Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Regularidade para Funções Infinito Harmônicas

Ginaldo de Santana Sá

São Cristóvão – SE
Março de 2018

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Regularidade para Funções Infinito Harmônicas

por

Ginaldo de Santana Sá

sob a orientação do

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres

e do

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso

São Cristóvão – SE
Março de 2018

Regularidade para Funções Infinito Harmônicas

por

Ginaldo de Santana Sá [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise/Equações Diferenciais Parciais

Aprovada em 12/03/2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres – UFS
(Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida – UFS
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo – UFPB
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a regularidade de funções infinitas harmônicas, ou seja, soluções da equação

$$\Delta_\infty u = 0,$$

onde $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com U limitado e $u \in C(U)$. Mais especificamente, nós mostramos que, sob certas condições, funções infinitas harmônicas são $C^{1,\frac{1}{3}}$.

Palavras-chave: Equações Elípticas Degeneradas, Infinito Laplaciano, Regularidades, Solução no Sentido da Viscosidade.

Abstract

In this dissertation, we study the regularity for infinite harmonic function, that is, solutions of equation

$$\Delta_\infty u = 0,$$

where $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, with U bounded and $u \in C(U)$. More specifically, we have shown that under certain conditions, infinite harmonic function are $C^{1,\frac{1}{3}}$.

Keywords: Degenerate Elliptic Equations, Infinity Laplacian, Regularities, Viscosity Solution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a teoria de regularidade de funções infinitas harmônicas, isto é, soluções da equação

$$\Delta_\infty u = 0, \tag{1}$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $u \in C(U)$. Salientamos que quando falamos de solução neste texto, estamos nos referindo a solução no sentido da viscosidade (ou viscosity solutions) que aqui chamaremos apenas de solução.

A teoria de regularidade de (1) é uma das teorias modernas das Equações Diferenciais Parciais. Um dos principais problemas que ainda não foi completamente resolvido consiste em saber se soluções de (1) são de classe C^1. Sobre isto, alguns resultados parciais já foram obtidos. O. Savin [15] mostrou que em dimensão 2, soluções de (1) são C^1. Já Evans e Savin [5], provaram que ainda em dimensão 2, se u é solução de (1), então existe um $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que u é $C^{1,\alpha}$. Evans e Smart [6] por sua vez, provaram que tais funções são diferenciáveis em todo ponto, isto em qualquer dimensão. Já Araújo, Ricarte e Teixeira [1] provaram que sobre certas condições da função u, vale a regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$. Sobre este último, discutiremos um pouco mais no Capítulo 4.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentaremos resultados e definições que serão usados no decorrer do texto. Abordaremos conceitos básicos da teoria de equações elípticas totalmente não lineares. Em seguida, apresentaremos alguns teoremas que serão usados nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 2, começaremos estudando o problema de Absolutely Minimizing Lipschitz Extension. Tal problema consiste em estender uma função Lipschitz contínua $f : \partial U \to \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, ao fecho de U sem aumentar a constante de Lipschitz. Em outras palavras, estamos interessados em encontrar uma função $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ de modo que

$$f = u \quad \text{em} \quad \partial U \quad \text{e} \quad \mathrm{Lip}_u(\overline{U}) = \mathrm{Lip}_f(\partial U).$$

Na Seção 2.1, introduziremos uma propriedade geométrica que está relacionada com o problema de Absolutely Minimizing Lipschitz Extension, que chamaremos de

Comparação com Cones. Definiremos quando uma função $u \in C(U)$ tem a propriedade de comparação com cones e finalizareamos a seção mostrando uma condição necessária e suficiente para que uma função tenha a propriedade de comparação com cones. Na Seção 2.3, abordamos a equação que é o foco principal deste trabalho, o infinito Laplaciano. Finalizamos o capítulo 2 com a Seção 2.4. Nesta, mostramos que os três conceitos citados nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 são todos equivalentes. A demonstração foi dividida em dois momentos: No primeiro, na Subseção 2.4.1, mostraremos a equivalência entre o problema de Absolutely Minimizing Lipschitz Extension e Comparação com Cone. No segundo, na Subseção 2.4.2, mostraremos a equivalência entre Comparação com Cone e o Infinito Laplaciano.

No Capítulo 3, estudaremos a regularidade de soluções para a seguinte equação não linear

$$|\nabla u|^{\gamma} F(D^2 u) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{2}$$

onde B_1 é a bola unitária de $\mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$, F é uniformemente elíptica, $F(0) = 0$ e f é limitada. Nós mostraremos que se $u \in C(U)$ é uma solução de (2), então $u \in C^{1,\alpha}$, onde

$$\alpha = \min\left\{\alpha_0, \frac{1}{1+\gamma}\right\}$$

e α_0 é a regularidade a priori das soluções de $F(D^2u) = 0$. Para tal, começaremos estabelecendo uma condição que nos garantirá a regularidade de $C^{1,\alpha}$ de u. Em seguida, provaremos o lema do módulo de continuidade. Este lema é uma consequência dos lemas das estimativas Lipschitz e Hölder, respectivamente. Com este resultado em mãos, obteremos a compacidade das soluções e, assim, podemos garantir a existência de uma sequência

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_\infty$$

de modo que, u_∞ é solução de

$$F(D^2 u_\infty) = 0,$$

que por Krylov e Safonov [12], possui regularidade $C^{1,\alpha}$. Em seguida, vamos mostrar o lema de aproximação. Este lema nos garante que soluções de

$$|p + \nabla u|^{\gamma} F(D^2 u) = f(x), \tag{3}$$

com $p \in \mathbb{R}^n$, podem ser aproximadas por uma função linear em uma bola cujo o raio está intimamente associado ao erro da aproximação. Logo após, iteramos o lema de aproximação para garantirmos que a solução u de (3) está em um espaço de Campanato e, assim, mergulha-lo no espaço $C^{1,\alpha}$. Por fim, mostraremos que soluções de (2) no caso homogêneo são também soluções de $F(D^2u) = 0$. Este resultado foi fundamental na demonstração do lema de aproximação.

No Capítulo 4, nosso intuito é o estudo da teoria de regularidade para soluções de (1). Iniciamos o capítulo mostrando a Desigualdade de Harnack. Em seguida, usaremos este fato para garantir que se $u \in C(U)$ é solução de (1), então u é localmente Lipschitz e, portanto, pelo Teorema de Rademacher, concluimos que u é diferenciável em quase todos os pontos. Finalizaremos este trabalho com duas aplicações do Teorema 3.1. Mais especificamente, provaremos que sob certas condições garantimos a tão desejada regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ para soluções de (1).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, nosso objetivo é introduzir conceitos e resultados básicos de equações elípticas totalmente não lineares que tornarão o texto mais completo e portanto com uma leitura mais agradável. As definições e resultados deste capítulo podem ser considerados clássicos e portanto não nos prenderemos a investigações mais profundas ou demonstrações, para uma leitura mais completa recomendamos o famoso livro do Caffareli e Cabré [3], as notas de Crandall-Ishii-Lions e Koike [11] entre outros que serão citados no decorrer do texto.

1.1 Definições e Resultados

O primeiro aspecto que queremos tornar claro no texto é o conceito de solução que iremos usar, como temos por objetivo tratar de operadores da forma não-divergente iremos considerar o tipo de solução introduzido por Crandall e Lions no começo dos anos 80, as soluções no sentido da viscosidade ou viscosity solutions. Para tanto, a fim de explorarmos a teoria mais clássica, consideraremos operadores

$$F : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{S}$ é o conjunto das matrizes simétrica e $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, tal que

$$F(X, p, z, x) \leq F(Y, p, z, x)$$

para $X \geq Y$ no sentido das matrizes, a esta propriedade chamamos de elipticidade degenerada. Um exemplo de tais operadores é

$$F(X) = -Tr(X).$$

Neste trabalho, vamos considerar equações da forma

$$F(D^2u(x), Du, u, x) = f(x), \tag{1.1}$$

onde $x \in U$, u e f são funções definidas em U. Além disto, dizemos que $u \in C(U)$ é uma subsolução(super) no sentido da viscosidade de (1.1) se dado um $x_0 \in U$ e uma função $\phi \in C^2(U)$ tais que $u - \phi$ tem um máximo(mínimo) local em x_0 então

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), \phi(x_0), x_0) \leq f(x_0)(\geq).$$

Se u é subsolução e supersolução no sentido da viscosidade então dizemos que u é solução no sentido da viscosidade e chamaremos apenas de solução a partir de agora. Um classe muito importante de operadores que levaremos em conta neste trabalho são os chamados Uniformememnte Elípticos que definimos como

Definição 1.1. *Dizemos que $F : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ é Uniformemente Elíptica se existir duas constantes positivas $0 < \lambda, \Lambda$, com $\lambda \leq \Lambda$, tais que para qualquer $X \in \mathbb{S}$, tem-se*

$$\lambda \ trY \leq F(X) - F(X+Y) \leq \Lambda \ trY, \tag{1.2}$$

para toda matriz $Y \geq 0$.

Observação 1.1. *As constantes λ e Λ são chamadas constantes de elipticidade.*

Proposição 1.1. *Se F é uniformemente elíptica, então para qualquer constante $a > 0$, a função $a^{-1}F(aX)$ tem as mesmas constantes de elipticidade que F.*

Demonstração. Desde que F é uniformemente elíptica, existem λ, Λ (constantes de elipticidade) positivos tais que

$$\lambda \text{tr}(Y) \leq F(X) - F(X+Y) \leq \Lambda \text{tr}(Y),$$

para toda matriz $Y \geq 0$. Considere $G(X) = a^{-1}F(aX)$.

Afirmação 1.1. *λ e Λ também são as constantes de elipticidade de G.*

De fato, como $Y \geq 0$ e $a > 0$, segue que $a^{-1}Y \geq 0$. Assim,

$$\lambda \text{tr}(aY) \leq F(aX) - F(aX + aY) \leq \Lambda \text{tr}(aY).$$

Multiplicando as desigualdades anteriores por a^{-1}, obtemos

$$\lambda a^{-1}\text{tr}(aY) \leq a^{-1}F(aX) - a^{-1}F(a(X+Y)) \leq \Lambda a^{-1}\text{tr}(aY),$$

ou seja

$$\lambda \text{tr}(Y) \leq G(X) - G(X+Y) \leq \Lambda \text{tr(Y)}.$$

Portanto, λ e Λ também são as constantes de elipticidade de $a^{-1}F(aX)$. □

Definição 1.2. *Fixe* $0 < \lambda \leq \Lambda$. *Para* $X \in \mathbb{S}$, *vamos definir*

$$P^-(X) = \lambda \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i + \Lambda \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \quad e \quad P^+(X) = \Lambda \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i + \lambda \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i, \tag{1.3}$$

onde os $\lambda_i' s$ *são os autovalores de* X. *Os operadores definidos em* (1.3) *são chamados de Operadores de Pucci.*

Uma caracterização da elipticidade usando os operadores de Pucci é a seguinte

Proposição 1.2. *Se* F *é uniformemente elíptico, então*

$$P^-(Y) \leq F(X + Y) - F(X) \leq P^+(Y). \tag{1.4}$$

Este resultado é muito útil, por exemplo quando queremos, ao invés de trabalhar com a equação envolvendo F, trabalhar com operadores com uma forma mais acessível.

Um fato muito importante sobre os operadores uniformemente elípticos que será muito importante no Capítulo 3 é o seguinte teorema devido a Krylov e Safonov [12].

Teorema 1.1. *Seja* u *solução de* $F(D^2u) = 0$ *então* $u \in C^{1,\alpha}$.

Os dois próximos resultados são ferramentas bastantes impactantes na teoria de regularidade e na teoria de funções Lipschitz contínuas. O primeiro é o teorema de Campanato [14], que será essencial no Capítulo 3 e o segundo é o teorema de Rademacher.

Teorema 1.2 (Campanato). *Se* $u \in C(B_1)$ *e existe* $l(x) = a + bx$ *tal que*

$$|u(x) - l(x)| \leq C|x|^{1+\alpha},$$

com $x \in B_1$, *então* $u \in C^{1,\alpha}(B_1)$.

Teorema 1.3 (Rademacher). *Se* $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função Lipschitz contínua, então* u *é diferenciável em quase todos os pontos.*

Capítulo 2

Propriedade AML, Comparação com Cones e o Infinito Laplaciano

2.1 Propriedade AML

Nesta seção, nosso objetivo é estudar o problema de Absolutely Minimizing Lipschitz Extension. O problema consiste em extender uma função Lipschitz contínua $f : \partial U \to \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, ao fecho de U sem aumentar a constante de Lipschitz. Em outras palavras, gostariamos de encontrar uma função Lipschitz contínua $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ tal que $f = u$ em ∂U e $\mathrm{Lip}_u(\overline{U}) = \mathrm{Lip}_f(\partial U)$.

