

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

ARIANE PINTO DANTAS

**ÁLGEBRAS DE EXPLOSÃO DE
CERTOS IDEAIS MONOMIAIS**

São Cristóvão, SE
2021.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**ÁLGEBRAS DE EXPLOSÃO DE
CERTOS IDEAIS MONOMIAIS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Ariane Pinto Dantas

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, SE
2021.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

D192a Dantas, Ariane Pinto
Álgebras de explosão de certos ideais monomiais / Ariane Pinto
Dantas ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão, 2021.
54 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Álgebra. I. Ramos, Zaqueu Alves orient. II.
Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Álgebras de explosão de certos ideais monomiais

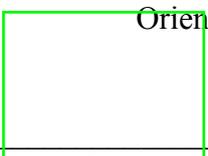
por

Ariane Pinto Dantas

Aprovada pela banca examinadora:



Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador



Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez - USP
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB
Segundo Examinador



Prof. Dra. Rannelly Cunha de Medeiros - IFRN
Terceiro Examinador

São Cristóvão, 31 de Janeiro de 2022

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, por mais essa conquista.

Agradeço em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Zaqueu Alvez Ramos, obrigada pela paciência, pelo incentivo, pelos conselhos, pela força, pelo carinho e atenção.

Agradeço aos meus pais, Arielson Santana Dantas e Ivone Pinto dos Santos, pois sempre estiveram do meu lado, acompanhando cada momento, me ajudando sem medir esforços. Obrigada meus pais, por cada palavra de carinho, por todo amor, atenção e preocupação.

Ao meu irmão Fernando Alberto, que é uma das pessoas mais admiráveis que conheço, obrigada, meu irmão por todo carinho, amor, compreensão e apoio.

Ao meu esposo Filipe Silva, que esteve do meu lado durante toda a graduação e durante todo este mestrado, sempre me apoiando, com toda paciência e compreensão. Obrigada amor, por cada palavra carinhosa, me ajudando a seguir em frente.

Agradeço a Antônio Téofilo, foi o meu professor durante toda a graduação e se tornou um grande amigo. Sempre me apoiando, com palavras de ânimo e de carinho.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial o Prof. Angelo Alberti, Arlucio Viana, Danilo da Silva, Disson dos Prazeres, Fabio dos Santos, Humberto Viglioni e Samuel Canevari.

As minhas colegas do mestrado: Fabiola Argollo e Liliane Batista. Saibam que jamais esquecerei os momentos que compartilhamos. Foi bom poder contar com vocês!

Aos professores Rainelly de Medeiros, Ricardo Macedo e Victor Hugo Pérez, por participarem da banca. Obrigada, pela atenção, pelo interesse e disponibilidade.

Agradeço também a CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação estudamos as álgebras de explosão de ideais monomiais em anéis de polinômios em três variáveis. Trabalhamos com a hipótese de que a matriz de sizígias desses ideais é do tipo Hilbert-Burch com entradas lineares e que a quantidade de primos mínimos é 2. Com essas hipóteses provamos que a matriz de sizígias possui um formato canônico. Finalmente, discutimos as álgebras de explosão com maiores detalhes para alguns formatos canônicos bem estruturados.

Palavras Chave: Álgebra de Rees, fibra especial, sizígias, álgebra graduada.

ABSTRACT

In this dissertation we study the blowup algebras of monomial ideals over a polynomial ring in three variables. We deal with the hypotheses that the syzygy matrix of those ideals are of Hilbert-Burch type with linear entries and, moreover, these ideals have exactly 2 minimal primes. From these hypotheses, we proved that the syzygy matrix have a canonical format. Finally, we present a detailed discussion on blowup algebras for some well-structured canonic formats.

Key-words: Rees algebra, special fiber, syzygies, and graduated algebra.

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
$\ker \varphi$	núcleo de um homomorfismo φ
$\text{Im } \varphi$	imagem de um homomorfismo φ
$\mathcal{R}(I)$	álgebra de Rees de um ideal I
$\mathcal{F}(I)$	fibra especial de um ideal I
$\text{ht } I$	altura de um ideal I
$\ell(I)$	analytic spread de um ideal I
I_i	componente homogênea (ou parte homogênea) de grau i do ideal I
Z	sizígia de M
$\mathcal{K}(f)$	sizígia de Koszul
e_i	i -ésimo vetor da base canônica de um módulo livre de posto finito.
\mathcal{J}	ideal de apresentação
$I_t(\Psi)$	ideal gerado pelos menores de ordem t de uma matriz Ψ
$\text{Supp}(M)$	suporte do módulo M
$\text{Ass}_A(M)$	conjunto dos primos associados do módulo M
$\text{posto}(\Psi)$	posto de uma matriz Ψ
$\dim M$	dimensão de Krull do módulo M
$\text{grade}(I, M)$	grade do ideal I sobre o módulo M
$\mu(M)$	número mínimo de geradores do módulo M
$\mathcal{Z}_A(M)$	conjunto dos divisores de zero de um A -módulo M
$\text{Min}_A(M)$	coleção dos primos associados mínimos de M
$\text{prof}_A(M)$	profundidade de M
Θ	matriz jacobiana
$J_{R/\mathbb{K}}$	ideal jacobiano de R sobre \mathbb{K}

Conteúdo

1	Álgebras Graduadas	13
1.1	Definições básicas	13
1.2	Álgebras bi-graduadas	17
2	Sizígias	19
2.1	Sequências exatas	19
2.2	Apresentação livre	20
2.3	Resolução livre	24
3	Álgebras de explosão	26
3.1	A álgebra de Rees	26
3.2	A fibra especial	29
3.3	Álgebra de Rees bi-graduada	30
4	Resultados Principais	33
4.1	Ideais monomiais com dois primos mínimos	33
4.2	Casos de estudo	35
4.2.1	Modelo alternante	35
4.2.2	Modelo separante (simplificado)	38
5	Apêndice	41
5.1	Primos associados e decomposição primária	41
5.2	A dimensão de Krull	44
5.3	Sequência regular e módulos Cohen-Macaulay	46
5.3.1	Sequência regular	46
5.3.2	Módulos e anéis Cohen-Macaulay	47
5.4	Ideais de menores de matrizes 1-genéricas	48
5.5	Anéis normais	49
5.6	O critério de normalidade	51

5.7 Critério jacobiano 51

Introdução

Sejam A um anel e I um ideal de A . Duas álgebras importantes associadas a esses dados são:

- A álgebra de Rees de I : $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n t^n$
- A fibra especial de I : $\mathcal{F}(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ (aqui estamos supondo A um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} ou ideal graduado standard com ideal maximal homogêneo \mathfrak{m}).

Essas álgebras são usualmente chamadas de *álgebras de explosão*. Essa terminologia é justificada pelo fato delas serem realizações algébricas de objetos geométricos associados ao processo de *blowing-up* de uma variedade ao longo de uma subvariedade.

A literatura sobre as álgebras de explosão é vasta e desperta o interesse dos mais proeminentes pesquisadores da álgebra comutativa. Problemas típicos abordados no estudo dessas álgebras incluem a identificação de propriedades (normalidade, Cohen-Macaulay, Gorenstein, etc) e a determinação de suas equações de definição. Um fato marcante sobre essas álgebras, e que as colocam em relevo sua importância, é o seu aparecimento em outras áreas tais como geometria algébrica, modelagem geométrica, combinatória e desenho geométrico auxiliado por computador.

Apesar do grande volume de informações produzidos ao longo dos anos sobre as álgebras de explosão muitas questões permanecem em aberto. Por exemplo, para um ideal I de altura dois, gerado pelos menores máximos de uma matriz com entradas lineares em um anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ as álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ são bem compreendidas quando o ideal satisfaz a seguinte condição, chamada de condição G_n :

$$\mu(I_P) \leq \text{ht } P \text{ para todo ideal primo } P \supset I \text{ com } \text{ht } P \leq n - 1.$$

(ver [14]). Todavia, a condição G_n é muito forte e exclui diversos exemplos interessantes de ideais. Nesse contexto, uma vertente que tem atraído a atenção de alguns pesquisadores tem a ver com a superação dessa condição (ver [6], [15] e [16]).

Em três variáveis uma classe importante de ideais em que a condição G_3 se faz bastante restritiva é a dos ideais monomiais de altura 2 gerado pelos menores máximos de uma matriz com entradas lineares. Como muito é conhecido sobre ideais monomiais seria natural entender o que acontece

nesse caso. Em [6] os autores investigam esse caso e, como pode ser notado em tal referência, mesmo nessas condições o problema se mostra bastante árduo.

Nesta dissertação nosso objetivo é estudar os resultados de [6] concernente ao caso monomial. Para isso, dividimos o trabalho em 5 capítulos os quais passamos a descrever a partir de agora.

Uma das características mais elementares das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ tem a ver com a noção de *álgebra graduada*. Assim, no capítulo 1 nos ocupamos em discutir em torno desse conceito.

Um ingrediente fundamental para entender as equações que geram os ideais de apresentação das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ são as sizígias do ideal I . Desse modo, fazemos no capítulo 2 uma abordagem sobre sizígias. Um dos principais resultados nesta parte do trabalho é o celebrado teorema de Hilbert-Burch.

No terceiro capítulo apresentamos as definições das álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$. Explicamos nesta parte como os conceitos vistos nos capítulos 1 e 2 se acomodam no estudo das álgebras de explosão.

No quarto capítulo apresentamos os principais resultados do trabalho. Inicialmente, demonstramos que a matriz de sizígias dos ideais que estamos interessados em investigar possui um formato canônico módulo mudança invertível de variáveis e operações elementares linha/coluna. Em seguida, usando esse formato canônico demonstramos algumas propriedades sobre as álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ para alguns modelos especiais.

O quinto e último capítulo, que pode ser omitido por um leitor mais experiente, contém um breve apanhado sobre conceitos e resultados gerais de álgebra comutativa.

Capítulo 1

Álgebras Graduadas

Os principais objetos de estudo nesta dissertação são as *álgebras de explosão* de um ideal. Elas são álgebras produzidas a partir de um par (A, I) , onde A é um anel e I é um ideal de A . Para qualquer par (A, I) estas álgebras são concebidas com uma estrutura de *A -álgebras graduadas* e, sobre hipóteses adicionais no par (A, I) , elas podem ser pensadas como *A -álgebra bi-graduadas*. Essas características intrínsecas das álgebras de explosão são vitais em seus estudos. O objetivo desse capítulo é fornecer alguns preliminares sobre os conceitos de álgebras graduadas e bi-graduadas que serão pertinentes para a discussão que faremos em torno das álgebras de explosão.

1.1 Definições básicas

Seja A um anel. Uma *A -álgebra \mathbb{Z} -graduada* é uma A -álgebra S com uma decomposição em soma direta de grupos aditivos

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i \quad (1.1)$$

tal que $S_0 = A$ e $S_i S_j \subset S_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Observe, em particular, que cada S_i é um A -módulo. Cada A -módulo S_i é chamado de *componente* ou *parte homogênea de grau i* de S . A decomposição (1.1) é chamada de uma *\mathbb{Z} -graduação* de S . Cada elemento $a \in S_i$ é chamado de *elemento homogêneo de grau i* (usaremos a notação $\deg a := i$ para dizer que a é elemento homogêneo de grau i). Segue por definição que cada elemento $b \in S$ se escreve de forma única como soma finita de elementos homogêneos, ou seja,

$$b = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

onde cada a_i é homogêneo de grau i unicamente determinado.

Observação 1.1.1. A definição acima pode ser realizada de forma mais geral. Ou seja, em vez de

considerar uma álgebra \mathbb{Z} -graduada poderíamos considerar uma álgebra \mathbb{M} -graduada onde \mathbb{M} é um monóide. Embora exista esse conceito mais geral, na presente dissertação as álgebras estudadas serão apenas as \mathbb{Z} -graduadas.

Exemplo 1.1.2. Sejam A um anel e S o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n]$. Para cada n -upla de inteiros (d_1, \dots, d_n) , e para cada $i \in \mathbb{Z}$ defina S_i sendo o A -módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ tais que $\alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n = i$. Temos que

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$$

é uma S_0 álgebra \mathbb{Z} -graduada tal que $A \subset S_0$ e $\deg x_i = d_i$ ($1 \leq i \leq n$). Pode ser demonstrado que esta é a única \mathbb{Z} -gradação do anel de polinômios S com essa propriedade. Observe que quando $d_1, \dots, d_n \geq 0$ então $A = S_0$. Além disso, quando $d_1 = \dots = d_n = 1$ temos a gradação usual do anel de polinômios $S = A[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 1.1.3. Seja A um anel. Considere o anel de polinômios $S = A[x_1, x_2, x_3, x_4]$ equipado com a gradação do Exemplo 1.1.2. Seja

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2 + x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_3^3 x_4^2 + x_3 + x_4^2 + 6$$

um polinômio de S . A decomposição de f como soma de elementos homogêneos é:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$$

onde $f_0 = 6$, $f_1 = x_3$, $f_2 = x_3 x_4 + x_4^2$, $f_3 = x_1^2 x_2 + x_2 x_3 x_4$, $f_4 = 0$ e $f_5 = x_3^3 x_4^2$.

