



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Restrição de Fourier em conjuntos de Salem

Thiago Guimarães Melo

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO PPG-UFS

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Thiago Guimarães Melo

Restrição de Fourier em conjuntos de Salem

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado a Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
Maio de 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Restrição de Fourier em Conjuntos de Salem.

por

Thiago Guimarães Melo

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Orientador

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira - UFRGS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 12 de Maio de 2021

Thiago Guimarães Melo

Dissertation submitted to the Graduate Program in Mathematics, linked to the Federal University of Sergipe – in accordance with the requirements of the Graduate Program in Mathematics, for the degree of Master in Mathematics.

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida

UFS – São Cristóvão
May 2021

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M528r Melo, Thiago Guimarães
Restrição de Fourier em conjuntos de Salem / Thiago Guimarães
Melo ; orientador Marcelo Fernandes de Almeida. – São Cristóvão,
2021.
276 f.; il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2021.

1. Matemática. 2. Fourier, Transformadas de. 3. Sequências
(Matemática). I. Almeida, Marcelo Fernandes orient. II. Título.

CDU 5

*Primeiramente a Deus,
à minha família,
à minha namorada,
e todos aqueles que confiaram em mim.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter livrado a mim e à minha família de todo o mal e também por ter colocado pessoas em meu caminho que me levaram até este momento.

À minha mãe Kátia, meus irmãos Marcelo, Danylo, Lucas e irmãs Amanda e Débora, por estarem sempre comigo em todos os momentos.

À minha namorada Tatyane, por ter me apoiado em toda a execução do trabalho e por ter me ajudado nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, o Professor Marcelo Fernandes de Almeida, por ter tornado possível a execução deste trabalho e também por todos os conselhos profissionais e pessoais.

Aos amigos que ganhei na UFS, tanto na graduação quanto no mestrado, por todos os momentos de descontração e de ajuda.

A todos os professores do DMA, por terem contribuído direta e indiretamente para a minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“O impossível existe até que alguém duvide
dele e prove o contrário.”
(Albert Einstein)*

RESUMO

MELO, THIAGO, G. **Restrição de Fourier em conjuntos de Salem**. 2021. 273 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2021.

Neste trabalho, mostramos como a s -energia $I_s(\mu)$ de uma medida de Borel μ com suporte compacto se relaciona com a dimensão de Hausdorff de $\text{supp}(\mu)$. Por meio da transformada de Fourier distribucional do Núcleo de Riesz, relacionamos $I_s(\mu)$ com $\hat{\mu}$. Com isto, mostramos que dimensão de Hausdorff e transformada de Fourier de medidas são conceitos intimamente ligados, o que é traduzido na dimensão de Fourier. Para a construção de exemplos, fizemos um estudo de medidas de superfícies. Mais precisamente, utilizamos convergência fraca de medidas para calcular a transformada de Fourier da medida de superfície na esfera. Além disso, utilizamos o comportamento assintótico das funções de Bessel para mostrar que tal tem um decaimento rápido. Mais geralmente, estudamos integrais oscilatórias e aplicamos os resultados para obter o decaimento da transformada de Fourier da medida intrínseca a uma superfície regular compacta com um número l de curvaturas principais não nulas. Além disso, usamos o conceito de dimensão de Hausdorff para mostrar que o decaimento de tal medida é ótimo. Abordamos a conjectura da restrição na esfera e usamos o Exemplo de Knapp para chegar ao range necessário. Tratamos do Teorema de Stein-Tomas e obtivemos o mesmo como consequência do Teorema de Littman. Usamos as técnicas de Carleson-Sjölin para exibir a prova da conjectura da restrição no plano. Finalizamos esta dissertação apresentando o Teorema de Mockenhaupt-Mitsis, o qual generaliza o Teorema de Stein-Tomas, sem o end-point. Além disso, apresentamos algumas consequências do mesmo observadas por Mitsis. Brevemente versamos sobre a construção de uma medida suportada num conjunto de Salem, a qual, satisfaz as hipóteses do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis.

Palavras-chave: Restrição de Fourier, dimensão de Hausdorff, s -energia de medidas, dimensão de Fourier, conjuntos de Salem.

ABSTRACT

MELO, THIAGO, G. . 2021. 273 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE, 2021.

In this work, we show how the s -energy $I_s(\mu)$ of a Borel measure μ compactly supported is related to the Hausdorff dimension of $\text{supp}(\mu)$. Using the distributional Fourier transform of the Riesz kernel, we relate $I_s(\mu)$ to $\hat{\mu}$. In this way, we show that Hausdorff dimension and Fourier transforms of measures are closely linked concepts, which is translated into the Fourier dimension. For the construction of examples, we made a study of surface measures. More precisely, we use weak convergence of measures to calculate the Fourier transform of the surface measure in the sphere. In addition, we use the asymptotic behavior of Bessel's functions to show that it has a rapid decay. More generally, we study oscillatory integrals and apply the results to obtain the decay of the Fourier transform of the intrinsic measure of a compact regular surface with l non-zero principal curvatures. In addition, we use Hausdorff dimension concept to show that the decay of such a measure is optimal. We approach the restriction conjecture in the sphere and use the Knapp Example to get required range. We have dealt with the Stein-Tomas Theorem and obtained it as a consequence of the Littman Theorem. We use the techniques of Carleson-Sjölin to exhibit the proof of the restriction conjecture in the plane. We finish this dissertation by presenting the Mockenhaupt-Mitsis Theorem, which generalizes the Stein-Tomas Theorem, without the end-point. In addition, we present some consequences of the same observed by Mitsis. We briefly deal with the construction of a measure supported on a Salem set, which satisfies the hypotheses of the Mockenhaupt-Mitsis- Theorem.

Keywords: Fourier restriction, Hausdorff dimension, s -energy of measures, Fourier dimension, Salem sets.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Interseção de bola $B(x, r)$ e a esfera \mathbb{S}^{n-1}	73
Figura 2 – Intervalos $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$	110
Figura 3 – Conjunto de Cantor com escala d	110
Figura 4 – Curva de Von Koch	114
Figura 5 – Ponto crítico da função $ \varphi^{(k-1)} $	149
Figura 6 – Partição $[d; \alpha(1), \dots, \alpha(d); \eta]$	200
Figura 7 – Conjunto E_1	201
Figura 8 – Conjunto E_2	201
Figura 9 – Intervalos $I_{j_1}^2$	210
Figura 10 – Intervalos $I_{j_2 j_3}^3$	210
Figura 11 – Etapas da construção de C_X	211

LISTA DE SÍMBOLOS

$X \lesssim Y$ — Quando existe uma constante $C > 0$ tal que $X \leq CY$.

$X \gtrsim Y$ — Quando existe uma constante $D > 0$ tal que $X \geq DY$.

$BC(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n limitadas com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n contínuas com suporte compacto com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n contínuas que se anulam no infinito com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n que têm k derivadas contínuas com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n que têm infinitas derivadas contínuas com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ — Funções definidas em \mathbb{R}^n que têm infinitas derivadas contínuas e suporte compacto com imagem em $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$f(x) = O(|x|^k)$ — Quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|^k$ para todo $x \geq x_0$.

$S(x, r)$ — Fronteira da bola aberta de centro x e raio r .

$B[x, r]$ — Bola fechada de centro x e raio r .

$B(x, r)$ — Bola aberta de centro x e raio r .

$d(A, B)$ — Distância entre os conjuntos A e B .

$\text{diam}(A)$ — Diâmetro do conjunto A .

$\text{supp}(\mu)$ — Suporte da medida μ .

$\text{supp}(f)$ — Suporte da função f .

\mathcal{L}^n — Medida de Lebesgue n -dimensional.

\mathcal{H}^s — Medida de Hausdorff de dimensão α .

\mathcal{B} — σ -álgebra de Borel.

$[0, \infty]$ — Conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \infty\}$.

$P(\Omega)$ — Conjunto das partes de Ω .

$C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ — É o conjunto de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que tem k -derivadas contínuas.

T^* — Operador adjunto de T .

J_f — Matriz jacobiana de uma função f definida em \mathbb{R}^n .

∇ — Operador gradiente.

df_x — Derivada de uma função f aplicada no ponto x .

\wedge — Produto exterior.

$\text{int } \Omega$ — Interior do conjunto Ω .

$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — Complementar do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

\perp — Ortogonalidade entre vetores.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	A conjectura da restrição na esfera	23
1.2	Teorema da restrição de Mockenhaupt-Mitsis	24
1.3	Decaimento de medidas intrínsecas a superfícies	25
1.4	Dimensão de Hausdorff e dimensão de Fourier	26
1.5	Conjuntos de Salem C_X e medidas $\mu_X \in \mathcal{M}(C_X)$	27
1.6	Uma generalização de restrição de Fourier	28
2	PRELIMINARES	31
2.1	Construção de Carathéodory e medidas de Borel	31
2.2	Medida de Hausdorff	34
2.3	O dual de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	41
2.3.1	<i>Medidas de Radon</i>	41
2.3.2	<i>O Teorema da Representação de Riesz</i>	44
2.3.3	<i>Convergência fraca de medidas</i>	49
2.4	Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^n	60
2.4.1	<i>Superfície regular e espaço tangente</i>	61
2.4.2	<i>A primeira forma fundamental</i>	64
2.4.3	<i>Medida intrínseca de superfície</i>	65
2.4.3.1	<i>Medida em superfície compacta</i>	68
2.4.4	<i>Orientabilidade de superfícies</i>	73
2.4.5	<i>A segunda forma fundamental</i>	82
2.5	Transformada de Fourier de medidas	84
2.6	Transformada de Fourier de distribuições	92
2.7	Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin	96
2.7.1	<i>Desigualdade de Hausdorff-Young</i>	103
3	ENERGIA DE MEDIDAS E DIMENSÃO DE FOURIER	105
3.1	Dimensão de Hausdorff	106
3.1.1	<i>O conjunto de Cantor</i>	109
3.1.2	<i>Dimensão de Hausdorff e auto-similaridade</i>	112
3.1.2.1	<i>Dimensão de Hausdorff de conjuntos auto-similares</i>	112
3.1.2.2	<i>Dimensão de Hausdorff e aplicações Lipschitzianas</i>	114

3.1.3	<i>Dimensão de Hausdorff de superfícies regulares</i>	115
3.2	Lema de Frostman	117
3.3	Energia de medidas e dimensão de Hausdorff	123
3.4	A transformada de Fourier do núcleo de Riesz	125
3.5	Transformadas de Fourier e energia de medidas	130
3.5.1	<i>Conjuntos de Salem e dimensão de Fourier</i>	133
4	DECAIMENTO DE FOURIER DE MEDIDAS SUPERFICIAIS	137
4.1	Decaimento de Fourier de medida superficial na esfera	137
4.2	Integrais Oscilatórias	141
4.2.1	<i>Método da fase não-estacionária</i>	142
4.2.2	<i>Método da fase estacionária</i>	147
4.3	Transformada de Fourier de medidas superficiais	158
4.4	Decaimento de Fourier de medidas superficiais	159
5	RESTRICÇÃO DE FOURIER SOBRE SUPERFÍCIES	163
5.1	Problemas de restrição	163
5.2	Exemplo de Knapp na esfera	172
5.3	A conjectura da restrição na esfera \mathbb{S}^{n-1}	175
5.4	A conjectura da restrição em curvas no \mathbb{R}^2	178
5.5	Teorema de Greenleaf-Littman	189
6	RESTRICÇÃO DE FOURIER EM CONJUNTOS DE SALEM	195
6.1	Teorema de Mockenhaupt-Mitsis	195
6.2	Conjuntos de Salem C_X e medidas $\mu \in \mathcal{M}(C_X)$	199
6.2.1	<i>Construção de conjuntos de Salem</i>	200
6.2.2	<i>Medidas com suporte em conjunto de Cantor</i>	202
6.2.2.1	<i>Medida de Cantor e decaimento de Fourier</i>	204
6.2.3	<i>Construção de Salem-Bluhm</i>	209
6.2.3.1	<i>Construção do conjunto C_X</i>	209
6.2.3.2	<i>Construção da medida μ_X</i>	211
6.2.3.3	<i>Decaimento de $\widehat{\mu_X}$</i>	213
6.3	Uma generalização de restrição de Fourier	219
6.4	Caso end-point do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis	222
6.4.1	<i>Espaços de Lorentz</i>	222
6.4.2	<i>Espaços de interpolação</i>	225
6.4.3	<i>O end-point</i>	229
	REFERÊNCIAS	239

APÊNDICE A	APÊNDICE	243
A.1	Elementos de análise de Fourier	243
A.1.1	Transformada de Fourier em L^1	243
A.1.2	A classe de Schwartz	254
A.1.2.1	Transformada de Fourier em L^2	262
A.1.2.2	Transformada de Fourier em $L^p, 1 < p < 2$	264
A.1.3	Transformada de Fourier de funções radiais	265
A.2	A Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev	270

INTRODUÇÃO

Usando o Lema de Riemann-Lebesgue, concluímos que a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é sempre uma função contínua. Sendo assim, podemos restringir pontualmente \hat{f} a qualquer subconjunto E de \mathbb{R}^n , inclusive quando $\mathcal{L}^n(E) = 0$. Todavia, isto não é verdade em geral. Basta considerar uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p \leq 2$, então a restrição $\hat{f}|_E$ não é bem definida quando E é um hiperplano (veja Exemplo 5.1.1). Sabe-se que se E for uma superfície regular, compacta e com curvatura Gaussiana não nula, então $\hat{f}|_E$ é bem definida em $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e usando exemplos do tipo Knapp chegamos a famosa conjectura da restrição, como ficará mais claro nas linhas abaixo. Todavia, o fenômeno da restrição pode ocorrer em conjuntos sem nenhum tipo de curvatura, por exemplo, em conjuntos de Salem.

1.1 A conjectura da restrição na esfera

Seja \mathbb{S}^{n-1} a esfera unitária em \mathbb{R}^n . Para lidar com o problema de restringir \hat{f} a \mathbb{S}^{n-1} , pesquisadores tem trabalhado para mostrar a existência de pares (p, q) que satisfaçam estimativas da forma

$$\|\hat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^q(\sigma^{n-1})} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

A conjectura da restrição na esfera \mathbb{S}^{n-1} é um problema em aberto bastante famoso da análise harmônica. Mais precisamente, conjectura-se que o operador $\mathcal{R} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\sigma^{n-1})$ dado por $\mathcal{R}(f) = \hat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é limitado com as condições necessárias

$$1 \leq p < \frac{2n}{n+1} \quad \text{e} \quad 1 \leq q \leq \frac{(n-1)p'}{n+1}, \quad (1.2)$$

com p' satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Equivalentemente,

$$1 \leq p < \frac{2n}{n+1} \quad \text{e} \quad 1 \leq p \leq \frac{(n+1)q}{(n+1)q - (n-1)}. \quad (1.3)$$

No Capítulo 5 iremos utilizar o famoso Exemplo de Knapp na esfera para chegar em tais condições necessárias. Basicamente, Knapp construiu uma certa função característica em uma pequena porção da esfera. As ferramentas desenvolvidas por Carleson e Sjölin em (CARLESON; SJÖLIN, 1972) foram usadas para mostrar que a conjectura é verdadeira não só para a esfera, mas para qualquer curva suave e compacta em \mathbb{R}^2 . Ou seja, se $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva suave e compacta com curvatura Gaussiana não nula em todo ponto, então

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.4)$$

quando $1 \leq p < \frac{4}{3}$ e $1 \leq q \leq \frac{1}{3}p'$. Em outras palavras, se $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ com $1 \leq p < 4/3$, então $\widehat{f}|_\gamma$ é uma genuína função do espaço $L^q(\gamma)$, sempre que $1 \leq q \leq \frac{1}{3}p'$. Iremos abordar este resultado no Capítulo 5. Todavia, Zygmund em (ZYGmund, 1974) provou que tal conjectura é verdadeira em \mathbb{R}^2 apenas para a esfera. Além disso, Zygmund provou outras estimativas de restrição para séries.

Um dos resultados parciais mais celebrados nesta teoria é o Teorema de Stein-Tomas provado em (TOMAS, 1975). Este dá uma resposta completa ao problema quando $q = 2$. Mais precisamente, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a estimativa

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.5)$$

é válida sempre que $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$. Neste trabalho, iremos mostrar que o intervalo de restrição do Teorema de Stein-Tomas é ótimo. Além disso, iremos exibir a prova do mesmo como consequência do Teorema de Greenleaf-Littman.

1.2 Teorema da restrição de Mockenhaupt-Mitsis

Já percebemos que a curvatura de subconjuntos de medida nula são peças fundamentais em problemas de restrição. Porém, será que podemos falar em problemas de restrição com medidas suportadas em conjuntos de medida nula não suaves? No Capítulo 6 iremos tratar do objetivo central deste trabalho, que é dissertar sobre os trabalhos de Mockenhaupt (MOCKENHAUPT, 2000) e Mitsis (MITSIS, 2002). Estes provaram, independentemente, uma versão do Teorema de Stein-Tomas para medidas mais gerais, suportadas em conjuntos compactos, podendo ser inclusive não suaves e contidos em \mathbb{R} . Mais precisamente:

Teorema 1.2.1 (Mockenhaupt-Mitsis). Sejam $0 < \alpha < n$ e $0 < \beta \leq \alpha$. Suponha que $\mu \in$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida tal que

$$\mu(B(x, r)) \lesssim r^\alpha, \quad \forall x \in \text{supp}(\mu) \text{ e } r > 0 \quad (1.6)$$

e

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\beta/2}, \quad \xi \neq 0. \quad (1.7)$$

Se $1 \leq p < p_c = \frac{2(n-\alpha)+\beta}{2(n-\alpha)+\beta/2}$, então existe uma constante positiva $C > 0$ (independente de f) tal que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.8)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A estimativa no ponto crítico p_c foi provada por Bak e Seeger em (BAK; SEEGER, 2010), onde eles usaram o método de interpolação de Bourgain em espaços de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como no Teorema de Stein-Tomas, o intervalo de restrição do Teorema 1.2.1 é ótimo e isto foi provado recentemente por Hambrook e Laba em (HAMBROOK; LABA, 2013).

1.3 Decaimento de medidas intrínsecas a superfícies

Seja σ_S uma medida intrínseca a uma superfície regular e compacta, usando o método da fase estacionária e não-estacionária obtemos o seguinte resultado famoso:

Teorema 1.3.1. (LITTMAN, 1963) Seja S uma superfície regular compacta com m curvaturas principais não nulas em cada ponto e σ_S a sua medida intrínseca induzida pela primeira forma fundamental. Então, temos a seguinte taxa de decaimento de Fourier da medida σ_S ,

$$|\widehat{\sigma}_S(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{m}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.9)$$

Evidentemente, a medida superficial σ^{n-1} satisfaz a estimativa dimensional (1.6). Em particular, como a quantidade de curvaturas principais não nulas da esfera \mathbb{S}^{n-1} é $n - 1$, segue que

$$|\widehat{\sigma}^{n-1}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{(n-1)}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.10)$$

Com isto, percebemos que o Teorema 1.2.1 generaliza o Teorema de Stein-Tomas, sem o endpoint. Ficará claro a contribuição do Teorema 1.2.1, quando apresentarmos uma construção de uma medida μ com suporte compacto satisfazendo as estimativas (1.6) e (1.7).

1.4 Dimensão de Hausdorff e dimensão de Fourier

Bluhm em (BLUHM, 1996) e Mockenhaupt em seu trabalho já mencionado, usaram a construção feita por Salem em (SALEM, 1951), para exibir um conjunto satisfazendo as condições (1.6) e (1.7). É nosso objetivo secundário tratar brevemente de tal construção. Por isto, reservamos o Capítulo 3 para explorar o conceito de dimensão de Hausdorff e energia de medidas. Mais precisamente, iremos provar o Lema de Frostman e utilizar o mesmo para mostrar a conhecida identidade

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), \mu(B(x, r)) \lesssim r^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}.$$

Além disso, definindo a s -energia da medida μ por

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} K_s * \mu d\mu, \quad (1.11)$$

temos que

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), I_s(\mu) < \infty\}.$$

O Núcleo de Riesz é definido como $K_s(x) = |x|^{-s}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $0 < s < n$. Estes podem ser vistos como distribuições temperadas. Além disso, sua transformada de Fourier distribucional é dada por

$$\widehat{K}_s = cK_{n-s}, \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

com c sendo uma constante positiva dependendo de n e s . Isto culminará na identidade

$$I_s(\mu) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx, \quad (1.12)$$

que é a chave para relacionar dimensão de Hausdorff e transformada de Fourier de medidas. Mais precisamente, isto dá origem a uma nova noção de dimensão de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, a saber, a dimensão de Fourier:

$$\dim_F(A) = \sup_{0 < s < n} \{s : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), |\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2}, x \neq 0\}.$$

É de rápida verificação que $\dim_F(A) \leq \dim_{\text{H}}(A)$. Os conjuntos para os quais $\dim_F(A) = \dim_{\text{H}}(A)$ são denominados conjuntos de Salem, cujo nome vem de R. Salem, que construiu o primeiro conjunto com tal propriedade em (SALEM, 1951). Se $\dim_{\text{H}}(A) = s$ e $\mu \in \mathcal{M}(A)$, então

$$|\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (1.13)$$

é o melhor decaimento que $\hat{\mu}$ pode ter, isto é, se $s_0 > s$, não pode ocorrer $|\hat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s_0/2}$. Com isto percebemos que a hipótese (1.7) do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis está profundamente ligada à dimensão de Hausdorff de $\text{supp}(\mu)$, mais precisamente, $\beta \leq \dim_{\text{H}}(\text{supp}(\mu)) = \alpha$.

1.5 Conjuntos de Salem C_X e medidas $\mu_X \in \mathcal{M}(C_X)$

Conforme já comentamos, (BLUHM, 1996) usou a construção feita por Salem na década de 50 para exibir conjuntos de Salem no \mathbb{R}^n . No Capítulo 6, iremos tratar de tal construção em \mathbb{R} . Mais precisamente, mostraremos:

Teorema 1.5.1. Dado $\alpha \in (0, 1)$, existe um conjunto C_X e uma medida $\mu_X \in \mathcal{M}(C_X)$ tais que

- i) $\dim_{\text{H}}(C_X) = \alpha$;
- ii) $\hat{\mu}_X(\xi) = O(|\xi|^{-\beta/2})$, para todo $\beta < \alpha$;
- iii) $\mu_X(I) \lesssim |I|^\alpha$, para todo intervalo aberto I .

Seja $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ e $\theta_N = N^{-1/\alpha}$. Além disso, considere c_α tal que

$$\frac{1}{N} - \theta_N > c_\alpha/N.$$

A construção é essencialmente como segue: Consideramos o intervalo $C_1 = [0, 1]$ e aplicamos uma partição

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N], \quad N = 2.$$

Basicamente, tal partição nos faz considerar dois subintervalos extremos de C_1 . Denote por C_2 a união destes. Em cada um que restou, aplicamos a partição

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N], \quad N = 3,$$

o que irá originar 6 novos subintervalos. Denote por C_3 a união destes. Continuando o processo, na etapa N iremos obter $N!$ subintervalos, denotando por C_N a união deste, definimos

$$C_X = \bigcap_{N \geq 2} C_N,$$

com X sendo a sequência

$$X = (X_{N,j})_{\substack{N=2,3,\dots \\ j=1,\dots,N}}.$$

Os números $X_{N,j}$ na sequência acima são escolhidos criteriosamente de modo a satisfazer:

$$X_{N,j} \in \left[\frac{j-1}{N} + \frac{c_\alpha}{N}, \frac{j-1}{N} + \frac{2c_\alpha}{N} \right], \quad j = 1, \dots, N.$$

Por fim, definimos uma medida μ_X como sendo o limite fraco da sequência $\{\nu_N\}_N$, com

$$\nu_N := \frac{1}{N!} \sum_{\epsilon \in \xi^N} \delta_{a(\epsilon)} = *_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right),$$

onde $\xi^N = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N) : \epsilon_k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ e

$$a(\epsilon) = \sum_{k=2}^N \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j_k}, \quad \text{com } \theta_1 := 1. \quad (1.14)$$

Usando o Teorema 1.5.1 acima, obtemos estimativas de restrição de Fourier sobre conjuntos de Salem, a saber,

$$\|\widehat{f}\|_{C_X} \|_{L^2(\mu_X)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (1.15)$$

para todo $1 \leq p < p_c = \frac{2(1-\alpha)+\beta}{2(1-\alpha)+\beta/2}$.

1.6 Uma generalização de restrição de Fourier

Se soubermos apenas que $\widehat{\mu}$ tem o decaimento (1.7), será que isto pode influenciar o comportamento de μ em bolas? A resposta para isto está no resultado a seguir.

Proposição 1.6.1. Seja μ uma medida em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ cuja transformada de Fourier satisfaz o decaimento (1.7) para $0 < \beta < n$. Então,

$$\mu(B(x, r)) \lesssim r^{\beta/2}, \quad (1.16)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Consequentemente, pelo Teorema 1.2.1 de Mitsis-Mockenhaupt obtemos a seguinte estimativa de restrição:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $1 \leq p < \frac{4n}{4n-\beta}$, com $0 < \beta < n$.

À luz do método TT^* , para provar o Teorema 1.2.1, é suficiente mostrar que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\widehat{\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.17)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para tanto, usamos o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin nas estimativas

$$\|(\varphi_j \widehat{\mu}) * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.18)$$

e

$$\|(\varphi_j \widehat{\mu}) * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.19)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ sendo a partição da unidade de Littlewood-Paley. Para mostrar a estimativa (1.19) é utilizado apenas a identidade de Plancherel, fórmula da convolução e a condição dimensional (1.6) para estimar $\|\mu_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Logo, pelo método TT^* , de certa forma podemos esperar que haja uma limitação para $\widehat{f\mu}$ sob condições mais gerais. Isto foi primeiro observado por Strichartz em (STRICHARTZ, 1990) em um outro contexto, provando que se $\mu(B(x, r)) \lesssim r^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ com $0 < \alpha < n$, então

$$\int_{B(x_0, r)} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi \lesssim r^{n-\alpha} \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \quad (1.20)$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Contudo, Mitsis mostrou o seguinte resultado mais geral.

Teorema 1.6.2. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\mu(B(x, r)) \lesssim h(r)$, para alguma função não negativa h . Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{B(x_0, r)} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi \lesssim r^n h(c/r) \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \quad (1.21)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f \in L^2(\mu)$. Quando $h(r) = r^\alpha$ obtemos o (1.20).

PRELIMINARES

2.1 Construção de Carathéodory e medidas de Borel

Nesta seção, iremos apresentar um resultado que nos mostra como construir uma medida geral, o que será a chave para a construção das medidas de Hausdorff. Além disso, iremos ver algumas propriedades das medidas de Borel e trataremos de sua regularidade. As referências básicas utilizadas ao longo desta seção foram (MATTILA, 2015) e (MATTILA, 1995).

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotaremos por $P(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . Neste trabalho $[0, \infty]$ irá simbolizar o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \infty\}$. Uma função $\mu : P(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ é chamada de **medida** quando for monótona crescente, subaditiva enumerável e que se anula no conjunto vazio. É importante frisar que o função que estamos chamando de medida é chamada de **medida exterior** nos livros clássicos de teoria da medida.

A proposição a seguir nos mostra como construir uma medida de maneira geral.

Proposição 2.1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ com $\emptyset, \Omega \in \mathcal{E}$. Além disso, seja $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ uma função tal que $\rho(\emptyset) = 0$. A função

$$\rho^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : E_i \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}, \quad (2.1)$$

para todo $A \subset \Omega$, é uma medida.

Demonstração. Note que $\rho^*(A)$ está bem definido, pois, dado $A \subset \Omega$, sempre existe $\{E_i\}_1^{\infty} \subset \mathcal{E}$ com $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, uma vez que $\Omega \in \mathcal{E}$. Naturalmente $\rho^*(\emptyset) = 0$, já que, $\emptyset \in \mathcal{E}$. É imediato que $\rho^*(A) \leq \rho^*(B)$ para $A \subset B$ pois o conjunto sobre o qual o ínfimo na definição de $\rho^*(A)$ é tomado inclui o conjunto correspondente na definição de $\rho^*(B)$. Para mostrar a subaditividade seja $\{A_i\}_1^{\infty}$ uma coleção de subconjuntos de Ω e $\epsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\{E_i^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tal que $A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_i^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_i^k) < \rho^*(A_i) + \epsilon 2^{-i}$. Dessa forma, temos que $\bigcup_i A_i \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} E_i^k$

e $\sum_{i,k=1}^{\infty} \rho(E_i^k) \leq \sum_i \rho^*(A_i) + \epsilon$ e portanto $\rho^*(\cup_i A_i) \leq \sum_i \rho^*(A_i) + \epsilon$. Como ϵ foi arbitrário concluímos a prova. \square

Na Seção 2.2 iremos tomar ρ e \mathcal{E} adequados na Proposição 2.1.1 para construir as medidas que irão originar as medidas de Hausdorff.

Toda medida μ sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dá origem a uma σ -álgebra \mathbb{M} , a saber, a família de subconjuntos $E \subset \Omega$ tais que

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E), \forall A \subset \Omega. \quad (2.2)$$

Diremos que um conjunto E é μ -mensurável, se o mesmo satisfaz (2.2). Usando o Teorema de Carathéodory (FOLLAND, 1999, Teorema 1.11) concluímos que de fato a coleção \mathbb{M} é uma σ -álgebra e $\mu|_{\mathbb{M}}$ é uma medida aditiva, isto é,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

sempre que $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{M}$ satisfaz $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$.

Denotaremos por \mathcal{B}_{Ω} a σ -álgebra de Borel, isto é, a interseção de todas as σ -álgebras contendo os conjuntos abertos (equivalentemente os fechados) de Ω . Neste trabalho será comum chamar um elemento da σ -álgebra \mathcal{B}_{Ω} por boreliano de Ω . Quando não houver risco de confusão iremos utilizar apenas \mathcal{B} ao invés de \mathcal{B}_{Ω} . Diremos que uma medida μ é uma **medida de Borel**, se todos os borelianos de Ω são μ -mensuráveis.

Na Seção 2.3.3 iremos definir um espaço adequado para tratar alguns conceitos fundamentais para este trabalho, a saber, o conceito de convergência fraca e transformada de Fourier de Medidas. Para tanto, precisaremos do seguinte definição.

Definição 1. Seja μ uma medida de Borel sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que μ é **regular**, se para cada $A \subset \Omega$ existe um boreliano $B \subset \Omega$ e contendo A tal que $\mu(A) = \mu(B)$.

A restrição de uma medida μ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a um conjunto $A \subset \Omega$, denotada por $\mu \llcorner A$, é definida por

$$\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B),$$

para todo $B \subset \Omega$. Este conceito será muito importante para este trabalho, pois é com ele que iremos construir sequências de medidas com boas propriedades. Mais precisamente, iremos utilizar este conceito na demonstração do Lema de Frostman na Seção 3.2. Naturalmente $\mu \llcorner A$ é de fato uma medida sobre \mathbb{R}^n . Vejamos algumas relações entre $\mu \llcorner A$ e μ .

Teorema 2.1.2. Seja μ uma medida sobre \mathbb{R}^n .

- 1) Todo conjunto μ -mensurável é também $\mu \llcorner B$ - mensurável, com B arbitrário;
- 2) Se μ é regular e A é μ -mensurável com $\mu(A) < \infty$ então $\mu \llcorner A$ é regular.

Demonstração. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto μ -mensurável e $A \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. É de rápida verificação, por meio da identidade (2.2), que

$$(\mu \llcorner B)(A) = (\mu \llcorner B)(A \cap E) + (\mu \llcorner B)(A \setminus E).$$

Logo o item 1) é válido. Provemos então o item 2). Como μ é regular, existe um boreliano B com $A \subset B$ tal que $\mu(A) = \mu(B)$. Dessa forma, como $\mu(A) < \infty$ naturalmente temos $\mu(B \setminus A) = 0$, pois, $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer. Novamente pela regularidade de μ podemos encontrar um boreliano D com $B \cap C \subset D$ e $\mu(B \cap C) = \mu(D)$. Defina o conjunto de Borel $E = D \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$ e note que $C \subset E$. É claro que $(\mu \llcorner A)(E) = \mu(A \cap E) \leq \mu(B \cap E)$. Logo, como $B \cap E = B \cap D$ obtemos

$$(\mu \llcorner A)(E) \leq \mu(B \cap D) \leq \mu(D) = \mu(B \cap C).$$

Utilizando que $\mu(B \setminus A) = 0$, é de rápida verificação que $\mu((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = 0$. Logo, como $A \cap C \subset B \cap C$ temos que $\mu(B \cap C) = \mu(A \cap C)$ e portanto

$$(\mu \llcorner A)(E) \leq (\mu \llcorner A)(C),$$

o que é suficiente para concluirmos que $(\mu \llcorner A)(E) = (\mu \llcorner A)(C)$, ou seja, $\mu \llcorner A$ é regular. \square

Neste trabalho, a medida de Lebesgue n -dimensional será denotada por \mathcal{L}^n e a integral de uma função mensurável f com respeito a mesma poderá ser denotada por $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, $\int f(x) dx$, $\int_{\mathbb{R}^n} f$ ou simplesmente $\int f$. Lembre que o suporte de uma função f com valores complexos definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é definido por $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ e o espaço de tais funções será denotado por $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ou simplesmente por $C_c(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, ou simplesmente $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções em $C^c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ que são suaves. Além disso, sendo $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ sabemos que

$$\text{supp}(fg) \subset \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) \tag{2.3}$$

e

$$\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g). \tag{2.4}$$

Seja μ uma medida de Borel em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O **suporte** de μ , denotado por $\text{supp}(\mu)$, é a interseção de todos os conjuntos fechados F , tais que $\mu(\Omega \setminus F) = 0$. Em outras palavras,

$$\text{supp}(\mu) = \Omega \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V, \tag{2.5}$$

com $D = \{V \subset \Omega : \mu(V) = 0 \text{ e } V \text{ é aberto}\}$. Finalizamos esta seção com uma Observação que irá nos ajudar a ver $(\text{supp}(\mu), \mu)$ como um espaço de medida bem definido, ou seja, a forma como μ age "fora" de seu suporte é irrelevante.

Observação 2.1.3. Se $B \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$, então $\mu(B) = 0$. Para constatar isso basta verificarmos que de fato $\mu(\Omega \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$, pois $B \subset \Omega \setminus \text{supp}(\mu)$. Com efeito, como \mathbb{R}^n é separável e tem base enumerável, então o mesmo ocorre para o aberto $\Omega \setminus \text{supp}(\mu)$, dessa forma, como D é uma cobertura aberta para $\Omega \setminus \text{supp}(\mu)$ pela Propriedade de Lindelöf (LIMA, 1977, Proposição 1), podemos extrair uma cobertura enumerável de D . Logo

$$\mu(\Omega \setminus \text{supp}(\mu)) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(V_j) = 0.$$

2.2 Medida de Hausdorff

Nesta seção, iremos utilizar a Construção de Carathéodory para construir a medida de Hausdorff. Além disso, mostraremos propriedades de tais medidas, que serão fundamentais para o conceito de dimensão de Hausdorff no Capítulo seguinte. As referências principais aqui usadas foram (MATTILA, 1995; EVANS; GARIEPY, 2015; FOLLAND, 1999).

Sejam A, B subconjuntos de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $0 < \delta \leq \infty$. Quando A for limitado denotaremos seu diâmetro por $\text{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$. Além disso, a distância entre A e B será denotada por $d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$.

Dado $\delta > 0$, dizemos que uma coleção $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos de Ω é uma δ -cobertura de A se $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $\text{diam}(E_i) \leq \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$. É importante notar que uma δ -cobertura é uma cobertura mais refinada do que uma cobertura qualquer. As δ -coberturas são importantes para a medição de conjuntos mais "irregulares", o que exploraremos no Capítulo 3 com o conjunto de Cantor. Dados $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$ e $A \subset \Omega$ defina

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}. \quad (2.6)$$

Note que o ínfimo é tomado sob todas δ -coberturas $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de A . Iremos adotar a convenção $\text{diam}(\emptyset) = 0$. Dessa forma, note que a expressão (2.6) é exatamente a medida da Proposição 2.1.1 com $\rho(A) = \text{diam}(A)^s$ e \mathcal{E} sendo uma coleção composta por \emptyset, Ω e todas as δ -coberturas para A , para todo $A \subset \Omega$. Sendo assim, \mathcal{H}_{δ}^s é uma medida.

No exemplo a seguir, iremos explorar o comportamento das δ -coberturas de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ quando diminuimos o valor de δ . Isto será fundamental para definirmos a medida de Hausdorff.

Exemplo 2.2.1. Para $A \subset \mathbb{R}^n$, temos a relação

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\epsilon^s(A), \quad (2.7)$$

sempre que $0 < \epsilon < \delta \leq \infty$. De fato, sendo $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ uma ϵ -cobertura para $A \subset \Omega$, temos que $\text{diam}(E_i) \leq \epsilon$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ é uma δ -cobertura para A e portanto

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s.$$

Como a ϵ -cobertura $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ foi arbitrária obtemos (2.7).

Vejamos o conceito mais importante desta seção.

Definição 2. A medida de Hausdorff “ s -dimensional” de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida pela expressão

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A), \quad (2.8)$$

onde $\delta \downarrow 0$ significa que $\delta \rightarrow 0$ para $\delta > 0$.

Pelo Exemplo 2.2.1 e o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que (2.8) está bem definido. O termo dimensão utilizado na Definição 2 não foi usado ao acaso. Veremos no Capítulo 3 que as medidas $\mathcal{H}^s(A)$ irão dar origem a uma noção de dimensão para os conjuntos \mathcal{H}^s -mensuráveis.

Vimos na Seção 2.1 que uma medida é de Borel quando os borelianos são μ -mensuráveis. Portanto, medidas de Borel são aditivas pelo Teorema de Carathéodory. Por outro lado, o **Crítério de Carathéodory** (EVANS; GARIEPY, 2015, Teorema 1.9) nos fornece condições para a recíproca. Mais precisamente, se μ é uma medida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad (2.9)$$

para quaisquer $A, B \subset \Omega$ com $d(A, B) > 0$, então μ é uma medida de Borel. O resultado a seguir garante que a medida de Hausdorff é uma medida de Borel.

Teorema 2.2.2. \mathcal{H}^s é uma medida de Borel sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sejam $A, B \subset \Omega$ com $d(A, B) > 0$ e $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ uma δ -cobertura para $A \cup B$, com $0 < \delta < d(A, B)/2$. Logo, pela forma que escolhemos δ nenhum dos conjuntos E_i 's intersecta ambos A e B , e com isso, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s \geq \sum_{A \cap E_i} \text{diam}(E_i)^s + \sum_{B \cap E_i} \text{diam}(E_i)^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Com isso, tomando o ínfimo sob todas as δ -coberturas para $A \cup B$ concluímos $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Como a desigualdade contrária é consequência da monotonicidade de \mathcal{H}_δ^s , segue que $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) = \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Isto não nos diz que \mathcal{H}_δ^s é uma medida de Borel, uma vez que δ está dependendo de A e B . Todavia, fazendo $\delta \downarrow 0$, temos $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ e portanto pelo Critério de Carathéodory (2.9) concluímos o resultado. \square

É irrelevante escolher δ -coberturas de conjuntos abertos ou fechados para construir medidas de Hausdorff, conforme a Proposição a seguir.

Proposição 2.2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e considere as coleções

- 1) $\mathcal{F}_1 = \{F \subset \Omega : F \text{ é fechado}\};$
- 2) $\mathcal{F}_2 = \{U \subset \Omega : U \text{ é aberto}\}.$

Dado $A \subset \Omega$, vale $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \psi_\delta^s(A)$, onde

$$\psi_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s \right\},$$

e o ínfimo é tomado sobre todas as δ -coberturas $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_j, j = 1, 2$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de $A \subset \Omega$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s < \mathcal{H}_\delta^s(A) + \epsilon. \quad (2.10)$$

Como $\text{diam}(E_i) = \text{diam}(\overline{E_i})$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(F_i)^s < \mathcal{H}_\delta^s(A) + \epsilon, F_i = \overline{E_i} \in \mathcal{F}_1.$$

Uma vez que $E_i \subset F_i$, então a desigualdade anterior diz que $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ é o ínfimo do conjunto de todas as somas $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(F_i)^s$ com $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ δ -cobertura de A e $F_i \in \mathcal{F}_1$, isto é, $\mathcal{H}_\delta^s(A) = \psi_\delta^s(A)$. Façamos o caso do item 2). Utilizando os mesmos conjuntos E_i 's anteriores, seja $U_i = \bigcup_{x \in E_i} B(x, \eta)$, com η sendo suficientemente pequeno de modo que $\text{diam}(U_i) \leq \delta$. É natural que $\text{diam}(U_i) = \text{diam}(E_i) + 2\eta$. Com isto obtemos

$$(\text{diam}(U_i) - 2\eta)^s = \text{diam}(E_i)^s.$$

Logo, por (2.10) obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i) - 2\eta)^s < \mathcal{H}_\delta^s(A) + \epsilon.$$

Fazendo $\eta \rightarrow 0$ e depois $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A),$$

com $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e $\text{diam}(U_i) \leq \delta$. Como $\psi_\delta^s(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s$, concluímos também que $\psi_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A)$. Como a desigualdade contrária é imediata, obtemos $\psi_\delta^s(A) = \mathcal{H}_\delta^s(A)$. Logo, fazendo $\delta \downarrow 0$ concluímos. \square

Proposição 2.2.4. A medida de Hausdorff \mathcal{H}^s é regular.

Demonstração. Seja $A \subset \Omega$ e para cada $i \in \mathbb{N}$ considere uma $1/i$ -cobertura $\{E_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ para A satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(E_{ij})^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^s(A) + \frac{1}{i}.$$

Pela Proposição 2.2.3 - (2) podemos supor que $E_{i,j}$ são abertos, ou seja, borelianos. Note que $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$ é um conjunto de Borel contendo A . Vamos mostrar que $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$. Com efeito, para cada $i \in \mathbb{N}$, note que $\{E_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ é uma $1/i$ -cobertura para B , para todo $i \in \mathbb{N}$, o que implica,

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^s(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(E_{ij})^s < \mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^s(A) + \frac{1}{i}.$$

Fazendo $i \rightarrow \infty$ segue que $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. A desigualdade contrária segue da monotonicidade de \mathcal{H}^s . \square

Medidas de Hausdorff se comportam bem sob translações e dilatações de subconjuntos do \mathbb{R}^n . Mais precisamente, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $0 < t < \infty$, temos

$$\mathcal{H}^s(A + a) = \mathcal{H}^s(A) \text{ e } \mathcal{H}^s(tA) = t^s \mathcal{H}^s(A), \quad (2.11)$$

com $A + a = \{x + a : x \in A\}$ e $tA = \{tx : x \in A\}$. No que segue, iremos mostrar que a medida de Hausdorff \mathcal{H}^n é, a menos de uma constante, igual a medida de Lebesgue \mathcal{L}^n . Para isto, relembre que uma medida regular μ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita **uniformemente distribuída** se $\mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r))$, para todo $x, y \in \Omega$, $0 < r < \infty$.

Observação 2.2.5. Em geral, sendo μ uma medida regular em \mathbb{R}^n e $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto μ -mensurável, então, se existir uma família de conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ com $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ e $\mu(V_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $\mu(V \setminus A) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ (MATTILA, 1995, Teorema 1.10).

Teorema 2.2.6. Se μ e ν são medidas regulares uniformemente distribuídas, σ -finitas e positivas em bolas, então existe uma constante $c > 0$ tal que $\mu = c\nu$.

Demonstração. Sejam g e h funções dadas pelas medidas de μ e ν em bolas de raio r :

$$g(r) = \mu(B(x, r)), \quad h(r) = \nu(B(x, r)),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r < \infty$. Seja U um conjunto aberto, limitado e não vazio. Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue temos que

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu(U \cap B(x, r))}{h(r)} = 1, \quad \forall x \in U.$$

De maneira intuitiva isto é verdade, pois, dado $x \in U$, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \subset U$. Logo, $B(x, r) \subset U$ para todo $r < r_0$. Portanto, dado $r < r_0$ deduzimos que

$$\frac{\nu(U \cap B(x, r))}{h(r)} = \frac{\nu(B(x, r))}{h(r)} = \frac{h(r)}{h(r)} = 1.$$

Com isto, pelo Lema de Fatou e pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \int_U \lim_{h \downarrow 0} \frac{\nu(U \cap B(x, r))}{h(r)} d\mu_x \\ &\leq \liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \nu(U \cap B(x, r)) d\mu_x \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \int_U \chi_{B(x, r)}(y) d\nu_y d\mu_x \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \int_U \chi_{B(x, r)}(y) d\mu_x d\nu_y. \end{aligned}$$

É de rápida verificação que $\chi_{B(x, r)}(y) = \chi_{B(y, r)}(x)$. Com isto; para r suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq \liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \int_U \chi_{B(y, r)}(x) d\mu_x d\nu_y \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \mu(B(y, r)) d\nu_y \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} \frac{g(r)}{h(r)} \int_U \frac{\mu(B(y, r))}{g(r)} d\nu_y = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{g(r)}{h(r)} \nu(U). \end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\nu(U) \leq \liminf_{r \downarrow 0} \frac{h(r)}{g(r)} \mu(U).$$

Seque que o limite $\lim_{r \downarrow 0} \frac{g(r)}{h(r)} := c$ existe e $\mu(U) = c\nu(U)$, para todo conjunto aberto limitado

$U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $A \subset \Omega$. Como μ é regular existe um boreliano B contendo A tal que $\mu(A) = \mu(B)$. Em geral, sendo μ uma medida regular em \mathbb{R}^n e $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto μ -mensurável, se existir uma família de conjuntos abertos $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ com $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ e $\mu(V_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $\mu(V \setminus A) < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Dessa forma, como \mathbb{R}^n pode ser escrito como uma união enumerável de bolas abertas e μ é uniformemente distribuída, dado $\epsilon > 0$ existe um aberto U contendo B tal que $\mu(U \setminus B) < \epsilon$. Assim, $\mu(U) = \mu(B) + \mu(U \setminus B) < \mu(B) + \epsilon$, ou seja,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, \text{aberto}\}. \quad (2.12)$$

Analogamente, concluímos que

$$\nu(A) = \inf\{\nu(U) : A \subset U, \text{aberto}\}. \quad (2.13)$$

Como $\mu(U) = c\nu(U)$, por (2.12) e (2.13) concluímos a demonstração. \square

A medida de Lebesgue \mathcal{L}^n é uniformemente distribuída, pois é invariante por translação e $\mathcal{L}^n(B(0, r)) = r^n \alpha(n)$, onde $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0, 1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$. Vimos em (2.11) e (2.11) que medidas de Hausdorff são invariantes por translações e tem um "scaling". Portanto, a mesma é uniformemente distribuída, isto é,

$$\mathcal{H}^s(B(x, r)) = \mathcal{H}^s(B(y, r)), \quad (2.14)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n, 0 < r < \infty$.

Lema 2.2.7. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ temos que $\mathcal{H}^n(B(x, r)) < \infty$.

Demonstração. Seja $Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n\}$. É suficiente mostrar que $\mathcal{H}^n(Q) < \infty$. Com efeito, para qualquer inteiro positivo $m \geq 1$ o cubo Q pode ser coberto por m^n cubos cujos lados medem $1/m$ digamos, Q_1, \dots, Q_{m^n} . Sejam $0 < \delta < 1$ e m um número natural satisfazendo $m > \max\{\frac{\sqrt{n}}{\delta}, 1\}$. É importante observar que a distância do centro de Q_j a um de seus vértices é dada por

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2m}\right)^2} = \frac{\sqrt{n}}{2m}.$$

Para cada $j = 1, \dots, m^n$, seja B_j a bola fechada na qual Q_j está inscrito. É claro que, para cada j , o raio de B_j é exatamente r . Além disso, tais bolas formam uma cobertura para Q . Ainda, notando que $\text{diam}(B_j) = 2r \leq \delta$, obtemos

$$\mathcal{H}_\delta^n(Q) \leq \sum_{j=1}^{m^n} \text{diam}(B_j)^n = \sum_{j=1}^{m^n} \frac{\sqrt{n}^n}{m^n} = \frac{n^{n/2}}{m^n} m^n = n^{n/2},$$

fazendo $\delta \downarrow 0$ obtemos $\mathcal{H}^n(Q) \leq n^{n/2} < \infty$. \square

Lema 2.2.8. Dado $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, temos que $\mathcal{H}^n(B(x, r)) > 0$.

Demonstração. Denote $B = B(x, r)$. Vamos mostrar que r^n é uma cota inferior para o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^n : \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } B \right\}.$$

Com efeito, seja $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Denote $d_i = \text{diam}(E_i)$ e $v_i = \mathcal{L}^n(E_i)$. Então, cada E_i cabe em uma bola de raio d_i , digamos, $E_i \subset B_i$. Assim,

$$v_i \leq \mathcal{L}^n(B_i) = d_i^n w_n,$$

com $w_n = \mathcal{L}^n(B(0, 1))$. Como $\mathcal{L}^n(B(0, r)) = r^n \alpha(n)$, obtemos

$$r^n w_n = \mathcal{L}^n(B(x, r)) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i^n w_n.$$

Com isto, concluímos $r^n \leq \sum_{i=1}^{\infty} d_i^n = \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^n$, como queríamos. Lembre que

$$\mathcal{H}_{\infty}^n(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^n : B \subset \bigcup_i E_i, E_i \subset \Omega \right\},$$

com o ínfimo sendo tomado sob quaisquer coberturas de B . Dessa forma, $r^n \leq \mathcal{H}_{\infty}^n(B)$. O Exemplo 2.2.1 nos permite concluir que $r^n \leq \mathcal{H}_{\delta}^n(B)$, para todo $\delta > 0$. Logo, fazendo $\delta \downarrow 0$, obtemos $\mathcal{H}^n(B) > 0$. \square

Usando (2.14) e os Lemas 2.2.7 e 2.2.8, concluímos que \mathcal{H}^n é σ -finita e positiva em bolas, logo, pelo Teorema 2.2.6 existe uma constante c_n tal que

$$\mathcal{H}^n = c_n \mathcal{L}^n. \quad (2.15)$$

É possível encontrar efetivamente a constante em (2.15) utilizando a desigualdade isodiamétrica (EVANS; GARIEPY, 2015, Teorema 2.4):

$$\mathcal{L}^n(A) \leq 2^{-n} \alpha(n) \text{diam}(A)^n, \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n,$$

a saber

$$\mathcal{H}^n = 2^n \alpha(n)^{-1} \mathcal{L}^n, \quad (2.16)$$

com $\alpha_n = \mathcal{L}^n(B(0, 1))$.

Teorema 2.2.9. Para $0 \leq s < t < \infty$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, temos

- 1) $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ implica $\mathcal{H}^t(A) = 0$;
- 2) $\mathcal{H}^t(A) > 0$ implica $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

É claro que 2) é apenas a contrapositiva de 1). Fizemos questão de enunciar o resultado desta forma pois o mesmo dará origem ao conceito de dimensão de Hausdorff e suas equivalências.

Demonstração. Se $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, então dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma δ -cobertura $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ para A satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s < \mathcal{H}^s(A) + \epsilon.$$

Como $t - s > 0$ e $\text{diam}(E_i) \leq \delta$, obtemos $[\text{diam}(E_i)]^{t-s} \leq \delta^{t-s}$. Em outras palavras, $[\text{diam}(E_i)]^t \leq \delta^{t-s}[\text{diam}(E_i)]^s$ e concluímos que

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam}(E_i)]^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam}(E_i)]^s \leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + \epsilon) < \infty.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos 1). □

Usando a invariância por translação e scaling, segue que

$$\mathcal{H}^s(B(x, r)) = c(s, n)r^s, \quad c(s, n) = \mathcal{H}^s(B(0, 1)). \quad (2.17)$$

O Lema 2.2.7 garante que $c(n, n) < \infty$, com isto, se $s > n$ concluímos; pelo Teorema 2.2.9, que $c(s, n) = 0$. Similarmente $c(s, n) = \infty$ se $s < n$.

2.3 O dual de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Um dos elementos principais para este trabalho será um certo espaço de medidas de Borel finitas com suporte compacto. Iremos ver que tal espaço possui uma topologia que irá nos auxiliar em algumas situações neste trabalho, por exemplo, na demonstração do Lema de Frostman. Mais precisamente, iremos definir medidas de Radon e ver que este conceito equivale ao de medidas de Borel localmente finita. Na Subseção 2.3.2 iremos concluir, através do Teorema da Representação de Riesz, que o espaço das medidas de Radon com sinal finitas é isomorfo ao dual de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Com isto, iremos introduzir o conceito de convergência fraca de medidas. As referências que nos guiaram ao longo desta seção foram (FOLLAND, 1999), (MATTILA, 1995) e (EVANS; GARIEPY, 2015).

2.3.1 Medidas de Radon

Nesta seção, iremos definir medida de Radon e mostrar suas propriedades.

Definição 3. Seja μ uma medida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1. μ é localmente finita, se para todo x em Ω existir $r > 0$ tal que $\mu(B(x, r)) < \infty$;
2. μ é uma medida de Radon, se for uma medida de Borel, isto é, se todos os borelianos de Ω forem μ -mensuráveis;
 - i) $\mu(K) < \infty, \forall K \subset \Omega$ compacto;
 - ii) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, \text{compacto}\}, \forall V \subset \Omega$, aberto (**regularidade interior**);
 - iii) $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, \text{aberto}\}, \forall A \subset \Omega$ (**regularidade exterior**).

Proposição 2.3.1. A medida de Lebesgue \mathcal{L}^n em \mathbb{R}^n é uma medida de Radon.

Demonstração. Como todo conjunto compacto em \mathbb{R}^n está contido numa bola e $\mathcal{L}^n(B(x, r)) < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, então i) é válido para \mathcal{L}^n . A regularidade exterior em qualquer subconjunto de \mathbb{R}^n é fruto da construção de Carathéodory (FOLLAND, 1999, Proposição 1.10), o que pode ser visto também em (STEIN; SHAKARCHI, 2005, Observação 3). Vejamos apenas a prova da regularidade interior. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Se E for fechado temos imediatamente a regularidade interior no mesmo. Suponhamos então que E não é fechado. Uma vez que a regularidade exterior é válida em qualquer subconjunto do \mathbb{R}^n , podemos encontrar um aberto U com $\overline{E} \setminus E \subset U$ satisfazendo $\mathcal{L}^n(U) < \mathcal{L}^n(\overline{E} \setminus E) + \epsilon$. Seja $K = \overline{E} \setminus U$ e note que $K \subset E$. Além disso, K é compacto. Isto implica $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(E \setminus K) + \mathcal{L}^n(K)$. Além disso, temos

$$\mathcal{L}^n(U) = \mathcal{L}^n((U \setminus E) \cup (U \cap E)) = \mathcal{L}^n(U \setminus E) + \mathcal{L}^n(U \cap E).$$

Observe também que $E \setminus K = E \cap U$ e portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(K) &= \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(E \setminus K) \\ &= \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(E \cap U) \\ &= \mathcal{L}^n(E) - [\mathcal{L}^n(U) - \mathcal{L}^n(U \setminus E)] \\ &= \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(U) + \mathcal{L}^n(U \setminus E). \end{aligned}$$

Como $\overline{E} \setminus E \subset U$ naturalmente temos $\overline{E} \setminus E \subset U \setminus E$. Logo,

$$\mathcal{L}^n(K) \geq \mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(U) + \mathcal{L}^n(\overline{E} \setminus E) > \mathcal{L}^n(E) - \epsilon,$$

e portanto vale a regularidade interior de \mathcal{L}^n em conjuntos limitados. Por fim, supondo que E é ilimitado, para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $E_j = E \cap D_j$ um conjunto limitado com $D_j = \overline{B(0, j+1)} \setminus \overline{B(0, j)}$, para $j \geq 1$ e $D_0 = \overline{B(0, 1)}$. Pelo argumento anterior, dado $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_j \subset E_j$ com $\mathcal{L}^n(K_j) > \mathcal{L}^n(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_m = \bigcup_{j=0}^m K_j$. É claro que tal união é disjunta e forma

um conjunto compacto. Além disso, temos que $H_m \subset E$ e

$$\mathcal{L}^n(H_m) = \sum_{j=0}^m \mathcal{L}^n(K_j) > \sum_{j=0}^m \mathcal{L}^n(E_j) - \epsilon \sum_{j=0}^m 2^{-j} \geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=0}^m E_j\right) - 2\epsilon$$

Como $\mathcal{L}^n(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^m E_j)$, então, existe m_0 com

$$\mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=0}^{m_0} E_j\right) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^n(E) - 3\epsilon < \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=0}^{m_0} E_j\right) - 2\epsilon < \mathcal{L}^n(H_{m_0}),$$

e com isso finalizamos a regularidade interior de \mathcal{L}^n também nos conjuntos ilimitados. \square

Exemplo 2.3.2. A medida de Dirac δ_a em um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é definida por $\delta_a(A) = 1$ se $a \in A$ e $\delta_a(A) = 0$ se $a \notin A$, isto é, $\delta_a(A) = \chi_A(a)$. Esta é uma medida de Radon. Com efeito, é de rápida verificação que, fixado $E \subset \mathbb{R}^n$ vale $\delta_a(A) = \delta_a(A \cap E) + \delta_a(A \setminus E)$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, todos os subconjuntos do \mathbb{R}^n são δ_a -mensuráveis, e em particular a mesma é uma medida de Borel. Como δ_a é finita naturalmente temos o item i) da Definição 3. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Se $a \in V$, então existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset V$. Logo, para $K_a = \overline{B(a, r/2)}$ temos que $K_a \subset V$ e $\delta(K_a) = 1$ e portanto vale a regularidade interior quando $a \in V$. Por outro lado, se $a \notin V$, então $\delta_a(K) = 0$ para qualquer compacto $K \subset V$ e também temos a regularidade interior neste caso. A regularidade exterior pode ser obtida com argumentos semelhantes.

Proposição 2.3.3. Toda medida de Radon μ é regular.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. Se $\mu(A) = \infty$ podemos considerar o boreliano $B = \mathbb{R}^n$ e naturalmente temos $\mu(A) = \mu(B)$. Suponhamos então que $\mu(A) < \infty$. Pela regularidade exterior de μ podemos obter uma sequência de abertos $\{V_k\}$ com $A \subset V$ satisfazendo

$$\mu(V_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}, \quad (2.18)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos supor sem perda de generalidade que a sequência $\{V_k\}$ é decrescente. Como $\mu(A) < \infty$ naturalmente (2.18) nos diz que $\mu(V_1) < \infty$. Dessa forma, considerando o boreliano $B = \bigcap V_k$ temos que $\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(V_k) \leq \mu(A)$. Por fim, como $A \subset B$ naturalmente temos $\mu(A) \leq \mu(B)$ e com isso concluímos que μ é uma medida regular. \square

A recíproca da Proposição 2.3.3 é falsa.

Exemplo 2.3.4. Seja n a medida da contagem sobre um conjunto X , isto é, $n(A)$ é a quantidade de elementos em A , para todo $A \subset X$. Esta medida é naturalmente regular, pois, primeiramente

ela é uma medida de Borel, uma vez que qualquer subconjunto de X é n -mensurável. Dado $A \subset X$ sempre existe um boreliano B contendo A tal que $n(A) = n(B)$, pois, se A for finito logo será fechado, logo boreliano, caso A seja infinito, tomamos $B = X$. Entretanto, n só é uma medida de Radon se todo subconjunto compacto de X for finito.

Diante do Exemplo 2.3.4, podemos nos perguntar sob quais hipóteses uma medida regular também é uma medida de Radon. A resposta é o seguinte resultado, cuja prova não iremos apresentar.

Teorema 2.3.5. (MATTILA, 1995, Corolário 1.11) Uma medida μ em \mathbb{R}^n é uma medida de Radon se e somente se é uma medida de Borel regular localmente finita.

Nem toda medida de Hausdorff é uma medida de Radon, por exemplo apesar da Proposição 2.2.4 dizer que \mathcal{H}^s é regular, o que comentamos em (2.17) nos diz que $\mathcal{H}^s(B(0, 1)) = \infty$ se $s < n$. Todavia, vimos na Proposição 2.3.1 que \mathcal{L}^n é uma medida de Radon e, portanto, pela identidade (2.16) concluímos que a medida de Hausdorff \mathcal{H}^n é também uma medida de Radon, ou a menos de uma constante, a própria medida de Lebesgue.

Finalizamos a seção com uma propriedade de medidas de Radon que será útil na demonstração do Teorema da Representação de Riesz.

Proposição 2.3.6. Soma finita de medidas de Radon em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon.

Demonstração. Sejam μ e ν medidas de Radon em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e escreva $\lambda = \mu + \nu$. Além disso, seja $V \subset \Omega$ um conjunto aberto. Dado $\epsilon > 0$ escolha conjuntos compactos K_μ e K_ν contidos em V tais que

$$\mu(V) - \epsilon < \mu(K_\mu) \quad \text{e} \quad \nu(V) - \epsilon < \nu(K_\nu). \quad (2.19)$$

Somando as expressões em (2.19) e considerando $K = K_\mu \cup K_\nu \subset V$ obtemos $\lambda(V) - 2\epsilon < \lambda(K)$. Com isto provamos a regularidade interior nos abertos. Sejam $A \subset \Omega$ e V_μ, V_ν conjuntos abertos contendo A tais que

$$\mu(V_\mu) < \mu(A) + \epsilon \quad \text{e} \quad \nu(V_\nu) < \nu(A) + \epsilon. \quad (2.20)$$

De maneira análoga, somando as expressões em (2.20) e tomando $V = V_\mu \cap V_\nu$ obtemos $\lambda(V) < \lambda(A) + 2\epsilon$, e com isso mostramos assim a regularidade exterior em A . \square

2.3.2 O Teorema da Representação de Riesz

Lembre-se que medidas regulares são unicamente determinadas por seus valores nos conjuntos de Borel, dessa forma, iremos nos concentrar em medidas definidas na σ -álgebra de Borel e por simplicidade iremos chamar estas também de medidas de Borel. Além disso, nesta

seção, uma medida de Radon será uma medida de Borel finita em conjuntos compactos, regular exterior nos borelianos e regular interior nos abertos.

Uma medida com sinal sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ é uma função $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [-\infty, \infty]$ tal que

- 1) $\nu(\emptyset) = 0$;
- 2) ν assume no máximo um dos valores $\pm\infty$;
- 3) se $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos em \mathcal{B} , então

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i),$$

com a soma convergindo absolutamente se $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ é finito.

A condição 2) acima é requerida para não ocorrer a indeterminação $\infty - \infty$. Dizemos que duas medidas com sinal μ e ν em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ são mutuamente singulares se existe $E, F \in \mathcal{B}$ tais que $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = \mathbb{R}^n$, E é nulo para μ e F é nulo para ν . Denotamos esta relação por $\mu \perp \nu$.

Teorema 2.3.7 (Decomposição de Jordan). Se ν é uma medida com sinal sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ então existem únicas medidas ν^+ e ν^- tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.

Este resultado pode ser consultado em (FOLLAND, 1999, Teorema 3.4). Chamamos ν^+ e ν^- de variação positiva e negativa de ν respectivamente e definimos a **variação total** de ν como sendo a medida $|\nu|$ definida por $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

Sejam ν uma medida com sinal e denote $L^1(\nu) := L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$. Dado $f \in L^1(\nu)$ definimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\nu := \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^-.$$

Uma **medida de Radon com sinal** em \mathbb{R}^n é uma medida de Borel com sinal cujas variações positiva e negativa são medidas de Radon. Denotaremos por $M(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as medidas de Radon com sinal finitas em \mathbb{R}^n , isto é

$$M(\mathbb{R}^n) = \{\mu : \mathcal{B} \rightarrow (-\infty, \infty) : \mu^+ \text{ e } \mu^- \text{ são medidas de Radon}\}.$$

Definimos também a norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$ neste espaço (FOLLAND, 1999, Teorema 7.16). Se μ é uma medida positiva, temos $\|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^n)$.

Denotaremos por $BC(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções reais contínuas e limitadas definidas em \mathbb{R}^n . Neste espaço fica bem definida a **norma uniforme**:

$$\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\}, \quad (2.21)$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. É comum também denotar esta norma por $\|\cdot\|_\infty$. Naturalmente $C_c(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $BC(\mathbb{R}^n)$, pois funções contínuas definidas em compactos são limitadas.

Denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ou simplesmente $C_0(\mathbb{R}^n)$, o espaço de todas as funções contínuas definidas em \mathbb{R}^n que se anulam no infinito, isto é, para todo $\epsilon > 0$ o conjunto $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto. Note que $C_0(\mathbb{R}^n)$ também é subespaço de $BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pois, se $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, por continuidade, o conjunto $f(A_1)$ é um compacto de \mathbb{C} .

Um funcional linear I em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é dito limitado se existir uma constante positiva M tal que $|I(f)| \leq M\|f\|_u$, para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Denotaremos por $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$ o espaço de todos os funcionais lineares limitados sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e para I neste espaço fica bem definido

$$\|I\| = \sup_{f \in C_c} \left\{ \frac{|I(f)|}{\|f\|_u} \right\}.$$

Além disso, a aplicação $I \mapsto \|I\|$ é de fato uma norma em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$ (FOLLAND, 1999, p. 154).