Este tipo de problema esta relacionado a construção de imagens por computador, por exemplo, se conseguirmos extender Lipschitz basta obtermos as informações no bordo do domínio e o programa extenderia sem precisar captar informações a mais e sem distorcer a imagem, já que a norma Lipschitz é preservada.

O problema anterior tem várias soluções, que são chamadas de extensões de McShane-Whitney. Tais extensões de $f \in \mathrm{Lip}_f(\partial U)$ são funções definidas em $\overline{U}$ por

$$\mathcal{MW}_*(f)(x) = \sup_{z \in \partial U} \{f(z) - \mathrm{Lip}_f(\partial U)|x - z|\}$$

e

$$\mathcal{MW}^*(f)(x) = \inf_{y \in \partial U} \{f(y) + \mathrm{Lip}_f(\partial U)|x - y|\}.$$

De fato, seja $x \in \partial U$ então

$$\mathcal{MW}_*(f)(x) \geq F_x(x) = f(x) - \mathrm{Lip}_f(\partial U)|x - x| = f(x).$$

Por outro lado, como $f \in \mathrm{Lip}(\partial U)$, temos

$$f(z) - \mathrm{Lip}_f(\partial U)|x - z| \leq f(x),$$

para todo $z \in \partial U$. Logo

$$\mathcal{MW}_*(f) = \sup_{z \in \partial U} \{f(z) - \mathrm{Lip}_f(\partial U)|x - z|\} \leq f(x).$$

Assim, $\mathcal{MW}_*(f) = f$ em ∂U. De forma análoga, mostra-se que $\mathcal{MW}^*(f) = f$ em ∂U. Portanto,

$$\mathrm{Lip}_{\mathcal{MW}_*(f)}(\overline{U}) = \mathrm{Lip}_{\mathcal{MW}^*(f)}(\overline{U}) = \mathrm{Lip}_f(\partial U).$$

Acabamos de mostrar o seguinte teorema

Teorema 2.1. *As extensões MacShane-Whitney $\mathcal{MW}_*(f)$ e $\mathcal{MW}^*(f)$ resolvem o problema de extensão de Lipschitz para $f \in Lip(\partial U)$ e se u é qualquer solução do problema, então*

$$\mathcal{MW}_*(f) \le u \le \mathcal{MW}^*(f) \quad em \quad \overline{U}.$$

Observação 2.1. *O Problema de Extensão Lipschitz possui solução única se*

$$\mathcal{MW}_*(f) = \mathcal{MW}^*(f)$$

em $\overline{U}$, que raramente acontece.

Exemplo 2.1. *Sejam $n = 1$ e $U = (-1, 0) \cup (0, 1)$. Considere a função $f : \partial U \to \mathbb{R}$ definida por $f(-1) = f(0)$ e $f(1) = 1$. Temos que*

$$Lip_f(\partial U) = 1.$$

Além disso,

$$\mathcal{MW}_*(f) = \begin{cases} -x-1, & se \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2} \\ x, & se \quad -\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

e

$$\mathcal{MW}_*(f) = \begin{cases} x+1, & se \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2} \\ |x|, & se \quad -\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

que são, claro, funções direfentes.

O problema destas extensões é que ela não são extensões locais, ou seja, a extensão de McShane-Whitney pode ser a extensão desejada em um domínio U e deixar de ser em um subdomínio $V \subset\subset U$. Este tipo de problema torna a extensão de McShane-Whitney pouco adequada já que em cada subdominio deveremos calcula-la novamente, o que a priori não é natural e além disto, a níveis práticos aumenta em muito o custo operacional. Então gostariamos de uma extensão que tenha natureza local no sentido de que se ela é a extensão adequada em U ela também será adequada em qualquer subdomínio $V \subset\subset U$. Assim, definimos a seguinte propriedade

Definição 2.1 (AML). *Seja $u \in C(U)$. Dizemos que u é Absolutely Lipschitz Minimizing em U, e escrevemos $u \in AML(U)$, se para todo subconjunto limitado $V \subset\subset U$ e para cada $v \in C(\overline{V})$, tem-se*

$$Lip_u(V) \le Lip_v(V), \quad sempre\ que \quad u = v \quad em \quad \partial V. \tag{2.1}$$

Observação 2.2. *Essa noção é local no sentido de que, se $u \in AML(U)$ e $V \subset U$, então $u \in AML(V)$.*

2.2 Comparação com Cones

Nesta seção, iremos introduzir uma propriedade geométrica fortemente relacionada a propriedade AML que chamamos de Comparação com Cones (CCC). Primeiro definiremos o que é um cone,

Definição 2.2. *Um cone com vértice em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é uma função da forma*

$$C(x) = a + b|x - x_0|,$$

com $a, b \in \mathbb{R}^n$. A altura de C é a, e sua inclinação é b.

Tendo em vista a definição acima fica claro que qualquer cone é Lipschitz continua e parece o tipo de função certa para servir como base ao estudo das funções com a propriedade AML. Consideremos a definição abaixo

Definição 2.3. *Seja C um cone com vértice em x_0. A semi-linha*

$$\{x_0 + t(x - x_0), \text{ com } t \geq 0\}$$

é o raio de C atráves do ponto x.

O resultado a seguir irá relacionar a constante de Lipschitz do cone com sua inclinação,

Lema 2.1. *Seja C um cone com inclinação b. Se um conjunto V contém dois pontos distintos no mesmo raio de C, então*

$$Lip_C(V) = |b|.$$

Demonstração. Considere o cone $C(x) = a + b|x - x_0|$. Então, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{|C(x) - C(y)|}{|x - y|} = \frac{|a + b|x - x_0| - (a + b|y - x_0|)|}{|x - y|} = |b|\frac{||x - x_0| - |y - x_0||}{|x - y|} \leq |b|,$$

assim $|b|$ é uma constante de Lipschitz para C em qualquer conjunto.

Se w, y são dois pontos distintos no mesmo raio de C, teremos, para um x^*, $y = x_0 + \alpha(x^* - x_0)$ e $w = x_0 + \beta(x^* - x_0)$, com $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha \neq \beta$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
C(y) &= C(x_0 + \alpha(x^* - x_0)) \\
&= a + b|x_0 + \alpha(x^* - x_0) - x_0| \\
&= a + b|\alpha(x^* - x_0)| \\
&= a + b|\alpha||x^* - x_0|; \\
C(w) &= C(x_0 + \alpha(w - x_0)) \\
&= a + b|x_0 + \beta(x^* - x_0) - x_0| \\
&= a + b|\beta(x^* - x_0)| \\
&= a + b|\beta||x^* - x_0|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$C(y) - C(w) = b|x^* - x_0|(|\alpha| - |\beta|).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{|C(y) - C(w)|}{|y - w|} &= \frac{|b|x^* - x_0|(|\alpha| - |\beta|)|}{|x_0 + \alpha(x^* - x_0) - (x_0 + \beta(x^* - x_0))|} \\ &\leq \frac{|b||x^* - x_0||\alpha - \beta|}{|\alpha - \beta||x^* - x_0|} \\ &= |b| \end{aligned}$$

e se $y, w \in V$, então $\mathrm{Lip}_C(V) = |b|$. □

Uma consequência do resultado acima é que sob certas condições a constante de Lipschitz do cone em um domínio aberto está relacionado com a constante de Lipschitz do cone na fronteira do domínio, mais especificamente

Corolário 2.2. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e C um cone com inclinação b. Então*

$$Lip_C(V) = |b|.$$

Além disso, se V é limitado e não contém o vértice de C, então

$$Lip_C(\partial V) = |b|.$$

O corolário acima assegura que o cone transmite as informações relacionadas a constante de Lipschitz da fronteira para o interior do domínio, tendo em vista que é este tipo de comportamento que estamos procurando para relacionar a propriedade AML nos motivamos a fazer a seguinte definição,

Definição 2.4. *Dizemos que uma função $u \in C(U)$ tem a propriedade de comparação com cones por cima em U se vale a seguinte condição: para cada $V \subset\subset U$ e para todo cone C cujo vértice não pertence a V, tem-se*

$$u \leq C \quad \text{em} \quad V \quad \text{sempre que} \quad u \leq C \quad \text{em} \quad \partial V.$$

De maneira análoga, dizemos que uma função $u \in C(U)$ tem a propriedade de comparação com cones por baixo em U se $-u$ tem a propriedade de comparação com cones por cima. Uma função $u \in C(U)$ tem a propriedade de comparação com cones se u tem a propriedade de comparação com cones por cima e por baixo.

O próximo resultado nos fornece uma equivalência muito útil da propriedade de comparação com cones que será usada amplamente em cálculos que apareceram ao longo do texto.

Proposição 2.1. *Seja $u \in C(U)$. São equivalentes:*

(i) u tem a propriedade de comparação com cones por cima em U;

(ii) Para qualquer $V \subset\subset U$, $b \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$,

$$u(x) - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|), \tag{2.2}$$

para todo $x \in V$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que u tem a propriedade de comparação com cones por cima em U. Sejam $V \subset\subset U$, $b \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$. Observe que

$$u(x) - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|), \tag{2.3}$$

para todo $x \in \partial V$. Sendo assim, considere o cone centrado em $z \notin V$

$$C(x) = \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|) + b|x - z|,$$

com $x \in \partial V$. Logo, por (2.3) temos que

$$u(x) \leq C(x),$$

para todo $x \in \partial V$. Como u tem a propriedade de comparação com cones, segue que

$$u(x) \leq C(x),$$

para todo $x \in V$. Portanto, segue (2.2).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que (2.2) é verdade e considere $V \subset\subset U$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere

$$C(x) = a + b|x - z|,$$

o cone com vértice em $z \notin V$ tal que

$$u(x) \leq C(x),$$

para todo $x \in \partial V$. Por hipótese,

$$u(x) - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|),$$

para todo $x \in V$. Logo,

$$u(x) - a - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - a - b|w - z|),$$

ou seja,

$$u(x) - C(x) \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - C(w)).$$

Como $u(w) - C(w) \leq 0$, para todo $w \in \partial V$, temos que

$$u(x) \leq C(x),$$

para todo $x \in V$. Portanto, u tem a propriedade de comparação com cones por cima em U. □

2.3 O infinito Laplaciano

Nesta seção, iremos introduzir a equação que está associada a questão de minimizarmos localmente a norma Lipschitz. Embora a prova desta associação não seja elementar a heurística que levanta a desconfiança para tal relação surge bem naturalmente. Sabemos que as funções harmônicas são os minimizantes do funcional

$$J(u) = \int_U |\nabla u|^2 dx$$

e que as funções $p-$harmônicas são os minizantes do funcionais

$$J(u) = \int_U |\nabla u|^p dx.$$

Desde que a norma L^p "converge"para a norma L^∞ é imediato pensarmos que as soluções da equação "limite"do $p-$laplaciano está associada ao problema de minimização da norma L^∞ do ∇u, ou seja, a minimização da norma Lipschitz. Assim, desde que

$$\triangle_p u = Div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-4}\left\{|\nabla u|^2 \triangle u + (p-2)\left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u\right\rangle\right\},$$

temos que, para $\nabla u \neq 0$,

$$\left\{|\nabla u|^2 \triangle u + (p-2)\left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u\right\rangle\right\} = 0$$

e portanto

$$\left\{\left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u\right\rangle\right\} = \frac{1}{(p-2)}\left\{|\nabla u|^2 \triangle u\right\},$$

tomando $p \to \infty$ concluimos que

$$\left\{\left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u\right\rangle\right\} = 0.$$

A heuristica anterior nos motiva a seguinte definição

Definição 2.5. *Seja $u \in C(U)$. A equação dada por*

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = \langle D^2 u Du, Du\rangle \tag{2.4}$$

em U, é chamado de Infinito Laplaciano de u. No caso em que u satisfaz

$$\Delta_\infty u = 0,$$

dizemos que u é infinita harmônica.

Observação 2.3. *Vale ressaltar que a noção apropriada a considerar é a solução no sentido da viscosidade. Sendo assim, definiremos novamente o que seja solução no sentido da viscosidade para o infinito Laplaciano.*

Definição 2.6. *(i) Uma função $u \in C(U)$ é uma subsolução no sentido da viscosidade de $\Delta_\infty u = 0$ (ou simplesmente subarmônica) em U se, para todo $\tilde{x} \in U$ e para toda $\varphi \in C^2(U)$ tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em $\tilde{x}$, tem-se*

$$\Delta_\infty \varphi(\tilde{x}) \geq 0.$$

(ii) Uma função $u \in C(U)$ é uma supersolução no sentido da viscosidade de $\Delta_\infty u = 0$ (ou simplesmente superarmônica) em U se $-u$ é uma subsolução em U.