Entre as álgebras graduadas, são de interesse especial as da seguinte definição.

Definição 1.1.4. Seja \mathbb{K} um corpo. Uma \mathbb{K} -álgebra

$$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$$

é chamada de \mathbb{K} -álgebra graduada standard se $S_i = 0$ para $i < 0$ e S é gerada como \mathbb{K} -álgebra pela parte homogênea de grau 1 (i.e., $S = \mathbb{K}[S_1]$).

Dada uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ diremos que um ideal I de S é um *ideal homogêneo* (ou *ideal graduado*) se $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i)$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, chamaremos o A -módulo $I \cap S_i$ de componente homogênea (ou parte homogênea) de grau i do ideal I e a denotaremos por I_i .

Uma caracterização muito útil para saber quando um ideal de uma anel graduado é homogêneo é fornecida pela seguinte proposição.

Proposição 1.1.5. *Sejam A um anel e $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada. Se I é um ideal de S então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) I é um ideal homogêneo;
- (b) I contém um conjunto de geradores formado por elementos homogêneos.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Fazendo $B = \bigcup S_i \cap I$ segue que B é um conjunto formado por elementos homogêneos e que gera I .

(b) \Rightarrow (a) Digamos que B é um conjunto de geradores homogêneos de I . Precisamos provar que $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i)$. A inclusão $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (I \cap S_i) \subset I$ é imediata. Para a inclusão contrária, considere $\alpha \in I$. Temos que α se escreve de forma única como $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$, onde n é um certo número natural e $\alpha_i \in S_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por outro lado, usando o fato de que B gera I temos

$$\alpha = a_0 b_0 + \dots + a_m b_m \quad (1.2)$$

onde $a_i \in S$ e $b_i \in B$ para cada $1 \leq i \leq m$. Como podemos inserir em (1.2) parcelas da forma $a \cdot 0$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que cada b_i é elemento homogêneo de grau i . Escrevamos cada coeficiente a_i de (1.2) da seguinte maneira

$$a_i = \sum_{j=0}^{s_i} a_{ij}$$

onde $a_{ij} \in S_j$. Então,

$$\alpha = \left(\sum_{j=0}^{s_1} a_{0j} \right) b_0 + \dots + \left(\sum_{j=0}^{s_m} a_{mj} \right) b_m = \left(\sum_{i+j=0} a_{ij} b_i \right) + \left(\sum_{i+j=1} a_{ij} b_i \right) + \dots$$

Pela unicidade da escrita de α como soma de elementos homogêneos segue que

$$\alpha_0 = \sum_{i+j=0} a_{ij} b_i, \dots, \alpha_n = \sum_{i+j=n} a_{ij} b_i.$$

Em particular, cada $\alpha_i \in I \cap S_i$. Logo, $\alpha \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} I \cap S_i$. Portanto, $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} I \cap S_i$ como queríamos provar. \square

Um tipo de ideal homogêneo muito importante nesse trabalho são os *ideais monomiais* cuja definição é dada da seguinte maneira:

Definição 1.1.6. Sejam \mathbb{K} um corpo e A um anel de polinômios em n variáveis com coeficiente em \mathbb{K} com sua graduação usual. Um ideal de A que pode ser gerado por um conjunto de monômios é chamado de *ideal monomial*

Sintetizamos abaixo algumas propriedades sobre ideais monomiais que serão úteis nesta dissertação.

Teorema 1.1.7. *Sejam \mathbb{K} um corpo e A um anel de polinômios em n variáveis com coeficiente em \mathbb{K} com sua graduação usual. Suponha I um ideal monomial gerado por monômios m_1, \dots, m_r . Então*

(a) *Os primos associados de A/I são ideais primos gerados por variáveis.*

(b) *Se M é um monômio em I então M é múltiplo de m_i para algum $1 \leq i \leq r$*

Demonstração. Ver [9, Corollary 1.3.9] para o item (a) e [9, Proposition 1.1.5] para o item (b). \square

Observe que dados uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada S e um ideal homogêneo I de S temos que o anel quociente S/I tem estrutura natural de A -álgebra graduada dada pela decomposição:

$$S/I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i/I_i$$

Definição 1.1.8. Sejam $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ duas álgebras \mathbb{Z} -graduadas. Um homomorfismo de A -álgebras $\varphi : S \rightarrow R$ é chamado um *homomorfismo de A -álgebras graduadas* se preserva grau, ou seja, se $\varphi(S_i) \subset R_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.9. Seja $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada. Dada uma A -subálgebra S' de S , denotemos $S'_i = S_i \cap S'$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dizemos que S' é uma *A -subálgebra \mathbb{Z} -graduada* se $S' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S'_i$ e $S'_i S'_j \subset S'_{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$.

Naturalmente, uma A -subálgebra \mathbb{Z} -graduada é em si uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada.

Exemplo 1.1.10. Seja $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ uma A -álgebra \mathbb{Z} -graduada. Suponha b_1, \dots, b_n elementos homogêneos de S de grau d . A A -subálgebra $S' = A[b_1, \dots, b_n]$ de S é um A -subálgebra \mathbb{Z} -graduada de S . De fato, seja $g \in A[b_1, \dots, b_n]$. Então, $g = f(b_1, \dots, b_n)$ para algum $f \in A[x_1, \dots, x_n]$. Escrevamos f como soma de polinômios homogêneos

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_r.$$

Avaliando f nos geradores b_1, \dots, b_n temos que

$$f(b_1, \dots, b_n) = f_0(b_1, \dots, b_n) + f_1(b_1, \dots, b_n) + f_2(b_1, \dots, b_n) + \dots + f_r(b_1, \dots, b_n)$$

Notadamente, $f_i(b_1, \dots, b_n) \in S_{id} \cap A[b_1, \dots, b_n]$ para cada $1 \leq i \leq r$ e isso nos permite concluir a igualdade $S' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S'_i$

Proposição 1.1.11. *Sejam $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ duas A -álgebras \mathbb{Z} -graduadas e $\varphi : S \rightarrow R$ um homomorfismo de A -álgebras graduadas. Então:*

- (a) $\text{Im} \varphi$ é A -subálgebra \mathbb{Z} -graduada de R .
- (b) $\ker \varphi$ é um ideal homogêneo de S .

Demonstração. (a) A inclusão $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im} \varphi) \subset \text{Im} \varphi$ é imediata. Assim, resta-nos mostrar a inclusão contrária. Para isso, considere x um elemento na imagem de φ . Então, $x = \varphi(r)$ para algum r em S . Como S é A -álgebra graduada, podemos escrever r da seguinte maneira:

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_s$$

onde, $r_i \in S_i$ para cada $1 \leq i \leq s$. Em particular,

$$x = \varphi(r) = \varphi(r_0) + \varphi(r_1) + \dots + \varphi(r_s),$$

pois φ é homomorfismo. Além disso, como φ é homomorfismo de A -álgebras \mathbb{Z} -graduadas, temos $\varphi(r_i) \in R_i$ para cada $1 \leq i \leq s$. Logo, $x \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im} \varphi)$. Portanto, também temos a inclusão $\text{Im} \varphi \subset \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap \text{Im} \varphi)$, o que nos permite concluir a afirmação desejada.

(b) Seja $r = r_0 + r_1 + \dots + r_s \in \ker \varphi$, com $r_i \in S_i$. Então:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0 + r_1 + \dots + r_s) = 0$$

Como φ é homomorfismo de A -álgebras graduadas temos que:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + \varphi(r_1) + \dots + \varphi(r_s) = 0$$

Assim, $\varphi(r_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, pois a soma é direta. Desse modo, concluímos o desejado. \square

1.2 Álgebras bi-graduadas

Seja A um anel. Uma A -álgebra bi-graduada é uma A -álgebra S com uma decomposição em soma direta de grupos aditivos

$$S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_{(i,j)} \tag{1.3}$$

tal que $S_{(0,0)} = A$ e $S_{(i,j)} S_{(i',j')} \subset S_{(i+i',j+j')}$ para cada $(i,j), (i',j') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2.1. Sejam A um anel e S o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ (onde $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ são dois conjuntos de variáveis disjuntos). Dados

$$(d_1, d'_1), \dots, (d_n, d'_n), (e_1, e'_1), \dots, (e_m, e'_m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

defina $S_{(i,j)}$ sendo o A -módulo gerado por todos os monômios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}$ tais que

$$\alpha_1(d_1, d'_1) + \cdots + \alpha_n(d_n, d'_n) + \beta_1(e_1, e'_1) + \cdots + \beta_m(e_m, e'_m) = (i, j).$$

Temos que

$$S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_{(i,j)}$$

é uma S_0 álgebra bi-graduada tal que (i) $A \subset S_{(0,0)}$, (ii) $\deg x_i = (d_i, d'_i)$ ($1 \leq i \leq n$) e (iii) $\deg y_i = (e_i, e'_i)$ ($1 \leq i \leq m$). Pode ser demonstrado que esta é a única bi-graduação do anel de polinômios S satisfazendo (i), (ii) e (iii). Quando $\deg x_i = (1, 0)$ ($1 \leq i \leq n$) e $\deg y_i = (0, 1)$ ($1 \leq i \leq m$) temos a bi-graduação usual do anel de polinômios S .

Os conceitos e resultados sobre álgebras bi-graduadas se assemelham aos que tínhamos para álgebras graduadas. Podemos falar por exemplo de: componente bi-homogênea, elemento bi-homogêneo, ideais bi-homogêneos, homomorfismos de álgebras bi-graduadas, etc.

Para efeito de citação, enunciamos a seguinte proposição cuja demonstração é uma simples adaptação da prova da Proposição 1.1.11.

Proposição 1.2.2. *Sejam $S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} S_i$ e $R = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} R_i$ duas A -álgebras bi-graduadas e $\varphi : S \rightarrow R$ um homomorfismo de A -álgebras bi-graduadas. Então:*

- (a) $\text{Im} \varphi$ é A -subálgebra bi-graduada de R .
- (b) $\ker \varphi$ é um ideal bi-homogêneo de S .

Capítulo 2

Sizígias

No estudo das álgebras de explosão um conceito muito importante é o de *sizígia*. É através da matriz de sizígias que obtemos uma primeira aproximação para o ideal de definição da álgebra de Rees. Nesse capítulo apresentaremos diversos conceitos e resultados relacionados a noção de sizígia com ênfase em especial ao *teorema de Hilbert-Burch*. Esse é um resultado central nesse trabalho pois fornece a estrutura dos ideais que iremos abordar.

2.1 Sequências exatas

Definição 2.1.1. *Seja A um anel. Uma sequência finita ou infinita de homomorfismos de A -módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots$$

é chamada de sequência exata se $\text{Im}\varphi_{i+1} = \ker \varphi_i$ para cada i .

Alguns fatos básicos sobre sequências exatas estão contidos na seguinte proposição.

Proposição 2.1.2. *Sejam M e N módulos sobre o anel A . Então:*

- (a) *A sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ é exata se, e somente se, φ é homomorfismo injetor.*
- (b) *A sequência $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, φ é homomorfismo sobrejetor.*
- (c) *A sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, φ é isomorfismo.*

Demonstração. (a) Suponhamos que a sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ seja exata, assim, observe que o mapa do módulo nulo tem imagem zero, logo $\ker(\varphi) = 0$. Portanto φ é homomorfismo injetor. Reciprocamente, suponhamos que φ seja homomorfismo injetor, então seu núcleo é o módulo nulo, ou seja, é igual a imagem do homomorfismo do módulo nulo em M . Logo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ é uma sequência exata.

(b) Seja $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ uma sequência exata, logo a imagem de φ é o núcleo do homomorfismo de N em 0 . Mas o núcleo desse homomorfismo é todo o N , logo $\text{Im}(\varphi) = N$. Portanto φ é sobrejetor. Reciprocamente, suponhamos que φ seja um homomorfismo sobrejetor. Observe que do homomorfismo nulo é N , desde que φ é sobrejetor temos que $\text{Im}(\varphi) = N$, logo $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata.

(c) Em (a) e (b) provamos que φ é homomorfismo injetor e sobrejetor, logo φ é isomorfismo. \square

2.2 Apresentação livre

Definição 2.2.1. Seja M um A -módulo. Uma *apresentação livre* de M é uma sequência exata

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde F_1 e F_0 são A -módulos livres.