Um funcional linear I em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é dito positivo se $I(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$. Nesta seção, iremos apresentar duas versões do Teorema da Representação de Riesz. A primeira, apresentada a seguir, nos mostra que o espaço das medidas de Radon é essencialmente o espaço dos funcionais lineares positivos sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Não iremos exibir a prova deste, porém a mesma pode ser consultada em (FOLLAND, 1999, Teorema 7.2). Iremos usar esta versão para provar a Teorema da Representação de Riesz que irá caracterizar completamente o espaço das medidas de Radon com sinal finitas como o dual de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Toda medida de Radon em \mathbb{R}^n pode ser associada ao funcional linear positivo I sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \quad (2.22)$$

O resultado a seguir nos diz que a recíproca deste fato é verdadeira.

Teorema 2.3.8 (Representação de Riesz para funcionais positivos). Se I é um funcional linear positivo definido em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ então existe uma única medida de Radon μ tal que

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu,$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Além disso, μ satisfaz

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0 \leq f \leq 1, \text{supp}(f) \subset U\}, \quad (2.23)$$

para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 2.3.9. Quando I é um funcional linear limitado obtemos $|I(f)| \leq \|I\|$, para toda

função $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq f \leq 1$, dessa forma, pela igualdade (2.23) temos que μ é uma medida de Radon finita.

O resultado a seguir nos mostra que sempre podemos decompor um operador limitado sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de uma forma bem conveniente.

Lema 2.3.10. Se I é um funcional linear limitado sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, então existem funcionais lineares positivos I^+, I^- sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tais que $I = I^+ - I^-$.

Demonstração. Para $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ defina

$$J(f) = \sup\{I(g) : g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq f\}.$$

Mostremos que $J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2)$, sempre que $f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$. De fato, sempre que $g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ são tais que $0 \leq g_1 \leq f_1$ e $0 \leq g_2 \leq f_2$ temos $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, assim, $I(g_1) + I(g_2) \leq J(f_1 + f_2)$. Disto segue que $J(f_1) + J(f_2) \leq J(f_1 + f_2)$. Por outro lado, se $0 \leq g \leq f_1 + f_2$, seja $g_1 = \min\{g, f_1\}$ e $g_2 = g - g_1$. Então claramente $0 \leq g_1 \leq f_1$ e também $0 \leq g_2 \leq f_2$ pois é sempre verdade qualquer um dos dois casos: $g \leq f_2 + g$ e $g \leq f_2 + f_1$. Assim, $I(g) = I(g_1) + I(g_2) \leq J(f_1) + J(f_2)$, e portanto $J(f_1 + f_2) \leq J(f_1) + J(f_2)$. Além disso, naturalmente $J(cf) = cJ(f)$ se $c \geq 0$.

Afirmamos que existe um funcional I^+ em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$ tal que $I^+|_{C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))} \equiv J$. Com efeito, se $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, então $f^+, f^- \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$, dessa forma, defina $I^+(f) = J(f^+) - J(f^-)$. Se por acaso $f = f_1 - f_2$, com $f_1, f_2 \geq 0$, afirmamos que $I^+(f) = J(f_1) - J(f_2)$. De fato, é rápida verificação que $f_1 + f^- = f_2 + f^+$. Pela linearidade de J em $C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ obtemos

$$J(f_1) + J(f^-) = J(f_2) + J(f^+),$$

o que é suficiente para concluir o que afirmamos. Vamos mostrar a linearidade de I^+ . Para isto, sejam $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, denote $h = f + g$ e note que

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Logo,

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Usando a linearidade de J em $C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ obtemos

$$J(h^+) + J(f^-) + J(g^-) = J(h^-) + J(f^+) + J(g^+).$$

Logo

$$J(h^+) - J(h^-) = J(f^+) - J(f^-) + J(g^+) - J(g^-),$$

isto é, $I^+(f + g) = I^+(f) + I^+(g)$. O fato de $I^+(cf) = cI^+(f)$ com $c \in \mathbb{R}$ segue diretamente das relações

$$(cf)^+ = \begin{cases} cf^+, & c > 0 \\ |c|f^-, & c \leq 0 \end{cases}$$

e

$$(cf)^- = \begin{cases} cf^-, & c > 0 \\ |c|f, & c \leq 0 \end{cases}.$$

Para concluirmos o resultado, resta mostrar que I^+ é limitado. Com efeito, dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$, temos $J(f) \geq 0$, pois, $g \equiv 0 \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $g \leq f$. Além disso, dado $g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq g \leq f$ temos $I(g) \leq |I(g)| \leq \|I\| \|g\|_u \leq \|I\| \|f\|_u$. Portanto

$$0 \leq J(f) \leq \|I\| \|f\|_u, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty)). \quad (2.24)$$

Por outro lado, dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, por (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} |I^+(f)| &= |J(f^+) - J(f^-)| \\ &\leq \max\{J(f^+), J(f^-)\} \\ &\leq \|I\| \max\{\|f^+\|_u, \|f^-\|_u\} \\ &= \|I\| \|f\|_u. \end{aligned}$$

Logo, temos a limitação de I^+ . Além disso, note que $\|I^+\| \leq \|I\|$. Finalmente, defina $I^- = I^+ - I$. Naturalmente $I^- \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$. É claro que I^- é positivo, pois, dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ temos $I^-(f) = I^+(f) - I(f) = J(f) - I(f)$. Como em particular $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ e $0 \leq f \leq f$, obtemos $J(f) \geq I(f)$, ou seja, $I^-(f) \geq 0$. Por fim, o fato de I^+ ser positivo segue diretamente de sua definição. \square

Vimos na Observação 2.3.9 que funcionais lineares limitados e positivos sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ são identificados como medidas de Radon finitas. O próximo resultado nos fornece uma caracterização completa do dual de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Teorema 2.3.11 (Representação de Riesz). Seja $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ e defina

$$I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

A aplicação $\mu \mapsto I_\mu$ é um isomorfismo de $M(\mathbb{R}^n)$ em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$.

Demonstração. Dado $I \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$, pelo Lema 2.3.10 existem funcionais lineares positivos I^+, I^- sobre $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tais que $I = I^+ - I^-$. Logo, o Teorema 2.3.8 (Representação de Riesz para funcionais positivos) garante que existem únicas medidas de Radon μ^+ e μ^- tais que, para todo $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$I^+(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu^+ \text{ e } I^-(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu^-.$$

Portanto,

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu,$$

com $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Mostremos a injetividade. Suponha que $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ são tais que $I_\mu = I_\nu$, isto é

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu^- = \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^-, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

Com isto, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f d\eta, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

com $\lambda = \mu^+ + \nu^-$ e $\eta = \nu^+ + \mu^-$. Pela Proposição 2.3.6, λ e η são medidas de Radon. Portanto, pela unicidade do Teorema 2.3.8 temos $\lambda = \eta$, o que implica a injetividade. \square

2.3.3 Convergência fraca de medidas

Nesta Seção, iremos definir o conceito de convergência fraca de medidas e explorar alguns resultados inerentes a este. Especialmente o que será apresentado aqui será de suma importância para a demonstração do Lema de Frostman. Além disso, o conceito de convergência fraca de medidas será usado para o cálculo da transformada de Fourier da medida de superfície na esfera na Seção 4.1.

Definição 4. Dizemos que uma sequência $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ de medidas de Radon converge fracamente para uma medida μ quando

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad (2.25)$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ao longo do trabalho denotaremos esta convergência por $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$.

Observação 2.3.12. Através do Teorema 2.3.11 podemos munir o espaço $M(\mathbb{R}^n)$ de uma topologia herdada da topologia fraca* em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^*$. É possível concluir, utilizando (BREZIS, 2011, Proposição 3.13, i)), que uma sequência de medidas $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ em $M(\mathbb{R}^n)$ converge para uma medida μ em tal topologia se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad (2.26)$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Isto justifica a nomenclatura utilizada na Definição 4. Além disso, note que poderíamos ter substituído medidas de Radon na Definição 4 por medidas de Borel regulares e localmente finitas devido a Proposição 2.3.5.

Dado um boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{M}(A)$ o conjunto de todas as medidas de Borel regulares μ tais que $0 < \mu(A) < \infty$ e $\text{supp}(\mu) \subset A$ é compacto, veja (2.5). Naturalmente temos que $\mathcal{M}(A) \subset M(\mathbb{R}^n)$. É importante notar que pelo Teorema 2.3.5 temos a inclusão

$$\mathcal{M}(A) \subset M(\mathbb{R}^n).$$

Veremos na Seção 2.4.3 o conceito de medida intrínseca de superfícies e que estas são elementos de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.3.13.

- 1) Em \mathbb{R} , $\delta_i \xrightarrow{w} 0$ quando $i \rightarrow \infty$ (veja o Exemplo 2.3.2). De fato, para $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ observe primeiramente que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_i = f(i).$$

Logo, como f tem suporte compacto temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\delta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = 0 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu,$$

com $\mu \equiv 0$.

- 2) Seja

$$\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \delta_{i/k}.$$

Então $\mu_k \xrightarrow{w} \mathcal{L}^1 \llcorner [0, 1]$. Com efeito, dado $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} f d\delta_{i/k} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} f\left(\frac{i}{k}\right). \end{aligned} \tag{2.27}$$

A soma em (2.27) tende à integral de Riemann de f no intervalo $[0, 1]$ quando $k \rightarrow \infty$, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_k &= \int_{[0,1]} f d\mathcal{L}^1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f d\mu, \quad \mu = \mathcal{L}^1 \llcorner [0, 1]. \end{aligned}$$

Observação 2.3.14. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathcal{M}(A)$. Apesar de $\text{supp}(\mu) \subset A$, a medida μ está definida na σ -álgebra de Borel \mathcal{B} do \mathbb{R}^n , sendo assim, faz sentido o espaço $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$. Por conseguinte, sendo \mathcal{B}_A a σ -álgebra de Borel em A induzida por \mathcal{B} , podemos considerar o espaço de medida $L^p(A, \mathcal{B}_A, \mu_A)$ com μ_A sendo a medida natural em A definida da seguinte forma: dado $C \in \mathcal{B}_A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $C = B \cap A$. Logo, $\mu_A(C) = \mu(B)$. Esta definição não depende da escolha de B , pois, pela Observação 2.1.3, se $B \cap A = \emptyset$, então $\mu(B) = 0$. Quando não houver risco de confusão, iremos utilizar apenas a notação $L^p(A, \mu)$, ou $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ para denotar $L^p(A, \mathcal{B}_A, \mu_A)$.

No que segue, queremos provar um resultado que garante que, sob certas condições, uma sequência de medidas de Radon possui uma subsequência que converge fracamente para alguma

medida de Radon. Todavia, precisamos de algumas definições e alguns resultados.

A convolução $f * g$ de funções mensuráveis f e g é definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy,$$

sempre que a integral existe. A proposição a seguir será útil quando precisarmos saber se convolução de funções com suporte compacto também tem suporte compacto.

Proposição 2.3.15. Sejam f e g funções mensuráveis tais que exista $f * g$. Denotando por F o fecho do conjunto $\{x + y : x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g)\}$ temos que $\text{supp}(f * g) \subset F$.

Demonstração. Supondo que $x \notin F$ temos que $x - y \notin \text{supp}(f)$, para todo $y \in \text{supp}(g)$. Logo $f(x - y) = 0$ e obtemos

$$(f * g)(x) = \int_{\text{supp}(g)} f(x - y)g(y)dy = 0.$$

Portanto $\text{supp}(f * g) \subset A$. □

Teorema 2.3.16 (Regra de Leibniz). Seja μ uma medida em \mathbb{R}^n . Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e que $f(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável para cada $t \in [a, b]$. Defina $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)d\mu_x$.

- i) Suponha que existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b]$. Se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$, para cada x , então $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$; em particular, se $f(x, \cdot)$ é contínua para cada x , então F é contínua.
- ii) Suponha que existe a derivada $\partial f / \partial t$ bem como uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x, t),$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b]$. Então F é diferenciável e

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)d\mu_x.$$

A demonstração é uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada e pode ser consultada em (FOLLAND, 1999, Teorema 2.27).

Vejamos qual é a regularidade da convolução de funções em L^1 e em C^k e como calcular precisamente suas derivadas.

Proposição 2.3.17. Se $f \in L^1$, $g \in C^k$ e $\partial^\alpha g$ é limitada para $|\alpha| \leq k$, então $f * g \in C^k$ e $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ para $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. É suficiente provarmos o resultado para o caso em que $|\alpha| = 1$, pois para os casos demais segue por indução e do Teorema 2.3.16 (Regra de Leibniz). Neste caso, supondo que $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, com o 1 na posição i , queremos mostrar que

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Com efeito, mostremos primeiramente que $f * g \in C^1$. Naturalmente, diante das hipóteses sobre g , pelo Teorema da convergência dominada $f * g$ é contínua. Mostremos que $f * g$ tem derivadas de ordem 1. Para isso, fixado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, seja

$$x_t = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

e defina a aplicação

$$F(t) = f * g(x_t) = g * f(x_t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y, t) dy,$$

com $h(y, t) = g(x_t - y)f(y)$. Pelas hipóteses sobre g , existe $\partial h / \partial t$ e vale $f \partial g / \partial x_i$ e a mesma é limitada pela função integrável Mf , com M sendo a constante de limitação de g . Dessa forma, pela Proposição 2.3.15, b), obtemos

$$F'(x_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_{x_j} - y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x - y)f(y) dy = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Para finalizar, basta observamos que $F'(x_j) = \frac{\partial(f * g)}{\partial x_i}(x)$ e que a continuidade da mesma segue também da Proposição 2.3.17 a). \square

Lema 2.3.18. A função $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

está em $C^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que a função exponencial cresce mais rápido do que qualquer polinômio no infinito, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \quad (2.29)$$

com $P(x)$ sendo um polinômio qualquer. De fato, suponha que $P(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i$ e note que

$$|P(x)| \leq \sum_{i=1}^m |a_i| |x|^i.$$

Se x é tal que $|x| \geq 1$, então $|x|^i \leq |x|^m$ para todo $i = 1, \dots, m$. Logo,

$$|P(x)| \leq C|x|^m,$$

com $C = \sum_{i=1}^m |a_i|$. Por outro lado, lembre que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Logo, $e^x \geq x^k/k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$, em particular, se x é tal que $|x| > 0$, obtemos

$$\frac{1}{e^{-x}} \leq (m+1)!x^{-(m+1)}.$$

Portanto,

$$\frac{|P(x)|}{e^{-x}} \leq C|x|^m(m+1)!x^{-(m+1)} = C(m+1)!x^{-1},$$

e isto nos dá o limite (2.29). Ainda, considerando $P(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i$ o limite (2.29) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^m a_i (1/h)^i}{e^{1/h}} = 0, \quad (2.30)$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i e^{-1/h}}{h^i} = 0. \quad (2.31)$$

A função η é diferenciável em qualquer t não nulo e suas derivadas são contínuas no mesmo, portanto, precisamos apenas mostrar que existe $\eta^{(k)}(0)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{t \rightarrow 0} \eta^{(k)}(t) = \eta^{(k)}(0)$. Por simplicidade façamos primeiramente o caso $k = 1$. Naturalmente,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\eta(0+h) - \eta(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\eta(h)}{h} = 0.$$

Por outro lado, por (2.31) obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\eta(0+h) - \eta(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\eta(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} = 0,$$

portanto existe $\eta'(0)$ e vale 0. Ainda, como $\eta(t) = 0$ para $t < 0$, então $\lim_{t \rightarrow 0^-} \eta'(t) = 0$. Por outro lado, novamente por (2.31); escolhendo um polinômio adequado, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \eta'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^2} = 0.$$

Logo, η' é contínua em 0. Para finalizar basta notarmos que ao tomarmos derivadas de η de ordem cada vez maiores sempre chegaremos em situações parecidas com a que acabamos de fazer e sempre poderemos utilizar a expressão geral (2.31) para concluir a existência de $\eta^{(k)}(0)$ bem como a continuidade da mesma em 0. \square

O próximo resultado garante a existência de uma função ϕ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.

Proposição 2.3.19. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp[(|x|^2 - 1)^{-1}] & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

Então $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(\psi)$ é a bola fechada unitária. Definindo $\phi = (\int_{\mathbb{R}^n} \psi)^{-1} \psi$ obtemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.

Demonstração. Note que $\psi(x) = \eta(1 - |x|^2)$, com η sendo como no Lema 2.3.18. Logo $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como ψ se anula "fora" de $B[0, 1]$, então $\text{supp}(\psi) \subset B[0, 1]$. Por outro lado, seja F é um conjunto fechado tal que $\psi(x) = 0$, para todo $x \in F^c$. Pela definição de ψ temos que $x \notin B(0, 1)$, logo, $B(0, 1) \subset F$. Como F é arbitrário concluimos que

$$B(0, 1) \subset \bigcap_{F \in D} F,$$

com $D = \{F : \psi(x) = 0, \forall x \in F^c\}$. Tomando o fecho e utilizando a propriedade

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i},$$

obtemos $B[0, 1] \subset \text{supp}(\psi)$. Portanto $\text{supp}(\psi) = B[0, 1]$. □

Definimos a distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

Além disso, se $B \subset \mathbb{R}^n$, definimos a distância entre A e B por

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}.$$

O resultado a seguir será útil em muitas situações deste trabalho, especialmente quando tratarmos da existência de partição da unidade para uma superfície regular.

Lema 2.3.20 (Existência de funções de corte). Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto contido em uma bola aberta B . Então existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em K e $\text{supp}(\varphi) \subset B$.

Demonstração. Vamos provar o resultado para um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. Seja $\epsilon > 0$. Dado $\delta > 0$, defina o conjunto

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

É claro que $K \subset K_\delta$. Além disso, como K é compacto o número $\text{dist}(K, U^c)$ é sempre positivo. Logo, se $\delta < \text{dist}(K, U^c)$ então temos a inclusão $K_\delta \subset U$. Pela Proposição 2.3.19 podemos tomar uma função $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ e $\text{supp}(\phi) = B[0, 1]$. Defina $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x\epsilon^{-1})$. É de rápida verificação que $\phi_\epsilon \in C_c^\infty$, $\text{supp}(\phi_\epsilon) = B[0, \epsilon]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon = 1$. Seja $\varphi = \chi_{K_{2\epsilon}} * \phi_\epsilon$. Pelas Proposições 2.3.15 e 2.3.17 temos que $\varphi \in C_c^\infty$. Além disso, note que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por fim, note que

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(x) &= \int_{B[0, \epsilon]} \phi_\epsilon(y) dy - \int_{B[0, \epsilon]} \chi_{K_{2\epsilon}}(x - y) \phi_\epsilon(y) dy \\ &= \int_{B[0, \epsilon]} [1 - \chi_{K_{2\epsilon}}(x - y)] \phi_\epsilon(y) dy, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x \in K_\epsilon$ e $y \in B[0, 1]$ então $x - y \in K_{2\epsilon}$, pois, sendo k_0 o ponto em K tal que $d(x, K) = \|x - k_0\|$ obtemos naturalmente

$$\text{dist}(x - y, K) \leq \|x - y - k_0\| < 2\epsilon.$$

Portanto, nessas condições $\chi_{K_{2\epsilon}}(x - y) = 1$. Tomando $\delta = 2\epsilon$ temos assim $\phi(x) = 1$, para todo $x \in K_\epsilon$, em particular, $\varphi \equiv 1$ em K . Com uma análise análoga concluímos que se $x \notin K_\epsilon$ então $\varphi(x) = 0$, dessa forma, $\text{supp}(\varphi) \subset K_\epsilon \subset U$ para ϵ suficientemente pequeno. \square

Lema 2.3.21. O espaço $C_c(\mathbb{R}^n)$ é separável com a norma $\|\cdot\|_u$ definida em (2.21).

Demonstração. Seja $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e denote por K seu suporte. A versão para \mathbb{R}^n do Teorema de Aproximação de Weierstrass (LIMA, 1977, p. 262) nos diz que f pode ser uniformemente aproximada por polinômios de n variáveis restritos a K . Dessa forma, devido a densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} existe uma sequência de polinômios $\{P_j\}$ de n variáveis com coeficientes em \mathbb{Q} tais que

$$\|P_j|_K - f|_K\|_u \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Utilizando o Lema de existência de funções de corte 2.3.20, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\varphi_i \equiv 1$ em K e $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, i)$. Supondo que $K \subset B(0, m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$, (2.33) implica $\|\varphi_m P_j - f\|_u \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$ e com isto provamos que o conjunto enumerável

$$D = \{\varphi_i P : i \in \mathbb{N} \text{ e } P \text{ polinômio com coeficientes em } \mathbb{Q} \text{ de } n \text{ variáveis}\}$$

é denso em $C_c(\mathbb{R}^n)$ na norma $\|\cdot\|_u$. \square

Observação 2.3.22. Note que na demonstração do Lema 2.3.21 concluímos que dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $\{f_k\} \in D$ tal que $\|f_k - f\|_u \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\text{supp}(f_k) \subset B$, com B sendo uma bola contendo o suporte de f .

Uma das vantagens de se trabalhar com convergência fraca de medidas é o seguinte teorema que envolve compacidade, o qual será de suma importância para a demonstração do Lema de Frostman no Capítulo 3.

Teorema 2.3.23. Se $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ uma sequência de medidas de Radon em \mathbb{R}^n satisfazendo

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \{\mu_m(K)\} < \infty, \quad (2.34)$$

para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma subsequência $\{\mu_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e uma medida de Radon μ tal que $\mu_{m_j} \xrightarrow{w} \mu$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3.21 sabemos que existe um subconjunto $D = \{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ que é denso. Como a condição (2.34) implica $\{\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ ser limitada podemos encontrar uma subsequência $\{\mu_m^1\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ e $a_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\mu_m^1 \rightarrow a_1.$$

Continuando, escolhemos uma subsequência $\{\mu_m^k\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{\mu_m^{k-1}\}_{m=1}^{\infty}$ e $a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\mu_m^k \rightarrow a_k,$$

quando $m \rightarrow \infty$. Defina $\nu_m := \mu_m^m$. Para cada k fixo, temos que $\{\nu_m\}_{m \geq k}$ é uma subsequência de $\{\mu_m^k\}_{m=1}^{\infty}$. Portanto

$$a_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\nu_m,$$

para todo $k \geq 1$. Defina $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ por $L(f_k) = a_k$ e note que L é linear. Portanto L pode ser unicamente estendido a um funcional linear limitado \bar{L} em $C_c(\mathbb{R}^n)$ da seguinte forma: Dado $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, seja $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset D$ tal que $\|f_{k_i} - f\|_u \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Defina

$$\bar{L}(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} L(f_{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{k_i}.$$

Para mostrar que a aplicação \bar{L} está bem definida vamos mostrar que a sequência $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Naturalmente

$$|a_{k_i} - a_{k_j}| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (f_{k_i} - f_{k_j}) d\nu_m \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_{k_i} - f_{k_j}| d\nu_m.$$

Vimos na Observação 2.3.22 que $\text{supp}(f_{k_i}), \text{supp}(f_{k_j}) \subset B$, com B sendo uma bola contendo o suporte de f . Logo

$$|a_{k_i} - a_{k_j}| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_B |f_{k_i} - f_{k_j}| d\nu_m \leq \|f_{k_i} - f_{k_j}\|_u \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m(\bar{B}).$$

Por (2.34), existe $M > 0$ tal que $\nu_m(\bar{B}) \leq M$ para todo m . Logo, $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m(\bar{B}) \leq M$.

Além disso, a sequência $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Portanto a sequência $\{\alpha_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ é convergente, digamos que a mesma convirja para α_f , dessa forma, $\bar{L}(f) = \alpha_f$. Vamos mostrar que

$$\bar{L}(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu_m.$$

Com efeito, naturalmente dado $\epsilon > 0$ existe α_{k_l} tal que $|\alpha_f - \alpha_{k_l}| < \epsilon/3$ e $\|f - f_{k_l}\|_u < \epsilon/3M$. Além disso, também existe m_0 tal que

$$\left| \alpha_{k_l} - \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_l} d\nu_m \right| < \epsilon/3,$$

para todo $m > m_0$. Logo, para $m > m_0$, temos

$$\begin{aligned} \left| \alpha_f - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu_m \right| &\leq \epsilon/3 + \left| \alpha_{k_l} - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu_m \right| \\ &\leq \epsilon/3 + \left| \alpha_{k_l} - \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_l}) d\nu_m - \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_l} d\nu_m \right| \\ &\leq 2\epsilon/3 + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_{k_l}) d\nu_m \right| \\ &\leq 2\epsilon/3 + \|f - f_{k_l}\|_u \nu_m(\mathbb{R}^n) \\ &\leq 2\epsilon/3 + \epsilon/3MM = \epsilon. \end{aligned}$$

Por fim, como o funcional \bar{L} é positivo pelo Teorema 2.3.8 (Representação de Riesz para funcionais positivos) existe uma única medida de Radon μ tal que

$$\bar{L}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu,$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\mu_m^m \xrightarrow{w} \mu$. □

No que segue, queremos mostrar sob quais condições a podemos trocar funções contínuas com suporte compacto por funções contínuas e limitadas na Definição 4. Para tanto, precisamos de dois lemas auxiliares.

Lema 2.3.24 (Desigualdade de Markov). Seja f uma função real μ -mensurável. Para todo $\epsilon > 0$, segue que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

Demonstração. Seja $s(x) = \epsilon$ se $|f(x)| \geq \epsilon$ e $s(x) = 0$ caso contrário. É de rápida verificação que $0 \leq s \leq |f|$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu \geq \int_{\mathbb{R}^n} s d\mu = \epsilon \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}),$$

ou seja,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

Com isto finalizamos a demonstração. \square

Lema 2.3.25. Sejam μ uma medida finita e $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de medidas de Radon tais que $\mu_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^n)$. Então dado $\epsilon > 0$ existe um compacto K tal que $\mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K) < \epsilon$ para k grande.

Demonstração. Como μ é uma medida de Radon finita, temos que

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \sup\{\mu(K) : K \subset \mathbb{R}^n, \text{compacto}\}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe um compacto K tal que $\mu(\mathbb{R}^n) - \epsilon < \mu(K)$. Pelo Lema 2.3.20 (existência de funções de corte) podemos considerar $f \in C_c(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ tal que $f \equiv 1$ em K e $f \equiv 0$ "fora" de um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n contendo K . Com isto, obtemos

$$\mu(\mathbb{R}^n) - \epsilon < \int_K d\mu = \int_K f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \right|,$$

o que implica,

$$\mu(\mathbb{R}^n) - \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \right| < \epsilon. \quad (2.35)$$

Como por hipótese $\mu_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^n)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_k(\mathbb{R}^n) - \mu(\mathbb{R}^n) < |\mu_k(\mathbb{R}^n) - \mu(\mathbb{R}^n)| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.36)$$

As desigualdades (2.35), (2.36) nos dizem que

$$\mu_k(\mathbb{R}^n) - \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \right| < 2\epsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Para cada $k \geq k_0$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |f|) d\mu_k &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |f|) d\mu_k + \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu_k \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |f|) d\mu_k + \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu_k - \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \right| \\ &= \mu_k(\mathbb{R}^n) - \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \right| \\ &< 2\epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 - |f|) d\mu_k \leq 2\epsilon, \quad k \geq k_0. \quad (2.37)$$

Como $C_c(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ temos que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}$ é compacto,

para todo $\epsilon > 0$, em particular, o conjunto

$$K_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}$$

é compacto. Observe também que

$$\mathbb{R}^n \setminus K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 1 - |f(x)| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Pelo Lema 2.3.24, obtemos

$$\mu_k \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : 1 - |f(x)| > \frac{1}{2} \right\} \right) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} 1 - |f| d\mu_k.$$

Utilizando (2.37) concluímos $\mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K_1) \leq \epsilon$, $k \geq k_0$. \square

O próximo resultado será muito importante na Seção de transformadas de Fourier de medidas.

Proposição 2.3.26. Sejam μ uma medida finita e $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de medidas de Radon tais que $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ e $\mu_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu,$$

para toda $f \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Demonstração. Seja $f \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $M > 0$ tal que $|f| \leq M$. Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema 2.3.25 existe um conjunto compacto K_1 tal que

$$\mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K_1) < \frac{\epsilon}{3M}, \quad (2.38)$$

para k grande. Como μ é uma medida de Radon sabemos que

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \sup\{\mu(K) : K \subset \mathbb{R}^n, \text{compacto}\}.$$

Logo, pela sua finitude, seja K_2 um conjunto compacto tal que $\mu(\mathbb{R}^n) - \frac{\epsilon}{3M} < \mu(K_2)$. Isto implica, $\mu(\mathbb{R}^n \setminus K_2) < \frac{\epsilon}{3M}$. Denote $K = K_1 \cup K_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{R}^n \setminus K) &= \mu(\mathbb{R}^n \setminus (K_1 \cup K_2)) \\ &= \mu(\mathbb{R}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus K_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus K_2)) \\ &\leq \mu(\mathbb{R}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus K_2)) \\ &= \mu(\mathbb{R}^n \setminus K_2) \\ &< \frac{\epsilon}{3M}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{3M}. \quad (2.39)$$

Pela Lema 2.3.20 (existência de funções de corte), escolha $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $h \equiv 1$ em K e seja $g = hf$, dessa forma, $g \equiv f$ em K . Como $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \left| \int_K g d\mu_k - \int_K g d\mu \right| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.40)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \right| &= \left| \int_K f d\mu_k + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} f d\mu_k - \int_K f d\mu - \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} f d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_K f d\mu_k - \int_K f d\mu \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} f d\mu_k \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} f d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_K g d\mu_k - \int_K g d\mu \right| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f| d\mu_k + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f| d\mu \\ &\leq \left| \int_K g d\mu_k - \int_K g d\mu \right| + M\mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K) + M\mu(\mathbb{R}^n \setminus K). \end{aligned}$$

Note que como $K_1 \subset K$ temos $\mathbb{R}^n \setminus K \subset \mathbb{R}^n \setminus K_1$ e conseqüentemente por (2.38)

$$\mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K) < \frac{\epsilon}{3M}. \quad (2.41)$$

Portanto, por (2.39), (2.40) e (2.41), obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \right| < \epsilon,$$

para k grande. □

O resultado a seguir é uma consequência imediata da Proposição 2.3.26 e será bastante útil para o cálculo da transformada de Fourier da medida de superfície na esfera \mathbb{S}^{n-1} na Seção 4.1.

Corolário 2.3.27. Seja μ uma medida finita e $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de medidas Radon tal que $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ e $\mu_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^n)$. Então, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$, para toda $f \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

2.4 Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^n

O objetivo principal desta seção é definir localmente uma medida suportada em uma superfície regular. Quando a superfície for compacta, usando partição da unidade, iremos estender globalmente a medida para a superfície. Para tanto, precisaremos definir superfície regular, primeira forma fundamental e usar o Teorema de Mudança de Variáveis para definir

medida intrínseca a superfície numa vizinhança coordenada. As referências principais para esta seção foram (LEE, 2013) e (TAYLOR, 2006).

2.4.1 Superfície regular e espaço tangente

Nesta seção, veremos o com o conceito de superfície regular e mostraremos que a imagem da derivada de duas parametrizações de uma superfície no mesmo ponto são iguais, o que será importante para definir espaço tangente.

Definição 5. Seja S um subconjunto de \mathbb{R}^n . Dizemos que S é uma superfície regular de dimensão $m \leq n$ se, para cada $p \in S$, existem uma vizinhança U de p em S , um aberto \mathcal{O} de \mathbb{R}^m e uma aplicação $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow U$ tais que:

1. A aplicação φ é um difeomorfismo local de classe C^1 ;
2. para cada $q \in \mathcal{O}$ a aplicação derivada $d\varphi_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva.

O par (\mathcal{O}, φ) é chamado de parametrização local de S . Se $p \in \varphi(\mathcal{O})$, então dizemos que (\mathcal{O}, φ) é uma parametrização de S em p . É comum também dizer que $\varphi(\mathcal{O})$ é uma vizinhança coordenada de S em p . Se φ for de classe C^k dizemos que a parametrização (\mathcal{O}, φ) é de classe C^k . Se todas as aplicações φ forem de classe C^k , dizemos que a superfície S é de classe C^k .

Seja (\mathcal{O}, φ) uma parametrização de S no ponto p e suponha que $\varphi(q) = p$, para algum $q \in \mathcal{O}$. Utilizaremos a seguinte notação

$$\text{Range } d\varphi_q := \{d\varphi_q(x) : x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Além disso, denotando por φ_i a i -ésima função coordenada de φ , $i = 1 \dots, n$, temos $\text{Range } d\varphi_q = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, com

$$v_i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(q), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(q) \right). \quad (2.42)$$

Se (\mathcal{O}, φ) é uma parametrização de S no ponto p e $\varphi(q) = p$, então, como $d\varphi_q$ é injetiva temos que $\text{Range } d\varphi_q$ é um subespaço de \mathbb{R}^n de dimensão m . Antes de definir **espaço tangente**, precisamos de alguns resultados.

Proposição 2.4.1. Sejam S uma superfície regular e (\mathcal{O}, φ) , (Ω, ψ) parametrizações de S de classe C^k com $\varphi(\mathcal{O}) = \psi(\Omega)$. Então, existe um difeomorfismo $F : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ de classe C^k tal que $\varphi = \psi \circ F$.

Demonstração. Seja $p \in U = \varphi(\mathcal{O}) = \psi(\Omega)$ com $\varphi(x_0) = \psi(y_0) = p$ e denote por N_{x_0} e N_{y_0} o complemento ortogonal de $\text{Range } d\varphi_{x_0}$ e $\text{Range } d\psi_{y_0}$, respectivamente. Seja $A : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow N_{x_0}$

um isomorfismo e defina

$$\Phi : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n, \Phi(x, z) = \varphi(x) + A(z).$$

Portanto, a menos de isomorfismo, Φ pode ser vista como uma aplicação C^k definida em um aberto de \mathbb{R}^n . Note que

$$d\Phi_{(x,z)} = (d\varphi_x, A)_{n \times n},$$

logo, para $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^{n-m}$, temos

$$d\Phi_{(x_0,0)} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = d\varphi_{x_0}(v) + A(w).$$

Com isto, como $\mathbb{R}^n = \text{Range } d\varphi_{x_0} \oplus N_{x_0}$, segue que $d\Phi_{(x_0,0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva, e portanto, bijetiva. Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças V e W de $(x_0, 0)$ e p , respectivamente tais que $\Phi : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^k cuja inversa tem a mesma regularidade.

Como φ e ψ são por hipótese bijetivas, segue que $F = \psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ está bem definida e é também bijetiva. Vamos mostrar que F é um difeomorfismo de classe C^k , e para tanto, é suficiente mostrar que F e F^{-1} são de classe C^k em uma vizinhança de x_0 e y_0 . Analogamente ao que já fizemos, escolha um isomorfismo $B : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow N_{y_0}$ e defina $\Psi : \Omega \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Psi(y, z) = \psi(y) + B(z)$. Com os mesmos argumentos anteriores, Ψ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de $(y_0, 0)$ sobre uma vizinhança de p .

Com isto, segue que $\Psi^{-1} \circ \Phi$ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de $(x_0, 0)$ sobre uma vizinhança de $(y_0, 0)$. Logo, dado x perto de x_0 e y perto de y_0 , temos

$$\Psi^{-1} \circ \Phi(x, 0) = (F(x), 0), \quad \Phi^{-1} \circ \Psi(y, 0) = (F^{-1}(y), 0).$$

Estas identidades implicam o que queríamos. □

O próximo resultado nos permitirá definir espaço tangente.

Corolário 2.4.2. Suponha que S uma superfície regular. Sejam $p \in S$ e (\mathcal{O}, φ) , (Ω, ψ) parametrizações locais de classe C^k de S no ponto p . Se $\varphi(x_0) = \psi(y_0) = p$, então

$$\text{Range } d\varphi_{x_0} = \text{Range } d\psi_{y_0}.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.4.1, existe um difeomorfismo $F : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ de classe C^k tal que $\varphi = \psi \circ F$. Naturalmente, $F(x_0) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(x_0) = y_0$. Pela regra da cadeia, temos

$$d\varphi_{x_0} = d\psi_{y_0} dF_{x_0}.$$

Por outro lado, podemos concluir naturalmente que

$$d\psi_{y_0} = d\varphi_{x_0} dF_{y_0}^{-1},$$

o que é suficiente para concluir a prova. \square

Seja S uma superfície regular, $p \in S$ e (\mathcal{O}, φ) uma parametrização de S no ponto p de classe C^k , com $\varphi(q) = p$. Definimos o **espaço tangente** a S no ponto p por

$$T_p S = \text{Range } d\varphi_q.$$

Pelo Corolário 2.4.2 $T_p S$ está bem definido.

O Exemplo a seguir nos mostra que gráficos de funções C^k , com $k \geq 1$, são superfícies regulares.

Exemplo 2.4.3. Seja $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, com $U \subset \mathbb{R}^n$. O gráfico de f é uma superfície regular em \mathbb{R}^{n+1} . De fato, a aplicação $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\alpha(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, f(u_1, \dots, u_n))$$

é naturalmente uma parametrização global para $G_f = \{(u, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = f(u)\}$.

O resultado a seguir nos fornece uma grande quantidade de Exemplos de superfícies regulares.

Proposição 2.4.4. Suponha que $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto aberto. Sejam $f \in C^k(A, \mathbb{R})$, $k \geq 1$ e $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de f , isto é, para todo $p \in S$, temos $\nabla f(p) \neq 0$. O conjunto $S = \{x \in A : f(x) = c\}$ é uma superfície regular de classe C^k .

Demonstração. Dado $x \in S$, suponha sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x) \neq 0$. Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação dada por

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})).$$

É claro que F é de classe C^k e

$$dF_x = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $\det dF_x = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x) \neq 0$. Logo, pelo Teorema da Função Inversa (MUNKRES, 1991, Teorema 8.3) existe uma vizinhança V de p e uma vizinhança W de $F(p)$ tais que $F :$

$V \rightarrow W$ é difeomorfismo de classe C^k . Denote por $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ as funções coordenadas de F^{-1} . Como para $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in V$,

$$F^{-1} \circ F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

podemos concluir

$$u_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_i, i = 1, \dots, n$$

e

$$u_{n+1}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) = x_{n+1}.$$

Com isto, se $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in V \cap S$, temos

$$x_{n+1} = u_{n+1}(x_1, \dots, x_n, c).$$

Por fim, para $x \in \mathcal{O} = \pi(V \cap S)$, definindo $h(x) = u_{n+1}(x, c)$, concluímos que $V \cap S$ é o gráfico de h . É claro que \mathcal{O} é aberto, pois projeções são aplicações abertas. Pelo Exemplo 2.4.3 S é uma superfície regular. \square

Exemplo 2.4.5. A esfera unitária do \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ é uma superfície regular de classe C^1 . De fato, defina $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ e observe

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 1\}.$$

Além disso, note que 1 é valor regular de f , uma vez que, para $x \in \mathbb{S}^n$, $\nabla f(x) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1}) \neq 0$. Pela Proposição 2.4.4 concluímos.

2.4.2 A primeira forma fundamental

Sejam (\mathcal{O}, φ) uma parametrização local de S e φ_l a l -ésima função coordenada de φ , $l = 1, \dots, n$. Por (2.42) sabemos que $\{d\varphi_q(e_1), \dots, d\varphi_q(e_m)\}$ é uma base para $T_p S$. Dado $x \in \mathcal{O}$, considere a matriz $m \times m$ dada por $G(x) = (g_{jk}(x))$, onde

$$g_{jk}(x) = \langle d\varphi_x(e_j), d\varphi_x(e_k) \rangle = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}(x),$$

e $\{e_j : j = 1, \dots, m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m . Equivalentemente,

$$G(x) = (d\varphi_x)^t d\varphi_x. \quad (2.43)$$

É claro que $G(x)$ é definida positiva, pois, dado $v \in \mathbb{R}^m$ não nulo, digamos, $v = (v_1, \dots, v_m)$, temos que $v^t G(x) v = \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = |\tilde{v}|^2 > 0$ com $\tilde{v} = \sum_{i=1}^m v_i d\varphi_q(e_i)$. Além disso, temos $\det G(x) > 0$.

Chamamos G de **tensor métrico** de S em $\varphi(\mathcal{O})$ com respeito à parametrização local (\mathcal{O}, φ) ou de **primeira forma fundamental** de S em p .

O próximo resultado revela uma relação entre tensores métricos, a qual será de suma importância para podermos falar em medida intrínseca de superfície.

Corolário 2.4.6. Sejam S uma superfície regular e (\mathcal{O}, φ) , (Ω, ψ) parametrizações locais de S . Além disso, suponha que estas são de classe C^k com $\varphi(\mathcal{O}) = \psi(\Omega)$. Sejam $F : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ como na Proposição 2.4.1 e H o tensor métrico de S em $\psi(\Omega)$ com respeito à parametrização local (Ω, ψ) . Então,

$$G(x) = (dF_x)^t H(F(x)) dF_x.$$

Demonstração. Pela regra da cadeia temos que $d\varphi_x = d\psi_{F(x)} dF_x$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} G(x) &= (d\varphi_x)^t d\varphi_x \\ &= (d\psi_{F(x)} dF_x)^t d\psi_{F(x)} dF_x \\ &= (dF_x)^t (d\psi_{F(x)})^t d\psi_{F(x)} dF_x \\ &= (dF_x)^t H(F(x)) dF_x. \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta Seção vendo como calcular a primeira forma fundamental de uma superfície dada pelo gráfico de uma função de classe C^k .

Exemplo 2.4.7. Seja $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, com $U \subset \mathbb{R}^n$. Vimos no Exemplo 2.4.3 que de fato o gráfico de f é uma superfície regular em \mathbb{R}^{n+1} . Além disso, vimos que a aplicação $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\alpha(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, f(u_1, \dots, u_n))$$

é uma parametrização global para $G_f = \{(u, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = f(u)\}$. Com isso, note que $d\alpha_u = (a_{ij})_{(n+1) \times n}$, onde, para $i \neq n+1$, $a_{ij} = \delta_{ij}$ e $a_{(n+1) \times j} = \frac{\partial f}{\partial u_j}(u)$. Dessa forma, por (2.43), $G(x) = (g_{ij})$, com

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ki} \delta_{kj} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j}.$$

2.4.3 Medida intrínseca de superfície

Nosso objetivo nesta seção é construir uma medida intrínseca a uma superfície regular compacta por meio de uma partição da unidade para a mesma. Seja $\{V_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta localmente finita para uma superfície regular S , isto é, cada ponto de S possui uma vizinhança que intersecta no máximo uma quantidade finita de abertos da família $\{V_j\}_{j \in J}$. Uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_j\}_{j \in J}$ é uma coleção de funções $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

- 1) $\varphi_j(p) \geq 0$ para todo $j \in J$ e $p \in S$;
- 2) $\text{supp}(\varphi_j) \subset V_j$, para todo $j \in J$;
- 3) $\sum_{j \in J} \varphi_j(p) = 1$ para todo $p \in S$.

Lembre que o suporte de uma função real f definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Observação 2.4.8. A soma no item 3) é finita. De fato, dado cada $p \in S$ existe uma vizinhança V de p que intersecta **somente finitos abertos** da coleção $\{V_j\}_{j \in J}$, digamos, V_{j_1}, \dots, V_{j_k} . Ou seja, $V \cap V_j = \emptyset$, sempre que $j \neq j_l, l = 1, \dots, k$. Dessa forma, $p \notin V_j$, para todo $j \neq j_l$ e portanto $\sum_{j \in J} \varphi_j(p) = \sum_{l=1}^k \varphi_{j_l}(p)$. Um fato bastante útil é que qualquer cobertura aberta para S sempre possui um refinamento de tal cobertura que é enumerável e localmente finito (LEE, 2013, Teorema 1.15).

Proposição 2.4.9 (Existência de partição da unidade para superfícies). Se $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície regular e $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é uma cobertura localmente finita e aberta para a mesma, então existe uma partição da unidade subordinada a \mathcal{W} formada por funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. É sempre possível considerar um refinamento $\mathcal{V} = \{V_i\}$ de \mathcal{W} que é enumerável e localmente finito e que satisfaz (LEE, 2013, Teorema 1.15): Para cada i , $V_i \subset W_\alpha$, para algum α e existe um aberto $V'_i \subset W_\alpha$, com $\overline{V}_i \subset V'_i$, bem como existe uma parametrização $(B(0, r_i), \varphi_i)$ de V_i e $r'_i > r_i$ satisfazendo

$$\overline{V}_i = \varphi_i(\overline{B(0, r_i)}), \quad V'_i = \varphi_i(B(0, r'_i)).$$

Com isso, para cada i , o Lema 2.3.20 (existência de funções de corte) nos permite escolher uma função ϕ com $\phi \equiv 1$ em $B(0, \epsilon_i)$, $\epsilon_i < r_i$ e $\text{supp}(\phi) \subset B(0, r_i)$. Assim, defina a função $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_i = \begin{cases} \phi \circ \varphi_i^{-1}, & \text{em } V'_i \\ 0, & S \setminus \overline{V}_i, \end{cases}$$

No conjunto $V'_i \setminus \overline{V}_i$; onde as duas definições de f_i se sobrepõem, ambas são nulas. Logo, f_i é uma função suave bem definida e $\text{supp}(f_i) \subset \overline{V}_i$. Defina a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$. Como a cobertura $\{\overline{V}_i\}$ é localmente finita (LEE, 2013, Lema 1.13), então esta soma tem apenas uma quantidade finita de parcelas não nulas em uma vizinhança de cada ponto e portanto define uma função suave. Se $x \in V_i$ então $\varphi_i^{-1}(x) \in B(0, r_i)$. Portanto $f_i(x) = \phi(\varphi_i^{-1}(x)) = 1$ e concluímos que f_i é positiva em B_i e não negativa em geral. Além disso, como cada ponto de S está em algum V_i (já que $\{V_i\}$ também é uma cobertura para S) segue que $f > 0$ em toda a

superfície S . Com isso fica bem definida a função suave $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f(x)}.$$

É imediato da definição que $0 \leq g_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} g_i = 1$. Por fim precisamos reindexar nossas funções de modo que utilizemos os índices em \mathcal{A} . Com efeito, lembre que, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, existe $\alpha(i) \in \mathcal{A}$ com $V'_i \subset W_{\alpha(i)}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ defina $\psi_\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{i:\alpha(i)=\alpha} g_i(x).$$

Se não existirem índices i para os quais $\alpha(i) = \alpha$, então a soma acima deve ser interpretada como a função nula. Como g_i é não negativa e $\text{supp}(g_i) \subset \bar{V}_i$ temos

$$\text{supp}(\psi_\alpha) \subset \bigcup_{i:\alpha(i)=\alpha} \bar{V}_i \subset X_\alpha.$$

Observando que $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$ e $0 \leq \psi \leq 1$ temos que $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é a partição da unidade requerida.

□

O clássico Teorema de Mudança de Variáveis (TAYLOR, 2006, Teorema 7.2) será crucial para a boa definição de uma medida de superfície. Vejamos a seguir seu enunciado:

Teorema 2.4.10. Sejam $\mathcal{O}, \Omega \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $\gamma : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ um difeomorfismo de classe C^1 . Se f for uma função mensurável positiva em Ω ou $f \in L^1(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\mathcal{O}} f \circ \gamma(x) J(x) dx,$$

com $J(x) = |\det d\gamma_x|$.

Seja S uma superfície de classe C^1 e $V \subset S$, aberto. Suponha que (\mathcal{O}, φ) e (Ω, ψ) sejam parametrizações locais de S tais que $V = \psi(\Omega) = \varphi(\mathcal{O})$. Vamos mostrar que para qualquer função f em $L^1(V)$, ou mensurável positiva em V vale

$$\int_{\mathcal{O}} (f \circ \varphi)(x) \sqrt{\det G(x)} dx = \int_{\Omega} (f \circ \psi)(x) \sqrt{\det H(x)} dx, \quad (2.44)$$

com G , e H sendo os tensores métricos de S em $\varphi(\mathcal{O})$ e $\psi(\Omega)$, respectivamente. Com efeito, pelo Corolário 2.4.6, obtemos

$$\det G(x) = (\det dF_x)^2 \det H(F(x)),$$

com $F : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ sendo a mudança de coordenadas da Proposição 2.4.1. Dessa forma,

$$\sqrt{\det G(x)} = |\det dF_x| \sqrt{\det H(F(x))}.$$

Portanto, aplicando o Teorema 2.4.10 ao difeomorfismo F e lembrando que $\varphi = \psi \circ F$ obtemos o que queríamos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f \circ \psi)(x) \sqrt{\det H(x)} dx &= \int_{\mathcal{O}} (f \circ \psi)(F(x)) \sqrt{\det H(F(x))} |\det dF_x| dx \\ &= \int_{\mathcal{O}} (f \circ \varphi)(x) \sqrt{\det G(x)} dx. \end{aligned}$$

Utilizando (2.44) podemos definir um dos conceitos mais importantes para este trabalho:

Definição 6. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular de classe C^1 e $V \subset S$, aberto. Suponha que (\mathcal{O}, φ) seja uma parametrização local S tal que $V = \varphi(\mathcal{O})$. A **medida intrínseca** a vizinhança coordenada V é a medida dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\sigma := \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi(x) \sqrt{g(x)} dx,$$

com $g(x) = \det G(x)$ e f é uma função em $L^1(V)$, ou mensurável positiva em V . Em outras palavras, a medida intrínseca a S , na vizinhança V é a medida induzida pela **primeira forma fundamental**. Em particular, dado $E \subset \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ e sendo $f = \chi_E$ obtemos

$$\sigma(E) = \int_{\mathcal{O}} \chi_{\varphi^{-1}(E)}(x) \sqrt{g(x)} dx = \int_{\mathcal{O} \cap \varphi^{-1}(E)} \sqrt{g(x)} dx, \quad (2.45)$$

dessa forma, se $E \cap V = \emptyset$, a função característica $\chi_{\varphi^{-1}(E)}$ é nula e portanto $\sigma(E) = 0$.

2.4.3.1 Medida em superfície compacta

No que segue, iremos utilizar partição da unidade para definir de maneira geral uma medida de superfície compacta.

Sejam S uma superfície compacta e $\varphi_j : \mathcal{O}_j \rightarrow V_j, j = 1, \dots, l$, parametrizações locais tais que $\{V_j\}_{j=1}^l$ é uma cobertura aberta para S . Pela Proposição 2.4.9, seja $\{\psi_j\}_{j=1}^l$ uma partição da unidade subordinada a tal cobertura. Sendo f é uma função mensurável positiva em S ou em $L^1(S)$, para $x \in S$ escreva

$$f(x) = \sum_{j=1}^l (f\psi_j)(x).$$

Logo, se $x \in \mathcal{O}_j$, concluímos que $f(\varphi_j(x)) = (f\psi_j)(x)$ e portanto definimos a medida intrínseca σ a S como sendo

$$\int_S f d\sigma := \sum_{j=1}^l \int_{\text{supp}(\psi_j)} f\psi_j d\sigma_j = \sum_{j=1}^l \int_{V_j} f d\mu_j, \quad (2.46)$$

com $\mu_j = \psi_j d\sigma_j$. Será usual utilizarmos a notação $\mu_j = \psi_j d\sigma$. Em particular, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, com $A \cap S \neq \emptyset$, tomando $f = \chi_A$, obtemos

$$\sigma(A) := \sum_{j=1}^l \mu_j(A \cap \text{supp}(\psi_j)). \quad (2.47)$$

Vejamus um exemplo que nos mostra que o espaço $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é não vazio.

Exemplo 2.4.11. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular compacta de classe C^1 e seja σ a medida de superfície intrínseca a S . Vamos mostrar que $\sigma \in \mathcal{M}(S)$. Com efeito, inicialmente suponha que $V \subset S$ é um aberto e seja (\mathcal{O}, φ) uma parametrização local S tal que $V = \varphi(\mathcal{O})$. Como S é compacta podemos supor que \mathcal{O} limitado. Defina o funcional linear positivo $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(f) = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi(x) \sqrt{g(x)} dx.$$

Pela unicidade proporcionada pelo Teorema 2.3.8 (Representação de Riesz para funcionais positivos) concluímos que a medida de superfície da Definição 6 é de fato uma medida de Radon. Além disso, como \sqrt{g} é contínua em $\overline{\mathcal{O}}$ e f tem suporte compacto, concluímos que I é limitado. Portanto, pela Observação 2.3.9 σ é finita, logo, $0 < \sigma(V) < \infty$. Ainda, por (2.45) temos que $\text{supp}(\sigma) \subset V$. Para finalizar, utilizamos a compacidade de S e partição da unidade para definir a medida de superfície em S de maneira global assim como fizemos em (2.46) e concluir o que queríamos.

Nem sempre é simples obter a expressão de uma medida de superfície, todavia, se uma superfície for dada pelo gráfico de uma função C^1 o próximo resultado torna este trabalho mais simplório.

Proposição 2.4.12. Sejam $f \in C^k(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, definida no aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular dada pelo gráfico de f . A medida de superfície σ sobre S é dada por

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dm. \quad (2.48)$$

Além disso, para toda função h mensurável positiva ou em $L^1(S)$, temos

$$\int_S h d\sigma := \int_{\mathcal{O}} h(\varphi(x)) \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx,$$

com $\varphi(x) = (x, f(x))$. Em particular, dado $A \subset S$,

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

Demonstração. Primeiramente, pelo Exemplo 2.4.3 S é uma superfície regular. Seja (\mathcal{O}, φ) uma parametrização local de S com $\varphi(x) = (x, f(x))$. Dado $x \in \mathcal{O}$, vimos no Exemplo 2.4.3 que o

tensor métrico relacionado a esta parametrização é dado por $G(x) = (g_{ij}(x))$, onde

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), n \leq i, j \leq n. \quad (2.49)$$

Com o intuito de simplificar a expressão acima, vamos definir uma outra parametrização local e mostrar que

$$\sqrt{\det G(x)} = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}, \forall x \in \mathcal{O}. \quad (2.50)$$

Fixe $x_0 \in \mathcal{O}$. Se $\nabla f(x_0) = 0$, então $G(x)$ é a matriz identidade e (2.50) é trivial. Suponha que $\nabla f(x_0) \neq 0$ e seja $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma rotação tal que $R(\nabla f(x_0)) = ce_1$, com c sendo uma constante e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Sejam $\Omega = R(\mathcal{O})$, y_0 tal que $R(x_0) = y_0$ e $\tilde{f} = f \circ R^{-1}$. Seja $\psi : \Omega \rightarrow S$ uma parametrização local dada por

$$\psi(y) = \varphi \circ R^{-1}(y) = (R^{-1}(y), \tilde{f}(y)).$$

Naturalmente

$$R(\nabla f(x_0)) = \nabla \tilde{f}(y_0),$$

pois, como $R^t = R^{-1}$, temos

$$R(\nabla f(x_0)) = R \cdot [\nabla f(x_0)]^t = [\nabla f(x_0) \cdot R^t]^t = \nabla(f \circ R^{-1})(R(x_0)) = \nabla \tilde{f}(y_0).$$

Ainda, é claro que a mudança de coordenadas $F = \psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ é dada por $F(x) = R$. Sendo H o tensor métrico relacionado a ψ , pelo Corolário 2.4.6 temos

$$G(x_0) = R^t H(y_0) R.$$

Por outro lado, temos

$$d\psi_{y_0} = \begin{bmatrix} R^{-1} \\ \nabla \tilde{f}(y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} \\ ce_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, como R é uma matriz ortogonal, temos

$$H(y_0) = \begin{bmatrix} R & ce_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} \\ ce_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + c^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como R preserva norma, concluímos que $c = |\nabla f(x_0)|$. Portanto

$$\det G(x_0) = (\det R)^2 \det H(y_0) = 1 + |\nabla f(x_0)|^2,$$

como desejávamos. Por fim, para uma função h mensurável positiva ou em $L^1(S)$ temos

$$\int_S h d\sigma := \int_{\mathcal{O}} h(\varphi(x)) \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx,$$

em particular, dado $A \subset S$, para $h = \chi_A$, temos

$$\sigma(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

□

Apesar de não ser simples expressar uma medida de superfície, veremos, com a a proposição a seguir que toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função suave, e portanto, à luz da Proposição 2.4.12, será possível trabalharmos com a medida de superfície localmente.

Proposição 2.4.13. Toda superfície regular de classe C^k é localmente o gráfico de uma função de classe C^k .

Demonstração. Sejam $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular de classe C^k , $p \in S$ e (U, α) uma parametrização de S em p . Defina a aplicação $\beta = \pi \circ \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com π sendo a projeção

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Seja $q \in U$ tal que $\alpha(q) = p$. Naturalmente, $d\beta_q$ é a submatriz de ordem n da matriz $d\alpha_q$ dada pela exclusão da última linha. Como $d\alpha_q$ é injetiva, segue que o determinante de $d\beta_q$ é não nulo, dessa forma, pelo Teorema da Função Inversa (MUNKRES, 1991, Teorema 8.3) existe uma vizinhança V de q e uma vizinhança W de $\beta(q)$ tal que $\beta : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo, o que implica $\pi|_{\alpha(V)} : \alpha(V) \rightarrow W$ é bijeção. Denote por α_i a i -ésima função coordenada de α , com $i = 1, \dots, n+1$. Além disso, defina a função

$$f = \alpha_{n+1} \circ \beta^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}.$$

É claro que $\alpha(V)$ contém p . No que segue, vamos mostrar que $\alpha(V)$ é o gráfico de f . Com efeito, dado $\tilde{p} \in \alpha(V)$, existem $\tilde{q}_1 \in V$ e $\tilde{q}_2 \in W$ tais que $\alpha(\tilde{q}_1) = \tilde{p}$ e $\pi(\tilde{p}) = \tilde{q}_2$. Naturalmente,

$$\tilde{p} = (\alpha_1(\tilde{q}_1), \dots, \alpha_{n+1}(\tilde{q}_1)).$$

Logo,

$$\tilde{q}_2 = (\alpha_1(\tilde{q}_1), \dots, \alpha_n(\tilde{q}_1)).$$

Por fim, $f(\tilde{q}_2) = \alpha_{n+1}(\beta^{-1}(\tilde{q}_2)) = \alpha_{n+1}(\tilde{q}_1)$, e $\tilde{p} = (\tilde{q}_2, f(\tilde{q}_2))$. □

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície e σ sua medida intrínseca. Além disso, seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal. A imagem de S por meio de T dá origem a uma nova superfície regular dada por $\tilde{S} = T(S)$. Qual é a relação entre a medida de superfície de \tilde{S} , digamos, $\tilde{\sigma}$, e σ ? O resultado a seguir nos responde isto.

Proposição 2.4.14. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular compacta. Então sua medida σ de superfície é invariante por transformações ortogonais, isto é, se \tilde{S} e $\tilde{\sigma}$ são como anteriormente, então,

$$\tilde{\sigma}(\tilde{S}) = \sigma(S),$$

Demonstração. Como S é compacta, por (2.47) é suficiente provarmos o resultado para uma vizinhança coordenada V de S . Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S$ uma parametrização de V e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear ortogonal. Denote $\tilde{V} = T(V)$. É claro que $\tilde{\varphi} = T \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização para \tilde{V} . Dado $x \in U$, é de rápida verificação que $d\tilde{\varphi}_x = Td\varphi_x$. Logo, a primeira forma fundamental de \tilde{S} em \tilde{V} é dada por

$$\tilde{G}(x) = (d\tilde{\varphi}_x)^t d\tilde{\varphi}_x = (Td\varphi_x)^t d\tilde{\varphi}_x = (d\varphi_x^t T^t) T d\tilde{\varphi}_x = d\varphi_x^t d\tilde{\varphi}_x = G(x),$$

com $G(x)$ sendo a primeira forma fundamental de S em V . Com isso, por (2.45), obtemos

$$\tilde{\sigma}(\tilde{V}) = \int_U \sqrt{\det \tilde{G}(x)} dx = \int_U \sqrt{\det G(x)} dx = \sigma(V),$$

e com isso concluímos. □

Proposição 2.4.15. Seja σ^{n-1} e medida de superfície na esfera \mathbb{S}^{n-1} . Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ temos que

$$\sigma^{n-1}(B(x, r)) \lesssim r^{n-1}.$$

Demonstração. Como $\text{supp}(\sigma^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ é suficiente provarmos o resultado supondo que $B(x, r) \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \emptyset$. Suponhamos inicialmente que $r \geq 1$ naturalmente temos o resultado, pois

$$\sigma^{n-1}(B(x, r)) = \sigma^{n-1}(B(x, r) \cap \mathbb{S}^{n-1}) \leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1}.$$

Com isso só nos resta mostrar o resultado supondo que $r < 1$. Como σ^{n-1} é invariante por transformações ortogonais (Proposição 2.4.14), sem perda de generalidade, suponhamos que a bola $B(x, r)$ intersecta a esfera \mathbb{S}^{n-1} de modo que $B(x, r) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ esteja contida no gráfico da função $f : B(0, r) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x') = (1 - |x'|^2)^{1/2}$ e o vetor $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ esteja em tal interseção, veja a figura 1. Dessa forma, denotando $V = G_r(f)$, temos que $B(x, r) \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset V$. Além disso, é de rápida verificação que

$$\nabla f(x') = -\frac{x'}{(1 - |x'|^2)^{1/2}}.$$

Logo, pela Proposição 2.4.12 e utilizando integração em coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
 \sigma^{n-1}(V) &= \int_{B(0,r)} \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx' \\
 &= \int_{B(0,r)} (1 - |x'|^2)^{-1/2} dx' \\
 &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^r (1 - t^2)^{-1/2} t^{n-1} dt \\
 &\leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1} \int_0^r (1 - |t|^2)^{-1/2} dt \\
 &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1} \arcsin(r) \\
 &\leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1} \frac{\arcsin(r)}{r}.
 \end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x)/x = 1$, então obtemos a limitação

$$\sigma^{n-1}(V) \lesssim r^{n-1},$$

e com isso finalizamos. □

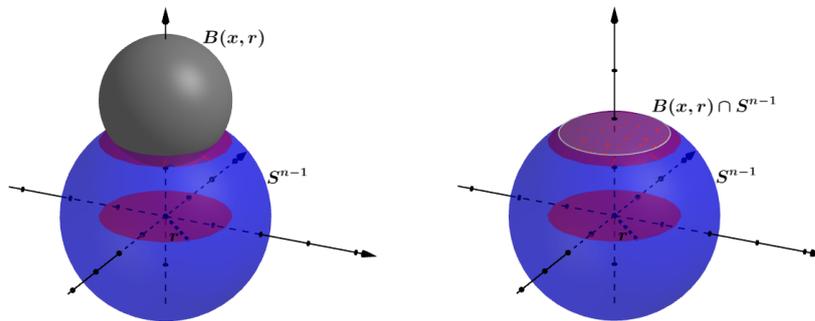


Figura 1 – Interseção de bola $B(x, r)$ e a esfera \mathbb{S}^{n-1}

Finalizamos esta seção com a conhecida fórmula de integração em coordenadas polares a qual pode ser consultada em (TAYLOR, 2006, Proposição 7.3).

Teorema 2.4.16 (Coordenadas Polares). Seja σ a medida de superfície em \mathbb{S}^{n-1} . Se f é uma função mensurável a Borel não negativa ou $f \in L^1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(ry) r^{n-1} d\sigma_y dr.$$

2.4.4 Orientabilidade de superfícies

Temos o interesse de mostrar decaimentos para transformada de Fourier de medidas de superfície, sendo assim, faz-se necessário o conceito de orientação para definirmos curvatura. Esta seção é baseada em (LIMA, 2014a) e (THORPE, 1979).

Dados $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ defina o vetor

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n+1} \\ v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^n & v_2^n & \dots & v_{n+1}^n \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

com $v_i = (v_1^i, \dots, v_{n+1}^i)$, $i = 1, \dots, n$ e $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Da álgebra linear sabemos que as seguintes propriedades são válidas:

- i) $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ é tal que $w \perp v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$;
- ii) Se v_1, \dots, v_n são linearmente independentes, então o vetor $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ é não nulo.

Sejam E um espaço vetorial de dimensão m e \mathcal{B} o conjunto de todas as suas bases ordenadas. Dadas bases $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{B}$, digamos,

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}, \quad \mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\},$$

lembre que a matriz de mudança de base de \mathcal{E} para \mathcal{F} é a matriz $\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = (\lambda_{ij})_{m \times m}$, onde

$$f_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} e_i,$$

para todo $j = 1, \dots, m$. Dizemos que \mathcal{E} e \mathcal{F} possuem a mesma orientação se $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}) > 0$. Segue de propriedades de matrizes de mudança de base e de determinante que esta relação é uma relação de equivalência no conjunto \mathcal{B} , isto é, para $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{B}$ valem as propriedades:

- i) $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}) = 1 > 0$;
- ii) Se $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}) > 0$, então $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}) > 0$, pois $\mathcal{B}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}} = \mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}^{-1}$;
- iii) Se $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}) > 0$ e $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}) > 0$ então $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}) > 0$, pois $\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}} = \mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$.

Observação 2.4.17. A relação de equivalência definida anteriormente determina exatamente duas classes em \mathcal{B} (LIMA, 2014a, Proposição 1) e cada uma dessas será chamada de **orientação** do espaço vetorial E . Ou seja, uma orientação de E é uma coleção de bases \mathcal{O} com as propriedades:

- i) Se $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{O}$ então $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}) > 0$;
- ii) Se $\mathcal{G} \notin \mathcal{O}$ então $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}) < 0$, para toda $\mathcal{E} \in \mathcal{O}$.

Um **espaço vetorial orientado** é um espaço vetorial no qual uma das suas orientações foi escolhida, digamos, (E, \mathcal{O}) . Neste caso, as bases em \mathcal{O} são chamadas de positivas e as demais são chamadas de negativas. Pela relação de equivalência, dada uma base \mathcal{E} de E existe uma única orientação determinada por \mathcal{E} .