(iii) Uma função $u \in C(U)$ é infinita harmônica em U se u é subsolução e supersolução em U.

O lema a seguir nos assegura que se a solução tem regularidade suficiente então solução no sentido da viscosidade e solução clássica são a mesma coisa.

Lema 2.2. *Seja $u \in C^2(U)$, então u é infinita harmônica se, e somente se,*

$$\Delta_\infty u = 0$$

no sentido da viscosidade.

Demonstração. Suponha que u é infinita harmônica. Então, u é subsolução e tomemos $u = \varphi$ na definição. Desde que todo ponto $x \in U$ é um máximo local de

$$u - \varphi \equiv 0,$$

temos que

$$\Delta_\infty u(x) \geq 0,$$

para todo $x \in U$. Além disso, $-u$ é subsolução e, assim,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty(-u) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\Delta_\infty(u) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta_\infty(u) \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in U$. Portanto,

$$\Delta_\infty u = 0$$

no sentido da viscosidade.

Reciprocamente, suponha que

$$\Delta_\infty u = 0$$

no sentido da viscosidade e tome $\tilde{x} \in U$ e $\varphi \in C^2(U)$ tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em $\tilde{x}$. Vamos mostrar que

$$\Delta_\infty u \geq 0,$$

ou seja, u é subsolução. Para tanto, veja que $u - \varphi \in C^2(U)$ e $\tilde{x}$ é um máximo local. Assim,

$$D(u - \varphi)(\tilde{x}) = 0,$$

ou seja,

$$Du(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x}).$$

Além disso,

$$D^2(u - \varphi)(\tilde{x}) \leq 0,$$

isto é,

$$Du(\tilde{x}) \leq \varphi(\tilde{x}).$$

Assim,

$$\left\langle D^2u(\tilde{x}), y \right\rangle \leq \left\langle D^2\varphi(\tilde{x}), y \right\rangle,$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \varphi(\tilde{x}) &= \left\langle D^2\varphi(\tilde{x}) D\varphi(\tilde{x}), D\varphi(\tilde{x}) \right\rangle \\ &\geq \left\langle D^2u(\tilde{x}) Du(\tilde{x}), Du(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \Delta_\infty u(\tilde{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que $-u$ é uma subsolução. Portanto, o lema está provado. □

Embora o lema acima nos dê uma perspectiva otimista sobre a regularidade associada ao infinito Laplaciano, o exemplo a seguir nos coloca em um contexto mais real do que podemos esperar nesta questão,

Exemplo 2.2 (Aronsson). *A função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $u(x, y) = x^{4/3} - y^{4/3}$ é infinita harmônica em $\mathbb{R}^2$.*

Vamos mostrar o caso em que u é subarmônica e usando argumentos semelhantes, mostra-se que u é superarmônica.

Sejam (x_0, y_0) um ponto qualquer em $\mathbb{R}^2$ e $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em (x_0, y_0). Desde que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, temos

$$D(u - \varphi)(x_0, y_0) = 0$$

e, consequentimente,

$$\varphi_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) = \frac{4}{3}x_0^{1/3} \tag{2.5}$$

e

$$\varphi_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = -\frac{4}{3}y_0^{1/3} \tag{2.6}$$

Primeiro, vamos excluir o caso em que $x_0 = 0$. Se $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em $(0, y_0)$, então

$$(u - \varphi)(x, y_0) \leq (u - \varphi)(0, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad x^{4/3} \leq \varphi(x, y_0) - \varphi(0, y_0), \tag{2.7}$$

para todo x em uma vizinhança do 0 e isto não pode acontecer. De fato, considere $F(x) = \varphi(x, y_0) - \varphi(0, y_0)$. Temos $F(0) = 0$ e

$$F'(0) = \varphi_x(0, y_0) = u_x(0, y_0) = 0.$$

Então, pelo teorema de Taylor, segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{F''(0)}{2} = \frac{\varphi_{xx}(0, y_0)}{2} < +\infty.$$

Assim, se (2.7) for verdade, segue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2} \geq \lim_{x \to 0} = \frac{x^{4/3}}{x^2} = +\infty.$$

uma contradição.

Agora, vamos considerar o caso $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$. Se $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u - \varphi$ possui um máximo local em $(x_0, 0)$, então

$$(u - \varphi)(x, 0) \leq (u - \varphi)(x_0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x^{4/3} - \varphi(x, 0) \leq x_0^{4/3} - \varphi(x_0, 0), \tag{2.8}$$

para todo x em uma vizinhança do x_0. Isto garante que a função

$$G(x) = x^{4/3} - \varphi(x, 0)$$

possui um máximo local em x_0. Observe que G é de classe C^2 numa vizinhança de x_0 (escolhemos a vizinhança suficientimente pequena de forma que não contenha o 0), temos que

$$G'(x_0) = 0$$

e

$$G''(x_0) \leq 0,$$

ou seja,

$$\varphi_{xx}(x_0, 0) \geq \frac{4}{9} x_0^{-2/3} \geq 0. \tag{2.9}$$

Assim, usando (2.5), (2.6) e (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_\infty \varphi(x_0, 0) &= \left(\varphi_x^2 \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_y^2 \varphi_{yy}\right)(x_0, 0) \\ &= \varphi_x^2(x_0, 0)\varphi_{xx}(x_0, 0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

como queríamos.

Por fim, se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, u é C^2 em uma vizinhança de (x_0, y_0), segue com argumentos análogos que a equação é satisfeita no sentido da viscosidade.

Este exemplo nos mostra que existem soluções no sentido da viscosidade que não são soluções clássicas, e mais, nos garante que a máxima teoria de regularidade possível para soluções do infinito Laplaciano é $C^{1,\frac{1}{3}}$.

2.4 Equivalências

A essência de toda esta seção é provar que os tês conceitos abordados anteriormente são todos equivalentes, embora ao longo das seções anteriores tenha ficado clara a relação entre o entes apresentados, o fato de elas serem equivalentes é surpreendente e as demonstrações de tais equivalências passam longe de serem imediatas e foram demonstradas em uma série de artigos clássicos, ver [4] e [10].

2.4.1 Propriedade AML e Comparação com Cones

O Teorema 2.3 garante a equivalência entre a Propriedade AML e Comparação com Cones.

Teorema 2.3. *Seja $u \in C(U)$. Então, u tem a propriedade de comparação com cones em U se, e somente se, $u \in AML(U)$.*

Demonstração. Suponha que u tem a propriedade de comparação com cones em U e seja $V \subset\subset U$. Queremos mostrar que

$$\mathrm{Lip}_u(V) = \mathrm{Lip}_u(\partial V).$$

Faremos uso da seguinte afirmação

Afirmação 2.1. *Dado $u \in C(\overline{U})$, então $Lip_u(U) = Lip_u(\overline{U})$.*

Desde que $u \in C(\overline{V})$, a Afirmação 2.1 garante que

$$\mathrm{Lip}_u(V) = \mathrm{Lip}_u(\partial\overline{V}).$$

Então, como $\partial V \subset \overline{V}$, segue que

$$\mathrm{Lip}_u(\partial V) \leq \mathrm{Lip}_u(V).$$

Basta mostrar que $\mathrm{Lip}_u(V) \leq \mathrm{Lip}_u(\partial V)$. Primeiro, observe que, para qualquer $x \in V$,

$$\mathrm{Lip}_u(\partial(V \setminus \{x\})) = \mathrm{Lip}_u(\partial V \cup \{x\}) = \mathrm{Lip}_u(\partial V). \tag{2.10}$$

Para ver isso, precisamos verificar que, para qualquer $y \in \partial V$,

$$|u(y) - u(x)| \leq \mathrm{Lip}_u(\partial V)|y - x|,$$

o que é equivalente a

$$u(y) - \mathrm{Lip}_u(\partial V)|x - y| \leq u(x) \leq u(y) + \mathrm{Lip}_u(\partial V)|x - y|. \tag{2.11}$$

Isto é claramente válido para todo $x \in \partial V$, mas o que queremos mostrar é que é válido para todo $x \in V$. Considere o cone

$$C(x) = u(y) + \mathrm{Lip}_u(\partial V)|x - y|,$$

centrado em $y \in \partial V$. Desde que $y \notin V$ e u tem a propriedade de comparação com cones por cima em U, a desigualdade é válida em V porque ela se mantém em ∂V.

Agora, sejam $x, y \in V$. Usando (2.10) duas vezes, vamos ter

$$\mathrm{Lip}_u(\partial V) = \mathrm{Lip}_u(\partial(V \setminus \{x\})) = \mathrm{Lip}_u(\partial(V \setminus \{x, y\})).$$

Desde que $x, y \in \partial(V \setminus \{x, y\}) = \partial V \cup \{x, y\}$, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \mathrm{Lip}_u(\partial(V \setminus \{x, y\}))|x - y| = \mathrm{Lip}_u(\partial V)|x - y|.$$

Portanto,

$$\mathrm{Lip}_u(V) \leq \mathrm{Lip}_u(\partial V).$$

Reciprocamente, suponha que $u \in \mathrm{AML}(U)$. Pela Proposição 2.1, basta mostrarmos que para qualquer $V \subset\subset U$, $b \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$,

$$u(x) - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|).$$

Sejam V, b e z como acima e considere o conjunto

$$W = \left\{ x \in V; u(x) - b|x - z| > \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|) \right\}. \tag{2.12}$$

O teorema está provado se mostrarmos que $W = \emptyset$. Suponha por absurdo que $W \neq \emptyset$ e considere o cone

$$C(x) = \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|) + b|x - z|.$$

Observe que W é um conjunto aberto, pois

$$W = \{x \in V; (u - C)(x) > 0\} = V \cap (u - C)^{-1}((0, \infty)).$$

Afirmação 2.2. *$u = C$ em ∂W.*

De fato, observe primeiro que se $x \in \partial V$, então

$$(u - C)(x) \leq 0.$$

Agora, suponha que $x \in \partial W$, com $(u - C)(x) > 0$. Logo, $x \notin \partial V$ e, como $\partial W \subset \overline{V}$, temos que $x \in V$. Assim, $x \in W$. Isso é um absurdo, pois W é aberto. Se $x \in \partial W$, com $(u - C)(x) < 0$, existe uma vizinhança V_x de x tal que

$$(u - C)(y) < 0,$$

para todo $y \in V_x$. Assim,

$$V_x \cup W = \emptyset,$$

o que gera novamente uma contradição. Portanto, segue a afirmação.

Como $u \in \mathrm{AML}(U)$, pelo Corolário 2.2 e pelo fato de que $z \notin W$, pois $z \notin V$ e $W \subset V$, temos que

$$\mathrm{Lip}_u(\partial W) = \mathrm{Lip}_u(W) = \mathrm{Lip}_C(\partial W) = |b|.$$

Tome $x_0 \in W$. O raio de C através de x_0

$$\{z + t(x_0 - z),\ t \geq 0\}$$

contém um segmento em W contendo x_0 que encontra ∂W em seus pontos de extremidades.

Considere as funções

$$F(t) = C(z + t(x_0 - z)) = a + b|x_0 - z|$$

e

$$G(t) = u(z + t(x_0 - z)),$$

onde $t \geq 0$ e $a = \max_{w \in \partial W}(u(w) - b|w - z|)$. Note que $F = G$ nas extremidades do segmento, uma vez que $u = C$ em ∂W. Além disso, F é uma função afim com inclinação $|b||x_0 - z|$.

Afirmação 2.3. *G tem $|b||x_0 - z|$ como constante de Lipschitz.*

De fato, dados $t_1, t_2 \geq 0$, com $t_1 \neq t_2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|G(t_1) - G(t_2)|}{|t_1 - t_2|} &= \frac{|u(z + t_1(x_0 - z) - u(z + t_1(x_0 - z)|}{|t_1 - t_2|} \\ &\leq \frac{|b||(t_1 - t_2)(x_0 - z)|}{|t_1 - t_2|} \\ &= |b||x_0 - z|, \end{aligned}$$

pois $\mathrm{Lip}_u(\partial W) = |b|$ e o segmento está contido em W. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Concluimos que F e G são as mesmas funções no segmento e, como o segmento contém x_0, tem-se

$$G(1) = u(x_0) = C(x_0) = F(x_0) = F(1).$$

Chegamos em uma contradição uma vez que $x_0 \in W$ e, assim, $u(x_0) > C(x_0)$. $\square$

2.4.2 Comparação com Cones e o Infinito Laplaciano

O Teorema 2.4 garante a equivalência entre Comparação com Cones e ser infinito harmônica.