Uma pergunta óbvia é se todo módulo admite uma apresentação livre. A resposta para essa questão é o conteúdo do seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Todo A -módulo possui uma apresentação livre.*

Demonstração. Seja M um A -módulo considere S um conjunto de geradores para M . Defina F_0 sendo o A -módulo livre cujos elementos da base são indexados pelos elementos de S . Digamos que $\{e_s\}_{s \in S}$ seja uma base para F_0 . Então, podemos considerar o seguinte homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : F_0 \twoheadrightarrow M, e_s \mapsto s$$

Assim, pela Proposição 2.1.2(b), temos estabelecido a seguinte sequência exata:

$$F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

Agora consideremos $Z := \ker \varphi_0 \subset F_0$. Repetindo o argumento anterior, substituindo M por Z , podemos encontrar um homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow Z \subset F_0$$

onde F_1 é um A -módulo livre com base indexada por um conjunto de geradores de Z . Com isso, temos que a sequência

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é exata com F_1 e F_0 sendo A -módulo livres. Portanto, o resultado segue. \square

Nesse trabalho estamos particularmente interessados na situação em que A é um anel Noetheriano e M é A -módulo finitamente gerado (portanto, também Noetheriano). Nesse contexto, na prova da proposição acima poderíamos ter suposto M e Z gerados por conjuntos finitos $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $S' = \{u_1, \dots, u_m\}$, respectivamente. Assim, a apresentação livre de M se escreve como:

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Portanto, para módulos finitamente gerados sobre anéis Noetherianos sempre teremos uma apresentação em que os módulos livre são de posto finito.

Notação: Doravante, utilizaremos e_i para denotar o i -ésimo vetor da base canônica de um módulo livre de posto finito. Mesmo quando estivermos lidando com dois A -módulos livres não faremos distinção de letra. Tipicamente, ficará bem entendido pelo contexto qual módulo livre e_i pertence.

Na sequência exibiremos dois exemplos para explicar na prática como apresentações livres podem ser obtidas.

Exemplo 2.2.3. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y]$. Considere o ideal $I = \langle x, y \rangle \subset A$. De acordo com o que vimos acima, para obter uma apresentação livre de I consideramos inicialmente o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_0 : A^2 \twoheadrightarrow I, \quad e_1 \mapsto x, \quad e_2 \mapsto y$$

Em seguida calculamos geradores para $Z := \ker \varphi_0$. No caso presente, afirmamos que $Z = \langle (y, -x) \rangle$. Observamos que a inclusão $Z \supset \langle (y, -x) \rangle$ é imediata. Para, mostrar a inclusão contrária, considere $u = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z$. Então, $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$. Equivalentemente, $\alpha_1 x = -\alpha_2 y$. Dessa igualdade e do fato que y é elemento primo em A segue que $\alpha_1 = py$ para algum $p \in A$. Fazendo a substituição de $\alpha_1 = py$ na igualdade $\alpha_1 x = -\alpha_2 y$ e efetuando os devidos cancelamentos obtemos $\alpha_2 = -px$. Logo, $u = p \cdot (y, -x)$, ou seja, $u \in Z$. Como consequência, $Z = \langle (y, -x) \rangle$ conforme afirmado. Em particular,

$$\varphi_1 : A^1 \longrightarrow A^2, \quad 1 \longmapsto (y, -x).$$

é um homomorfismo cuja imagem é $\ker \varphi_0$. Portanto, uma apresentação livre de I é

$$A^1 \xrightarrow{\varphi_1} A^2 \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0$$

Exemplo 2.2.4. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subset A$. Assim como no exemplo anterior, iniciamos considerando o homomorfismo

sobrejetor

$$\varphi_0 : A^3 \twoheadrightarrow I, \quad e_1 \mapsto xy, \quad e_2 \mapsto xz, \quad e_3 \mapsto yz.$$

Nesse caso, dado $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$ temos $\varphi_0(u) = \alpha xy + \beta xz + \gamma yz$. Afirmamos que $Z := \ker \varphi_0$ é gerado pelos vetores $v_1 = (0, y, -x)$ e $v_2 = (z, 0, -x)$. A inclusão $\langle v_1, v_2 \rangle \subset Z$ é um cálculo direto. Para a inclusão contrária considere $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in Z$. Então $\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$. Equivalentemente, $\alpha xy = -z(\beta x + \gamma y)$. Como z é elemento primo de A segue que $\alpha = pz$ para algum $p \in A$. Substituindo essa expressão de α na igualdade $\alpha xy = -z(\beta x + \gamma y)$ e efetuando os devidos cancelamentos obtemos $pxy = -\beta x - \gamma y$. Por conseguinte, essa igualdade pode ser reescrita como $\beta x = -y(px + \gamma)$. Agora, dessa igualdade e da primalidade de y em A segue que $\beta = qy$ para algum $q \in A$. Substituindo essa expressão de β em $\beta x = -y(px + \gamma)$ e efetuando cancelamentos obtemos $qx = -px - \gamma$, ou seja, $\gamma = -(q + p)x$. Assim, temos

$$u = (\alpha, \beta, \gamma) = (pz, qy, -(q + p)x) = q \cdot (0, y, -x) + p \cdot (z, 0, -x) = qv_1 + pv_2.$$

Logo, $u \in \langle v_1, v_2 \rangle$. Consequentemente, $Z = \langle v_1, v_2 \rangle$. Finalmente, considerando o homomorfismo sobrejetor

$$\varphi_1 : A^2 \twoheadrightarrow A^3, \quad e_1 \mapsto v_1, \quad e_2 \mapsto v_2$$

cuja imagem é Z segue que uma apresentação livre de I é

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

Definição 2.2.5. Seja A um anel e M um A -módulo finitamente gerado. Considere $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto de geradores de M . O núcleo Z do homomorfismo sobrejetor

$$\varphi : A^n \twoheadrightarrow M, \quad e_i \mapsto u_i$$

é chamado de *módulo de sizígias* do módulo M com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{u} . Cada elemento em Z é chamado uma *sizígia* de M com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{u} .

Digamos que o módulo de sizígias Z é finitamente gerado e $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_m\}$ é um conjunto de geradores de Z . Como visto acima, ao considerarmos o homomorfismo sobrejetor

$$\psi : A^m \twoheadrightarrow Z, \quad e_i \mapsto v_i$$

temos a apresentação livre

$$A^m \xrightarrow{\psi} A^n \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0.$$

Em particular, como ψ é um homomorfismo de A -módulos livres, podemos considerar sua representação

matricial com respeito as bases canônicas de A^m e A^n . É usual, e assim o faremos aqui, identificar essa matriz com o próprio homomorfismo ψ . Essa matriz é chamada uma *matriz de sizígias* do módulo M com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{v} . Notadamente, ψ é uma matriz de ordem $n \times m$ onde a j -ésima coluna corresponde à transposta do vetor $v_j = \psi(e_j)$.

Exemplo 2.2.6. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. No Exemplo 2.2.4 vimos que um conjunto de geradores para o módulo de sizígias Z do ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle \subset A$ (com respeito ao conjunto de geradores xy, xz, yz) é $\{(0, y, -x), (z, 0, -x)\}$. Nesse caso, uma matriz de sizígias para o ideal I (com respeito ao conjunto de geradores xy, xz, yz) é:

$$\begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.7. Sejam \mathbb{K} um corpo e A um anel de polinômios com coeficientes em \mathbb{K} . Seja I um ideal monomial gerado por monômios m_1, \dots, m_r . Dado um subconjunto G de $X = \{1, \dots, r\}$, denote por M_G o mínimo múltiplo comum dos monômios m_i com $i \in G$. Para cada $1 \leq i < j \leq r$, defina

$$t_{i,j} = \frac{M_{\{i,j\}}}{M_j} e_j - \frac{M_{\{i,j\}}}{M_i} e_i.$$

Por um cálculo direto podemos observar que $t_{i,j}$ é uma sizígia de I com respeito ao conjunto de geradores m_1, \dots, m_r . O que é menos óbvio, mas que também é verdade (ver [9, Section 7.1]) é que as sizígias $t_{i,j}$ geram todo o módulo de sizígias. Chamamos cada $t_{i,j}$ de *sizígia de Taylor* do ideal monomial I .

Observação 2.2.8. (a) Sejam A um anel e I um ideal de A . Considere $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ um conjunto de geradores de I . Um conjunto óbvio de sizígias do ideal I com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{f} é: $\mathcal{K}(\mathbf{f}) = \{f_i e_j - f_j e_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Cada elemento de $\mathcal{K}(\mathbf{f})$ é chamado de *sizígia de Koszul* do ideal I com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{f} . Tipicamente, as sizígias de Koszul não são suficientes para gerar todo o módulo de sizígias (esse fenômeno pode ser observado no Exemplo 2.2.6). Contudo, existem alguns ideais importantes que admitem conjuntos de geradores cujas sizígias de Koszul são suficientes para gerar todo o módulo de sizígias. Esse é o caso dos ideais que são gerados por sequências regulares¹. Precisamente, pode-se verificar que se I é gerado por uma sequência regular $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ então o módulo de sizígias de I com respeito ao conjunto de geradores \mathbf{f} é $\mathcal{K}(\mathbf{f})$ (ver [17, Corollary 6.3.9]).

(b) Seja $\varphi = (\alpha_{ij})$ uma matriz de ordem $(m+1) \times m$ com entradas em um anel A . Nesse trabalho estaremos interessados de um modo particular no ideal $I = I_m(\varphi)$. Considere $c =$

¹ver definição de sequência regular em Definição 5.3.1

$(\alpha_{1,j} \cdots \alpha_{m+1,j})^t$ a j -ésima coluna da matriz φ . A concatenação $[c \mid \varphi]$ é uma matriz quadrada de ordem $m + 1$ com duas colunas iguais. Assim, $\det[c \mid \varphi] = 0$. Desenvolvendo esse determinante por Laplace ao logo da primeira coluna obtemos a seguinte relação:

$$\alpha_{1j}\Delta_1 + \cdots + \alpha_{(m+1)j}\Delta_{m+1} = 0$$

onde Δ_i é o m -menor da matriz φ obtido pela omissão da i -ésima linha multiplicado por $(-1)^{i+1}$. Essa relação nos diz que as colunas de φ são sizígias do ideal $I = I_{n-1}(\varphi)$ com respeito ao conjunto de geradores $\Delta_1, \dots, \Delta_{m+1}$. Cabe aqui a pergunta de quando é o caso de φ já ser a matriz de sizígias. Veremos a resposta para essa pergunta na próxima seção.

2.3 Resolução livre

Definição 2.3.1. Sejam A um anel e M um A -módulo. Uma *resolução livre* de M é uma sequência exata da forma

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \quad (2.2)$$

onde F_i é um A -módulo livre para cada $i \geq 0$.

A resolução livre F_\bullet é chamada *finita* se existe um número natural n tal que $F_i = 0$ para cada $i > n$. Em tal caso escrevemos a resolução F_\bullet como

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0.$$

Uma resolução livre que não é finita é chamada de resolução livre *infinita*.

A seguir apresentamos exemplos ilustrando resoluções livres dos dois tipos, finita e infinita.

Exemplo 2.3.2. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$ de A . Pelo Exemplo 2.2.4 temos a seguinte sequência exata:

$$A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

onde $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2z, \alpha_1y, -(\alpha_1 + \alpha_2)x)$ para cada $(\alpha_1, \alpha_2) \in A^2$. Em particular,

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \ker \varphi_1 \Leftrightarrow \alpha_2z = \alpha_1y = -(\alpha_1 + \alpha_2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Logo, $\ker \varphi_1 = 0$. Desse modo, temos a resolução livre finita

$$0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{\varphi_1} A^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

Exemplo 2.3.3. Sejam $A = \mathbb{K}[x]/\langle x^2 \rangle$ e $I = \langle \bar{x} \rangle \subset A$. Considere o seguinte homomorfismo de A -módulos:

$$\varphi : A \rightarrow A, \quad \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\bar{x}$$

Observe que $\text{Im}(\varphi) = I$. Além disso,

$$\bar{\alpha} \in \ker \varphi \Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha x \in \langle x^2 \rangle \Leftrightarrow \alpha \in \langle x \rangle \Leftrightarrow \bar{\alpha} \in \langle \bar{x} \rangle.$$

Assim, $\ker \varphi = I$. Por fim, usando o fato de que $\text{Im}(\varphi) = \ker \varphi = I$ segue que

$$\dots \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0$$

é uma resolução livre infinita do A -módulo I .

A seguir enunciamos uma versão fraca de um celebrado resultado em álgebra comutativa, o *teorema de Hilbert-Burch*. Esse é um resultado que caracteriza resolução livre de uma classe de ideais muito especial. Tais ideais são os principais objetos desse trabalho.

Teorema 2.3.4 (Hilbert-Burch). *Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e φ uma matriz de ordem $(n+1) \times n$ com entradas em A . Se $I = I_n(\varphi)$ é um ideal de A de altura 2 então a resolução livre de I é*

$$0 \rightarrow A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \rightarrow I \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Em particular, R/I é um anel Cohen-Macaulay e φ é a matriz de sizígias de I .