Exemplo 2.4.18. A orientação canônica em \mathbb{R}^n é a orientação determinada pela base canônica.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em $p \in S$ se existe uma parametrização de S em p (U, φ) tal que $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em q , com $\varphi(q) = p$. Naturalmente esta definição não depende da parametrização escolhida, pois se (O, ψ) é outra parametrização de S em p temos que $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ é diferenciável.

Dados $p \in S$ e $v \in T_p S$ e supondo que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em p , definimos a derivada de f em p como sendo a aplicação $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0),$$

com $\alpha : I \rightarrow S$ sendo uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Afirmamos que esta definição independe da curva. De fato, seja β outra curva diferenciável tal que $\beta(0) = p = \alpha(0)$ e $\beta'(0) = v = \alpha'(0)$. Seja (U, φ) uma parametrização de S em p . Além disso, defina $\tilde{\alpha} = \varphi^{-1} \circ \alpha$ e $\tilde{\beta} = \varphi^{-1} \circ \beta$. Naturalmente, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Logo, como $\alpha = \varphi \circ \tilde{\alpha}$ e $\beta = \varphi \circ \tilde{\beta}$, pela regra da cadeia obtemos

$$\alpha'(0) = d\varphi_{\tilde{\alpha}(0)}(\tilde{\alpha}'(0)), \quad \beta'(0) = d\varphi_{\tilde{\beta}(0)}(\tilde{\beta}'(0)).$$

Com isto, segue da injetividade da derivada $d\varphi_q$ que $\tilde{\alpha}'(0) = \tilde{\beta}'(0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} df_p(v) &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \tilde{\alpha})'(0) \\ &= d(f \circ \varphi)_{\tilde{\alpha}(0)}(\tilde{\alpha}'(0)) \\ &= d(f \circ \varphi)_{\tilde{\beta}(0)}(\tilde{\beta}'(0)) \\ &= (f \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes também podemos mostrar que df_p é uma aplicação linear.

Um vetor em um ponto $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um par (p, v) com $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Utilizaremos a notação $\mathbb{R}_p^{n+1} = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^{n+1}\}$. Um campo de vetores em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação X que associa a cada ponto de p de S um vetor $X(p) \in \mathbb{R}_p^{n+1}$. Se $X(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$ dizemos que X é um campo tangente a S , por outro lado, se $X(p)$ é ortogonal a S para todo $p \in S$, isto é, $X(p) \in (T_p S)^\perp$, dizemos que o campo X é normal a S . Um campo X em uma superfície S é suave em $p \in S$ se para qualquer parametrização (U, φ) de S em

p a aplicação $X \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ for suave. Neste caso, dado $v \in T_p(S)$ definimos $dX_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como sendo

$$dX_p(v) = (X \circ \alpha)'(0), \quad (2.52)$$

com α sendo uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Analogamente ao que já fizemos, esta definição não depende da escolha de α e portanto definimos a derivada de X no ponto p na direção de $v \in T_p S$ como sendo $dX_p(v)$.

Definição 7. Uma orientação em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um campo de vetores normal e suave sobre a mesma. Uma vez escolhida uma orientação em S dizemos que a mesma está orientada.

Em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, uma orientação N pode ser usada para particionar a coleção de todas as bases ordenadas de cada plano tangente em dois subconjuntos da seguinte forma: Dado $p \in S$, seja $\{v_i \in \mathbb{R}^{n+1} : i = 1, \dots, n\}$ uma base ordenada de $T_p S$, tal base é dita consistente com a orientação N em S se o determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ N(p) \end{pmatrix}$$

é positivo; a base é inconsistente com N se o determinante é negativo. Em outras palavras, $\{v_1, \dots, v_n, N(p)\}$ é uma base de \mathbb{R}^{n+1} e este possui apenas duas orientações, isto condiz com o que vimos na Observação 2.4.17. De agora em diante as superfícies serão orientáveis.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e (U, φ) uma parametrização de S em $p \in S$. Além disso, seja $q \in U$ tal que $\varphi(q) = p$ e denote

$$v_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(q) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(q), \dots, \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_i}(q) \right),$$

para todo $i = 1, \dots, n$, com φ_i sendo a i -ésima função coordenada de φ . Lembre que, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base para $T_p S$, dessa forma, como S é orientável e os vetores $v_1(q), \dots, v_n(q)$ são linearmente independentes fica bem definido o campo normal

$$N(p) = \frac{v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p)}{|v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p)|}$$

e chamamos a mesma de **aplicação de Gauss** e $N(S)$ é chamada de imagem esférica. Pela

definição (2.52), dado $p \in S$ e $v \in T_p S$

$$dN_p(v) = (N \circ \alpha)'(0),$$

com α sendo uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Vamos mostrar que de fato este vetor ainda está em $T_p S$, independentemente do vetor v , mas antes disso precisamos de um resultado sobre aplicações diferenciáveis em um aberto do \mathbb{R}^n . Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Lembre que a derivada de f no ponto $p \in A$ na direção de $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = (f \circ \gamma)'(t_0), \quad (2.53)$$

com $\gamma : I \rightarrow A$ sendo uma curva diferenciável tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Pela regra da cadeia (2.53) está bem definido. Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma função definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. De maneira análoga, definimos a derivada de F no ponto $p \in A$ na direção de $v \in \mathbb{R}^n$ como sendo

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p), \dots, \frac{\partial F_{n+1}}{\partial v}(p) \right),$$

com F_i sendo a i -ésima função coordenada de F . Vejamos algumas propriedades de campos diferenciáveis.

Proposição 2.4.19. Sejam $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ funções diferenciáveis definidas no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então, dado $p \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$ são válidas

- i) $\frac{\partial(F + G)}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v}$;
- ii) $\frac{\partial(F \cdot G)}{\partial v}(p) = \frac{\partial F}{\partial v}(p) \cdot G(p) + F(p) \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(p)$ (regra do produto);
- iii) $\frac{\partial(fF)}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)F(p) + f(p)\frac{\partial F}{\partial v}(p)$.

Demonstração. A demonstração de cada uma são semelhantes entre si, sendo assim, provemos apenas o item iii). Seja F_i a i -ésima função coordenada de F e defina o campo $G : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $G(x) = (G_1(x), \dots, G_{n+1}(x))$, com $G_i = fF_i$. Seja $\gamma : I \rightarrow A$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Com isto, pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial G_i}{\partial v}(p) = (G_i \circ \gamma)'(t_0) = \nabla G_i(p) \cdot v.$$

Por outro lado, pela regra do produto concluímos que

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)F_i(p) + f(p)\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p),$$

para todo $j = 1 \dots, n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\nabla G_i(p) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)F_i(p) + f(p)\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p)F_i(p) + f(p)\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+1}}(p) \right) \\ &= F_i(p)\nabla f(p) + f(p)\nabla F_i(p).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_i}{\partial v}(p) &= (\nabla f(p) \cdot v)F_i(p) + f(p)(\nabla F_i(p), v) \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(p)F_i(p) + f(p)\frac{\partial F_i}{\partial v}(p),\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial v}(p) &= \left(\frac{\partial G_1}{\partial v}(p), \dots, \frac{\partial G_{n+1}}{\partial v}(p) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(p)(F_1(p), \dots, F_{n+1}(p)) + f(p) \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p), \dots, \frac{\partial F_{n+1}}{\partial v}(p) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(p)F(p) + f(p)\frac{\partial F}{\partial v}(p),\end{aligned}$$

e concluímos. □

Proposição 2.4.20. Dado $p \in S$ temos que $dN_p(v) \in T_pS$ para todo $v \in T_pS$.

Demonstração. De fato, inicialmente seja (U, φ) uma parametrização de S em p e suponha que $\alpha(q) = p$. Além disso, seja $\psi : T_pS \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo dado por $\psi(v_i(p)) = e_i$ e denote $\tilde{v} = \psi(v)$, com $v \in T_pS$. Dessa forma, sendo $F = N \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ concluímos que $(F \cdot F)(x) = 1$ para todo $x \in U$. Logo, pela Proposição 2.4.19 - (ii) obtemos

$$0 = 2 \frac{\partial F}{\partial \tilde{v}}(q) \cdot F(q) = 2 \frac{\partial F}{\partial \tilde{v}}(q) \cdot N(p).$$

Logo, $\frac{\partial F}{\partial \tilde{v}}(q) \in T_pS$. Por outro lado, note que

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{v}}(q) = (F \circ \alpha)'(0) = (N \circ \varphi \circ \alpha)'(0),$$

com $\alpha : I \rightarrow U$ sendo uma curva tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = \tilde{v}$. Naturalmente, $\beta = \varphi \circ \alpha$ é uma curva tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = v$, pois, pela definição de ψ , se denotarmos $v = \sum \lambda_i v_i(p)$ concluímos que $\tilde{v} = \psi(v) = \sum \lambda_i e_i$. Com isso, $\beta'(0) = d\varphi_q(\tilde{v}) = \sum \lambda_i d\varphi_q(e_i) = \sum \lambda_i v_i(p) = v$. Portanto, por definição

$$dN_p(v) := (N \circ \beta)'(0) = N \circ (\varphi \circ \alpha)'(0),$$

e concluimos. □

Definição 8. Sendo $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular e $p \in S$ a **Aplicação de Weingarten** sobre S é a aplicação $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ dada por

$$A_p(v) = -dN_p(v).$$

No exemplo a seguir iremos calcular as aplicações de Gauss e de Weingarten na esfera de raio r .

Exemplo 2.4.21. O campo de vetores normal à esfera de raio $r > 0$

$$\mathbb{S}_r^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = r\}$$

é dado por $N(p) = \frac{p}{r}$, para todo $p \in \mathbb{S}_r^n$. Além disso, $A_p(v) = -v/r$, para todo $v \in T_p \mathbb{S}_r^n$. De fato, primeiramente, para $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{S}_r^n$, obtemos

$$p_i = \pm \left(r^2 - \sum_{j \neq i} p_j^2 \right)^{1/2},$$

para cada $i = 1, \dots, n+1$. Seja

$$U_i = \left\{ x \in \mathbb{R}_i^n : r^2 - \sum_{j \neq i} x_j^2 \geq 0 \right\},$$

com $\mathbb{R}_i^n = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$. Defina $\varphi_i^+, \varphi_i^- : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\varphi_i^+(x) = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \left(r^2 - \sum_{j \neq i} x_j^2 \right)^{1/2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right),$$

e

$$\varphi_i^-(x) = \left(x_1, \dots, x_{i-1}, - \left(r^2 - \sum_{j \neq i} x_j^2 \right)^{1/2}, x_{i+1}, \dots, x_n \right),$$

para todo $i = 1, \dots, n+1$. Tais aplicações cobrem toda a esfera \mathbb{S}_r^n . Por simplicidade, suponhamos que $p \in \varphi_1^+(U_1)$ e denotemos $\varphi_1^+ = \varphi$ e $U_1 = U$. Além disso, por simplicidade seja

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : r^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0 \right\}.$$

É claro que

$$\varphi(x) = \left(\left(r^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, x_1, \dots, x_n \right),$$

para todo $x \in U$. Com isto, dado $x \in U$ tal que $\varphi(x) = p$, temos

$$v_i(p) = (-x_i c, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

para todo $i = 1, \dots, n$, com $c = \left(r^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-1/2}$ e o 1 se encontra na $(i + 1)$ -ésima coordenada. Indutivamente, concluímos que

$$v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p) = (1, x_1 c, \dots, x_n c).$$

Logo, $|v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p)| = rc$. Portanto,

$$N(p) = \left(\frac{c^{-1}}{r}, \frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = \frac{1}{r} \left(\left(r^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}, x_1, \dots, x_n \right) = \frac{\varphi(x)}{r} = \frac{p}{r}.$$

Por fim, dado $v \in T_p \mathbb{S}_r^n$, seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Dessa forma,

$$(N \circ \alpha)(t) = \frac{\alpha(t)}{r},$$

para todo $t \in I$ e portanto,

$$A_p(v) = -dN_p(v) = -(N \circ \alpha)'(0) = -\frac{\alpha'(0)}{r} = -\frac{v}{r}.$$

Na Proposição 2.4.13 mostraremos que toda superfície regular S é localmente o gráfico de uma função e com isto iremos obter concretamente uma medida de superfície em coordenadas locais.

Exemplo 2.4.22. Seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície dada pelo gráfico de uma função $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^k , $k \geq 1$, digamos,

$$S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} = \phi(x_1, \dots, x_n)\} = \{x \in A \times \mathbb{R} : \Phi(x) = 0\},$$

com $\Phi(x) = x_{n+1} - \phi(x_1, \dots, x_n)$. Então, $N(p) = \pm \frac{\nabla \Phi(p)}{|\nabla \Phi(p)|}$. De fato, suponha sem perda de generalidade que $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma parametrização de S dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)).$$

Logo, dado $p \in S$ seja $x \in A$ tal que $\varphi(x) = p$. É claro que

$$v_i(p) = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\right),$$

com o número 1 estando na i -ésima coordenada. Com isso, indutivamente, obtemos

$$v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n & e_{n+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = (-1)^n \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x), 1 \right),$$

ou seja,

$$v_1(p) \wedge \dots \wedge v_n(p) = \pm(-\nabla \phi(x), 1) = \pm \nabla \Phi(x, \phi(x)).$$

Portanto,

$$N(p) = \pm \frac{\nabla \Phi(p)}{|\nabla \Phi(p)|}.$$

Por fim, considerando o vetor normal com o sinal negativo, pela Proposição 2.4.19 - (iii) (regra da cadeia), obtemos

$$\begin{aligned} A_p(v) &= -dN_p(v) \\ &= - \left[d \left(\frac{1}{|\nabla \Phi|} \right)_p (v) \nabla \Phi(p) + \frac{1}{|\nabla \Phi(p)|} d(\nabla \Phi)_p(v) \right], \end{aligned}$$

para todo $v \in T_p S$.

Proposição 2.4.23. A aplicação de Weingarten é autoadjunta, isto é,

$$\langle A_p(u), v \rangle = \langle u, A_p(v) \rangle,$$

para todo $u, v \in T_p S$.

Demonstração. Seja (U, φ) uma parametrização de S no ponto p e suponha que $\alpha(q) = p$. Dessa forma, considere $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para $T_p S$ dada por

$$v_i = \varphi_{x_i}(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(q).$$

Como A_p é linear, é suficiente mostrar que

$$\langle A_p(v_i), v_j \rangle = \langle v_j, A_p(v_i) \rangle.$$

Como $\langle (N \circ \varphi)(q), \varphi_{x_j}(q) \rangle = 0$, para todo $q \in U$, derivando com respeito a variável x_i , obtemos

$$\langle (N \circ \varphi)_{x_i}(q), \varphi_{x_j}(q) \rangle + \langle (N \circ \varphi)(q), \varphi_{x_j x_i}(q) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle (N \circ \varphi)(q), \varphi_{x_j x_i}(q) \rangle = \langle -(N \circ \varphi)_{x_i}(q), \varphi_{x_j}(q) \rangle.$$

Por outro lado,

$$(N \circ \varphi)_{x_i}(q) = ((N \circ \varphi) \circ \lambda)'(0),$$

com $\lambda : I \rightarrow U$ sendo tal que $\lambda(0) = q$ e $\lambda'(0) = e_i$. Assim, definindo $\beta = \varphi \circ \lambda$, temos que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = \varphi_{x_i}(q) = v_i$. Portanto,

$$(N \circ \varphi)_{x_i}(q) = dN_p(v_i)$$

e obtemos

$$\langle (N \circ \varphi)(q), \varphi_{x_j x_i}(q) \rangle = \langle -dN_p(v_i), v_j \rangle.$$

De maneira análoga podemos concluir que

$$\langle (N \circ \varphi)(q), \varphi_{x_i x_j}(q) \rangle = \langle -dN_p(v_j), v_i \rangle.$$

Como φ é de classe C^2 concluímos que $\varphi_{x_i x_j}(q) = \varphi_{x_j x_i}(q)$ e finalizamos. \square

2.4.5 A segunda forma fundamental

Nesta Seção, iremos definir o conceito de segunda forma fundamental e curvatura de uma superfície regular.

Sejam S uma superfície regular e $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a aplicação de Weingarten. Definimos a **segunda forma fundamental** de S em p como sendo a forma bilinear II_p definida em $T_p S \times T_p S$ dada por

$$II_p(u, v) = -\langle dN_p(u), v \rangle = \langle A_p(u), v \rangle.$$

Vejamos como calcular a segunda forma fundamental de uma superfície dada pelo gráfico de uma função de classe C^k , $k \geq 2$.

Proposição 2.4.24. Seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície regular dada pelo gráfico de função $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 2$. Sendo $p = (q, \phi(q))$ então

$$[II_p] = c \text{Hess}_\phi(q),$$

com $c = (1 + |\nabla \phi(q)|^2)^{-1/2}$ e $\text{Hess}_\phi(q) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Demonstração. Vimos no Exemplo 2.4.22 que a aplicação de Weingarten sobre S é dada por

$$A_p(u) = - \left[d \left(\frac{1}{|\nabla \Phi|} \right)_p (u) \nabla \Phi(p) + \frac{1}{|\nabla \Phi(p)|} d(\nabla \Phi)_p(u) \right],$$

para todo $u \in T_p S$. Dessa forma, como $\nabla\Phi(p) \perp v$, para todo $v \in T_p S$, obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_p(u, v) &= \langle A_p(u), v \rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla\Phi(p)|} \langle d(\nabla\Phi)_p(u), v \rangle.\end{aligned}$$

Vamos calcular a derivada direcional do último produto interno. Para tanto, seja $F : S \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ o campo dado por $F(p) = (F_1(p), \dots, F_n(p), F_{n+1}(p))$, com

$$F_i(p) = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\alpha^{-1}(p)),$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $F_{n+1}(p) = 1$. Em outras palavras $F = \nabla\Phi$. Seja $u \in T_p S$ e α uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = u$. Logo

$$\frac{\partial F_i}{\partial u}(p) = (F_i \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla F_i(p), u \rangle,$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial u}(p) = 0.$$

Por outro lado, supondo que $p = \varphi(x)$ temos que

$$\nabla F_j(x, \phi(x)) = \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_j}(x), \dots, -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_n \partial x_j}(x), 0 \right).$$

Logo, denotando $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ e $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$, obtemos

$$\frac{\partial F_j}{\partial u}(x, \phi(x)) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\Pi_p(u, v) &= -\frac{1}{|\nabla\Phi(x, \phi(x))|} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(x, \phi(x)), v \right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla\Phi(x, \phi(x))|} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial u}(x, \phi(x)) v_j \\ &= \frac{1}{|\nabla\Phi(x, \phi(x))|} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) u_i v_j,\end{aligned}$$

e com isso finalizamos a prova. □

Observação 2.4.25. Na proposição 2.4.24, podemos supor sem perda de generalidade que $|\nabla\phi(x)|^2 = 0$, pois, dado $p \in S$, podemos transladar e rotacionar a superfície S até a origem de modo que $T_p S = \mathbb{R}^n$. Com isto, φ teria um mínimo ou máximo local em x , com $\varphi(x) = p$.

Seja \mathcal{B} uma base para $T_p S$. Sabemos da álgebra linear que sempre podemos escrever

$$II_p(u, v) = [u]_{\mathcal{B}} [II_p]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}^t.$$

Dessa forma, sendo II_p uma forma bilinear simétrica em $T_p S$ sempre existe uma base ortonormal para $T_p S$ na qual II_p é representada por uma matriz diagonal (HOFFMAN, 1971, Teorema 3). Por outro lado, como a aplicação de Weingarten é autoadjunta pelo Teorema Espectral (HOFFMAN, 1971, Teorema 9) também podemos obter uma base ortonormal de $T_p S$, digamos $\mathcal{D} = \{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$, de modo que $[A_p]_{\mathcal{D}}$ é diagonal. Sejam $k_1(p), \dots, k_n(p)$ os autovalores de A_p . Escrevendo de maneira geral $[II_p]_{\mathcal{D}} = (a_{ij})$, temos

$$a_{ij} = -\langle dN_p(e_i(p)), e_j(p) \rangle = \langle A_p(e_i(p)), e_j(p) \rangle = \langle k_i(p)e_i(p), e_j(p) \rangle = k_i(p)\delta_{ij},$$

ou seja, a matriz da segunda forma fundamental de S em p coincide com a matriz associada à aplicação de Weingarten.

Definição 9. Seja $p \in S$ e $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a aplicação de Weingarten. Suponha que a matriz de A_p esteja na sua forma diagonal. Os números reais $k_i(p)$ são chamados de **curvaturas principais** de superfície S no ponto p e as direções correspondentes $e_i(p)$ são chamadas de **direções principais** em p . Além disso, a **curvatura Gaussiana** de S em p definida como $K(p) = \det[A_p] = \det[II_p]$.

Exemplo 2.4.26. A curvatura Gaussiana de qualquer subespaço $P \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m < n$ é nula. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que $m = n - 1$ e $P = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Dessa forma, P é o gráfico da função $f(x') = (x', 0)$, para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Logo, $\text{Hess}_f(q) = 0$ e pela Proposição 2.4.24 temos que o que queríamos.

2.5 Transformada de Fourier de medidas

Seja μ uma medida de Borel regular e finita sobre \mathbb{R}^n , a transformada de Fourier de μ é definida por

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu_x,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Também utilizaremos a notação

$$\check{\mu}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(\mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\mu_x,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. A transformada de Fourier de uma medida de Borel regular finita μ é sempre limitada, pois

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leq |\mu(\mathbb{R}^n)| = \|\mu\|. \quad (2.54)$$

Portanto,

$$\|\widehat{\mu}\|_{\infty} \leq \|\mu\|. \quad (2.55)$$

Observação 2.5.1. Suponha que ν é uma medida com sinal de modo que as variações ν^+ e ν^- sejam medidas de Borel regulares e finitas sobre \mathbb{R}^n . Logo, dado $f \in L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$ definimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\nu := \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu^-$$

e

$$\widehat{\nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\nu_x = \widehat{\nu^+}(\xi) - \widehat{\nu^-}(\xi).$$

Dessa forma, seja μ uma medida de Borel, regular e finita e defina a medida com sinal $\nu = g d\mu$, com g sendo uma função mensurável real. Naturalmente, $\nu^+ = g^+ d\mu$ e $\nu^- = g^- d\mu$. Logo

$$\widehat{\nu}(\xi) = \mathcal{F}(g d\mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_x. \quad (2.56)$$

Lema 2.5.2. A função $g(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1. Além disso, $g(t) \rightarrow g(c)$ uniformemente quando $t \rightarrow c$.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$. Logo,

$$|g(b) - g(a)| = |e^{ib} - e^{ia}| = \left| \int_a^b i e^{it} dt \right| \leq \int_a^b |i e^{it}| dt = b - a \leq |b - a|.$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$. Logo, se $|t - c| < \delta$ obtemos $|g(t) - g(c)| \leq |t - c| < \epsilon$. \square

Proposição 2.5.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathcal{M}(A)$. Então $\widehat{\mu}$ é uma função Lipschitz contínua.

Demonstração. Pelo Lema 2.5.2 temos

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}(x) - \widehat{\mu}(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-2\pi i x \cdot \xi} - e^{-2\pi i y \cdot \xi}) d\mu_{\xi} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot \xi} - e^{-2\pi i y \cdot \xi}| d\mu_{\xi} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} | -2\pi i x \cdot \xi + 2\pi i y \cdot \xi | d\mu_{\xi} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} |(y - x) \cdot \xi| d\mu_{\xi} \end{aligned}$$

Como μ tem suporte compacto, suponha que $\text{supp}(\mu) \subset B(0, R)$. Logo, pela Desigualdade de Cauchy Schwarz obtemos

$$|\widehat{\mu}(x) - \widehat{\mu}(y)| \leq 2\pi |x - y| \int_{B(0, R)} |\xi| d\mu_{\xi} \leq 2\pi R \mu(A) |x - y|.$$

\square

O Exemplo a seguir mostra que nem sempre é verdade que a transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ está em L^p .

Exemplo 2.5.4. Seja δ_a a medida de Dirac no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ definida no Exemplo 2.3.2. Vimos no mesmo que δ_a é uma medida de Radon finita, logo, pelo Teorema 2.3.5 a mesma é uma medida de Borel regular. Com isto, faz sentido $\widehat{\delta}_a$. Vimos também que, para $A \subset \mathbb{R}^n$ $\delta_a(A) = \chi_A(a)$. Vamos mostrar que

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi}, \quad (2.57)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ o que irá implicar $\widehat{\delta}_a \notin L^p$, para todo $0 < p < \infty$, pois,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\delta}_a(\xi)|^p d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} 1 d\xi = \infty.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ obtemos

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\delta_{a_x} = \int_{B(a, \epsilon)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\delta_{a_x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(a, \epsilon)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\delta_{a_x},$$

Como $\delta_a(\mathbb{R}^n \setminus B(a, \epsilon)) = 0$, obtemos

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \chi_{B(a, \epsilon)}(x) d\delta_{a_x}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\delta_{a_x},$$

com $h(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} \chi_{\{a\}}(x)$. Além disso, é claro que $h = c \chi_{\{a\}}$, com $c = e^{-2\pi i a \cdot \xi}$. Portanto,

$$\widehat{\delta}_a(\xi) = c \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{a\}}(x) d\delta_{a_x} = c \delta_a(\{a\}) = c.$$

Exemplo 2.5.5. Se $\varphi \in L^1$ e $\mu = \varphi dm$, então $\widehat{\mu} = \widehat{\varphi}$, pois

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dm_x = \widehat{\varphi}(\xi).$$

Neste momento precisamos de algumas notações. Sejam μ, ν medidas de Borel regulares e finitas e defina em $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o funcional linear limitado dado por

$$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) d\mu_x d\nu_y.$$

Dessa forma, pelo Observação 2.3.9 existe uma única medida de Radon finita, a qual denotaremos por $\nu * \mu$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\nu * \mu = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) d\mu_x d\nu_y,$$

para toda $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Iremos chamar a medida $\mu * \nu$ de convolução de μ e ν .

Definimos a convolução entre uma função mensurável f e uma medida de Borel regular μ como sendo $f * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)d\mu_y$ e lembre que a convolução de funções mensuráveis f e g é definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

sempre que a integral existir.

Vejam algumas propriedades da transformada de Fourier de funções e de medidas.

Proposição 2.5.6. Seja $f \in L^1$ e $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}f = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}d\mu;$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\nu}d\mu;$$

$$\text{iii) } \widehat{f * \mu} = \widehat{f}\widehat{\mu};$$

$$\text{iv) } \widehat{f\check{\mu}} = \widehat{f} * \mu;$$

$$\text{v) } \widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu}\widehat{\nu};$$

$$\text{vi) } \widehat{f\widehat{d\mu}} = \widehat{f} * \widehat{\mu}, \text{ sempre que } \widehat{f} \in L^1.$$

Demonstração. Os itens i), ii), iii) e iv) podem ser demonstrados utilizando mudança de coordenadas apropriadas e o Teorema de Fubini. Vamos provar apenas os itens v) e vi). Para cada $k \in \mathbb{N}$ pelo Lema de existência de funções de corte 2.3.20 seja $\psi_k \in C_c^\infty$ uma função tal que $0 \leq \psi_k \leq 1$, $\psi_k \equiv 1$ em $B[0, k]$ e $\text{supp}(\psi_k) \subset B(0, n+1)$. Dessa forma, $\psi_k \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada e usando fortemente o fato das medidas $\mu * \nu, \mu, \nu$ serem finitas, obtemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu * \nu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d(\mu * \nu)_x \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d(\mu * \nu)_x \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x+y) e^{-2\pi i(x+y) \cdot \xi} d\mu_x d\nu_y \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x+y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\mu_x d\nu_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\mu_x d\nu_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_x d\nu_y \\ &= \widehat{\mu}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\nu_y \\ &= \widehat{\mu}(\xi) \widehat{\nu}(\xi). \end{aligned}$$

Provemos o item vi). Pelo Teorema A.1.10 e o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{f d\mu}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot x} d\mu_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i y \cdot \xi} e^{-2\pi i y \cdot x} d\xi d\mu_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i y \cdot (x - \xi)} d\mu_y d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{\mu}(x - \xi) d\xi,\end{aligned}$$

tomando a mudança de coordenada $x - \xi = w$ concluímos

$$\widehat{f d\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x - w) \widehat{\mu}(w) dw = \widehat{f} * \widehat{\mu}(x).$$

□

A seguir iremos ver qual é a regularidade da transformada de Fourier de uma medida e também ver a regularidade de convolução de uma função e um medida.

Proposição 2.5.7. Seja μ uma medida em $\mathcal{M}(A)$. Então $\widehat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\alpha \widehat{\mu} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha d\mu), \quad (2.58)$$

com α sendo um multi-índice qualquer e $\mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha d\mu)$ é definido em (2.56). Em particular se $\text{supp}(\mu) \subset B(0, r)$ então

$$\|\partial^\alpha \widehat{\mu}\|_\infty \leq (2\pi r)^{|\alpha|} \|\mu\|.$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que existe $\partial^\alpha \widehat{\mu}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e que a mesma é contínua, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$. O caso geral seguirá por indução. Com efeito, seja $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, com o 1 estando na i -ésima coordenada. Além disso, sejam $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que o intervalo (a, b) contenha ξ_i . Seja g uma função definida em $\mathbb{R}^n \times [a, b]$ dada por

$$g(x, t) = e^{-2\pi i x \cdot \xi_t}, \quad (2.59)$$

com $\xi_t = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$. Logo

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = (-2\pi i x_i)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi_t}.$$

Portanto

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq 2\pi |x_i| \in L^1(\mu),$$

pois μ é finita e tem suporte compacto. Definindo

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) d\mu_x,$$

pelo Teorema 2.3.16 - (ii) (Regra de Leibniz), obtemos

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi t}.$$

Uma vez que $\partial^\alpha \widehat{\mu}(\xi) = F'(\xi_i)$ concluímos a igualdade (2.58). A continuidade de $\partial^\alpha \widehat{\mu}$ segue de maneira análoga utilizando o Teorema 2.3.16 - (i) (Regra de Leibniz). Para o caso, como já havíamos dito, basta fazer indução em $|\alpha|$ e fazer um procedimento semelhante ao que acabamos de fazer. \square

Utilizando essencialmente a mesma demonstração da Proposição 2.5.7 obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.5.8. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e ψ uma função suave. Então $\psi * \mu$ é suave e

$$\partial^\alpha(\psi * \mu) = (\partial^\alpha \psi * \mu).$$

Além disso, se ψ tem suporte compacto, então $\partial^\alpha(\psi * \mu)$ também o tem.

Corolário 2.5.9. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\psi * \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Denote $f = \psi * \mu$ e $K = \text{supp}(\mu)$. Sejam N um inteiro positivo e α um multi-índice. Dessa forma, pela Proposição 2.5.8, temos

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| = (1 + |x|)^N |(\partial^\alpha \psi * \mu)(x)| \leq \int_K (1 + |x|)^N |\partial^\alpha \psi(x - y)| d\mu_y.$$

Fixe $y \in K$ e suponha que $K \subset B(0, R)$. Logo, utilizando a expansão binomial (A.22) obtemos

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha \psi(x - y)| &\leq ((1 + |x - y|) + |y|)^N |\partial^\alpha \psi(x - y)| \\ &= \sum_{k=0}^N (1 + |x - y|)^{N-k} |y|^k |\partial^\alpha \psi(x - y)| \\ &\leq \sum_{k=0}^N C_{\alpha, N, k} R^k, \end{aligned}$$

com $C_{\alpha, N, k} = \sup_{\mathbb{R}^n} \{(1 + |\cdot|)^{N-k} |\partial^\alpha \psi|\}$. Portanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|\} \leq \mu(K) \sum_{k=0}^N C_{\alpha, N, k} R^k,$$

e com isso concluímos que $\psi * \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Aproximar medidas por funções suaves será importante para mostrarmos a injetividade da transformada de Fourier de medidas.

Definição 10. Dizemos que uma família $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ de funções não negativas e contínuas sobre \mathbb{R}^n é uma aproximação da identidade se $\text{supp}(\psi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon = 1$, para todo $\epsilon > 0$.

Observação 2.5.10. Para construir uma aproximação da identidade basta considerar, pelo Lema de existência de funções de corte 2.3.20, uma função não negativa $\psi \in C_c^\infty$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset B(0, 1)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ e definir $\psi_\epsilon = \epsilon^{-n}\psi(x/\epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$.

Se $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ é uma aproximação da identidade, então, com uma simples mudança de coordenadas obtemos que $\widehat{\psi_\epsilon}(\xi) = \widehat{\psi}(\epsilon\xi)$. Dessa forma, pelo Lema 2.5.2 concluímos o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\psi_\epsilon}(\xi) = \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1, \quad (2.60)$$

é uniforme para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. É sempre possível aproximar medidas por funções suaves da seguinte forma: Seja $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ uma aproximação da identidade e μ é uma medida de Borel regular localmente finita sobre \mathbb{R}^n . Para cada $\epsilon > 0$ defina a medida $\mu_\epsilon = (\psi_\epsilon * \mu)dm$. Então, $\mu_\epsilon \xrightarrow{w} \mu$, isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu, \quad (2.61)$$

para toda $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se μ tem suporte compacto a convergência acima ocorre para toda $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 2.5.8, a menos de identificação, podemos dizer que μ_ϵ é suave. A prova deste fato pode ser consultada em (MATTILA, 1995, Teorema 1.26). Por (2.55) e (2.60), temos que $\widehat{\mu_\epsilon} \rightarrow \widehat{\mu}$ uniformemente.

Proposição 2.5.11. Se $\mu, \nu \in \mathcal{M}(A)$ e $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, então $\mu = \nu$.

Demonstração. Sejam $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ uma aproximação da identidade e $\mu_\epsilon, \nu_\epsilon$ como anteriormente. Vamos mostrar que $\psi_\epsilon * \mu = \psi_\epsilon * \nu$. De fato, pelo Exemplo 2.5.5 e pela Proposição 2.5.6 - (iii) obtemos

$$\widehat{\psi_\epsilon * \mu} = \widehat{\psi_\epsilon} \widehat{\mu} = \widehat{\psi_\epsilon} \widehat{\nu} = \widehat{\psi_\epsilon * \nu},$$

aplicando a transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} obtemos o que queríamos. Dessa forma, concluímos que $\mu_\epsilon = \nu_\epsilon$. Logo, por (2.61) temos que $\mu_\epsilon \xrightarrow{w} \mu$ e $\mu_\epsilon \xrightarrow{w} \nu$. Logo, pela unicidade do limite fraco, assegurado pelo Teorema Teorema 2.3.8 (Representação de Riesz para funcionais positivos) concluímos $\mu = \nu$. \square

Proposição 2.5.12. Seja $\mu \in \mathcal{M}(A)$. Então,

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\widehat{f}} \widehat{\mu}, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (fórmula de Parseval para medidas);}$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mu} * \bar{g}) f = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\widehat{g}} \widehat{f} d\mu, \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Provemos o item i). Como μ tem suporte compacto, então, por (2.61), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} d\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} d\mu_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) (\psi_\epsilon * \mu)(x) dx.$$

Por outro lado, utilizando a fórmula de Parseval para funções em L^1 dada na Proposição A.1.23 - (i) e também utilizando a Proposição 2.5.6 - (iii), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} d\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\bar{f}}(x) (\widehat{\psi_\epsilon * \mu})(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\bar{f}}(x) \widehat{\psi_\epsilon}(x) \widehat{\mu}(x) dx,$$

por fim, utilizando o Teorema da Convergência Dominada e o limite (2.60) concluimos. O item ii) pode ser provado de maneira análoga. \square

Finalizamos esta seção com uma observação que será útil quando precisarmos calcular a transformada de Fourier de medidas com suporte em conjuntos que são a rotação e/ou translação de conjuntos mais simples. Mais precisamente, se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear ortogonal e $\mu \in \mathcal{M}(A)$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, então esta aplicação dá origem a uma medida em $T(A)$ de uma forma bastante natural: Sendo B um conjunto de Borel de $T(A)$, definimos o **pushforward** da medida μ por T como sendo a medida

$$T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Com isso, podemos nos perguntar qual é a relação entre $\widehat{\mu}$ e $\widehat{T_*\mu}$? A resposta para esta pergunta está no Teorema da mudança de variáveis para medidas que nos diz que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)(x) d\mu_x,$$

com $\nu = T_*\mu$. A prova deste fato pode ser consultada em (WOLFF, 2003) ou (SANTOS, 2020, Teorema 17). Dessa forma, dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\widehat{T_*\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i T(x) \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i T(x) \cdot T(T^{-1}(\xi))} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot T^{-1}(\xi)} dx,$$

ou seja, $\widehat{T_*\mu}(\xi) = \widehat{\mu}(T^{-1}(\xi))$. Logo, obtemos a relação

$$\widehat{\mu} = \widehat{T_*\mu} \circ T. \quad (2.62)$$

2.6 Transformada de Fourier de distribuições

Definição 11 (Distribuição temperada). Uma aplicação linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma distribuição temperada se existe uma constante $C > 0$ e inteiros k, m tais que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq k}} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta)}, \quad (2.63)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, com

$$\|\varphi\|_{(\alpha, \beta)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|\}.$$

Observação 2.6.1. A condição em (2.63) tem uma razão topológica, a saber, $\{\|\cdot\|_{(\alpha, \beta)} : \alpha, \beta\}$ forma uma família de seminormas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de modo que, a continuidade em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser caracterizada dessa forma, (GRUBB, 2009, Lemma B.7).

Exemplo 2.6.2. Funções em L^p , $1 \leq p \leq \infty$ são distribuições temperadas. Com efeito, defina a aplicação

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. É de rápida verificação que T_f é linear. Além disso, pela Desigualdade de Hölder e por (A.24) concluímos T_f está bem definida, isto é, $|T(\varphi)| < \infty$. Só nos resta verificar (2.63). Pela expansão Binomial em (A.22) e por (A.21) concluímos que

$$(1 + |x|)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} |x|^k \leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} C_{k,n} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|,$$

logo, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos que,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|(1 + |x|)^N &\leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} C_{k,n} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha \varphi(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} C_{k,n} \sum_{|\alpha|=k} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta_0)} \\ &\leq M \sum_{|\alpha| \leq N} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta_0)}, \end{aligned}$$

com $\beta_0 = (0, \dots, 0)$ e $M_N = \max \left\{ \binom{N}{k} C_{k,n} : k = 0, \dots, N \right\}$. Com isto,

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|(1 + |x|)^N |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx \\ &\leq M \sum_{|\alpha| \leq N} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta_0)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, vimos na demonstração da Proposição A.1.17 que a aplicação $(1 + |\cdot|)^{-N}$ está em L^p para $N > n/p$. Logo, dado $N > n/p'$, com p' sendo o expoente conjugado de p , pela Desigualdade de Hölder concluímos

$$|T_f(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta_0)},$$

com $C = M \|f\|_p \|(1 + |\cdot|)^{-N}\|_{p'}$. De maneira análoga provamos para o caso em que $p = \infty$.

Se uma função mensurável f é tal que $\int_K |f| < \infty$, para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que a mesma é localmente integrável e denotamos a espaço de tais funções por L^1_{loc} . Equivalentemente, este espaço pode ser visto como o espaço de todas as funções f tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |f\varphi| < \infty$, para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.6.3. Seja $f \in L^1_{loc}$ tal que $|f(x)| \leq L|x|^\lambda$, quando $|x| > 1$, para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então f pode ser vista como uma distribuição temperada. Com efeito, defina a aplicação

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Analogamente ao que fizemos no Exemplo 2.6.2 temos

$$|T_f(\varphi)| \leq M \sum_{|\alpha| \leq N} \|\varphi\|_{(\alpha, \beta_0)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx. \quad (2.64)$$

com $\beta_0 = (0, \dots, 0)$ e $M_N = \max \left\{ \binom{N}{k} C_{k,n} : k = 0, \dots, N \right\}$. Vamos escolher um N adequado de modo que a integral em (2.64) seja finita. Denote $B = B(0, 1)$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx = \int_B |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx.$$

Como a função $(1 + |\cdot|)^{-N}$ é contínua, então a mesma possui um máximo em \overline{B} . Além disso, como $f \in L^1_{loc}$, obtemos

$$\int_B |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx \leq \|(1 + |\cdot|)^{-N}\|_{L^\infty(\overline{B})} \int_B |f(x)| dx < \infty.$$

Por outro lado, como $(1 + |x|)^{-N} \leq |x|^{-N}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e por hipótese $|f(x)| \leq L|x|^\lambda$ para $|x| > 1$, pelo Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |f(x)|(1 + |x|)^{-N} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |x|^{\lambda-N} dx \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |ry|^{\lambda-N} r^{n-1} d\sigma_y dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_1^\infty r^{\lambda-N+n-1} dr. \end{aligned}$$

Tomando $N > \lambda + n$, concluímos que integral $\int_1^\infty r^{\lambda-N+n-1} dr$ é finita. Com isso, obtemos que $T_f(\varphi)$ em (2.64) é bem definido e satisfaz a condição (2.63). Com isto concluímos o Exemplo.

O **Núcleo de Riesz** é definido como $K_s(x) = |x|^{-s}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $0 < s < n$. Estas funções serão de suma importância para este trabalho. Vejamos uma propriedade destas aplicações.

Proposição 2.6.4. Os Núcleos de Riesz K_s , $0 < s < n$ estão em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente podem ser vistos como distribuições temperadas.

Demonstração. Considerando $t > 0$ e utilizando o Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,t)} K_s &= \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |ry|^{-s} r^{n-1} d\sigma_y dr \\ &= \int_0^t r^{n-s-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |y|^{-s} d\sigma_y dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^t r^{n-s-1} dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \frac{t^{n-s}}{n-s} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Exemplo 2.6.3 concluímos que K_s pode ser vista como uma distribuição temperada. \square

O fato da transformada de Fourier uma função na classe de Schwartz S ainda estar em S ; Teorema A.1.22, motiva a seguinte definição:

Definição 12. Definimos transformada de Fourier de uma distribuição temperada T como sendo a distribuição $\widehat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$. Além disso, esta é uma bijeção, pois, dado $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ podemos tomar $L = T \circ \mathcal{F}^{-1}$ e ver que $\widehat{L} = T$, dessa forma, definimos $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$.

Na seção 3.4, iremos calcular efetivamente a transformada de Fourier dos Núcleos de Riesz, mais precisamente, iremos mostrar que existe uma constante positiva $\gamma(n, s)$ tal que

$$\widehat{K}_s = \gamma(n, s) K_{n-s}$$

em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_s \widehat{\varphi} = \gamma(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} \varphi,$$

para toda $\varphi \in S$.

Vimos na seção A.1.2.2 que se $f \in L^p$, $1 < p < 2$, então existem $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$ tais que $f = f_1 + f_2$ e já definimos $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$. Esta definição coincide com a definição de

transformada de Fourier distribucional, pois, $\widehat{f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 + f_2) \widehat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \widehat{\varphi} + \int_{\mathbb{R}^n} f_2 \widehat{\varphi} = \widehat{f}_1(\varphi) + \widehat{f}_2(\varphi)$.

Neste trabalho, será bastante frequente escrevermos $a \lesssim b$ para dizer que existe uma constante positiva λ tal que $a \leq \lambda b$. Analogamente, quando escrevermos $a \gtrsim b$, significa que existe uma constante positiva γ tal que $a \geq \gamma b$. A depender do contexto, se houver parâmetros variáveis e não variáveis, ficará subentendido que a constante em questão nunca irá depender dos parâmetros variáveis.

Vejamos algumas propriedades interessantes para a distribuição temperada vista no Exemplo 2.6.3.

Proposição 2.6.5. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $f \in L^1_{loc}$ é tal que $|f(x)| \lesssim |x|^\lambda$, $|x| > 1$ com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Além disso, suponha que existe uma função $g \in L^1_{loc}$ tal que $|g(x)| \lesssim |x|^\alpha$, $|x| > 1$ com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e que satisfaça $\widehat{f} = g$. Então, no sentido distribucional, vale $\widehat{\varphi f} = \widehat{\varphi} * g$ e $\widehat{\varphi * f} = \widehat{\varphi} g$.

Demonstração. Primeiramente note que $\varphi K_s \in L^1$, pois K_s é uma distribuição, dessa forma faz sentido falarmos da sua transformada de Fourier distribucional. Vamos provar $\widehat{\varphi f} = \widehat{\varphi} * g$, e para tanto, devemos mostrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi f} \psi = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\varphi} * g) \psi, \quad (2.65)$$

para toda $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, pelo Teorema de Fubini e pela fórmula $\check{f} = \widehat{\widehat{f}}$, (veja a Proposição A.1.12 -(i)), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\varphi} * g)(x) \psi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x-y) g(y) dy \right] \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x-y) g(y) \psi(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \check{\widehat{\varphi}}(y-x) \psi(x) dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(y-x) \psi(x) dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) (\check{\varphi} * \psi)(y) dy. \end{aligned}$$

Em geral, como $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, temos que $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \widehat{g}) = f * g$, dessa forma, obtemos

$$\check{\varphi} * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} \widehat{\psi}) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi \widehat{\psi}).$$

Com isso, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\varphi} * g) \psi = \int_{\mathbb{R}^n} g \mathcal{F}^{-1}(\varphi \widehat{\psi}).$$

Rigorosamente, a hipótese $\widehat{f} = g$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, significa que $\widehat{T_f} = T_g$, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{h} = \int_{\mathbb{R}^n} gh$, para todo $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\varphi} * g)\psi = \int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi\widehat{\psi})) = \int_{\mathbb{R}^n} (f\varphi)\widehat{\psi}$$

Pelas hipóteses sobre f , sabemos pelo Exemplo 2.6.3 que a mesma é uma distribuição temperada, dessa forma $f\varphi$ é integrável e portanto, pela fórmula do produto (A.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\varphi} * g)\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\varphi\psi$$

e portanto provamos (2.65). A prova de que $\widehat{\varphi * f} = \widehat{\varphi}g$ segue por argumento análogos. \square

2.7 Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin

Inicialmente, lembre que se $f \in L^1$ então por (A.2) vimos que $\widehat{f}_1 \in L^\infty$. Além disso, vimos no Teorema A.1.28 (Plancherel) que se $f \in L^2$ então $\widehat{f} \in L^2$, ou seja, nestes dois casos, a transformada de Fourier de f está em L^q , com q sendo o expoente conjugado de 1 ou de 2. Mostraremos que em geral, se $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, então $\widehat{f} \in L^{p'}$, com p' sendo o expoente conjugado de p . Para tanto, precisaremos da desigualdade de Hausdorff-Young, que é uma consequência do Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin.

A demonstração do Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin é bastante técnica e por isso vamos provar um caso particular do mesmo separadamente:

Lema 2.7.1. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ e (X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) espaços de medida. Dados $p, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ e $0 < \theta < 1$ defina q_θ por

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Suponha que $T : L^p(X) \rightarrow L^{q_0}(Y) \cap L^{q_1}(Y)$ é um operador linear tal que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^p(X)}, \quad (2.66)$$

e

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^p(X)}, \quad (2.67)$$

para todo $f \in L^p(X)$, com $M_0, M_1 \in (0, \infty)$. Então T é um operador linear limitado de L^p em L^{q_θ} . Mais precisamente,

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p(X)},$$

para toda $f \in L^p(X)$.

Demonstração. Para provar o resultado iremos utilizar um resultado de interpolação bastante

conhecido de um curso de teoria da medida (FOLLAND, 1999, Proposição 6.10): Seja (Y, \mathcal{B}, ν) um espaço de medida com $Y \subset \mathbb{R}^n$. Se $0 < r < q < s \leq \infty$, então

$$L^r(Y) \cap L^s(Y) \subset L^q(Y) \quad (2.68)$$

e

$$\|f\|_{L^q(Y)} \leq \|f\|_{L^s}^{1-\lambda} \|f\|_{L^r}^\lambda, \quad (2.69)$$

com $\lambda \in (0, 1)$ sendo definido por

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{s} + \frac{\lambda}{r}.$$

Com isto, suponha, sem perda de generalidade, que $q_1 < q_0$. Dessa forma, obtemos $q_1 < q_\theta < q_0$. Como $T(f) \in L^{q_0}(Y) \cap L^{q_1}(Y)$ por (2.69), (2.72) e (2.73), temos

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq \|T(f)\|_{L^{q_0}}^{1-\theta} \|T(f)\|_{L^{q_1}}^\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p(X)}.$$

□

Para provarmos a versão completa do Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin faremos uso de dois fatos. O primeiro deles é da teoria da análise complexa (FOLLAND, 1999, Lema 6.26) e afirma que se φ é uma função contínua e limitada na faixa $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ que é holomorfa em $\operatorname{int} F$ e satisfaz $|\varphi(z)| \leq M_0$ para $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $|\varphi(z)| \leq M_1$ com $\operatorname{Re}(z) = 1$, então a mesma satisfaz a estimativa

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t, \quad (2.70)$$

para $\operatorname{Re}(z) = t, 0 < t < 1$. O segundo resultado que irá nos auxiliar (FOLLAND, 1999, Teorema 6.14) é o seguinte: Sejam p e p' expoentes conjugados e Σ o conjunto de todas as funções simples que se anulam "fora" de um conjunto de medida finita. Suponha que g é uma função mensurável em (X, \mathcal{A}, μ) , onde $X \subset \mathbb{R}^n$ de modo que $fg \in L^1(X)$, para toda $f \in \Sigma$ e que a quantidade

$$M_p(g) = \sup \left\{ \left| \int_X fg \right| : f \in \Sigma \text{ e } \|f\|_{p'} = 1 \right\} \quad (2.71)$$

é finita. Também suponha que $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ é σ -finita ou que μ é semifinita. Então $g \in L^p$ e $M_p(g) = \|g\|_p$. Por fim, vamos provar um Lema auxiliar.

Lema 2.7.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, seja $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \nu)$ com $0 < p < \infty$. Então o conjunto

$$E = \{x : f(x) \neq 0\}$$

é σ -finito, isto é, existe uma família de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ tais que $\nu(E_k) < \infty$ e $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$.

Demonstração. Inicialmente note que $E = \{x : |f(x)|^p \neq 0\}$, dessa forma, defina para cada $k \in \mathbb{N}$ o conjunto $E_k = \{x : |f(x)|^p \geq 1/n\}$. É de rápida verificação que $\chi_{E_n}(x) \leq n|f(x)|^p$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ dessa forma,

$$\nu(E_n) = \int_X \chi_{E_n} d\nu \leq n \int_X |f|^p d\nu < \infty.$$

Concluimos a demonstração percebendo que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. □

Com isto estamos prontos para provar o principal resultado desta seção:

Teorema 2.7.3 (Interpolação de Riesz-Thorin). Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida com $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ e $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. Se $q_0 = q_1 = \infty$ suponha que ν é semifinita, isto é, para cada $E \in \mathcal{B}$ com $\nu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset E$ e $0 < \nu(F) < \infty$. Para $0 < \theta < 1$ defina p_θ, q_θ por

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Suponha que $T : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y)$ é um operador linear tal que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \quad (2.72)$$

para toda $f \in L^{p_0}(X)$ e

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \quad (2.73)$$

para toda $f \in L^{p_1}(X)$, com $M_0, M_1 \in (0, \infty)$. Então T é um operador linear limitado de $L^{p_\theta}(X)$ em $L^{q_\theta}(Y)$. Mais precisamente,

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}(X)},$$

para toda $f \in L^{p_\theta}(X)$.

Demonstração. Se $p_0 = p_1$, note que $p_\theta = p$ e portanto o resultado é válido pelo Lema 2.7.1. Portanto, suponha que $p_0 \neq p_1$. Em particular $p_\theta < \infty$, pois do contrário concluimos que $p_0 = p_1 = 0$, o que nunca ocorre. Seja Σ_X (resp. Σ_Y) o espaço de todas as funções simples em X (resp. Y) que se anulam "fora" de conjuntos de medida finita. Sabemos que Σ_X é denso em $L^p(X)$ para $p < \infty$ ((FOLLAND, 1999, Proposição 6.7)), analogamente para Σ_Y . A parte mais importante desta demonstração consiste em mostrar

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}(X)}, \quad (2.74)$$

para toda $f \in \Sigma_X$. Dado $f \in \Sigma_X$, temos $f \in L^p$, para todo p . Em particular, $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ e $T(f) \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$. Logo, por (2.68) temos que $T(f) \in L^{q_\theta}$. Com isto, segue da desigualdade de

Hölder que $T(f)g \in L^1(Y)$, para toda $g \in \Sigma_Y$ e

$$\left| \int_Y T(f)g d\nu \right| \leq \|T(f)\|_{L^{q_\theta}}$$

sempre que $g \in \Sigma_Y$ é tal que $\|g\|_{L^{q'_\theta}} = 1$. Se q_0 e q_1 não valem ambos ∞ , então obrigatoriamente $q_\theta \neq \infty$. Logo, como $T(f) \in L^{q_\theta}$ pelo Lema 2.7.2 o conjunto $\{y : T(f)(y) \neq 0\}$ é σ -finito. Portanto, por (2.71) obtemos

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}(Y)} = \sup \left\{ \left| \int_Y gT(f) d\nu \right| : g \in \Sigma_Y \text{ e } \|g\|_{L^{q'_\theta}} = 1 \right\}. \quad (2.75)$$

A menos de normalização, é suficiente mostrar (2.74) para o caso em que $\|f\|_{L^{p_\theta}(X)} = 1$ devido a linearidade de T . Portanto, à luz de (2.75), provar (2.74) equivale a:

Afirmção 2.7.4. Se $f \in \Sigma_X$ e $\|f\|_{L^{p_\theta}} = 1$, então $\left| \int_Y gT(f) d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ para toda $g \in \Sigma_Y$ tal que $\|g\|_{L^{q'_\theta}} = 1$.

Sejam f, g em Σ_X, Σ_Y , respectivamente, tais que $\|f\|_{L^{p_\theta}} = \|g\|_{L^{q'_\theta}} = 1$. Escreva $f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{E_j} \in \Sigma_X$ e $g = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{F_k} \in \Sigma_Y$, com $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$ sendo sequencias de subconjuntos de X e Y dois a dois disjuntos, respectivamente e $c_j, d_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Escreva c_j e d_k na forma polar

$$c_j = |c_j| e^{i\theta_j}, \quad d_k = |d_k| e^{i\psi_k}.$$

Também defina as funções

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, $\alpha(\theta) = 1/p_\theta$ e $\beta(\theta) = 1/q_\theta$. Lembre que estamos supondo que $p_\theta < \infty$, o que implica $\alpha(\theta) \neq 0$. Logo, podemos definir

$$f_z = \sum_{j=1}^m |c_j|^{[\alpha(z)/\alpha(\theta)]} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}.$$

Como $1 \leq q_0, q_1$, obtemos $1 \leq q_\theta$ (a igualdade ocorre precisamente quando $q_0 = q_1 = 1$). Consequentemente temos $\beta(\theta) \leq 1$. Se $\beta(\theta) < 1$ definimos

$$g_z = \sum_{k=1}^n |d_k|^{[1-\beta(z)/1-\beta(\theta)]} e^{i\psi_k} \chi_{F_k}.$$

Se $\beta(\theta) = 1$ definimos $g_z = g$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Iremos continuar a demonstração apenas supondo que $\beta(\theta) < 1$, pois, com pequenas modificações na demonstração podemos concluir a resultado para $\beta(\theta) = 1$. Finalmente definimos

$$\phi(z) = \int (T f_z) g_z d\nu.$$

É de rápida verificação que $\phi(\theta) = \int (Tf)g d\nu$. Com algumas manipulações podemos concluir que

$$\phi(z) = \sum_{j,k} A_{jk} |c_j|^{\lfloor \alpha(z)/\alpha(\theta) \rfloor} |d_k|^{\lfloor 1-\beta(z)/1-\beta(\theta) \rfloor},$$

com $A_{jk} = e^{i(\theta_j + \psi_k)} \int_Y T(\chi_{E_j}) \chi_{F_k} d\nu$. Naturalmente ϕ é contínua e limitada na faixa $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Além disso, a mesma é holomorfa em $\operatorname{int}F$, pois é a soma de produtos de funções da forma $h(z) = ra^{sz}$, com $a, r, s \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Dessa forma, para utilizar (2.70) só nos resta verificar que $|\phi(z)| \leq M_0$, para $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $|\phi(z)| \leq M_1$ quando $\operatorname{Re}(z) = 1$. Neste sentido, obtemos

$$\alpha(is) = \frac{1}{p_0} + is \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right)$$

e

$$1 - \beta(is) = \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) - is \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right),$$

para $s \in \mathbb{R}$. É claro que $|f| = \sum_{j=1}^m |c_j| \chi_{E_j}$ e $|g| = \sum_{k=1}^n |d_k| \chi_{F_k}$, pois, por exemplo, se $x \in E_l$, obtemos

$$|f(x)| = |c_l| = \sum_{j=1}^m |c_j| \chi_{E_j}(x).$$

Com um argumento semelhante; e lembrando que em geral $a^{x+iy} = e^{\ln(a)x} e^{i \ln(a)y}$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos concluir que

$$|f_{is}| = |f|^{\operatorname{Re}(\alpha(is)/\alpha(\theta))} = |f|^{p\theta/p_0} \quad |g_{is}| = |g|^{\operatorname{Re}(1-\beta(is)/\beta(\theta))} = |g|^{q'_\theta/q'_0}.$$

Logo,

$$\int_X |f_{is}|^{p_0} = \int_X |f|^{p\theta} = 1, \quad \int_Y |g_{is}|^{q'_0} = \int_Y |g|^{q'_\theta} = 1.$$

Isto nos diz que $f_{is} \in L^{p_0}$ e $g_{is} \in L^{q'_0}$. Logo, $T(f_{is}) \in L^{q_0}$. Assim, pela desigualdade de Hölder e pela hipótese (2.72), obtemos

$$|\phi(is)| \leq \int_Y |T(f_{is})g_{is}| \leq \|T(f_{is})\|_{L^{q_0}} \|g_{is}\|_{L^{q'_0}} \leq M_0 \|f_{is}\|_{L^{p_0}} \|g_{is}\|_{L^{q'_0}} = M_0.$$

Com argumentos semelhantes, podemos mostrar que $|\phi(1 + is)| \leq M_1$. Logo, por (2.70) concluímos que

$$\left| \int_Y (T(f))g d\nu \right| = |\phi(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

e mostramos a Afirmação (2.7.4). Além disso, mostramos que

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}}$$

para toda $f \in \Sigma_X$ e portanto $T|_{\Sigma_X}$ possui uma única extensão para $L^{p_\theta}(X)$ satisfazendo a mesma desigualdade (FOLLAND, 1999, Proposição 6.7). Só nos resta mostrar que esta extensão é o próprio T , ou seja, que T satisfaz tal estimativa para toda $f \in L^{p_\theta}(X)$. Dado uma tal f ,

escolha uma sequência $\{f_k\}$ em Σ_X tal que $|f_k| \leq |f|$ e $f_k \rightarrow f$ pontualmente. Além disso, seja $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ e $g = f\chi_E, g_k = f_k\chi_E, h = f\chi_{E^c}$ e $h_k = f_k\chi_{E^c}$. Então, supondo sem perda de generalidade que $p_0 < p_1$ obtemos que $p_0 < p_\theta$. Logo $|f|^{p_0} < |f|^{p_\theta}$ em E , o que implica $g \in L^{p_0}$ e também $|f|^{p_1} \leq |f|^{p_\theta}$ em E^c , o que implica $h \in L^{p_1}$. Além disso, é importante notar que $g, h \in L^{p_\theta}$, uma vez que f está em tal espaço. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada $\|f_k - f\|_{L^{p_\theta}} \rightarrow 0, \|g_k - g\|_{L^{p_0}} \rightarrow 0$ e $\|h_k - h\|_{L^{p_1}} \rightarrow 0$; as funções dominantes em todos os casos podem ser encontradas utilizando $|f_k| \leq |f|$ e as relações que acabamos de estabelecer. Isto implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(g_k) - T(g)\|_{L^{q_0}} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(h_k) - T(h)\|_{L^{q_1}} = 0,$$

uma vez que

$$\|T(g_k) - T(g)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|g_k - g\|_{L^{p_0}} \quad \|T(h_k) - T(h)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|h_k - h\|_{L^{p_1}},$$

já que $g_k, h_k \in \Sigma_X$ e $g, h \in L^{p_\theta}$.

Como $\{T(g_k)\}$ e $\{T(h_k)\}$ convergem em L^{q_0} e L^{q_1} respectivamente, existem subsequências $\{T(g_{k_i})\}$ e $\{T(h_{k_i})\}$ que convergem $\nu - qtp$ para $T(g)$ e $T(h)$, respectivamente; (BREZIS, 2011, Teorema 4.9). Naturalmente $h = f - g$ e $h_k = f_k - g_k$. Logo, temos que $T(f_k) \rightarrow T(f)$ $\nu - qtp$. Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$\|T(f)\|_{L^{q_\theta}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T(f_k)\|_{L^{q_\theta}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f_k\|_{L^{p_\theta}} = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}}$$

e isto conclui a demonstração. \square

Corolário 2.7.5 (Desigualdade de Young). Se $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfazem $p^{-1} + r^{-1} = q^{-1} + 1$, então para $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, temos $g * h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|g * h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que para $1 \leq q \leq \infty$ vale

$$\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.76)$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq \infty$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $q = \infty$, naturalmente o que almejamos, pois

$$|(f * g)(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Suponhamos então que $1 \leq q < \infty$. É de rápida verificação que

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| |f(y)| dy.$$

Logo,

$$\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| |f(y)| dy \right)^q dx \right]^{1/q}$$

Por outro lado, a desigualdade de Minkowski para integrais (FOLLAND, 1999, 6.19) nos diz que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| |f(y)| dy \right)^q dx \right]^{1/q} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q |f(y)|^q dx \right]^{1/q} dy,$$

o que é suficiente para concluirmos (2.76). Além disso, sendo $1 < p < \infty$ e p' seu expoente conjugado, temos (FOLLAND, 1999, Proposição 8.8):

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.77)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Dadas estas observações, podemos prosseguir para a prova do resultado. Seja $1 \leq r < \infty$ e fixe $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Seja

$$T_h : L^1(\mathbb{R}^n) + L^{r'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

uma aplicação dada por $T_h(g) = g * h$. Por (2.76) obtemos

$$\|T_h(g)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq M_0 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $M_0 = \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$. Além disso, por (2.77) temos

$$\|T_h(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M_1 \|g\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)},$$

sempre que $g \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ com $M_1 = M_0 = \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$. Para $\theta = 1 - r/q$ a relação $p^{-1} + r^{-1} = q^{-1} + 1$ nos permite concluir que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}.$$

Além disso, é importante notar que a mesma relação nos dá $0 < \theta < 1$. Por fim, pelo Teorema 2.7.3 (interpolação de Riesz-Thorin), obtemos

$$\|T_h(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

isto é,

$$\|g * h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Com isto concluímos. Quando $q_0 = q_1 = \infty$ a hipótese nos diz que ν é semifinita e portanto a demonstração segue de maneira análoga utilizando (2.71). \square

2.7.1 Desigualdade de Hausdorff-Young

Nesta seção, iremos fazer uso do Teorema 2.7.3 (interpolação de Riesz-Thorin) para provar um resultado que nos mostra exatamente em qual espaço L^q a transformada de Fourier de funções em L^p está para $1 \leq p \leq 2$. Tal resultado será de suma importância para entendimento da Conjectura da Restrição.

Proposição 2.7.6 (Desigualdade de Hausdorff-Young). Para toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a estimativa a seguir é válida

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p, \quad (2.78)$$

para quaisquer $1 \leq p \leq 2$, com p' sendo o expoente conjugado de p .

Demonstração. Como já comentamos no início desta seção, por (A.2) e pelo Teorema A.1.28 (Plancherel) valem as estimativas: $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ e $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Dessa forma, só nos resta mostrar o resultado para $1 < p < 2$. Vamos utilizar o Teorema 2.7.3 (interpolação de Riesz-Thorin) tomando $p_0 = 2, p_1 = 1, q_0 = 2$ e $q_1 = \infty$. Para tanto, seja $\mathcal{F} : L^2 + L^1 \rightarrow L^2 + L^\infty$ uma aplicação dada por $\mathcal{F}(f_2 + f_1) = \widehat{f_2} + \widehat{f_1}$. Naturalmente \mathcal{F} é linear e satisfaz (2.72) e (2.73) para $M_0 = M_1 = 1$. Fixado $1 < p < 2$, seja $\theta = 2/p - 1$. É claro que $1 < \theta < 1$. Além disso,

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1} = \frac{1+\theta}{2} \quad (2.79)$$

e

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty} = \frac{1-\theta}{2}. \quad (2.80)$$

Somando as expressões (2.79) e (2.80) concluímos que q_θ é o expoente conjugado de p_θ . Além disso, desenvolvendo (2.79) obtemos $p_\theta = p$. Portanto, pelo Teorema 2.7.3 (interpolação de Riesz-Thorin), obtemos

$$\|\mathcal{F}(f_2 + f_1)\|_{p'} \leq \|f_2 + f_1\|_p$$

e com isso mostramos (2.78). \square

ENERGIA DE MEDIDAS E DIMENSÃO DE FOURIER

Neste capítulo, iremos demonstrar o Lema de Frostman e o utilizar para mostrar que a dimensão de Hausdorff $\dim_{\text{H}}(A)$ de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é o supremo dos número reais $s \geq 0$ sobre medidas em $\mathcal{M}(A)$ que satisfazem o decaimento $\mu(B(x, r)) \lesssim r^s$. Mais precisamente,

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), \mu(B(x, r)) \lesssim r^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}.$$

Além disso, definindo a s -energia da medida μ por

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} K_s * \mu d\mu, \quad (3.1)$$

mostraremos que

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), I_s(\mu) < \infty\}.$$

Finalizaremos o capítulo mostrando que a s -energia de uma medida μ pode ser redefinida via operador de Riesz,

$$I_s(\mu) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx, \quad (3.2)$$

com c sendo uma constante positiva dependendo de n e s . Desta forma, podemos conectar a dimensão de Fourier de A com a definição dos conjuntos de Salem. As referências básicas para este capítulo foram (MATTILA, 1995) e (FALCONER, 1985).