Teorema 2.4. *Seja $u \in C(U)$. Então, $\Delta_\infty u \geq 0$ se, e somente se, u tem a propriedade de comparação com cones por cima.*

Demonstração. Suponha que $\Delta_\infty u \geq 0$ em U. Sejam $V \subset\subset U$, $b \in \mathbb{R}$ e $z \notin V$. Vamos mostrar que

$$u(x) - b|x - z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w - z|).$$

Note que se G é uma função suave, tem-se

$$\Delta_\infty G(|x|) = G''(|x|)[G'(|x|)]^2, \qquad x \neq 0.$$

Tomando $G(t) = bt - \lambda t^2$, segue que, para todo $x \in V$,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty(b|x - z| - \lambda|x - z|^2) &= \Delta_\infty G(|x - z|) \\ &= G''(|x - z|).[G'(|x - z|)]^2 \\ &= -2\lambda.(b - 2\lambda|x - z|)^2 \\ &< 0, \end{aligned}$$

se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno. Como

$$\Delta_\infty u \geq 0,$$

temos que

$$u(x) - (b|x-z| - \lambda|x-z|^2)$$

não possui um máximo local em $V \subset\subset U$ diferente de z. Assim,

$$u(x) - (b|x-z| - \lambda|x-z|^2) \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - (b|w-z| - \lambda|w-z|^2)).$$

Fazendo $\lambda \to 0$ na desigualdade anterior, obtemos

$$u(x) - b|x-z| \leq \max_{w \in \partial V}(u(w) - b|w-z|).$$

Portanto, pela Proposição 2.1 concluimos que u tem a propriedade de comparação com cones por cima.

Reciprocamente, suponha que u tem a propriedade de comparação com cones por cima. Inicialmente, note que, para cada $x \in B_r(y) \subset\subset U$, temos

$$u(x) \leq u(y) + \max_{w \in \partial B_r(y)} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x-y|. \tag{2.13}$$

De fato, considere

$$C(x) = u(y) + \max_{w \in \partial B_r(y)} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |x-y|$$

o cone com vértice em $y \notin (B_r(y) \setminus \{y\}$. Observe que o aberto $(B_r(y) \setminus \{y\}) \subset\subset U$ e u tem a propriedade de comparação com cones por cima. Logo, (2.13) é válido para todo $x \in \partial(B_r(y) \setminus \{y\}$ e, portanto, também é válido para todo $x \in (B_r(y) \setminus \{y\})$.

Agora, (2.13) pode ser reescrita como

$$u(x) - u(y) \leq \max_{w \in \partial B_r(y)} (u(w) - u(y)) \frac{|x-y|}{r - |x-y|}. \tag{2.14}$$

Com efeito, chame $z = x - y$ e veja que

$$\begin{aligned}
u(x) \leq u(y) + \max_{w \in \partial B_r(y)} \left(\frac{u(w) - u(y)}{r} \right) |z| \quad & \Leftrightarrow \quad u(x) \leq u(y) + \max_{w \in \partial B_r(y)} \frac{u(w)}{r}|z| - \frac{u(y)}{r}|z| \\
& \Leftrightarrow \quad u(x) - u(y) \left(\frac{r - |z|}{r} \right) \leq \max_{w \in \partial B_r(y)} \frac{u(w)}{r}|z| \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{r}{r-|z|} u(x) - u(y) \leq \max_{w \in \partial B_r(y)} u(w) \frac{|z|}{r-|z|} \\
& \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{|z|}{r-|z|} \right) u(x) - u(y) \leq \max_{w \in \partial B_r(y)} u(w) \frac{|z|}{r-|z|} \\
& \Leftrightarrow \quad u(x) - u(y) \leq \max_{w \in \partial B_r(y)} (u(w) - u(x)) \frac{|z|}{r-|z|}.
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (2.14) é verdadeira.

Afirmação 2.4. *Se u é duas vezes diferenciável em $x_0 \in U$. Então,*

$$\Delta_\infty u(x_0) = \langle Xp, p\rangle \geq 0,$$

onde $p \in \mathbb{R}^n$ e $X_{n\times n}$ uma matriz simétrica tais que $p = Du(x_0)$ e $X = D^2u(x_0)$.

Vamos mostrar a afirmação. Suponha que u é duas vezes diferenciável em $x_0 \in U$. Então, existem $p \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $X_{n\times n}$ simétrica como na afirmação tal que

$$u(z) = u(x_0) + \langle p, z - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(z - x_0), z - x_0\rangle + o(|z - x_0|^2), \tag{2.15}$$

Escolha

$$r < \frac{1}{2}\text{dist}(x_0, \partial U)$$

e λ suficientemente pequeno, de modo que, $y_0 = x_0 - \lambda Du(x_0)$, $B_r(y_0) \subset\subset U$ e $x_0 \in B_r(y_0)$. Logo,

$$\lambda \leq \frac{r}{Du(x_0)}.$$

Fazendo $z = y_0$ em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
u(y_0) &= u(x_0) + \langle p, y_0 - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y_0 - x_0), y_0 - x_0\rangle + o(|y_0 - x_0|^2)\\
&= u(x_0) + \langle p, -\lambda p\rangle + \frac{1}{2}\langle X(-\lambda p), -\lambda p\rangle + o(|-\lambda p|^2)\\
&= u(x_0) - \lambda|p|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\langle Xp, p\rangle + o(\lambda^2|p|^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$u(x_0) - u(y_0) = \lambda|p|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\langle Xp, p\rangle - o(\lambda^2|p|^2). \tag{2.16}$$

Agora, seja $w_{r,\lambda} \in \partial B_r(y_0)$ tal que

$$w_{r,\lambda} = \max_{\partial B_r(y_0)} u(w)$$

e ponha $z = w_{r,\lambda}$ em (2.15) para obtermos

$$u(w_{r,\lambda}) - (x_0) = \langle p, w_{r,\lambda} - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(w_{r,\lambda} - x_0), w_{r,\lambda} - x_0\rangle + o(|w_{r,\lambda} - x_0|^2). \tag{2.17}$$

Além disso, fazendo $x = x_0$ e $y = y_0$ em (2.14), temos

$$\begin{aligned}
u(x_0) - u(y_0) &\leq \max_{w\in B_r(y_0)} (u(w) - u(x_0))\frac{|x_0 - y_0|}{r - |x_0 - y_0|}\\
&\leq \max_{w\in B_r(y_0)} u(w)\frac{|x_0 - y_0|}{r - |x_0 - y_0|} - u(x_0)\frac{|x_0 - y_0|}{r - |x_0 - y_0|}\\
&= (u(w_{r,\lambda}) - u(x_0))\frac{|x_0 - y_0|}{r - |x_0 - y_0|}.
\end{aligned}$$

Agora, ponha $\overline{z} = w_{r,\lambda} - x_0$. Assim, usando (2.16) e (2.17) e dividindo em ambos os lados por λ, temos que

$$|p|^2 - \frac{1}{2}\lambda\langle Xp, p\rangle - o(|-\lambda p|^2) \leq \left[\langle p, \overline{z}\rangle + \frac{1}{2}\langle X(\overline{z}), \overline{z}\rangle + o((r+\lambda|p|)^2)\right]\frac{|p|}{r-\lambda|p|} \tag{2.18}$$

Note que

$$|\overline{z}| = |w_{r,\lambda} - x_0| = |w_{r,\lambda} - y_0 - \lambda p| \leq r + |\lambda p|.$$

Agora, fazendo $\lambda \to 0$ em (2.16), vamos obter

$$\begin{aligned} |p|^2 &\leq \left(\left\langle p, \frac{w_r - x_0}{r}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x_0}{r}\right), w_r - x_0\right\rangle\right)|p| + o(r)|p| \\ &\leq |p|^2 + \frac{1}{2}\left\langle X\left(\frac{w_r - x_0}{r}\right), w_r - x_0\right\rangle |p| + o(r)|p|, \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $w_r \in \partial B_r(y_0)$ é tal que $w_r = \lim\limits_{\lambda\to 0} w_{r,\lambda}$ e, assim,

$$\left|\frac{w_r - x_0}{r}\right| = 1.$$

Fazendo $r \to 0$ na primeira desigualdade, desde que $|w_r - x_0| = r$,

$$|p| \leq \left\langle p, \lim_{r\to 0}\frac{w_r - x_0}{r}\right\rangle \leq |p| \lim_{r\to 0}\left|\frac{w_r - x_0}{r}\right|.$$

Daí, segue que

$$\lim_{r\to 0}\frac{w_r - x_0}{r} = \frac{p}{|p|}, \quad p \neq 0.$$

Por fim, dividindo a desigualdade (2.17) por r e fazendo $r \to 0$, obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2}\left\langle X\frac{p}{|p|}, \frac{p}{|p|}\right\rangle |p| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \langle Xp, p\rangle = \Delta_\infty u(x_0).$$

Portanto, segue a demonstração da afirmação.

No caso geral, sejam $\tilde{x} \in U$ e $\varphi \in C^2(U)$ tal que $u - \varphi$ tem um máximo em $\tilde{x}$. Então, para y, w próximos de $\tilde{x}$,

$$\varphi(\tilde{x}) - \varphi(y) \leq u(\tilde{x}) - u(y)$$

e

$$u(w) - u(\tilde{x}) \leq \varphi(w) - \varphi(\tilde{x}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{x}) - \varphi(y) &\leq u(\tilde{x}) - u(y) \\ &\leq \max_{w\in B_r(y_0)}(u(w) - u(\tilde{x}))\frac{|\tilde{x} - y|}{r - |\tilde{x} - y|} \\ &\leq \max_{w\in B_r(y_0)}(\varphi(w) - \varphi(\tilde{x}))\frac{|\tilde{x} - y|}{r - |\tilde{x} - y|}. \end{aligned}$$

e obtemos (2.14) para a função φ. Repetindo os mesmos argumentos, vamos concluir que

$$\Delta_\infty \varphi(\tilde{x}) \geq 0$$

e a prova está completa. $\square$

Capítulo 3

Regularidade $C^{1,\alpha}$ de Soluções de Equações Elípticas Não-Lineares Totalmente Degeneradas

Neste capítulo, nosso objetivo é o estudo da regularidade de soluções para o seguinte equação não linear

$$|\nabla u|^{\gamma} F(D^2 u) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{3.1}$$

onde B_1 é a bola unitária de $\mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$, F é uniformemente elíptica, $F(0) = 0$ e f é limitada. Pela condição $\gamma > 0$ essas equações são conhecidas como degeneradas e possuem uma grande relação com o infinito Laplaciano. Tal relação será discutida amplamente no próximo capítulo.

Para $\alpha \in (0, 1]$ e $U \subset \mathbb{R}^n$, vamos denotar

$$[u]_{\alpha,U} = \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\alpha}}$$

e

$$[u]_{1+\alpha,U} = \sup_{\substack{\rho>0 \\ x\in U}} \inf_{p\in\mathbb{R}^n} \sup_{z\in B_{\rho}(x)\cap U} |u(z) - p.z|.$$

Nosso intuito é demonstrar o seguinte teorema,

Teorema 3.1. *Assuma que $\gamma \geq 0$, F uniformemente elíptica, $F(0) = 0$ e f é limitada em B_1. Então, existem $C > 0$ apenas dependendo de γ tal que qualquer solução u de* (3.1) *é $C^{1,\frac{1}{1+\gamma}}$ e*

$$[u]_{1+\alpha,B_{1/2}} \leq C\left(\|u\|_{L^{\infty}} + \|f\|_{L^{\infty}}^{\frac{1}{1+\gamma}} \right).$$

O exemplo abaixo mostra que soluções u de (3.1) não podem ser mais regulares do que $C^{1,\frac{1}{1+\gamma}}$, mesmo que f seja C^{∞}.

Exemplo 3.1. *Considere a função* $u(x) = |x|^{1+\alpha}$.

Como $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$, temos que

$$u(x) = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{(1+\alpha)/2}.$$

Além disso, sabemos que

$$\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u) \quad \text{e} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u.$$

Logo,

$$\partial_i u = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\left(\frac{1+\alpha}{2}-1\right)}.2x_i = (1+\alpha)|x|^{(\alpha-1)/2}x_i$$

e

$$\begin{aligned}\partial_{ii} u &= (1+\alpha)(\alpha-1)|x|^{\alpha-1}\frac{x_i}{|x|}x_i + (1+\alpha)|x|^{\alpha-1}n \\ &= (1+\alpha)(\alpha-1)|x|^{\alpha-1}\frac{x_i^2}{|x|} + (1+\alpha)|x|^{\alpha-1}n\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla u = \left((1+\alpha)|x|^{(\alpha-1)/2}x_1, \ldots, (1+\alpha)|x|^{(\alpha-1)/2}x_n\right)$$

e

$$\Delta u = (1+\alpha)(\alpha+n-1)|x|^{\alpha-1}.$$

Feito isso, veja que

$$|\nabla u|^\gamma \Delta u = (1+\alpha)^{\gamma+1}(\alpha+n-1)|x|^{\alpha(\gamma+1)-1},$$

ou seja, a função u satisfaz

$$|\nabla u|^\gamma \Delta u = C|x|^{(1+\alpha)(\gamma+1)-(\gamma+2)},$$

onde $C = (1+\alpha)^{\gamma+1}(\alpha+n-1)$. Em particular, se escolhermos $\alpha = 1/(1+\gamma)$ o lado direito é sempre constante. Este exemplo mostra que mesmo para um lado direito constante e $F(D^2u) = \Delta u$, não podemos esperar, em geral, que a solução seja mais regular que $C^{1,1/(1+\gamma)}$.