Revisitaremos agora o Exemplo 2.2.4 à luz do teorema de Hilbert-Burch

Exemplo 2.3.5. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Consideremos mais uma vez o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Observe que os geradores de I são os 2-menores ordenados e com sinal da matriz

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix},$$

ou seja, $I = I_2(\varphi)$. Além disso, $\text{ht } I = 2$ (ver Exemplo 5.2.4). Assim, de acordo o teorema de Hilbert-Burch segue que a resolução do ideal I é

$$0 \rightarrow A^2 \xrightarrow{\varphi} A^3 \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Capítulo 3

Álgebras de explosão

Nesse capítulo chegamos finalmente as definições de álgebra de Rees e de fibra especial. Ficará evidente no decorrer do capítulo como os preliminares abordados anteriormente nesta dissertação se inserem no entendimento dessas álgebras.

3.1 A álgebra de Rees

Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. Associado ao par (A, I) podemos considerar o seguinte A -submódulo do anel de polinômios $A[t]$:

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n = A + It + \cdots + I^n t^n + \cdots \subseteq A[t].$$

Segue das propriedades de potências de ideais que $(I^i t^i)(I^j t^j) = I^{i+j} t^{i+j}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Em particular, $\mathcal{R}(I)$ tem estrutura A -subálgebra \mathbb{Z} -graduada de $A[t]$ onde a i -ésima componente homogênea $\mathcal{R}(I)_i$ é o A -módulo $I^i t^i$. Chamamos $\mathcal{R}(I)$ de *álgebra de Rees* do ideal I .

Observação 3.1.1. Observe que se o anel base A é um domínio então $\mathcal{R}(I)$ é um subanel do domínio $A[t]$. Portanto, $\mathcal{R}(I)$ é domínio sempre que A for domínio.

Um primeiro fato importante da álgebra de Rees tem a ver com sua dimensão. Ela é determinada de acordo com o seguinte teorema

Teorema 3.1.2. *Seja A um anel Noetheriano cuja dimensão de Krull é finita. Se I é um ideal de A então*

$$\dim \mathcal{R}_A(I) = \begin{cases} \dim A + 1, & \text{se } I \not\subseteq P \text{ para algum ideal primo } P \\ & \text{com } \dim A/P = \dim A. \\ \dim A, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova. Ver [10, Theorem 5.1.4]. □

Notemos que se I é finitamente gerado, digamos por f_1, \dots, f_m , então cada elemento de $I^i \mathfrak{t}^i$ se escreve da forma

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = i} a_\alpha (f_1 \mathfrak{t})^{\alpha_1} \dots (f_m \mathfrak{t})^{\alpha_m}$$

com cada a_α em A . Em particular, segue que $f_1 \mathfrak{t}, \dots, f_m \mathfrak{t}$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{R}(I)$ como A -álgebra, ou seja, a seguinte igualdade tem lugar:

$$\mathcal{R}(I) = A[f_1 \mathfrak{t}, \dots, f_m \mathfrak{t}] \tag{3.1}$$

Desse modo, podemos considerar o seguinte homomorfismo sobrejetor de A -álgebras graduadas

$$\zeta : A[t_1, \dots, t_m] \rightarrow \mathcal{R}(I), \quad t_i \mapsto f_i \mathfrak{t} \quad (1 \leq i \leq m). \tag{3.2}$$

Segue da Proposição 1.1.11 a seguinte observação:

Observação 3.1.3. O núcleo \mathcal{J} do homomorfismo ζ é um ideal homogêneo de $A[t_1, \dots, t_m]$.

Este ideal homogêneo \mathcal{J} é chamado de *ideal de apresentação* (ou *ideal de definição*) da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ com respeito ao conjunto de geradores f_1, \dots, f_m . Através do primeiro teorema dos isomorfismos temos a seguinte forma de expressar a álgebra de Rees de I :

$$\mathcal{R}(I) \simeq A[t_1, \dots, t_m] / \mathcal{J} \tag{3.3}$$

Observação 3.1.4. Segue do isomorfismo (3.3) e da Observação 3.1.1 que o ideal de apresentação da álgebra de Rees é um ideal primo sempre que o anel base A for um domínio.

Um problema muito importante no estudo da álgebra de Rees diz respeito a determinação de geradores para o ideal \mathcal{J} . Encontramos na literatura diversos trabalhos dedicados a esse tipo de problema (ver por exemplo [14], [11], [1], [5], [4]).

Um ponto de partida usual para abordar o problema de encontrar geradores para o ideal \mathcal{J} se baseia na análise de certos elementos de \mathcal{J} que surgem a partir da matriz de sizígias do ideal I . Na proposição a seguir explicamos de forma precisa como esses elementos de \mathcal{J} são obtidos.

Proposição 3.1.5. *Seja $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ um ideal em um anel Noetheriano A . Seja φ a matriz de sizígias de I com respeito ao conjunto de geradores f_1, \dots, f_m . Denote por \mathfrak{t} a matriz $[t_1 \cdots t_m]$. Então $I_1(\mathfrak{t} \cdot \varphi)$ está contido no ideal de apresentação \mathcal{J} da álgebra de Rees de I com respeito ao conjunto de geradores f_1, \dots, f_m .*

Prova. Digamos que $\varphi = (a_{ij})_{m \times n}$. Então, da definição de matriz de sizígias segue que

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i t = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} t_i \in \mathcal{J} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Assim, $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle \sum_{i=1}^m a_{i,1} t_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} t_i \rangle \subset \mathcal{J}$ como desejado. \square

A seguir fazemos em detalhes um exemplo onde a inclusão mencionada na Proposição 3.1.5 é uma igualdade

Exemplo 3.1.6. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Como visto no Exemplo 2.2.6, uma matriz de sizígias para o ideal I é

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & z \\ y & 0 \\ -x & -x \end{pmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 3.1.5 segue que

$$I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle t_2 y - t_3 x, t_1 z - t_3 x \rangle \subset \mathcal{J}. \quad (3.4)$$

Afirmamos que esta inclusão é uma igualdade. Pelo Teorema 3.1.2,

$$\dim \mathcal{R}(I) = \dim A + 1 = 4.$$

Como $\mathcal{R}(I) \simeq A[t_1, t_2, t_3]/\mathcal{J}$ então, pelo Teorema 5.3.8(c), segue que

$$\text{ht } \mathcal{J} = \dim A[t_1, t_2, t_3] - \dim \mathcal{R}(I) = 6 - 4 = 2.$$

Por outro lado $G_1 := t_2 y - t_3 x$, $G_2 := t_1 z - t_3 x$ são elementos irredutíveis e distintos de $A[t_1, t_2, t_3]$, logo $I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi) = \langle G_1, G_2 \rangle$ é um ideal de altura 2. Assim, (3.4) é uma inclusão de ideais de mesma altura. Além disso, \mathcal{J} é ideal primo (ver Observação 3.1.3). Dessa forma, para concluir a igualdade afirmada é suficiente provar que $\langle G_1, G_2 \rangle$ é ideal primo, ou equivalentemente, que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é um domínio. Como G_1, G_2 é sequência regular em $A[t_1, t_2, t_3]$ e

$A[t_1, t_2, t_3]$ é Cohen-Macaulay segue pelo Teorema 5.3.8(a) que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ também é Cohen-Macaulay. Em particular, $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ satisfaz a condição S_2 de Serre. A matriz Jacobiana de $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ sobre \mathbb{K} é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} -t_3 & t_2 & 0 & 0 & y & -x \\ -t_3 & 0 & t_1 & z & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Assim, o ideal Jacobiano de $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ sobre \mathbb{K} é:

$$\begin{aligned} J &= \langle I_2(\Theta), G_1, G_2 \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \\ &= \langle t_2 t_3, t_1 t_3, z t_3, y t_3, t_1 t_2, t_2 z, t_2 x, t_1 y, t_1 x, I, G_1, G_2 \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \end{aligned}$$

Logo, $\langle t_1 t_2, t_2 t_3, t_1 t_3, G_1, G_2 \rangle / \langle G_1, G_2 \rangle \subset J$ é um ideal de altura dois contido em J . Desse modo, $\text{ht } J \geq 2$. Com isso, segue da Observação 5.7.4 que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ também satisfaz a condição R_1 de Serre. Consequentemente, $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é um anel normal. Como $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é anel graduado normal segue pela Observação 5.5.4 que $A[t_1, t_2, t_3]/\langle G_1, G_2 \rangle$ é domínio. Concluimos com isso a prova da afirmação.

Exemplos como esse são muito especiais e são o conteúdo da seguinte definição.

Definição 3.1.7. Considere as notações e hipóteses da Proposição 3.1.5. Dizemos que o ideal I é de *tipo linear* se $\mathcal{J} = I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi)$.

3.2 A fibra especial

Denotemos por (A, \mathfrak{m}) um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} ou um anel graduado standard com ideal maximal homogêneo \mathfrak{m} . Considere $I \subset \mathfrak{m}$ um ideal de A (quando A for uma \mathbb{K} -álgebra graduada standard iremos supor I um ideal homogêneo). A *fibra especial* de I , é a seguinte álgebra residual da álgebra de Rees:

$$\mathcal{F}(I) := \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) = (A/\mathfrak{m}) \oplus (I/\mathfrak{m}I) \oplus (I^2/\mathfrak{m}I^2) \oplus \dots \quad (3.5)$$

Segue da definição que a fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é uma \mathbb{K} -álgebra graduada, onde $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Observe que se $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ então $\mathcal{F}(I)$ é gerado como \mathbb{K} -álgebra pelas classes $f_1^*, \dots, f_m^* \in I/\mathfrak{m}I$ de f_1, \dots, f_m , respectivamente. Além disso, o ideal $\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ é imagem do ideal $\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m]$ pelo homomorfismo ζ em (3.2). Desse modo, também temos a seguinte forma de apresentar a fibra especial.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(I) &= \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \\
&\simeq (A[t_1, \dots, t_m]/\mathcal{J})/((\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m], \mathcal{J})/\mathcal{J}) \\
&\simeq A[t_1, \dots, t_m]/(\mathfrak{m}A[t_1, \dots, t_m], \mathcal{J})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Vejamos essa apresentação em um exemplo

Exemplo 3.2.1. Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Nesse caso, temos

$$\mathcal{J} = \langle t_2y - t_3x, t_1z - t_3x \rangle \text{ (ver Exemplo 3.1.6) e } \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] = \langle x, y, z \rangle \tag{3.7}$$

Assim, $\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] \rangle = \langle t_2y - t_3x, t_1z - t_3x, x, y, z \rangle = \langle x, y, z \rangle$. Portanto,

$$\mathcal{F}(I) \simeq A[t_1, t_2, t_3]/\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m}A[t_1, t_2, t_3] \rangle = \mathbb{K}[x, y, z, t_1, t_2, t_3]/\langle x, y, z \rangle \simeq \mathbb{K}[t_1, t_2, t_3].$$

A dimensão de Krull da fibra especial é chamada de *analytic spread* do ideal I e a denotamos por $\ell(I)$. O cálculo do analytic spread de um ideal é um problema que pode ser muito intrigante. O tipo de informação geral que temos sobre esse invariante é dado pelas seguintes estimativas:

$$\text{ht } I \leq \ell(I) \leq \dim A \tag{3.8}$$

3.3 Álgebra de Rees bi-graduada

Sejam \mathbb{K} um corpo e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Nesta seção particularizamos o estudo da álgebra de Rees ao caso em que os geradores f_1, \dots, f_m do ideal I são polinômios homogêneos em A de grau fixo d . Nesse caso, podemos decompor a álgebra de Rees como uma soma de \mathbb{K} -espaços vetoriais da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus \mathcal{R}_{(i,j)}$$

onde $\mathcal{R}_{(i,j)} = [I^i]_j t^i$. Naturalmente, $\mathcal{R}_{(i,j)} \cdot \mathcal{R}_{(i',j')} \subset \mathcal{R}_{(i+i',j+j')}$ para cada $(i,j), (i',j') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Em particular, $\mathcal{R}(I)$ com essa decomposição de \mathbb{K} -espaços vetoriais é uma \mathbb{K} -álgebra bi-graduada.

Consideremos agora o anel de polinômios $A[t_1, \dots, t_m] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m]$ equipado com sua bi-graduação usual (ver Exemplo 1.2.1). Para que o homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras

$$\zeta : A[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}(I), \quad x_i \mapsto x_i, \quad t_i \mapsto f_i t \tag{3.9}$$

possa ser visto como um homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras graduadas fazemos $\deg t = (-d, 1)$. Com isso, segue da Proposição 1.2.2 que o ideal de apresentação \mathcal{J} da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é um ideal bi-homogêneo e podemos decompô-lo da seguinte maneira:

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(i,j)}.$$

Observe ainda que, para $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$, temos:

$$\langle \mathcal{J}, \mathfrak{m} \mathcal{A}[t_1, \dots, t_m] \rangle = \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle;$$

logo, por (3.6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I) &\simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m] / \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle \\ &\simeq (\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m] / \mathfrak{m}) / \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)}, \mathfrak{m} \rangle / \mathfrak{m} \\ &\simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] / Q \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $Q := \langle \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}_{(0,j)} \rangle \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$. Note ainda que Q é o núcleo do seguinte homomorfismo sobrejetor de \mathbb{K} -álgebras

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \quad (t_i \mapsto f_i).$$

Assim,

$$\mathcal{F}(I) \simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] / Q \simeq \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m] \tag{3.11}$$

Alternativamente, podemos olhar o ideal Q de uma forma direta como

$$Q = \{F(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m] \mid F(f_1, \dots, f_m) = 0\}. \tag{3.12}$$

Observação 3.3.1. Como $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ é um subanel de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e este último é um domínio segue que $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ é também um domínio. Assim, de (3.11) podemos concluir que a fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é domínio.