3.1 Dimensão de Hausdorff

Dado $0 \leq s < \infty$, lembre que a medida de Hausdorff s -dimensional de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A), \quad (3.3)$$

com

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s \right\}, \quad (3.4)$$

com o ínfimo sendo tomado sob todas as δ -coberturas de A . A **dimensão de Hausdorff** de A é definida por

$$\dim_{\text{H}}(A) = \inf_{t \geq 0} \{ \mathcal{H}^t(A) = 0 \}. \quad (3.5)$$

Este número está bem definido, ver Teorema 2.2.9. Equivalentemente, utilizando o Teorema 2.2.9, temos

$$\dim_{\text{H}}(A) = \inf_{t \geq 0} \{ t : \mathcal{H}^t(A) < \infty \} \quad (3.6)$$

$$= \sup_{s \geq 0} \{ s : \mathcal{H}^s(A) > 0 \} \quad (3.7)$$

$$= \sup_{s \geq 0} \{ s : \mathcal{H}^s(A) = \infty \}. \quad (3.8)$$

Proposição 3.1.1. Se $p \in \mathbb{R}_+$ é tal que $0 < \mathcal{H}^p(A) < \infty$, então $p = \dim_{\text{H}}(A)$.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que p é uma cota inferior para o conjunto $\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\}$. Com efeito, seja $t_0 \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^{t_0}(A) = 0$. Queremos mostrar que $p \leq t_0$. Suponha que $t_0 < p$. Como $\mathcal{H}^{t_0}(A) = 0 < \infty$, pelo Teorema 2.2.9 temos $\mathcal{H}^p(A) = 0$, o que não ocorre por hipótese. Portanto $p \geq t_0$. Agora vamos verificar que p é a menor das cotas inferiores. Seja $\epsilon > 0$ e escolha t_ϵ tal que $p < t_\epsilon < p + \epsilon$. Se $\mathcal{H}^{t_\epsilon}(A) < \infty$, pelo Teorema 2.2.9, 1) temos $\mathcal{H}^{t_\epsilon + \epsilon}(A) = 0$, ou seja, $p = \inf \{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \dim_{\text{H}}(A)$. \square

Proposição 3.1.2. Se $\dim_{\text{H}}(A) < \infty$ e $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, então $\alpha \geq \dim_{\text{H}}(A)$.

Demonstração. Suponha que $\alpha < \dim_{\text{H}}(A)$. Como $\dim_{\text{H}}(A) < \infty$, fica bem definido o número $\epsilon = \dim_{\text{H}}(A) - \alpha > 0$. Como $\dim_{\text{H}}(A) = \sup_{s \geq 0} \{ \mathcal{H}^s(A) = \infty \}$, então, existe $s_\epsilon \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^{s_\epsilon}(A) = \infty$ e

$$\dim_{\text{H}}(A) - \epsilon < s_\epsilon$$

isto é, $\alpha < s_\epsilon$. Como $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, pelo Teorema 2.2.9 obtemos $\mathcal{H}^{s_\epsilon}(A) = 0$, o que é uma contradição. \square

Corolário 3.1.3. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, então $\alpha = \dim_{\text{H}}(A)$.

Demonstração. Se $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, então $\alpha \leq \sup_{s \geq 0} \{\mathcal{H}(A) > 0\} = \dim_{\mathbb{H}}(A)$. Por outro lado, sabemos que $\dim_{\mathbb{H}}(A) \leq \dim_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n) = n < \infty$, portanto, pela Proposição 3.1.2 temos $\alpha \geq \dim_{\mathbb{H}}(A)$. Portanto temos $\alpha = \dim_{\mathbb{H}}(A)$. \square

Portanto, a dimensão de Hausdorff de A é o único número (podendo ser ∞) tal que

- (i) se $s < \dim_{\mathbb{H}}(A)$, então $\mathcal{H}^s(A) = \infty$;
- (ii) se $t > \dim_{\mathbb{H}}(A)$, então $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

De fato, se $s < \dim_{\mathbb{H}}(A)$ e $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, então por (3.6) obtemos $s \geq \dim_{\mathbb{H}}(A)$ o que é uma contradição. Por outro lado, se $t > \dim_{\mathbb{H}}(A)$ e $\mathcal{H}^t(A) = 0$, então por (3.7) concluímos que $t \leq \dim_{\mathbb{H}}(A)$, e novamente temos uma contradição.

A dimensão de Hausdorff tem as propriedades naturais de monotonicidade e estabilidade com respeito a uniões enumeráveis, a saber:

Proposição 3.1.4. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \subset B$. Então, $\dim_{\mathbb{H}}(A) \leq \dim_{\mathbb{H}}(B)$. Além disso, se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$\dim_{\mathbb{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{H}}(A_i). \quad (3.9)$$

Demonstração. Naturalmente, para provar que $\dim_{\mathbb{H}}(A) \leq \dim_{\mathbb{H}}(B)$, é suficiente mostrar que

$$\dim_{\mathbb{H}}(A) \leq t, \quad (3.10)$$

para todo $t \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^t(B) < \infty$. Sendo $t \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^t(B) < \infty$, como a medida \mathcal{H}^t é monótona, temos que $\mathcal{H}^t(A) \leq \mathcal{H}^t(B)$. Logo, $\mathcal{H}^t(A) < \infty$ e portanto

$$\inf_{s \geq 0} \{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \leq t.$$

Com isto, provamos (3.10). Suponha agora que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Pelo que acabamos de provar, segue que

$$\dim_{\mathbb{H}}(A_i) \leq \dim_{\mathbb{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{H}}(A_i) \leq \dim_{\mathbb{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Para provar a desigualdade contrária, considere $s \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) > 0$. Neste caso,

existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}^s(A_j) > 0$, pois, do contrário, teríamos que

$$0 \leq \mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) = 0,$$

o que é uma contradição. Assim,

$$s \leq \sup_{t \geq 0} \{t : \mathcal{H}^t(A_j) > 0\} = \dim_{\mathbb{H}}(A_j).$$

Portanto, $s \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{H}}(A_i)$, para todo $s \geq 0$ tal que $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) > 0$. Com isto, concluímos que

$$\dim_{\mathbb{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sup_{t \geq 0} \left\{ t : \mathcal{H}^t \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) > 0 \right\} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{H}}(A_i).$$

E assim finalizamos a demonstração. \square

Lema 3.1.5. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ temos $\dim_{\mathbb{H}}(B(x, r)) = n$. Além disso, $\dim_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n) = n$.

Demonstração. Denote $B = B(x, r)$. Usando o Lema 2.2.7 e o Lema 2.2.8 temos $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$. Dessa forma, pela Proposição 3.1.1 concluímos que $\dim_{\mathbb{H}}(B) = n$. Visto que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^n} B(x, 1),$$

usando a Proposição 3.1.4 segue que $\dim_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n) = \sup_{x \in \mathbb{Q}^n} \dim_{\mathbb{H}}(B(x, 1)) = n$. \square

Usando a Proposição 3.1.4 e o Lema 3.1.5 segue que

$$0 \leq \dim_{\mathbb{H}}(A) \leq n, \tag{3.11}$$

quando $A \subset \mathbb{R}^n$. Na Seção 3.1.1 iremos construir um conjunto em \mathbb{R} e mostrar que a dimensão de Hausdorff dele é não inteira. Quando $S \subset \mathbb{R}^n$ for uma superfície regular, veremos que $\dim_{\mathbb{H}}(S) = n - 1$.

A través do resultado a seguir, poderemos ver o conceito de dimensão de Hausdorff sem mencionar medidas de Hausdorff. Tal resultado e suas consequências serão úteis para o cálculo da dimensão de Hausdorff de conjuntos.

Proposição 3.1.6. Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < \infty$, são equivalentes:

- 1) $\mathcal{H}^s(A) = 0$;
- 2) $\mathcal{H}_{\delta}^s(A) = 0$, para todo $0 < \delta \leq \infty$;

3) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s < \epsilon.$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ e fixe $0 < \delta \leq \infty$. Vimos em (2.7) que $\mathcal{H}_{\delta}^s(A) \leq \mathcal{H}_{\epsilon}^s(A)$, quando $0 < \epsilon < \delta \leq \infty$. Dessa forma,

$$0 \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(A) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\epsilon}^s(A) = \mathcal{H}^s(A),$$

o que implica 2). Supondo que $\mathcal{H}_{\delta}^s(A) = 0$ temos imediatamente 3) pela definição de ínfimo. Por fim, suponha que 3) é verdadeiro. Fixado $0 < \delta < \infty$, seja $\epsilon < \delta^s$. Por hipótese, existe uma cobertura $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de A tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s < \epsilon < \delta^s, \quad (3.12)$$

o que implica $\text{diam}(E_i) < \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma δ -cobertura para A . Assim, por (3.12) obtemos

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s < \epsilon.$$

Tomando o limite na expressão acima quando $\delta \downarrow 0$ concluímos que $\mathcal{H}^s(A) \leq \epsilon$, e como ϵ é arbitrariamente pequeno obtemos 1). \square

Diante da Proposição 3.1.6 podemos dizer que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{H}_{\infty}^s(A) = 0$.

3.1.1 O conjunto de Cantor

Nesta seção, iremos construir o conjunto de Cantor com escala $0 < d < 1/2$ e também calcularemos sua dimensão de maneira analítica. O conjunto de Cantor é construído geralmente com $d = 1/3$. Mais precisamente, seja $I_{0,1} = [0, 1]$ e divida o mesmo em três partes iguais. Ou seja,

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right], \left[1 - \frac{1}{3}, 1\right].$$

O processo para a construção do conjunto de Cantor $C(1/3)$ consiste em remover o intervalo do "meio" de cada intervalo obtido após a divisão em três partes iguais e, em seguida, tomar a interseção de todos os intervalos remanescentes, veja Figura 3. De forma geral, se $0 < d < 1/2$, retirando do "meio" de $I_{0,1}$ (veja a Figura 2) um intervalo aberto de comprimento $1 - 2d$ irá restar dois intervalos de comprimento d , digamos, $I_{1,1} = [0, d]$ e $I_{1,2} = [1 - d, 1]$. Para $j = 1, 2$, retirando do "meio" de $I_{1,j}$ (veja a Figura 3) um intervalo aberto de comprimento $(1 - 2d)d$



Figura 2 – Intervalos $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$

restará apenas quatro intervalos, a saber

$$I_{2,1} = [0, d^2], I_{2,2} = [d - d^2, d], I_{2,3} = [1 - d, (1 - d) + d^2] \text{ e } I_{2,4} = [1 - d^2, 1].$$

Note que o comprimento do intervalo $I_{2,i}$ é d^2 , para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Depois de k iterações iremos obter 2^k intervalos fechados $I_{k,i}$, $i = 1, \dots, 2^k$ de comprimento d^k . O conjunto de Cantor com a escala d é definido por

$$C_d = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}.$$

É bastante natural concluir que o conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue nula, pois sabemos que $C_d \subset \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$ e $\text{diam}(I_{k,i}) = d^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, pois $d < 1$. Com isto, obtemos $\mathcal{L}(C_d) \leq 2^k d^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, o conjunto C_d é compacto, não é enumerável e não tem pontos interiores (FOLLAND, 1999, Proposição 1.22).

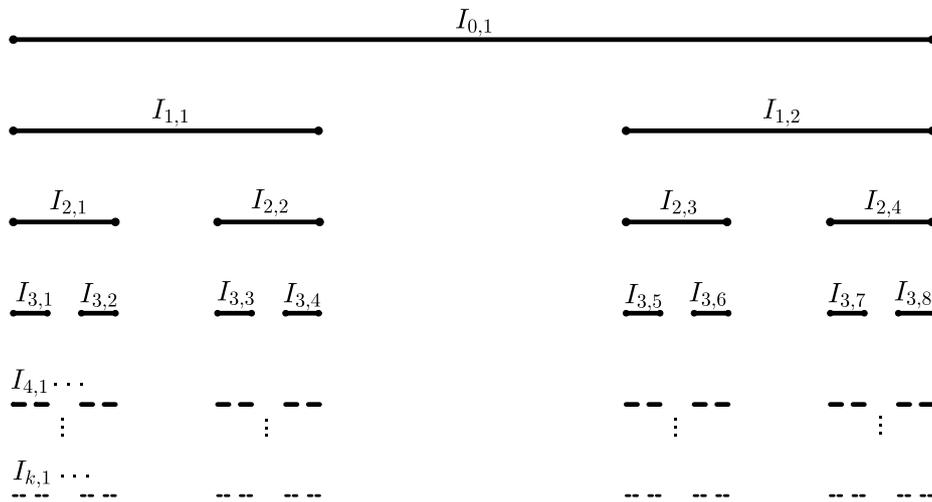


Figura 3 – Conjunto de Cantor com escala d

No que segue, iremos tratar da dimensão de Hausdorff de C_d . Vamos encontrar um valor $0 \leq s < \infty$ tal que $0 < \mathcal{H}^s(C_d) < \infty$. É muito mais simples encontrar limites superiores do que limites inferiores para as medidas de Hausdorff. Pois, uma cobertura criteriosamente escolhida dará uma estimativa superior, porém uma estimativa inferior requer a obtenção de um ínfimo sobre coberturas arbitrárias. Começemos mostrando que $\mathcal{H}^s(C_d) < \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, é de

rápida verificação que $C_d \subset \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$. Além disso, como $\text{diam}(I_{k,j}) = d^k$, obtemos

$$\mathcal{H}_{d^k}^s(C_d) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \text{diam}(I_{k,j})^s = d^{ks} 2^k = (2d^s)^k, \quad (3.13)$$

para $0 \leq s < \infty$. Se o limite superior em (3.13) for limitado, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, então, fazendo $k \rightarrow \infty$ obteríamos um limitante para $\mathcal{H}^s(C_d)$. Por isso, devemos investigar qual valor de s faz com que $(2d^s)^k$ fique limitado quando $k \rightarrow \infty$. Evidentemente, o menor valor s_d para o qual isto ocorre é dado por $2d^{s_d} = 1$, uma vez que, se s_d satisfizer $2d^{s_d} > 1$ teríamos $\lim_{k \rightarrow \infty} (2d^{s_d})^k = \infty$.

Ou seja,

$$s_d = \log_d(2^{-1}) = \frac{\log(2)}{\log(d^{-1})}.$$

Iremos mostrar que de fato

$$\dim_{\text{H}}(C_d) = \frac{\log(2)}{\log(d^{-1})}. \quad (3.14)$$

Por (3.13) fica claro que

$$\mathcal{H}^{s_d}(C_d) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{d^k}^{s_d}(C_d) \leq 1,$$

pois $d < 1$ e $2d^{s_d} = 1$. Portanto, por (3.6) segue que $\dim_{\text{H}}(C_d) \leq s_d$. Para mostrar a desigualdade contrária iremos verificar que $\mathcal{H}^{s_d}(C_d) \geq 1/4 > 0$ e utilizar (3.7) para concluir. Com efeito, pela Proposição 2.2.3 é suficiente mostrar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(E_j)^{s_d} \geq 1/4 \quad (3.15)$$

para qualquer coleção de intervalos abertos $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ que cobrem C_d . Pela compacidade de C_d podemos supor que uma quantidade finita de E_j s cobrem C_d , digamos E_1, \dots, E_m . Como C_d não tem pontos interiores podemos (fazendo E_j um pouco maior se necessário) supor que os pontos iniciais e finais de cada E_j estão "fora" de C_d . Denote $E_i = (a_i, b_i)$, com $a_i, b_i \notin C_d$ e defina

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{d(a_i, C_d), d(b_i, C_d)\}.$$

Pelas nossas suposições temos que $\delta > 0$. Como $d < 1$, temos que $d^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Sendo assim, podemos escolher $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\delta > d^{k_0} = \text{diam}(I_{k_0,i})$. Logo, segue que cada intervalo $I_{k_0,i}$ está contido em algum E_j . Dado $k \in \mathbb{N}$, note que

$$\sum_{i=1}^{2^k} \text{diam}(I_{k,i})^{s_d} = \sum_{i=1}^{2^k} (d^k)^{\log_d(2^{-1})} = \sum_{i=1}^{2^k} d^{\log_d(2^{-k})} = \sum_{i=1}^{2^k} 2^{-k} = 1. \quad (3.16)$$

Mostraremos que se I é um intervalo aberto tal que $I \cap C_d \neq \emptyset$, com extremos não pertencentes

a C_d , então

$$\sum_{I_{l,i} \subset I} \text{diam}(I_{l,i})^{s_d} \leq 4 \text{diam}(I)^{s_d}, \quad \forall l \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Com isto obteremos (3.15), pois utilizando (3.16) e (3.17), teremos

$$1 = \sum_{i=1}^{2^{k_0}} \text{diam}(I_{k_0,i})^{s_d} \leq \sum_{j=1}^m \sum_{I_{k_0,i} \subset E_j} \text{diam}(I_{k_0,i})^{s_d} \leq \sum_{j=1}^m 4 \text{diam}(E_j)^{s_d} \leq 4 \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(I_j)^{s_d}.$$

Para verificar (3.17), podemos supor, sem perda de generalidade, que l é suficientemente grande de modo que existam intervalos $I_{l,i}$ contidos em I . Seja n o menor inteiro tal que $I \supset I_{n,i}$, para algum i . Pela minimalidade de n temos $n \leq l$. Sejam $I_{n,j_1}, \dots, I_{n,j_p}$ todos os intervalos em sequência da n -ésima iteração da construção do conjunto C_d que estão contidos em I . Pela construção do conjunto de Cantor, dados $q \geq 5$ intervalos sequenciais de uma iteração qualquer, pelo menos dois destes sempre estão contidos em um intervalo da iteração anterior. Portanto, $p \leq 4$, pois do contrário, I iria conter algum intervalo $I_{n-1,j}$, o que iria contrariar a minimalidade de n . Portanto, como $n \leq l$, concluímos que $I_{l,i} \subset I_{n,j_m}$, para algum $m = 1, \dots, p$. Com isto, obtemos

$$\sum_{I_{l,i} \subset I} \text{diam}(I_{l,i})^{s_d} \leq \sum_{m=1}^p \sum_{I_{l,i} \subset I_{n,j_m}} \text{diam}(I_{l,i})^{s_d} = \sum_{m=1}^p \text{diam}(I_{n,j_m})^{s_d} \leq 4 \text{diam}(I)^{s_d},$$

como desejávamos. Note que $\dim_{\text{H}}(C_d)$ mede os tamanhos dos conjuntos de cantor C_d de forma natural: quando d cresce, o comprimento dos intervalos deletados diminuem. Por exemplo, lembre que no primeiro passo da construção de C_d retiramos um intervalo central de comprimento $1 - 2d$. Dessa forma, o conjunto C_d se torna maior e também $\dim_{\text{H}}(C_d)$ cresce. Note também que quando d varia de 0 a $1/2$, $\dim_{\text{H}}(C_d)$ assume todos os valores entre 0 e 1, ou seja, escolhendo d adequado, podemos criar exemplos em \mathbb{R} com dimensão de Hausdorff em $[0, 1]$, conforme já havíamos visto em (3.11).

3.1.2 Dimensão de Hausdorff e auto-similaridade

Na seção anterior calculamos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor C_d pela definição. Nesta seção, nosso objetivo é apresentar duas formas de calcular a dimensão de Hausdorff de subconjuntos do \mathbb{R}^n . A primeira irá envolver conjuntos auto-similares e a segunda conjuntos relacionados por uma aplicação Lipschitziana. As referências básicas para esta seção foram (MATTILA, 1995) e (FALCONER, 1985).

3.1.2.1 Dimensão de Hausdorff de conjuntos auto-similares

Conjuntos auto-similares são conjuntos que têm uma construção muito parecida com aquela do conjunto de Cantor. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita auto-similar (ou "scaling") de

escala $\lambda > 0$ se f é bijetora e

$$|f(x) - f(y)| = \lambda|x - y|, \quad (3.18)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Observe que a condição (3.18) nos diz que f é injetiva. Um subconjunto A é **auto-similar**, se o mesmo puder ser dividido em partes que são geometricamente semelhantes ao mesmo, isto é, A é auto-similar se existe $A' \subset A$, tal que $A = f_1(A') \cup \dots \cup f_m(A')$, e f_i é auto-similar com escala $\lambda > 0$. Por exemplo, o conjunto de Cantor é auto-similar, pois

$$C_\lambda = f_1(C_\lambda) \cup f_2(C_\lambda), \quad (3.19)$$

com os "scalings" $f_1(x) = \lambda x$ e $f_2(x) = \lambda x + 1 - \lambda$. Note que

$$|f_1(x) - f_1(y)| = \lambda|x - y| \text{ e } |f_2(x) - f_2(y)| = \lambda|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20)$$

Seja A um conjunto compacto e suponha que o mesmo é descrito por uma família de "scalings" que cria m cópias dele mesmo com um fator de escala $r > 0$, a saber

$$A = \bigcup_{i=1}^m f_i(A),$$

para alguma função f_i auto-similar com escala r . Com isso, temos:

$$\dim_{\text{H}}(A) = \frac{\log(m)}{\log(r^{-1})}. \quad (3.21)$$

A prova do fato acima é bastante técnica e pode ser consultada em (FALCONER, 1985, Teorema 8.6). Usando (3.21) no conjunto de Cantor C_λ concluímos que

$$\dim_{\text{H}}(C_\lambda) = \frac{\log(2)}{\log(\lambda^{-1})}.$$

Finalizamos esta seção com mais um exemplo interessante. A Curva de Von Koch, a qual denotaremos por C , é um exemplo de conjunto em \mathbb{R}^2 que tem propriedades parecidas com o conjunto de Cantor $C(1/3)$. Esta é construída completando as lacunas deixadas em cada etapa da construção de $C(1/3)$ com um triângulo equilátero de lado igual ao comprimento da lacuna deixada (veja a Figura 4). Sendo f_1, f_2, f_3 e f_4 os "scalings" com escala $1/3$ do plano que leva o primeiro segmento sobre os quatro segmentos seguintes, temos

$$C = \bigcup_{i=1}^4 f_i(C).$$

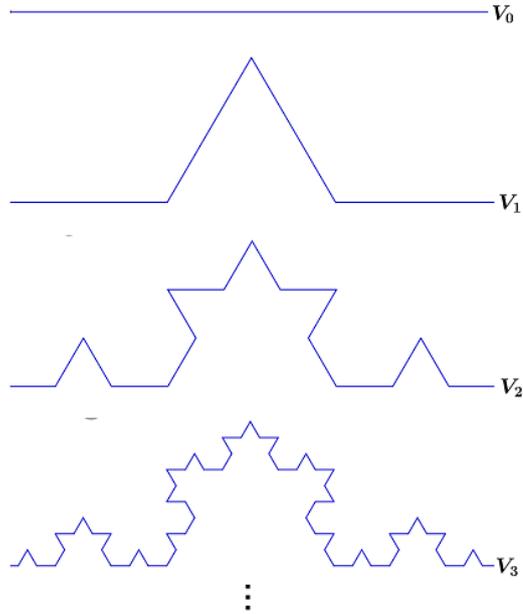


Figura 4 – Curva de Von Koch

Novamente, usando (3.21) concluímos que

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log(4)}{\log(3)}.$$

3.1.2.2 Dimensão de Hausdorff e aplicações Lipschitzianas

Nesta seção, apresentaremos dois resultados que iremos utilizar para mostrar que a dimensão de Hausdorff de uma superfície regular é igual à dimensão topológica da mesma.

Proposição 3.1.7. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitziana definida num conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ com constante de Lipschitz $c > 0$. Então,

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq c^s \mathcal{H}^s(A). \quad (3.22)$$

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de A . Claro que

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(E_i \cap A).$$

Além disso, note que

$$\text{diam}(f(E_i \cap A)) \leq c \text{diam}(E_i),$$

pois,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \leq c \text{diam}(E_i \cap A) \leq c \text{diam}(E_i), \quad \forall x, y \in E_i \cap A.$$

Como $\text{diam}(E_i) \leq \delta$, temos que $\{f(E_i \cap A)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma $c\delta$ -cobertura de $f(A)$. Logo,

$$\mathcal{H}_{c\delta}^s(f(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(f(E_i \cap A))^s \leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s,$$

ou seja, $\frac{1}{c^s} \mathcal{H}_{c\delta}^s(f(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s$. Pela arbitrariedade da δ -cobertura $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, obtemos

$$\frac{1}{c^s} \mathcal{H}_{c\delta}^s(f(A)) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(A).$$

Multiplicando esta desigualdade por c^s e fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos (3.22). \square

3.1.3 Dimensão de Hausdorff de superfícies regulares

Nesta seção, iremos calcular a dimensão de Hausdorff de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 3.1.8. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^m$. Seja $K \subset A$ um conjunto compacto. Então $f|_K$ é Lipschitziana.

Demonstração. Vamos mostra que existe um natural n_0 tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq n_0|x - y|, \quad (3.23)$$

para todo $x, y \in K$. Com efeito, suponhamos que (3.23) não ocorre, isto é, para cada $m \in \mathbb{N}$ existem $x_m, y_m \in K$ tais que

$$|f(y_m) - f(x_m)| > m|y_m - x_m|. \quad (3.24)$$

Mas, K é compacto, então as seqüências $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ possuem subsequências convergentes em K , $x_{m_k} \rightarrow x$ e $y_{m_k} \rightarrow y$, com $x, y \in K$. Queremos mostrar que $x = y$. De fato, se $x \neq y$, então podemos considerar $\epsilon = |x - y|/2 > 0$ e escolhendo $k \in \mathbb{N}$ grande segue que

$$|y - x| - |y_{m_k} - x_{m_k}| \leq ||y - x| - |y_{m_k} - x_{m_k}|| < \epsilon,$$

o que implica,

$$|f(y_{m_k}) - f(x_{m_k})| > m_k|y_{m_k} - x_{m_k}| > m_k \frac{|y - x|}{2}.$$

Logo, f não é limitada em K , pois $m_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, o que contradiz o fato de f ser contínua. Como A é aberto podemos escolher $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Para k grande temos que $y_{m_k}, x_{m_k} \in B(x, r)$. Por outro lado, como o segmento de reta $[y_{m_k}, x_{m_k}] \subset B(x, r)$ e aplicando o Teorema do Valor Médio, existe um vetor u em $[x_{m_k}, y_{m_k}]$ tal que

$$f(y_{m_k}) - f(x_{m_k}) = \nabla f(u) \cdot (y_{m_k} - x_{m_k}),$$

o que implica

$$|f(y_{m_k}) - f(x_{m_k})| \leq |\nabla f(u)| |y_{m_k} - x_{m_k}|.$$

Mas, f é de classe C^1 . Logo, as suas derivadas parciais de ordem 1 são contínuas. Com isto, $|\nabla f|$ é uniformemente limitado em $\overline{B(x, r)}$, ou seja, existe uma constante $M > 0$, uniformemente em x , tal que $|\nabla f(x)| \leq M$, para todo $x \in \overline{B(x, r)}$. Portanto,

$$|f(y_{m_k}) - f(x_{m_k})| \leq M |y_{m_k} - x_{m_k}|,$$

para k grande. Isto contradiz (3.24), já que $m_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Com isto, mostramos (3.23). \square

Corolário 3.1.9. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é uma função Lipschitziana em qualquer conjunto compacto $K \subset A$.

Demonstração. Escreva $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, para todo $x \in A$. Como f é de classe C^1 , cada função coordenada f_i também o é. Assim, pelo Lema 3.1.8 existe uma constante $c_i > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq c_i |x - y|.$$

Lembrando que em \mathbb{R}^n vale a desigualdade $|x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(f_1(x) - f_1(y), \dots, f_n(x) - f_n(y))| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) |x - y|. \end{aligned}$$

Portanto, f é Lipschitziana em K . \square

Proposição 3.1.10. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular de dimensão topológica $(n - 1)$. Então, a dimensão de Hausdorff de S é $(n - 1)$.

Demonstração. Dado $p \in S$, sejam (φ, U) uma parametrização de S em p e $q \in U$ com $\varphi(q) = p$. Como U é aberto, seja B_p uma vizinhança de q tal que $\overline{B_p} \subset U$ e defina a função $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\overline{B_p}}$. Dessa forma, como $\varphi \in C^1(U)$, temos $\tilde{\varphi} \in C^1(\overline{B_p})$. Com isso, $\{\tilde{\varphi}(B_p) : p \in S\}$ é uma cobertura aberta para S . Além disso, pela Observação 2.4.8, podemos supor que tal cobertura é enumerável. Portanto, suponhamos que

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(B_i), \varphi_i \in C^1(U_i), \quad U_i \supset \overline{B_i}.$$

Assim, pelo Corolário 3.1.9 $\tilde{\varphi}_i$ é uma função Lipschitziana em $\overline{B_i}$. Além disso, pelo Lema 2.2.7, temos que $\mathcal{H}^{n-1}(B_i) < \infty$, já que B_i é uma bola em \mathbb{R}^{n-1} . Portanto, pela Proposição 3.1.7 temos que $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi_i(B_i)) < \infty$.

Por outro lado, seja σ_i a medida de superfície em $\varphi_i(U_i)$. Utilizando a mesma ideia da Proposição 2.4.15 podemos concluir que

$$\sigma_i(B(x, r)) \lesssim r^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Dado $\delta > 0$, podemos tomar uma cobertura de $\varphi_i(B_i)$ dada por $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, onde $B_j = B(x_j, r_j)$ e $\text{diam}(B_j) \leq \delta$. Defina $\tilde{B}_j = B(x_j, 2r_j)$. Naturalmente,

$$\sigma_i(\varphi_i(B_i)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_i(\tilde{B}_j) \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} (2r_j)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(B_j)^{n-1}.$$

Isto implica

$$\sigma_i(\varphi_i(B_i)) \lesssim \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(B_j)^{n-1} : \{B_j\} \text{ é uma } \delta - \text{cobertura para } \varphi_i(B_i) \right\} = \mathcal{H}_\delta^{n-1}(\varphi_i(B_i)). \quad (3.25)$$

Como $\sigma_i(\varphi_i(B_i)) > 0$, fazendo $\delta \downarrow 0$ concluímos que $\mathcal{H}^{n-1}(\varphi_i(B_i)) > 0$. Logo, pela Proposição 3.1.1 temos

$$\dim_{\text{H}}(\varphi_i(B_i)) = n - 1.$$

Portanto, pela relação (3.9) concluímos que

$$\dim_{\text{H}}(S) = \dim_{\text{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(B_i) \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\text{H}}(\varphi_i(\overline{B_i})) = n - 1$$

e finalizamos a prova. □

3.2 Lema de Frostman

Embora limitar medidas de Hausdorff superiormente seja relativamente simples; tendo apenas que estimar algumas coberturas convenientes, geralmente é muito mais difícil encontrar limites inferiores. O lema de Frostman transforma o problema de encontrar um bom limite inferior para $\mathcal{H}^s(A)$ em saber se existe uma medida em $\mathcal{M}(A)$ com uma boa limitação superior em bolas.

Relembre que para $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{M}(A)$ é o conjunto das medidas regulares μ tais que $0 < \mu(A) < \infty$ e $\text{supp}(\mu) \subset A$ é compacto. Na demonstração do Lema de Frostman vamos

utilizar **cubos diádicos** em \mathbb{R}^n . Um intervalo diádico semiaberto em \mathbb{R} é um intervalo da forma

$$I_{m,p_j} = \left[\frac{p_j}{2^m}, \frac{p_j + 1}{2^m} \right),$$

para todo $m, p_j \in \mathbb{Z}$. A amplitude de tal intervalo é 2^{-m} . A vantagem de considerar intervalos semiabertos é que eles são dois a dois disjuntos. Um cubo diádico de \mathbb{R}^n é um produto cartesiano de intervalos diádicos de \mathbb{R} , ou seja

$$Q_{m,p} = \prod_{j=1}^n I_{m,p_j},$$

com $p = (p_1, \dots, p_n)$. Denotaremos por \mathcal{D}_m a família de todos os cubos diádicos com arestas de comprimento 2^{-m} . Cubos diádicos em \mathbb{R}^n também são dois a dois disjuntos e

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_m} Q.$$

Observação 3.2.1. Uma propriedade bastante útil dos cubos diádicos é que um cubo em \mathcal{D}_m é exatamente a união de 2^n cubos em \mathcal{D}_{m+1} . Recursivamente, sempre podemos dizer que um cubo em \mathcal{D}_m é uma união finita de cubos em \mathcal{D}_{m+k} , $k \in \mathbb{N}$. Com uma análise análoga, podemos concluir que um cubo em \mathcal{D}_{m+1} está sempre contido em um cubo de \mathcal{D}_m ou, em geral, um cubo em \mathcal{D}_m está sempre contido em um cubo de \mathcal{D}_{m-k} .

Teorema 3.2.2 (Lema de Frostman). Sejam $0 \leq s \leq n$ e K um conjunto compacto de \mathbb{R}^n . Então $\mathcal{H}^s(K) > 0$ se, e somente se, existe $\mu \in \mathcal{M}(K)$ e uma constante positiva C tal que

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^s, \quad (3.26)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. A constante C é independente de x e r .

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{M}(K)$ satisfazendo (3.26). Dado $\delta > 0$, podemos tomar uma cobertura de K dada por $\{B_j\}_{j=1}^\infty$, onde $B_j = B(x_j, r_j)$ e $\text{diam}(B_j) \leq \delta$. Defina $\tilde{B}_j = B(x_j, 2r_j)$. Naturalmente,

$$\mu(K) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(\tilde{B}_j) \lesssim \sum_{j=1}^\infty (2r_j)^s = \sum_{j=1}^\infty \text{diam}(B_j)^s.$$

Isto implica

$$\mu(K) \lesssim \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \text{diam}(B_j)^s : \{B_j\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura para } K \right\} = \mathcal{H}_\delta^s(K). \quad (3.27)$$

Como $\mu \in \mathcal{M}(K)$, temos $\mu(K) > 0$ e portanto $\mathcal{H}^s(K) > 0$.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{H}^s(K) > 0$. Então, pela contrapositiva da Proposição 3.1.6 temos $\mathcal{H}_\infty^s(K) > 0$. Escolha uma constante $c \in (0, 1)$. Logo, $\mathcal{H}_\infty^s(K) > c\mathcal{H}_\infty^s(K)$ e portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s \geq b, \quad b = c\mathcal{H}_\infty^s(K)$$

para qualquer cobertura $\{E_i\}_i^\infty$. Pela Proposição 2.2.3, podemos tomar a cobertura $\{E_i\}$ por conjuntos abertos ou fechados. Em particular,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(Q_i)^s \geq b, \quad (3.28)$$

para qualquer família $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$ de cubos cobrindo K . Seja $m \in \mathbb{N}$ e defina a medida μ_m^m sobre \mathbb{R}^n de modo que para todo $Q \in \mathcal{D}_m$

$$\mu_m^m \llcorner Q = \begin{cases} 2^{-ms} \mathcal{L}^n(Q)^{-1} (\mathcal{L}^n \llcorner Q), & \text{se } K \cap Q \neq \emptyset \\ 0 & \text{, se } K \cap Q = \emptyset. \end{cases}$$

Esta medida é bem definida: Dado $V \subset \mathbb{R}^n$, temos que

$$V = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_m} V \cap Q,$$

logo, como cubos em \mathcal{D}_m são disjuntos temos

$$\begin{aligned} \mu_m^m(V) &= \sum_{Q \in \mathcal{D}_m} \mu_m^m(V \cap Q) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{D}_m} (\mu_m^m \llcorner Q)(V) \\ &= \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} (\mu_m^m \llcorner Q)(V) \\ &= 2^{-ms} \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} \mathcal{L}^n(Q)^{-1} \mathcal{L}^n(Q \cap V). \end{aligned}$$

Se $Q \in \mathcal{D}_m$ e $Q \cap K \neq \emptyset$, então $\mu_m^m(Q) = 2^{-ms}$, caso contrário, $\mu_m^m(Q) = 0$, ou seja,

$$\mu_m^m(Q) \leq 2^{-ms}, \quad \forall Q \in \mathcal{D}_m.$$

Temos total controle da medida μ_m^m em cubos em \mathcal{D}_m , porém, não sabemos qual o comportamento da mesma em cubos maiores em \mathcal{D}_{m-1} . Por isso, seja μ_{m-1}^m uma medida definida por

$$\mu_{m-1}^m \llcorner Q = \begin{cases} \mu_m^m \llcorner Q & \text{, se } \mu_m^m(Q) \leq 2^{-(m-1)s}, \\ 2^{-(m-1)s} \mu_m^m(Q)^{-1} (\mu_m^m \llcorner Q) & \text{, se } \mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}, \end{cases}$$

para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-1}$. De maneira análoga, temos

$$\mu_{m-1}^m \llcorner Q \leq \mu_m^m \llcorner Q \text{ e } \mu_{m-1}^m(Q) \leq 2^{-(m-1)s}, \quad (3.29)$$

para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-1}$. Além disso, a igualdade em (3.29) ocorre quando $\mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}$. Continuando este processo, obtemos μ_{m-k-1}^m a partir de μ_{m-k}^m de modo que

$$\mu_{m-k-1}^m \llcorner Q = \begin{cases} \mu_{m-k}^m \llcorner Q & , \text{ se } \mu_{m-k}^m(Q) \leq 2^{-(m-k-1)s}, \\ 2^{-(m-k-1)s} \mu_{m-k}^m(Q)^{-1} (\mu_{m-k}^m \llcorner Q) & , \text{ se } \mu_{m-k}^m(Q) > 2^{-(m-k-1)s}, \end{cases}$$

$Q \in \mathcal{D}_{m-k-1}$. Analogamente, obtemos

$$\mu_{m-k-1}^m \llcorner Q \leq \mu_{m-k}^m \llcorner Q \text{ e } \mu_{m-k-1}^m(Q) \leq 2^{-(m-k-1)s}, \quad (3.30)$$

para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-k-1}$. Além disso, a igualdade em (3.30) ocorre quando $\mu_{m-k}^m(Q) > 2^{-(m-k-1)s}$. Como estamos aumentando o tamanho dos cubos à medida que aumentamos o valor de k , paramos o procedimento quando $K \subset Q^*$, para algum $Q^* \in \mathcal{D}_{m-k_0}$. Isto é possível devido a compacidade de K . Definimos assim, $\mu^m = \mu_{m-k_0}^m$.

Afirmção 3.2.3. Dado $k \in \mathbb{N}$ temos $\mu^m(Q) \leq 2^{-(m-k)s}$, para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$.

Antes de provamos a Afirmção 3.2.3, note que a mesma nos diz que a medida μ^m faz a construção se estabilizar, isto é, $\mu_{m-k_0}^m = \mu_{m-k_0-N}^m$, para qualquer $N \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$. Se $Q \cap K = \emptyset$, então por construção temos $\mu^m(Q) = 0$. Quando $k = k_0$, a Afirmção 3.2.3 segue imediatamente de (3.30). Suponha então que $k_0 < k$ e $Q \cap K \neq \emptyset$. Pela Observação 3.2.1 temos que Q é uma união finita de cubos \mathcal{D}_{m-k_0} . Digamos,

$$Q = \bigcup_{i=1}^r Q_i, \quad Q_i \in \mathcal{D}_{m-k_0}.$$

Logo, $Q^* = Q_{i_0}$ para algum $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, pois $Q \cap K \neq \emptyset$ e $K \subset Q^*$. Os outros cubos da união não intersectam K . Logo, por (3.30), concluímos

$$\mu^m(Q) = \mu^m\left(\bigcup_{i=1}^r Q_i\right) = \mu^m(Q_{i_0}) = \mu^m(Q^*) = \mu_{m-k_0}^m(Q^*) = 2^{-(m-k_0)s} \leq 2^{-(m-k)s}.$$

Para provar a Afirmção 3.2.3 para o caso $k < k_0$, iremos mostrar que em geral

$$\mu_{m-(k+p)}^m(Q) \leq \mu_{m-k}^m(Q), \quad (3.31)$$

para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ e $p \in \mathbb{N}$. Para ver que isto irá implicar a Afirmção 3.2.3, basta escrever

$k_0 = k + p_0$, para algum $p_0 \in \mathbb{N}$ e aplicar (3.31) para obter

$$\mu_{m-k_0}^m(Q) \leq \mu_{m-k}^m(Q) \quad (3.32)$$

e, em seguida, utilizar (3.30). Provemos, então, (3.31). Com efeito, dado $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ pela Observação 3.2.1 existe um cubo $Q_p \in \mathcal{D}_{(m-k)-p}$ contendo Q . Dessa forma, utilizando (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} \mu_{m-(k+p)}^m(Q) &= (\mu_{m-(k+p)}^m \lfloor Q_p)(Q) \\ &\leq (\mu_{m-(k+p)+1}^m \lfloor Q_p)(Q) \\ &= \mu_{m-(k+p-1)}^m(Q). \end{aligned}$$

Portanto, para $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$

$$\mu_{m-(k+p)}^m(Q) \leq \mu_{m-(k+p-1)}^m(Q). \quad (3.33)$$

Analogamente, existe $Q_{p-1} \in \mathcal{D}_{(m-k)-(p-1)}$ contendo Q . Logo,

$$\begin{aligned} \mu_{m-(k+p-1)}^m(Q) &= (\mu_{m-(k+p-1)}^m \lfloor Q_{p-1})(Q) \\ &\leq (\mu_{m-(k+p-1)+1}^m \lfloor Q_{p-1})(Q) \\ &= \mu_{m-(k+p-2)}^m(Q). \end{aligned}$$

Portanto, para $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, tem-se

$$\mu_{m-(k+p-1)}^m(Q) \leq \mu_{m-(k+p-2)}^m(Q). \quad (3.34)$$

Indutivamente, existe $Q_1 \in \mathcal{D}_{(m-k)-(p-(p-1))} = \mathcal{D}_{m-(k+1)}$ contendo Q . Portanto, analogamente ao que já fizemos para $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$, encontramos

$$\mu_{m-(k+1)}^m(Q) \leq \mu_{m-k}^m(Q). \quad (3.35)$$

Por fim, pelas desigualdades (3.33), (3.34) e (3.35) concluímos (3.31). Decorre da construção, que dado $x \in K$ existem $k \leq k_0$ e $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$ tais que $x \in Q$ e

$$\mu^m(Q) = 2^{-(m-k)s} = n^{-s/2} \text{diam}(Q)^s.$$

Lembre que o diâmetro de um cubo com aresta de tamanho l é dado por $\sqrt{n}l$. Escolhendo para cada $x \in K$ o maior Q satisfazendo o que acabamos de comentar, obtemos cubos disjuntos Q_1, \dots, Q_q tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^q Q_i$. Logo, por (3.28), temos que

$$\mu^m(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^q \mu^m(Q_i) = \sum_{i=1}^q \mu^m(Q_i) = n^{-s/2} \sum_{i=1}^q \text{diam}(Q_i)^s > n^{-s/2} b,$$

o que implica,

$$\mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1} < n^{s/2}b^{-1}. \quad (3.36)$$

Defina $\nu^m = \mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu^m$ e note que $\nu^m(\mathbb{R}^n) = 1$. Além disso, pela Afirmação 3.2.3 e por (3.36) obtemos

$$\nu^m(Q) = \mu^m(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu^m(Q) \leq n^{s/2}b^{-1}2^{-(m-k)s}, \quad (3.37)$$

para todo $Q \in \mathcal{D}_{m-k}$. Pelo Teorema 2.1.2 e Teorema 2.3.5, podemos concluir que $\mathcal{L}^n \llcorner Q$ é uma medida de Radon e consequentemente ν^m também o é. Por outro lado, como qualquer compacto do \mathbb{R}^n está sempre contido em algum cubo diádico utilizando (3.37) podemos concluir que

$$\sup\{\nu^m(B) : m \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

para todo compacto B . Usando o Teorema 2.3.23, concluímos que a sequência $\{\nu^m\}$ tem uma subsequência que converge fracamente para alguma medida de Radon ν . Queremos verificar que $\nu \in \mathcal{M}(K)$. Claro que $0 < \nu(K) < \infty$, pois a mesma é uma medida de Radon. Como ν^m se anula "fora" de K para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que $\text{supp}(\nu) \subset K$. Portanto, $\text{supp}(\nu)$ é compacto.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r < \infty$. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-p} \leq 4r$ e de modo que $B(x, r) \subset \text{int}(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i)$, $Q_i \in \mathcal{D}_p$. Logo,

$$\text{diam}(Q_i) = n^{1/2}2^{-p} \leq 4n^{1/2}r, i = 1, \dots, 2^n.$$

Se $m \geq p$, então podemos escrever $p = m - k_0$, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$. Portanto, por (3.37), deduzimos que

$$\begin{aligned} \nu^m \left(\text{int} \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i \right) \right) &\leq \nu^m \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i \right) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \nu^m(Q_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2^n} n^{s/2}b^{-1}2^{-(m-k_0)s} \\ &= 2^n n^{s/2}b^{-1}2^{-ps} \\ &\leq 2^{n+2s}n^{s/2}b^{-1}r^s, . \end{aligned}$$

Conclusão,

$$\nu(B(x, r)) \leq \nu \left(\text{int} \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i \right) \right) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \nu^m \left(\text{int} \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i \right) \right) \leq Cr^s,$$

com $C = 2^{n+2s}n^{s/2}b^{-1}$. □

Seja $J_A = \{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), \mu(B(x, r)) \lesssim r^s\}$ e $I = \{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\}$. É consequência imediata do Teorema 3.2.2 que $I = J_A$. Além disso, o conjunto J_A é limitado

superiormente por n . De fato, dado $s \in J_A$, temos que $s \in I$. Consequentemente, $s \leq \sup(I) = \dim_{\text{H}}(A)$. Por (3.11) sabemos que $\dim_{\text{H}}(A) \leq n$. Logo, $s \leq n$. Com isto, e utilizando (3.7) obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.4. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então, $\dim_{\text{H}}(A) = \sup(J_A)$.

3.3 Energia de medidas e dimensão de Hausdorff

Uma dos conceitos mais fundamentais para o estudo de dimensão de Hausdorff é o de s -**energia** de uma medida de Borel μ :

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x d\mu_y.$$

Relembre que o Núcleo de Riesz é definido por $K_s(x) = |x|^{-s}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $0 < s < n$. Assim, podemos reescrever $I_s(\mu)$ da seguinte forma,

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} (K_s * \mu) d\mu. \quad (3.38)$$

Proposição 3.3.1. Seja μ uma medida de Borel com suporte compacto. Se $I_s(\mu) < \infty$, então $I_t(\mu) < \infty$, para todo $0 < t < s$.

Demonstração. Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-t} d\mu_x &= \int_{B(y,1)} |x - y|^{-t} d\mu_x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(y,1)} |x - y|^{-t} d\mu_x \\ &\leq \int_{B(y,1)} |x - y|^{-s} d\mu_x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(y,1)} 1 d\mu_x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x + \mu(K), \quad K = \text{supp}(\mu). \end{aligned}$$

Integrando na variável y , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-t} d\mu_x d\mu_y \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x d\mu_y + \int_{\mathbb{R}^n} \mu(K) d\mu,$$

ou seja, $I_t(\mu) \leq I_s(\mu) + \mu(K)^2 < \infty$. □

Podemos facilmente relacionar s -energia com a condição de Frostman (3.26) via a fórmula a seguir.

Lema 3.3.2. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Então, para cada $s > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_y = s \int_0^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s+1}} dr. \quad (3.39)$$

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s+1}} dr &= \int_0^\infty \int_{B(x, r)} r^{-s-1} d\mu dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x, r)}(y) r^{-s-1} d\mu_y dr. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s+1}} dr &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{B(x, r)}(y) r^{-s-1} dr d\mu_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-y|}^\infty r^{-s-1} dr d\mu_y \\ &= \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_y. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então, $\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), I_s(\mu) < \infty\}$.

Demonstração. Considere os conjuntos dados por $I_A = \{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), I_s(\mu) < \infty\}$ e $J_A = \{s \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), \mu(B(x, r)) \lesssim r^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$. Dado $s > 0$, suponha que existe $\mu \in \mathcal{M}(A)$ satisfazendo (3.26). Dessa forma, para $0 < t < s$ e pelo Lema 3.3.2, obtemos

$$\begin{aligned} I_t(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-t} d\mu_y d\mu_x \\ &= t \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{t+1}} dr d\mu_x. \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{t+1}} dr &= \int_0^{\text{diam}(\text{supp}(\mu))} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{t+1}} dr + \int_{\text{diam}(\text{supp}(\mu))}^\infty \frac{\mu(B(x, r))}{r^{t+1}} dr \\ &\lesssim \int_0^{\text{diam}(\text{supp}(\mu))} \frac{r^s}{r^{t+1}} dr + \int_{\text{diam}(\text{supp}(\mu))}^\infty \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{r^{t+1}} dr \\ &= \frac{\text{diam}(\text{supp}(\mu))^{s-t}}{s-t} + \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{t} \text{diam}(\text{supp}(\mu))^{-t} < \infty. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Note que a expressão (3.40) não depende de x e portanto $I_t(\mu) < \infty$. Com isso mostramos que $\{t > 0 : t < s\} \subset I_A$, logo, tomando o supremo nestes conjuntos, obtemos $s \leq \sup I_A$. Pela arbitrariedade de s temos $\sup J_A \leq \sup I_A$, ou seja, pelo Corolário 3.2.4 $\dim_{\text{H}} A \leq \sup I_A$. Por outro lado, seja $s \geq 0$ tal que existe $\mu \in \mathcal{M}(A)$ satisfazendo $I_s(\mu) < \infty$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x < \infty, \text{ q.t.p. em } y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, existe $0 < M < \infty$ tal que o conjunto

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x < M \right\}$$

tem medida μ positiva. De fato, seja

$$E_k = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x \in [k - 1, k) \right\},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como estes conjuntos são disjuntos, temos que $\mu(E_{n_0}) > 0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, assim, tomando $M = n_0$ obtemos o que queríamos. Utilizando o Lema 3.3.2 concluímos que a medida $\mu \llcorner C$ satisfaz (3.26). Dessa forma, $s \in I_A$ e com um raciocínio análogo ao que já fizemos, concluiremos que $\sup I_A \leq \dim_{\text{H}} A$. \square

3.4 A transformada de Fourier do núcleo de Riesz

Vimos na Proposição 2.6.4 que o Núcleo de Riesz pode ser visto como uma distribuição. Nesta seção, iremos calcular efetivamente sua transformada de Fourier. Quando $n/2 < s < n$ iremos calcular sua transformada efetivamente. Por outro lado, quando $0 < s \leq n/2$ será possível apenas calcular a sua transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.4.1. O núcleo de Riesz $K_s \in L^1 + L^2$, para $n/2 < s < n$.

Demonstração. É de rápida verificação que $K_s = M_s + N_s$, com $M_s = K_s \chi_{B(0,1)}$ e $N_s = K_s \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)}$. Vamos mostrar que $M_s \in L^1$ e $N_s \in L^2$. Com efeito, naturalmente $M_s \in L^1$ uma vez que, pela Proposição 2.6.4, $K_s \in L^1_{loc}$. Por outro lado, usando o Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |N_s|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |x|^{-2s} dx \\ &= \int_1^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |ry|^{-2s} r^{n-1} d\sigma_y dr \\ &= \int_1^\infty r^{n-2s-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |y|^{-2s} d\sigma_y dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_1^\infty r^{n-2s-1} dr. \end{aligned}$$

Como $n - 2s < 0$, obtemos

$$\int_1^\infty r^{n-2s-1} dr = \frac{1}{2s - n} < \infty,$$

e concluímos que $N_s \in L^2$. \square

O resultado a seguir será de suma importância para calcular \widehat{K}_s no sentido clássico quando $n/2 < s < n$.

Lema 3.4.2. Seja f uma função C^1 em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\alpha > 0$. Então, $f(x) = c|x|^{-\alpha}$ se, e somente se,

- 1) f é radial, isto é, $f \circ T = f$, para todo $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, e também
- 2) f é homogênea de grau $-\alpha$, ou seja, $f(\epsilon x) = \epsilon^{-\alpha} f(x)$, para todo $\epsilon > 0$.

Demonstração. Suponha que $f(x) = c|x|^{-\alpha}$. Dado $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ temos que a mesma é uma isometria. Logo,

$$f \circ T(x) = c|T(x)|^{-\alpha} = c|x|^{-\alpha} = f(x).$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ temos

$$f(\epsilon x) = c|\epsilon x|^{-\alpha} = c\epsilon^{-\alpha}|x|^{-\alpha} = \epsilon^{-\alpha} f(x).$$

Provemos a recíproca. Note que, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in S(0, |x|)$, temos que $x_0 = R(x)$ com R sendo uma rotação. Logo, pela radialidade de f , temos

$$f(x_0) = f(R(x)) = f(x).$$

Isto nos diz que f é uma função que só depende da norma dos pontos. Com isto fica bem definida a função $\psi(r) = f(x)$, com $|x| = r$. Como f é de classe C^1 , naturalmente ψ também o é. Pela homogeneidade de grau $-\alpha$ de f , obtemos

$$\psi(\epsilon r) = \epsilon^{-\alpha} \psi(r), \quad \forall r > 0. \quad (3.41)$$

Vamos mostrar que $\psi(r) = cr^{-\alpha}$, com c sendo uma constante e $r > 0$. Para tanto, defina, para cada $r > 0$,

$$g_r(t) = \psi(tr) - t^{-\alpha} \psi(r).$$

Por (3.41) temos que g_r é nula em $(0, \infty)$. Derivando g_r , concluímos que

$$\psi'(tr)r + \alpha t^{-\alpha} \psi(r) = 0.$$

Fazendo $t = 1$, obtemos a equação diferencial ordinária $\psi'(r) + \frac{\alpha}{r} \psi(r) = 0$. Utilizando o método do fator integrante concluímos que $\psi(r) = cr^{-\alpha}$. Portanto,

$$f(x) = \psi(|x|) = c|x|^{-\alpha}.$$

□

Teorema 3.4.3. Se $n/2 < s < n$, então existe uma constante positiva e finita c ; dependendo apenas de n e s , tal que $\widehat{K}_s = cK_{n-s}$, no sentido clássico.

Demonstração. Pela demonstração do Lema 3.4.1, sabemos que $K_s = M_s + N_s$, com

$$M_s = K_s \chi_{B(0,1)}, \quad N_s = K_s \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)},$$

desta forma, $\widehat{K}_s = \widehat{M}_s + \widehat{N}_s$. Queremos mostrar que \widehat{M}_s e \widehat{N}_s satisfazem 1) e 2) no Lema 3.4.2 com $\alpha = n - s$. Como K_s é radial, segue que M_s e N_s também o são. Desta forma, pela Proposição A.1.3 - (iv) e Proposição A.1.31 - (iv), temos que \widehat{M}_s e \widehat{N}_s são radiais e satisfazem 1) no Lema 3.4.2. Só nos resta mostrar que \widehat{M}_s e \widehat{N}_s são homogêneas de grau $-(n - s)$. Naturalmente,

$$M_s(x) = \psi(|x|) \text{ e } N_s(x) = \phi(|x|),$$

com $\psi(r) = r^{-s} \chi_{[0,1)}(r)$ e $\phi(r) = r^{-s} \chi_{[1,\infty)}(r)$. Utilizando a fórmula de integração para funções radiais (Teorema A.1.32), obtemos

$$\widehat{M}_s(\epsilon x) = c(n) |\epsilon x|^{-(n-2)/2} \int_0^1 \eta^{-s} J_{(n-2)/2}(2\pi \epsilon |x| \eta) \eta^{n/2} d\eta.$$

Fazendo a mudança $\eta = z/\epsilon$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{M}_s(\epsilon x) &= c(n) \epsilon^{-(n-2)/2} |x|^{-(n-2)/2} \int_0^1 \left(\frac{z}{\epsilon}\right)^{-s} J_{(n-2)/2}(2\pi |x| z) (z/\epsilon)^{n/2} \epsilon^{-1} dz \\ &= [\epsilon^{-(n-2)/2} \epsilon^s \epsilon^{-n/2} \epsilon^{-1}] c(n) |x|^{-(n-2)/2} \int_0^1 z^{-s} J_{(n-2)/2}(2\pi |x| z) z^{n/2} dz \\ &= [\epsilon^{s-n}] c(n) |x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \psi(z) J_{(n-2)/2}(2\pi |x| z) z^{n/2} dz \\ &= \epsilon^{s-n} \widehat{M}_s(x). \end{aligned}$$

Analogamente, usando a Observação A.1.33, podemos concluir que \widehat{N}_s é também homogênea de grau $-(n - s)$. Portanto, pelo Lema 3.4.2, obtemos $\widehat{K}_s = c|x|^{-(n-s)} = cK_{n-s}$. \square

Pela fórmula do produto (A.3), (A.30) em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, e usando Teorema 3.4.3, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.4.4. Se $n/2 < s < n$, então existe uma constante positiva e finita c ; dependendo de n e s , tal que

$$\widehat{K}_s = cK_{n-s}, \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

No Exemplo 2.6.3, vimos que se $f \in L^1_{loc}$ é tal que $|f(x)| \leq L|x|^\lambda$, quando $|x| > 1$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então podemos olhar para f como uma distribuição temperada

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Com esta identificação, definimos

$$\widehat{f}(\varphi) := \widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}).$$

Lema 3.4.5. Seja $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ uma função par tal que $|g(x)| \lesssim |x|^\lambda$ para $|x| > 1$ com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponha que existe f em L^1_{loc} com o decaimento $|f(x)| \lesssim |x|^\alpha$ para $|x| > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\widehat{g} = f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\widehat{T}_g = T_f$. Então, $\widehat{f} = g$, isto é, $\widehat{T}_f = T_g$.

Demonstração. Dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\widehat{f}(\varphi) = \widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \widehat{T}_g(\widehat{\varphi}) = T_g(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\widehat{\varphi}(x)dx.$$

Por A.1.12 - (ii), sabemos que $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, dessa forma, como g é uma função par, obtemos

$$\widehat{f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(-x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx = T_g(\varphi) = g(\varphi),$$

e, com isso, finalizamos a prova. \square

Teorema 3.4.6. Se $0 < s < n$, então existe uma constante positiva e finita c ; dependendo de n e s , tal que

$$\widehat{K}_s = cK_{n-s}, \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Quando $n/2 < s < n$, o Corolário 3.4.4 nos diz que o resultado é válido. Suponha que $0 < s < n/2$. É claro que $n/2 < n - s < n$. Novamente, pelo Corolário 3.4.4 existe uma constante γ tal que

$$\widehat{K}_{n-s} = \gamma K_{n-(n-s)} = \gamma K_s \tag{3.42}$$

com γ dependendo de n e $n - s$. Por outro lado, como K_s é sempre par, aplicando o Lema 3.4.5 em (3.42), obtemos $\gamma \widehat{K}_s = K_{n-s}$, ou seja

$$\widehat{K}_s = \gamma^{-1} K_{n-s}.$$

Só nos resta mostrar o resultado para o caso limite $n/2$, isto é,

$$\widehat{K}_{n/2} = cK_{n-n/2}, \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Para tanto, iremos usar um argumento de limite. Com efeito, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por definição, temos

$$\widehat{K}_{n/2}(\varphi) := K_{n/2}(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{n/2}\widehat{\varphi}.$$

Seja $0 < s < n/2$. Denote $B = B(0, 1)$ e escreva

$$K_s\widehat{\varphi} = f_s + g_s := \chi_B K_s\widehat{\varphi} + \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B} K_s\widehat{\varphi}.$$

Claro que

$$|f_s| \leq \chi_B K_{n/2}\widehat{\varphi} \tag{3.43}$$

e

$$|g_s| \leq \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B} \widehat{\varphi}. \quad (3.44)$$

O limitante em (3.44) está claramente em L^1 . Por outro lado, pela Proposição 2.6.4, sabemos que $K_{n/2} \in L^1_{loc}$. Além disso, pela continuidade de $\widehat{\varphi}$, temos que o limitante em (3.43) também está em L^1 . Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo Corolário, 3.4.4 obtemos

$$\widehat{K_{n/2}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{n/2} \widehat{\varphi} = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} \int_{\mathbb{R}^n} K_s \widehat{\varphi} = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} \widehat{K_s}(\varphi) = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} [c(n, s) K_{n-s}(\varphi)]. \quad (3.45)$$

Para finalizar, vamos mostrar que $\lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} c(n, s) = 1$. Com efeito, seja $n/2 < s < n$ e $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. É fato que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{\varphi} = \varphi$ (FOLLAND, 1999, Proposição 8.24), dessa forma, pelo Corolário 3.4.4, obtemos $\int_{\mathbb{R}^n} K_s \widehat{\varphi} = c(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} \varphi$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_s \varphi = c(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} \varphi. \quad (3.46)$$

De maneira análoga a que fizemos em (3.45), podemos concluir que $\lim_{s \rightarrow n/2^+} \int_{\mathbb{R}^n} K_s \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} K_{\frac{n}{2}} \varphi$. Como $n - s < n/2$; denotando $\tilde{s} = n - s$, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} K_{n-s}(\varphi) = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} \varphi = \lim_{\tilde{s} \rightarrow \frac{n}{2}^+} \int_{\mathbb{R}^n} K_{\tilde{s}} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} K_{n/2} \varphi = K_{n/2}(\varphi). \quad (3.47)$$

Tomando o limite em (3.46) quando $s \rightarrow \frac{n}{2}^-$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_{n/2} \varphi = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} \int_{\mathbb{R}^n} K_s \varphi = \lim_{s \rightarrow \frac{n}{2}^-} \left[c(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} \varphi \right]. \quad (3.48)$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \frac{n}{2}^-} c(n, s) = \lim_{n \rightarrow \frac{n}{2}^-} \frac{c(n, s) K_{n-s}(\varphi)}{K_{n-s}(\varphi)} = 1. \quad (3.49)$$

Portanto, aplicando em (3.45) o que concluímos em (3.47) e (3.49), obtemos

$$\widehat{K_{n/2}}(\varphi) = K_{n/2}(\varphi),$$

e finalizamos a demonstração. □

A constante c ; dependendo de n e s , pode ser calculada explicitamente através das integrais em (3.46), a saber,

$$c = c(n, s) = \pi^{(s-n/2)} \frac{\Gamma(\frac{n-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})},$$

com $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, para todo $x > 0$. Como não iremos fazer nenhum uso destas constantes explicitamente não iremos exibir a prova, todavia o leitor pode consultar em (MATTILA, 2015, p.37).