O método que foi usado para demonstrar o resultado principal deste capítulo é o método da compacidade associado à teoria das equações tangentes, uma estratégia poderosíssima que surge no artigo [2] devido a Caffarelli e é aprimorada no artigo [16] de Teixeira. A ideia consiste em aproximar a solução do nosso problema de uma solução de uma equação tangente, com boas estimativas a priori, e tentar assegurar tal regularidade para a solução do problema original. O curioso neste operador é que se por um lado o termo gradiente não permite que ultrapasemos o regime $C^{1,\alpha}$, por outro, ele sugere uma estimativa melhor do que a estimativa a priori do problema da equação tangente que seria,

$$F(D^2u) = 0.$$

Na verdade haverá um passo intermediário implícito, pois aproximaremos a solução do nosso problema da solução do problema tangente para garantirmos o ingresso no regime $C^{1,\alpha}$, e depois iteramos o processo assegurando a regularidade desejada.

3.1 Redução do Problema

Nesta seção, como já citado na Introdução, mostraremos que de fato, com um simples reescalonamento da função u, a prova do Teorema 3.1 se reduz ao caso em que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0,$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno que será escolhido mais adiante. Esta redução tornará o processo de demonstração do teorema principal mais organizado e elegante. Nosso primeiro resultado desta seção nos garante uma condição para demonstrar o Teorema 3.1.

Proposição 3.1. *Para provar o Teorema 3.1, é suficiente mostrar que*

$$[u]_{1+\alpha, B_{1/2}} \leq C,$$

assumindo

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \frac{1}{2} \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq \varepsilon_0,$$

para $\varepsilon_0 > 0$, com $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda, \Lambda, n, \gamma)$.

Demonstração. Seja u uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1. Vamos tomar

$$k = \left(2\|u\|_{L^\infty} + \left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \right)^{-1}$$

e considerar a função escalonada

$$\tilde{u}(x) = ku(x).$$

Note que

$$\nabla \tilde{u} = k \nabla u.$$

Assim,

$$|\nabla \tilde{u}|^\gamma = k^\gamma |\nabla u|^\gamma.$$

Além disso, temos

$$|\nabla \tilde{u}|^\gamma k F(k^{-1} D^2 \tilde{u}) = k^{\gamma+1} |\nabla u|^\gamma F(D^2 u) = k^{\gamma+1} f(x).$$

Logo, $\tilde{u}$ é solução da equação

$$|\nabla \tilde{u}|^\gamma k F(k^{-1} D^2 \tilde{u}) = \tilde{f}(x),$$

onde

$$\tilde{f}(x) = k^{\gamma+1} f(x).$$

Agora, veja que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty} = k\|u\|_{L^\infty} = \frac{\|u\|_{L^\infty}}{\left(2\|u\|_{L^\infty} + \left(\dfrac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon_0}\right)^{1/(1+\gamma)}\right)} \leq \frac{1}{2}.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{L^\infty}^{1/(\gamma+1)} &= k.\|f\|_{L^\infty}^{1/(\gamma+1)} \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty}^{1/(\gamma+1)}}{2\|u\|_{L^\infty} + \left(\dfrac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon_0}\right)^{1/(1+\gamma)}} \\
&= \frac{\varepsilon_0^{1/(1+\gamma)} \|f\|_{L^\infty}^{1/(1+\gamma)}}{2\varepsilon_0^{1/(1+\gamma)} \|u\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}^{1/(1+\gamma)}} \\
&\leq \varepsilon_0^{1/(1+\gamma)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0.$$

Assim, se

$$[\tilde{u}]_{1+\alpha, B_{1/2}} \leq C,$$

por reescalonamento em u, temos que

$$\begin{aligned}
[u]_{1+\alpha, B_{1/2}} &= k^{-1} [\tilde{u}]_{1+\alpha, B_{1/2}} \\
&\leq k^{-1} C \\
&= C\left(2\|u\|_{L^\infty} + \left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\varepsilon_0}\right)^{1/(1+\gamma)}\right) \\
&\leq 2C\left(\|u\|_{L^\infty} + \frac{\|f\|_{L^\infty}^{1/(1+\gamma)}}{\varepsilon_0^{1/(1+\gamma)}}\right) \\
&\leq C\left(\|u\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}^{1/(1+\gamma)}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Equi-Continuidade das Soluções Reescalonado

Nesta seção, vamos mostrar que a solução de

$$|p + \nabla u|^{\gamma} F(D^2 u) = f, \tag{3.2}$$

com $p \in \mathbb{R}^n$, são Hölder contínuas, independente de p.

Lema 3.1 (Módulo de Continuidade Independente de p). *Para todo $r > 0$, existem $\beta \in (0,1)$ e $C > 0$, onde*

$$\beta = \beta(\lambda, \Lambda, n, \gamma, r) \quad e \quad C = C(\lambda, \Lambda, n, \gamma, r)$$

tal que para toda solução u de (3.2), com

$$\underset{B_1}{osc}\, u \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0 < 1,$$

satisfaz

$$[u]_{\beta, B_r} \leq C. \tag{3.3}$$

Este resultado garantirá a compacidade no conjunto de soluções permitindo, e usaremos ele para garantir a convergência uniforme de uma sequência de soluções u_k para uma função u_∞ que será solução de nossa equação tangente

$$F(D^2 u_\infty) = 0$$

que possui estimativas $C^{1,\alpha}$ a priori e nos permitirá passar a esse regime de regularidade. Vamos separar a demonstração do resultado em duas partes. Na primeira consideraremos $p \in \mathbb{R}^n$ grande, ou seja, $|p| > C$ e demonstraremos que as soluções de (3.2) são uniformemente Lipschitz. A prova deste fato é bastante técnica e usaremos para isso a famosa estratégia de Ishii-Lions [9]. Mais precisamente vamos mostrar o seguinte resultado

Lema 3.2 (Estimativas Lipschitz para Grandes $p's$). *Assuma que u é uma solução de (3.2), com*

$$\underset{B_1}{osc}\, u \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0 < 1.$$

Se

$$|p| \geq \frac{1}{a_0},$$

com $a_0 = a_0(\lambda, \Lambda, n, \gamma, r)$, então u é Lipschitz contínua em B_r e

$$[u]_{1, B_r} \leq C,$$

onde $C = C(\lambda, \Lambda, \gamma, d, r)$.

Demonstração. Vamos reescrever a equação (3.2) como

$$|e + a\nabla u|^\gamma F(D^2u) = \tilde{f},$$

onde $e = p/|p|$, $a = 1/|p| \in [0, a_0]$ e $\tilde{f} = |p|^{-\gamma} f$. Observe que

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty(B_1)} = |p|^{-\gamma}\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le a_0^\gamma \varepsilon_0.$$

Para todo $x \in B_{r/2}$, olhamos para $L_1, L_2 > 0$ tal que

$$M = \sup_{x,y\in B_r} u(x) - u(y) - L_1\omega(|x-y|) - L_2|x-x_0|^2 - L_2|y-x_0|^2,$$

onde

$$\omega(s) = \begin{cases} s - \omega_0 s^{3/2}, & \text{se} \quad s \le s_0 := (2/3\omega_0)^2 \\ \omega(s_0), & \text{se} \quad s \ge s_0 \end{cases}.$$

Escolhemos ω_0 tal que $s_0 \ge 1$ (basta tomar $\omega_0 \ge 3/2$).

Afirmação 3.1. $M \le 0$.

Suponha que $M > 0$. Vamos reescrever M da seguinte forma

$$M = \sup_{x,y\in B_r} u(x) + w(y) - \phi(x,y),$$

onde $w(y) = -u(y)$ e $\phi(x,y) = L_1\omega(|x-y|) + L_2|x-x_0|^2 + L_2|y-x_0|^2$. Se (x,y) é o ponto onde o máximo é atingido, concluimos que

$$\phi(x,y) \le \operatorname*{osc}_{B_1} u \le 1.$$

Nosso objetivo agora é usar o Lema de Jensen-Ishii. Procedemos da seguinte maneira: Escolhemos um valor para L_2 de modo que o supremo é alcançado em B_r. Em seguida, calculamos o gradiente da função de teste para u com relação a x e y em (x,y) e obteremos duas desigualdades de viscosidade. Então, vejamos como isso tudo é procedido.

Digamos que

$$\sup \Phi(\overline{x},\overline{y}) = u(\overline{x}) - u(\overline{y}) - L_1\omega(|\overline{x}-\overline{y}|) - L_2|\overline{x}-x_0|^2 - L_2|\overline{y}-x_0|^2 = \theta > 0.$$

Logo,

$$L_2(|\overline{x}-x_0|^2 + |\overline{y}-x_0|^2) + L_1\omega(|\overline{x}-\overline{y}|) = -\theta + u(\overline{x}) - u(\overline{y})$$

Daí,

$$\begin{aligned} L_2(|\overline{x}-x_0|^2 + |\overline{y}-x_0|^2) \le -\theta + u(\overline{x}) - u(\overline{y}) \quad &\Rightarrow \quad |\overline{x}-x_0|^2 + |\overline{y}-x_0|^2 \le \frac{\theta + u(\overline{x}) - u(\overline{y})}{L_2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{u(\overline{x}) - u(\overline{y}) - \theta}{L_2} < \left(\frac{r}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \quad L_2 > \left(\frac{4}{r}\right)^2 (u(\overline{x}) - u(\overline{y}) - \theta). \end{aligned}$$

Portanto, escolhemos $L_2 = \left(\frac{4}{r}\right)^2$, de modo que

$$|\overline{x} - x_0| \leq \frac{4}{r} \quad \text{e} |\overline{y} - x_0| \leq \frac{4}{r}.$$

Com esta escolha, forçamos os pontos x e y onde o supremo é alcançado em B_r. Observe também que o supremo não pode ser alcançado em (x, y) com $x = y$, caso contrário $M \leq 0$.

Agora, observe que

$$D_x\phi(x, y) = L_1\omega'(|x - y|).\left(\frac{x - y}{|x - y|}\right) + 2L_2(x - x_0)$$

e

$$D_y\phi(x, y) = L_1\omega'(|x - y|).\left(\frac{x - y}{|x - y|}\right) + 2L_2(y - x_0)$$

Dessa forma, escrevemos

$$D_x\phi(x, y) = q + 2L_2(x - x_0) \quad \text{e} \quad D_y\phi(x, y) = q + 2L_2(y - x_0),$$

onde $q = L_1\omega'(\delta)\widehat{\delta}$, $\delta = x - y$ e $\widehat{\delta} = \delta/|\delta|$. Além disso, temos que

$$\bullet\ D_{xx}\phi(x, y) = L_1\omega''(|x - y|)\frac{(x - y)^2}{|x - y|^2} + L_1\omega'(|x - y|)\left[\frac{|x - y| - \frac{(x - y)^2}{|x - y|}}{|x - y|^2}\right] + 2L_2$$

$$= L_1\omega''(|x - y|) + 2L_2,$$

$$\bullet\ D_{xy}\phi(x, y) = L_1\omega''(|x - y|)\frac{(x - y)^2}{|x - y|^2} + L_1\omega'(|x - y|)\left[\frac{-|x - y| + \frac{(x - y)^2}{|x - y|}}{|x - y|^2}\right]$$

$$= L_1\omega''(|x - y|) = D_{yx}\phi(x, y)$$

e

$$\bullet\ D_{yy}\phi(x, y) = -L_1\omega''(|x - y|)\frac{-(x - y)^2}{|x - y|^2} - L_1\omega'(|x - y|)\left[\frac{-|x - y| + (x - y)\frac{(x - y)}{|x - y|}}{|x - y|^2}\right] + 2L_2$$

$$= L_1\omega''(|x - y|) + 2L_2,$$

Pelo Lema de Jensen-Ishii, para todo $\iota > 0$ suficientemente pequeno, existe $X, Y \in \mathbb{S}^n$ tais que

$$F(D_x\phi(x, y), X) \leq 0, \quad F(D_y\phi(x, y), Y) \geq 0$$

e

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + (2L_2 + \iota)I,$$

onde $Z = L_1 D^2(\omega(|\ .\ |))(x-y)$. Aplicando a desigualdade de matrizes nos vetores da forma (v, v) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle &\leq \left\langle \left(\begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + (2L_2+\iota)I \right) \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} + (2L_2+\iota)I \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada lado da desigualdade anterior. Assim, para o lado esquerdo da desigualdade, vamos obter que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} Xv, & -Yv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle Xv, v\rangle - \langle Yv, v\rangle \\ &= \langle (X-Y)v, v\rangle. \end{aligned}$$

Para o lado direito da desigualdade, vamos obter que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} + (2L_2+\iota)I \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle (2L_2+\iota)I \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle (2L_2+\iota)I \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (2L_2+\iota) \left\langle \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v, & v \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (2L_2+\iota)(\langle v, v\rangle + \langle v, v\rangle) \\ &= 2((2L_2+\iota)\langle v, v\rangle \\ &= (4L_2+\iota)|v|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\langle (X-Y)v, v\rangle \leq (4L_2+\iota)|v|^2. \tag{3.4}$$

Sendo assim, $(X-Y) \leq (4L_2+\iota)I$, ou equivalentemente, todos os autovalores de $X-Y$ são menores do que $(4L_2+\iota)$. Em particular, aplicando no vetor $(\widehat{\delta}, -\widehat{\delta})$, obteremos

$$\begin{aligned} \langle (X-Y)\widehat{\delta}, \widehat{\delta}\rangle &\leq \left(4L_2 + \iota - 3\omega_0 L_1 |x-y|^{-1/2}\right)|v|^2 \\ &\leq \left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right)|\widehat{\delta}|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Afirmação 3.2. *Ao menos um autovalor de* $X - Y$ *é menor que* $\left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right)$.