Nas hipóteses dessa seção temos ainda o seguinte resultado sobre o spread analítico.

Teorema 3.3.2. *Sejam \mathbb{K} um corpo de característica zero e A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Se I é um ideal de A gerado por polinômios homogêneos de mesmo grau*

d então

$$\ell(I) = \text{posto}(\Theta)$$

onde $\Theta = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ é a matriz jacobiana de I .

Demonstração. Ver [17, Proposition 4.1.9]. □

Exemplo 3.3.3. Seja $I = \langle x^2y^2, xy^2z, xyz^2, yz^3, z^4 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y, z]$. Temos:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 2xy^2 & y^2z & yz^2 & 0 & 0 \\ 2x^2y & 2xyz & xz^2 & z^3 & 0 \\ 0 & xy^2 & 2xyz & 3yz^2 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

Observe que o determinante da submatriz 3×3 da direita de Θ é $4yz^8$. Assim, $\text{posto}(\Theta) = 3$. Em particular, pelo Teorema 3.3.2, segue que $\ell(I) = 3$.

Capítulo 4

Resultados Principais

Nesse capítulo apresentamos os principais resultados do trabalho. Inicialmente, demonstramos que a matriz de sízias dos ideais que estamos interessados em estudar possuem um formato canônica módulo mudança invertível de variáveis e operações elementares linha/coluna. Em seguida, usando esse formato canônico demonstramos algumas propriedades sobre as álgebras $\mathcal{R}(I)$ e $\mathcal{F}(I)$ para alguns modelos especiais.

4.1 Ideais monomiais com dois primos mínimos

Observação 4.1.1. Em todo esse capítulo iremos considerar \mathbb{K} um corpo de característica zero.

Seja A o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y, z]$ com sua graduação usual. Considere $I \subset A$ um ideal monomial gerado pelos menores máximos de uma matriz φ de ordem $n \times (n-1)$ cujas entradas são formas lineares em A . Inicialmente, iremos explicar como é a estrutura dessa matriz φ na situação em que a quantidade de primos mínimos de I é igual a 2.

Lemma 4.1.2. *Seja J um ideal de $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ gerado por monômios m_1, \dots, m_r de grau d . Então:*

- (a) *Se $z^u \in J$ para algum inteiro positivo u então algum dos m_i é igual a z^d .*
- (b) *Se $(xy)^v \in J$ para algum inteiro positivo v então algum dos m_j é igual a $x^{i_0}y^{j_0}$ para certos $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $i_0 + j_0 = d$.*

Demonstração. (a) Pelo Teorema 1.1.7(b) temos que $z^u = pm_i$ para algum $p \in A$ e algum índice $1 \leq i \leq r$. Essa igualdade nos diz que o único fator primo de m_i é z . Como $\deg m_i = d$ segue que $m_i = z^d$ como queríamos mostrar.

(b) Também pelo Teorema 1.1.7(b) temos que $(xy)^v = pm_j$ para algum $1 \leq j \leq r$. Dessa igualdade segue que os possíveis fatores primos de m_j são x e y . Logo, $m_j = x^{i_0}y^{j_0}$ para certos $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$. A igualdade $i_0 + j_0 = d$ é consequência de $\deg m_j = d$. \square

Proposição 4.1.3. *Seja $I \subset A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um ideal monomial de altura dois gerado pelos menores máximos de uma matriz φ de ordem $n \times (n - 1)$ cujas entradas são polinômios homogêneos de grau 1 em A . Se A/I tem exatamente dois primos mínimos então, a menos de conjugação, a matriz φ tem a forma*

$$\begin{pmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ -c_1 & z & \cdots & 0 \\ 0 & -c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & z \\ 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde $c_i \in \{x, y\}$ para cada $1 \leq i \leq n - 1$.

Demonstração. Por conjugação - de fato, uma mudança de coordenadas - podemos supor que os dois primos mínimos de I são (x, z) e (y, z) . Em particular, $\sqrt{I} = (x, z) \cap (y, z) = (xy, z)$. Assim, como I é ideal monomial gerado por monômios de grau $n - 1$, segue pelo Lema 4.1.2 que $z^{n-1} \in I$ e $x^a y^b \in I$ com $a + b = n - 1$. Afirmamos que os demais $n - 2$ geradores de I são da forma

$$\{x^{a_i} y^{b_i} z^i \mid 1 \leq i \leq n - 2, a_i + b_i = n - 1 - i\}. \quad (4.2)$$

ou seja, dois geradores distintos não tem a mesma potência de z como fator. Suponha o contrário. Então existem geradores distintos da forma $f_i = x^a y^b z^c$ e $f_j = x^{a'} y^{b'} z^c$. Em particular, I admite a seguinte sizígia $\mathfrak{z} = x^{a'} y^{b'} e_i - x^a y^b e_j$. Em particular,

$$\varphi \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{z} \quad (4.3)$$

para uma certa matriz \mathfrak{v} de ordem $(n - 1) \times 1$ cujas entradas são formas de grau $n - 2$ em A . Como $z^{n-1} \in I$ podemos supor que z^{n-1} é o $(n - 1)$ -menor de φ obtido pela exclusão da n -ésima linha. Denote por φ_n a submatriz de φ obtida pela exclusão da n -ésima linha. Multiplicando os dois lados de (4.3) à direita por $\text{adj}(\varphi_n)$ obtemos

$$\begin{pmatrix} z^{n-1} v_1 \\ \vdots \\ z^{n-1} v_{n-1} \\ * \end{pmatrix} = \text{adj}(\varphi_n) \mathfrak{z}$$

Mas ao menos uma das $(n - 1)$ primeiras entradas do lado esquerdo tem grau maior ou igual a

$n - 1$ na variável z enquanto as entradas do lado direito tem grau no máximo $n - 2$ na variável z . Isso é um absurdo. Logo, segue a afirmação. Assim, temos que a coleção de monômios que gera I é da forma

$$\{x^{a_0}y^{n-1-a_0}, x^{a_1}y^{n-2-a_0}z, \dots, z^{n-1}\}.$$

Por razão de grau na variável z e do Exemplo 2.2.7 segue que as sizigias dessa coleção de geradores devem ser necessariamente da forma $ze_i - c_{i+1}e_{i+1}$ com $c_{i+1} \in \{x, y\}$. Com isso encerramos a prova. \square

Nas condições do teorema acima chamaremos a sequência $c_1c_2 \dots c_{n-1}$ de *sequência básica das entradas* do ideal I .

Observação 4.1.4. Para cada $1 \leq i \leq n$, denotemos por φ_i a submatriz de φ , de ordem $(n - 1) \times (n - 1)$, obtida pela omissão da i -ésima linha de φ . Observe que φ_i tem o seguinte formato:

$$\varphi_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} z & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_1 & z & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -c_{i-2} & z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_i & z & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -c_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} \end{array} \right)$$

Em particular,

$$\det \varphi_i = (-1)^{n-i} z^{i-1} c_i \cdots c_{n-1} \quad (4.4)$$

4.2 Casos de estudo

4.2.1 Modelo alternante

Em toda essa seção iremos supor n sendo um número inteiro ímpar ≥ 5 . Nas hipóteses e notações da Proposição 4.1.3, iremos considerar seguinte sequência básica das entradas do ideal I :

$$c_i = \begin{cases} x, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ y, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases},$$

ou seja, a matriz φ é da forma

$$\varphi = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -y \end{pmatrix}$$

Denotemos por f_0, f_1, \dots, f_n os menores máximos (e ordenados) de φ . Usando (4.4) temos:

$$f_i = \begin{cases} x^{(n-1)/2}y^{(n-1)/2}, & \text{se } i = 0 \\ -(f_{i-1}/x)z, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ -(f_{i-1}/y)z, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad (4.5)$$

Com essas expressões podemos deduzir facilmente o seguinte resultado

Proposição 4.2.1. *O ideal*

$$I_2 \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

está contido no ideal de definição \mathcal{J} da álgebra de Rees de $I = (f_0, \dots, f_{n-1})$.

Demonstração. Para $1 \leq i < j \leq n - 3$ defina

$$p_{i,j}(t_0, \dots, t_n) = \det \begin{pmatrix} t_i & t_j \\ t_{i+2} & t_{j+2} \end{pmatrix}$$

Para provar a proposição devemos mostrar que $p_{i,j}(f_0, \dots, f_n) = 0$ para cada $1 \leq i < j \leq n - 3$.

Para isso, faremos a prova por casos:

Caso 1: *i e j tem mesma paridade.*

Para fixar ideias, digamos que i e j são ambos pares

$$\begin{aligned} p_{i,j}(f_0, \dots, f_n) &= \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ f_{i+2} & f_{j+2} \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{=} \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ -(f_{i+1}/y)z & -(f_{j+1}/y)z \end{pmatrix} \\ &= z/y \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ -f_{i+1} & -f_{j+1} \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{=} z/y \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ (f_i/x)z & (f_j/x)z \end{pmatrix} \\ &= z^2/xy \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ f_i & f_j \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Notadamente, a prova para i e j ambos ímpares é análoga.

Caso 2: i e j tem paridades distintas.

Digamos que i é par e que j é ímpar. Temos

$$\begin{aligned} p_{i,j}(f_0, \dots, f_n) &= \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ f_{i+2} & f_{j+2} \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{=} \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ -(f_{i+1}/y)z & -(f_{j+1}/x)z \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ -(z/y)f_{i+1} & -(z/x)f_{j+1} \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{=} \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ (z/y)(z/x)f_i & (z/x)(z/y)f_j \end{pmatrix} \\ &= z^2/xy \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ f_i & f_j \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

Proposição 4.2.2. *O analytic spread $\ell(I)$ do ideal I é 3.*

Demonstração. Usando (4.5) segue que os 3 últimos geradores do ideal I são:

$$-xyz^{n-3}, yz^{n-2} \text{ e } -z^{n-1}.$$

Assim, uma submatriz de ordem 3×3 da matriz jacobiana de I é

$$B = \begin{pmatrix} -yz^{n-3} & 0 & 0 \\ -xz^{n-3} & z^{n-2} & 0 \\ -(n-3)xyz^{n-4} & (n-2)yz^{n-3} & -(n-1)z^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Como $\det B = (n-1)yz^{3n-7} \neq 0$ segue que o posto da matriz jacobiana de I é 3. Portanto, usando o Teorema 3.3.2 segue o resultado desejado, ou seja, $\ell(I) = 3$. □

Teorema 4.2.3. *O ideal de definição da fibra especial de I é*

$$I_2 \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Demonstração. Seja $Q \subset \mathbb{K}[t_0, \dots, t_{n-1}]$ o ideal de definição da fibra especial. Pela Proposição 4.2.1 temos

$$I_2 \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix} \subset Q \tag{4.6}$$

Pelo Exemplo 5.4.2 e Teorema 5.4.3, $I_2 \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$ é ideal primo de altura $(n-2) - 2 +$

$1 = n - 3$. Por outro lado, também temos que Q é ideal primo (ver Observação ??) e que

$$\text{ht } Q = \dim k[t_0, \dots, t_{n-1}] - \ell(I) \quad (4.7)$$

$$= n - 3. \quad (4.8)$$

Portanto, (4.6) é uma inclusão de ideais primos de mesma altura. Logo, pela Observação 5.2.1 segue que

$$Q = I_2 \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

como queríamos provar. \square

Observação 4.2.4. Usando o Teorema 4.2.3 é provado em [6, Theorem 4.11] que a álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é um domínio Cohen-Macaulay normal. A prova desse resultado envolve aspectos que não conseguimos atingir até a fase de conclusão dessa dissertação. Por esse motivo, omitimos a sua demonstração.

4.2.2 Modelo separante (simplificado)

Aqui iremos supor $n \geq 4$ um número inteiro. Iremos considerar seguinte sequência básica das entradas do ideal I :

$$c_i = \begin{cases} x, & \text{se } i = 1 \\ y, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{pmatrix}$$

Como antes, denotemos por f_0, f_1, \dots, f_n os menores máximos (e ordenados) de φ . Aplicando (4.4) nesse caso segue que

$$f_i = \begin{cases} xy^{(n-2)}, & \text{se } i = 0 \\ y^{n-i-1}z^i, & \text{se } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Proposição 4.2.5. *O ideal*

$$I_2 \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

está contido no ideal de definição \mathcal{J} da álgebra de Rees de $I = (f_0, \dots, f_{n-1})$.

