpha/2) \frac{1}{r_0^\alpha} \right) - 4\delta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Seja

$$f(r) = V_c(r_0) + (1 - \alpha/2) \frac{1}{r^\alpha}, \quad r < r_0.$$

A derivada da função  $f(r)$  é  $f'(r) = (\alpha/2 - 1)\alpha/r^{\alpha-1}$  e desde que  $\alpha > 2$   $f$  é uma função crescente e além disso  $f(r_0) = 0$ . Desta maneira  $\ddot{I}(t) \leq -4\delta$ . Então a evolução temporal do momento de inércia é controlado por uma função côncava para baixo, a qual necessita se tornar negativa para  $t > t^*$ ,  $t^* < \infty$ . Ou seja, o intervalo da solução necessita ser da forma  $(t_0, t^*)$ , com  $t^* < \infty$  e a partícula necessita colidir com a origem em tempo finito.

No caso do item 2), desde que  $\mathcal{K}^-(\omega)$  é um conjunto invariante e toda solução  $\mathbf{q}(t)$  com condição inicial em  $\mathcal{K}^-(\omega)$  satisfaz  $K_\omega(\mathbf{q}) > 0 \rightarrow \|\mathbf{q}\| = r > r_0$  a solução não se aproxima da origem. Como consequência do Teorema de Painlevé, esta solução está definida para todo o tempo. ■

Para o problema de dois corpos homogêneo e  $0 < \alpha < 2$  o comportamento das soluções é como no problema de dois corpos newtoniano. Ou seja, se o momento angular é não nulo não existem colisões e as soluções estão definidas globalmente. As colisões só podem ocorrer quando o momento angular é nulo. Neste problema Assim como no problemade dois corpos newtoniano, pode-se provar que o conjunto de condições iniciais que leva a uma solução de colisão tem medida de Lesbegue nula para o caso  $0 < \alpha < 2$ . Veja [9] para maiores detalhes.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alberti, A. and Vidal, C. *Dynamics of a particle in a gravitational field of a homogeneous circular annulus*, Celestial Mech. Dynamical Astronomy, **98**, 75-93, (2007).
- [2] Alberti, A. and Vidal, C. *Singularities in the gravitational attraction problem due to massive bodies*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **26**, 805-822, (2010).
- [3] Alberti, A. and Vidal, C. *Singularities and Dynamics Aspects of a Particle in a Gravitational Field of a Central Punctual Body Surrounded by a Solid Circular Ring*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **18**, 1-32, (2019).
- [4] Arredondo, J.A., Pérez-Chavela E. and Stoica C. *Dynamics in the Schwarzschild isosceles Three Body Problem*, J. Nonlinear Sci, **24** , 997-1032, (2014).
- [5] Azevêdo, C., Ontaneda, P. and Cabral, H. E. *On the fixed homogeneous circle problem*. Adv. Nonlinear Stud., **7** , 47-75, (2007).
- [6] Braga-Ribas, F., Sicardy B. and Lambas D. G. *A ring system detected around the Centaur (10199)*, Chariklo- Nature, (2014).
- [7] Byrd, P.F. and Friedman, M.D. *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Springer, New York, (1971).
- [8] Broucke, R. A. and Elipe, A. *The Dynamics of Orbits in a Potential Field of a solid Circular Ring*. Regular Chaotic Dynamical, **10**, 129-143, (2005).
- [9] Deng, Y. and Ibrahim, S. *Global existence and singularity of the N-body problem with strong force*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 49, (2020).

- [10] Deng, Y. Ibrahim S. and Qian, L. *Quasi-homogeneous two-body problem*. J. Math. Phys, 082901, (2022)
- [11] Diacu, F. *Singularities of the N-Body Problem*, CRM, (1992).
- [12] Gordon, W.B. *Conservative dynamical systems involving strong forces*. Trans. Am. Math. Soc. **204**, 113-135, (1975).
- [13] Kellog, O.D. *Foundations of the Potential Theory*. Dover Publications, Inc., New York, (1929).
- [14] MacGehe, R. *Von Zeipel's Theorem on Singularities in Celestial Mechanics*. Expo. Math. **4**, 335-345, (1986).
- [15] MacMillan, W. *The Theory of the Potential*, Dover, New York, (1958).
- [16] Painlevé, P. *Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes*, Bull. Soc. Math. France, **22**, 136-184, (1894).
- [17] Saari, D. G. *Collisions, Rings and Other Newtonian N-Body Problems*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, (2005).
- [18] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [19] Tresaco, E., Elipe, A. and Riaguas, A. *Dynamics of a particle under the gravitational potential of a massive annulus: properties and equilibrium description*. Celest. Mech. Dyn. Astr., **111**, 431-447, (2011).
- [20] Volchan S, B. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*, 26º Colóquio Brasileiro de Matemática- IMPA, (2007).
- [21] Von Zeipel, H. *Sur les singularités du problème des n corps*, Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik, **32**, 1-4, (1908).
- [22] Wintner, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Mathematical Series, Dover, New York, (1941).