De fato, suponha que

$$\lambda_k > \left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right),$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Escreva

$$\widehat{\delta} = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,$$

onde os $e_k' s$ formam a base ortonormal de $X - Y$. Assim

$$\begin{aligned}
\langle (X-Y)\widehat{\delta}, \widehat{\delta} \rangle &= \left\langle (X-Y)\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \lambda_k \\
&> \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right).
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right)|\widehat{\delta}| > \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right),$$

o que é um absurdo. Dessa forma, ao menos um autovalor de $X - Y$ é menor ou igual a

$$\left(4L_2 + \iota - \frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 L_1\right).$$

Agora, considere o Operador de Pucci

$$P^-(X-Y) = -\lambda \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i - \Lambda \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i.$$

Usando (3.4) e (3.5), vamos obter que

$$\begin{aligned}
P^-(X-Y) &\geq -\lambda(4l_2 + \iota - 3\sqrt{2}\omega_0 L_1) - \Lambda(d-1)(4L_2 + \iota) \\
&\geq -(\lambda + (d-1)\Lambda)(4L_2 + \iota) + 3\sqrt{2}\omega_0 \lambda L_1.
\end{aligned}$$

Agora escrevemos as duas desigualdades de viscosidade e as combinamos para obter uma contradição.

$$\begin{aligned}
|e + aq_x|^\gamma F(X) &\leq \tilde{f}(x) \\
|e + aq_y|^\gamma F(Y) &\geq \tilde{f}(y).
\end{aligned}$$

Escolha a_0 suficientemente pequeno dependendo de L_1 e L_2, de modo que

$$|aq_x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |aq_y| \leq \frac{1}{2}.$$

Note que essa escolha é possível, pois basta ver que

$$\begin{aligned} |aq_x| &= a|q + 2L_2 x| \\ &\leq a(|q| + 2L_2|x|) \\ &\leq a(L_1|\omega'(|\delta|)| + 2L_2 r) \\ &\leq a(L_1|\omega'(|\delta|)| + 2L_2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |aq_x| \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow a(L_1|\omega'(|\delta|)| + 2L_2) \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2(L_1|\omega'(|\delta|)| + 2L_2)}. \end{aligned}$$

Portanto, basta escolher

$$a_0 = \frac{1}{2(L_1|\omega'(|\delta|)| + 2L_2)}.$$

Observe que com essa escolha de a_0 é verdade que $|aq_y| \leq \frac{1}{2}$. Em particular, temos que

$$|e + aq_x| \geq |e| - |aq_x| = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |e + aq_y| \geq |e| - |aq_y| = \frac{1}{2}.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{1}{2} \leq \min\{|e + aq_x|, |e + aq_y|\}.$$

Usamos agora o fato de que F é unifirmimente elíptica e escrevemos

$$F(Y) + P^-(X - Y) \leq F(X).$$

Lembremos que

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty} \leq a_0^\gamma \varepsilon_0.$$

Além disso, note que

$$\frac{1}{2^\gamma} F(X) \leq |e + aq_x|^\gamma F(X) \leq \tilde{f}(x) \quad \Rightarrow \quad F(X) \leq 2^\gamma \tilde{f}(x) \leq 2^\gamma \|\tilde{f}\|_{L^\infty} \leq 2^\gamma a_0^\gamma \varepsilon_0$$

De maneira análoga, obtemos que

$$-f(Y) \leq 2^\gamma a_0^\gamma \varepsilon_0.$$

Assim, combinando as desigualdades exibidas anteriormente, obtemos

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}\omega_0 \lambda L_1 \leq (\lambda + (n-1)\Lambda)(4L_2 + \iota) + 2^{\gamma+1}\varepsilon_0.$$

Escolhendo L_1 grande o suficiente dependendo $\lambda, \Lambda, n, \gamma$, e a escolha prévia de L_1 (que depende de r somente), obtemos uma contradição.

Note que esta escolha de L_1 não depende da escolha anterior de a_0, então devemos primeiro escolher L_1 grande e a_0 pequeno. A prova do lema está agora completa. $\square$

A segunda parte consiste em provar estimativas Hölder uniforme para o caso em que $|p| \leq C$. Para isto, vamos usar um belo resultado obtido pelo Imbert em [7], onde se garante a estimativa C^{α} para soluções de equações degeneradas com hipóteses especiais, [ver [7], Teorema 1, p. 8].

Lema 3.3 (Estimativas Hölder para Pequenos $p's$). *Assuma que u é uma solução de (3.2), com*

$$\underset{B_1}{osc}\, u \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^{\infty}(B_1)} \leq \varepsilon_0 < 1.$$

Se $|p| \leq \frac{1}{a_0}$, então u é $\beta-$Hölder contínua em B_1 e

$$[u]_{\beta, B_r} \leq C,$$

onde $\beta = \beta(\lambda, \Lambda, n, \gamma, r)$ e $C = C(\lambda, \Lambda, n, \gamma, r)$.

Demonstração. Vamos reescrever a equação (3.2) como $G(Du, D^2u) - f(x) = 0$, com

$$G(q, X) = |p + q|^{\gamma} F(X) - f(x).$$

Em particular, se $|q| \leq 2a_0^{-1}$, temos que

$$|p + q|^{\gamma} \geq (|q| - |p|)^{\gamma} \geq \left(2a_0^{-1} - a_0^{-1}\right)^{\gamma} = a_0^{-\gamma}.$$

Por hipótese, F é elíptica, ou seja,

$$P^{-}(Y) \leq F(X + Y) - F(X) \leq P^{+}(Y).$$

Agora, suponha que

$$\left.\begin{array}{r} G(q, X) - f(x) \leq 0 \\ |q| \geq 2a_0^{-1} \end{array}\right\} \quad \text{e} \quad \left.\begin{array}{r} G(q, X) - f(x) \geq 0 \\ |q| \geq 2a_0^{-1} \end{array} .\right\}$$

No primeiro caso, vamos obter

$$\begin{aligned} |p + q|^{\gamma} F(X) \leq f(x) \quad &\Rightarrow \quad F(X) \leq f(x)|p + q|^{-\gamma} \\ &\Rightarrow \quad F(X) \leq |f| a_0^{\gamma} \\ &\Rightarrow \quad P^{-}(D^2u) \leq F(D^2u) - F(0) \leq |f| a_0^{\gamma} \\ &\Rightarrow \quad P^{-}(D^2u) - |f| a_0^{\gamma} \leq 0. \end{aligned}$$

Já no segundo caso, vamos obter

$$
\begin{aligned}
|p+q|^\gamma F(X) \geq f(x) \quad &\Rightarrow \quad -|f| \leq |p+q|^\gamma F(X) \\
&\Rightarrow \quad -|p+q|^{-\gamma}|f| \leq F(X) \\
&\Rightarrow \quad -a_0^\gamma |f| \leq -|p+q|^{-\gamma}|f| \leq F(X) \\
&\Rightarrow \quad -a_0^\gamma |f| \leq F(D^2u) - F(0) \leq P^+(D^2u) \\
&\Rightarrow \quad P^+(D^2u) + |f| a_0^\gamma \geq 0.
\end{aligned}
$$

Em resumo, concluimos que

$$
\left.\begin{array}{c} G(q,X) - f(x) \leq 0 \\ |q| \geq 2a_0^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P^-(D^2u) - |f|a_0^\gamma \leq 0
$$

e

$$
\left.\begin{array}{c} G(q,X) - f(x) \geq 0 \\ |q| \geq 2a_0^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P^-(D^2u) + |f|a_0^\gamma \geq 0.
$$

Sabemos por [7] que existe $\beta_1 \in (0,1)$ e $C_1 = C_1(\lambda, \Lambda, r, d)$ tal que

$$
\begin{aligned}
[u]_{\beta_1, B_r} \quad &\leq \quad C_1 \left(osc_{B_1} u + \max\left(2a_0^{-1}, \|f\|_{L^n(B_1)}\right)\right) \\
&\leq \quad C_1 \left(osc_{B_1} u + \max\left(2a_0^{-1}, \varepsilon_0\right)\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, a prova do lema está completa. □

3.3 Lema de Aproximação

Nesta seção, iremos provar o resultado chave deste capítulo, é o mecanismo que faz todo o sistema funcionar que é o lema de aproximação. Ele nos garante que soluções de (3.2) podem ser aproximadas por uma função linear em uma bola cujo raio está intimamente associado ao erro da aproximação. Para provar tal resultado iremos usar fortemente o Lemma 3.6 que será provado em uma seção posterior, este formato não natural dos resultados é uma escolha puramente didática e foi feita desta forma pois a demonstração do Lemma 3.6 é bastante técnica e acreditamos que o desenho do trabalho ficaria mais limpo deixando a sua prova para o final do capítulo. O resultado que iremos mostrar agora mais especificamente é o seguinte,

Lema 3.4 (Lema de Aproximação). *Existem $\varepsilon_0 \in [0,1]$ e $\rho \in (0,1)$, onde $\rho = \rho(\gamma, \lambda, \Lambda, n)$ tal que para algum $p \in \mathbb{R}^n$ e u solução de*

$$
|p + \nabla u|^\gamma F(D^2u) = f,
$$

em B_1 tal que

$$
\underset{B_1}{osc}\, u \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_0,
$$

então existe $p' \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\underset{B_\rho}{osc}(u - p'x) \leq \frac{1}{2}\rho.$$

Além disto,

$$|p'| \leq C_0.$$

Demonstração. Suponha que o lema não vale. Então existem $\varepsilon_n \to 0$, $p_n \in \mathbb{R}^n$, f_n, u_n, com

$$\|f_n\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_n \quad \text{e} \quad \underset{B_1}{\operatorname{osc}}\, u_n \leq 1$$

de modo que

$$|p_n + \nabla u_n|^\gamma F(D^2 u_n) = f_n \quad \text{em} \quad B_1. \tag{3.6}$$

Mas, para todo $p' \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{B_\rho}{\operatorname{osc}}(u_n - p'.x) > \frac{1}{2}\rho. \tag{3.7}$$

Observe que $f_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Graças ao Lema (3.1), temos que

$$[u_n]_{\rho, B_\rho} \leq C.$$

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, podemos extrair uma subsequência de $(u_n)_n$ convergindo localmente uniformemente em B_1 para uma função contínua u_∞. Em particular, para todo $p' \in \mathbb{R}^d$

$$\underset{B_\rho}{\operatorname{osc}}(u_\infty - p'.x) > \frac{1}{2}\rho. \tag{3.8}$$

Vamos provar que u_∞ satisfaz $F(D^2 u_\infty) = 0$ em B_1. Isto implicará que existe um vetor $p_\rho \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\underset{B_\rho}{\operatorname{osc}}\,(u_\infty - p_\rho.x) \leq \frac{1}{4}\rho.$$

permanece verdadeiro. Esta é a desejada contradição com (3.8).

Para provar que $F(D^2 u_\infty) = 0$ em B_1, dividiremos em dois casos

i) (p_n) possui subsequência convergente;

ii) (p_n) não possui subsequência convergente.