Demonstração. Para cada $1 \leq i < j \leq n$ defina

$$p_{i,j}(t_0, \dots, t_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} t_i & t_j \\ t_{i+1} & t_{j+1} \end{pmatrix}$$

Para provar o desejado devemos deduzir que $p_{i,j}(f_0, \dots, f_{n-1}) = 0$ para cada $1 \leq i < j \leq n$. De fato,

$$p_{i,j}(f_0, \dots, f_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} f_i & f_j \\ f_{i+1} & f_{j+1} \end{pmatrix} \stackrel{(4.9)}{=} \det \begin{pmatrix} y^{n-i-1}z^i & y^{n-j-1}z^j \\ y^{n-i-2}z^{i+1} & y^{n-j-2}z^{j+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Logo, o resultado segue. □

Proposição 4.2.6. *O analytic spread $\ell(I)$ do ideal I é 3.*

Demonstração. Usando (4.9) segue que 3 geradores do ideal I são:

$$xy^{n-2}, y^{n-2}z \text{ e } z^{n-1}.$$

Assim, uma submatriz de ordem 3×3 da matriz jacobiana de I é

$$B = \begin{pmatrix} y^{n-2} & 0 & 0 \\ (n-2)xy^{n-3} & (n-2)y^{n-3}z & 0 \\ 0 & y^{n-2} & (n-1)z^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Como $\det B = (n-1)(n-2)y^{2n-5}z^{n-1} \neq 0$ segue que o posto da matriz jacobiana de I é 3. Portanto, usando 3.3.2 segue o resultado desejado, ou seja, $\ell(I) = 3$. □

Teorema 4.2.7. *O ideal de definição da fibra especial de I é*

$$I_2 \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Demonstração. Seja $Q \subset \mathbb{K}[t_0, \dots, t_{n-1}]$ o ideal de definição da fibra especial. Pela Proposição 4.2.5 temos

$$I_2 \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix} \subset Q \tag{4.10}$$

Pelo Exemplo 5.4.2 e Teorema 5.4.3, $I_2 \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{pmatrix}$ é ideal primo de altura $(n-2) - 2 +$

$1 = n - 3$. Por outro lado, também temos que Q é ideal primo (ver Observação 3.3.1) e que

$$\text{ht } Q = \dim k[t_0, \dots, t_{n-1}] - \ell(I) \quad (4.11)$$

$$= n - 3. \quad (4.12)$$

Portanto, (4.10) é uma inclusão de ideais primos de mesma altura. Logo, pela Observação 5.2.1 segue que

$$Q = I_2 \left(\begin{array}{ccc} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{array} \right)$$

como queríamos provar. \square

De posse do Teorema 4.2.7 acima e da Proposição 3.1.5 temos:

$$\mathcal{K} := \left\langle I_1(\mathbf{t} \cdot \varphi), I_2 \left(\begin{array}{ccc} t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{array} \right) \right\rangle \subset \mathcal{J}$$

onde \mathcal{J} é o ideal de apresentação da álgebra de Rees do ideal I . Podemos reescrever o ideal \mathcal{K} da seguinte maneira:

$$\mathcal{K} = \left\langle zt_0 - xt_1, I_2 \left(\begin{array}{ccc} y & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ z & t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{array} \right) \right\rangle$$

Pelo Teorema 5.4.3, $S := \mathbb{K}[x, y, z, t_0, \dots, t_{n-1}]/I_2 \left(\begin{array}{ccc} y & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ z & t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{array} \right)$ é um domínio Cohen-

Macaulay de dimensão 5. Como $zt_0 - xt_1$ é diferente de zero módulo o ideal $I_2 \left(\begin{array}{ccc} y & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ z & t_2 & \cdots & t_{n-1} \end{array} \right)$ e S é domínio segue que $zt_0 - xt_1$ é S -regular. Assim, da Cohen-Macaulicidade de S segue que

$$\mathbb{K}[x, y, z, t_0, \dots, t_{n-1}]/\mathcal{K} \simeq S/\langle zt_0 - xt_1 \rangle S$$

é Cohen-Macaulay de dimensão 4.

Com essas observações podemos concluir a seguinte informação sobre o ideal \mathcal{J} da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$

Proposição 4.2.8. \mathcal{J} é um primo mínimo de \mathcal{K} .

Demonstração. Como $\mathbb{K}[x, y, z, t_0, \dots, t_{n-1}]/\mathcal{K}$ é Cohen-Macaulay de dimensão 4 então todos os primos mínimos de \mathcal{K} são de altura $n + 3 - 4 = n - 1$. Também temos que a altura de \mathcal{J} é $n - 1$. Agora considere um ideal primo P tal que $\mathcal{K} \subset P \subset \mathcal{J}$. Como os extremos dessas inclusões tem altura $n - 1$ e a altura é uma função decrescente, segue que $\text{ht}(P) = \text{ht}(\mathcal{J})$. Logo, $P \subset \mathcal{J}$ é uma inclusão de ideais primos da mesma altura. Logo, $P = \mathcal{J}$. Com isso, concluímos que \mathcal{J} é primo mínimo de \mathcal{K} . \square

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Primos associados e decomposição primária

Seja M um módulo sobre um anel A . Um ideal primo P de A é dito *primo associado* de M se existe um elemento x de M tal que $P = 0 :_A x$. O conjunto de todos os primos associados de M será denotado por $\text{Ass}_A(M)$. Os elementos minimais de $\text{Ass}_A(M)$, com respeito a relação de inclusão, são chamados de *primos associados mínimos* de M . Denotaremos a coleção dos primos associados mínimos de M por $\text{Min}_A(M)$. Os primos associados de M que não pertencem a $\text{Min}_A(M)$ serão chamados de *primos associados imersos* de M .

Na proposição a seguir, bem como no resto do texto, usaremos $Z_A(M)$ para denotar o conjunto dos divisores de zero de um A -módulo M (recordemos que, por definição, $Z_A(M)$ é o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tal que $ax = 0$ para algum $x \in M$ não nulo).

Proposição 5.1.1. *Sejam A um anel noetheriano e M um A -módulo finitamente gerado. Então:*

- (a) $\text{Ass}_A(M)$ é vazio se, e somente se, $M = 0$.
- (b) $\text{Ass}_A(M)$ é um conjunto finito.
- (c) $Z_A(M) = \bigcup_{P \in \text{Ass}_A(M)} P$.
- (d) Se N é um submódulo de M então $\text{Ass}_A(N) \subset \text{Ass}_A(M) \subset \text{Ass}_A(N) \cup \text{Ass}_A(M/N)$.

Prova. Ver [13, Theorem 6.1, 6.3, 6.5 (i)] □

Sejam M um módulo sobre um anel A e N um submódulo de M . É verificável que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\text{Ass}_A(M/N)$ tem um único elemento.

$$(b) Z_A(M/N) = \sqrt{N : M}.$$

(c) Dados $\alpha \in A$ e $x \in M$ tais que $\alpha x \in N$ então $\alpha \in \sqrt{N : M}$ ou $x \in N$.

Se N satisfaz uma (e portanto todas) dessas condições dizemos que N é um *submódulo primário* de M . Além disso, se P é o único primo de $\text{Ass}_A(M/N)$, também dizemos que N é submódulo P -*primário* de M .

Observação 5.1.2. Seja I um ideal de um anel A . Dizer que I é um *ideal primário* de A significa que I é um submódulo primário de A . Observe que $I : A = I$. Assim, I é ideal primário se satisfaz as seguintes condições:

(a) $\text{Ass}_A(A/I)$ tem um único elemento.

$$(b) Z_A(A/I) = \sqrt{I}.$$

(c) Dados $\alpha, x \in A$ tais que $\alpha x \in I$ então $\alpha \in \sqrt{I}$ ou $x \in I$.

Exemplo 5.1.3. Seja P um ideal primo de um anel A . Notemos que nesse caso a condição (c) da Observação 5.1.2 é automática. Assim, todo ideal primo é primário.

Exemplo 5.1.4. Seja \mathfrak{m} um ideal maximal de um anel A . Afirmamos que para qualquer inteiro positivo n o ideal \mathfrak{m}^n é primário. Para provar essa afirmação iniciamos observando que $\text{Ass}(A/\mathfrak{m}^n)$ é não vazio pois $A/\mathfrak{m}^n \neq \{0\}$. Dito isso, suponhamos P sendo um primo associado de A/\mathfrak{m}^n . Então, $P = 0 : x$ para algum $x \in A/\mathfrak{m}^n$ não nulo. Em particular, temos $\mathfrak{m}^n x = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{m}^n \subset P$. Como P é primo, segue dessa inclusão que $\mathfrak{m} \subset P$. Pela maximalidade de \mathfrak{m} segue que $P = \mathfrak{m}$. Dessa forma, $\text{Ass}_A(A/\mathfrak{m}^n) = \{\mathfrak{m}\}$. Portanto, da Observação 5.1.2(a) segue o afirmado.

Definição 5.1.5. Seja N um submódulo de um A -módulo M . Uma *decomposição primária* de N em M é uma interseção $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ onde cada Q_i é submódulo P_i -primário de M . A decomposição primária $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ é dita *reduzida* se $\text{Ass}_A(M/Q_i) \neq \text{Ass}_A(M/Q_j)$ sempre que $i \neq j$ e N não pode ser expresso como interseção de uma subcoleção própria dos Q_i .

Exemplo 5.1.6. Sejam $A = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. Claramente, cada gerador do ideal I pertence a interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$. Agora, suponhamos que f é um elemento arbitrário da interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$. Em particular, existem $a_i, b_i \in A$, com $1 \leq i \leq 3$, tais que

$$f = a_1x + b_1y = a_2x + b_2z = a_3y + b_3z.$$

Dessas igualdades segue, por exemplo, que:

$$a_1x = (a_3 - b_1)y + b_3z \quad e \quad b_1y = (a_2 - a_1)x + b_2z.$$

Logo, $a_1x \in \langle y, z \rangle$ e $b_1y \in \langle x, z \rangle$. Como $\langle y, z \rangle$ e $\langle x, z \rangle$ são ideais primos de A com $x \notin \langle y, z \rangle$ e $y \notin \langle x, z \rangle$ então $a_1 \in \langle y, z \rangle$ e $b_1 \in \langle x, z \rangle$. Assim, existem $\alpha_i, \beta_i \in A$, com $i = 1$ ou 2 , tais que $a_1 = \alpha_1y + \alpha_2z$ e $b_1 = \beta_1x + \beta_2z$. Desse modo, $f = (\alpha_1 + \beta_1)xy + \alpha_2xz + \beta_2yz$, ou seja, $f \in I$. Com isso segue que a interseção $\langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$ está contida no ideal I . Portanto, temos a igualdade

$$I = \langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle.$$

Como cada membro dessa interseção é ideal primo, segue que esta é uma decomposição primária para o ideal I .

Exemplo 5.1.7. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y]$ um anel de polinômios em duas variáveis sobre um corpo k e $I = \langle x^2, xy \rangle$. Considere a interseção $\langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$. Claramente, os geradores de I pertencem a interseção citada. Além disso, seja $f \in \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$. Observe que $\langle x, y \rangle^2 = \langle x^2, y^2, xy \rangle$, assim, existem $a, b, c, d \in A$, tais que

$$f = ax = bx^2 + cy^2 + dxy.$$

Desse modo:

$$cy^2 = ax - bx^2 - dxy.$$

Então, $cy^2 \in \langle x \rangle$. Como $\langle x \rangle$ é primo e $y^2 \notin \langle x \rangle$, temos que $c \in \langle x \rangle$. Logo, existe $p \in A$, tal que $c = px$. Então, $f = bx^2 + cy^2 + dxy = bx^2 + pxy^2 + dxy \in \langle x^2, xy \rangle = I$. Desse modo,

$$I = \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2.$$

Pelo Exemplo 5.1.3 segue que $\langle x \rangle$ é primário e pela Observação 5.1.2 segue que $\langle x, y \rangle^2$ também é primário. Portanto, $I = \langle x \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$ é uma decomposição primária de I .

Teorema 5.1.8. Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e N um submódulo de M . Então N admite uma decomposição primária reduzida $N = \bigcap_{i=1}^r Q_i$. Além disso,

- (i) $\text{Ass}_A(M/N) = \{\sqrt{Q_1 : M}, \dots, \sqrt{Q_r : M}\}$. Em particular, os radicais $\sqrt{Q_i : M}$ em uma decomposição primária reduzida de N em M são unicamente determinados pelo quociente M/N .
- (ii) Os submódulos primários Q_i que correspondem aos primos associados mínimos de M/N são unicamente determinados pelo quociente M/N .