Pelas propriedades da Proposição 2.6.5 e pelo Teorema 3.4.6 obtemos as identidades:

$$\widehat{\varphi K_s} = c\widehat{\varphi} * K_{n-s}, \quad (3.50)$$

e

$$\widehat{\varphi * K_s} = c\widehat{\varphi} K_{n-s}. \quad (3.51)$$

3.5 Transformadas de Fourier e energia de medidas

Nesta seção, iremos utilizar a transformada de Fourier do núcleo de Riesz K_s para mostrar uma fórmula que irá relacionar dimensão de Hausdorff de subconjuntos compactos do \mathbb{R}^n ao decaimento da transformada de Fourier de medidas suportadas no mesmo. Vimos em (3.38) que a s -energia de uma medida de Borel μ é definida como

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} (K_s * \mu) d\mu.$$

Teorema 3.5.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < s < n$. Então,

$$I_s(\mu) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx. \quad (3.52)$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com valores reais. Vamos mostrar inicialmente (3.52) para a medida $\nu = \varphi dm$. Com efeito,

$$I_s(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} (K_s * \nu)(y) d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_s(y-x) d\nu_x d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{-s} \varphi(x) \varphi(y) dx dy. \quad (3.53)$$

Defina $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Logo, pelo Teorema de Fubini e aplicando a mudança de variável $z = y - x$, obtemos

$$\begin{aligned} I_s(\nu) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{-s} \varphi(y-z) \varphi(y) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{-s} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(z-y) \varphi(y) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_s(z) (\tilde{\varphi} * \varphi)(z) dz \end{aligned}$$

Pelo Corolário A.1.13, sabemos que $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Além disso, pela Proposição A.1.12 - (ii) e (iii) também sabemos que $\widehat{\tilde{f}} = \widehat{f}$ e $\widehat{\bar{f}} = \overline{\widehat{f}}$. Portanto,

$$\tilde{\varphi} * \varphi = \tilde{\varphi} * \bar{\varphi} = \widehat{\tilde{\varphi}} * \widehat{\bar{\varphi}} = \widehat{\tilde{\varphi} \bar{\varphi}} = |\widehat{\varphi}|^2.$$

É de rápida verificação que $\widehat{\varphi} = \widehat{\nu}$. Utilizando a transformada de Fourier de K_s , vista no Teorema

3.4.6, obtemos

$$I_s(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} K_s |\widehat{\varphi}|^2 = c \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} |\widehat{\varphi}|^2 = c \int_{\mathbb{R}^n} K_{n-s} |\widehat{\nu}|^2,$$

isto é,

$$I_s(\nu) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\nu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx.$$

Para finalizar a prova, iremos aproximar uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ por medidas suaves. Mais precisamente, sejam $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\{\psi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ uma aproximação da identidade com $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ e $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi(x\epsilon^{-1})$ (veja a Observação 2.5.10). Defina a função $\varphi_\epsilon = \psi_\epsilon * \mu$. Lembre que ψ_ϵ é uma função positiva para cada $\epsilon > 0$. Portanto, o Corolário 2.5.9 assegura que $\varphi_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\nu_\epsilon = \varphi_\epsilon dm$. Pela Proposição 2.5.6 - (iii) constatamos que

$$\widehat{\nu}_\epsilon = \widehat{\varphi}_\epsilon = \widehat{\psi_\epsilon * \mu} = \widehat{\psi}_\epsilon \widehat{\mu}.$$

Portanto,

$$I_s(\nu_\epsilon) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}_\epsilon(x)|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx. \quad (3.54)$$

Como $\widehat{\psi}_\epsilon(x) = \widehat{\psi}(\epsilon x)$ (Proposição A.1.3 - (ii)), segue que $\widehat{\psi}_\epsilon(x) \rightarrow \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$. Além disso,

$$|\widehat{\psi}_\epsilon(x)|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} \leq \|\psi\|_{L^1}^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} = |\widehat{\mu}(x)|^2 K_{n-s}(x).$$

Se $|\widehat{\mu}|^2 K_{n-s} \in L^1$, então pelo Teorema de Convergência Dominada temos que o lado direito de (3.54) se aproxima de $c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Por outro lado, se $|\widehat{\mu}|^2 K_{n-s} \notin L^1$, pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\widehat{\psi}_\epsilon(x)|^2 \right) |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}_\epsilon(x)|^2 |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} dx. \end{aligned}$$

Logo, o lado direito de (3.54) diverge quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, em todo caso, obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_s(\nu_\epsilon) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n}. \quad (3.55)$$

Conforme já fizemos em (3.53), e notando que $K_s(y-x) = K_s(x-y)$, concluímos que

$$\begin{aligned} I_s(\nu_\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{-s} \varphi_\epsilon(x) \varphi_\epsilon(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-s} (\psi_\epsilon * \mu)(x) (\psi_\epsilon * \mu)(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|x-y|^{-s} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(x-z) d\mu_z \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(y-w) d\mu_w \right) dx dy, \end{aligned}$$

ou seja

$$I_s(\nu_\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} \psi_\epsilon(x - z) \psi_\epsilon(y - w) d\mu_z d\mu_w \right) dx dy. \quad (3.56)$$

Utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$I_s(\nu_\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} \psi_\epsilon(x - z) \psi_\epsilon(y - w) dx dy \right) d\mu_z d\mu_w. \quad (3.57)$$

Considerando as mudanças de variáveis $u = (x - z)/\epsilon$ e $v = (y - w)/\epsilon$, e lembrando que $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi(x\epsilon^{-1})$, a integral do parêntese de (3.57) se torna

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(v) dv, \quad \text{com } f_\epsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^n} |\epsilon(u - v) + z - w|^{-s} \psi(u) \psi(v) du.$$

É de rápida verificação que $|\epsilon(u - v) + z - w|^{-s} \leq |z - w|^{-s}$. Logo,

$$|f_\epsilon(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} \psi(u) \psi(v) du = |z - w|^{-s} \psi(v) \int \psi(u) du = |z - w|^{-s} \psi(v). \quad (3.58)$$

Assim, f_ϵ é limitada por uma função integrável na variável v e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(v) = \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} \psi(u) \psi(v) du,$$

pois, de maneira análoga, podemos limitar $|\epsilon(u - v) + z - w|^{-s} \psi(u) \psi(v)$ por uma função integrável da variável u . Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} \psi(u) \psi(v) dudv \\ &= |z - w|^{-s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(u) \psi(v) dudv, \end{aligned}$$

ou seja

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(v) dv = |z - w|^{-s}. \quad (3.59)$$

Com isto, já sabemos para qual valor a sequência do parêntese de (3.57) converge. Só precisamos nos certificar que podemos limitar a função dos parênteses por uma função integrável em $L^1(\mu \times \mu)$ para podermos usar o Teorema da Convergência Dominada e finalizar. Utilizando (3.58), temos que a integral dos parênteses em (3.57) tem a seguinte limitação

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} \psi_\epsilon(x - z) \psi_\epsilon(y - w) dx dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_\epsilon(v)| dv \leq \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} \psi(v) dv = |z - w|^{-s},$$

dessa forma, se supormos que $I_s(\mu) < \infty$ temos que $|z - w|^{-s} \in L^1(\mu \times \mu)$, pois

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} K_s * \mu d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu_x d\mu_y.$$

Com isto podemos usar o Teorema da Convergência Dominada em (3.57) e obter

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_s(\nu_\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} d\mu_z d\mu_w = I_s(\mu).$$

Este resultado, em conjunto com (3.55), implica

$$I_s(\mu) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n}.$$

Só nos resta argumentar o caso em que $I_s(\mu) = \infty$. Utilizando o limite em (3.59) e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} d\mu_z d\mu_w &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} \psi_\epsilon(x - z) \psi_\epsilon(y - w) dx dy d\mu_z d\mu_w \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} \psi_\epsilon(x - z) \psi_\epsilon(y - w) dx dy \right) d\mu_z d\mu_w. \end{aligned}$$

Além disso, substituindo a integral acima pelo que concluímos em (3.57) e, em seguida, usando (3.55), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |z - w|^{-s} d\mu_z d\mu_w \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} I_s(\nu_\epsilon) = c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n}.$$

Se $I_s(\mu) = \infty$, então

$$c \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{s-n} = \infty$$

e finalizamos a demonstração. \square

3.5.1 Conjuntos de Salem e dimensão de Fourier

Nesta seção, iremos fazer uma breve introdução dos conjuntos de Salem. Estes conjuntos surgem após algumas relações que iremos obter com os resultados aqui apresentados.

Proposição 3.5.2. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < s < n$. Se

$$|\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2}, \quad (3.60)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então $I_t(\mu) < \infty$ para todo $0 < t < s$.

Demonstração. Seja $0 < t < s$ e denote $B = B(0, 1)$. Pelo Teorema 3.5.1, podemos escrever

$$I_t(\mu) = c_t \int_B |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{t-n} dx + c_t \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{t-n} dx. \quad (3.61)$$

Pela Proposição 2.5.3, sabemos que $\widehat{\mu}$ é contínua. Logo, esta assume um máximo em \overline{B} . Como $0 < n - t < n$, pela Proposição 2.6.4, sabemos que $K_{n-t} \in L_{loc}^1$. Desta forma, a primeira integral em (3.61) é finita. Por outro lado, utilizando a hipótese (3.60) e o Teorema 2.4.16 (integração em

coordenadas polares), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |\widehat{\mu}(x)|^2 |x|^{t-n} dx &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |x|^{t-s-n} dx \\ &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_1^\infty r^{t-s-1} dr \\ &= \frac{\sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{s-t}, \end{aligned}$$

e finalizamos a demonstração. \square

Corolário 3.5.3. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e denote $K = \text{supp}(\mu)$. Se $|\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2}$, então $s \leq \dim_{\text{H}}(K)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.5.2 temos que

$$(0, s) \subset J = \{r \geq 0 : \exists \mu \in \mathcal{M}(K), I_r(\mu) < \infty\}.$$

Por outro lado, a Proposição 3.3.3 diz que $\sup(J)$ é a dimensão de Hausdorff de K , conclusão $s \leq \dim_{\text{H}}(K)$. \square

Observação 3.5.4. Se $\dim_{\text{H}}(A) = s$ e $\mu \in \mathcal{M}(A)$, então (3.60) é o melhor decaimento que podemos esperar para $\widehat{\mu}$. Isto é, se $s_0 > s$, então $|x|^{-s_0/2} \leq |x|^{s/2}$ para $|x| > 1$, porém não pode ocorrer o decaimento

$$|\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s_0/2},$$

para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Caso contrário, pela Proposição 3.5.3, concluiríamos que $\dim_{\text{H}}(A) \geq s_0$, isto é, $s \geq s_0$, o que não ocorre.

Definição 13. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Salem se, para cada $s < \dim_{\text{H}}(A)$, existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}(A)$ com o decaimento

$$|\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definição 14. A dimensão de Fourier de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é o número

$$\dim_F(A) = \sup_{0 < s < n} \{s : \exists \mu \in \mathcal{M}(A), |\widehat{\mu}(x)| \lesssim |x|^{-s/2}, x \neq 0\}.$$

Pelo Corolário 3.5.3 temos que $\dim_F(A) \leq \dim_{\text{H}}(A)$. Além disso, segue da definição de conjunto de Salem e da Proposição 3.3.3 que $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Salem se, e somente se, $\dim_F(A) = \dim_{\text{H}}(A)$.

Veremos no Capítulo 4 via o método da fase estacionária, que a medida de superfície σ de uma superfície regular S com curvatura Gaussiana não nula tem o decaimento local

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{(n-1)}{2}}, \quad (3.62)$$

ou seja, S é um conjunto de Salem já que $\dim_{\mathbb{H}}(S) = n - 1$, conforme Proposição 3.1.10.

Vejam um Exemplo de um conjunto suave que não é de Salem.

Exemplo 3.5.5. Sejam P um subespaço do \mathbb{R}^n de dimensão $m < n$ e $A \subset P$. Pelo Exemplo 2.4.26 P tem curvatura Gaussiana nula. Vamos mostrar que, para todo $\mu \in \mathcal{M}(A)$, a transformada de Fourier μ não tende a zero no infinito. De fato, pela relação (2.62) podemos supor, sem perda de generalidade, que $m = n - 1$ e $P = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Dessa forma, pelo Teorema de Fubini, temos

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_A e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_x = \int_A e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} d\mu_x,$$

com $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ e $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)$. Dessa forma, $\widehat{\mu}$ não depende da última coordenada de ξ . Logo

$$\widehat{\mu}(0, \dots, 0, r) = \mu(A).$$

Com isto não ocorre $\lim_{r \rightarrow \infty} |\widehat{\mu}(0, \dots, 0, r)| = 0$. Logo, concluímos que $\dim_F(A) = 0$. Portanto, como $\dim_{\mathbb{H}}(A) = n - 1$ (veja Proposição 3.1.10), o conjunto A não pode ser um conjunto de Salem.

Veremos com mais detalhes na Seção 6.2.2.1, que o conjunto de Cantor $C_{1/3}$ é um conjunto não suave que não é de Salem.

Construir conjuntos de Salem não suaves é uma tarefa extremamente delicada. Por isso, reservamos a Seção 6.2.3 para construir um conjunto de Salem não suave e não determinístico. O exemplo a seguir, foi o primeiro conjunto de Salem determinístico construído. O mesmo foi construído por Kauffman em (KAUFFMAN, 1981).

Exemplo 3.5.6. Dado $\alpha > 0$, seja E_α o conjunto dos números $x \in \mathbb{R}$ tais que para infinitos racionais p/q vale

$$|x - p/q| \leq q^{-(2+\alpha)}.$$

Temos que E_α é um conjunto de Salem com

$$\dim_{\mathbb{H}}(E_\alpha) = \frac{2}{2 + \alpha}.$$

A prova deste fato é bastante delicada e por isso não iremos exibir a prova. Para mais detalhes o leitor também pode consultar (MATTILA, 2015, Teorema 3.13).

DECAIMENTO DE FOURIER DE MEDIDAS SUPERFICIAIS

Neste capítulo, iremos obter um decaimento de medidas de superfície na esfera utilizando o comportamento assintótico das funções de Bessel. Além disso, vamos mostrar que em geral podemos obter o mesmo decaimento para medidas de superfícies regulares com curvatura não nula através do estudo de integrais oscilatórias. Esta seção será de suma importância para a formulação da conjectura da restrição na esfera.

4.1 Decaimento de Fourier de medida superficial na esfera

O objetivo principal desta seção é desenvolver ferramentas para encontrar a transformada de Fourier da medida de superfície sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Além disso, iremos utilizar a teoria de convergência fraca de medidas e o decaimento assintótico das funções de Bessel para mostrar que a medida de superfície σ^{n-1} sobre \mathbb{S}^{n-1} tem o decaimento

$$|\widehat{\sigma^{n-1}}(x)| \leq C(n)|x|^{-(n-1)/2}, \quad (4.1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Precisaremos do Teorema da Diferenciação de Lebesgue para calcular a transformada de Fourier da medida σ^{n-1} sobre \mathbb{S}^{n-1} . Seja f uma função em \mathbb{R}^n . Definimos o conjunto de Lebesgue de f por

$$L_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \right\}.$$

O Teorema da Diferenciação de Lebesgue (FOLLAND, 1999, Teorema 3.21) nos diz que se U é um boreliano contido em $B(0, 1)$ e $f \in L^1_{loc}$, então, para cada $x \in L_f$ temos

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_r(x))} \int_{E_r(x)} f(y) dy, \quad (4.2)$$

onde $E_r(x) = \{x + ry : y \in U\}$. Um fato que também será útil nesta seção é que, se $f \in L^1_{loc}$ então todos os pontos nos quais f é contínua estão em L_f (FOLLAND, 1999, p. 100). Além disso, se tomarmos $U = [0, 1)$ em (4.2) e se $f \in L^1_{loc}$ é contínua em x então

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(y) dy. \quad (4.3)$$

Observação 4.1.1. Pelo Corolário 2.3.27, se $\{\mu_k\}$ é uma sequência de medidas de Radon e μ é uma medida finita tal que $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ e $\mu_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{\mu}_k \rightarrow \widehat{\mu}$ pontualmente.

Lema 4.1.2. Seja $\mu_\delta = \delta^{-1} \mathcal{L}^n \llcorner A_\delta$, onde $A_\delta = B[0, 1 + \delta] \setminus B[0, 1]$. Então,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \varphi d\mu_\delta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi d\sigma^{n-1}, \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, $\mu_\delta \xrightarrow{w} \sigma^{n-1}$.

Demonstração. Para $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos naturalmente que

$$\int \varphi d\mu_\delta = \delta^{-1} \int_{A_\delta} \varphi d\mathcal{L}^n. \quad (4.4)$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \chi_{A_\delta} d\mathcal{L}^n = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(ry) \chi_{A_\delta}(ry) r^{n-1} d\sigma_y^{n-1} dr.$$

É de rápida verificação que, para $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $r > 0$ vale $\chi_{A_\delta}(ry) = \chi_{(1, 1+\delta]}(r)$. Com isto, e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\delta^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \chi_{A_\delta} d\mathcal{L}^n = \delta^{-1} \int_1^{1+\delta} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(ry) r^{n-1} d\sigma_y^{n-1} dr.$$

Como $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ segue do Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares) que a aplicação $\psi(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(ry) r^{n-1} d\sigma(y)$ está em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pois, dado o compacto $[a, b]$ temos $\int_a^b \psi(r) dr \leq \|\varphi\|_1$. Com isto, fazendo $\delta \rightarrow 0$, por (4.3) e por (4.4), temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \varphi d\mu_\delta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi d\sigma^{n-1}, \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Por fim, como $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ segue que $\mu_\delta \xrightarrow{w} \sigma^{n-1}$. □

Teorema 4.1.3. A transformada de Fourier da medida σ^{n-1} sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} é dada por

$$\widehat{\sigma}^{n-1}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|). \quad (4.5)$$

Além disso, o seguinte decaimento é válido:

$$|\widehat{\sigma}^{n-1}(x)| \leq C(n)|x|^{-(n-1)/2}. \quad (4.6)$$

Demonstração. Aplicando a fórmula do Teorema A.1.32 à função radial $\chi_{A_\delta}(x) = \chi_{(1,1+\delta]}(|x|)$ e multiplicando δ^{-1} , obtemos

$$\delta^{-1}\widehat{\chi_{A_\delta}}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2}\delta^{-1}\int_1^{1+\delta} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s)s^{n/2}ds.$$

Por outro lado, temos

$$\widehat{\mu_\delta}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_\delta = \delta^{-1} \int_{A_\delta} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mathcal{L}_\xi^n = \delta^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\delta}(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mathcal{L}_\xi^n = \delta^{-1}\widehat{\chi_{A_\delta}}(x).$$

Portanto, deduzimos que

$$\widehat{\mu_\delta}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2}\delta^{-1}\int_1^{1+\delta} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s)s^{n/2}ds.$$

Usando o Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares) é de rápida verificação que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(\mathbb{R}^n) = \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}). \quad (4.7)$$

Pelo Lema 4.1.2, temos que $\mu_\delta \xrightarrow{w} \sigma^{n-1}$. Logo, segue da Observação 4.1.1 e de (4.7) que $\widehat{\mu_\delta} \rightarrow \widehat{\sigma}^{n-1}$ pontualmente quando $\delta \rightarrow 0$. Com isto e por (4.3) obtemos a transformada de Fourier da medida σ^{n-1} :

$$\widehat{\sigma}^{n-1}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|).$$

Por fim, utilizando a Proposição A.1.34 - (iv), obtemos

$$|\widehat{\sigma}^{n-1}(x)| \leq C(n)|x|^{(1-n)/2}.$$

□

A razão para o bom decaimento (4.6) é a curvatura da esfera. Veremos em seções posteriores que a transformada de Fourier de medidas de superfícies regulares com curvatura Gaussiana não nula se comportam essencialmente como a esfera. Além disso, veremos que tal decaimento é o melhor possível. Vimos no Exemplo 3.5.5 como a falta de curvatura pode afetar o decaimento da transformada de Fourier de uma medida, mais precisamente, mostramos que se P é um subespaço do \mathbb{R}^n de dimensão $m < n$ então, para todo $\mu \in \mathcal{M}(A)$, a transformada de

Fourier μ não tende a zero no infinito.

Iremos ver em nas seções seguintes que o decaimento (4.6) é válido para a medidas de superfícies regulares mais gerais e, para tanto, iremos utilizar apenas a teoria das integrais oscilatórias. Finalizamos esta seção com uma característica da transformada de Fourier da medida σ^{n-1} , a qual será importante quando tratarmos da conjectura da restrição na esfera.

Seja f uma função complexa e g uma função real positiva. Utilizaremos a notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow \infty$ para dizer que existe uma constante positiva M e x_0 tal que

$$|f(x)| \leq Mg(x), \forall x > x_0. \quad (4.8)$$

Proposição 4.1.4. A transformada de Fourier da medida de superfície na esfera \mathbb{S}^{n-1} $\widehat{\sigma^{n-1}}$ está em $L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q > 2n/(n-1)$. Além disso, $\widehat{\sigma^{n-1}} \notin L^{2n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Usando decaimento (4.6) e o Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares) temos que $\widehat{\sigma^{n-1}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q > 2n/(n-1)$. Por outro lado, tomando $m = (n-2)/2$ e $t = 2\pi|x|$ na Observação A.1.35, concluímos que

$$\begin{aligned} J_{(n-2)/2}(2\pi|x|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2\pi|x|)^{-1/2} \cos\left(2\pi|x| - \frac{\pi(n-2)}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O((2\pi|x|)^{-3/2}) \\ &= \pi^{-1}|x|^{-1/2} \cos(2\pi|x| - \lambda(n)) + O(|x|^{-3/2}), \end{aligned}$$

com $\lambda(n) = \frac{\pi(n-3)}{4}$. Usando a expressão de $\widehat{\sigma^{n-1}}$ vista no Teorema 4.1.3, escreva

$$\widehat{\sigma^{n-1}}(x) = g(x) + h(x),$$

com

$$g(x) = c(n)|x|^{-\frac{(n-2)}{2}} [J_{(n-2)/2}(2\pi|x|) - \pi^{-1}|x|^{-\frac{1}{2}} \cos(2\pi|x| - \lambda(n))]$$

e

$$h(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2} [\pi^{-1}|x|^{-1/2} \cos(2\pi|x| - \lambda(n))].$$

Vamos mostrar que $g \in L^{2n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ e $h \notin L^{2n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. De fato, naturalmente existe $r_0 > 0$ tal que

$$|J_{(n-2)/2}(2\pi|x|) - \pi^{-1}|x|^{-1/2} \cos(2\pi|x| - \lambda(n))| \lesssim |x|^{-3/2},$$

sempre que $|x| > r_0$. Com isso, obtemos

$$|g(x)| \lesssim |x|^{-\frac{(n-2)}{2}} |x|^{-\frac{3}{2}} = |x|^{-\frac{(n+1)}{2}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x| > r_0$, conseqüentemente,

$$|g(x)|^{\frac{2n}{(n-1)}} \lesssim |x|^{\frac{-(n+1)n}{n-1}}.$$

Utilizando a Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B[0, r_0]} |x|^{\frac{-(n+1)n}{(n-1)}} dx &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{r_0}^{\infty} r^{\frac{-(n+1)n}{n-1} + n-1} dr \\ &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \left[-\frac{n-1}{2n} r^{\frac{-2n}{n-1}} \right]_{r_0}^{\infty} \\ &= \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \left[\frac{n-1}{2n} r_0^{\frac{-2n}{n-1}} \right] < \infty \end{aligned}$$

e, com isso, concluímos que $|g|^{2n/(n-1)}$ é integrável em $\mathbb{R}^n \setminus B[0, r_0]$. Além disso, $|g|^{2n/(n-1)}$ é integrável em $B[0, 1]$, uma vez que a mesma é o produto de funções contínuas com o núcleo de Riesz $K_{(n-2)n/(n-1)}$, o qual está em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ pela Proposição 2.6.4. Com isso, concluímos que $g \in L^{2n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. Provemos o que afirmamos para a função h . Naturalmente,

$$|h(x)|^{\frac{2n}{(n-1)}} = C(n)|x|^{-n} |\cos(2\pi|x| - \lambda(n))|^{\frac{2n}{(n-1)}},$$

com $C(n) = [c(n)\pi^{-1}]^{2n/(n-1)}$. Seja M uma constante dada por

$$M = \min_{x \in B[0, 1]} \{ |\cos(2\pi|x| - \lambda(n))|^{\frac{2n}{(n-1)}} \}.$$

Utilizando o Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), obtemos

$$\int_{B(0, 1)} |x|^{-n} dx = \infty.$$

Logo, $|h|^{2n/(n-1)}$ não pode ser integrável em \mathbb{R}^n , pois, como $M \leq |\cos(2\pi|x| - \lambda(n))|^{2n/(n-1)}$, para todo $x \in B[0, 1]$, em particular $M \leq |\cos(2\pi|x| - \lambda(n))|^{2n/(n-1)}$, para todo $x \in B(0, 1)$. Portanto,

$$|x|^{-n} M \leq |x|^{-n} |\cos(2\pi|x| - \lambda(n))|^{\frac{2n}{(n-1)}}$$

para todo $x \in B(0, 1)$. Consequentemente,

$$C(n)M \int_{B(0, 1)} |x|^{-n} dx \leq \int_{B(0, 1)} |h(x)|^{\frac{2n}{(n-1)}} dx \leq \|h\|_{L^{\frac{2n}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n}{(n-1)}}.$$

Por fim, $\widehat{\sigma^{n-1}}$ não pode pertencer a $L^{2n/(n-1)}$, pois, se isto fosse verdade, teríamos que h estaria em tal espaço, uma vez que $h = \widehat{\sigma^{n-1}} - g$ e com isso concluímos a demonstração. \square

4.2 Integrais Oscilatórias

Nesta seção, iremos estudar integrais do tipo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) dx, \lambda > 0, \quad (4.9)$$

e em particular seu comportamento quando $\lambda \rightarrow \infty$. Estas integrais são conhecidas como integrais oscilatórias. A função φ é chamada de fase e ψ de amplitude. Iremos supor que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Apesar de requerermos toda essa regularidade de φ e ψ , algumas vezes no texto não precisaremos de tanto. Iremos obter uma estimativa para a transformada de Fourier da medida de superfície na esfera utilizando funções de Bessel. A referência principal para esta seção foi (MATTILA, 2015). Como leitura complementar, também utilizamos (WOLFF, 2003).

4.2.1 Método da fase não-estacionária

Dizemos que a fase φ é **não-estacionária** quando o gradiente $\nabla\varphi$ não se anula no suporte da amplitude ψ , ou seja, quando $\nabla\varphi(x) \neq 0$, para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Sob essas hipótese iremos mostrar que a integral em (4.9) tem o decaimento

$$|I(\lambda)| \leq C\lambda^{-N},$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, com C sendo uma constante dependendo de φ, ψ, N .

Antes de provarmos isto de maneira geral, iremos fazer o caso unidimensional.

Teorema 4.2.1. Suponha que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se $\varphi'(x) \neq 0$ quando $x \in \text{supp}(\psi)$, então, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi, N)\lambda^{-N},$$

sempre que $\lambda > 0$.

Demonstração. Começemos mostrando, indutivamente, que

$$I(\lambda) = (-1)^N \frac{\lambda^{-N}}{i^N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^N (F_k^N \circ \gamma_N)(x) \psi^{(k)} e^{i\lambda\varphi(x)} dx, \quad (4.10)$$

com $\gamma_N(x) = (\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(N+1)}(x))$ e $F_k^N : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Como φ' não se anula em $\text{supp}(\psi)$ podemos reescrever $I(\lambda)$ da seguinte forma:

$$I(\lambda) = \frac{\lambda^{-1}}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda\varphi(x)}) dx.$$

Com isto, integrando por partes e usando o fato de $\text{supp}(\psi)$ ser compacto deduzimos que

$$I(\lambda) = -\frac{\lambda^{-1}}{i} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} \right) dx = -\frac{\lambda^{-1}}{i} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{\psi'(x)\varphi'(x) + \psi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} dx. \quad (4.11)$$

Dessa forma, definindo $F_1(t, x) = x/t^2$, e $F_2(t, x) = 1/t$, com $(t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ obtemos

$$(F_1 \circ \gamma_1)(x)\psi(x) + (F_2 \circ \gamma_1)(x)\psi'(x) = \frac{\psi'(x)\varphi'(x) + \psi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2}.$$

Logo, (4.11) vale para $N = 1$. Supondo que (4.10) é válido para $N - 1$ concluímos que

$$I(\lambda) = (-1)^{N-1} \frac{\lambda^{-(N-1)}}{i^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{N-1} (F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})(x)\psi^{(k)} e^{i\lambda\varphi(x)} dx.$$

Analogamente ao que já fizemos, podemos reescrever $I(\lambda)$ da seguinte forma:

$$I(\lambda) = (-1)^{N-1} \frac{\lambda^{-N}}{i^N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\varphi'(x)} (F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})(x)\psi^{(k)} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda\varphi(x)}) dx. \quad (4.12)$$

Vimos em (2.3) que

$$\text{supp}(fg) \subset \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g),$$

para quaisquer funções f, g . Além disso, pelo Lema A.1.7 a função $\psi^{(k)}$ tem suporte compacto para todo k e, portanto, $(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})\psi^{(k)}$ tem suporte compacto. Com isso, utilizando integração por partes em (4.12), obtemos

$$I(\lambda) = (-1)^N \frac{\lambda^{-N}}{i^N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})\psi^{(k)}}{\varphi'(x)} \right)' (x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx.$$

Vamos mostrar que as derivadas do somatório da integral acima podem ser escritas como $F_k^N \circ \gamma_N$, para alguma função diferenciável F_k^N . De fato, como

$$\gamma_{N-1}(x) = (\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(N)}(x)),$$

deduzimos que

$$\gamma'_{N-1}(x) = (\varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(N+1)}(x)).$$

Escrevendo os elementos de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{N-1}$ como (t, y_1, \dots, y_{N-1}) , pela regra da cadeia, obtemos

$$(F_k^{N-1} \circ \gamma)' = \frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial t} (\lambda_{N-1})\varphi'' + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial y_j} (\lambda_{N-1})\varphi^{(j+2)}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})}{\varphi'} \right)' &= \frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})'\varphi' - (F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})\varphi''}{\varphi'^2} \\ &= \frac{\frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial t} (\lambda_{N-1})\varphi''}{\varphi'} + \frac{\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial y_j} (\lambda_{N-1})\varphi^{(j+2)}}{\varphi'} - \frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})\varphi''}{\varphi'^2}. \end{aligned}$$

Considerando $(r, x, x_N) = (r, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{N-1} \mathbb{R}^N$, defina as funções

$$X_k^N(r, x, x_N) = r^{-1} \frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial t}(r, x) x_1,$$

$$Y_k^N(r, x, x_N) = r^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial F_k^{N-1}}{\partial y_j}(r, x) x_{j+1},$$

e

$$Z_k^N(r, x, x_N) = -r^2 F_k^{N-1}(r, x) x_1.$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})}{\varphi'} \right)' = F_k^N \circ \gamma_N, \quad (4.13)$$

com $F_k^N = (X_k^N + Y_k^N + Z_k^N)$. Por outro lado, definindo

$$F_{k+1}^N(r, x, x_N) = \frac{F_k^{N-1}(r, x)}{r},$$

obtemos

$$\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})}{\varphi'} = F_{k+1}^N \circ \gamma_N. \quad (4.14)$$

Portanto, por (4.13) e (4.14) e pela regra da cadeia, concluímos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1}) \psi^{(k)}}{\varphi'} \right)' &= \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})}{\varphi'} \right)' \psi^{(k)} + \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1})}{\varphi'} \right) \psi^{(k+1)} \\ &= (F_k^N \circ \gamma_N) \psi^{(k)} + (F_{k+1}^N \circ \gamma_N) \psi^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{(F_k^{N-1} \circ \gamma_{N-1}) \psi^{(k)}}{\varphi'(x)} \right)' (x) = \sum_{k=1}^{N-1} (F_k^N \circ \gamma_N) \psi^{(k)} + \left(\sum_{k=1}^{N-1} (F_{k+1}^N \circ \gamma_N) \right) \psi^{(k+1)}.$$

Logo, concluímos (4.10). Portanto,

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi, N) \lambda^{-N},$$

com

$$C(\varphi, \psi, N) = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N (F_k^N \circ \gamma_N)(x) \psi^{(k)} \right| dx. \quad (4.15)$$

Com isto, finalizamos a demonstração. \square

Estamos prontos para provar o caso geral.

Teorema 4.2.2. Suponha que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se $\nabla \varphi(x) \neq 0$ quando

$x \in \text{supp}(\psi)$, então, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi, N)\lambda^{-N}, \quad \forall \lambda > 0$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \neq 0$, para todo $x \in \text{supp}(\psi)$, com $j = 1 \dots, n$. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

e

$$C = \{\tilde{x} : x \in \text{supp}(\psi)\}.$$

Além disso, para cada $\tilde{x} \in C$ defina

$$\varphi_{\tilde{x}}(x_j) = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

e

$$\psi_{\tilde{x}}(x_j) = \psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

para todo $x_j \in \mathbb{R}$. Dessa forma, pelo Teorema de Fubini, podemos escrever

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx \\ &= \int_{\text{supp}(\psi)} e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx \\ &= \int_C \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\varphi_{\tilde{x}}(x_j)}\psi_{\tilde{x}}(x_j)dx_j \right) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema 4.2.1 à integral dos parênteses, obtemos

$$|I(\lambda)| \leq \left[\int_C C(\varphi_{\tilde{x}}, \psi_{\tilde{x}}, N)d\tilde{x} \right] \lambda^{-N}.$$

Note que

$$\varphi_{\tilde{x}}^{(k)}(x_j) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_j^k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

e

$$\psi_{\tilde{x}}^{(k)}(x_j) = \frac{\partial^k \psi}{\partial x_j^k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Logo, por (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} C(\varphi_{\tilde{x}}, \psi_{\tilde{x}}, N) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N (F_k^N \circ \tilde{\gamma}_N)(x_j) \tilde{\psi}^{(k)}(x_j) \right| dx_j \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{A_{\tilde{x}}^k} |(F_k^N \circ \tilde{\gamma}_N)(x_j) \tilde{\psi}^{(k)}(x_j)| dx_j, \end{aligned}$$

onde $A_{\tilde{x}}^k = \text{supp} \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x_j^k} (x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)$ e

$$\tilde{\gamma}_N(x_j) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial^{N+1} \varphi}{\partial x_j^{N+1}} \right),$$

e cada derivada está aplicada no vetor $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$. É de rápida verificação que, para cada $k = 1, \dots, N$, vale a estimativa uniforme

$$\int_{A_{\tilde{x}}^k} |(F_k^N \circ \tilde{\gamma}_N)(x_j) \tilde{\psi}^{(k)}(x_j)| dx_j \leq C_k(\varphi, \psi, N), \quad (4.16)$$

com

$$C_k(\varphi, \psi, N) = \max_{\text{supp} \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x_j^k} \right)} \{|F_k^N \circ \gamma_N^j|\} \max_{\mathbb{R}^n} \left\{ \left| \frac{\partial^k \psi}{\partial x_j^k} \right| \right\} \mathcal{L}^n \left(\text{supp} \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x_j^k} \right) \right) \quad (4.17)$$

e

$$\gamma_N^j(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial^{N+1} \varphi}{\partial x_j^{N+1}}(x) \right), \quad (4.18)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $C(\varphi_{\tilde{x}}, \psi_{\tilde{x}}, N)$ é limitada uniformemente por uma constante dependendo apenas de φ, ψ (e suas derivadas) e N , digamos, $C(\varphi, \psi, N)$. Com isto, concluímos

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi, N) \lambda^{-N}.$$

Provemos o caso geral. Por hipótese, dado $x \in \text{supp}(\psi)$ sabemos que $\nabla \varphi(x) \neq 0$. Logo, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \neq 0$ par algum $j = 1, \dots, n$ e ;por continuidade, existe uma vizinhança U_x de x tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(y) \neq 0$, para todo $y \in U_x$. Com isto, $\{U_x : x \in \text{supp}(\psi)\}$ é uma cobertura aberta para $\text{supp}(\psi)$. Logo, pela sua compacidade, podemos dizer que existem abertos B_1, \dots, B_m , cobrindo $\text{supp}(\psi)$ tais que, para cada i , existe um $j_i = 1, \dots, n$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_i}}(x) \neq 0,$$

para todo $x \in B_i$. Considerando uma partição da unidade $\{h_i\}_{i=1}^m$ subordinada a $\{B_i\}_{i=1}^m$ (FOLLAND, 1999, Teorema 4.41) consistindo de funções com suporte compacto, isto é,

$\text{supp}(h_i) \subset B_i$ e $\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1$, para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\text{supp}(\psi)} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) dx \\ &= \int_{\text{supp}(\psi)} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) \sum_{i=1}^m h_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{B_i} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi_i(x) dx, \end{aligned}$$

com $\psi_i = \psi h_i$. Para concluir a demonstração, basta aplicar o que provamos inicialmente a cada integral da soma anterior. \square

4.2.2 Método da fase estacionária

Vimos anteriormente que a integral (4.9) tem um decaimento rápido quando $\nabla\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Nesta seção, temos o objetivo de estudar o decaimento da mesma integral quando $\nabla\varphi$ se anula em algum ponto de $\text{supp}(\psi)$, ou seja, quando φ possui um ponto crítico em $\text{supp}(\psi)$. Quando isto ocorre dizemos que a fase φ é **estacionária**. Um ponto x_0 é chamado de crítico não degenerado de φ se $\nabla\varphi(x_0) = 0$ e o determinante da matriz Hessiana de φ no ponto x_0 é não nulo, isto é, $\det(\text{Hess}_\varphi(x_0)) \neq 0$, com

$$\text{Hess}_\varphi(x_0) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Vamos mostrar que se todos os pontos críticos de φ em $\text{supp}(\psi)$ forem não degenerados, então

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi) \lambda^{-\frac{n}{2}},$$

para todo $\lambda > 0$. Inicialmente iremos mostrar o caso unidimensional.

Teorema 4.2.3. Suponha que $|\varphi^{(k)}(x)| \geq 1$ para todo $x \in [a, b]$, com k sendo um inteiro positivo. Defina $C_k = 5 \cdot 2^{k-1} - 2$. Se $k = 1$ e φ' é monótona, ou, $k \geq 2$, temos

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}}, \quad \lambda > 0. \quad (4.19)$$

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $k = 1$ e, sem perda de generalidade, que φ' é monótona crescente. Integrando por partes, deduzimos que

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \int_a^b \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda\varphi(x)}) dx = \frac{e^{i\lambda\varphi(b)}}{i\lambda\varphi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\varphi(a)}}{i\lambda\varphi'(a)} - \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} \right) dx.$$

Como, por hipótese, $|\varphi'(a)|, |\varphi'(b)| \geq 1$, obtemos

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2\lambda^{-1} + \lambda^{-1} \int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} \right) \right| dx. \quad (4.20)$$

Vamos mostrar a seguinte identidade:

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} \right) \right| dx = \left| \frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right|. \quad (4.21)$$

Com efeito, é claro que φ'' não troca de sinal em $[a, b]$, pois, se existissem $c \in [a, b]$ e $\delta > 0$ tais que $\varphi''(x) > 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ e $\varphi''(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$, pelo Teorema do Valor Médio; e usando o fato de φ' ser crescente, poderíamos encontrar $r \in (c - \delta, c)$ tal que

$$\varphi''(r) = \frac{\varphi'(c) - \varphi'(c - \delta)}{\delta} \geq 0,$$

e, com isso, teríamos uma contradição. Portanto, $\varphi'' \leq 0$ em $[a, b]$ ou $\varphi'' \geq 0$ em $[a, b]$. Dessa forma,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} \right) = -\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2}$$

também não troca de sinal em $[a, b]$. Portanto,

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} \right) \right| dx = \pm \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varphi'(x)} \right) dx.$$

e com isso concluímos (4.21). Além disso, por (4.20), obtemos

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2\lambda^{-1} + \lambda^{-1} \left| \frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right|.$$

Como φ' é contínua e $|\varphi'(x)| \geq 1$ para todo $x \in [a, b]$, temos que φ' não troca de sinal em $[a, b]$, pois, se houvesse $x, y \in [a, b]$ tais que $\varphi'(x) > 0$ e $\varphi'(y) < 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existiria $r \in [x, y]$ tal que $\varphi'(r) = 0$, o que nunca pode acontecer. Portanto, como φ' é crescente temos que $\varphi'(a) \leq \varphi'(b)$ e

$$\left| \frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right| \leq 1.$$

De fato, se $\varphi'(a) > 0$ então $-\varphi'(b) < 0$. Logo, como $|\varphi'(a)| \geq 1$, obtemos

$$\left| \frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right| = \frac{1}{\varphi'(a)} - \frac{1}{\varphi'(b)} \leq 1 + 0 = 1.$$

Por outro lado, se $\varphi'(b) \leq 0$, então $\varphi'(a) \leq 0$. Logo, como $|\varphi'(b)| \geq 1$, obtemos

$$\left| \frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)} \right| = \frac{1}{\varphi'(a)} - \frac{1}{\varphi'(b)} \leq 0 + 1 = 1.$$

Com isso,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2\lambda^{-1} + \lambda^{-1} = C_1\lambda^{-1},$$

com $C_1 = 5 \cdot 1^{-1} - 2 = 3$.

Agora, vamos supor que $k \geq 2$ é tal que $|\varphi^{(k)}| \geq 1$ e que o resultado é válido para $k - 1$. Com isso, temos que $\varphi^{(k)}(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, a função $\varphi^{(k)}$ não troca de sinal. Supondo, sem perda de generalidade, que $\varphi^{(k)} > 0$ em $[a, b]$; mais precisamente $\varphi^{(k)} \geq 1$, a função $\varphi^{(k-1)}$ é estritamente crescente. Com isso, percebe-se que existe um único $c \in [a, b]$ tal que o mínimo da função $|\varphi^{(k-1)}|$ ocorre em um dos casos: $c = a$, $c = b$ ou $\varphi^{(k-1)}(c) = 0$, veja Figura 5.

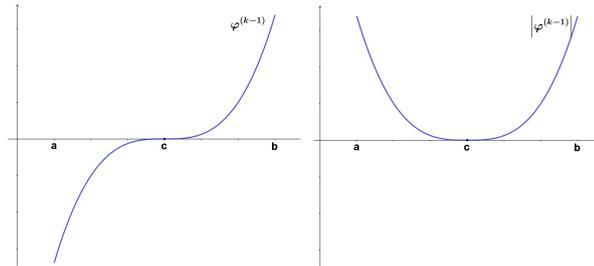


Figura 5 – Ponto crítico da função $|\varphi^{(k-1)}|$

Vamos prosseguir supondo que o ponto crítico de $\varphi^{(k-1)}$ está no interior de $[a, b]$. Por outro lado, dado $\delta > 0$ tal que $[c - \delta, c + \delta] \subset [a, b]$ afirmamos que a estimativa

$$|\varphi^{(k-1)}(x)| \geq \delta, \quad (4.22)$$

é válida para todo $x \in [a, b] \setminus (c - \delta, c + \delta)$. Com efeito, seja $x_0 \in [c + \delta, b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, seja $r \in (c, c + \delta)$ tal que

$$\varphi^{(k)}(r) = \frac{\varphi^{(k-1)}(c + \delta) - \varphi^{(k-1)}(c)}{\delta} = \frac{\varphi^{(k-1)}(c + \delta)}{\delta}.$$

Como $\varphi^{(k)} \geq 1$ em $[a, b]$ e $\varphi^{(k-1)}$ é crescente, obtemos

$$\delta \leq \delta\varphi^{(k)}(r) = \varphi^{(k-1)}(c + \delta) \leq \varphi^{(k-1)}(x_0).$$

De maneira análoga, supondo que $x_0 \in [a, c - \delta]$, concluímos que $\delta \leq -\varphi^{(k-1)}(x_0)$ e, com isso, concluímos (4.22). Dessa forma, $|(\delta^{-1}\varphi)^{(k-1)}| \geq 1$ tanto em $[a, c - \delta]$ quanto em $[c + \delta, b]$. Pela

hipótese de indução, obtemos

$$\left| \int_a^{c-\delta} e^{is\delta^{-1}\varphi(x)} dx \right| \leq C_{(k-1)} s^{-\frac{1}{(k-1)}}$$

e

$$\left| \int_{c+\delta}^b e^{is\delta^{-1}\varphi(x)} dx \right| \leq C_{(k-1)} s^{-\frac{1}{(k-1)}},$$

para todo $s > 0$. Em particular, tomando $s = \lambda\delta$ e observando que

$$\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2\delta,$$

obtemos

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2C_{(k-1)}(\lambda\delta)^{-\frac{1}{(k-1)}} + 2\delta.$$

Seja $\delta = \lambda^{-1/k}$. Naturalmente, se λ é suficientemente grande, então δ é pequeno e, portanto, podemos concluir que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2C_{(k-1)}(\lambda\lambda^{-\frac{1}{k}})^{-\frac{1}{(k-1)}} + 2\lambda^{-\frac{1}{k}} = 2C_{(k-1)}\lambda^{-\frac{1}{k}} + 2\lambda^{-\frac{1}{k}} = (2C_{(k-1)} + 2)\lambda^{-\frac{1}{k}},$$

finalizamos observando que $2C_{(k-1)} + 2 = C_k$. É importante notar que quando λ é suficientemente pequeno, a estimativa (4.19) é válida, mais precisamente,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq (b-a) \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}},$$

para λ pequeno. Por fim, para os casos em que $c = a$ ou $c = b$ podemos utilizar argumentos semelhantes para obter

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq C_{k-1}(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k-1}} + \delta,$$

e novamente tomamos $\delta = \lambda^{-1/k}$. □

Corolário 4.2.4. Sob as hipóteses do Teorema 4.2.3, para qualquer função suave $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vale a estimativa

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) dx \right| \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \left(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja F uma função definida por $F(x) = \int_a^x e^{i\lambda\varphi(t)} dt$, com $x \in (a, b]$. Logo,

utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx &= \int_a^b F'(x)\psi(x)dx \\ &= F(x)\psi(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\psi'(x)dx \\ &= F(b)\psi(b) - \int_a^b F(x)\psi'(x)dx, \end{aligned}$$

onde usamos que $F(a) = 0$. Dessa forma,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx \right| \leq |F(b)||\psi(b)| + \int_a^b |F(x)\psi'(x)|dx,$$

Pelo Teorema 4.2.3, temos que $|F(x)| \leq C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}$, para todo $x \in [a, b]$ e, com isso, obtemos o resultado. \square

Vejamos o resultado mais importante desta seção.

Teorema 4.2.5. Suponha que todos os pontos críticos de φ em $\text{supp}(\psi)$ são não degenerados. Então,

$$|I(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi)\lambda^{-\frac{n}{2}}, \quad (4.23)$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar o resultado para o caso em que

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)}\psi(x)dx,$$

com Q sendo um polinômio da forma

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2, \quad (4.24)$$

para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Mais precisamente, iremos mostrar indutivamente que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)}\psi(x)dx \right| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi(x)|dx \right), \quad (4.25)$$

com $|\alpha| \leq n$. Supondo que $n = 1$, o polinômio em questão tem a forma $Q(x) = x^2$. Logo, $Q''(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isto, supondo que $\text{supp}(\psi) \subset (-\delta, \delta)$ e $\psi(\delta) = 0$, pelo Corolário 4.2.4, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda Q(x)}\psi(x)dx \right| = \left| \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda x^2}\psi(x)dx \right| \leq C_2\lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\delta}^{\delta} |\psi'(x)|dx \right).$$

Com isto concluímos que (4.25) quando $n = 1$. Suponha que o resultado vale para $n - 1$. Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} \psi(x) dx \\ &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda(x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2)} \psi_\lambda(x_2, \dots, x_n) d_{(x_2, \dots, x_n)}, \end{aligned}$$

com

$$\psi_\lambda(x_2, \dots, x_n) = \lambda^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x_1^2} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1.$$

Naturalmente ψ_λ tem suporte compacto, pois ψ o tem. Além disso, segue do Teorema 2.3.16 - (ii) (Regra de Leibniz) que ψ_λ é suave. Logo, concluímos que $\psi_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{C})$. Portanto, pela hipótese de indução, obtemos

$$|I(\lambda)| \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\alpha \psi_\lambda(x_2, \dots, x_n)| d_{(x_2, \dots, x_n)} \right), \quad (4.26)$$

com $|\alpha| \leq n - 1$. Ainda, fixado (x_2, \dots, x_n) suponha que $\text{supp}(\partial^\alpha \psi(\cdot, x_2, \dots, x_n)) \subset (-r, r)$ e $\partial^\alpha \psi(r, x_2, \dots, x_n) = 0$. Logo, pelo Corolário 4.2.4 e Teorema 2.3.16 - (ii) (Regra de Leibniz), temos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \psi_\lambda(x_2, \dots, x_n) &= \lambda^{\frac{1}{2}} \int_{-r}^r e^{i\lambda x_1^2} \partial^\alpha \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{2}} C_2 \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(|\partial^\alpha \psi(r, x_2, \dots, x_n)| + \int_{-r}^r |\partial^\beta \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)| dx_1 \right) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} |\partial^\beta \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)| dx_1, \end{aligned}$$

com $|\beta| \leq n$. Logo, por (4.26) e pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$|I(\lambda)| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \psi(x)| dx \right). \quad (4.27)$$

Com isto, concluímos (4.23) para o caso em que φ é um polinômio da forma (4.24). Provaremos o caso geral supondo que os pontos críticos de φ em $\text{supp}(\psi)$ são não degenerados e, para tanto, faremos uso do seguinte resultado conhecido de um curso de Análise no \mathbb{R}^n :

Lema de Morse (LIMA, 2014b, p. 290): Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $x_0 \in U$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, $\nabla \varphi(x_0) = 0$ e $\det(\text{Hess}_\varphi(x_0)) \neq 0$. Então existe um difeomorfismo $G : V \rightarrow W$, com $V, W \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $0 \in V$, $x_0 \in W \subset U$, $G(0) = x_0$ e para algum $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi \circ G(x) = \sum_{j=1}^{k-1} x_j^2 - \sum_{j=k}^n x_j^2,$$

para todo $x \in V$.

Seja $x \in \text{supp}(\psi)$. Se $\nabla\varphi(x) \neq 0$, então por continuidade existe uma vizinhança U_x de x tal que $\nabla\varphi(y) \neq 0$, para todo $y \in U_x$. Por outro lado, se $\nabla\varphi(x) = 0$, seja W_x a vizinhança dada pelo difeomorfismo do Lema de Morse. Dessa forma, estes abertos formam uma cobertura para $\text{supp}(\psi)$. Pela compacidade, considere uma cobertura finita com tais abertos, digamos, $\{B_1, \dots, B_m\}$. Seja $\{h_i\}_{i=1}^m$ uma partição da unidade subordinada a $\{B_i\}_{i=1}^m$ consistindo de funções com suporte compacto (FOLLAND, 1999, Teorema 4.41), isto é $\text{supp}(h_i) \subset B_i$ e $\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1$, para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Dessa forma, analogamente ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.2.2, podemos escrever

$$I(\lambda) = \sum_{j=1}^m I_j(\lambda),$$

com $I_j(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi_j(x) dx$ e $\psi_j = \psi h_j$. Se j corresponde a um ponto não crítico, então usamos o **método da fase não estacionária** (ver o Teorema 4.2.2) para concluir que $|I_j(\lambda)| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}}$. Por outro lado, se j corresponde a um ponto crítico não degenerado, então, sendo G_j o difeomorfismo correspondente do Lema de Morse, temos

$$I_j(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q_j(y)} (\psi_j \circ G_j)(y) J_{G_j}(y) dy,$$

com $Q_j = \varphi \circ G_j$. Dessa forma, denotando por D_j o suporte de $\psi_j \circ G_j$, utilizando a continuidade de J_{G_j} e o que provamos em (4.25), obtemos

$$|I_j(\lambda)| \lesssim \left| \int_{D_j} e^{i\lambda Q_j(y)} (\psi_j \circ G_j)(y) dy \right| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}}$$

e, com isso, finalizamos a demonstração. \square

O posto de uma matriz A $m \times n$ é a quantidade de linhas linearmente independentes. Esta quantidade também coincide com a quantidade de colunas linearmente independentes (ROMAN, 2005, Teorema 1.16). Em geral, o posto de uma matriz A é c se, e somente se

- i) existe pelo menos uma submatriz quadrada de A de ordem c cujo determinante é diferente de zero,
- ii) toda submatriz quadrada de A de ordem superior a c tem determinante nulo.

Este fato pode ser consultado em (HORN; JOHNSON, 1990, p. 13). Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n tem **posto máximo** se seu posto for n . Logo, se $\det(A) = 0$ então o posto de A é estritamente menor que n . Dessa forma, o ponto x_0 é crítico não degenerado de φ se, e somente se, $\nabla\varphi(x_0) = 0$ e $\text{Hess}_\varphi(x_0)$ tem posto máximo. Além disso, se A for uma matriz real simétrica a mesma é sempre diagonalizável (HOFFMAN, 1971, p. 314), isto é, existe uma matriz ortogonal P tal que $A = PDP^{-1}$, com D sendo uma matriz diagonal formada por seus

autovalores. Assim, o posto de A é igual à quantidade de linhas não nulas em D , ou seja, o posto de A é igual à quantidade de autovalores não nulos; inclusive os repetidos.

Até este ponto mostramos que o decaimento $|I(\lambda)| \lesssim \lambda^{-n/2}$ é válido quando $\nabla\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Além disso, se nos pontos x de $\text{supp}(\psi)$ tais que $\nabla\varphi(x) = 0$ adicionarmos a hipótese $\det \text{Hess}_\varphi(x) \neq 0$, então também temos o mesmo decaimento. Uma pergunta natural a se fazer é a seguinte: A estimativa anterior continua válida em algum sentido se existirem pontos x em $\text{supp}(\psi)$ tais que $\det \text{Hess}_\varphi(x) = 0$? O próximo resultado nos responde este questionamento.

Corolário 4.2.6. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Suponha que $\text{Hess}_\varphi(x)$ tem posto $l < n$ para todo $x \in \text{supp}(\psi)$. Então,

$$|I(\lambda)| \lesssim |\lambda|^{-\frac{l}{2}},$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in \text{supp}(\psi)$ arbitrário. Como $\text{Hess}_\varphi(x_0)$ é uma matriz simétrica então a mesma é diagonalizável. Dessa forma, sejam $\{\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)\}$ seus autovalores e escreva

$$\text{Hess}_\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} A(x_0) & 0 \\ 0 & B(x_0) \end{bmatrix},$$

com $A(x_0) = (\delta_{ij}\lambda_i(x_0))_{1 \leq i, j \leq l}$ e $B(x_0) = (\delta_{ij}\lambda_i(x_0))_{l+1 \leq i, j \leq n}$. Como a ordem da matriz A é igual ao posto de $\text{Hess}_\varphi(x_0)$, então, sem perda de generalidade, suponha que $\det(A(x_0)) \neq 0$.

Escreva $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ e $x_0 = (x'_0, x''_0)$. Dessa forma, como $\text{Hess}_{\varphi(\cdot, x''_0)}(x'_0) = A(x_0)$ temos que $\det \text{Hess}_{\varphi(\cdot, x''_0)}(x'_0) \neq 0$. Logo, pela continuidade da função determinante existe uma vizinhança $U_0 = U'_0 \times U''_0$ de x_0 tal que $\det \text{Hess}_{\varphi(\cdot, x'')} (x') \neq 0$, para todo $(x', x'') \in U_0$.

Seja $x \in \text{supp}(\psi)$ um ponto qualquer. Se $\nabla\varphi(x) \neq 0$, então escolha uma vizinhança V_x do mesmo tal que $\nabla\varphi(y) \neq 0$ para todo $y \in V_x$. Por outro lado, se $\nabla\varphi(x) = 0$, pelo que fizemos inicialmente, seja U_x uma vizinhança do ponto x tal que $\det \text{Hess}_{\varphi(\cdot, x'')} (x') \neq 0$, para todo $(x', x'') \in U_x$. Dessa forma, $\{V_x, U_x : x \in \text{supp}(\psi)\}$ é uma cobertura aberta para $\text{supp}(\psi)$. Logo, como este é compacto podemos extrair uma subcobertura finita, digamos, $\{B_1, \dots, B_m\}$. Além disso, seja $\{g_1, \dots, g_m\}$ uma partição da unidade subordinada a tal cobertura (FOLLAND, 1999, Teorema 4.41), com $\text{supp}(g_j) \subset B_j$. Assim,

$$|I(\lambda)| \leq \sum_{j=1}^m |I_j(\lambda)|, \quad (4.28)$$

com $I_j(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) g_j(x) dx$. Se j for correspondente a um aberto onde $\nabla\varphi \neq 0$, então

utilizamos o Teoremas 4.2.2 para concluir que

$$|I_j(\lambda)| \leq C(\varphi, \psi, n)\lambda^{-n}, \quad (4.29)$$

sempre que $\lambda > 0$. É de rápida verificação que $\lambda^{-n} \leq \lambda^{-l/2}$ para $\lambda \geq 1$. Além disso, $1 \leq \lambda^{-l/2}$ quando $0 < \lambda \leq 1$. Ainda,

$$|I_j(\lambda)| \leq \int_{B_j} |\psi g_j| := \lambda_j,$$

para todo $\lambda > 0$. Dessa forma, sendo $M_j = \max\{C(\varphi, \psi, n), \lambda_j\}$, obtemos

$$|I_j(\lambda)| \leq M_j \lambda^{-l/2},$$

para todo $\lambda > 0$. Por fim, se j corresponde a um aberto onde $\nabla\varphi = 0$, denotando $\psi_j = \psi g_j$, pelo Teorema de Fubini, concluimos que

$$\begin{aligned} |I_j(\lambda)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi_j(x', x'') dx \right| \\ &= \left| \int_{B_j''} \int_{B_j'} e^{i\lambda\varphi(x', x'')} \psi_j(x', x'') dx' dx'' \right| \\ &\leq \int_{B_j''} \left| \int_{B_j'} e^{i\lambda\varphi(x', x'')} \psi_j(x', x'') dx' \right| dx''. \end{aligned}$$

Como $\det \text{Hess}_{\varphi(\cdot, x'')}(x') \neq 0$ para todo $x' \in \text{supp}(\psi_j)$, pelo Teorema 4.2.5, existe uma constante C , dependendo de $\varphi(\cdot, x'')$ e de ψ_j , tal que

$$\left| \int_{B_j'} e^{i\lambda\varphi(x', x'')} \psi_j(x', x'') dx' \right| \leq C \lambda^{-\frac{l}{2}}.$$

Note que as constantes no Teorema 4.2.5 envolvem essencialmente integrais das funções φ e ψ . Com isto, sem perda de generalidade, a constante C é uniforme em x'' . Logo,

$$|I_j(\lambda)| \lesssim \mathcal{L}^{n-l}(B_j) \lambda^{-\frac{l}{2}} \quad (4.30)$$

e, com isso, finalizamos a demonstração. \square

Finalizamos esta seção com alguns comentários acerca de integrais oscilatórias do segundo tipo, isto é, integrais oscilatórias com fase e amplitude dependendo de um ponto fixado.

Proposição 4.2.7. Suponha que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ e defina o operador

$$L_\lambda f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x, \xi)} \Psi(x, \xi) f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Se

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) \neq 0, \quad (4.31)$$

para todo $(x, \xi) \in \text{supp}(\Psi)$, então o operador L_λ satisfaz

$$\|L_\lambda f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.32)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e $\lambda > 0$.

A prova da Proposição 4.2.7 é baseada no estudo de integrais oscilatórias visto nesta seção. No que segue, daremos a ideia da demonstração. Todavia, o leitor pode ver a demonstração na íntegra em (MATTILA, 2015, Teorema 20.1).

Ideia da prova da Proposição 4.2.7: Podemos escrever

$$\|L_\lambda f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x, y) f(x) \overline{f(y)} dx dy,$$

com

$$K_\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda(\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi))} \Psi(x, \xi) \overline{\Psi(y, \xi)} d\xi.$$

Para $|x - y| < 1$ temos

$$\nabla_\xi(\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi)) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) (x - y) + O(|x - y|^2).$$

Como já fizemos nesta seção, podemos supor que $\text{supp}(\Psi)$ é suficientemente pequeno. Com isto, para alguma constante $c > 0$, temos a seguinte estimativa

$$|\nabla_\xi(\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi))| \geq c|x - y|$$

quando $(x, \xi), (y, \xi) \in \text{supp}(\Psi)$. Diminuindo o suporte de Ψ , se necessário, podemos supor que, para algum $j = 1, \dots, n$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi)) \right| \leq c|x - y|,$$

quando $(x, \xi), (y, \xi) \in \text{supp}(\Psi)$. Com isto,

$$|K_\lambda(x, y)| \lesssim_N (1 + \lambda|x - y|)^{-N}, \quad \text{com } N \in \mathbb{N}.$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$. Aplicando isto a $N = n + 1$, deduz-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\lambda(x, y)| dy &\lesssim \lambda^{-n}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |K_\lambda(x, y)| dx &\lesssim \lambda^{-n}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Antes de continuar a prova, vejamos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.8 (Teste de Schur). (MATTILA, 2015, Teorema 20.2) Sejam (X, μ) e (Y, ν) dois espaços de medida e $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ uma função $\mu \times \nu$ -mensurável tal que $\int_X |K(x, y)|^2 d\mu_x < \infty$ para $y \in Y$. Suponha que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\lambda(x, y)| d\mu_x &\leq A, \quad \text{para } y \in Y, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |K_\lambda(x, y)| d\nu_y &\leq B, \quad \text{para } x \in X. \end{aligned}$$

Defina

$$T_K f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(x) d\mu_x, \quad \text{para } y \in Y, \quad f \in L^2(\mu).$$

Então,

$$\|T_K f\|_{L^2(\nu)} \leq \sqrt{AB} \|f\|_{L^2(\mu)}, \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Para finalizar a prova da Proposição 4.2.7, define-se

$$T_{K_\lambda} f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x, y) f(x) dx,$$

Logo, pelo Teste de Schur concluímos que

$$\|L_\lambda f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (T_{K_\lambda} f) \bar{f} \leq \|T_{K_\lambda} f\|_2 \|f\|_2 \lesssim \lambda^{-n} \|f\|_2^2,$$

com queríamos.

O resultado a seguir será utilizado na demonstração do Teorema de Carleson-Sjölin na Seção 5.4.

Corolário 4.2.9. Suponha que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ e defina o operador

$$L_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x, \xi)} \Psi(x, \xi) f(x) dx.$$

Se

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) \neq 0, \quad (4.33)$$

para todo $(x, \xi) \in \text{supp}(\Psi)$, então o operador L_λ satisfaz

$$\|L_\lambda f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.34)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ e $1 \leq p \leq 2$.

Demonstração. Usando que Ψ tem suporte compacto, deduzimos que

$$\|L_\lambda f\|_\infty \lesssim \|f\|_1, \quad (4.35)$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, pela Proposição 4.2.7 a seguinte estimativa é válida:

$$\|L_\lambda f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.36)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Note que, (4.35) e (4.36) nos dizem que (4.34) é verdadeiro quando $p = 1$ e $p = 2$. Por isso, suponhamos que $1 < p < 2$ e seja $\theta \in (0, 1)$ dado por $\theta = (2p - 2)/p$. É de rápida verificação que

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1 - \theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}.$$

Pelo Teorema 2.7.3 (interpolação de Riesz-Thorin) segue o resultado. \square

4.3 Transformada de Fourier de medidas superficiais

Esta seção é destinada ao cálculo da transformada de Fourier da medida de uma superfície compacta. Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular compacta de classe C^k e $p \in S$. A Proposição 2.4.13 nos permite escolher uma vizinhança V_p do ponto p de modo que, sem perda de generalidade, digamos

$$V_p = \{(x', f_p(x')) : x' \in U_p\},$$

com f_p sendo uma função de classe C^k definida no aberto $U_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Logo, $\{V_p : p \in S\}$ é uma cobertura aberta para S e pela sua compacidade podemos extrair uma subcobertura finita, digamos, $\mathcal{B} = \{V_1, \dots, V_N\}$, onde

$$V_j = \{(x', f_j(x')) : x' \in U_j\}.$$

Pela Proposição 2.4.9 podemos considerar uma partição da unidade $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ subordinada à cobertura \mathcal{B} . Seja $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$ uma aplicação dada por $\varphi_j(x') = (x', f_j(x'))$. Vimos em (2.47) que a medida de superfície em S no conjunto $A \subset S$ é dada por

$$\sigma(A) = \sum_{j=1}^N \mu_j(A), \quad (4.37)$$

com $\mu_j = \psi_j d\sigma$. Logo,

$$\widehat{\sigma} = \sum_{j=1}^N \widehat{\mu}_j. \quad (4.38)$$

Dessa forma,

$$\widehat{\mu}_j(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} d\mu_{jy} = \int_{V_j} e^{-2\pi i y \cdot \xi} \psi_j(y) d\sigma_{jy}.$$

Como $V_j = \varphi_j(U_j)$, pela Proposição 2.4.12, temos que

$$\int_{V_j} h d\sigma_j := \int_{U_j} h(\varphi_j(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} f_j(x')|^2} dx',$$

para uma função mensurável a Borel h com suporte em V_j . Portanto, tomando $h(y) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \psi_j(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_j(\xi) &= \int_{U_j} e^{-2\pi i \varphi_j(x') \cdot \xi} \psi_j(\varphi_j(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} f_j(x')|^2} dx' \\ &= \int_{W_j} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + f_j(x') \xi_n)} \tilde{\psi}_j(x') dx', \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde $W_j = U_j \cap \varphi_j^{-1}(\text{supp}(\psi_j))$, $\tilde{\psi}_j(x') = \psi_j(x', \varphi_j(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} f_j(x')|^2}$ e $\xi = (\xi', \xi_n)$.

Substituindo (4.39) em (4.38), obtemos a transformada de Fourier da medida σ :

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{W_j} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + f_j(x') \xi_n)} \tilde{\psi}_j(x') dx'. \quad (4.40)$$

4.4 Decaimento de Fourier de medidas superficiais

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular compacta. Devido a relação (4.37), podemos nos concentrar em medidas de superfície da forma $\mu = \psi d\sigma$, com σ sendo a medida da superfície S e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, cujo suporte está contido numa vizinhança de S dada pelo gráfico de uma função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Além disso, por (4.39), temos que

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + f(x') \xi_n)} \tilde{\psi}(x') dx',$$

com $\tilde{\psi}(x') = \psi(x', \varphi(x')) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} f(x')|^2}$ e $\xi = (\xi', \xi_n)$. Temos o objetivo de mostrar; utilizando o método da fase estacionária e não-estacionária, que $\widehat{\mu}$ também satisfaz mesmo decaimento obtido em (4.6) para a esfera, todavia, precisaremos de uma hipótese acerca da curvatura de S . É importante lembrar que a curvatura Gaussiana de S no ponto p é dada

$$K(p) = \det \text{Hess}_f(q) = \lambda_1(p) \cdot \dots \cdot \lambda_l(p),$$

com $\{\lambda_i(p) : i = 1, \dots, l\}$ sendo as curvaturas principais de S no ponto p .