No primeiro caso, digamos que $p_n \to p_\infty$. Devemos mostrar que dados x_0 e φ, com x_0 máximo de $u_n - \varphi$ (o mesmo para x_0 mínimo de $u_n - \varphi$), então

$$|p_\infty + \nabla\varphi(x_0)|^\gamma F(D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

e o mesmo para

$$|p_\infty + \nabla\varphi(x_0)|^\gamma F(D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

Desde que

$$|p_n + \nabla u_n|^\gamma F(D^2 u_n) = f_n \quad \text{e} \quad u_n \to u_\infty,$$

segue que existe $x_n \to x_0$. Bom, x_n é máximo de $u_n - \varphi$, então

$$|p_n + \nabla\varphi(u_n)|^\gamma F(D^2\varphi(u_n)) \geq f_n.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos

$$|p_\infty + \nabla\varphi(u_\infty)|^\gamma F(D^2\varphi(u_\infty)) \geq 0.$$

De maneira análoga, obtemos que

$$|p_\infty + \nabla\varphi(u_\infty)|^\gamma F(D^2\varphi(u_\infty)) \leq 0.$$

Dessa forma, $|p_\infty + \nabla\varphi(u_\infty)|^\gamma F(D^2\varphi(u_\infty)) = 0$. Portanto, pelo Lema 3.6 da subseção 3.5, concluimos que $F(D^2\varphi(u_\infty)) = 0$. Isso implica que existe um vetor $p_\rho \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho}(u_\infty - p_\rho.x) \leq \frac{1}{4}\rho < \frac{1}{2}\rho,$$

o que é um absurdo.

No segundo caso, se não pudermos extrair uma subseqüência convergente de p_n, então $|p_n| \to \infty$ e, neste caso, extraímos uma subsequência convergente de $e_n = p_n/|p_n|$. Digamos que $e_n \to e_\infty$ e dividindo a equação (3.6) por $|p_n|^\gamma$, obtemos

$$\left|e_n + |p_n|^{-1}\nabla\varphi(u_n)\right|^\gamma F(D^2\varphi(u_n) = |p_n|^{-\gamma} f_n.$$

Usando os mesmos argumentos que o anterior e fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima, concluimos que

$$|e_\infty + 0\nabla u_\infty|^\gamma F(D^2 u_\infty) = 0$$

para $e_\infty \neq 0$, ou seja, neste caso temos também que $F(D^2 u_\infty) = 0$ em B_1. Portanto, a demonstração do Lema 3.4 está completa. □

3.4 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção, iremos demonstrar o resultado principal deste capítulo, para isto iremos iterar o lema de aproximação e obter uma estimativa que nos permita assegurar que nossa solução está em um espaço de Campanato adequado, o qual possamos mergulha-lo no espaço $C^{1,\alpha}$ desejado. Vamos mostrar o lema de iteração que garante que,

Lema 3.5. *Existem $\rho, \alpha \in (0,1)$ e $\varepsilon_0 \in [0,1]$ apenas dependendo de γ, das constantes de elipticidade e da dimensão tal que, se u é uma solução de* (3.1)*, com*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0 \quad e \quad \underset{B_1}{osc}\, u \leq 1,$$

então para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $p_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\underset{B_{r_k}}{osc}(u - p_k x) \leq r_k^{1+\alpha}. \tag{3.9}$$

onde $r_k = \rho^k$. Além disto,

$$|p_k - p_{k-1}| \leq C_0 r_k^{\frac{1}{1+\gamma}}.$$

Demonstração do Lema3.5. Vamos usar indução sobre k. Para $k = 0$, tome $\rho_0 = 0$ e (3.9) é garantido, pois $\underset{B_1}{osc}\, u \leq 1$. Digamos que o resultado é verdade para k, isto é, existe $p_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\underset{B_{r_k}}{\operatorname{osc}}\, (u - p_k.x) \leq r_k^{1+\alpha}.$$

Agora, escolha $\alpha > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\rho^\alpha \geq \dfrac{1}{2}$. Para cada $x \in B_1$, considere

$$u_k(x) = \frac{u(r_k x) - p_k(r_k x)}{r_k^{1+\alpha}}.$$

Afirmação 3.3. *u_k é solução de*

$$|p_k r_k^{-\alpha} + Du_k|^\gamma r_k^{1-\alpha} F(r_k^{\alpha-1} D^2 u_k) = f_k(x),$$

onde $f_k(x) = r_k^{1-\alpha(1+\gamma)} f(r_k x)$.

De fato, veja que

$$Du_k = \frac{1}{r_k^{1+\alpha}} \left(Du(r_k x) - D[p_k(r_k x)] \right).$$

Note que

$$D(r_k x) = r_k Du(r_k x), \quad D^2(r_k x) = r_k^2 Du(r_k x), \quad D[p_k(r_k x)] = r_k p_k Dx \quad \text{e} \quad D^2[p_k(r_k x)] = 0.$$

Assim,

$$Du_k = \frac{1}{r_k^{1+\alpha}}(r_k Du(r_k x) - r_k p_k Dx) = \frac{1}{r_k^\alpha}(Du - p_k Dx).$$

Temos ainda que

$$F(r_k^{\alpha-1} D^2 u_k) = F\left(r_k^{\alpha-1} \frac{D^2 u}{r_k^{\alpha+1}} r_k^2 \right) = F(D^2 u).$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}|p_k r_k^{-\alpha} + Du_k|^\gamma r_k^{1-\alpha} F(r_k^{\alpha-1} D^2 u_k) &= r_k^{-\alpha\gamma} r_k^{1-\alpha} |Du|^\gamma F(D^2 u)\\ &= r_k^{1-\alpha(1+\gamma)} f(r_k x)\\ &= f_k(x).\end{aligned}$$

Portanto, a afirmação está provada. Agora, sempre que tomarmos $\alpha < \dfrac{1}{1+\gamma}$, teremos

$$\|f_k\|_{L^\infty} = r_k^{1-\alpha(1+\gamma)} \|f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0.$$

Dessa forma, podemos aplicar o Lema 3.4, ou seja, existe $q_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho}(u_k - q_{k+1}x) \leq \frac{1}{2}\rho.$$

Pela escolha do α e reescrevendo a expressão anterior, obtemos

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho}\left(\frac{u - p_k(r_k x)}{r_k^{1+\alpha}} - q_{k+1}x\right) \leq \rho^{1+\alpha}.$$

Portanto,

$$\operatorname*{osc}_{B_{r_{k+1}}}(u - p_{k+1}x) \leq r_{k+1},$$

onde $p_{k+1} = p_k + q_{k+1} r_k^\alpha$ e $r_{k+1} = \rho r_k$. Ademais,

$$|p_{k+1} - p_k| \leq |q_{k+1} r_k^\alpha| \leq C_0 r_k^\alpha.$$

Portanto, o lema está provado.

$\square$

Agora estamos prontos para entregar a prova do teorema principal. A primeira coisa que faremos é mostrar que (p_k) é uma sequencia de Cauchy e, portanto, convergente em $\mathbb{R}^n$. Chamaremos $\alpha = \frac{1}{1+\gamma}$ e consideraremos p_m e p_k com $m > k$ então

$$|p_m - p_k| \leq |p_m - p_{m-1}| + \ldots + |p_{k+1} - p_k| \leq C_0 \sum_{i=k}^{i=m} \rho^{\alpha i},$$

como $0 < \rho < 1$ segue que

$$|p_m - p_n| \leq C_0 \frac{\rho^{\alpha k}}{1 - \rho^\alpha}.$$

Logo, quando $k \to \infty$, tem-se que

$$|p_m - p_n| \to 0,$$

provando que p_k é uma sequencia de Cauchy. Assim $p_k \to p_\infty$.

Neste ponto vamos mostrar que

$$\underset{B_{\rho^k}}{\operatorname{osc}}|u - p_\infty x| \leq C_1 \rho^{k(1+\alpha)}.$$

De fato,

$$|u - p_\infty x| \leq |u - p_k x| + |p_\infty - p_k||x|$$

e, além disto,

$$|p_\infty - p_k| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |p_{i+1} - p_i| \leq C_0 \frac{\rho^{\alpha k}}{1 - \rho^\alpha},$$

assim

$$\underset{B_{\rho^k}}{\operatorname{osc}} |u - p_\infty x| \leq C_0 \left(1 + C_0 \frac{1}{1 - \rho^\alpha}\right) \rho^{(1+\alpha)k}.$$

Por fim, terminamos considerando $x \in B_1$. Temos que existe um k natural tal que $\rho^{k+1} \leq |x| < \rho^k$, assim

$$\operatorname{osc}_{B_{\rho^k}} |u - p_\infty x| \leq C_1 \rho^{k(1+\alpha)} \leq C_1 \frac{1}{\rho^{1+\alpha}} |x|^{1+\alpha},$$

e usando o teorema do mergulho de Campanato [Teorema 1.2] concluímos o resultado.

3.5 Solução de $|\nabla u|^\gamma F(D^2 u) = 0$

Por fim, para terminamos o capítulo vamos demonstrar o Lema 3.6 que é o resultado crucial na prova do lema de aproximação. Neste mostramos que soluções u do problema 3.1 homogêneo são também soluções de $F(D^2u) = 0$. Este fato é um resultado simples se $\nabla u \neq 0$, já nos pontos onde $\nabla u = 0$ o resultado torna-se bem complicado. Este problema foi contornado por um belíssimo argumento dado por Imbert e Silvestre em [8] e é o que apresentaremos a seguir.

Lema 3.6. *Assuma que u é uma solução de*

$$|p + \nabla u|^\gamma F(D^2 u) = 0$$

em B_1. Então, u é uma solução de $F(D^2u) = 0$ em B_1.

Demonstração. Basta provar que o resultado vale para $p = 0$, pois se u é uma solução de $|p + \nabla u|^\gamma F(D^2u) = 0$, consideramos $v = u + p.x$, e obteremos que v satisfaz $|\nabla v|^\gamma F(D^2u) = 0$ em B_1. Assim, se provamos o resultado para $p = 0$, concluímos que $F(D^2u) = F(D^2v) = 0$ em B_1.

Assuma que $p = 0$. Mostraremos apenas a propriedade da supersolução uma vez que a propriedade da subsolução é análoga.

Considere uma função teste ϕ que toca u estritamente por baixo em $x \in B_1$. Assumimos, para simplificar, que $x = 0$. Portanto, temos, $\phi(0) = u(0) = 0$ e $\phi < u$ em $B_r \setminus \{0\}$ para o mesmo $r > 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que ϕ é quadrática, isto é, $\phi(x) = \dfrac{1}{2}Ax.x + bx$. Analisaremos dois casos

- **Caso 1:** $b \neq 0$,
- **Caso 2:** $b = 0$.

Digamos que $b \neq 0$. Note que

$$\nabla\phi(0) = b \quad \text{e} \quad D^2\phi(0) = A.$$

Como u é solução de $|\nabla u|^\gamma F(D^2 u) = 0$, segue que

$$bF(A) = |\nabla\phi(0)|^\gamma F(D^2\phi(0)) \geq 0.$$

Portanto, concluimos que $F(A) \geq 0$. Isso mostra o Caso 1.

Se $b = 0$ vamos argumentar por contradição assumindo que $F(A) < 0$. Como F é uniformimente elíptica, temos que existem $\lambda, \Lambda > 0$, com $\lambda \leq \Lambda$ tais que

$$\lambda \mathrm{tr}(Y) \leq F(X) - F(X+Y) \leq \Lambda \mathrm{tr}(Y)$$

Fazendo $X = 0$ e $Y = A$ na desigualdade anterior, obtemos que

$$-\Lambda \mathrm{tr}(A) \leq F(A) \leq -\lambda \mathrm{tr}(A).$$

Logo, $-\Lambda \mathrm{tr}(A) \leq F(A) < 0$, ou seja, $\Lambda \mathrm{tr}(A) > 0$, isto implica que A tem pelo menos um autovalor positivo. Seja S a soma direta dos autoespaço associados aos autovalores não negativos. Seja P_S a projeção ortogonal em S. Consideremos então a seguinte função teste

$$\psi(x) = \phi(x) + \varepsilon|P_S x|.$$

Como $\phi < u$ em B_r, então $u - \psi$ atinge seu mínimo em x_0 em $\overline{B}_r$ no interior da bola para ε suficientemente pequeno.

Afirmamos que $P_S x_0 \neq 0$. De fato, suponha que $P_S x_0 = 0$. Sabemos que

$$|P_S x| = \max_{|e|=1} e.P_S x.$$

Note que

$$u(x) - \phi(x) - \varepsilon e.P_S x \geq u(x) - \phi(x) - \varepsilon|P_S x| = (u - \psi)(x)$$

e

$$u(x_0) - \phi(x_0) - \varepsilon e.P_S x_0 = u(x_0) - \phi(x_0) = (u - \psi)(x_0)$$

Como x_0 é mínimo de $u - \psi$, segue que x_0 é mínimo de $u - \omega$, onde $\omega(x) = \phi(x) + \varepsilon e.P_s(x)$. Logo

$$|Ax_o + \varepsilon P_S e|^\gamma F(A) \geq 0.$$

Assim, existe e tal que

$$D\phi(x_0) + \varepsilon P_s e \neq 0$$

e, portanto, temos a contradição $F(A) \geq 0$.