Prova. Ver [12, Theorem 3.2]

□

Exemplo 5.1.9. Sejam $A = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 5.1.6 vimos que uma decomposição primária de I é:

$$I = \langle x, y \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle.$$

É imediato observar que essa é de fato uma decomposição primária reduzida. Segue do teorema da decomposição primária que para esse exemplo temos:

$$\text{Ass}_A(A/I) = \text{Min}_A(A/I) = \{(x, y), (x, z), (y, z)\}.$$

Observação 5.1.10. Sejam A um anel noetheriano e I um ideal de A . Afirmamos que um ideal primo P é primo associado mínimo de A/I se, e somente se, P é mínimo (com respeito a ordem de inclusão) entre os ideais primos de A que contém I . Com efeito, suponhamos que $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$ seja uma decomposição primária de I . Se P é um elemento mínimo na coleção dos ideais que contem I então, em particular, $P \supset \bigcap_{i=1}^r Q_i$. Como P é ideal primo, P contém um certo Q_i . Logo, $P = \sqrt{P} \supset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é ideal primo e contém I segue da minimalidade de P que $P = \sqrt{Q_i}$. Obviamente, $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo, pois caso contrário, isso contrariaria a minimalidade de P . Por outro lado, consideremos $P = \sqrt{Q_i}$ sendo um primo associado mínimo de A/I . Seja P_1 um ideal primo tal que $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Da primalidade de P_1 segue que $Q_j \subset P_1$ para algum j . Logo, $\sqrt{Q_j} \subset P_1 \subset \sqrt{Q_i}$. Como $\sqrt{Q_i}$ é primo associado mínimo devemos ter $\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q_j}$, ou seja, $P_1 = \sqrt{Q_i}$. Sendo assim, $\sqrt{Q_i}$ é mínimo entre os ideais primos que contém I .

5.2 A dimensão de Krull

Seja A um ideal. Dizemos que uma cadeia de ideais primos de A da forma $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$ tem comprimento n . A *dimensão de Krull* de A , denotada $\dim A$, é o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$ em A . Se não existe uma cota superior para os comprimentos das cadeias de ideais primos de A então dizemos que $\dim A = \infty$.

A *altura* de um ideal primo P de A , denotada $\text{ht}(P)$, é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n = P$. Segue das definições de altura e dimensão e das propriedades de localização que

$$\text{ht}(P) = \dim A_P. \quad (5.1)$$

Observação 5.2.1. Seja $P_1 \subset P_2$ uma inclusão de ideais primos em um anel Noetheriano A . Segue imediatamente da definição de altura que se $\text{ht}(P_1) = \text{ht}(P_2)$ então $P_1 = P_2$.

A definição de altura para um ideal arbitrário $I \subsetneq A$ é realizada através da igualdade

$$\text{ht}(I) := \min\{\text{ht}(P) \mid P \in \text{Min}_A(A/I)\}. \quad (5.2)$$

Enunciamos agora um dos principais resultados da teoria da dimensão

Teorema 5.2.2 (Teorema do ideal principal de Krull Generalizado). *Sejam x_1, \dots, x_r elementos de um anel noetheriano A e $I = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$. Então para cada $P \in \text{Min}(A/I)$ tem-se $\text{ht}(P) \leq r$. Em particular, $\text{ht}(I) \leq r$.*

Prova. Ver [7, Theorem 10.2]. □

Exemplo 5.2.3. Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo k . Para cada $1 \leq i \leq n$, consideremos o ideal primo $P_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$. A cadeia de ideais primos $\langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_i$ implica que $\text{ht}(P_i) \geq i$. Por outro lado, pelo teorema do ideal principal de Krull generalizado segue que $\text{ht}(P_i) \leq i$. Portanto, segue dessas desigualdades que $\text{ht}(P_i) = i$.

Exemplo 5.2.4. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle xy, xz, yz \rangle$. No Exemplo 5.1.9 obtemos que

$$\text{Min}_A(A/I) = \{\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle\}$$

Assim, por definição,

$$\text{ht}(I) = \min\{\text{ht}\langle x, y \rangle, \text{ht}\langle x, z \rangle, \text{ht}\langle y, z \rangle\} \quad (5.3)$$

Mas, pelo exemplo anterior, $\text{ht}\langle x, y \rangle = \text{ht}\langle x, z \rangle = \text{ht}\langle y, z \rangle = 2$. Logo, $\text{ht}(I) = 2$.

Exemplo 5.2.5. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo k e $I = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x \rangle$. Podemos olhar $t_1z - t_2y$ como um polinômio de grau 1 na variável z com coeficientes em $\mathbb{K}[x, y, t_1, t_2, t_3]$. Aplicando o critério de Eisenstein neste polinômio concluímos que ele é um irredutível. Observe que o ideal $\langle t_1z - t_2y \rangle$ está propriamente contido em I pois, $t_2y - t_3x$ não pode ser múltiplo de $t_1z - t_2y$, uma vez que $t_2y - t_3x$ tem grau zero na variável t_1 . Assim, se $P \in \text{Min}_A(A/I)$ então temos a seguinte cadeia de ideais primos:

$$\{0\} \subsetneq \langle t_1z - t_2y \rangle \subsetneq P.$$

Logo, $\text{ht}(P) \geq 2$. Com isso, segue que $\text{ht}(I) \geq 2$. Por outro lado, pelo Teorema 5.2.2 segue que $\text{ht}(I) \leq 2$. Portanto, dessas duas desigualdades segue $\text{ht}(I) = 2$.

Uma importante classe de ideais nesse trabalho será a dos ideais gerados por menores de tamanho fixo de uma matriz. Mais especificamente, considere Ψ sendo uma matriz de ordem $m \times n$ com

entradas em um anel A . Para cada $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$, denotaremos por $I_t(\Psi)$ o ideal de A gerado por todos os menores de ordem t da matriz Ψ . Para ideais desse tipo temos a seguinte estimativa para a altura:

Teorema 5.2.6. $\text{ht}(I_t(\Psi)) \leq (m - t + 1)(n - t + 1)$.

Prova. Ver [3, Theorem 2.1]. □

Seja M um A -módulo. A *dimensão de Krull* de M , também denotada por $\dim M$, é a dimensão de Krull do anel $A/0 : M$. Um fato notável da dimensão de Krull de um A -módulo M é que ela é detectável através dos primos mínimos de M . De fato, pode ser provado que

$$\dim M = \max\{\dim A/P \mid P \in \text{Min}(M)\}. \quad (5.4)$$

5.3 Sequência regular e módulos Cohen-Macaulay

5.3.1 Sequência regular

Sejam M um A -módulo e a um elemento de A . Dizemos que a é *divisor de zero* de M se existe um elemento $m \in M$ diferente de zero tal que $am = 0$. Lembrando que o conjunto de todos os divisores de zero de M por $Z_A(M)$. Os elementos de A que não são divisores de M são chamados elementos *regulares* de M (ou elementos M -regulares).

Definição 5.3.1. Seja M um módulo sobre um anel A . Dizemos que $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ é uma *sequência regular* de M (ou uma M -*sequência*) se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $\mathbf{a}M \neq M$.
- (b) a_1 é elemento M -regular e a_i é elemento $M/\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle M$ -regular para cada $2 \leq i \leq n$.

Exemplo 5.3.2. O protótipo mais básico de sequência regular ocorre na situação em que A é um anel de polinômios em n variáveis x_1, \dots, x_n com coeficiente sobre um anel S . Uma vez que

$$A/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle A \simeq S[x_i, \dots, x_n]$$

segue facilmente que x_i é $A/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ -regular para qualquer $1 \leq i \leq n$.

Sejam I um ideal de um anel noetheriano A e M um A -módulo finitamente gerado com $IM \neq M$. Uma M -*sequência maximal* em I é uma M -sequência $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset I$ tal que não pode ser aumentada, isto é, para qualquer $y \in I$, $\mathbf{a}' = \{a_1, \dots, a_n, y\}$ não é M -sequência.

Observe que se $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma M -sequência então temos a cadeia de ideais $\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ onde cada inclusão é própria. Assim, se A é anel noetheriano toda M -sequência pode ser estendida para uma M -sequência maximal. Em particular, toda M -sequência contida em um ideal I se estende para uma M -sequência maximal em I .

Teorema 5.3.3. *Sejam A um anel noetheriano, M um A -módulo finitamente gerado e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Então duas M -sequências maximais em M tem o mesmo número de elementos.*

Prova. Ver [2, Theorem 1.2.5]. □

Utilizamos esse teorema para definir o *grade* de I em M como o número de elementos de uma M -sequência maximal em I . Denotaremos esse número por $\text{grade}(I, M)$. Em algumas situações especiais, costumamos empregar notações e terminologias distintas para o número $\text{grade}(I, M)$. Por exemplo:

- (1) Se (A, \mathfrak{m}) é um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} então chamamos o *grade* de \mathfrak{m} em M de *profundidade* de M e denotaremos esse número por $\text{prof}_A(M)$.
- (2) Se $I = 0 :_A M$ então chamamos o *grade* de I em A de *grade* de M e denotamos esse número por $\text{grade}(M)$.
- (3) O *grade* de I em A é chamado de *grade* de I e denotado por $\text{grade}(I)$.

Proposição 5.3.4. *Sejam (A, \mathfrak{m}) um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado. Então $\text{prof}_A(M) \leq \dim M$.*

5.3.2 Módulos e anéis Cohen-Macaulay

Definição 5.3.5. Seja (A, \mathfrak{m}) um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado não nulo. Dizemos que M é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\text{prof}_A(M) = \dim M$. O anel A é dito um *anel Cohen-Macaulay* se o for como A -módulo.

Em geral, se A é um anel noetheriano arbitrário então um A -módulo M é *Cohen-Macaulay* se $M_{\mathfrak{m}}$ é $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo Cohen-Macaulay para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Supp}(M)$.¹

Exemplo 5.3.6. Seja A um anel noetheriano de dimensão zero. Por razões óbvias temos nesse caso que A é Cohen-Macaulay.

Exemplo 5.3.7. Seja A um anel Cohen-Macaulay. Então o anel de polinômios $A[x_1, \dots, x_n]$ também é Cohen-Macaulay (ver [13, Theorem 17.7]). Em particular, se k é um corpo então $k[x_1, \dots, x_n]$ é Cohen-Macaulay.

¹O suporte de um A -módulo M , denotado $\text{Supp}_A(M)$, é o conjunto de todos os ideais primos P de A tais que $M_P \neq 0$.

Teorema 5.3.8. *Sejam A um anel noetheriano e M um módulo finitamente gerado.*

- (a) *Se \mathbf{x} é uma M -sequência e M é um módulo Cohen-Macaulay então $M/\langle \mathbf{x} \rangle M$ é Cohen-Macaulay (sobre A ou $A/\langle \mathbf{x} \rangle$). A recíproca também é verdadeira se A é anel local.*
- (b) *Se M é Cohen-Macaulay e S é um conjunto multiplicativo de A então $S^{-1}M$ é Cohen-Macaulay.*
- (c) *Se A é Cohen-Macaulay e $I \subsetneq A$ é um ideal de A então $\text{ht}(I) + \dim A/I = \dim A$. Em particular, se $I \subset J$ são ideais de A e se os anéis A e A/J são Cohen-Macaulay então $\text{ht}(J/I) = \text{ht}(J) - \text{ht}(I)$.*
- (d) *Se A é anel Cohen-Macaulay $I \subsetneq A$ é um ideal de A então $\text{grade}(I) = \text{ht}(I)$.*

5.4 Ideais de menores de matrizes 1-genéricas

Seja A um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em um corpo \mathbb{K} . Uma matriz M de ordem $v \times w$ cujas as entradas são formas lineares em A é chamada de 1-genérica se nenhuma entrada de M é anulada depois de efetuada qualquer sequência finita de operações elementares invertíveis linha/coluna.

Exemplo 5.4.1. Sejam $x_{i,j}$, $1 \leq i \leq v$ e $1 \leq j \leq w$, indeterminadas sobre um corpo \mathbb{K} . Então $M = (x_{i,j})$ com entradas no anel $A = \mathbb{K}[x_{i,j}; 1 \leq i \leq v \text{ e } 1 \leq j \leq w]$ é 1-genérica. A razão para isso é porque para qualquer matriz M' obtida de M por operações elementares invertíveis linha/coluna devemos ter $I_1(M) = I_1(M')$.

Exemplo 5.4.2. Uma matriz r -catalética de ordem $v \times w$ em $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, onde $1 \leq r \leq v$ e $n = v + (w - 1)r$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_v \\ x_{r+1} & x_{r+2} & x_{r+3} & \dots & x_{r+v} \\ x_{2r+1} & x_{2r+2} & x_{2r+3} & \dots & x_{2r+v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(w-1)r+1} & x_{(w-1)r+2} & x_{(w-1)r+3} & \dots & x_{(w-1)r+v} \end{pmatrix}.$$

Quando $r = 1$ a matriz r -catalética é chamada de matriz de Hankel e quando $r = v$ então a matriz r -catalética coincide com a matriz genérica. De acordo com [8], matrizes r -cataléticas são 1-genéricas.