Teorema 4.4.1. Suponha que S é uma superfície regular compacta e todos os pontos de S possuem curvatura Gaussiana não nula. Então sendo σ a medida de superfície sobre S vale o decaimento

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{(n-1)}{2}}, \quad (4.41)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demonstração. Seja $p \in S$. Por (4.38), é suficiente provamos o resultado para uma medida $\mu = \psi\sigma$, onde $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ é suportada numa vizinhança coordenada de S dada pelo gráfico de uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $p = 0$ e que $T_p S = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Neste caso, se $q \in U$ é tal que $p = (q, f(q))$, então q é um ponto crítico de f , isto é, $\nabla f(q) = 0$. Portanto, pela Proposição 2.4.24, obtemos

$$[II_p] = \text{Hess}_f(q).$$

Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo, e escreva $\xi = \lambda_\xi \eta$, com $\lambda_\xi = |\xi| > 0$ e $|\eta| = 1$. Denotando os vetores de \mathbb{R}^{n-1} por $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, defina a função

$$\varphi_\eta(x') = -2\pi(\eta_1 x_1 + \dots + \eta_{n-1} x_{n-1} + \eta_n f(x')),$$

para todo $x \in U$. Dessa forma,

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda_\xi \varphi_\eta(x')} \tilde{\psi}(x') dx'.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial \varphi_\eta}{\partial x_i}(x') = -2\pi \left(\eta_i \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \right), \quad (4.42)$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$, obtemos

$$\nabla \varphi_\eta(x') = -2\pi((\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) + \eta_n \nabla_{x'} f(x'))$$

e

$$\text{Hess}_{\varphi_\eta}(x') = -2\pi \eta_n \text{Hess}_f(x').$$

Se $\eta_n = 0$, então $\nabla \varphi_\eta(x') \neq 0$ para todo $x' \in U$, pois $|\eta| = 1$. Dessa forma, pelo método da fase não-estacionária (ver Teorema 4.2.2), existe uma constante $M(\varphi_\eta, \tilde{\psi}, N)$ com $N = n-1$, tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \varphi_\eta(x')} \tilde{\psi}(x') dx' \right| \leq M(\varphi_\eta, \tilde{\psi}, n) \lambda^{-(n-1)},$$

par todo $\lambda > 0$. Analisando (4.42) e (4.18) e o fato de $|\eta| = 1$, por (4.16), podemos constatar

que a constante $M(\varphi_\eta, \tilde{\psi}, n)$ não depende de η . Além disso, note que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\varphi_\eta(x')} \tilde{\psi}(x') dx' \right| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{\psi}(x')| dx' \leq \sup_{\mathbb{R}^n} \{\psi\} \mathcal{L}^n(\text{supp}(\psi)) =: \lambda_\psi.$$

Dessa forma, definindo $C(\varphi, \psi, n) = \max\{\lambda_\psi, M(\varphi, \psi, n)\}$ e substituindo $\lambda_\xi = |\xi|$, concluímos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda_\xi \varphi_\eta(x')} \tilde{\psi}(x') dx' \right| \leq C(\varphi, \psi, n) |\xi|^{-(n-1)/2},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ não nulo, pois, $|\xi|^{-(n-1)} \leq |\xi|^{(1-n)/2}$ quando $|\xi| \geq 1$ e $1 \leq |\xi|^{(1-n)/2}$ para $|\xi| \leq 1$. Por outro lado, se $\eta_n \neq 0$; como S tem curvatura Gaussiana não nula todos os ponto de U , então $\det(\text{Hess}_{\varphi_\eta}(x')) \neq 0$, para todo $x' \in U$. Com isto, a estimativa requerida é obtida pelo método da fase-estacionária, Teorema 4.2.5 e concluímos a demonstração. \square

Utilizando essencialmente a mesma demonstração do Teorema 4.4.1 e o decaimento do Corolário 4.2.6, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4.2. (LITTMAN, 1963) Suponha que S é uma superfície regular compacta com ℓ curvaturas principais não nulas em cada ponto. Então, sendo σ a medida de superfície sobre S vale o decaimento

$$|\hat{\sigma}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{\ell}{2}}, \quad (4.43)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Vimos na Proposição 3.1.10 que a dimensão de Hausdorff de superfícies no \mathbb{R}^n é $n - 1$, dessa forma, pela Observação 3.5.4 o decaimento (4.41) é ótimo, bem como o decaimento (4.43) nas condições dadas.

RESTRIÇÃO DE FOURIER SOBRE SUPERFÍCIES

Neste capítulo, iniciaremos falando um pouco sobre problemas de restrição e iremos ver alguns resultados que irão nos auxiliar a lidar com desigualdades da forma

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad (5.1)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$. Tais resultados irão nos auxiliar a entender a natureza da Conjectura da Restrição. Mais precisamente, temos como objetivo mostrar o famoso Exemplo de Knapp na esfera e ver como o mesmo é utilizado para mostrar as condições necessárias para que a desigualdade (5.1) ocorra, o que irá culminar na Conjectura da Restrição. Além disso, usaremos o mesmo Exemplo para mostrar que os parâmetros do Teorema de Stein-Tomas também são ótimos. Finalizaremos este capítulo vendo em detalhes que tal conjectura é totalmente resolvida em \mathbb{R}^2 para qualquer curva compacta suave com curvatura Gaussiana não nula e iremos exibir a demonstração deste fato. As referências básicas que nos guiaram ao longo do texto foram (MATTILA, 2015) e (SOGGE, 2017).

5.1 Problemas de restrição

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição A.1.1, temos que \widehat{f} é contínua. Além disso, o Teorema A.1.8 (Lema de Riemann-Lebesgue) nos diz que a mesma decai a zero no infinito. Em particular, podemos restringir \widehat{f} a qualquer subconjunto A do \mathbb{R}^n , inclusive se $\mathcal{L}^n(A) = 0$. Por outro lado, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, o Teorema A.1.28 (Plancherel) garante apenas que \widehat{f} está em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Com isto, não sabemos o que ocorre com a mesma em conjuntos com medida de Lebesgue nula, todavia, pela Desigualdade de Hölder, sabemos que $\widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, dados $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\xi \in A$, a restrição pode ser feita se ξ também está no conjunto de Lebesgue $L^1_{\widehat{f}}$ usando o

Teorema da diferenciação de Lebesgue (4.2) conforme a fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r) \cap A)} \int_{B(\xi, r) \cap A} \widehat{f}(y) dy, \quad (5.2)$$

desde que $\mathcal{L}^n(B(\xi, r) \cap A) > 0$. Ainda, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < 2$, a Proposição 2.7.6 (Desigualdade de Hausdorff Young) nos permite saber que $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, com p' sendo o expoente conjugado de p . Logo, à primeira vista, a mesma pode ser pensada como definida apenas em quase toda parte, porém, novamente pela Desigualdade de Hölder, $\widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, podemos concluir que \widehat{f} também satisfaz (5.2).

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ tiver medida de Lebesgue nula, será que podemos falar de $\widehat{f}|_A$ quando $f \in L^p(p)$ para $1 < p \leq 2$? Veremos no exemplo a seguir que isto em geral não é possível, mesmo se f for uma função contínua.

Exemplo 5.1.1 (Restrição sobre hiperplanos). Seja E o hiperplano dado por

$$E = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

Sabemos de um curso de Análise no \mathbb{R}^n que este conjunto tem medida de Lebesgue nula. Considere $K \subset E$ um conjunto compacto. Utilizando o Lema 2.3.20 (existência de funções de corte) escolha $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com $1 \leq \psi(x') \leq 1$, $\psi = 1$ em K e $\text{supp}(\psi)$ contido numa vizinhança de K . Defina a função

$$f(x) = \frac{\psi(x')}{1 + |x_n|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Naturalmente $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p < \infty$, pois, pelo Teorema de Fubini, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\psi(x')|^p dx' \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x_n|)^p} dx_n = \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x_n|)^p} dx_n < \infty.$$

Por outro lado, note que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} \psi(x') dx' \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x_n \xi_n}}{1 + |x_n|} dx_n = \widehat{\psi}(\xi') \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x_n \xi_n}}{1 + |x_n|} dx_n.$$

Logo, se $\xi \in E$ obtemos

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi') \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x_n|} dx_n = \infty,$$

e portanto $\widehat{f}|_E$ não está bem definido.

Se considerarmos um subconjunto que não esteja contido em um hiperplano, será que conseguimos alguma restrição? Por exemplo, seja \mathbb{S}^{n-1} a esfera unitária e σ^{n-1} a sua medida intrínseca. Dado $f \in L^p$, $1 < p \leq 2$, quando $\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ faz sentido como uma função em

$L^q(\mathbb{S}^{n-1}, \sigma^{n-1})$ para algum q ? Veremos na Seção 5.4 que se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ faz sentido para alguns valores $1 < p < 2$. No que segue vamos deixar claro o que significa restrição para os nossos propósitos.

Se para uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq 2$, ocorrer

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} := \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma_\xi^{n-1} \right)^{1/q} < \infty, \quad (5.3)$$

para algum $q < \infty$ então fica bem definida a restrição $\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ como um genuíno elemento de $L^q(\mathbb{S}^{n-1})$, com a medida σ^{n-1} implícita. Vejamos, pois, uma condição necessária para que (5.3) ocorra. Suponhamos que exista algum $q < \infty$ que faça a desigualdade a seguir ser verdadeira:

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.4)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, fica bem definida a aplicação contínua

$$\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{S}^{n-1}, \sigma^{n-1})$$

dada por $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(f) = \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Pela Proposição A.1.20, sabemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, logo, podemos estender continuamente de maneira única a aplicação $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a todo o $L^p(\mathbb{R}^n)$, de modo que a estimativa (5.4) ainda seja válida.

Problemas de restrição envolvem saber para quais pares (p, q) a estimativa (5.4) é válida, inclusive com outros conjuntos do \mathbb{R}^n com medidas suportadas no mesmo. De maneira mais geral, seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e denote seu suporte por S_μ . Se ocorrer

$$\left(\int_{S_\mu} |\widehat{f}(\xi)|^q d\mu_\xi \right)^{1/q} < \infty,$$

com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então fica bem definida a restrição $\widehat{f}|_{S_\mu}$ como um elemento de $L^q(S_\mu, \mu)$. É importante salientar que o espaço $L^q(S_\mu, \mu)$ significa $L^q(\mathbb{R}^n, \mu)$, com a medida μ restrita aos borelianos de S_μ . Alguma vez utilizaremos apenas $L^q(S_\mu)$ por simplicidade. Isto faz sentido pois a medida μ se anula "fora" de S_μ (para mais detalhes veja a Observação 2.3.14). É importante lembrar que, pelo Exemplo 2.4.11, se $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular compacta de classe C^1 e, sendo σ^{n-1} sua medida intrínseca, então $\sigma^{n-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Utilizaremos a notação $\mathcal{R}_{S_\mu}(p \rightarrow q)$ para dizer que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n, \mu)} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (5.5)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por exemplo, $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ significa exatamente (5.4).

Exemplo 5.1.2. A restrição $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(1 \rightarrow q)$ é válida para todo $1 \leq q \leq \infty$. Com efeito, por (A.2), a relação $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(1 \rightarrow \infty)$ é válida. Suponha, pois, que $1 \leq q < \infty$. Novamente, de acordo

com (A.2) sabemos que

$$|\widehat{f}(\xi)|^q \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, dessa forma integrando com respeito à medida σ^{n-1} sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} , obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma_\xi^{n-1} \leq \|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^q \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q,$$

isto nos diz que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1}, \sigma^{n-1})} \leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})^{1/q} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, denote $K = \text{supp}(\mu)$. Observe que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(f), g \rangle_K &= \int_K \widehat{f}(\xi) \overline{g(\xi)} d\mu_\xi \\ &= \int_K \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \overline{g(\xi)} d\mu_\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_K f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \overline{g(\xi)} d\mu_\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\int_K e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\mu_\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\widehat{g\mu}(-x)} dx \end{aligned}$$

Isto motiva a definição $\mathcal{R}^*(g)(x) = \widehat{g\mu}(-x)$. Logo,

$$\langle \mathcal{R}(f), g \rangle_K = \langle f, \mathcal{R}^*(g) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

No que segue, vamos provar um resultado que nos dará uma caracterização para uma desigualdade da forma (5.4), mais precisamente, queremos mostrar que a mesma é equivalente a

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1}, \sigma^{n-1})}, \quad (5.6)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Desigualdades do tipo (5.4) e (5.6) são chamadas **desigualdades de extensão**. Vamos também fixar a notação $\mathcal{R}_{S_\mu}^*(q' \rightarrow p')$ para simbolizar

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, \mu)}, \quad (5.7)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Antes de provar o que comentamos, precisaremos de um lema auxiliar.

Seja $1 \leq p < \infty$. Dado $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ defina o funcional linear $\phi_g : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg$. Pela Desigualdade de Hölder o operador ϕ_g é limitado.

Lema 5.1.3. Seja $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} gf \right| : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}. \quad (5.8)$$

Demonstração. Iremos fazer uso da seguinte relação de dualidade comum de um curso de medida (FOLLAND, 1999, Proposição 6.13):

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|\phi_g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^*} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} gf \right| : f \in L^p(\mathbb{R}^n), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}.$$

Seja $\tilde{\phi}_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ um o funcional linear dado por

$$\tilde{\phi}_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg.$$

Pela Desigualdade de Hölder o funcional $\tilde{\phi}_g$ é limitado. A função ϕ_g é naturalmente uma extensão de $\tilde{\phi}_g$. Além disso, como ϕ_g estende $\tilde{\phi}_g$ é imediato que $\|\tilde{\phi}_g\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*} \leq \|\phi_g\|_{L^{p^*}}$, com $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ sendo os funcionais lineares definidos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ contínuos na norma $\|\cdot\|_p$. Por outro lado, seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$ e $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergindo para f em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos

$$\phi_g \left(\frac{f_k}{\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \right) \leq \|\tilde{\phi}_g\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*}.$$

Logo, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ e usando a continuidade de ϕ_g , concluímos que $\|\phi_g\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\tilde{\phi}_g\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*}$ e finalizamos a demonstração. □

É possível mostrar, utilizando o Teorema de Lusin, (FOLLAND, 1999, Teorema 7.10), e o Teorema de aproximação de Weierstrass, (LIMA, 1977, p. 262), que para $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também é denso em $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ para $1 \leq p < \infty$, (MATTILA, 2015, p. 270). Com isso; e utilizando essencialmente a mesma demonstração do Lema 5.1.3, a igualdade a seguir é válida:

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mu)} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} gfd\mu \right| : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mu)} = 1 \right\}, \quad (5.9)$$

para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mu)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Como já mencionado anteriormente, o resultado a seguir nos dá uma caracterização para a desigualdade (5.5). Além disso, o mesmo será usado para provar a versão do Teorema de Stein-Tomas para medidas gerais, o que é o principal objetivo deste trabalho.

Proposição 5.1.4. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. As seguintes desigualdades são equivalentes para qualquer constante $0 < C < \infty$:

- 1) $\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n, \mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $\|\widehat{f}\mu\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, \mu)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Quando $q = 2$, os itens 1) e 2) equivalem a

3) $\|\widehat{\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Suponhamos que 1) seja válido e sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$. Aplicando a Proposição 2.5.6 - (i) à medida $f d\mu$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f\mu} g = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} f d\mu.$$

Pelo Teorema A.1.22, sabemos que $\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela Proposição A.1.18, temos que $\widehat{g} \in L^q(\mathbb{R}^n, \mu)$ e naturalmente $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dessa forma, pela Desigualdade de Hölder, deduzimos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f\mu} g \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g} f| d\mu = \|\widehat{g} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n, \mu)} \leq \|\widehat{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^n, \mu)} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)}.$$

Logo, utilizando a hipótese, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f\mu} g \right| \leq C \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} = C \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} < \infty.$$

Tomando o supremo sobre $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$ e utilizando o Lema 5.1.3 concluímos 2).

Suponhamos que o item 2) é válido e seja $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} = 1$. Novamente, pela Proposição 2.5.6 - (i), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} d(g\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g\mu}.$$

Como $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e 2) é válido, então $\|\widehat{g\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, ou seja, $\widehat{g\mu} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, dessa forma, pela Desigualdade de Hölder e pela hipótese, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \widehat{g\mu}| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{g\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} = C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Tomando o supremo sobre $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} = 1$ concluímos que 1) é válido utilizando (5.9).

Vamos mostrar que 1) e 2) são equivalentes a 3) quando $q = 2$, e para tanto, é suficiente mostrar que 1) é equivalente a 3). Inicialmente vamos verificar que se 1) é válido, então $\widehat{\mu} * f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. De fato, como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então, pelo Teorema A.1.22, existe uma função $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\widehat{h} = f$. Dessa forma, Pela Proposição 2.5.6, vi), temos

$$\widehat{\mu} * f = \widehat{\mu} * \widehat{h} = \widehat{h} * \widehat{\mu} = \widehat{h d\mu}.$$

Como 1) é equivalente a 2), temos que $\|\widehat{h d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, ou seja, $\widehat{\mu} * f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Em

particular, $\widehat{\mu} * \bar{f}$ também está em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ e portanto, pelo Lema 5.1.3 faz sentido a igualdade

$$\|\widehat{\mu} * \bar{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mu} * \bar{f})g \right| : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}. \quad (5.10)$$

Considerando $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$ e utilizando a fórmula 2.5.12 - (ii), obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mu} * \bar{f})g \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\widehat{g}d\mu \right| \leq \|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)}.$$

Logo, pelo item 1), deduzimos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mu} * \bar{f})g \right| \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

tomando o supremo sobre $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$ e utilizando (5.10), concluímos 3). Finalmente, suponhamos que 3) é válido e seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, novamente pela fórmula 2.5.12 - (ii), obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\mu} * \bar{f})f \leq \|\widehat{\mu} * \bar{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \|\bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.11)$$

isto é,

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mu)} \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2$$

e com isto obtemos o item 1). □

Se uma das condições 1)-3) da Proposição 5.1.4 for satisfeita podemos concluir que, de fato, a respectiva desigualdade vale para toda função no respectivo espaço de Lebesgue no sentido de extensão de operadores. Todavia, especialmente se o item 2) for satisfeito, vamos utilizar a continuidade das medidas em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 2.5.3), para mostrar que vale a extensão

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)}, \quad (5.12)$$

para toda $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Com efeito, seja $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)$ e uma sequência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f_k - f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, por 2) temos que a sequência $\{\widehat{f_k\mu}\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, converge para alguma função $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que, de fato, $g = \widehat{f\mu}$. Com efeito, naturalmente temos que $\{\widehat{f_k\mu}\}_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge para g qtp, digamos, $\{\widehat{f_{k_l}\mu}\}_{l=1}^{\infty}$. Por outro lado, vimos na Proposição 2.5.3 que medidas em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ são contínuas, dessa forma, dado $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\widehat{f_{k_l}\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_l}(y) e^{-2\pi i x \cdot y} d\mu_y = \int_{\mathbb{R}^n} (f_{k_l}(y) - f(y)) e^{-2\pi i x \cdot y} d\mu_y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i x \cdot y} d\mu_y.$$

Sendo K o suporte da medida μ , pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_{k_l}(y) - f(y)) e^{-2\pi i x \cdot y} d\mu_y \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f_{k_l} - f)\chi_K| d\mu \leq \mu(K)^{1/q} \|f_{k_l} - f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)}.$$

Com isso, a sequência $\{\widehat{f_{k_l}\mu}\}_l$ converge para $\widehat{f\mu}$ pontualmente em todo o \mathbb{R}^n . Portanto, $g = \widehat{f\mu}$ qtp, o que implica $\widehat{f\mu} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f_{k_l}\mu}$ converge para $\widehat{f\mu}$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Por fim, por 2), temos

$$\|\widehat{f_{k_l}\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f_{k_l}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n, \mu)},$$

fazendo $l \rightarrow \infty$, obtemos (5.12).

O resultado a seguir nos dá condições necessárias para que as estimativas $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ e $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}^*(p \rightarrow q)$ sejam verdadeiras. Isto será extremamente útil para mostrar que os parâmetros da Conjectura da Restrição na esfera são ótimos.

Proposição 5.1.5. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e denote $K = \text{supp}(\mu)$. Os seguintes itens são verdadeiros:

- 1) Se $\mathcal{R}_K(p \rightarrow q)$ é válido, então $\mathcal{R}_K(\tilde{p} \rightarrow \tilde{q})$ para todo $\tilde{p} \leq p$ e $\tilde{q} \leq q$;
- 2) Se $\mathcal{R}_K^*(p \rightarrow q)$ é válida, então $\mathcal{R}_K^*(\tilde{p} \rightarrow \tilde{q})$, para todo $\tilde{p} \geq p$ e $\tilde{q} \geq q$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\tilde{q}}(\mu)} \leq \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, considerando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\tilde{q}}(\mu)}^{\tilde{q}} = \|1|\widehat{f}|^{\tilde{q}}\|_{L^1(\mu)} \leq \|1\|_{L^r(\mu)} \| |\widehat{f}|^{\tilde{q}} \|_{L^{r'}(\mu)},$$

com $r = q/(q - \tilde{q})$ e $r' = q/\tilde{q}$. Com isto, deduzimos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\tilde{q}}(\mu)} \lesssim \|\widehat{f}\|_{L^q(\mu)}.$$

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\widehat{\varphi}$ positiva e tal que $\widehat{\varphi} \geq 1$ numa bola contendo K (veja a Observação A.1.27). Logo, pela fórmula da convolução (A.4) e como $\mathcal{R}_K(p \rightarrow q)$ vale, obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\tilde{q}}(\mu)} \lesssim \int_K |\widehat{f\widehat{\varphi}}|^q d\mu = \|\widehat{f * \varphi}\|_{L^q(\mu)} \lesssim \|f * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Seja r definido por $1/\tilde{p} + 1/r = 1/p + 1$. Note que o mesmo satisfaz

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{\tilde{p} - p}{\tilde{p}p} \leq 1,$$

pois $\tilde{p} - p \leq 0$. Logo, a Desigualdade de Young (Corolário 2.7.5) nos diz que

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\tilde{q}}(\mu)} \lesssim \|f * \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)},$$

como desejado. Provemos o item 2), isto é, vamos mostrar que

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}, \quad (5.13)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar primeiramente que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}. \quad (5.14)$$

De fato, pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|f\|_{L^p(\mu)}^p = \|1 \cdot |f|^p\|_{L^1(\mu)} \leq \|1\|_{L^{r'}(\mu)} \| |f|^p \|_{L^r(\mu)} \lesssim \| |f|^p \|_{L^r(\mu)},$$

com $r = \tilde{p}/p$ e $r' = \tilde{p}/(\tilde{p}-p)$. Notando que $\| |f|^p \|_{L^r(\mu)} = \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}^p$, obtemos (5.14). Mostremos que a estimativa (5.13) é válida para $\tilde{q} = \infty$. De fato, utilizando a mesma prova de (5.14) para $p = 1$, obtemos

$$|\widehat{f\mu}(\xi)| = \left| \int_K f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu_x \right| \leq \|f\|_{L^1(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}.$$

Como $\widehat{f\mu}$ é contínua (Proposição 2.5.3), tomando o supremo sobre todos os vetores $\xi \in \mathbb{R}^n$, deduzimos que

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}. \quad (5.15)$$

Com isso, só nos resta concluir (5.13) para $q \leq \tilde{q} < \infty$. Com efeito, uma vez que $\tilde{q} - q \geq 0$ e $|\widehat{f\mu}(\xi)| \leq \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, concluimos que

$$\left(\frac{|\widehat{f\mu}(\xi)|}{\|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} \right)^{\tilde{q}-q} \leq 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{|\widehat{f\mu}(\xi)|}{\|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} \right)^{\tilde{q}} \leq \left(\frac{|\widehat{f\mu}(\xi)|}{\|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}} \right)^q.$$

Integrando e utilizando a hipótese de que $\mathcal{R}_K^*(p \rightarrow q)$ é válida, temos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{-\tilde{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f\mu}|^{\tilde{q}} &\leq \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{-q} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f\mu}|^q \\ &= \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{-q} \|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\ &\leq \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{-q} \|f\|_{L^p(\mu)}^q. \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando as estimativas (5.14) e (5.15), obtemos

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{q}} \leq \|\widehat{f\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{q}-q} \|f\|_{L^p(\mu)}^q \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}^{\tilde{q}-q} \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}^q = \|f\|_{L^{\tilde{p}}(\mu)}^{\tilde{q}},$$

e, com isso, obtemos (5.13) para $q \leq \tilde{q} < \infty$. \square

Devido a Proposição 5.1.5, quando lidamos com problemas de restrição, sempre adotamos a filosofia de maximizar p e q para os quais $\mathcal{R}(p \rightarrow q)$ ou $\mathcal{R}^*(p \rightarrow q)$ é válido.

5.2 Exemplo de Knapp na esfera

Para mostrar que algumas estimativas envolvendo funções em algum espaço são ótimas, muitas vezes é suficiente encontrar uma função particular que nos dê o que almejamos. O resultado a seguir é conhecido na literatura como Exemplo de Knapp para a esfera e será utilizado para mostrar que o intervalo de restrição para o Teorema de Stein-Thomas é ótimo, bem como que os parâmetros da conjectura da restrição também são ótimos.

Proposição 5.2.1 (Exemplo de Knapp). *Seja $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Dado $0 < \delta < 1$, considere o conjunto*

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\}.$$

Então, sendo $f = \chi_{C_\delta}$, vale a estimativa

$$|\widehat{f\sigma^{n-1}}(\xi)| \geq \frac{\sigma^{n-1}(C_\delta)}{2}, \quad (5.16)$$

para todo $\xi \in R_\delta$, com $R_\delta \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$R_\delta = \left[-\frac{c}{\delta}, \frac{c}{\delta}\right] \times \dots \times \left[-\frac{c}{\delta}, \frac{c}{\delta}\right] \times \left[-\frac{c}{\delta^2}, \frac{c}{\delta^2}\right],$$

com $c = 1/12n$.

Demonstração. Primeiramente mostremos que se $x \in C_\delta$, então $|x_i| \leq \sqrt{2}\delta$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. De fato, denotando os vetores de \mathbb{R}^n por (x', x) , se $x \in C_\delta$, então $1 - x \cdot e_n \leq \delta^2$, ou seja, $0 < 1 - \delta^2 \leq x_n$. Além disso, temos que $x_n = (1 - |x'|^2)^{1/2}$. Com isso, obtemos

$$1 - \delta^2 \leq (1 - |x'|^2)^{1/2}.$$

Consequentemente,

$$|x'|^2 \leq 2\delta^2 - \delta^4 < 2\delta^2, \quad (5.17)$$

o que é suficiente para concluir o que afirmamos. Além disso,

$$\begin{aligned} |\widehat{f\sigma}(\xi)| &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma_x^{n-1} \right| \\ &= |e^{2\pi i \xi \cdot e_n}| \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma_x^{n-1} \right| \\ &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot (x - e_n)} d\sigma_x^{n-1} \right|. \end{aligned}$$

Logo, como o módulo de um número complexo é sempre maior ou igual que sua parte real, obtemos

$$|\widehat{f\sigma}(\xi)| \geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi \xi \cdot (x - e_n)) d\sigma_x^{n-1}. \quad (5.18)$$

Vamos mostrar que

$$|2\pi \xi \cdot (x - e_n)| \leq \frac{\pi}{3}, \quad (5.19)$$

para todo $x \in C_\delta$ e $\xi \in R_\delta$. Com efeito, seja $x \in C_\delta$ e $\xi \in R_\delta$. Naturalmente temos $|\xi_i| \leq c/\delta$, para todo $i = 1, \dots, n-1$ e $|\xi_n| \leq c/\delta^2$. Logo,

$$\begin{aligned} |\xi \cdot x - \xi \cdot e_n| &= \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - \xi_n \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i x_i + \xi_n (x_n - 1) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i| |x_i| + |\xi_n| |1 - x \cdot e_n| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c}{\delta} \sqrt{2} \delta + \frac{c}{\delta^2} \delta^2 \\ &= c[\sqrt{2}(n-1) + 1] \\ &= \frac{1}{12n} [\sqrt{2}(n-1) + 1]. \end{aligned}$$

É de rápida verificação que $\frac{1}{12n} [\sqrt{2}(n-1) + 1] < \frac{1}{6}$. Logo, obtemos

$$|\xi \cdot x - \xi \cdot e_n| < \frac{1}{6},$$

e, multiplicando por 2π , obtemos (5.19). Portanto, $\cos(2\pi \xi \cdot (x - e_n)) > 1/2$ para todo $x \in C_\delta$ e $\xi \in R_\delta$. Logo, substituindo isto em (5.18), concluímos a requerida estimativa (5.16). \square

Vejamos a seguir uma propriedade importante do conjunto C_δ do Exemplo de Knapp.

Proposição 5.2.2. Dado $0 < \delta < 1/2$, seja

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\}.$$

Então, $\sigma^{n-1}(C_\delta) \lesssim \delta^{n-1}$ e $\delta^{n-1} \lesssim \sigma^{n-1}(C_\delta)$.

Demonstração. Utilizando (5.17), podemos constatar que o ponto $(x', x_n) \in C_\delta$ se, e somente se, $x' \in B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})$, dessa forma, C_δ é o gráfico da função $f : B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x') = (1 - |x'|^2)^{1/2}$. É de rápida verificação que

$$\nabla f(x') = -\frac{x'}{(1 - |x'|^2)^{1/2}}.$$

Dessa forma, pela Proposição 2.4.12, temos

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) = \int_{B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})} \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx' = \int_{B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})} (1 - |x'|^2)^{-1/2} dx'.$$

Se $x' \in B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})$, então $(1 - |x'|^2)^{-1/2} \geq 1$. Logo ,

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) \geq \mathcal{L}^{n-1}(B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})).$$

Em geral, se T é uma aplicação ortogonal e E é \mathcal{L}^n -mensurável, então $\mathcal{L}^n(T(E)) = |\det T| \mathcal{L}^n(E)$ (FOLLAND, 1999, Teorema 2.44), com isso, obtemos

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) \gtrsim (2\delta^2 - \delta^4)^{(n-1)/2} \geq \delta^{n-1}$$

e, com isso, terminamos a primeira parte da proposição.

Provemos a segunda estimativa. Naturalmente,

$$B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4}) \subset B(0, \sqrt{2}\delta).$$

Isto implica

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) = \int_{B(0, \sqrt{2\delta^2 - \delta^4})} (1 - |x'|^2)^{-1/2} dx' \leq \int_{B(0, \sqrt{2}\delta)} (1 - |x'|^2)^{-1/2} dx'.$$

É claro que $(1 - |x'|^2) \neq 0$ quando $x' \in B(0, \sqrt{2}\delta)$; pois, por hipótese, $\delta \leq 1/2 < 1/\sqrt{2}$. Portanto, a última integral está bem definida. Além disso, se $x' \in B(0, \sqrt{2}\delta)$ é de rápida verificação que

$$(1 - |x'|^2)^{-1/2} < (1 - 2\delta^2)^{-1/2},$$

dessa forma,

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) \leq (1 - 2\delta^2)^{-1/2} \mathcal{L}^{n-1}(B(0, \sqrt{2}\delta)) = (1 - 2\delta^2)^{-1/2} (\sqrt{2}\delta)^{n-1} \mathcal{L}^{n-1}(B(0, 1)),$$

ou seja,

$$\sigma^{n-1}(C_\delta) \lesssim \delta^{n-1} (1 - 2\delta^2)^{-1/2}.$$

Para finalizar, basta observar que $(1 - 2\delta^2)^{-1/2} \leq \sqrt{2}$ sempre que $\delta \leq 1/2$ e concluir que $\sigma^{n-1}(C_\delta) \lesssim \delta^{n-1}$. \square

Finalizamos esta seção com uma propriedade da função $f = \chi_{C_\delta}$ do Exemplo de Knapp. Mais precisamente, o resultado a seguir será utilizado para mostrar a otimalidade dos expoentes do Teorema de Stein-Tomas e também da Conjectura da Restrição na esfera.

Corolário 5.2.3. Seja $f = \chi_{C_\delta}$ com $0 < \delta < 1/2$. Então, para todo $1 \leq p, q < \infty$, temos

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{(n-1)/p} \quad (5.20)$$

e

$$\delta^{n-1-(n+1)/q} \lesssim \|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.21)$$

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 5.2.2, temos

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f|^p d\sigma^{n-1} \right)^{1/p} = \left(\int_{C_\delta} d\sigma^{n-1} \right)^{1/p} = \sigma^{n-1}(C_\delta)^{1/p} \lesssim \delta^{(n-1)/p}.$$

Com isto, provamos (5.20). Por outro lado, pela Proposição 5.2.1 sabemos que

$$|\widehat{f\sigma^{n-1}}(\xi)| \geq \frac{\sigma^{n-1}(C_\delta)}{2}$$

para todo $\xi \in R_\delta$. Além disso, note que o volume de R_δ vale

$$\mathcal{L}^n(R_\delta) = \left(2\frac{c}{\delta}\right)^{n-1} 2\frac{c}{\delta^2} = 2^n c^n \delta^{-(n+1)}. \quad (5.22)$$

Com isso, para $1 \leq q < \infty$, obtemos

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |\widehat{f\sigma^{n-1}}|^q \right)^{1/q} \geq \left(\int_{R_\delta} |\widehat{f\sigma^{n-1}}|^q \right)^{1/q} \geq \frac{\sigma^{n-1}(C_\delta)}{2} \mathcal{L}^n(R_\delta)^{1/q}.$$

Utilizando (5.22) e a Proposição 5.2.2, obtemos

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \gtrsim \delta^{n-1} (2^n c^n \delta^{-(n+1)})^{1/q} \gtrsim \delta^{n-1-(n+1)/q},$$

e, com isso, provamos (5.21). \square

5.3 A conjectura da restrição na esfera \mathbb{S}^{n-1}

Iniciemos esta seção verificando os pares (p, q) que são necessários para que a estimativa

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \quad (5.23)$$

seja verdadeira para toda $f \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$. Claramente a função $f \equiv 1$ está em $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$, para todo p . Além disso, vimos na Proposição 4.1.4 que $\widehat{\sigma^{n-1}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $q > 2n/(n-1)$ e que $\widehat{\sigma^{n-1}} \notin L^{2n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. Logo, a fim de que (5.23) seja válida para $f \equiv 1$, é **necessário** que

$$q > \frac{2n}{n-1}, \quad (5.24)$$

pois do contrário, se

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})},$$

para algum $q_0 < \frac{2n}{n-1}$, então pela Proposição 5.1.5 - (ii) a mesma desigualdade valeria para qualquer $\tilde{q} > q$ e, com isso, teríamos uma contradição ao tomar $f \equiv 1$ e $\tilde{q} = 2n/(n-1)$.

Por outro lado, a fim de que (5.23) seja verdadeira para $f = \chi_{C_\delta}$, com C_δ como no Exemplo de Knapp (ver a Proposição 5.2.1), pelo Corolário 5.2.3 é necessário que

$$\delta^{n-1-(n+1)/q} \lesssim \|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{(n-1)/p},$$

para δ suficientemente pequeno, ou seja, é necessário que $\delta^{n-1-(n+1)/q-(n-1)/p} \lesssim 1$, isto é,

$$\delta^{(n-1)/p'-(n+1)/q} \lesssim 1. \quad (5.25)$$

Se o expoente na expressão (5.25) for negativo, então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{(n-1)/p'-(n+1)/q} = \infty,$$

o que não pode ocorrer. Com isso, obtemos uma segunda condição **necessária** para que (5.23) ocorra:

$$q \geq \frac{(n+1)}{n-1} p'. \quad (5.26)$$

Ainda, pela Proposição 5.1.5 - (ii), se (5.23) ocorre para $q = (n+1)p'/(n-1)$, então a mesma valerá para qualquer $\tilde{q} > (n+1)p'/(n-1)$, dessa forma, a condição (5.26) é equivalente a:

$$q = \frac{(n+1)}{n-1} p'. \quad (5.27)$$

A **conjectura da extensão** na esfera pergunta se as condições necessárias (5.24), (5.27) para (5.23) também são suficientes.

Conjectura 5.3.1 (Extensão). A estimativa

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \quad (5.28)$$

é válida sempre que

$$q > \frac{2n}{n-1} \quad (5.29)$$

e

$$q = \frac{(n+1)}{n-1} p', \quad (5.30)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$.

Graças à Proposição 5.1.5, poderíamos ter colocado $q \geq (n+1)p'/(n-1)$ em (5.30). Além disso, utilizando as equivalências da Proposição 5.1.4, a estimativa (5.28) é equivalente a

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ com

$$q' = \frac{(n+1)p'}{(n+1)p' - (n-1)} \quad \text{e} \quad 1 \leq q' < \frac{2n}{n+1}.$$

Assim, podemos enunciar a conjectura da extensão na esfera da seguinte forma equivalente.

Conjectura 5.3.2 (Restrição). A estimativa

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (5.31)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é válida sempre que

$$1 \leq p < \frac{2n}{n+1} \quad (5.32)$$

e

$$p = \frac{(n+1)q}{(n+1)q - (n-1)}. \quad (5.33)$$

Pela Proposição 5.1.5, poderíamos ter colocado $1 \leq p \leq \frac{(n+1)q}{(n+1)q - (n-1)}$ em (5.33). Devido às equivalências utilizadas, as condições (5.32) e (5.32) também são necessárias para (5.31). Além disso, pela condição (5.32), a estimativa $\mathcal{R}_{\mathbb{S}^{n-1}}(2 \rightarrow q)$ nunca é válida para nenhum q .

Stein foi o primeiro matemático a formular a Conjectura da Restrição nos anos 70 (STEIN, 1979). Esta conjectura foi provada para o caso $n = 2$ e iremos explorar isto na Seção 5.4. No entanto, para o caso $n \geq 3$ é um problema em aberto da análise de Fourier e apenas resultados parciais são conhecidos. Uma resposta completa é dada quando $p = 2$ pelo Teorema da extensão de Stein-Thomas.

Teorema 5.3.3. (TOMAS, 1975; STEIN, 1993) Para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, a estimativa

$$\|\widehat{f\sigma^{n-1}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$$

é válida para todo $q \geq 2(n+1)/(n-1)$, com $n \geq 2$. Além disso, o limitante inferior $2(n+1)/(n-1)$ é ótimo.

Não iremos exibir a prova deste resultado, pois, iremos provar na Seção 6.1 o Teorema de Mockenhaupt-Mitsis, o qual generaliza o mesmo, sem o end-point. Também, na Seção 6.4, iremos provar o caso end-point de tal resultado.

Por (5.26), podemos também concluir também que o end-point no Teorema de Stein-Tomas é de fato ótimo, bastando tomar $p = 2$. De maneira equivalente, temos o Teorema de restrição de Stein-Tomas.

Teorema 5.3.4. (TOMAS, 1975; STEIN, 1993) Para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, a estimativa

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (5.34)$$

é válida sempre que $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$.

Historicamente, Stein provou este teorema para o range $1 \leq p < \frac{4n}{3n+1}$ e quando $n = 2$, Fefferman em (FEFFERMAN, 1970) estendeu o range para $1 \leq p < 6/5$.

5.4 A conjectura da restrição em curvas no \mathbb{R}^2

Nesta seção, temos o objetivo de mostrar que a Conjectura 5.3.2 é válida em \mathbb{R}^2 , não só na esfera, mas em qualquer curva suave compacta com curvatura não nula. O texto básico utilizado nesta seção foram (MATTILA, 2015, Seção 20.3) e (SOGGE, 2017, Seção 2.2).

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular compacta e σ sua medida intrínseca. Por (4.37), é suficiente trabalharmos com uma medida dada por $\mu = \zeta\sigma$, com $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sendo positiva e iremos supor que $\text{supp}(\zeta) \cap S$ é o gráfico da função real φ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Com isso, sabemos que

$$\int_{\text{supp}(\zeta)} g d\mu = \int_U g(x, \varphi(x)) \psi(x) dx, \quad (5.35)$$

com $\psi(x) = \zeta(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}$. Utilizando o Lema 2.3.20 de existência de funções de corte, escolha uma função $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa com $\eta(0) = 1$ e defina o operador

$$T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \Phi(x, \xi)} \Psi(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (5.36)$$

com $x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, com

$$\Phi(x, \xi) = -2\pi(\tilde{x} \cdot \xi + \varphi(\xi)x_n), \quad \Psi(x, \xi) = \eta(x)(\psi(\xi))^{1/p'}$$

$p \geq 1$ e $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. O motivo pelo qual estamos envolvendo a função de corte η ficará mais claro quando vemos as hipóteses do Teorema 5.4.2 (Carleson-Sjölin). É de rápida verificação

que

$$\widehat{f\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\Phi(y,\xi)} f(\xi, \varphi(\xi)) \psi(\xi) d\xi. \quad (5.37)$$

Vejam os um resultado que nos dá uma condição suficiente para que ocorra a desigualdade de extensão para a medida μ .

Lema 5.4.1. Suponha que existam $p, q \geq 1$ satisfazendo

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-n/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad (5.38)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, com $T_\lambda f$ definido em (5.36). Com isto vale a desigualdade

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mu)},$$

para toda $f \in L^p(\mu)$, com $\mu = \zeta\sigma$, como anteriormente.

Demonstração. Seja $f \in L^p(\mu)$ e defina $\tilde{f}(x) = f(x, \varphi(x))(\psi(x))^{1/p}$. Naturalmente temos $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, pois,

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{f}(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x, \varphi(x))|^p \psi(x) dx = \int_{\text{supp}(\zeta)} |f|^p d\mu = \|f\|_{L^p(\mu)}^p < \infty.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} T_\lambda \tilde{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \Psi(x, \xi) \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \Psi(x, \xi) f(\xi, \varphi(\xi)) (\psi(\xi))^{1/p} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \eta(x) (\psi(\xi))^{1/p'} f(\xi, \varphi(\xi)) (\psi(\xi))^{1/p} d\xi \\ &= \eta(x) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} f(\xi, \varphi(\xi)) \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Logo, observando que $\alpha\Phi(x, \xi) = \Phi(\alpha x, \xi)$, para todo $\alpha \neq 0$ e utilizando a identidade (5.37), obtemos

$$T_\lambda \tilde{f}(\lambda^{-1}x) = \eta(\lambda^{-1}x) \widehat{f\mu}(x).$$

A seguinte propriedade de dilatação é de rápida verificação para qualquer função $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$,

$$\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-n/q} \|g(\lambda^{-1}\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Com isso, obtemos

$$\|T_\lambda \tilde{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-n/q} \|T_\lambda \tilde{f}(\lambda^{-1}\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-n/q} \|\eta(\lambda^{-1}\cdot) \widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Aplicando (5.38) a \tilde{f} e multiplicando por $\lambda^{n/q}$ obtemos a desigualdade

$$\|\eta(\lambda^{-1}\cdot)\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Uma vez que $\eta(\lambda^{-1}y) \rightarrow 1$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, tomando o limite na última desigualdade quando $\lambda \rightarrow \infty$ (via Teorema da Convergência Dominada), obtemos

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mu)},$$

e, com isso, finalizamos a demonstração. \square

Diante do Lema 5.4.1 podemos nos perguntar se existem índices (p, q) que façam (5.38) ser verdadeira. Nesta seção, iremos apresentar a prova do Teorema 5.4.2 (Carleson-Sjölin) e este irá nos fornecer condições para que uma desigualdade semelhante a (5.38) seja verdadeira em \mathbb{R}^2 para funções Ψ, Φ mais gerais com certos índices p, q . Antes de provamos tal resultado, precisamos de algumas ferramentas.

O próximo resultado é devido a Carleson e Sjölin no artigo (CARLESON; SJÖLIN, 1972) sobre integrais oscilatórias e com ele mostraremos que a Conjectura da Restrição é válida para curvas suaves compactas com curvatura Gaussiana não nula.

Teorema 5.4.2 (Carleson-Sjölin). Sejam $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ tais que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial t^2}(x, t) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, t) \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_2 \partial t^2}(x, t) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5.39)$$

para todo $(x, t) \in \text{supp}(\Psi)$. Defina o operador

$$T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x,t)} \Psi(x, t) f(t) dt,$$

com $x \in \mathbb{R}^2$, $\lambda > 0$. Então,

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \lambda^{-2/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (5.40)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, $q = 3p'$ e $q > 4$.

Existem outras duas versões do Teorema 5.4.2, uma provada em (HÖRMANDER, 1973) e outra em (FEFFERMAN, 1970). Todavia, iremos nos concentrar na prova dada por Carleson e Sjölin. A mesma é bastante técnica, por isso, antes de provarmos o mesmo, vejamos como este pode ser usado para provar a Conjectura 5.3.2 para uma curva suave compacta com curvatura não nula no \mathbb{R}^2 . É importante frisar que este caso da Conjectura foi inicialmente provado por Zygmund no artigo (ZYGmund, 1974, Teorema 3) apenas para a esfera.

Teorema 5.4.3. Suponha que $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva C^∞ compacta com curvatura Gaussiana não nula em todo ponto. Então,

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (5.41)$$

sempre que $q = \frac{1}{3}p'$ e $1 \leq p < \frac{4}{3}$.

Demonstração. Pelos comentários do início desta seção, é suficiente provar (5.41) para a medida $\mu = \zeta\sigma$, com $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ sendo positiva e iremos supor que $\text{supp}(\zeta) \cap \gamma$ é o gráfico da função real φ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}$. Temos o interesse de utilizar o que provamos no Lema 5.4.1 para a curva γ , por isso, vamos mostrar que as funções

$$\Phi(x, \xi) = -2\pi(x_1\xi + \varphi(\xi)x_2) \text{ e } \Psi(x, \xi) = \eta(x)(\psi(\xi))^{1/p'},$$

satisfazem as hipóteses do Teorema 5.4.2 (Carleson-Sjölin), com $\psi(\xi) = \zeta(\xi, \varphi(\xi))\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}$. De fato, neste momento percebemos a importância da função η , pois a mesma faz com que $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, note que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial^2 \xi \partial x_1}(x, \xi) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial x_1}(x, \xi) \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial^2 \xi \partial x_2}(x, \xi) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial x_2}(x, \xi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2\pi \\ -2\pi\varphi''(\xi) & -2\pi\varphi'(\xi) \end{vmatrix} = -4\pi^2\varphi''(\xi). \quad (5.42)$$

Por outro lado, sabemos que a curvatura Gaussiana de uma superfície regular é dada pelo determinante da segunda forma fundamental da mesma (veja a Definição 9), além disso, pela Proposição 2.4.24 sabemos que a matriz da segunda forma fundamental da curva γ , na vizinhança coordenada dada pelo gráfico da função φ , é dada por

$$[II_{\varphi(\xi)}] = (1 + \varphi'(\xi)^2)^{-1/2} \text{Hess}_{\varphi}(\xi) = (1 + \varphi'(\xi)^2)^{-1/2}\varphi''(\xi).$$

É de rápida verificação que o determinante (5.42) não depende da variável x . Logo, a hipótese de que γ tem curvatura Gaussiana não nula em todos os pontos do domínio de φ nos faz concluir que o mesmo é não nulo, para todo (x, ξ) em $\text{supp}(\Psi)$. Portanto, pelo Teorema 5.4.2 (Carleson-Sjölin), obtemos

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \lambda^{-2/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (5.43)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, $q = 3p'$ e $q > 4$. Logo, pelo Lema 5.4.1, concluímos que

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mu)}, \quad (5.44)$$

para toda $f \in L^p(\mu)$ com $q = 3p'$ e $q > 4$. Lembre que a Proposição 5.1.4 nos diz que a

desigualdade (5.44) é equivalente à sua desigualdade dual, a saber

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}, \quad (5.45)$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^2)$ com $q = 3p'$ e $q > 4$. Como γ é compacta, por meio da identidade (4.37), concluímos que a desigualdade a seguir é válida:

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}, \quad (5.46)$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^2)$ com $q = 3p'$ e $q > 4$. Por outro lado, a condição $q > 4$ nos dá $-1/4 < -1/q$. Logo,

$$\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

isto é, $q' < 4/3$. Além disso, trivialmente vale a condição $1 \leq q'$. Portanto, provamos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}, \quad (5.47)$$

para toda $f \in L^q(\mathbb{R}^2)$ com $p' = \frac{1}{3}q$ e $1 \leq q' < 4/3$. Isto é exatamente a requerida estimativa (5.41), bastando apenas fazer uma reindexação, por exemplo, faça $r = q'$ e $s = p'$. Logo,

$$\|\widehat{f}\|_{L^s(\gamma)} \lesssim \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}, \quad (5.48)$$

para toda $f \in L^r(\mathbb{R}^2)$ com $s = \frac{1}{3}r'$ e $1 \leq r < 4/3$. □

Vejamos a **demonstração** do Teorema 5.4.2. Primeiramente, seja $f \in L^p(\mathbb{R})$ com $q = 3p'$, $q > 4$. Lembrando da propriedade $|z|^2 = |z^2|$, $z \in \mathbb{C}$, é de rápida verificação que

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} = \|(T_\lambda f)^2\|_{L^{q/2}(\mathbb{R}^2)}^{1/2}. \quad (5.49)$$

Portanto, iremos nos concentrar em explorar as propriedades de $(T_\lambda f)^2$. Naturalmente, temos

$$\begin{aligned} (T_\lambda f(x))^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi_1)} \Psi(x, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi_2)} \Psi(x, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda[\Phi(x,\xi_1) + \Phi(x,\xi_2)]} \Psi(x, \xi_1) \Psi(x, \xi_2) f(\xi_1) f(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$(T_\lambda f(x))^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda F(x,\xi)} G(x, \xi) h(\xi) d\xi, \quad (5.50)$$

com

$$F(x, \xi) = \Phi(x, \xi_1) + \Phi(x, \xi_2), \quad G(x, \xi) = \Psi(x, \xi_1) \Psi(x, \xi_2) \text{ e } h(\xi) = f(\xi_1) f(\xi_2),$$

com $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Gostaríamos de aplicar o Corolário 4.2.9 às funções F e G , todavia não podemos fazer isto pois o determinante da função F se anula na diagonal $\{\xi_1 = \xi_2\}$. De fato, naturalmente temos

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \xi_1}(x, \xi_1) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \xi_2}(x, \xi_2) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial \xi_1}(x, \xi_1) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial \xi_2}(x, \xi_2) \end{vmatrix},$$

para todo $(x, \xi) \in \text{supp}(G)$. Além disso, é de rápida verificação que $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, dessa forma,

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_2) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_2). \quad (5.51)$$

Portanto, quando $\xi_1 = \xi_2$ claramente a última expressão se anula. Apesar deste problema, afirmamos que

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) = \mathcal{K}(x, \xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + O(|\xi_2 - \xi_1|^2), \quad (5.52)$$

com

$$\mathcal{K}(x, \xi_1) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_2 \partial t^2}(x, \xi_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_1) - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial t^2}(x, \xi_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_1).$$

Para a definição do grande- O veja (4.8). Fixado x , defina as funções a e b por

$$a(t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, t) \quad \text{e} \quad b(t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, t).$$

Logo, pela Fórmula de Taylor e usando a expansão do Resto de Lagrange (LIMA, 2014b, Capítulo III, Seção 8) sabemos que

$$a(\xi_2) = a(\xi_1) + a'(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + r_1(\xi_2 - \xi_1) \quad (5.53)$$

e

$$b(\xi_2) = b(\xi_1) + b'(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + r_2(\xi_2 - \xi_1) \quad (5.54)$$

com

$$r_1(\xi_2 - \xi_1) = \frac{1}{2} a''(\xi_1 + \theta_1(\xi_2 - \xi_1))(\xi_2 - \xi_1)^2, \quad (5.55)$$

e

$$r_2(\xi_2 - \xi_1) = \frac{1}{2} b''(\xi_1 + \theta_2(\xi_2 - \xi_1))(\xi_2 - \xi_1)^2, \quad (5.56)$$

para certos $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. É de rápida verificação que

$$a'(\xi_1) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_2 \partial t^2}(x, \xi_1) \quad \text{e} \quad b'(\xi_1) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial t^2}(x, \xi_1).$$

Logo, substituindo (5.53), (5.54) na identidade (5.51); após um cancelamento, obtemos

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_1) a(\xi_2) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_1) b(\xi_2) \\ &= \mathcal{K}(x, \xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + A(x, \xi) - B(x, \xi), \end{aligned}$$

com

$$A(x, \xi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_1) r_1 (\xi_2 - \xi_1)$$

e

$$B(x, \xi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_1) r_2 (\xi_2 - \xi_1).$$

Com isso, por (5.55) e (5.56), obtemos

$$\left| \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) - \mathcal{K}(x, \xi_1)(\xi_2 - \xi_1) \right| \leq M |\xi_2 - \xi_1|^2, \quad (5.57)$$

com M sendo o máximo da seguinte função no suporte de Ψ :

$$\mathcal{P}(x, \xi) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}(x, \xi_1) a''(\xi_1 + \theta_1(\xi_2 - \xi_1)) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t}(x, \xi_1) b''(\xi_1 + \theta_2(\xi_2 - \xi_1)) \right|$$

e, com isso, mostramos o que afirmamos em (5.52). Vamos mostrar que se $\text{supp}(\Psi)$ é suficientemente pequeno, então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\left| \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) \right| \geq c |\xi_2 - \xi_1|, \quad (5.58)$$

para todo $(x, \xi) \in \text{supp}(G)$. De fato, a partir de (5.57), usando a desigualdade triangular contrária, obtemos

$$(|\mathcal{K}(x, \xi_1)| - M |\xi_2 - \xi_1|) |\xi_2 - \xi_1| \leq \left| \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) \right|. \quad (5.59)$$

A hipótese (5.39) claramente implica $\mathcal{K}(x, \xi_1) \neq 0$ sempre que $(x, \xi_1) \in \text{supp}(\Psi)$. Logo, seja α o mínimo de \mathcal{K} em $\text{supp}(\Psi)$. Supondo que o suporte de Ψ é suficientemente pequeno de modo que $|\xi_2 - \xi_1| < \alpha/2M$ quando $(x, \xi) \in \text{supp}(G)$, temos

$$|\mathcal{K}(x, \xi_1)| - M |\xi_2 - \xi_1| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

e, portanto, (5.58) é válido.

No que segue, queremos fazer uma mudança de variável na integral em (5.50) para que apenas apareça uma certa região de modo que a diagonal $\{\xi_1 = \xi_2\}$ não cause problemas. Para tanto, iremos usar fortemente a propriedade de simetria das funções F, G e h na variável ξ , isto é,

$$F(x, \xi_1, \xi_2) = F(x, \xi_2, \xi_1), \quad G(x, \xi_1, \xi_2) = G(x, \xi_2, \xi_1) \quad \text{e} \quad h(x, \xi_1, \xi_2) = h(x, \xi_2, \xi_1). \quad (5.60)$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação dada por $g(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2, \xi_1 \xi_2)$. Naturalmente, o conjunto imagem de g é dado por $V = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2 : \zeta_1^2 \geq 4\zeta_2\}$. Ainda, note que, dado $(\zeta_1, \zeta_2) \in \text{Im}(g)$ temos que $g(\xi_1, \xi_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$, com

$$(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2}, \frac{\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2} \right) \quad (5.61)$$

ou

$$(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2}, \frac{\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2} \right). \quad (5.62)$$

Em outras palavras, g não é injetiva. Todavia, o vetor em (5.61) está na região acima da diagonal $\{\xi_1 = \xi_2\}$ enquanto o vetor em (5.62) está na região abaixo da mesma. Além disso, note que quando (ζ_1, ζ_2) está na Parábola $P = \{\zeta_1^2 = 4\zeta_2\}$, os vetores mencionados são iguais. Dessa forma, se restringirmos, sem perda de generalidade, o domínio de g ao aberto

$$U = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_2 > \xi_1\}$$

temos que a mesma é um difeomorfismo de classe C^∞ , de U em $V = \text{Im}(g) \setminus P$. Com isso, podemos definir as funções de classe C^∞

$$\tilde{\Phi}(x, \zeta) = F(x, g^{-1}(\zeta)), \quad \tilde{\Psi}(x, \zeta) = G(x, g^{-1}(\zeta)),$$

com $\zeta \in V$. Além disso, pelas nossas escolhas, temos

$$g^{-1}(\zeta) = (\xi_1(\zeta), \xi_2(\zeta)) = \left(\frac{\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2}, \frac{\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\zeta_2}}{2} \right).$$

Precisamos relacionar os determinantes das matrizes Hessiana de $\tilde{\Phi}$ e F e, para tanto, defina as funções

$$G_x(\xi) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, \xi), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x, \xi) \right)$$

e

$$\tilde{G}_x(\zeta) = \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}(x, \zeta), \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2}(x, \zeta) \right).$$

É de rápida verificação, usando a regra da cadeia, que $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i}(x, \zeta) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g^{-1}(\zeta))$, dessa forma obtemos $G_x = \tilde{G}_x \circ g$. Além disso, dado $\xi \in U$ deduzimos que

$$d(G_x)_\xi = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right).$$

Ainda, com um simples cálculo podemos constatar que $\det(dg_\xi) = \xi_1 - \xi_2$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial \xi_k}(x, \xi) \right) &= \det(d(\tilde{G}_x)_{g(\xi)}) \det(dg_\xi) \\ &= \det \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial \zeta_j}(x, g(\xi)) \right) (\xi_1 - \xi_2). \end{aligned}$$

Portanto, por (5.58), temos

$$\left| \det \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial \zeta_j}(x, g(\xi)) \right) \right| \geq c,$$

para todo $(x, \xi) \in \text{supp}(G)$, ou seja

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial \zeta_j}(x, \zeta) \right) \neq 0, \quad (5.63)$$

sempre que $(x, \zeta) \in \text{supp}(\tilde{\Psi})$. Pela simetria das funções F , G e h que vimos em (5.60), podemos reescrever a integral (5.50) da seguinte forma:

$$(T_\lambda f(x))^2 = 2 \int_U e^{i\lambda F(x, \xi)} G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Aplicando o Teorema 2.4.10 (mudança variável) à última integral com o difeomorfismo g^{-1} , obtemos

$$(T_\lambda f(x))^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda \tilde{\Phi}(x, \zeta)} \tilde{\Psi}(x, \zeta) \tilde{h}(\zeta) d\zeta, \quad (5.64)$$

com

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{h(g^{-1}(\zeta))}{|\xi_1(\zeta) - \xi_2(\zeta)|} = \frac{f(\xi_1(\zeta))f(\xi_2(\zeta))}{|\xi_1(\zeta) - \xi_2(\zeta)|},$$

quando $\zeta \in V$. É importante observar que as funções $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ e \tilde{h} na integral de (5.64) não estão

definidas "fora" de V , porém, é suficiente que $\tilde{\Phi}$ seja uma função suave numa vizinhança de $\text{supp}(\tilde{\Psi})$, sendo assim, em tal integral, estamos supondo sem perda de generalidade, que as funções já mencionadas são nulas "fora" de um aberto contendo o suporte de $\tilde{\Psi}$.

Com a nossa mudança de variável ganhamos por um lado, já que o determinante em (5.63) é não nulo e perdemos por outro, pois \tilde{h} tem uma singularidade quando ζ está na parábola P , contudo, iremos mostrar que a função \tilde{h} tem boas propriedades.

Defina r por $2r' = q$, isto, $r = \frac{q}{q-2}$. Com isso, tomando o módulo em (5.64), elevando a r' e integrando na variável x , obtemos

$$\|(T_\lambda f)^2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}^{r'} = \int_{\mathbb{R}^2} |(T_\lambda f(x))^{2r'}| dx = 2^{r'} \int_{\mathbb{R}^2} |L_\lambda \tilde{h}(x)|^{r'} dx = 2^{r'} \|L_\lambda \tilde{h}\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}^{r'}, \quad (5.65)$$

com

$$L_\lambda \tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda\tilde{\Phi}(x,\zeta)} \tilde{\Psi}(x,\zeta) \tilde{h}(\zeta) d\zeta.$$

Lembre que estamos supondo que $f \in L^p(\mathbb{R})$ com $q = 3p'$ e $q > 4$. Além disso, podemos supor que $q < \infty$, pois do contrário, teríamos $p = 1$ e a desigualdade (5.40) é claramente válida neste caso. Por outro lado, é de rápida verificação que $1 < r < 2$, dessa forma, para que possamos usar o Corolário 4.2.9 para estimar $\|L_\lambda \tilde{h}\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}$ precisamos nos certificar que $\tilde{h} \in L^r(\mathbb{R})$, sempre que $q = 3p'$ e $4 < q < \infty$. Novamente, usando o Teorema 2.4.10 (mudança variável) ao difeomorfismo g , obtemos

$$\begin{aligned} \int_V |\tilde{h}(\zeta)|^r d\zeta &= \int_U |\tilde{h}(g(\xi))|^r |\xi_1 - \xi_2| d\xi \\ &= \int_U |h(\xi)| |\xi_1 - \xi_2|^{-1} |\xi_1 - \xi_2|^r d\xi \\ &= \int_U |f(\xi_1) f(\xi_2)|^r |\xi_1 - \xi_2|^{1-r} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_1)|^r |f(\xi_2)|^r |\xi_1 - \xi_2|^{1-r} d\xi. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_V |\tilde{h}(\zeta)|^r d\zeta \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi_1)|^r |f(\xi_2)|^r |\xi_1 - \xi_2|^{1-r} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^r (K_{r-1} * |f|^r). \quad (5.66)$$

Seja $\alpha = p/r$. Precisamos verificar que $1 < \alpha$ para podermos aplicar a Desigualdade de Hölder na última integral. De fato, claramente temos que

$$\frac{3}{3p' - 2} < \frac{1}{p' - 1}, \quad (5.67)$$

pois, como $3p' > 4$, segue que $p' - 1 > 0$ e, conseqüentemente, $3p' - 2 > 0$. Logo, multiplicando

(5.67) por p' e usando o fato de que $3p' = q$ e $q = 2r'$, deduzimos que

$$p = \frac{p'}{p' - 1} > \frac{3p'}{3p' - 2} = \frac{q}{q - 2} = \frac{2r'}{2r' - 2} = \frac{r'}{r' - 1} = r. \quad (5.68)$$

Com isto concluímos que $1 < \alpha$, o que nos permite aplicar a Desigualdade de Hölder à última integral em (5.66) para obter

$$\int_V |\tilde{h}(\zeta)|^r d\zeta \leq \| |f|^r \|_{L^\alpha(\mathbb{R})} \| K_{r-1} * |f|^r \|_{L^{\alpha'}(\mathbb{R})} = \| f \|_{L^p(\mathbb{R})}^r \| K_{r-1} * |f|^r \|_{L^{\alpha'}(\mathbb{R})}. \quad (5.69)$$

Neste momento queremos aplicar a desigualdade (A.35); a qual obtivemos como consequência da Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev para funções de uma variável, à função $g = |f|^r$, $\gamma = r - 1$ e $s = \alpha$, porém, precisamos nos certificar que estes satisfazem (A.36). Com efeito, já vimos que $1 < r < 2$, dessa forma é verdade que $0 < \gamma < 1$. Começemos mostrando que

$$\frac{2}{\alpha} = 2 - \gamma. \quad (5.70)$$

É de rápida verificação que a hipótese $q = 3p'$ implica $2 = 2p - 6p/q$, dessa forma, como $2r' = q$, obtemos

$$2 = 2p - \frac{6p}{2r'} = 2p - \frac{3p}{r'} = \left(2 - \frac{3}{r'}\right)p = \left(3\left(1 - \frac{1}{r'}\right) - 1\right)p = \left(\frac{3}{r} - 1\right)p = (3 - r)\alpha$$

e, com isso, obtemos (5.70). Para mostrar que γ e α satisfazem (A.36) só nos resta verificar que $1 < \alpha < 2$. De fato, pelas hipóteses $q > 4$ e $3p' = q$, temos que $4 < 3p'$. Isto implica $(3p' - 2)/(p' - 1) < 6$. Logo, multiplicando isto por p' , obtemos $(3p' - 2)/p < 6p'$. Como $2r' = q$, concluímos que

$$p < \frac{6p'}{3p' - 2} = \frac{2q}{q - 2} = \frac{4r'}{2r' - 2} = 2\frac{r'}{r' - 1} = 2r$$

e portanto $\alpha < 2$. O caso $1 < \alpha$ já foi mostrado em (5.68). Com isso, podemos usar a Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev (A.35) com a função $g = |f|^r$, $\gamma = r - 1$ e $s = \alpha$ para concluir que

$$\| K_\gamma * |f|^r \|_{L^{\alpha'}(\mathbb{R})} \lesssim \| |f|^r \|_{L^\alpha(\mathbb{R})} = \| f \|_{L^p(\mathbb{R})}^r. \quad (5.71)$$

Logo, por (5.69), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{h}(\zeta)|^r d\zeta \lesssim \| f \|_{L^p(\mathbb{R})}^{2r} < \infty, \quad (5.72)$$

já que estamos supondo $f \in L^p(\mathbb{R})$. Portanto, a função \tilde{h} está em $L^r(\mathbb{R}^2)$. Logo, pelo Corolário

4.2.9 e por (5.72), obtemos a estimativa

$$\|L_\lambda \tilde{h}\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \lambda^{-2/r'} \|\tilde{h}\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \lesssim \lambda^{-2/r'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^2.$$

Com isto, e por (5.65), concluimos que

$$\|(T_\lambda f)^2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}^{r'} \lesssim 2^{r'} \lambda^{-2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{2r'}.$$

Além disso, lembre que (5.49) nos diz que

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^2 = \|(T_\lambda f)^2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}$$

e, portanto, obtemos

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \lambda^{-1/r'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Como $2r' = q$, obtemos (5.40) e, com isso, finalizamos a demonstração. \square

5.5 Teorema de Greenleaf-Littman

Nesta seção, iremos exibir a demonstração do Teorema de Greenleaf-Littman, o qual generaliza o Teorema de Stein-Tomas. As referências principais foram (GREENLEAF, 1981), (LITTMAN, 1963) e (STRICHARTZ, 1977). Como leitura complementar também utilizamos (SANTOS, 2020) e (MUSCALU; SCHLAG, 2013).

Teorema 5.5.1. Seja S uma superfície regular compacta do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ e σ a medida intrínseca à mesma. Se S tem $l \neq 0$ curvaturas principais não nulas em todo ponto, então

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.73)$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq p_l = (2l + 4)/(l + 4)$.