Agora, veja que

$$\nabla\psi = \nabla\phi + \varepsilon\nabla|P_S x| \quad \text{e} \quad D^2\psi = D^2\phi + \varepsilon D^2|P_S|.$$

Como $P_S x_0 \neq 0$, ψ é suave numa vizinhança de x_0 e obtemos a seguinte desigualdade de viscosidade

$$|\nabla\psi(x_0)|^\gamma F(D^2\psi(x_0)) = |Ax_0 + \varepsilon e_0|^\gamma F(A + \varepsilon B) \geq 0,$$

onde $e_0 = \dfrac{P_S x_0}{|P_S x_0|}$ e $B = D^2|P_S(x_0)| \geq 0$ desde que $x \mapsto |P_S x|$ é convexo. Observação seguinte que

$$(Ax_0 + \varepsilon e_0).P_S x_0 = P_S A x_0.x_0 + \varepsilon|P_S x_0| \geq \varepsilon|P_S x_0| > 0.$$

Consequentemente,

$$Ax_0 + \varepsilon e_0 \neq 0$$

e temos a seguinte contradição

$$F(A) \geq F(A + \varepsilon B) > 0.$$

A prova está concluída. $\square$

Capítulo 4

Regularidade para Funções Infinitas Harmônicas

Neste capítulo vamos focar no objetivo principal do trabalho que é a teoria de regularidade para soluções de

$$\triangle_\infty u = 0 \text{ em } U \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

É sabido, pelo exemplo 2.2, que a máxima regularidade que podemos esperar é $C^{1,1/3}$. No entanto, apenas resultados parciais foram obtidos nesta questão. Evans e Savin em [5] provou que existe um $\alpha > 0$ tal que funções infinito-harmônicas são $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \sim 0$ quando a dimensão é igual a 2. Evans e Smart por sua vez provaram que tais funções são diferenciaveis em todo ponto, isto em qualquer dimensão. Já Araújo, Ricarte e Teixeira provaram que sobre hipóteses especiais vale a tão esperada regularidade $C^{1,1/3}$. O que faremos aqui é visitar os trabalhos feitos por Lindqvist e Manfredi [13] e mostrar que funções infinito harmônicas são Lipschitz contínuas, e mostrar a regularidade $C^{1,\frac{1}{3}}$ obtida em [1].

4.1 Regularidade Lipschitz

Nesta seção, vamos mostrar que soluções de 4.1 são Lipschitz contínua. Para isto considere $d(x) = dist(x, \partial U)$ e vamos provar a seguinte desigualdade de Harnack devido a Lindqvist e Manfredi,

Teorema 4.1. *Seja $u \leq 0$ solução de* (4.1)*. Se $z \in U$ e $0 < R < d(z)$ então*

$$u(x) \leq \exp\left(-\frac{|x-y|}{d(z)-R}\right) u(y),$$

para todo $x, y \in B_R(z)$.

Demonstração. Sejam $x, y \in B_R(z)$ e m um número natural, definimos então

$$x_k = x + k\frac{y-x}{m}$$

para $k = 0, ..., m$. Note que $x_0 = x$ e $x_m = y$, todos os outros pontos estão na reta que ligam x a y e portanto estão dentro de $B_R(z)$ e satifazem $d(x_{k+1}) \geq d(z) - R$. Além disto temos que

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{|x-y|}{m} < d(z) - R$$

para m grande o suficiente, pois $d(z) - R > 0$ e portanto

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{|x-y|}{m} < d(x_{k+1})$$

Desde que u satisfaz CCC, pelo lema ... temos que vale

$$u(z_1) \leq u(z_2) + \max_{w \in \partial B_r(z_2)} \left(\frac{u(w) - u(z_2)}{r} \right) |z_1 - z_2|,$$

para $z_1 \in B_r \subset\subset U$. Se fizermos $r \to d(z_2)$ e como $u \leq 0$ temos que

$$u(z_1) \leq u(z_2) \left(1 - \frac{|z_1 - z_2|}{d(z_2)} \right).$$

Agora tomando $z_1 = x_k$ e $z_2 = x_{k+1}$ temos

$$u(x_k) \leq u(x_{k+1}) \left(1 - \frac{|x_k - x_{k+1}|}{d(x_{k+1})} \right)$$

e portanto

$$u(x_k) \leq u(x_{k+1}) \left(1 - \frac{|x-y|}{m(d(z) - R)} \right).$$

Iterando esta desigualdade obtemos

$$u(x) = u(x_0) \leq u(y) \left(1 - \frac{|x-y|}{m(d(z) - R)} \right)^m$$

e fazendo $m \to \infty$ concluimos o resultado. □

Teorema 4.2. *Se $u \in C(U)$ é infinita harmônica, então é localmente Lipschitz.*

Demonstração. Suponha que u é infinita harmônica. Logo, u satisfaz CCC. Tome $z \in U$, $R < d(z)/4$ e $x, y \in B_R(z)$. Assuma primeiro que $u \leq 0$. Pela desigualdade de Harnack, temos que

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq -u(y)\frac{|x-y|}{d(y)} \\ &\leq -\inf_{B_R(z)} u \frac{|x-y|}{3R} \\ &\leq -\sup_{B_R(z)} u \frac{|x-y|}{R}. \end{aligned}$$

Se $u \geq 0$, então o argumento anterior vale para

$$v = u - \sup_{B_{4R}(z)} u \leq 0,$$

uma vez que $v = u + c$, com c constante, satisfaz CCC. Assim,

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= v(x) - v(y) \\ &\leq -\sup_{B_R(z)} v \frac{|x-y|}{R} \\ &\leq \left(\sup_{B_{4R}(z)} u - \sup_{B_R(z)} u \right) \frac{|x-y|}{R}. \end{aligned}$$

Agora, trocando x por y e usando o mesmo argumento, concluimos que

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{R} \left(\sup_{B_{4R}(z)} u - \sup_{B_R(z)} u \right) |x-y|.$$

□

Combinando os Teoremas de Rademacher e o anterior, obtemos o seguinte corolário

Corolário 4.3. *Se $u \in C(U)$ é infinita harmônica, então u é diferenciável em quase todos os pontos.*

4.2 Regularidade $C^{1,\alpha}$ para Funções Infinitas Harmônicas

Nesta seção, mostraremos duas aplicações Teorema 3.1. A primeira aplicação é baseada no Exemplo 2.2, onde garantimos que a máxima regularidade do infinito Laplaciano é $C^{1,\frac{1}{3}}$. Agora, vamos generalizar para qualquer função infinita harmônica com variáveis separáveis, isto é,

Teorema 4.4. *Seja $u : B_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função infinita harmônica. Assuma que existem funções $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde cada $u_i \in C(\mathbb{R})$, com $i = 1, \ldots, n$ tais que*

$$u(x) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n).$$

Então, $u \in C^{1,\frac{1}{3}}(B_{1/2})$.

Demonstração. Inicialmente, veja que

$$\nabla u = (u_1', \ldots, u_n')$$

e

$$\begin{aligned}
D^2u &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{1x_1x_1} & u_{1x_1x_2} & \cdots & u_{1x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{nx_nx_1} & u_{nx_nx_2} & \cdots & u_{nx_nx_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1'' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_\infty u \\
&= \left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u \right\rangle \\
&= \langle (u_1'' u_1', \ldots, u_n'' u_n'), (u_1', \ldots, u_n') \rangle \\
&= u_1''.|u_1'|^2 + \ldots + u_n''.|u_n'|^2.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$-u_1''.|u_1'|^2 = u_2''.|u_2'|^2 + \ldots + u_n''.|u_n'|^2.$$

Observe que a parte esquerda da igualdade anterior depende somente de x_1, mas a parte direita da igualdade não depende de x_1. Então, concluimos que

$$u_1''|u_1|^2 = c_1,$$

onde c_1 é constante. Logo, pelo Teorema 3.1, temos que $u_1 \in C^{1,\frac{1}{3}}$.

Uma vez que esse argumento vale para todo $i = 1, \ldots, n$, concluimos que cada $u_i \in C^{1,\frac{1}{3}}$. Portanto, $u \in C^{1,\frac{1}{3}}$ □

Como uma segunda aplicação, vamos considerar $u \in C(U)$ como sendo uma função radial. Neste caso, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.5. *Seja $u \in C(B_1)$ satisfazendo*

$$\Delta_\infty u = f(x),$$

com $f \in L^\infty(B_1)$. Assuma que u é radial. Então $u \in C^{1,\frac{1}{3}}$.

Demonstração. Suponha que u é uma função redial, isto é, u é da forma

$$u(x) = v(r),$$

onde $r = \|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Primeiro, para $i = 1, \ldots, n$, tem-se que

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Além disso,

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \quad \text{e} \quad u_{x_i x_j} = v''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} - v'(r)\left(\frac{x_i x_j}{r^3}\right).$$

Logo,

$$\nabla u = \frac{v'(r)}{r}x \quad \text{e} \quad D^2 u = \frac{v''(r)}{r^2} X \otimes X + \frac{v'(r)}{r} Id - \frac{v'(r)}{r^3} X \otimes X.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty u &= \left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{v''(r)}{r^2} X \otimes X + \frac{v'(r)}{r} Id - \frac{v'(r)}{r^3} X \otimes X\right)\left(\frac{v'(r)}{r}x\right), \left(\frac{v'(r)}{r}x\right) \right\rangle \\
&= \frac{|v'(r)|^2}{r^2} \left\langle \left(\frac{v''(r)}{r^2} X \otimes X + \frac{v'(r)}{r} Id - \frac{v'(r)}{r^3} X \otimes X\right)(x), x \right\rangle \\
&= \frac{|v'(r)|^2 v''(r)}{r^4} \langle (X \otimes X)(x), x \rangle + \frac{|v'(r)|^3}{r^3}\langle x, x\rangle - \frac{|v'(r)|^3}{r^5}\langle (X \otimes X)(x), x\rangle \\
&= |v'(r)|^2 v''(r) + \frac{|v'(r)|}{r} - \frac{|v'(r)|}{r} \\
&= |v'(r)|^2 v''(r).
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\Delta_\infty u = f(x),$$

com $f \in L^\infty(B_1)$. Logo,

$$|v'(r)|^2 v''(r) = f(x).$$

Portanto, concluimos que $u \in C^{1,\frac{1}{3}}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Araújo, D.; Ricarte, G; Teixeira, V. *Geometric gradient estimates for solutions to degenerate elliptic equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **53** (2015), 605-625.

[2] Caffarelli, L. *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*. Ann. of Math. (2) **130** (1989), no. 1, 189-213.

[3] Caffarelli, L.; Xavier, C. *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **43**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[4] Crandall, M; Evans, L.; Gariepy, R. *Optimal Lipschitz extensions and the infinity laplacian*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **13** (2001), 123-139.

[5] Evans, L.; Savin, O. $C^{1,\alpha}$ *regularity for infinity harmonic functions in two dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **32** (2008), 325-347.

[6] Evans, L.; Smart, C. *Everywhere differentiability of infinity harmonic functions*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **42** (2011), 289-299.

[7] Imbert, C. *Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations*, J. Differential Equations, **250** (2011), 1553-1574.

[8] Imbert, C.; Silvestre, L. $C^{1,\alpha}$ *regularity of solutions of degenerate fully nonlinear elliptic equations.*. Advances in Mathematics, 233 (2012) 196-206

[9] Ishii, H.; Lions, P. *Viscosity solutions of fully nonlinear secondorder elliptic partial differential equations*, J. Differential Equations, **83** (1990), 26-78.

[10] Jensen, R. *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal. **123** (1993), 51-74.

[11] Koike, S. *A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions*. 2nd ed (2010).

[12] Krylov, N.; Safonov, M. *A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **44**:1 (1980), 161-175; Math. USSR-Izv., **16**:1 (1981), 151-164.

[13] Lindqvist, P.; Manfredi, J. *The Harnack inequality for ∞-harmonic function*, Electron. J. Differential Equations (1995), No. 04, 1-5.

[14] Mariano, G. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 105 (2016)

[15] Savin, O. C^1 *regularity for infinity harmonic functions in two dimensions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **176** (2005), 351-361.

[16] Teixeira, V. *Regularity for quasilinear equations on degenerate singular sets*, Math.Ann. **211** (2014), 911-927.

[17] Urbano, J. *An introduction to the infinity-Laplacian*, Short course, 2017.