A teoria dos ideais gerados pelos menores máximos de uma matriz 1-genérica é muito rica. Abaixo resumimos algumas das propriedades desses ideais

Teorema 5.4.3. *Seja M uma matriz 1-genérica de ordem $w \times v$ ($w \geq v$) cujas entradas são formas lineares em um anel de polinômios $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Então:*

- (a) $\text{ht } I_v(M) = w - v + 1$.
- (b) $I_v(M)$ é ideal primo.
- (c) $R/I_v(M)$ é um domínio Cohen-Macaulay.

Demonstração. Ver [,] □

5.5 Anéis normais

Seja $A \subset B$ uma inclusão de anéis. Um elemento $x \in B$ é dito *integral* sobre A se existe um inteiro positivo n e elementos $r_1, \dots, r_n \in A$ tais que

$$x^n + r_1 x^{n-1} + r_2 x^{n-2} + \dots + r_{n-1} x + r_n = 0 \quad (5.5)$$

Chamamos (5.5) de *equação de dependência integral* de x sobre A . Pode ser verificado que o conjunto dos elementos de B que são integrais sobre A é um subanel de B que contém A . Chamamos este subanel de B de *fecho integral* de A em B . O anel A é *integralmente fechado* em B se seu fecho integral em B é o próprio A .

Quando B é o anel total de frações de A chamamos o fecho integral de A em B de *fecho integral*. Um anel reduzido A é *integralmente fechado* se seu fecho integral é igual a A .

Definição 5.5.1. Dizemos que um anel A é *normal* se A_P é domínio integralmente fechado para todo ideal primo P de A .

Observamos que todo anel normal A é reduzido. Com efeito, suponhamos $a \in A$ tal que $a^n = 0$ para algum número natural n . Devemos mostrar que, necessariamente, $a = 0$. Para isso, é suficiente provar que $1 \in (0 : a)$. Suponhamos que este não seja o caso. Então existe um ideal primo P de A que contém $(0 : a)$. Em particular, $(a/1)^n = 0/1$ em A_P . Como A_P é domínio, segue que $a/1 = 0/1$ em A_P . Logo, existe $s \in A - P$ tal que $sa = 0$. Desse modo, $s \in (A - P) \cap (0 : a)$. Mas isso é um absurdo pois $(0 : a) \subset P$.

Proposição 5.5.2. *Seja A um anel reduzido cujo anel total de frações é um produto direto finito de corpos. Então, A é normal se, e somente se, A é integralmente fechado.*

Prova. Ver [10, Lemma 2.1.15]. □

Notemos que a hipótese do anel total de frações ser um produto direto finito de corpos é imediata quando A é um domínio.

Exemplo 5.5.3. Seja A um domínio de fatoração única. Afirmamos que A é um anel normal. Com efeito, suponha p/q um elemento no corpo de frações de A . Como A é domínio de fatoração única, podemos supor que o máximo divisor comum de p e q é 1. Digamos que p/q satisfaz uma equação de dependência integral

$$(p/q)^n + r_1(p/q)^{n-1} + r_2(p/q)^{n-2} + \cdots + r_{n-1}(p/q) + r_n = 0$$

Multiplicando os dois lados dessa igualdade por q^n obtemos:

$$p^n + r_1p^{n-1}q + r_2p^{n-2}q^2 + \cdots + r_{n-1}pq^{n-1} + r_nq^n = 0.$$

Logo,

$$p(p^{n-1} + r_1p^{n-2}q + r_2p^{n-3}q^2 + \cdots + r_{n-1}q^{n-1}) = r_nq^n$$

Dessa igualdade e do fato do máximo divisor de p e q ser 1 segue que q divide

$$p^{n-1} + r_1p^{n-2}q + r_2p^{n-3}q^2 + \cdots + r_{n-1}q^{n-1}.$$

Mas isso força $n-1 = 0$, pois caso contrário q dividiria p . Assim, $p/q = -r_1 \in A$. Segue daí que o fecho integral de A em seu corpo de frações é de fato A . Portanto, A é normal como afirmado.

Proposição 5.5.4. *Sejam A um anel noetheriano normal e P_1, \dots, P_n os primos mínimos de A . Então, $A/P_1, \dots, A/P_n$ são domínios normais e*

$$A \simeq A/P_1 \times \cdots \times A/P_r.$$

Prova. Ver [10, Corollary 2.1.13]. □

Esta proposição é bastante útil nesse trabalho em virtude da seguinte observação:

Observação 5.5.5. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra \mathbb{Z} -graduada e noetheriana. Então os primos mínimos de A são ideais homogêneos (ver [7, Proposition 3.12]). Afirmamos que se A é anel normal então A é domínio. Com efeito, sejam P_1, \dots, P_r são os primos mínimos de A . Então $A/P_1, \dots, A/P_r$ são \mathbb{K} -álgebras graduadas. Logo, $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é uma $(\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K})$ -álgebra graduada. Em particular, a parte homogênea de grau zero de $A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ é $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$. Por outro lado, como $A \simeq A/P_1, \dots, A/P_r$ (Proposição 5.5.4) e a parte de grau zero de A é \mathbb{K} segue que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$; isso implica que $r = 1$. Portanto, A é um domínio.

5.6 O critério de normalidade

Seja (A, \mathfrak{m}) um anel noetheriano local. Denotemos por $\mu(\mathfrak{m})$ o número mínimo de geradores de \mathfrak{m} . Segue do Teorema 5.2.2 a seguinte desigualdade

$$\text{ht}(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Na situação em que esta desigualdade é uma igualdade dizemos que o anel noetheriano local (A, \mathfrak{m}) é *regular*. De modo geral, diremos que um anel noetheriano A é *regular* se $A_{\mathfrak{P}}$ é regular para cada ideal primo \mathfrak{P} de A .

Definição 5.6.1. Sejam A um anel noetheriano e i um inteiro não-negativo.

- (i) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição (R_i) de Serre* se para todo ideal primo \mathfrak{P} de A de altura $\leq i$ o anel local $A_{\mathfrak{P}}$ é regular.
- (ii) Dizemos que o anel A satisfaz a *condição (S_i) de Serre* se para todo ideal primo \mathfrak{P} de A , $\text{prof } A_{\mathfrak{P}} \geq \min\{i, \text{ht}(\mathfrak{P})\}$.

Observação 5.6.2. Suponhamos que A é um anel Cohen-Macaulay. Em particular, pelo item (b) do Teorema 5.3.8, $A_{\mathfrak{P}}$ é Cohen-Macaulay para cada ideal primo \mathfrak{P} de A . Assim,

$$\begin{aligned} \text{prof}(A_{\mathfrak{P}}) &= \dim A_{\mathfrak{P}} && \text{(pois } A_{\mathfrak{P}} \text{ é Cohen-Macaulay)} \\ &= \text{ht}(\mathfrak{P}) && \text{(pela igualdade (??))} \end{aligned}$$

para cada ideal primo \mathfrak{P} de A . Logo, $\text{prof}(A_{\mathfrak{P}}) \geq \min\{i, \text{ht}(\mathfrak{P})\}$ para cada ideal primo \mathfrak{P} de A . Portanto, se A é anel Cohen-Macaulay então A satisfaz a condição (S_i) para qualquer inteiro não negativo i .

O teorema a seguir apresenta uma caracterização para a normalidade de um anel em termos das condições de Serre

Teorema 5.6.3 (Critério de Normalidade de Serre). *Um anel noetheriano A é normal se, e somente se, A satisfaz as condições (R_1) e (S_2) de Serre.*

Prova. Ver [10, Theorem 4.5.3]. □

5.7 Critério jacobiano

Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis com coeficientes sobre um corpo k . Dados $f_1, \dots, f_m \in A$, consideremos a k -álgebra $R = A/I$ onde $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Uma matriz

jacobiana de R sobre \mathbb{K} é a seguinte matriz de ordem $m \times n$

$$\Theta = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (5.6)$$

Digamos que $\text{ht}(I) = h$. O *ideal jacobiano* de R sobre \mathbb{K} , denotado $J_{R/\mathbb{K}}$, é o seguinte ideal de R :

$$J_{R/\mathbb{K}} := (I_h(\Theta), I)/I \quad (5.7)$$

Temos o seguinte resultado que garante que o ideal $J_{R/\mathbb{K}}$ está bem definido.

Proposição 5.7.1. *Sejam R e R' \mathbb{K} -álgebras finitamente geradas isomorfas. Então, o isomorfismo entre elas transforma o ideal jacobiano de uma no ideal jacobiano da outra.*

Prova. Ver [10, Proposition 4.4.4]. □

Exemplo 5.7.2. Sejam $A = \mathbb{K}[x, y, z, t_1, t_2, t_3]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo \mathbb{K} e $I = \langle t_1z - t_2y, t_2y - t_3x \rangle$. Consideremos $R = A/I$. Uma matriz jacobiana de R sobre \mathbb{K} é:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -t_2 & t_1 & z & -y & 0 \\ -t_3 & t_2 & 0 & 0 & y & -x \end{bmatrix}$$

Como visto no Exemplo 5.2.5, $\text{ht}(I) = 2$. Assim

$$J_{R/\mathbb{K}} := \langle I_2(\Theta), I \rangle / I.$$

Um cálculo direto nos dá

$$I_2(\Theta) = \langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz, t_1x, t_1z, t_2x, t_2y, t_2z, t_3y, t_3z \rangle$$

Portanto,

$$J_{R/\mathbb{K}} = \langle t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, xy, xz, yz, t_1x, t_1z, t_2x, t_2y, t_2z, t_3y, t_3z, I \rangle / I.$$

Teorema 5.7.3 (Critério Jacobiano). *Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios com coeficiente sobre um corpo \mathbb{K} de característica zero. Seja I um ideal puro de A e $R = A/I$. Suponha P sendo um ideal primo de R . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) R_P é anel regular.
- (b) P não está contido em $J_{R/\mathbb{K}}$.

Prova. Ver [10, Theorem 4.4.9] □

A observação a seguir será bastante importante nesse trabalho

Observação 5.7.4. Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios com coeficientes sobre um corpo de característica zero \mathbb{K} . Sejam I um ideal puro de A e $R = A/I$. Então R satisfaz a condição (R_1) de Serre se, e somente se, $\text{ht}(J_{R/\mathbb{K}}) \geq 2$. Com efeito, suponhamos que R satisfaz a condição (R_1) . Então, $R_{\mathfrak{p}}$ é regular para cada ideal primo de R de altura ≤ 1 . Assim, pelo critério Jacobiano, os primos contendo $J_{R/\mathbb{K}}$ tem que ter altura pelo menos 2. Por outro lado, suponha que $\text{ht}(J_{R/\mathbb{K}}) \geq 2$. Então, não existe primo de altura ≤ 1 contendo $J_{R/\mathbb{K}}$. Logo, novamente pelo critério Jacobiano, $R_{\mathfrak{p}}$ é regular para cada ideal primo de R de altura ≤ 1 .

Bibliografia

- [1] T. C. Benítez and C. D’Andrea, Minimal generators of the defining ideal of the Rees Algebra associated to monoid parametrizations, *Computer Aided Geometric Design* 27 (2010), 461–473.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **60**, Cambridge University Press, 1993.
- [3] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1327 Springer-Verlag, 1988.
- [4] Ela Celikbas, Emilie Dufresne, Louiza Fouli, Elisa Gorla, Kuei-Nuan Lin, Claudia Polini, and Irena Swanson, Rees algebras of sparse determinantal ideals, Preprint (2021), 17 pages, arXiv:2101.03222.
- [5] A. Conca, J. Herzog, and G. Valla, Sagbi bases with applications to blow-up algebras, *J. Reine Angew. Math.* 474 (1996), 113–138.
- [6] A. Doria, Z. Ramos and A. Simis, Linearly presented perfect ideals of codimension 2 in three variables, *J. Algebra* 512 (2018) 216–251.
- [7] D. Eisenbud, *Commutative Algebra With A View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150, New York, Springer-Verlag, 1995.
- [8] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, *Amer. J. Mathematics*, **110** (1988), 541–575.
- [9] J. Herzog and T. Hibi, *Monomial Ideals*, Grad. Texts in Math. 260, Springer, London, 2010.
- [10] C. Huneke and I. Swanson, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Society, Lecture Notes Series **336**, Cambridge University Press (2006).
- [11] Andrew R. Kustin, Claudia Polini, and Bernd Ulrich, The equations defining blowup algebras of height three Gorenstein ideals, *Algebra Number Theory* 11 (2017), 1489–1525.

- [12] S. Lang, *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, 211 (Revised third ed.), New York, Springer-Verlag, 2002.
- [13] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [14] S. Morey and B. Ulrich, Rees algebras of ideals with low codimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), 3653–3661.
- [15] L. Nguyen, On Rees algebras of linearly presented ideals, *J. Algebra* 420 (2014) 186-200.
- [16] L. Nguyen, On Rees algebras of linearly presented ideals in three variables, *J. Pure Appl. Algebra* 221 (2017) 2180-2191.
- [17] A. Simis, *Commutative Algebra*, De Gruyter Textbook, 2020.