Demonstração. Primeiramente, quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sabemos que \hat{f} é contínua, logo, devido à compacidade de S , temos

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\sigma)}^2 = \int_S |\hat{f}|^2 d\sigma \leq \sigma(S) \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Portanto,

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.74)$$

Suponha que

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.75)$$

Seja $1 < p < p_l$ e $\theta \in (0, 1)$ satisfazendo

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p_l} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2}.$$

Tal valor existe, basta tomar $\theta = \frac{(1-p)p_l}{(1-p_l)p}$. Aplicando o Teorema de interpolação de Riesz-Thorin em (5.74) e (5.75), obtemos

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e provamos o resultado. Só nos resta provar (5.75) e, para tanto, pelo método TT^* (Proposição 5.1.4), é suficiente mostrar que

$$\|\widehat{\sigma} * f\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^n)}, \quad (5.76)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dado $p_j \in S$, seja $\{U_j, \alpha_j\}$ uma parametrização de S em p_j . Logo, $\{\alpha_j(U_j)\}_{j \in J}$ é uma cobertura aberta para S . Pela Observação 2.4.8 podemos supor que tal é localmente finita e enumerável. Pela Proposição 2.4.9 (existência de partição da unidade) seja $\{\varphi_j\}_{j \in N}$ uma partição da unidade subordinada a tal cobertura. Portanto, extraindo uma subcobertura finita, podemos escrever

$$\widehat{\sigma} * f = \sum_{j=1}^N \varphi_j \widehat{\sigma} * f. \quad (5.77)$$

Portanto a medida $\widehat{d\mu}_j = \varphi_j \widehat{\sigma}$ está suportada numa vizinhança coordenada $\alpha_j(U_j)$. Podemos supor que o aberto $\alpha_j(U_j)$ é o gráfico de uma função ϕ_j de classe C^1 . Além disso, supondo que $\nabla \phi_j \equiv 0$, pela Proposição 2.4.24 as curvaturas principais de S em $(x, \phi_j(x))$ são os autovalores da matriz $\text{Hess}_{\phi_j}(x)$ (veja também a Observação 2.4.25). Por hipótese, o número de curvaturas principais não nulas em cada ponto de $\alpha_j(U_j)$ é l . Iremos denotar $x = (x', t) \in \mathbb{R}^n$. Logo, pela compacidade de S pelo Corolário 4.4.2, vale o decaimento $|\widehat{d\sigma}(x', t)| \lesssim |(x', t)|^{-l/2}$. Consequentemente

$$|\widehat{d\sigma}(x', t)| \lesssim |t|^{-l/2}.$$

Com a notação fixada e pelo Teorema de Fubini, podemos escrever

$$K_j * f(x', t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t - s) f_s(y') dy ds,$$

com $K_j = \widehat{d\mu_j}$ e $f_s(y') = f(y', s)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina o operador de evolução

$$U_j(t)h(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x' - y', t)h(y')dy' = (K_j(\cdot, t) * h)(x'),$$

para toda $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Logo,

$$|U_j(t)h(x')| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi_j(x' - y', t)\widehat{\sigma}(x' - y', t)||h(y')|dy' \leq c\|\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|t|^{-l/2}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Com isto, obtemos

$$\|U_j(t)h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim |t|^{-l/2}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (\text{Dispersão})$$

Por outro lado, pela identidade de Plancherel, obtemos

$$\|U_j(t)h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \|\widehat{K_j(\cdot, t)h}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\widehat{K_j(\cdot, t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Sabemos que $\|\widehat{K_j(\cdot, t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|K_j(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}$. Além disso, supondo que $\text{supp}(\varphi_j) \subset B(0, r)$, é claro que $\text{supp}(K_j) \subset B(0, r)$. Logo, $\text{supp}(K_j(\cdot, t)) \subset B(0, r) \cap \mathbb{R}^{n-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, suponha que $|x'| \geq r$ e seja $t \in \mathbb{R}$. Daí, $|(x', t)| \geq |x'| \geq r$, o que implica, $K_j(x', t) = 0$. Além disso, utilizando a continuidade de K_j , obtemos

$$\|K_j(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |K_j(x', t)|dx' = \int_{B(0, r) \cap \mathbb{R}^{n-1}} |K_j(x', t)|dx' \leq C\|K_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

com $C = L^{n-1}(B(0, r) \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Portanto,

$$\|U_j(t)h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|K_j(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|K_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Com isto, obtemos

$$\|U_j(t)h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (\text{Energia})$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p_l} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p'_l} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}.$$

O número θ existe, basta tomar $\theta = 2/p'_l$, com $p'_l = (2l+4)/l$. Logo, podemos usar o Teorema de interpolação de Riesz-Thorin para interpolar a estimativa de dispersão e energia anteriores para obter

$$\|U_j(t)h\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim |t|^{-l/2(1-\theta)}\|h\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^{n-1})} = |t|^{-\lambda(l)}\|h\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad (5.78)$$

com $\lambda(l) = l/(l+2)$. Suponha que

$$\|K_j * f\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|K_{\lambda(l)} * m\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R})}, \quad (5.79)$$

com $K_{\lambda(l)}$ sendo o Núcleo de Riesz e $m(s) = \|f_s\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Note que p_l e $\lambda(l)$ satisfazem $0 < \lambda(l) < 1$, $1 < p_l < 2$ e $\frac{2}{p_l} = 2 - \lambda(l)$. Com isto, podemos usar a Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev (A.35) para concluir que

$$\|K_{\lambda(l)} * m\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R})} \lesssim \|m\|_{L^{p_l}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.80)$$

Portanto,

$$\|K_j * f\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^n)},$$

o que é suficiente para provar (5.76) usando a decomposição (5.77). Só nos resta provar (5.79). Com efeito,

$$\begin{aligned} \|K_j * f\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^n)}^{p'_l} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |K_j * f(x', t)|^{p'_l} dx' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}} U_j(t-s) f_s(x') ds \right|^{p'_l} dx' dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |U_j(t-s) f_s(x')| ds \right)^{p'_l} dx' dt. \end{aligned}$$

Além disso, dado $t \in \mathbb{R}$, pela desigualdade de Minkowski para integrais (FOLLAND, 1999, 6.19), temos

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |U_j(t-s) f_s(x')| ds \right)^{p'_l} dx' \right]^{1/p'_l} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |U_j(t-s) f_s(x')|^{p'_l} dx' \right]^{1/p'_l} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|U_j(t-s) f_s\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^{n-1})} ds. \end{aligned}$$

Com isto, e por (5.78), obtemos

$$\begin{aligned} \|K_j * f\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^n)}^{p'_l} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|U_j(t-s) f_s\|_{L^{p'_l}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right)^{p'_l} dt \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\lambda(l)} \|f_s\|_{L^{p_l}(\mathbb{R}^{n-1})} ds \right)^{p'_l} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |K_{\lambda(l)} * m(t)|^{p'_l} dt \\ &= \|K_{\lambda(l)} * m\|_{L^{p'_l}}^{p'_l}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

A técnica utilizada na demonstração do Teorema 5.5.1 foi inspirada no trabalho (STRICHARTZ, 1977). Como a esfera tem $n-1$ curvaturas principais não nulas, pelo Teorema 5.5.1

obtemos o seguinte o Teorema de Stein-Tomas:

Teorema 5.5.2. (TOMAS, 1975) Para toda $f \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$, a estimativa

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

é válida para todo $1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3}$.

RESTRIÇÃO DE FOURIER EM CONJUNTOS DE SALEM

Neste capítulo, estamos interessados em estudar o Teorema de Thomas-Stein, quando a transformada de Fourier é restrita a subconjuntos mais gerais que superfícies regulares. Mais precisamente, seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, suportada em S e satisfazendo a estimativa dimensional e o decaimento de Fourier

$$\mu(B(x, r)) \lesssim r^\alpha \quad \text{e} \quad |\hat{\mu}(\xi)| \lesssim (1 + |\xi|)^{-\beta/2}, \quad (6.1)$$

para todo $0 < \beta \leq \alpha < n$. Então, temos a estimativa de restrição

$$\int_S |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (6.2)$$

para todo $1 \leq p \leq p_c$ com $p_c = \frac{2(n-\alpha)+\beta}{2(n-\alpha)+\beta/2}$. Este resultado foi provado independentemente por Mockenhaupt ([MOCKENHAUPT, 2000](#)) e depois por Mitsis ([MITSIS, 2002](#)), para o caso $1 \leq p < p_c$. A estimativa no ponto crítico p_c foi provada por Bak e Seeger em ([BAK; SEEGER, 2010](#)). Além disso, iremos exibir a prova do Teorema de Littman, que generaliza o Teorema de Stein-Tomas e, para tanto, nos baseamos em ([SANTOS, 2020](#)).

6.1 Teorema de Mockenhaupt-Mitsis

Para a demonstração do resultado principal desta seção, precisaremos da decomposição de Littlewood-Paley:

Lema 6.1.1 (Partição da unidade de Littlewood-Paley). Existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1, \forall x \neq 0. \quad (6.3)$$

Demonstração. Pelo Lema 2.3.20 de existência de funções de corte podemos considerar uma função $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\gamma \equiv 1$ em $B[0, 1]$ e $\text{supp}(\gamma) \subset B(0, 2)$. Defina $\varphi(x) = \gamma(x) - \gamma(2x)$. É claro que $\text{supp}(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |x| < 2\}$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=-k}^k \varphi(2^{-j}x) = \gamma(2^{-k}x) - \gamma(2^{k+1}x).$$

Logo, dado $x \neq 0$, podemos escolher k suficientemente grande de modo que $|2^{-k}x| \leq 1$ e $|2^{k+1}x| \geq 2$. Portanto, $\gamma(2^{-k}x) = 1$ e $\gamma(2^{k+1}x) = 0$ e finalizamos a demonstração. \square

Observação 6.1.2. Seja φ a função do Lema 6.1.1 e defina $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x)$. É claro que

$$\text{supp}(\varphi_j) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}.$$

Desta forma, dado $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, a série em (6.3) tem finitos termos para cada $x \neq 0$. Note que $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma partição da unidade. Além disso, se $|x| > 1$, então $|2^{-j}x| > 2$, para todo $j \in \mathbb{Z}_-$ e portanto $\varphi(2^{-j}x) = 0$, isto é, a soma em (6.3) se resume a \mathbb{N} quando $|x| > 1$.

Suponha que μ é uma medida em \mathbb{R}^n tal que

$$\mu(B(x, r)) \lesssim r^\alpha, \quad \forall x \in \text{supp}(\mu) \text{ e } r > 0. \quad (6.4)$$

Além disso, suponha que existe $c > 0$ tal que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq c|\xi|^{-\beta/2}, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (6.5)$$

Pelo Lema de Frostman (Teorema 3.2.2), concluímos que (6.4) implica $\mathcal{H}^\alpha(\text{supp}(\mu)) > 0$, conseqüentemente, por (3.6) temos $\alpha \leq \dim_{\text{H}}(A)$. Além disso, por (3.11) sabemos que $\dim_{\text{H}}(\text{supp}(\mu)) \leq n < \infty$. Logo, pela Proposição 3.1.2 temos $\alpha \geq \dim_{\text{H}}(\text{supp}(\mu))$. Portanto, $\alpha = \dim_{\text{H}}(A)$. Além disso, usando o decaimento (6.5) e o Corolário 3.5.3, concluímos que $\beta \leq \dim_{\text{H}}(\text{supp}(\mu)) = \alpha$. Portanto a hipótese do resultado a seguir é natural.

Teorema 6.1.3 (Mockenhaupt-Mitsis). Sejam $0 < \alpha < n$ e $0 < \beta \leq \alpha$. Considere $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ uma medida satisfazendo as estimativas (6.4) e (6.5). Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então temos a estimativa de restrição de Fourier

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.6)$$

para todo $1 \leq p < p_c = \frac{2(n-\alpha)+\beta}{2(n-\alpha)+\beta/2}$.

Demonstração. Pelo método TT^* (veja Proposição 5.1.4), é suficiente mostrar que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\widehat{\mu} * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.7)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando partição da unidade de Littlewood-Paley (veja Lema 6.1.1), seja $\widehat{\mu}_j(x) = \varphi_j(x)\widehat{\mu}(x)$, para alguma $\mu_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi_j \in C^\infty$ e $\text{supp}(\varphi_j) \subset \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$. Seja $K(x) = g(x)\widehat{\mu}(x)$ com $g(x) = (1 - \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x)) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \varphi_j(x)$. Pela Observação 6.1.2, é claro que

$$\text{supp}(g) \subset B(0, 1) \text{ e } \text{supp}(\widehat{\mu}_j) \subset \{x : 2^{(j-1)} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}.$$

Portanto, podemos decompor o operador $Tf = \widehat{\mu} * f$ em pedaços de Littlewood-Paley, a saber,

$$Tf = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}_j * f = K * f + \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\mu}_j * f \quad (6.8)$$

Vejamos porque de fato vale $(\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\mu}_j) * f = \sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{\mu}_j * f)$. Defina $g_k(y) = \sum_{j=0}^k \widehat{\mu}_j(x-y)f(y)$. Logo, $|g_k(y)| \leq \widehat{\mu}(x-y)f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, já que $\widehat{\mu}$ é limitada e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\mu}_j \right) * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}_j(x-y)f(y) dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{\mu}_j * f)(x). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young (Corolário 2.7.5), obtemos

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|K\|_{L^{p'/2}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(0, 1))^{2/p'} \|K\|_{\infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

pois g e $\widehat{\mu}$ são limitadas. Portanto, para estimar $\|Tf\|_{p'}$ só nos resta estimar $\|\widehat{\mu}_j * f\|_{p'}$. Suponha que

$$\|T_j f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} := \|\widehat{\mu}_j * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (6.10)$$

e que

$$\|T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\mu}_j * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.11)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $j \in \mathbb{N}$. Dado $1 \leq p < p_c$, escolha $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$1/p = (1 - \theta)/1 + \theta/2 \quad \text{e} \quad 1/p' = (1 - \theta)/\infty + \theta/2.$$

O número $0 < \theta < 1$ existe, basta tomar $\theta = 2/p'$. Então, pelo Teorema de interpolação de

Riesz-Thorin, concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \|T_j f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\beta/2)(1-\theta)+j(n-\alpha)\theta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{2(n-\alpha)}{p'} - \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{2}{p'}\right)\right)} \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

se, e somente se, $\frac{2(n-\alpha)}{p'} - \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{2}{p'}\right) < 0$, ou seja, $p < \frac{2(n-\alpha)+\beta}{2(n-\alpha)+\beta/2}$. As desigualdades (6.9) e (6.12) implicam na desigualdade (6.7), como desejamos. Resta mostrar as estimativas (6.10) e (6.11). Como $\varphi_j \in C_c^\infty$ é suportada no anel $A = \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$, logo a mesma é Lipschitziana. Pelo decaimento de Fourier (6.5), obtemos

$$|\widehat{\mu}_j(x)| = |\varphi(2^{-j}x)| |\widehat{\mu}(x)| \leq c 2^{-j} |x|^{-\beta/2} \leq c 2^{-j\beta/2}, \quad \forall x \in A. \quad (6.13)$$

Portanto, pela Desigualdade de Young, obtemos $\|\widehat{\mu}_j * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Resta estimar $\|\widehat{\mu}_j * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Para tanto, seja $\psi = \check{\varphi}$ e $\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^jx)$. Claro que $\widehat{\psi} = \varphi$ e $\widehat{\psi}_j = \varphi(2^{-j}x)$. Logo, $\widehat{\mu}_j = \widehat{\psi}_j \widehat{\mu} = \widehat{\psi_j * \mu}$ e $\mu_j = \psi_j * \mu$. Visto que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\begin{aligned} |\mu_j(-\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(-\xi - \eta) d\mu_\eta \right| \\ &\lesssim 2^{nj} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} d\mu_\eta \\ &= 2^{nj} \left(\int_{B(-\xi, 2^{-j})} (1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} d\mu_\eta + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} (1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} d\mu_\eta \right) \end{aligned}$$

com $A_k = B(-\xi, 2^{k-j}) \setminus B(-\xi, 2^{(k-j)-1})$, $k \geq 1$ e $A_0 = B(-\xi, 2^{-j})$. Naturalmente, temos que $(1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} \leq 1$, se $\eta \in B(-\xi, 2^{-j})$ e $(1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} \leq 2^{-n(k-1)}$, se $\eta \in A_k$, $k \geq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\mu_j(-\xi)| &\lesssim 2^{nj} \left(\int_{A_0} (1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} d\mu_\eta + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U_k} (1 + 2^j|\xi + \eta|)^{-n} d\mu_\eta \right) \\ &\leq 2^{nj} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n(k-1)} \mu(A_k) \right) \\ &\lesssim 2^{nj} \left(\mu(B(-\xi, 2^{-j})) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n(k-1)} \mu(B(-\xi, 2^{k-j})) \right) \\ &\lesssim 2^{nj} \left(2^{-j\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n(k-1)} 2^{\alpha(k-j)} \right) \\ &= 2^{j(n-\alpha)} \left(1 + 2^n \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(n-\alpha)k} \right) \end{aligned}$$

Usando que $0 < \alpha < n$, podemos garantir que a série acima é convergente. Logo,

$$\|\mu_j\|_\infty \lesssim 2^{j(n-\alpha)} \quad (6.14)$$

Assim, utilizando a identidade de Plancherel e a fórmula da convolução, obtemos

$$\|\widehat{\mu}_j * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mu_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

como desejamos. □

Observação 6.1.4.

- (i) Stein-Tomas: Pelo Teorema 6.1.3 podemos obter o Teorema 5.3.4 de restrição de Stein-Tomas, quando $1 \leq p < 2(n+1)/(n+3)$. De fato, basta observar que

$$\sigma^{n-1}(B(x, r)) \lesssim r^{n-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ (veja a Proposição 2.4.15). Além disso, pelo Teorema 4.1.3 a transformada de Fourier da medida de superfície sobre a esfera tem o decaimento

$$|\widehat{\sigma^{n-1}}(x)| \lesssim |x|^{-(n-1)/2}.$$

Mais geralmente, se S é uma superfície regular compacta com um número ℓ de curvaturas principais não nulas, podemos utilizando o decaimento do Corolário 4.4.2 para obter o Teorema 5.5.1 (Littman), sem o end-point.

- (ii) O caso end-point $p'_c = q_{\alpha, \beta} = 2(2n - 2\alpha + \beta)/\beta$ (que engloba o end-point $q = 2(n+1)/n - 1$ do Teorema de Stein-Tomas) não é coberto pelo Teorema de Mockenhaupt-Mitsis, isto foi provado por Bak e Seeger (BAK; SEEGER, 2010), usando o método de interpolação de Bourgain em espaços de Lorentz $L^{p, q}$.
- (iii) O Teorema da restrição de Mockenhaupt-Mitsis engloba o caso unidimensional \mathbb{R} , mostrando que o fenômeno da restrição de Fourier é verdadeiro para conjuntos não suaves.
- (iv) A otimalidade do range no Teorema acima foi mostrado por Hambrook e Laba em (HAMBROOK; LABA, 2013).

6.2 Conjuntos de Salem C_X e medidas $\mu \in \mathcal{M}(C_X)$

Vimos que a medida de superfície em qualquer superfície regular compacta com um número l de curvaturas principais não nulas satisfaz as hipóteses do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis. Todavia, tal resultado engloba medidas muito mais gerais, suportadas em conjuntos compactos fractais, mais precisamente, conjuntos de Salem. A construção de exemplos não

triviais de tais conjuntos é sempre bastante delicada. A existência do primeiro conjunto de Salem em \mathbb{R} foi primeiro mostrada em (SALEM, 1951). Trabalhos como (KAUFMAN, 1981), (KAHANE, 1985), (BLUHM, 1996), (CHEN, 2014) e (HAMBROOK, 2015) deram contribuições significativas a respeito disto. Todavia, para aplicar o Teorema de Mockenhaupt-Mitsis precisamos de uma medida suportada num conjunto de Salem que também satisfaça a condição dimensional (6.4). O objetivo desta Seção é mostrar a existência de uma medida não trivial que satisfaça as hipóteses do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis e, para tanto, iremos nos basear em (CHEN, -), (BLUHM, 1996) e (MOCKENHAUPT, 2000).

6.2.1 Construção de conjuntos de Salem

Nesta seção, iremos apresentar uma construção de um subconjunto de \mathbb{R} cuja ideia é amplamente utilizada para construir conjuntos de Salem. Salem em (SALEM, 1951), usou esta construção para obter o primeiro conjunto C_X cuja $\dim_H(C_X) = \dim_F(C_X)$, isto é, um conjunto de Salem. Como complemento, nos baseamos também no livro (ZYGmund, 1974).

Sejam $\mathcal{I} = [x, x + \beta]$ e $\alpha(i) \in [0, 1)$ tais que $\alpha(j) < \alpha(j + 1)$, para $j = 1, \dots, d - 1$. Com isto, considere os intervalos

$$I_j(\eta) = [x + \beta\alpha(j), x + \beta\alpha(j) + \beta\eta], \quad j = 1, \dots, d$$

tais que $I_j(\eta) \cap I_k(\eta) = \emptyset$ e $I_j(\eta) \subset \mathcal{I}$, quando $\eta < d^{-1}$. Naturalmente o comprimento de $I_j(\eta)$ é $\beta\eta$. Chamaremos estes intervalos $I_j(\eta)$ de **intervalos visíveis** e os intervalos em $\mathcal{I} \setminus \bigcup_{j=1}^d I_j(\eta)$ de **intervalos invisíveis**, que serão desconsiderados. Para denotar esta partição de \mathcal{I} usaremos a notação $[d; \alpha(1), \dots, \alpha(d); \eta]$, veja a figura abaixo:

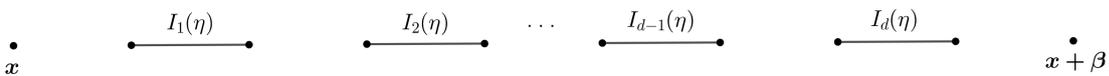


Figura 6 – Partição $[d; \alpha(1), \dots, \alpha(d); \eta]$

Seja $E_0 = \mathcal{I}$ e considere $[d_1; \alpha_1(1), \dots, \alpha_1(d_1); \eta_1]$ uma partição de E_0 em intervalos $I_{j_1}^1(\eta_1)$, fechados, disjuntos e com comprimento $\beta\eta_1$, para todo $j_1 = 1, \dots, d_1$. Note que

$$I_{j_1}^1(\eta_1) = [x + \beta\alpha_1(j_1), x + \beta\alpha_1(j_1) + \beta\eta_1].$$

Denote por E_1 a união destes intervalos visíveis, isto é, $E_1 = \bigcup_{j_1=1}^{d_1} I_{j_1}^1(\eta_1)$, veja a figura 7. É importante frisar que o extremo esquerdo de cada intervalo $I_{j_1}^1(\eta_1)$ é $(\beta\alpha_1(j_1) + x)$, com $j_1 = 1, \dots, d_1$. Particione cada intervalo visível $I_{j_1}^1(\eta_1)$ por meio da partição $[d_2; \alpha_2(1), \dots, \alpha_2(d_2); \eta_2]$.

Isto irá gerar d_2 subintervalos $I_{j_1 j_2}^2$ de cada intervalo $I_{j_1}^1(\eta_1)$ com $j_2 = 1, \dots, d_2$. Logo, obtemos

Figura 7 – Conjunto E_1

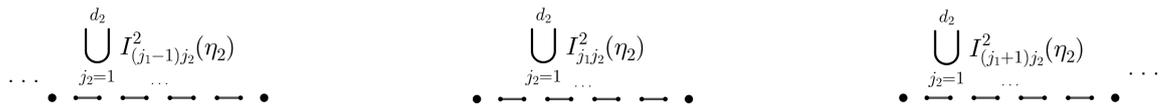
$d_1 d_2$ intervalos $I_{j_1 j_2}^2(\eta_2)$ visíveis, cada um com comprimento $\beta \eta_1 \eta_2$, mais precisamente,

$$I_{j_1 j_2}^2(\eta_2) = [x + \beta \alpha_1(j_1) + \beta \eta_1 \alpha_2(j_2), x + \beta \alpha_1(j_1) + \beta \eta_1 \alpha_2(j_2) + \beta \eta_1 \eta_2]. \quad (6.15)$$

Denote

$$E_2 = \bigcup_{j_1=1}^{d_1} \bigcup_{j_2=1}^{d_2} I_{j_1 j_2}^2(\eta_2).$$

Por (6.15), fixado $j_1 \in \{1, \dots, d_1\}$ e $j_2 \in \{1, \dots, d_2\}$, o extremo esquerdo do intervalo $I_{j_1 j_2}^2$ é dado por $x + \beta(\alpha_1(j_1) + \eta_1 \alpha_2(j_2))$.

Figura 8 – Conjunto E_2

Continuando o processo acima, obteremos $d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_p$ intervalos $I_{j_1 \dots j_p}^p(\eta_p)$ visíveis, cada um com comprimento $\beta \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_p$, $p \in \mathbb{N}$. Denote por E_p a união de $I_{j_1 \dots j_p}^p(\eta_p)$, ou seja,

$$E_p = \bigcup_{j_1=1}^{d_1} \dots \bigcup_{j_p=1}^{d_p} I_{j_1 \dots j_p}^p(\eta_p).$$

Indutivamente, dado $(j_1, \dots, j_p) \in \{1, \dots, d_1\} \times \dots \times \{1, \dots, d_p\}$, o extremo esquerdo de cada intervalo $I_{j_1 \dots j_p}^p(\eta_p)$ é dado por

$$x_p = x + \beta(\alpha_1(j_1) + \eta_1 \alpha_2(j_2) + \eta_1 \eta_2 \alpha_3(j_3) + \dots + \eta_1 \dots \eta_{p-1} \alpha_p(j_p)). \quad (6.16)$$

Nas iterações anteriores, note que obtemos uma sequência $\{E_p\}_p$ de intervalos compactos tais que

i) $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \dots$;

ii) O comprimento $\ell(I_{j_1 \dots j_p}^p(\eta_p)) = \beta \eta_1 \cdot \dots \cdot \eta_p \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$.

Então, o conjunto $E = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_p$ é não vazio, compacto e contém todos seus pontos de acumulação (conjunto perfeito).

6.2.2 Medidas com suporte em conjunto de Cantor

Esta seção é dedicada a mostrar para o leitor o quão difícil pode ser construir conjuntos com medidas suportadas no mesmo, cuja transformada de Fourier tenha decaimento no infinito, o que evidencia a dificuldade teórica por trás dos conjuntos de Salem. Mais precisamente, iremos construir uma medida de probabilidade μ_d suportada no conjunto de Cantor C_d e explorar o comportamento de $\widehat{\mu}_d(u)$ quando $u \rightarrow \infty$. Além disso, vamos mostrar que C_d não é um conjunto de Salem, quando $1/d \geq 3$.

Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e, por simplicidade, considere

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu_x.$$

Se μ é absolutamente contínua (com respeito à medida de Lebesgue \mathcal{L}^n), então

$$\widehat{\mu}(\xi) = \widehat{f d\mathcal{L}^n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) d\mathcal{L}^n,$$

sempre que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos $\widehat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-1})$, isto é, $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$. (Teorema A.1.8). Além disso, se f é contínua, então a taxa de decaimento de $\widehat{f}(\xi)$ depende do número de derivadas de f , conforme a Proposição A.1.6. Mas, se a medida μ for singular, temos o mesmo comportamento? Isto em geral não é verdade.

Exemplo 6.2.1. Seja $\mu = \delta_a$ (medida de Dirac). Então,

$$\langle \widehat{\mu}(\xi), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi}(\xi) \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ia\xi} \varphi(\xi) d\xi = \langle e^{-ia\xi}, \varphi \rangle,$$

isto é, $\widehat{\delta}_a(\xi) = e^{-ia\xi}$ e concluímos que a mesma não decai a zero no infinito.

Relembre da construção do conjunto de Cantor simétrico feita na Seção 3.1.1. Dado $0 < d < 1/2$, construímos

$$C_d = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k, \quad E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j},$$

onde os intervalos visíveis $I_{k,j}$ têm comprimento $\ell(I_{k,j}) = d^k$.

Pergunta 6.2.2. Qualquer $\mu \in \mathcal{M}(C_d)$ satisfaz o decaimento $\widehat{\mu}(\xi) \rightarrow 0$ no infinito?

No que segue, iremos responder esta pergunta. Começamos construindo uma medida de probabilidade $\mu_d \in \mathcal{M}(C_d)$, isto é, $\mu_d(C_d) = 1$. Seja

$$\mu_k = (2d)^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \mathcal{L}^1 \llcorner I_{k,i}.$$

Então,

$$\mu_k(C_d) = (2d)^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \mathcal{L}^1(I_{k,i} \cap C_d) = (2d)^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \mathcal{L}^1(I_{k,i}) = (2d)^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} d^k = (2d)^{-k} d^k 2^k = 1$$

e, concluímos que, μ_k é uma medida de probabilidade. Pelo Teorema 2.3.23, existe uma medida $\mu_d \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que, a menos de subsequência, $\mu_k \xrightarrow{w} \mu_d$. Além disso, usando que os intervalos $I_{k,i}$ são disjuntos, para todo $i = 1, \dots, 2^k$ e fixando j , obtemos

$$\mu_k(I_{m,j}) = (2d)^{-k} \mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i} \cap I_{m,j} \right).$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Observe que o intervalo $I_{m,j}$ intersecta (contém) apenas dois intervalos da forma $I_{(m+1),i}$, portanto, o comprimento de $\bigcup_{i=1}^{2^{(m+1)}} I_{(m+1),i} \cap I_{m,j}$ é $2d^{m+1}$. De maneira análoga, o intervalo $I_{m,j}$, intersecta (contém) apenas quatro intervalos da forma $I_{(m+2),i}$, portanto, o comprimento de $\bigcup_{i=1}^{2^{(m+2)}} I_{(m+2),i} \cap I_{m,j}$ é $2^2 d^{m+2}$. Indutivamente, dados $p, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{i=1}^{2^{(m+p)}} I_{(m+p),i} \cap I_{m,j} \right) = 2^p d^{m+p}.$$

Logo, tomando $k = m + p$ deduzimos que

$$\mu_{m+p}(I_{m,j}) = (2d)^{-(m+p)} 2^p d^{m+p} = 2^{-m}. \quad (6.17)$$

Portanto,

$$\mu_d(I_{m,j}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{m+p}(I_{m,j}) = 2^{-m}, \quad j = 1, \dots, 2^m. \quad (6.18)$$

Logo, μ_d é uniformemente distribuída (única). Usando esta propriedade é de rápida verificação que $\mu_d(C_d) = 1$. Defina o número s_d tal que $2d^{s_d} = 1$, isto é,

$$s_d = \log_d(1/2) = \frac{\log(2)}{\log(1/d)}.$$

Logo $2^{-k} = d^{\log_d(1/2)^k} = d^{ks_d} = (d^k)^{s_d}$. Portanto,

$$\mu_d(I_{k,j}) = [\text{diam}(I_{k,i})]^{s_d}, \quad i = 1, \dots, 2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Não é difícil concluir que

$$0 < \mathcal{H}^{s_d}(C_d) \leq 1 \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{H}}(C_d) = s_d.$$

De fato,

i) $\mathcal{H}^{s_d}(C_d) \leq 1$: Basta notar primeiramente que

$$\sum_{i=1}^{2^k} [\text{diam}(I_{k,i})]^{s_d} = 2^k (d^k)^{s_d} = (2d^{s_d})^k = 1.$$

Como $C_d \subset \bigcup_{i=1}^{2^k} I_{k,i}$, para todo k e $\text{diam}(I_{k,i}) = d^k < 2^{-k}$, temos

$$\mathcal{H}_{2^{-k}}^{s_d}(C_d) \leq 1.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos o que queríamos.

ii) $0 < \mathcal{H}^{s_d}(C_d)$: Basta provar que

$$\mu_d(J) \lesssim \text{diam}(J)^{s_d}, \quad (6.19)$$

para todo $J \subset \mathbb{R}$ aberto e, em seguida, usar o Teorema 3.2.2 (Lema de Frostman). Como $\text{supp}(\mu_d) \subset C_d$, podemos supor que $J \subset [0, 1]$ e $C_d \cap J \neq \emptyset$. Seja m o menor inteiro para o qual algum intervalo $I_{m,i}$ esteja contido em J e denote por \tilde{I} o maior destes. Por construção, no máximo 4 intervalos de comprimento $|\tilde{I}|$ intersectam J . Logo, $C_d \cap J$ está contido na união destes quatro intervalos. Por fim,

$$\mu_d(J) = \mu_d(C_d \cap J) \leq 4\mu_d(\tilde{I}) = 4 \text{diam}(\tilde{I})^{s_d} \leq 4 \text{diam}(J)^{s_d}.$$

iii) $\dim_{\text{H}}(C_d) = s_d$: Segue diretamente da Proposição 3.1.1 e dos itens i), ii).

6.2.2.1 Medida de Cantor e decaimento de Fourier

Para calcular $\widehat{\mu_d}$, vamos escrever μ_d como um limite fraco de combinações lineares finitas de medidas de Dirac indexadas por sequências binárias. Podemos utilizar a construção da Seção 6.2.1 para obter o conjunto C_d . Mais precisamente, o conjunto C_d , $0 < d < 1/2$ pode ser construído aplicando recursivamente a partição $[2; 0, 1 - d; d]$. Logo, usando a fórmula (6.16), cada ponto extremal esquerdo $a(\epsilon)$ dos intervalos da união E_k tem a forma

$$a(\epsilon) = \sum_{j=1}^k \epsilon_j (1-d)d^{j-1}, \quad \text{com } \epsilon = \{\epsilon_j\} \in \xi^k.$$

onde $\xi^k = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) : \epsilon_j \in \{0, 1\}\}$. Já os pontos extremais direitos são da forma $a(\epsilon) + d^k$. Assim, os pontos de $C_d = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, $E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$ têm a forma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \epsilon_j (1-d)d^{j-1},$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^k \epsilon_j (1-d) d^{j-1} \right) + d^k.$$

Como $d^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, obtemos:

$$C_d = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j (1-d) d^{j-1} : \epsilon_j = 0 \text{ ou } \epsilon_j = 1 \right\}. \quad (6.20)$$

Defina a medida singular

$$\nu_k = 2^{-k} \sum_{\epsilon \in \xi^k} \delta_{a(\epsilon)}.$$

Essencialmente, usando o Exemplo 2.3.13 - 2) temos $\nu_k \xrightarrow{w} \mu_d$ quando $k \rightarrow \infty$. Vejamos isto de maneira mais precisa. Basicamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $a(\epsilon)$ é um ponto extremo esquerdo de algum intervalo $I_{k,i}$. De maneira análoga a que construímos μ_d , temos que existe uma medida w_d suportada em C_d tal que $\nu_k \xrightarrow{w} w_d$. Para concluir que $w_d = \mu_d$, basta provamos que w_d é uniformemente distribuída. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \dots, 2^{-m}\}$. Logo,

$$\nu_{m+1}(I_{m,j}) = 2^{-(m+1)} \sum_{\epsilon \in \xi^{m+1}} \delta_{a(\epsilon)}(I_{m,j}) = 2^{-(m+1)} \sum_{\epsilon \in \xi^{m+1}} \chi_{I_{m,j}}(a(\epsilon)).$$

Observe que, no passo $m + 1$ da construção de C_d , apenas **dois** intervalos, digamos $I_{m+1,i}$ e $I_{m+1,i+1}$ irão estar contidos em $I_{m,j}$. Logo, a soma anterior se resume a dois termos. Mais precisamente, sendo a_i e a_{i+1} os extremos esquerdos de $I_{m+1,i}$ e $I_{m+1,i+1}$, temos

$$\nu_{m+1}(I_{m,j}) = 2^{-(m+1)} [\chi_{I_{m,j}}(a_i) + \chi_{I_{m,j}}(a_{i+1})] = 2^{-(m+1)} 2^1 = 2^{-m}.$$

Utilizando a mesma ideia, podemos concluir que $\nu_{m+p}(I_{m,j}) = 2^{-m}$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Portanto, $w_d(I_{m,j}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \nu_{m+p}(I_{m,j}) = 2^{-m}$ e assim w_d é também uniformemente distribuída. Relembre que $\widehat{\delta}_a(u) = e^{-iau}$, com $a, u \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}_k(u) &= 2^{-k} \sum_{\epsilon \in \xi^k} \widehat{\delta}_{a(\epsilon)}(u) \\ &= 2^{-k} \sum_{\epsilon \in \xi^k} e^{-ia(\epsilon)u} \\ &= 2^{-k} \sum_{\epsilon \in \xi^k} e^{i \sum_{j=1}^k \epsilon_j u_j}, \end{aligned}$$

com $u_j = -u(1-d)d^{j-1}$. Note que

$$\sum_{\epsilon \in \xi^k} e^{i \sum_{j=1}^k \epsilon_j u_j} = \prod_{j=1}^k (1 + e^{iu_j}).$$

Assim,

$$\widehat{\nu}_k(u) = \prod_{j=1}^k \frac{(1 + e^{iu_j})}{2}.$$

Usando a fórmula

$$\frac{i + e^{ix}}{2} = e^{ix/2} \cos(x/2),$$

segue que

$$\widehat{\nu}_k(u) = \prod_{j=1}^k [e^{iu_j/2} \cos(u_j/2)] = \left(\prod_{j=1}^k e^{iu_j/2} \right) \left(\prod_{j=1}^k \cos(u_j/2) \right) = e^{\sum_{j=1}^k iu_j/2} \prod_{j=1}^k \cos(u_j/2).$$

Usando $u_j = -u(1-d)d^{j-1}$, deduzimos que

$$\sum_{j=1}^k \frac{iu_j}{2} = \frac{-iu}{2} \sum_{j=1}^k (1-d)d^{j-1} = \frac{-iu}{2} \sum_{j=1}^k (d^{j-1} - d^j) = \frac{-iu}{2} (1 - d^k).$$

Logo

$$\widehat{\nu}_k(u) = e^{\frac{-iu}{2}(1-d^k)} \prod_{j=1}^k \cos(u(1-d)d^{j-1}/2).$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ e usando que $d^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\widehat{\mu}_d(u) = e^{\frac{-iu}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{u(1-d)d^{j-1}}{2}\right),$$

Por exemplo, escolhendo $d = 1/3$ (conjunto de Cantor padrão), temos

$$\widehat{\mu}_{1/3}(u) = e^{\frac{-iu}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos(u3^{-j}). \quad (6.21)$$

Claramente $\widehat{\mu}_{1/3}(u)$ não decai a zero quando $u \rightarrow \infty$. A título de exemplo, escolha $u = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$. Mas, isto ainda não responde a nossa Pergunta 6.2.2. O resultado a seguir é a nossa resposta.

Teorema 6.2.3. Se $1/d \geq 3$ é um inteiro, então para qualquer $\mu \in \mathcal{M}(C_d)$ temos

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |\hat{\mu}(x)| > 0,$$

isto é, $\hat{\mu}$ não decai a zero no infinito.

Demonstração. De fato, denote por $[y]$ a parte fracionária de $y \geq 0$, isto é, $[y] \in [0, 1)$ e $y - [y] \in \mathbb{N}$.

Afirmção 6.2.4. Escolhendo $I = (d, 1 - d)$ e $N = 1/d$, temos

$$[N^k x] \notin I, \quad \forall x \in C_d, k \in \mathbb{N}.$$

Por (6.20), dado $x \in C_d$ podemos escrever

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j (1-d) d^{j-1} = \frac{(1-d)}{d} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j d^j = (N-1) \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j N^{-j},$$

com $\epsilon_j = 0$ ou $\epsilon_j = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} N^k x &= (N-1) \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j N^{k-j} \\ &= (N-1) \left((\epsilon_1 N^{k-1} + \dots + \epsilon_k N^0) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \epsilon_j N^{k-j} \right) \\ &= (N-1) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \epsilon_{k-j} N^j + \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_{k+j} N^{-j} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$[N^k x] = (N-1) \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_{k+j} N^{-j} \in C_d \subset [0, 1] \setminus I.$$

Para provar este teorema, suponha que existe $\mu \in \mathcal{M}(C_d)$ tal que $\hat{\mu}(k) \rightarrow 0$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $|k| \rightarrow \infty$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset I = (d, 1-d)$ e $\inf \varphi = 1$. Seja $N = 1/d$ e defina

$$\varphi_j(x) = \varphi([N^j x]), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Pela Afirmção 6.2.4, é claro que

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap C_d = \emptyset.$$

Usando inversão de Séries de Fourier (MATTILA, 2015, p. 51), temos

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) e^{ixN^j k}, \quad x \in [0, 1].$$

Com isto, temos $\widehat{\varphi}(N^j k) = \widehat{\varphi}(k)$ e os outros coeficientes de Fourier de φ_j se anulam. Portanto, usando a fórmula de Parseval para séries (MATTILA, 2015, p. 51), podemos obter

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_j d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{\varphi}(k)} \widehat{\mu}(N^j k) = \overline{\widehat{\varphi}(0)} \widehat{\mu}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \overline{\widehat{\varphi}(k)} \widehat{\mu}(N^j k) + \sum_{|k| > m} \overline{\widehat{\varphi}(k)} \widehat{\mu}(N^j k).$$

Vamos estimar as duas últimas parcelas da soma acima. Antes disto, usando que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, deduzimos que

$$\overline{\widehat{\varphi}(0)} \widehat{\mu}(0) = \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy} \int_{\mathbb{R}} d\mu = \mu(C_d) > 0,$$

Por outro lado, usando que $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq \mu(C_d)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$, temos

$$\left| \sum_{|k| > m} \overline{\widehat{\varphi}(k)} \widehat{\mu}(N^j k) \right| \leq \mu(C_d) \sum_{|k| > m} |\widehat{\varphi}(k)|,$$

o que podemos fazer ficar suficientemente pequeno escolhendo m grande, já que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por fim,

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq m} \overline{\widehat{\varphi}(k)} \widehat{\mu}(N^j k) \right| \leq 2m \sup_{|l| \geq N^j, l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(l)|,$$

o que tende a zero quando $j \rightarrow \infty$. Com isto, segue que $\mu(C_d) = 0$, o que é uma contradição. \square

O Teorema 6.2.3 nos informa quando a transformada de Fourier de medidas em $\mathcal{M}(C_d)$ não decai a zero no infinito, mais precisamente, quando $1/d \geq 3$. O resultado a seguir nos diz quando ocorre o contrário.

Teorema 6.2.5. Seja $0 < d < 1/2$ e seja μ_d a medida de Cantor. Então,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \widehat{\mu}_d(u) = 0,$$

se, e somente se, $1/d$ não é um número de Pisot, isto é, não existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\sum_k \sin^2(\lambda d^k) < \infty.$$

A demonstração do resultado acima é bastante técnica, por isso, por brevidade, não iremos exibir a prova. O leitor pode consultar a demonstração do mesmo em (MATTILA, 2015, Teorema 8.3). O Teorema 6.2.3 nos diz que $\dim_F(C_d) = 0$, sempre que $1/d \geq 3$, pois, neste caso,

a transformada de Fourier de nenhuma medida em $\mathcal{M}(C_d)$ pode decair no infinito. Com isto, concluímos que C_d não é um conjunto de Salem. Os resultados vistos nesta seção evidenciam a dificuldade de se obter conjuntos de Salem.

Observação 6.2.6. A medida $\mu_d \in \mathcal{M}(C_d)$ é essencialmente uma medida de Hausdorff. Mais precisamente,

$$\mathcal{H}^{s_d} \llcorner C_d = \mu_d.$$

Não iremos fazer nenhum uso profundo deste fato, por isso, não iremos exibir a prova. Todavia, o leitor pode consultar este fato em (MATTILA, 2015, p. 110). Além disso, conforme mostramos em (6.19), $\mu_d(I) \leq b|I|^{s_d}$, para todo intervalo aberto I , onde b é uma constante que não depende dos intervalos I .

6.2.3 Construção de Salem-Bluhm

A construção feita por Salem da Seção 6.2.1 é bastante abrangente. Muitos pesquisadores da área tem adaptado tal construção para outros contextos. Bluhm em (BLUHM, 1996) construiu um conjunto e uma medida que satisfaz as hipóteses do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis. Nesta seção, iremos apresentar tal construção tomando como base as notas (CHEN, -).

6.2.3.1 Construção do conjunto C_X

Vamos iniciar esta seção construindo o conjunto do trabalho de Bluhm, o qual é baseado na construção geral de Salem da Seção 6.2.1. Seja $N \in \mathbb{N}$ e considere $\theta_N = N^{-1/\alpha}$, quando $N \geq 2$ e $\theta_1 = 1$. Para que possamos usar a construção da seção 6.2.1, note que $0 < \theta_N < 1/N$ quando $N \geq 2$, o que será suficiente para a construção. Note que

$$\frac{1}{N} - \theta_N = \frac{N^{1/\alpha} - N}{NN^{1/\alpha}} = \frac{1 - N^{(1-1/\alpha)}}{N} \geq \frac{1 - 2^{(1-1/\alpha)}}{N} > c_\alpha/N,$$

escolhendo $0 < c_\alpha < 1 - 2^{(1-1/\alpha)}$. Observe que

$$\frac{j-1}{N} + 2\frac{c_\alpha}{N} < \frac{j}{N} + \frac{c_\alpha}{N}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Isto nos permite fixar

$$X_{N,j} \in \left[\frac{j-1}{N} + \frac{c_\alpha}{N}, \frac{j}{N} + \frac{2c_\alpha}{N} \right], \quad j = 1, \dots, N.$$

Assim, iremos substituir as partições

$$[d_N; \alpha_N(1), \dots, \alpha_N(d_N); \eta_N]$$

por

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N],$$

onde $X_{N,j} = \alpha_N(j)$. Desta forma, denote $C_1 = [0, 1]$ e considere a partição

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N], \quad \text{com } N = 2,$$

do intervalo C_1 e obtenha dois intervalos

$$I_1^2 = [X_{2,1}, X_{2,1} + \theta_2] \quad \text{e} \quad I_2^2 = [X_{2,2}, X_{2,2} + \theta_2].$$

Denote por $C_2 = I_1^2 \cup I_2^2$, veja a figura abaixo:

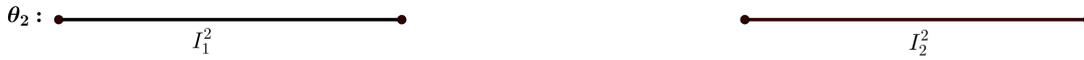


Figura 9 – Intervalos $I_{j_1}^2$

Agora, vamos particionar cada intervalo $I_{j_2}^2$, $j_2 = 1, 2$, obedecendo a regra

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N], \quad \text{com } N = 3$$

e obteremos 6 intervalos visíveis $I_{j_2 j_3}^3$, $j_3 = 1, 2, 3$, $j_2 = 1, 2$,



Figura 10 – Intervalos $I_{j_2 j_3}^3$

cada um deles definido por

$$I_{j_2 j_3}^3 = [X_{2,j_2} + \theta_2 X_{3,j_3}, X_{2,j_2} + \theta_2 X_{3,j_3} + \theta_2 \theta_3].$$

Denote por C_3 a união dos intervalos $I_{j_2 j_3}^3$. Observe que o comprimento de cada $I_{j_2 j_3}^3$ vale $\ell(I_{j_2 j_3}^3) = \theta_2 \theta_3$. Continuando este processo, obteremos, na etapa N , $N!$ intervalos fechados e disjuntos, a saber

$$\begin{aligned} I_{j_2 \dots j_N}^N &= \left[\sum_{n=2}^N \left(\prod_{m=2}^n \theta_{m-1} \right) X_{n,j_n}, \sum_{n=2}^N \left(\prod_{m=2}^n \theta_{m-1} \right) X_{n,j_n} + \prod_{p=2}^N \theta_p \right] \\ &= [X_{2,j_2} + \dots + \theta_2 \dots \theta_{N-1} X_{N,j_N}, X_{2,j_2} + \dots + \theta_2 \dots \theta_{N-1} X_{N,j_N} + \theta_2 \dots \theta_{N-1} \theta_N]. \end{aligned}$$

Cada um destes intervalos com comprimento

$$\ell(I_{j_2 \dots j_N}^N) = \theta_2 \dots \theta_{N-1} \theta_N = 2^{-1/\alpha} \cdot \dots \cdot N^{-1/\alpha} = (N!)^{-1/\alpha}. \quad (6.22)$$

Seja C_N a união destes intervalos visíveis e denote por $C_X = \bigcap_{N \geq 2} C_N$, com X sendo a sequência $X = (X_{N,j})_{\substack{N=2,3,\dots \\ j=1,\dots,N}}$. O índice faz sentido pois a construção é baseada em tal sequência.

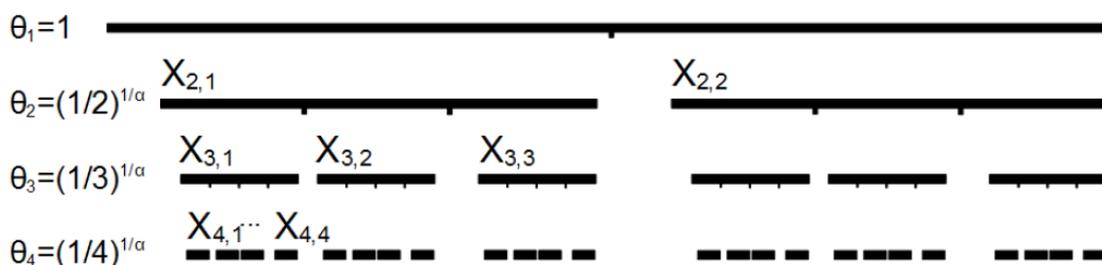


Figura 11 – Etapas da construção de C_X

Fonte: Chen

6.2.3.2 Construção da medida μ_X

Vamos agora construir a medida de probabilidade natural suportada em C_X . Além disso, iremos calcular sua transformada de Fourier. Na Subseção 6.2.2.1, construímos uma medida suportada no conjunto de Cantor C_d , mais precisamente, $\mu_d \in \mathcal{M}(C_d)$. A mesma nasceu como o limite fraco da sequência $\{\nu_k\}_k$, a saber

$$\mu_d = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k} \sum_{\epsilon \in \xi^k} \delta_{a(\epsilon)},$$

onde $\xi^k = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) : \epsilon_j = 0 \text{ ou } \epsilon_j = 1\}$ e $a(\epsilon)$ são pontos extremais esquerdos dos intervalos na união $E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$, isto é,

$$a(\epsilon) = \sum_{j=1}^k \epsilon_j (1-d)d^{j-1}.$$

Vimos que o conjunto C_d pode ser construído aplicando recursivamente a partição $[2; 0, 1-d; d]$. Além disso, cada ponto extremal $a(\epsilon)$ dos intervalos da união E_k tem a forma

$$a(\epsilon) = \sum_{j=1}^k \epsilon_j (1-d)d^{j-1}, \quad \epsilon \in \xi^k.$$

Com isto, vimos que os pontos de $C_d = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ têm a forma

$$x = \epsilon_1(1-d) + \epsilon_2 d(1-d) + \epsilon_3 d^2(1-d) + \dots + \epsilon_k d^{k-1}(1-d) + \dots$$

Agora lembre que construímos o conjunto C_X via partição

$$[N; X_{N,1}, \dots, X_{N,N}; \theta_N], \quad \theta_N = N^{-1/\alpha}, \quad N \geq 2.$$

De maneira análoga, já vimos que os extremos esquerdo dos intervalos da união C_N são expressados por

$$a(\epsilon) = \sum_{k=2}^N \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{k-1} X_{k,j_k}, \quad \text{com } \theta_1 := 1, \quad (6.23)$$

e $\epsilon = (j_2, \dots, j_k)$, $j_k = 1, \dots, k$, $k \geq 2$. Utilizando $\widehat{\delta}_a(\xi) = e^{-ia\xi}$, é de rápida verificação que $\widehat{\delta_{a+b}} = \widehat{\delta}_a \widehat{\delta}_b$. Além disso, pela Proposição 2.5.6 temos $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \widehat{\nu}$, para toda $\nu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\widehat{\delta_{a+b}} = \widehat{\delta}_a \widehat{\delta}_b = \widehat{\delta}_a * \widehat{\delta}_b$. Ainda, pela injetividade vista na Proposição 2.5.11 concluímos que $\delta_{a+b} = \delta_a * \delta_b$. Com isto definimos

$$\nu_N := \frac{1}{N!} \sum_{\epsilon \in \xi^N} \delta_{a(\epsilon)} = *_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right),$$

com $a(\epsilon)$ definido em (6.23) e $\xi^N = \{(\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_N) : \epsilon_k \in \{1, 2, \dots, k\}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}_N(\omega) &= \prod_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \widehat{\delta}_{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{k-1} X_{k,j}}(\omega) \right) \\ &= \prod_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right). \end{aligned}$$

Denote por μ_X o limite fraco da sequência de medidas $\{\nu_N\}_N$. Logo, $\nu_N(C_X) \rightarrow \mu_X(C_X)$ (EVANS; GARIEPY, 2015, Teorema 1.40-iii)). Com isto, podemos usar a Observação 4.1.1 para obter

$$\widehat{\mu}_X(\omega) = \prod_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right).$$

Lema 6.2.7. Dado $\alpha \in (0, 1)$, temos que

i) $\mu_X(I) \lesssim |I|^\alpha$, para todo intervalo aberto I .

ii) $\dim_{\mathbb{H}}(C_X) = \alpha$;

Demonstração. O item i) segue da Observação 6.2.6, pois, a construção de C_X e μ_X é essencialmente a mesma feita para C_d e μ_d . Mais precisamente, de maneira análoga a que fizemos em (6.17), é de rápida verificação que:

$$\nu_{m+p}(I_{j_2 \dots j_m}^m) = (m!)^{-1}.$$

Tomando o limite, obtemos: $\mu_X(I_{j_2 \dots j_m}^m) = (m!)^{-1}$. Com isto, devemos responder a pergunta: Qual valor de r é tal que $\mu_X(I_{j_2 \dots j_m}^m) = [\text{diam}(I_{j_2 \dots j_m}^m)]^r$? Vimos em (6.22) que $\text{diam}(I_{j_2 \dots j_m}^m) =$

$(m!)^{-1/\alpha}$. Portanto, basta resolver a equação

$$(m!)^{-1} = [(m!)^{-1/\alpha}]^r,$$

ou seja, $r = \alpha$. Por fim, considere $J \subset [0, 1]$ tal que $C_X \cap J \neq \emptyset$. Seja m o número da primeira etapa, na qual pelo menos dois intervalos **invisíveis** estão contidos em J . Logo, no máximo 4 intervalos contidos em E_m intersectam J , sendo que pelo menos um está inteiramente contido em J , digamos, I_1^m, \dots, I_4^m . Portanto $C_X \cap J$ está contido na união destes quatro intervalos. Por fim,

$$\mu_X(J) = \mu_X(C_X \cap J) \leq \sum_{i=1}^4 \mu_X(I_i^m) = \sum_{i=1}^4 [\text{diam}(I_i^m)]^\alpha \leq 4[\text{diam}(J)]^\alpha.$$

Como o item *i*) provado, obtemos o item *ii*) usando o Lema de Frostman. De fato, claramente C_N é uma δ_N -cobertura de C_X , com $\delta_N = (N!)^{-1/\alpha}$, na verdade precisamos de $N!$ intervalos de comprimento $(N!)^{-1/\alpha}$. Portanto,

$$\mathcal{H}^\alpha(C_X) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\delta_N}^\alpha(C_X).$$

Naturalmente, temos que

$$\mathcal{H}_{\delta_N}^\alpha(C_X) \leq \sum_{I \subset C_N} \ell(I)^\alpha = N![(N!)^{-1/\alpha}]^\alpha = 1.$$

Logo, fazendo $N \rightarrow \infty$ temos $\mathcal{H}^\alpha(C_X) < \infty$. Por outro lado, pelo Lema de Frostman temos $0 < \mathcal{H}^\alpha(C_X)$. Portanto, utilizando a proposição 3.1.1 temos $\alpha = \dim_{\text{H}}(C_X)$. \square

6.2.3.3 Decaimento de $\widehat{\mu}_X$

No que segue, iremos mostrar como escolher uma sequência X adequada, de modo que C_X seja um conjunto de Salem. Mais precisamente, dado $\alpha \in (0, 1)$, iremos mostrar que, para uma certa sequência X , vale o decaimento

$$\widehat{\mu}_X(\xi) = O(|\xi|^{-\beta/2}), \quad \forall \beta < \alpha.$$

Para tanto, precisaremos de alguns lemas auxiliares.

Lema 6.2.8. Seja $q, k \in \mathbb{N}$ e seja $\{X_{k,j}\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes, então

$$\left| \mathbb{E} \left(e^{-i\eta \sum_{p=1}^q (X_{k,j_p} - X_{k,i_p})} \right) \right| \leq c_k |\eta|^{-1},$$

para todo $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_q \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Demonstração. Note que existem $h_1, h_2, \dots, h_N \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $|h_j| \leq q$ tais que

$$\sum_{p=1}^q (X_{k,j_p} - X_{k,i_p}) = \sum_{j=1}^N h_j X_{k,j}.$$

Como $X_{k,j}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), então

$$\left| \mathbb{E} \left(e^{-i\eta \sum_{p=1}^q (X_{k,j_p} - X_{k,i_p})} \right) \right| = \prod_{j=1}^N |\mathbb{E}(e^{-i\eta h_j X_{k,j}})| \leq |\mathbb{E}(e^{-i\eta h_{j_0} X_{k,j_0}})| \lesssim |\eta|^{-1},$$

para algum j_0 tal que $|h_{j_0}| \geq 1$. □

Lema 6.2.9. Seja $q, k \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathbb{R}$ tais que $|\eta| > 0$. Então,

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\eta X_{k,j}} \right|^{2q} \right) \leq \frac{q^q}{k^q} + 2c_\alpha^{-1} k |\eta|^{-1}.$$

Demonstração. Note que

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\eta X_{k,j}} \right|^{2q} \right) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q=1 \\ i_1, \dots, i_q=1}}^k \frac{1}{k^{2q}} \mathbb{E} \left(e^{-i\eta \sum_{p=1}^q (X_{k,j_p} - X_{k,i_p})} \right).$$

Decompondo a soma convenientemente e usando o Lema 6.2.8, obtemos

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\eta X_{k,j}} \right|^{2q} \right) \leq \frac{q^q}{k^q} + 2c_\alpha^{-1} k |\eta|^{-1},$$

como desejamos. □

Estamos prontos para provar o resultado principal desta seção.

Teorema 6.2.10. (BLUHM, 1996) Dado $\alpha \in (0, 1)$, existe uma sequência $X = (X_{N,j})_{\substack{N=2,3,\dots \\ j=1,\dots,N}}$ tal que

- i) $\mu_X(I) \lesssim |I|^\alpha$, para todo intervalo aberto I .
- ii) $\dim_{\mathbb{H}}(C_X) = \alpha$;
- iii) $\widehat{\mu}_X(\xi) = O(|\xi|^{-\beta/2})$, para todo $\beta < \alpha$;

Demonstração. Os itens i) e ii) foram provados no Lema 6.2.7. Só nos resta provar o item iii). Provemos, pois, o decaimento $\widehat{\mu}_X(\omega) = O(|\omega|^{-\beta/2})$. A construção feita na Seção anterior deixou a sequência X livre para que possamos impor algumas condições. Considere $X_{N,j}$ uma variável

aleatória (função mensurável) via a identificação

$$X_{N,j} \equiv \left(\frac{c_\alpha}{N}\right)^{-1} \chi_{\left[\frac{j-1}{N} + \frac{c_\alpha}{N}, \frac{j-1}{N} + \frac{2c_\alpha}{N}\right]}.$$

Além disso, suponha que $\{X_{N,j}\}_j$ são independentes no sentido que

$$\mu_X \left(\bigcap_j A_{N,j} \right) = \prod_j \mu_X(A_{N,j}),$$

onde $A_{N,j} = X_{N,j}^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ são conjuntos μ_X -mensuráveis. Dado uma variável aleatória X com respeito ao espaço de probabilidade $([0, 1], \mu_X)$, a esperança de X é definida por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{[0,1]} X(t) d\mu_X.$$

Veamos como obter o decaimento de $\widehat{\mu_X}(\omega) = O(|\omega|^{-\beta/2})$. Suponha que

$$\mathbb{E}(|\widehat{\mu_X}(\omega)|^{2q}) \leq |\omega|^{-(1-\frac{1}{m})\alpha q}, \quad \forall |\omega| > \lambda, \quad (6.24)$$

para todo $q, m \in \{1, 2, \dots\}$, com λ dependendo de α, m, q . De fato, assumindo (6.24), seja $q > \frac{2m}{\alpha}$ e $\omega = n \in \mathbb{Z}$ tal que $|n| > \lambda$, onde λ é uma constante positiva dependendo de α, m e q . Então,

$$\mathbb{E} \left(|n|^{(1-\frac{2}{m})\alpha q} |\widehat{\mu_X}(n)|^{2q} \right) \leq |n|^{-\frac{1}{m}\alpha q} \leq |n|^{-2},$$

que nos permite a concluir que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{|n| \geq \lambda} |n|^{(1-\frac{2}{m})\alpha q} |\widehat{\mu_X}(n)|^{2q} \right) \leq \sum_{|n| > \lambda} |n|^{-2}.$$

Logo, os coeficientes desta série satisfazem a estimativa

$$|\widehat{\mu_X}(n)| \lesssim |n|^{-\frac{\alpha}{2}(1-\frac{2}{m})}, \quad \text{q.t.p}$$

A prova do fato utilizado acima pode ser consultada e (SARALA, 2019, p. 65) ou (KAHANE, 1985). Para obter o decaimento $\widehat{\mu_X}(\omega) = O(|\omega|^{-\beta/2})$ faremos uso do resultado seguinte:

Lema 6.2.11. (KAHANE, 1985, p. 252) Seja μ uma medida de probabilidade suportada em $[0, 1]$ e $\beta > 0$ tal que $\widehat{\mu}(n) = O(|n|^{-\beta})$, então $\widehat{\mu}(\omega) = O(|\omega|^{-\beta})$.

O Lema 6.2.11 implica a estimativa desejada:

$$\widehat{\mu_X}(\omega) = O(|\omega|^{-\frac{\alpha}{2}(1-\frac{2}{m})}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \text{ qtp.}$$

Pela arbitrariedade de m (fazendo $m \rightarrow \infty$), obtemos $\widehat{\mu_X}(\omega) = O(|\omega|^{-\frac{\alpha}{2}})$. Com isto segue $\alpha \leq \dim_F(C_X)$ (veja Definição 14). Mas, pelo Corolário 3.5.3, temos

$$\dim_F(C_X) \leq \dim_H(C_X) = \alpha,$$

e concluímos que C_X é um conjunto de Salem. Resta provar a estimativa (6.24) para obter o item iii) do Teorema 6.2.10.

Relembre que

$$\widehat{\mu_X}(\omega) = \prod_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{k-1}X_{k,j}} \right)$$

Usando a propriedade $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $z_i \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu_X}(\omega)| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \prod_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{k-1}X_{k,j}} \right) \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^N \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{k-1}X_{k,j}} \right|, \end{aligned}$$

para todo $N \geq 2$. Considere a sequência $\{a_N\}_N$, com

$$a_N = \prod_{k=2}^N \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{k-1}X_{k,j}} \right|.$$

Vamos mostrar que $\{a_N\}$ é decrescente. De fato,

$$\left| \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{(N+1)-1}X_{N+1,j}} \right| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \left| e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{(N+1)-1}X_{N+1,j}} \right| = 1.$$

Multiplicando o que obtemos acima por a_N , segue que

$$a_{N+1} = a_N \left| \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{(N+1)-1}X_{N+1,j}} \right| \leq a_N.$$

Logo, para todo $w \in \mathbb{R}$ temos:

$$|\widehat{\mu_X}(\omega)| \leq \prod_{k=2}^N \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2\cdots\theta_{k-1}X_{k,j}} \right|, \quad \forall N \geq 2.$$

Isto nos permite deduzir que

$$\mathbb{E}(|\widehat{\mu}_X(\omega)|^{2q}) \leq \mathbb{E} \left(\prod_{k=2}^N \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right|^{2q} \right) \quad (6.25)$$

$$\leq \prod_{k=2}^N \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right|^{2q} \right), \quad \forall N \geq 2, \quad (6.26)$$

em razão da Proposição 10.5 em (FOLLAND, 1999).

Aplicando o Lema 6.2.9 com $\eta = \omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1}$ obtemos:

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right|^{2q} \right) \leq \frac{q^q}{k^q} + 2c_\alpha^{-1} k |\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1}|^{-1}.$$

Logo, por (6.26), temos

$$\mathbb{E}(|\widehat{\mu}_X(\omega)|^{2q}) \leq \prod_{k=2}^N \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^{-i\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1} X_{k,j}} \right|^{2q} \right) \quad (6.27)$$

$$\leq \prod_{k=2}^N \left[\frac{q^q}{k^q} + 2c_\alpha^{-1} k |\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1}|^{-1} \right], \quad (6.28)$$

para todo $N \geq 2$, $q, k \in N$. Para controlar o termo do produtório acima, suponha que Dados $k = 2, 3, \dots, N$ com $N \geq 2$ fixado tenhamos:

$$2c_\alpha^{-1} k |\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1}|^{-1} \leq \frac{q^q}{k^q}. \quad (6.29)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\widehat{\mu}_X(\omega)|^{2q}) &\leq \prod_{k=2}^N \left(\frac{q^q}{k^q} + 2c_\alpha^{-1} k |\omega\theta_1\theta_2 \dots \theta_{k-1}|^{-1} \right) \\ &\leq \prod_{k=2}^N 2 \frac{q^q}{k^q} \\ &= \frac{2q^q}{(N!)^q} \\ &\leq \frac{2^N q^{qN}}{(N!)^q} = \left[\frac{(2^{1/q} q)^N}{N!} \right]^q. \end{aligned}$$

Agora precisamos argumentar a respeito de (6.29). Lembrando que $\theta_N = N^{-1/\alpha}$ para todo $N \geq 2$ e $\theta_1 := 1$, temos que (6.29) é equivalente a

$$2c_\alpha^{-1} q^{-q} k^{q+1} [(k-1)!]^{1/\alpha} \leq |\omega|, \quad \forall k = 2, \dots, N.$$

Note que o lado esquerdo desta desigualdade é crescente em k , então

$$2c_\alpha^{-1}q^{-q}N^{q+1}[(N-1)!]^{1/\alpha} \leq |\omega|. \quad (6.30)$$

Portanto, dado $w \neq 0$, sempre podemos tomar um N , dependendo de w que faça (6.29) ser verdadeira. Por exemplo, tomando $|w| \geq 2c_\alpha^{-1}q^{-q}2^{q+1}$, temos que a almejada estimativa vale para $N = 2$. Seja N_ω o maior número natural satisfazendo (6.30). Logo,

$$c_{\alpha,q}N_\omega^{\alpha(q+1)}(N_\omega - 1)! \leq |\omega|^\alpha, \quad (6.31)$$

com $c_{\alpha,q} = (2c_\alpha^{-1}q^{-q})^\alpha$. Pela maximalidade de N_ω , segue que

$$|\omega|^\alpha < C_{\alpha,q}(N_\omega + 1)^{\alpha(q+1)}N_\omega!. \quad (6.32)$$

Por (6.31) e (6.32), obtemos

$$(N_\omega - 1)! \leq \frac{1}{N_\omega^{\alpha(q+1)}}c_{\alpha,q}^{-1}|\omega|^\alpha \leq c_{\alpha,q}^{-1}|\omega|^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{1}{N_\omega!} < C_{\alpha,q}|\omega|^{-\alpha}(N_\omega + 1)^{\alpha(q+1)}.$$

Para dar continuidade, faremos uso do seguinte resultado:

Lema 6.2.12. Sejam $0 < \alpha < 1$ e $q, m \in \{1, 2, \dots\}$. Para N suficientemente grande, dependendo de α, m e q , temos que

$$(N + 1)^{\alpha(q+1)} \leq [(N - 1)!]^{1/2m}.$$

e

$$(2^{1/q}q)^N \leq [(N - 1)!]^{1/2m}.$$

O Lema anterior pode ser consultado em (CHEN, -, p. 5). Portanto, para ω suficientemente grande, deduzimos que

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \left(|\widehat{\mu}_X(\omega)|^{2q} \right) \right]^{1/q} &\leq \frac{1}{N!} (2^{1/q}q)^N \\ &\leq C_{\alpha,q} |\omega|^{-\alpha} (N + 1)^{\alpha(q+1)} (2^{1/q}q)^N \\ &\leq C_{\alpha,q} |\omega|^{-\alpha} [(N - 1)!]^{1/2m} [(N - 1)!]^{1/2m} \\ &= C_{\alpha,q} |\omega|^{-\alpha} [(N - 1)!]^{1/m} \\ &\leq C_{\alpha,q} |\omega|^{-\alpha} c_{\alpha,q}^{-1/m} |\omega|^{\alpha/m} \\ &:= c_{\alpha,m,q} |\omega|^{-(1-\frac{1}{m})\alpha}, \end{aligned}$$

como desejávamos mostrar. □

Utilizando o Teorema 6.2.10 e o Teorema 6.1.3 obtemos a seguinte estimativa de restrição

em \mathbb{R} :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu_X)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (6.33)$$

para todo $1 \leq p < p_c = \frac{2(1-\alpha)+\beta}{2(1-\alpha)+\beta/2}$.

6.3 Uma generalização de restrição de Fourier

Nesta seção, temos o objetivo de exibir algumas consequências do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis e, para tanto, iremos nos basear em (MITSIS, 2002).

Lema 6.3.1. Dado $0 < \delta < 1$, existe uma função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, não negativa, satisfazendo $\phi \gtrsim 1$ em $B(0, 1)$ tal que $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, \delta)$ e $\widehat{\phi} \geq 0$.

Demonstração. O Exemplo A.1.26 nos permite escolher uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, não negativa, com $\varphi \geq 1$ em $B(0, 1)$, $\widehat{\varphi} \geq 0$ e $\text{supp}(\widehat{\varphi}) \subset B(0, 1)$. Além disso, seja $0 < \delta < 1$ e defina $\phi(x) = \delta^n \varphi(\delta x)$. É claro que $\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\delta^{-1}\xi)$ (Proposição A.1.3 - (ii)). Logo, $\phi \gtrsim 1$ em $B(0, 1)$ e $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, \delta)$. \square

Lema 6.3.2. Existe uma função par $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \geq 1$ em $B(0, 1)$, $\widehat{\phi} \geq 0$ e $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, C)$ para algum $0 < C < 1$.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a função da demonstração do Lema 6.3.1 e defina $\psi(x) = \varphi(Cx)$. É de rápida verificação que $\widehat{\psi}(\xi) = C^{-n}\widehat{\varphi}(C^{-1}\xi)$, dessa forma, definindo a função par $\phi(x) = \psi(x) + \psi(-x)$ concluímos a prova. \square

O resultado a seguir nos mostra como o decaimento da transformada de Fourier de uma medida em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ pode afetar o comportamento da medida em bolas.

Proposição 6.3.3. Seja μ uma medida em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ cuja transformada de Fourier satisfaz o decaimento (6.5) para $0 < \beta < n$. Então,

$$\mu(B(x, r)) \lesssim r^{\beta/2}, \quad (6.34)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Demonstração. Pelo Lema 6.3.1, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma função não negativa, tal que $\phi \gtrsim 1$ em $B(0, 1)$ e $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, \delta)$, para algum $0 < \delta < 1$. Com isto, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ defina

$$\phi_{x,r}(y) = \phi\left(\frac{x-y}{r}\right),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. É de rápida verificação que $1 \lesssim \phi((x-y)/r)$ sempre que $y \in B(x, r)$. Logo,

$$\mu(B(x, r)) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,r)}(y) d\mu_y \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{x,r}(y) d\mu_y. \quad (6.35)$$

Pela Proposição 2.5.6 - (i), temos que $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu} f$ para toda função f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, pelo Teorema A.1.10 (fórmula da inversão) e pela Proposição A.1.12 - (i), concluímos que $f = \widehat{\widehat{f}} = \widehat{\widehat{\widehat{f}}}$. Com isto, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_{x,r} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu} \widehat{\phi_{x,r}} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}(\xi) \widehat{\phi_{x,r}}(-\xi) d\xi. \quad (6.36)$$

Ainda, com uma simples mudança de variável podemos verificar rapidamente que

$$\widehat{\phi_{x,r}}(-\xi) = r^n e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{\phi}(r\xi). \quad (6.37)$$

Portanto, substituindo (6.37) em (6.36) por (6.35) e utilizando o decaimento (6.5), obtemos

$$\mu(B(x,r)) \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi) r^n e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{\phi}(r\xi)| d\xi \leq r^n \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\beta/2} |\widehat{\phi}(r\xi)| d\xi.$$

Como $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, \delta)$, temos que $\widehat{\phi}(r\xi) = 0$ sempre que $|r\xi| \geq \delta$. Logo, fazendo a mudança de variável $r\xi = \eta$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu(B(x,r)) &\lesssim r^n \int_{|r\xi| \leq \delta} |\xi|^{-\beta/2} |\widehat{\phi}(r\xi)| d\xi \\ &= r^{\beta/2} \int_{|\eta| \leq \delta} |\eta|^{-\beta/2} |\widehat{\phi}(\eta)| d\eta \\ &\leq r^{\beta/2} \|\widehat{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|\eta| \leq \delta} K_{\beta/2}(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

com $K_{\beta/2}$ sendo o núcleo de Riesz definido na Seção 2.6. Além disso, pela Proposição 2.6.4 temos que $K_{\beta/2} \in L^1_{loc}$, já que $\beta < n$. Com isto, finalizamos a demonstração. \square

Se $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e se soubermos apenas que sua transformada de Fourier tem o decaimento (6.5) para $0 < \beta < n$, então, pela Proposição 6.3.3 e pelo Teorema 6.1.3 de Mockenhaupt-Mitsis, obtemos o seguinte estimativa de restrição:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $1 \leq p < \frac{4n}{4n-\beta}$.

Para finalizar esta seção, é importante observar que para mostrar a estimativa L^2 (6.11) na demonstração do Teorema 6.1.3 utilizamos apenas uma condição dimensional. Mais precisamente, mostramos que

$$\|(\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{\mu}) * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

usando apenas a condição (6.4) para estimar $\|\widehat{K}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Com isto e pela equivalência comentada em (6.7) de certa forma podemos esperar que haja uma limitação para $\widehat{f}\mu$ sob condições mais gerais. Isto foi primeiro observado por Strichartz em (STRICHARTZ, 1990) em um outro

contexto, provando que se $\mu(B(x, r)) \lesssim r^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, então

$$\int_{B(x_0, r)} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi \lesssim r^{n-\alpha} \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \quad (6.38)$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Contudo, Mitsis em seu trabalho (MITSIS, 2002) mostrou o seguinte resultado mais geral.

Teorema 6.3.4 (Uma generalização de restrição de Fourier). Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\mu(B(x, r)) \lesssim h(r)$, para alguma função não negativa h . Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{B(x_0, r)} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi \lesssim r^n h(c/r) \|f\|_{L^2(\mu)}^2, \quad (6.39)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f \in L^2(\mu)$. Quando $h(r) = r^\alpha$ obtemos o (6.38).

Demonstração. É suficiente mostramos o resultado quando $x_0 = 0$, pois o caso geral segue por uma simples mudança de variável. Pelo Lema 6.3.2, escolha uma função par $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \geq 1$ em $B(0, 1)$, $\widehat{\phi} \geq 0$ e $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, C)$ para algum $0 < C < 1$. Com isto, defina $\phi_r(x) = \phi(x/r)$ e note que a mesma ainda é uma função par. Logo, pela Proposição A.1.12 - (ii) concluímos que $\widehat{\phi_r} = \widehat{\phi}_r$. Além disso, temos que $|\phi_r(x)|^2 \geq 1$ para todo $x \in B(0, r)$. Com isto, e utilizando a Proposição 2.5.6 - (iii), obtemos

$$\int_{B(0, r)} |\widehat{f\mu}|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_r \widehat{f\mu}|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_r} \widehat{f\mu}|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\widehat{\phi_r} * (f\mu))|^2.$$

Como a medida $f\mu$ está em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, pelo Corolário 2.5.9, temos que $\widehat{\phi_r} * (f\mu) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos utilizar a Proposição A.1.23 - (ii) (identidade de Plancherel) na ultima desigualdade para obter

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r)} |\widehat{f\mu}|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_r} * (f\mu)(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_r}(x-y) f(y) d\mu_y \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_r}(x-y) f(y)| d\mu_y \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, defina a função positiva $h_x(y) = \widehat{\phi_r}(x-y)$. Logo, pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h_x f| d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |h_x^{1/2} (h_x^{1/2} f)| d\mu \leq \|h_x^{1/2}\|_{L^2(\mu)} \|h_x^{1/2} f\|_{L^2(\mu)},$$

logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |h_x f| d\mu \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h_x| d\mu \int_{\mathbb{R}^n} |h_x| |f|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| d\mu_y \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| |f(y)|^2 d\mu_y$$

Com isto, deduzimos que

$$\int_{B(0,r)} |\widehat{f}\mu|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| d\mu_y \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| |f(y)|^2 d\mu_y \right] dx.$$

Pela Proposição A.1.3 - (ii) temos que $\widehat{\phi}_r(\xi) = r^n \widehat{\phi}(r\xi)$. Além disso, como $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, C)$, para cada x fixo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| d\mu_y = r^n \int_{B(x, C/r)} \widehat{\phi}(r(x-y)) d\mu_y \leq r^n \|\widehat{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu(B(x, C/r)).$$

Portanto, utilizando o controle da medida μ sobre bolas e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{B(0,r)} |\widehat{f}\mu|^2 \lesssim r^n h(C/r) \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| dx d\mu_y. \quad (6.40)$$

Ainda, substituindo a expressão de $\widehat{\phi}_r$ já comentada e através de uma simples mudança de variável podemos constatar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_r(x-y)| dx = r^n \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(r(x-y))| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}| = \|\widehat{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

portanto, para finalizarmos a prova, basta substituir a identidade acima em (6.40). \square

6.4 Caso end-point do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis

Esta seção é dedicada à demonstração do caso end-point do Teorema de Mockenhaupt-Mitsis feita feita Bak e Seeger em (BAK; SEEGER, 2010). Além disso, utilizamos como referência básica para o estudo dos espaços de Lorentz e de interpolação os livros (GRAFAKOS, 2014), (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976).

6.4.1 Espaços de Lorentz

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e considere f uma função mensurável complexa definida em X . A aplicação $d_f : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \quad \forall \alpha \in [0, \infty)$$

é chamada de função distribuição de f . O rearranjo decrescente de f é a função f^* definida em $[0, \infty)$ dada por

$$f^*(t) = \inf_{d_f(s) \leq t} \{s > 0\}.$$

Vejam algumas propriedades das funções d_f e f^* , cujas provas podem ser consultadas em (GRAFAKOS, 2014, Proposição 1.4.5).

Proposição 6.4.1. Seja (X, μ) um espaço de medida e f, g funções mensuráveis sobre X . Além disso seja $0 < p < \infty$. Então

- i) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$;
- ii) $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$;
- iii) $\sup_{t>0} \{t^p f^*(t)\} = \sup_{\alpha>0} \{\alpha (d_f(\alpha))^p\}$;
- iv) $(kf)^* = |k|f^*$, para todo $k \in \mathbb{C}$.

Definição 15 (Espaço de Lorentz). Seja f uma função mensurável no espaço de medida (X, μ) . Dados $0 < p, q \leq \infty$ defina

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & q < \infty \\ \sup_{t>0} \{t^{1/p} f^*(t)\}, & q = \infty \end{cases}.$$

O espaço de Lorentz com índices p, q é definido como

$$L^{p,q}(X, \mu) = \{f : \|f\|_{L^{p,q}} < \infty\}.$$

Além disso, as funções em $L^{p,q}(X, \mu)$ são iguais se forem iguais μ -qtp.

Corolário 6.4.2. Seja (X, μ) um espaço de medida e f uma função mensurável sobre X . Além disso seja $0 < p, q < \infty$. Então

- i) $\|\bar{f}\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{L^{p,q}}$;
- ii) $\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^{p,p}}$ e $L^{p,p} = L^p$;

Demonstração. Pela Proposição 6.4.1 - i) temos $(f^*)^q = (|f|^q)^* = (|\bar{f}|^q)^* = (\bar{f}^*)^q$. Logo,

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{q/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty (t^{q/p} \bar{f}^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \|\bar{f}\|_{L^{p,q}}$$

e provamos o item i). Novamente, pela Proposição 6.4.1 - ii) temos

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt = \int_0^\infty t f^*(t)^p \frac{dt}{t} = \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^p \frac{dt}{t} = \|f\|_{L^{p,p}}^p,$$

e com isto obtemos o item ii). \square

Se $0 < p \leq \infty$ e $0 < q < r \leq \infty$, existe uma constante c , dependendo de p, q, r tal que

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq c \|f\|_{L^{p,q}}, \quad (6.41)$$

em outras palavras, $L^{p,q} \subset L^{p,r}$. A prova deste fato pode ser consultada em (GRAFAKOS, 2014, Proposição 1.4.10). Vejamos a seguir uma versão da desigualdade de Hölder para espaços de Lorentz.

Proposição 6.4.3. Sejam (X, μ) um espaço de medida σ -finito e f, g funções mensuráveis sobre X . Então, dados $1 < q \leq \infty$ e $1 \leq p < \infty$, temos

$$\|fg\|_{L^1(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^{p,q}(\mu)} \|g\|_{L^{p',q'}(\mu)}.$$

Demonstração. Como (X, μ) é σ -finito temos

$$\int_X f(x)g(x)d\mu_x \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^\infty t^{1/p} f^*(t) t^{1/p'} g^*(t) \frac{dt}{t}.$$

A prova da desigualdade acima pode ser consultada em (GRAFAKOS, 2014, P. 74). Com isto, supondo que $q < \infty$ podemos usar a desigualdade de Hölder usual para obter

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^1(X, \mu)} &\leq \int_0^\infty |t^{1/p} f^*(t) t^{1/p'} g^*(t)| \frac{dt}{t} \\ &\leq \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^+, dt/t)} \|t^{1/p'} g^*(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^+, dt/t)} \\ &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \left(\int_0^\infty (t^{1/p'} g^*(t))^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{1/q'} \\ &= \|f\|_{L^{p,q}} \|g\|_{L^{p',q'}}. \end{aligned}$$

O caso em que $q = \infty$ pode ser consultado em (GRAFAKOS, 2014, p. 16). \square

O resultado a seguir é chamado Teorema de interpolação de Marcinkiewicz geral, cuja demonstração pode ser consultada em (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Teorema 5.3.2).

Teorema 6.4.4 (Interpolação de Marcinkiewicz geral). Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida e considere $p_i, q_i \in [1, \infty]$, $i = 0, 1$ tais $p_0 \neq p_1$ e $q_0 \neq q_1$. Suponha que existam constantes

positivas M_0, M_1 tais que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0, s_0}(\nu)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0, r_0}(\mu)}, \quad \forall f \in L^{p_0, r_0}(\mu), \quad (6.42)$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1, s_1}(\nu)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1, r_1}(\mu)}, \quad \forall f \in L^{p_1, r_1}(\mu), \quad (6.43)$$

com $s_i, r_i > 0, i = 0, 1$. Dado $\theta \in (0, 1)$, defina

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (6.44)$$

Então

$$\|T(f)\|_{L^{q, s}(\nu)} \lesssim_{p, q, s} M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p, s}(\mu)}, \quad \forall f \in L^{p, s}(\mu), \quad (6.45)$$

com $s \in (0, \infty]$.

6.4.2 Espaços de interpolação

O objetivo desta Seção é mostrar que um espaço de Lorentz $L^{p, q}(X, \mu)$ é um espaço de interpolação. A referência utilizada nesta Seção foi (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976).

Uma categoria \mathcal{C} consiste de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ e morfismos (aplicações que preservam estrutura) $\{T_j\}_{j \in J}$ tais que, dados $C, D \in \mathcal{C}$, existe um morfismo T , de C em D . Representamos isto por $T : C \curvearrowright D$. Além disso, se $T : C \curvearrowright D$ e $S : D \curvearrowright E$, então existe um morfismo ST tal que $ST : C \curvearrowright E$. Se T, S, T são morfismos, também é requerido que $S(TR) = (ST)R$. Ainda, dado um objeto $A \in \mathcal{C}$, deve existir um morfismo $I = I_A$, tal que, para todo $T : A \curvearrowright A$ temos $TI = IT = T$. Por exemplo na teoria de conjuntos, os morfismos são funções, na teoria de grupos os morfismos são os homomorfismos e na topologia, os morfismos são as funções contínuas.

Exemplo 6.4.5. A coleção de todos os espaços topológicos juntamente com as aplicações contínuas forma uma categoria com $TS = T \circ S$ e I sendo a aplicação identidade. Já os espaços vetoriais topológicos e as aplicações contínuas formam uma categoria de maneira análoga.

Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C} duas categorias. Considere F uma regra que associa todo objeto $A \in \mathcal{C}_1$ a um objeto $F(A) \in \mathcal{C}$. Suponha também que $F(T)$ é um morfismo em \mathcal{C} , sempre que T é um morfismo de \mathcal{C}_1 . Além disso, se A, B são objetos em \mathcal{C}_1 e T, S são morfismos em \mathcal{C}_1 tais que $T : A \curvearrowright B$, suponha que $F(T) : F(A) \curvearrowright F(B)$, $F(ST) = F(S)F(T)$ e $F(I_A) = I_{F(A)}$. Tal regra F é chamado de funtor de \mathcal{C}_1 em \mathcal{C} .

Exemplo 6.4.6. Seja \mathcal{C} a categoria dos espaços topológicos e \mathcal{C}_1 a categoria dos espaços vetoriais reais de dimensão finita. A regra $F(A) = A$, $F(T) = T$ é um funtor de \mathcal{C}_1 em \mathcal{C} .

Definição 16. Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C} duas categorias. Se os objetos e os morfismos de \mathcal{C}_1 são objetos e morfismos de \mathcal{C} , além disso, se a regra $F(A) = A$, $F(T) = T$ é um funtor de \mathcal{C}_1 em \mathcal{C} , dizemos que \mathcal{C}_1 é uma subcategoria de \mathcal{C} .

Seja A um espaço vetorial sobre \mathbb{C} ou \mathbb{R} . Além disso, suponha que o mesmo é normado com a norma $\|\cdot\|_A$. Neste caso, o mesmo é um espaço vetorial topológico, com a topologia gerada pela métrica $d(u, v) = \|u - v\|_A$. Sejam A, B são espaços vetoriais normados e $T : A \rightarrow B$ é um operador linear. Se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|T(a)\|_B \leq M\|a\|_A, \quad \forall a \in A \setminus \{0\},$$

dizemos que T é limitado (contínuo). Neste caso, a aplicação

$$\|T\|_{A,B} = \sup_{a \neq 0} \left\{ \frac{\|T(a)\|_B}{\|a\|_A} \right\}$$

é uma norma no espaço dos operadores limitados de A em B . Denotaremos por \mathcal{N} a categoria dos espaços vetoriais normados, com os morfismos dados por operadores lineares limitados. Uma subcategoria natural de \mathcal{N} é a dos espaços de Banach. Denotaremos a mesma por \mathcal{B} .

Sejam A_0 e A_1 dois espaços vetoriais topológicos. Diremos que A_0 e A_1 são compatíveis se existir um espaço vetorial de Hausdorff \mathcal{U} tal que A_0, A_1 são subespaços de \mathcal{U} . Neste caso fica bem definido os espaços vetoriais

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= \{a \in \mathcal{U} : a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\} \\ A_0 \cap A_1 &= \{a : a \in A_0, a \in A_1\}. \end{aligned}$$

Se A_0 e A_1 são espaços vetoriais normados compatíveis. Então as aplicações

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_0 \cap A_1} &= \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\} \\ \|a\|_{A_0 + A_1} &= \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\} \end{aligned}$$

são normas em $A_0 \cap A_1$, $A_0 + A_1$, respectivamente. Além disso, se A_0, A_1 são completos, então $A_0 \cap A_1$, $A_0 + A_1$ também são (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Lema 2.3.1).

Seja \mathcal{C} uma subcategoria qualquer da categoria \mathcal{N} . Usaremos a notação $\bar{A} = (A_0, A_1)$ para dizer que A_0 e A_1 são espaços vetoriais normados compatíveis tais que $A_0 + A_1$ e $A_0 \cap A_1$ são objetos de \mathcal{C} . Seja $T : A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$ um operador linear limitado tal que

$$T_{A_0} = T|_{A_0} : A_0 \rightarrow B_0, \quad T_{A_1} = T|_{A_1} : A_1 \rightarrow B_1$$

sejam morfismos em \mathcal{C} . Com isto, associamos $T : (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$. Com as definições de composição e identidade, os objetos (A_0, A_1) e os morfismos T formam uma categoria, a qual

iremos denotar por \mathcal{C}_1 . Com isto, podemos definir os funtores Σ (soma) e Δ (interseção) de \mathcal{C}_1 em \mathcal{C} escrevendo $\Sigma(T) = \Delta(T) = T$ e

$$\Sigma(\bar{A}) = A_0 + A_1, \quad \Delta(\bar{A}) = A_0 \cap A_1.$$

No que segue, \mathcal{C} denote uma subcategoria de \mathcal{N} qualquer, tal que \mathcal{C} é fechada sob operações de soma e interseção. Além disso, iremos denotar por \mathcal{C}_1 a categoria de todos os pares \bar{A} compatíveis em \mathcal{C} .

Definição 17. Seja $\bar{A} = (A_0, A_1)$ um par em \mathcal{C}_1 . Um espaço $A \in \mathcal{C}$ é chamado de espaço intermediário entre A_0 e A_1 (ou com respeito a \bar{A}) se

$$\Delta(\bar{A}) \subset A \subset \Sigma(\bar{A}),$$

com as inclusões sendo contínuas. Além disso, se adicionarmos a condição de que $T : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ implica $T : A \rightarrow A$, então o espaço A é chamado de espaço de interpolação entre A_0 e A_1 (ou com respeito a \bar{A}). Mais geralmente, dizemos que dois espaços A, B em \mathcal{C} são espaços de interpolação com respeito a \bar{A} e \bar{B} se A e B forem espaços intermediários com respeito a \bar{A} e \bar{B} , respectivamente e se $T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ implica $T : A \rightarrow B$.

É fato que $\Delta(A)$ e $\Delta(B)$ são espaços de interpolação com respeito a \bar{A} e \bar{B} . O mesmo é verdade para $\Sigma(\bar{A})$ e $\Sigma(\bar{B})$ (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, p. 27). É importante observar que $\Sigma(\bar{A})$ é um espaço de interpolação entre A_0 e A_1 , pois

$$\Delta(\bar{A}) \subset \Sigma(\bar{A}) \subset \Sigma(\bar{A}),$$

e, se $T : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ com $\bar{A} = (A_0, A_1)$, por construção temos $T : \Sigma(\bar{A}) \rightarrow \Sigma(\bar{A})$ isto é, $T : A_0 + A_1 \rightarrow A_0 + A_1$.

Definição 18. Um functor interpolação (ou método de interpolação) em \mathcal{C} é um functor F de \mathcal{C}_1 em \mathcal{C} tal que se \bar{A} e \bar{B} são pares em \mathcal{C}_1 , então $F(\bar{A})$ e $F(\bar{B})$ são espaços de interpolação com respeito a \bar{A} e \bar{B} . Além disso, se $T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$, F deve satisfazer $F(T) = T$.

Fixado $t > 0$ defina

$$K(t, a) = K(t, a; \bar{A}) = \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}, \quad a \in \Sigma(\bar{A}),$$

$$J(t, a) = J(t, a; \bar{A}) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}, \quad a \in \Delta(\bar{A}).$$

As funções $K(t, a)$ e $J(t, a)$ são normas equivalentes em $\Sigma(\bar{A})$ e $\Delta(\bar{A})$, respectivamente (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Lema 3.3.1)

No que segue, queremos construir uma família de funtores na categoria \mathcal{N} . Já vimos que a norma em no espaço de interpolação $\Sigma(\bar{A})$ é dada por

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\},$$

com $\bar{A} = (A_0, A_1)$. Além disso, trocando $\|a_1\|_{A_1}$ por $t\|a_1\|_{A_1}$ obtemos a norma equivalente $K(t, a) = K(t, a; \bar{A})$, $t > 0$. No que segue, queremos definir um novo espaço de interpolação. Dados $0 < \theta < \infty$ e $0 \leq q \leq \infty$, defina o funcional $\Phi_{\theta,q}$ por

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\varphi(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

com φ sendo uma função não negativa. Para estes valores de θ e q definimos

$$\bar{A}_{\theta,q;K} = (A_0, A_1)_{\theta,q;K} \quad (6.46)$$

o espaço de todos $a \in \Sigma(\bar{A})$ tal que $\Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) < \infty$. Com isto definimos a regra

$$K_{\theta,q}(\bar{A}) = \bar{A}_{\theta,q;K}.$$

Além disso defina

$$\|a\|_{\theta,q;K} = \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)). \quad (6.47)$$

De fato $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$ é uma norma em $\bar{A}_{\theta,q;K}$ (veja (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, p. 46)). Se $T : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$, definimos $K_{\theta,q}(T) = T$. Com isto, $K_{\theta,q}$ é um functor de interpolação na categoria \mathcal{N} (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Teorema 3.1.2). O modo que obtivemos o functor $K_{\theta,q}$ é chamado de K -método.

Observação 6.4.7. É possível construir outra família de funtores usando o chamado J -método. Este consiste em definir $\bar{A}_{\theta,q;J}$ como sendo os elementos $a \in \Sigma(\bar{A})$ que podem ser representados por

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}, \quad (6.48)$$

com u sendo uma função mensurável com valores em $\Delta(\bar{A})$ e

$$\Phi_{\theta,q}(J(t, u(t))) < \infty \quad (6.49)$$

Com isto define-se $J_{\theta,q}(\bar{A}) = \bar{A}_{\theta,q;J}$ e

$$\|a\|_{\theta,q;J} = \inf_u \Phi_{\theta,q}(J(t, u(t))), \quad (6.50)$$

com o ínfimo sendo tomado sobre todas u que satisfaz (6.48) e (6.49). Porém, de fato $J_{\theta,q}(\bar{A}) = K_{\theta,q}(\bar{A})$ com normas equivalentes (6.47) e (6.50), sempre que $0 < \theta < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Teorema 3.3.1).

Pela Observação 6.4.7 podemos omitir o sub-índice K na definição (6.46), isto é,

$$\bar{A}_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q}, \quad (6.51)$$

o espaço de todos $a \in \Sigma(\bar{A})$ tal que $\Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) < \infty$. Com isto podemos enunciar o resultado mais importante desta Seção:

Teorema 6.4.8. (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976, Teorema 5.3.1) Seja (X, μ) um espaço de medida e considere os números $p_0, p_1, q_0, q_1, q \in (0, \infty]$. Dado $\theta \in (0, 1)$, defina p por

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Se $p_0 \neq p_1$, então

$$(L^{p_0, q_0}, L^{p_1, q_1})_{\theta,q} = L^{p,q}.$$

Em outras palavras, o espaço de Lorentz $L^{p,q}$ é um espaço de interpolação. A fórmula acima também vale no caso em que $p_0 = p_1 = p$, desde que $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

6.4.3 O end-point

Queremos mostrar que o Teorema 6.1.3 é válido para o end-point $p_c = \frac{2(n-\alpha)+\beta}{2(n-\alpha)+\beta/2}$. Mais precisamente:

Teorema 6.4.9 (Bak-Seeger). Sejam $0 < \alpha < n$, $0 < \beta \leq \alpha$. Suponha que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ uma medida de probabilidade e $1 \leq A, B < \infty$ são constantes tais que

$$\mu(B(x, r)) \leq Ar^\alpha, \quad \forall x \in \text{supp}(\mu), r > 0. \quad (6.52)$$

Além disso suponha que

$$\sup_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{\beta/2} |\hat{\mu}(\xi)| \leq B. \quad (6.53)$$

Então existe uma constante c , dependendo de A, B, α, β tal que

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mu)} \leq c \|f\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.54)$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Suponha que o resultado a seguir seja válido.

Teorema 6.4.10. Sejam $0 < \alpha < n$, $0 < \beta \leq \alpha$ e μ uma medida em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (6.52) e (6.53), com $A, B \geq 1$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 d\mu \leq C^2 A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}} \|f\|_{L^{p_c,2}(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (6.55)$$

Além disso, se α, β forem escolhidos em um intervalo compacto $I \subset (0, \infty)$, então C depende apenas de n e I .

Lema 6.4.11. O Teorema 6.4.10 implica o Teorema 6.4.9.

Demonstração. É de rápida verificação que $p_0 < 2$. Logo, por (6.41), temos

$$\|f\|_{L^{p_c,2}} \lesssim \|f\|_{L^{p_c,p_c}} = \|f\|_{L^{p_c}}.$$

Pelo Teorema 6.4.10 temos:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)}^2 \leq C^2 A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}} \|f\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}^2.$$

□

Antes de continuar, vejamos outra consequência do Teorema 6.4.10.

Corolário 6.4.12. Sejam $0 < \alpha < n$, $0 < \beta \leq \alpha$ e μ uma medida em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (6.52) e (6.53), com $A, B \geq 1$. Então

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mu)} \lesssim_{\alpha,\beta,p} \|f\|_{L^{p,s}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

com $1 < p < p_c$, $q = \frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta} p'$ e $0 < s < q$.

Demonstração. Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sabemos que \widehat{f} é contínua (veja a Proposição A.1.1). Logo, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ em toda parte. Consequentemente

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mu)} = \inf\{\alpha \geq 0 : |\widehat{f}| \leq \alpha, \mu\text{-qtp}\} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Pelo Corolário 6.4.2 - ii) temos $\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^{1,1}}$. Além disso, $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ (GRAFAKOS, 2014, p. 52). Logo, definindo o operador $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, temos

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^{\infty,\infty}(\mu)} \leq \|f\|_{L^{1,1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (6.56)$$

Além disso, como $L^{2,2} = L^2$ temos

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^{2,2}(\mu)} \leq C^2 A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}} \|f\|_{L^{p_c,2}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^{p_c,2}. \quad (6.57)$$

Fixado $1 < p < p_c$, seja $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p_c}.$$

Tal número existe, basta tomar $\theta = \frac{4(n-\alpha)+2\beta}{\beta p'}$. Definindo $q = \frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta} p'$, temos

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}. \quad (6.58)$$

Portanto, interpolando (6.56) e (6.57) via Teorema 6.4.4 (Interpolação de Marcinkiewicz) obtemos

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^{q,s}(\mu)} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p,s}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), 0 < s \leq \infty,$$

com $M_0 = 1$ e $M_1 = C^2 A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}}$. Tomando $s < q$, sabemos que $\|g\|_{L^{q,q}} \leq \|g\|_{L^{q,s}}$. Portanto:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mu)} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p,s}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

para todo $1 < p < p_c, q = \frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta} p'$ e $s < q$, com $\theta = 2/q, q = \frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta} p'$. \square

Usando o método TT^* visto em (5.11) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\mu_\xi \leq \|(\widehat{\mu} * \bar{f})f\|_{L^1}.$$

Logo, pela Proposição 6.4.3 (Desigualdade de Hölder) temos

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|\widehat{\mu} * \bar{f}\|_{L^{p'_c,2}} \|f\|_{L^{p_c,2}}.$$

Neste momento, notamos que precisamos controlar $\|\widehat{\mu} * \bar{f}\|_{L^{p'_c,2}}$. Suponha que

$$\|\widehat{\mu} * f\|_{L^{p'_c,2}} \leq C(p_c) A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}} \|f\|_{L^{p_c,2}}. \quad (6.59)$$

Logo,

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)}^2 \lesssim A^{\frac{\beta}{2(n-\alpha)+\beta}} B^{\frac{2(n-\alpha)}{2(n-\alpha)+\beta}} \|f\|_{L^{p_c,2}}^2.$$

Para obter (6.55), basta usar o Corolário 6.4.2 - i) para ver que $\|\widehat{f}\|_{L^{p_c}} = \|f\|_{L^{p_c}}$. A proposição seguir nos certifica que (6.59) é válido. Para provar a mesma, iremos fazer uso do resultado a seguir, cuja prova pode ser consultada em (BOURGAIN, 1985) ou (CARBERY *et al.*, 1999).

Lema 6.4.13 (Método de Bourgain). Sejam $\{T_j\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de operadores de $A_0 + A_1$

em $B_0 + B_1$ tais que

$$\|T_j(a)\|_{B_i} \leq M_i 2^{j\beta_i} \|a\|_{A_i}, \quad i = 0, 1, \quad (6.60)$$

com $\beta_0 < 0 < \beta_1$ e $M_i > 0$, $i = 0, 1$. Defina $\theta = \frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta_1}$. Então, $T = \sum T_j$ é estendido a um operador linear limitado de $(A_0, A_1)_{\theta, 1}$ a $(B_0, B_1)_{\theta, \infty}$ com operador norma limitado por $CM_0^{1-\theta} M_1^\theta$, com C dependendo de β_0, β_1 .

Corolário 6.4.14. Considere $p_i, q_i, r_i, s_i \in (0, \infty]$, $i = 0, 1$ com $p_0 \neq p_1$ e $r_0 \neq r_1$. Além disso, sejam $\{T_j\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de operadores de $L^{p_0, q_0} + L^{p_1, q_1}$ em $L^{r_0, s_0} + L^{r_1, s_1}$ tais que

$$\|T_j f\|_{L^{r_0, s_0}} \lesssim M_0 2^{-j\beta_0} \|f\|_{L^{p_0, q_0}} \quad \|T_j f\|_{L^{r_1, s_1}} \lesssim M_1 2^{j\beta_1} \|f\|_{L^{p_1, q_1}},$$

com $\beta_0, \beta_1 \in (0, \infty)$. Seja $\theta = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1}$ e defina p e r por

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Então, o operador $T = \sum T_j$ satisfaz

$$\|T(f)\|_{L^{r, \infty}} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p, 1}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.4.8 temos

$$(L^{p_0, q_0}, L^{p_1, q_1})_{\theta, 1} = L^{p, 1} \quad \text{e} \quad (L^{r_0, s_0}, L^{r_1, s_1})_{\theta, \infty} = L^{r, \infty}.$$

Logo, pelo método de Bourgain, o operador $T = \sum T_j$ mapeia continuamente $(L^{p_0, q_0}, L^{p_1, q_1})_{\theta, 1}$ em $(L^{r_0, s_0}, L^{r_1, s_1})_{\theta, \infty}$ e com isto finalizamos. \square

Proposição 6.4.15. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ uma medida de probabilidade satisfazendo (6.52) e (6.53) e defina o operador $T(f) = f * \hat{\mu}$. Além disso, considere os números

$$\rho = \frac{(n - \alpha + \beta)(n - \alpha + \beta/2)}{(n - \alpha)^2 + 3\beta/2(n - \alpha) + (\beta/2)^2}, \quad \sigma = \frac{n - \alpha + \beta}{\beta/2}. \quad (6.61)$$

Então T é do tipo fraco restrito (ρ, σ) e do tipo fraco restrito (ρ', σ') , ambos com operador norma de ordem $O(A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}})$, isto é $\|T(f)\|_{L^{q, \infty}} \leq A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^p}$, com (p, q) sendo (ρ, σ) ou (ρ', σ') . Além disso, se $\rho < p < \sigma'$ e $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}$, então, para qualquer $s \in (0, \infty]$ temos

$$\|f * \hat{\mu}\|_{L^{q, s}} \leq C(p, s) A^{\frac{\beta/2}{(n-\alpha)+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{p, s}}. \quad (6.62)$$

Em particular, (6.62) vale para $p = p_c$, $q = p'_c$ e $s = 2$.

Demonstração. Iniciemos com alguns cálculos que serão úteis para aplicar o método de Bourgain e o Teorema de interpolação de Marcinkiewicz. É de rápida verificação que $\sigma' = \frac{n-\alpha+\beta}{n-\alpha+\beta/2}$ e $\rho' = \frac{4(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)}{\beta^2}$. Logo, $\rho < \sigma'$ e isto nos permite considerar $p \in (\rho, \sigma')$. Além disso, seja $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{\sigma'}.$$

Tal valor de θ existe, basta tomar $\theta = \frac{\sigma'(\rho-p)}{p(\rho-\sigma')}$. Seja q satisfazendo a hipótese $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}$. Logo

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\sigma} + \frac{\theta}{\rho'}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2} \\ &= \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{\sigma'} - \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2} \\ &= \frac{(1-\theta)[(n-\alpha)^2 + 3\beta/2(n-\alpha) + (\beta/2)^2]}{(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)} + \frac{\theta(n-\alpha+\beta/2)}{(n-\alpha+\beta)} - \frac{n-\alpha}{(n-\alpha+\beta/2)} \\ &= \frac{(\beta/2)(n-\alpha)(1-\theta) + 4^{-1}\beta^2}{(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)} \\ &= \frac{2\beta(n-\alpha)(1-\theta) + \beta^2}{4(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)} \\ &= \frac{2\beta(1-\theta)(n-\alpha+\beta/2) + \theta\beta^2}{4(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)} \\ &= \frac{(1-\theta)(\beta/2)}{(n-\alpha)+\beta} + \frac{\theta\beta^2}{4(n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta/2)} \\ &= \frac{(1-\theta)}{\sigma} + \frac{\theta}{\rho'}. \end{aligned}$$

Suponha que vale

$$\|f * \widehat{\mu}\|_{L^{\sigma,\infty}} \lesssim A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{\rho,1}}. \quad (6.63)$$

Por dualidade temos

$$\|f * \widehat{\mu}\|_{L^{\rho',\infty}} \lesssim A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{\sigma',1}}. \quad (6.64)$$

Interpolando as estimativas acima via Teorema 6.4.4 (interpolação de Marcinkiewicz) obtemos

$$\begin{aligned} \|f * \hat{\mu}\|_{L^{q,s}} &\lesssim_{s,p} \left(A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \right)^{1-\theta} \left(A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \right)^{\theta} \|f\|_{L^{p,s}} \\ &= A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{p,s}}, \end{aligned}$$

para todo $s \in (0, \infty]$ e com isto provamos (6.62). Só nos resta provar (6.63). Seja $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, 2)$ e $\varphi = 1$ em $B(0, 1)$. Defina $\lambda(x) = \varphi_0(x) - \varphi_0(2x)$ e seja $\varphi_j(x) = \lambda(2^{-j}x)$, $j \geq 1$. Observe que $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ é essencialmente a partição da unidade de Littlewood-Paley. Neste caso temos $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Vimos na demonstração do Teorema 6.1.3 que, ao definir a função $\mu_j = \check{\varphi}_j * \mu$, temos $\hat{\mu}_j = \varphi_j \hat{\mu}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela hipótese 6.53 temos $|\hat{\mu}(x)| \leq B|x|^{-\beta/2}$, para todo $|x| \geq 1$. Por outro lado, como $B \geq 1$ e μ é uma medida de probabilidade, podemos concluir o mesmo para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$|\hat{\mu}(x)| \leq B|x|^{-\beta/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De maneira análogo a que fizemos em (6.13), podemos concluir que $\|\hat{\mu}_j\|_\infty \lesssim B2^{-j\beta/2}$. Além disso, com o mesmo cálculo feito em (6.14) temos $\|\mu_j\|_\infty \lesssim A2^{j(n-\alpha)}$. Defina o operador $T_j(f) = f * \hat{\mu}_j$. Com isto; conforme já provamos em (6.11) e (6.10) temos $\|T_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim A2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $\|T_j f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim B2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, ou seja

$$\|T_j f\|_{L^\infty, \infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim B2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^{1,1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.65)$$

e

$$\|T_j f\|_{L^{2,2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim A2^{j(n-\alpha)} \|f\|_{L^{2,2}(\mathbb{R}^n)}, \quad (6.66)$$

Seja $\beta_0 = \beta/2$ e $\beta_1 = (n - \alpha)$ e defina

$$\omega = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1} = 1 - \theta,$$

com $\theta = \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}$. Logo, pelo Método de Bourgain o operador $T = \sum T_j$ mapeia $(L^{1,1}, L^{2,2})_{\omega,1}$ em $(L^{\infty,\infty}, L^{2,2})_{\omega,\infty}$ continuamente com operador norma majorado por $C(\beta_0, \beta_1)B^{1-\omega}A^\omega$. Bourgain em seu trabalho já mencionado, provou que com os espaços que estamos trabalhando, o operador T é do tipo fraco restrito (p_c, p'_c) , e se I for um compacto em $(0, \infty)$, então se $\alpha, \beta/2 \in I$ a constante $C(\alpha, \beta)$ depende só de I , não iremos exibir esta prova. Além disso, é de rápida verificação que

$$\frac{1}{p_c} = \frac{1-\omega}{1} + \frac{\omega}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p'_c} = \frac{1-\omega}{\infty} + \frac{\omega}{2}.$$

Pelo Teorema 6.4.8 temos

$$(L^{1,1}, L^{2,2})_{\omega,1} = L^{p_c,1} \quad \text{e} \quad (L^{\infty,\infty}, L^{2,2})_{\omega,\infty} = L^{p'_c,\infty}.$$

Portanto, observando que $1 - \theta = \frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}$ temos

$$\|f * \hat{\mu}\|_{L^{p'_c,\infty}} \lesssim B^{1-\omega} A^\omega \|f\|_{L^{p_c,1}} = A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{p_c,1}}.$$

Pela Proposição 2.5.12 - ii) e pela Proposição 6.4.3 (Desigualdade de Hölder) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu_\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{f}(\xi) d\mu_\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\mu} * \bar{f}) f \\ &\leq \|(\hat{\mu} * \bar{f}) f\|_{L^1} \\ &\leq \|\hat{\mu} * \bar{f}\|_{L^{p'_c,\infty}} \|f\|_{L^{p_c,1}} \\ &\lesssim A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|\bar{f}\|_{L^{p_c,1}} \|f\|_{L^{p_c,1}} \end{aligned}$$

Pelo Corolário 6.4.2 - i) temos $\|\bar{f}\|_{L^{p_c}} = \|f\|_{L^{p_c}}$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu_\xi \lesssim A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \|f\|_{L^{p_c,1}}^2 \quad (6.67)$$

Vamos utilizar (6.67) para limitar $\|f * \hat{\mu}_j\|_2$. Com efeito, pelo Teorema de Plancherel temos

$$\begin{aligned} \|f * \hat{\mu}_j\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\mu_j(\xi)|^2 d\xi \\ &\lesssim A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\mu_j(\xi)| d\xi \\ &= A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\check{\varphi}_j * \mu(\xi)| d\xi \\ &= A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}_j(\xi - \eta) d\mu_\eta \right| d\xi \\ &\leq A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\check{\varphi}_j(\xi - \eta)| d\mu_\eta d\xi \\ &= A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(z + \eta)|^2 |\check{\varphi}_j(z)| d\mu_\eta dz \end{aligned}$$

Pela Proposição A.1.3 - iii) temos $\hat{f}(z + \eta) = e_{-z} \widehat{f}(\eta)$, com $e_a(x) = e^{2\pi i a \cdot x}$. Com isto, e por (6.67) obtemos

$$\begin{aligned} \|f * \hat{\mu}_j\|_2^2 &\lesssim A 2^{j(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_j(z)| \int_{\mathbb{R}^n} |e_{-z} \widehat{f}(\eta)|^2 d\mu_\eta dz \\ &\lesssim A 2^{j(n-\alpha)} A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_j(z)| \|e_{-z} f\|_{L^{p_c,1}}^2 dz. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 6.4.1 - iv) e o fato de que $|e_{-z}(x)| = 1$ obtemos $\|e_{-z} f\|_{L^{p_c,1}} = \|f\|_{L^{p_c,1}}$.

Portanto

$$\|f * \hat{\mu}_j\|_2^2 \lesssim \|f\|_{L^{p_c,1}}^2 A^{2j(n-\alpha)} A^{\frac{\beta/2}{n-\alpha+\beta/2}} B^{\frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_j(z)| dz,$$

Vamos mostrar que a última integral não depende de j . Com um cálculo rápido, deduzimos que $\hat{\varphi}_j(x) = 2^{jn} \hat{\lambda}(2^j x)$. Como $\check{\varphi}_j = \tilde{\varphi}_j$, obtemos $\check{\varphi}_j(x) = 2^{jn} \hat{\lambda}(-2^j x)$. Logo, tomando a mudança de variável $y = -2^j x$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\check{\varphi}_j(z)| dz = \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \hat{\lambda}(-2^j z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\lambda}(y) dy \leq \|\hat{\lambda}\|_1.$$

Portanto

$$\|T_j(f)\|_{L^{2,2}} \lesssim (A^{1-\theta/2} B^{\theta/2}) 2^{j \frac{(n-\alpha)}{2}} \|f\|_{L^{p_c,1}}, \quad (6.68)$$

com $\theta = \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta/2}$. Já provamos que

$$\|T_j f\|_{L^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} \lesssim B 2^{-j\beta/2} \|f\|_{L^{1,1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.69)$$

Vamos usar novamente o argumento de interpolação de Bourgain. Sejam $\beta_0 = \beta/2$, $\beta_1 = (n-\alpha)/2$. Defina $\lambda = \beta_0/(\beta_0 + \beta_1)$ e considere

$$\gamma = 1 - \lambda = \frac{n-\alpha}{n-\alpha+\beta}.$$

Se ρ e σ são como em (6.61) temos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-\gamma}{p_c} + \frac{\gamma}{1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{\infty}.$$

Novamente, pelo Teorema 6.4.8 obtemos

$$(L^{p_c,1}, L^{1,1})_{\gamma,1} = L^{\rho,1} \quad \text{e} \quad (L^{2,2}, L^{\infty,\infty})_{\gamma,\infty} = L^{\sigma,\infty}.$$

Novamente, usando o método de Bourgain, T é do tipo fraco restrito (ρ, σ) e

$$\|f * \hat{\mu}\|_{L^{\sigma,\infty}} \lesssim B^{1-\lambda} [A^{1-\theta/2} B^{\theta/2}]^{\lambda} \|f\|_{L^{\rho,1}} = [A^{1-\theta/2} B^{\theta/2}]^{1-\gamma} B^{\gamma} \|f\|_{L^{\rho,1}} \quad (6.70)$$

É de rápida verificação que

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) (1 - \gamma) = \frac{\beta/2}{n - \alpha + \beta/2},$$

e

$$\frac{\theta}{2}(1 - \gamma) + \gamma = \frac{n - \alpha}{n - \alpha + \beta/2}.$$

Substituindo em (6.70) obtemos a almejada estimativa (6.63).

□

REFERÊNCIAS

- BAK, J.-G.; SEEGER, A. **Extensions of the Stein-Tomas theorem**. 2010. Citado nas páginas 25, 195, 199 e 222.
- BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. **Interpolation Spaces: An Introduction**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223). ISBN 978-3-642-66453-3, 978-3-642-66451-9. Citado nas páginas 222, 224, 225, 226, 227, 228 e 229.
- BLUHM, C. Random recursive construction of Salem sets. **Arkiv för Matematik**, Institut Mittag-Leffler, v. 34, n. 1, p. 51 – 63, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02559506>>. Citado nas páginas 26, 27, 200, 209 e 214.
- BOURGAIN, J. Estimations de certaines fonctions maximales. **CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math**, v. 301, n. 10, p. 499–502, 1985. Citado na página 231.
- BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2011. v. 1. xiv+600 p. (Universitext, v. 1). Citado nas páginas 49, 101, 253 e 263.
- CARBERRY, A.; SEEGER, A.; WAINGER, S.; WRIGHT, J. Classes of singular integral operators along variable lines. **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 9, n. 4, p. 583–605, 1999. Citado na página 231.
- CARLESON, L.; SJÖLIN, P. Oscillatory integrals and multiplier problem for the disc. **Studia Mathematica**, v. 44, n. 3, p. 287–299, 1972. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/217689>>. Citado nas páginas 24 e 180.
- CHEN, X. **Salem-Bluhm’s construction of Salem sets**. –. Disponível em: <<http://xianghongchen.com/notes/Salem.pdf>>. Citado nas páginas 200, 209 e 218.
- _____. **Sets of Salem type and sharpness of the L^2 -Fourier restriction theorem**. 2014. Citado na página 200.
- EVANS, L. C.; GARIÉPY, R. F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition**. [S.l.]: CRC Press, 2015. (Textbooks in Mathematics). ISBN 978-1-4822-4239-3, 143-143-145-1, 1482242397. Citado nas páginas 34, 35, 40, 41 e 212.
- FALCONER, K. J. **The geometry of fractal sets**. [S.l.]: CUP, 1985. (Cambridge Tracts in Mathematics). ISBN 9780521337052, 0521337054. Citado nas páginas 105, 112 e 113.
- FEFFERMAN, C. Inequalities for strongly singular convolution operators. **Acta Math.**, v. 124, p. 9–36, 1970. Citado nas páginas 178 e 180.
- FOLLAND, G. B. **Real analysis**. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado nas páginas 32, 34, 41, 42, 45, 46, 51, 97, 98, 100, 102, 110, 129, 138, 146, 153, 154, 167, 174, 192, 217, 243, 246, 252 e 262.

- GRAFAKOS, L. **Classical Fourier analysis**. Third. [S.l.]: Springer, New York, 2014. v. 249. xviii+638 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 249). Citado nas páginas 222, 223, 224, 230 e 269.
- GREENLEAF, A. Principal curvature and harmonic analysis. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, v. 30, n. 4, p. 519–537, 1981. Citado na página 189.
- GRUBB, G. **Distributions and Operators**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2009. (Graduate Texts in Mathematics 252). ISBN 0387848940,9780387848945. Citado na página 92.
- HAMBROOK, K.; LABA, I. On the sharpness of mockenhaupt’s restriction theorem. **Geometric and Functional Analysis**, Springer Science and Business Media LLC, v. 23, n. 4, p. 1262–1277, Jun 2013. ISSN 1420-8970. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00039-013-0240-9>>. Citado nas páginas 25 e 199.
- HAMBROOK, K. D. **Restriction theorems and Salem sets**. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 2015. Disponível em: <<https://open.library.ubc.ca/collections/ubctheses/24/items/1.0166366>>. Citado na página 200.
- HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. Some properties of fractional integrals. i. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 27, n. 1, p. 565–606, 1928. Citado na página 272.
- HOFFMAN, K. **Linear algebra**. 2. ed. [S.l.]: PH, 1971. ISBN 981-02-0395-0. Citado nas páginas 84 e 153.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. Cup. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. ISBN 9780521386326,0521386322. Citado na página 153.
- HÖRMANDER, L. Oscillatory integrals and multipliers on FLp. **Arkiv för Matematik**, Institut Mittag-Leffler, v. 11, n. 1-2, p. 1 – 11, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02388505>>. Citado na página 180.
- KAHANE, J.-P. **Some random series of functions**. 2nd ed. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. (Cambridge studies in advanced mathematics 5). ISBN 052124966X,9780521249669. Citado nas páginas 200 e 215.
- KAUFMAN, R. On the theorem of jarník and besicovitch. **Acta Arithmetica**, v. 39, n. 3, p. 265–267, 1981. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/205767>>. Citado nas páginas 135 e 200.
- LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. Second. [S.l.]: Springer, New York, 2013. v. 218. xvi+708 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 978-1-4419-9981-8. Citado nas páginas 61 e 66.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos.(3aedição)**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1977. Citado nas páginas 34, 55 e 167.
- _____. **Álgebra exterior**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 2014. Citado nas páginas 73 e 74.
- _____. **Curso de Análise**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 2014. v. 2. 552 p. Citado nas páginas 152 e 183.
- LITTMAN, W. Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 69, p. 766–770, 1963. Citado nas páginas 25, 161 e 189.

MATTILA, P. **Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 9780521465762,9780521655958,0521465761,0521655951. Citado nas páginas 31, 34, 37, 41, 44, 90, 105 e 112.

_____. **Fourier analysis and Hausdorff dimension**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2015. v. 150. xiv+440 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 150). Citado nas páginas 31, 129, 135, 142, 156, 157, 163, 167, 178, 208 e 209.

MITŠIS, T. A Stein-Tomas restriction theorem for general measures. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, v. 60, 02 2002. Citado nas páginas 24, 195, 219 e 221.

MOCKENHAUPT, G. Salem sets and restriction properties of Fourier transforms. **Geometric and Functional Analysis**, v. 10, p. 1579–1587, 12 2000. Citado nas páginas 24, 195 e 200.

MUNKRES, J. R. **Analysis of manifolds**. [S.l.]: Allan M. Wylde, 1991. Citado nas páginas 63 e 71.

MUSCALU, C.; SCHLAG, W. **Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. I**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2013. v. 137. xviii+370 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 137). Citado na página 189.

ROMAN, S. **Advanced Linear Algebra**. 2. ed. [S.l.]: Springer New York, 2005. (Graduate Texts in Mathematics 135). ISBN 0387247661,9780387247663. Citado na página 153.

SALEM, R. On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension. **Arkiv för Matematik**, v. 1, p. 353–365, 1951. Citado nas páginas 26 e 200.

SANTOS, I. R. **Restrição de Fourier em superfícies de \mathbb{R}^n e estimativas lineares e bilineares de Strichartz**. 170 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2020. Citado nas páginas 91, 189, 195 e 270.

SARALA, O. **On Fourier Dimension and Salem Sets**. Dissertação (Mestrado) — University of Oulun, the Netherlands, 2019. Citado na página 215.

SOBOLEV, S. L. On a theorem of functional analysis. **Mat. Sbornik**, v. 4, p. 471–497, 1938. Citado na página 272.

SOGGE, C. D. **Fourier integrals in classical analysis**. Second. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2017. v. 210. xiv+334 p. (Cambridge Tracts in Mathematics, v. 210). Citado nas páginas 163, 178, 270 e 272.

STEIN, E. M. Some problems in harmonic analysis. In: AMER. MATH. SOC. **Harmonic analysis in Euclidean spaces, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the Amer. Math. Soc., Williams College, Mass, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV Part I, 1979**. [S.l.], 1979. p. 3–20. Citado na página 177.

_____. **Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. v. 43. xiv+695 p. (Princeton Mathematical Series, v. 43). ISBN 0-691-03216-5. Citado nas páginas 177 e 178.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces**. Pup. [S.l.]: Princeton University Press, 2005. Vol.3. (Princeton Lectures in Analysis, Vol.3.). ISBN 0691113866,9780691113869. Citado na página 42.

STEIN, E. M.; WEISS, G. **Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. x+297 p. Princeton Mathematical Series, No. 32. Citado nas páginas 263 e 269.

STRICHARTZ, R. S. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. **Duke Math. J.**, v. 44, n. 3, p. 705–714, 1977. Citado nas páginas 189 e 192.

_____. Fourier asymptotics of fractal measures. **Journal of Functional Analysis**, v. 89, n. 1, p. 154–187, 1990. ISSN 0022-1236. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002212369090009A>>. Citado nas páginas 29 e 220.

TAYLOR, M. E. **Measure theory and integration**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. v. 76. xiv+319 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 76). Citado nas páginas 61, 67 e 73.

THORPE, J. A. **Elementary topics in differential geometry**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979. xiii+253 p. Undergraduate Texts in Mathematics. Citado na página 73.

TOMAS, P. A. A restriction theorem for the fourier transform. **Bull. Amer. Math. Soc.**, American Mathematical Society, v. 81, n. 2, p. 477–478, 03 1975. Disponível em: <<https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183536437>>. Citado nas páginas 24, 177, 178 e 193.

WOLFF, T. H. **Lectures on harmonic analysis**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. v. 29. x+137 p. (University Lecture Series, v. 29). Citado nas páginas 91 e 142.

ZYGMUND, A. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. **Studia Math.**, v. 50, p. 189–201, 1974. Citado nas páginas 24, 180 e 200.

APÊNDICE

A.1 Elementos de análise de Fourier

A.1.1 Transformada de Fourier em L^1

Definimos a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ como sendo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx. \quad (\text{A.1})$$

Naturalmente, \widehat{f} é uma função limitada pois $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1. \quad (\text{A.2})$$

Vejamos uma das propriedades mais importantes da transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Proposição A.1.1. Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos que \widehat{f} é contínua.

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência que converge para ξ . Defina $f_k(x) = f(x) e^{-2\pi i \xi_k \cdot x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Naturalmente $f_k \in L^1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $f_k(x) \rightarrow f(x) e^{-2\pi i \xi_k \cdot x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $|f_k| \leq |f|$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (FOLLAND, 1999, Teorema 2.24) temos $\widehat{f}(\xi_k) \rightarrow \widehat{f}(\xi)$. \square

Novamente, a convolução $f * g$ de funções mensuráveis f e g é definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy,$$

e a convolução de uma função mensurável f e uma medida de Borel μ é definida por

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\mu_y,$$

sempre que as integrais existirem. Com uma simples mudança de variável podemos constatar que $f * g = g * f$. Vejamos algumas propriedades envolvendo convolução e a transformada de Fourier de uma função.

Proposição A.1.2. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{fg} = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g}, \text{ (fórmula do produto)} \quad (\text{A.3})$$

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}, \text{ (fórmula da convolução)}. \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Para mostrar ambas igualdade iremos utilizar o Teorema de Fubini. Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{fg} &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right] g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g}, \end{aligned}$$

e temos assim (A.3). Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right] e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = x - y$ obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot (z+y)} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot z} e^{-2\pi i \xi \cdot y} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi \cdot z} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi \cdot z} dz \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

e provamos assim (A.4). □

Vejam os como a transformada de Fourier se comporta sob algumas transformações.

Proposição A.1.3. Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \neq 0$.

i) Considere a translação τ_a por $\tau_a(x) = x + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\widehat{f \circ \tau_a}(\xi) = e^{2\pi i a \cdot \xi} \widehat{f}(\xi);$$

ii) Considere a dilatação δ_r por $\delta_r(x) = rx$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\widehat{f \circ \delta_r}(\xi) = |r|^{-n} \widehat{f}(r^{-1}\xi);$$

iii) Seja $e_a(x) = e^{2\pi i a \cdot x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\widehat{e_a f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a);$$

iv) Seja T um operador linear invertível de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e denote $T^{-t} = (T^{-1})^t$. Então, para $f \in L^1$

$$\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t}.$$

Em particular, no caso em que T é uma aplicação ortogonal, isto é, $T^t T = I$ temos

$$\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T.$$

Demonstração. É claro que

$$\widehat{f \circ \tau_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

Fazendo a mudança de coordenada $y = x + a$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{f \circ \tau_a}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot (y-a)} dy \\ &= e^{2\pi i \xi \cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \\ &= e^{2\pi i \xi \cdot a} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Com isto provamos i). Note que

$$\widehat{f \circ \delta_r}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(rx) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx.$$

Considerando a mudança de variável $y = rx$, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{f \circ \delta_r}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot r^{-1}y} r^{-n} dx \\ &= r^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i r^{-1} \xi \cdot y} dy \\ &= r^{-n} \widehat{f}(r^{-1} \xi),\end{aligned}$$

e concluímos a prova de ii). Ainda, note que

$$\begin{aligned}\widehat{e_a f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e_a(x) f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (\xi - a) \cdot x} dx \\ &= \widehat{f}(\xi - a),\end{aligned}$$

o que mostra iii). Por fim, temos que

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx.$$

Considerando a mudança $x = T^{-1}(z)$, obtemos

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi \cdot T^{-1}(z)} |\det T^{-1}| dz.$$

Por outro lado, lembre que, pela definição de operador adjunto, $\xi \cdot T^{-1}(z) = (T^{-1})^*(\xi) \cdot z$. Além disso, sabemos da álgebra linear que se A é um operador linear definido em \mathbb{R}^n então $A^* = A^t$. Vale a pena lembrar também que se A for invertível então $|\det A^{-1}| = |\det A|^{-1}$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{f \circ T}(\xi) &= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i T^{-t}(\xi) \cdot z} dz \\ &= |\det T|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t}(\xi).\end{aligned}$$

No caso de T ser ortogonal temos $T = (T^t)^{-1} = (T^{-1})^t = T^{-t}$. □

Proposição A.1.4. $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^p = L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Seja $f \in L^p$. Como $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (FOLLAND, 1999, Proposição 7.9), dado $\epsilon > 0$, existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g - f\|_p < \epsilon/2$. Utilizando a Proposição 2.3.19, seja $\phi \in C_c(\infty)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Dessa forma, pelas Proposições 2.3.15 e 2.3.17 temos que $g * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\phi_t(x) = t^{-n} \phi(t^{-1}x)$. Em geral, se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = a$, e $f \in L^p$ com $1 \leq p < \infty$ então $\|f * \phi_t - f\|_p \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ (FOLLAND, 1999, Teorema 8.14). Logo, $\|g * \phi_t - g\|_p < \epsilon/2$ para t suficientemente pequeno e portanto

$$\|g * \phi_t - f\|_p \leq \|g * \phi_t - g\|_p + \|g - f\|_p < \epsilon,$$

para t suficientemente pequeno e com isso finalizamos a demonstração. \square

Proposição A.1.5. O conjunto $C_0(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço fechado de $BC(\mathbb{R}^n)$ na norma uniforme, isto é, $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}^u = C_0(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja f uma função no fecho de $C_0(\mathbb{R}^n)$. Logo, existe uma sequência $\{f_k\}_k^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_k\|_u \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Mostremos que o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta \leq |f(x)|\}$ é compacto para todo $\delta > 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno sempre existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_{k_0}\|_u < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $k \geq k_0$. Isto implica

$$|f(x) - f_{k_0}(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.5})$$

Vamos mostrar que \mathcal{A} é fechado. Com efeito, sejam $x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$ e $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ convergindo para x_0 . A partir de (A.5) podemos concluir que

$$|f(x_m)| - \frac{\epsilon}{2} < |f_{k_0}(x_m)|, \forall m \in \mathbb{N},$$

o que implica.

$$\delta - \frac{\epsilon}{2} < |f_{k_0}(x_m)|, \forall m \in \mathbb{N},$$

ou seja, $x_m \in \mathcal{A}_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : \delta - \epsilon/2 \leq |f_{k_0}(x)|\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como este conjunto é fechado concluímos que x_0 está no mesmo. Logo,

$$\delta - \frac{\epsilon}{2} \leq |f_{k_0}(x_0)|. \quad (\text{A.6})$$

A partir de (A.5) também podemos concluir que

$$|f_{k_0}(x_0)| - \frac{\epsilon}{2} < |f(x_0)|$$

Portanto, por (A.6)

$$\delta - \epsilon < |f(x_0)|,$$

tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que $x_0 \in \mathcal{A}$. Por fim, com argumentos semelhantes podemos concluir que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$. Como \mathcal{A}_0 é compacto e \mathcal{A} é fechado concluímos que \mathcal{A} é compacto e portanto $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. \square

A proposição a seguir nos dá condições para que possamos derivar a transformada de Fourier e também calcular a transformada de Fourier de uma derivada. Além disso, a mesma será importante para mostrar; na seção A.1.2, que a transformada de Fourier de uma função no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ainda está no mesmo.

Proposição A.1.6.

i) Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$ e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k - 1$, então,

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi); \quad (\text{A.7})$$

ii) Se $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, então $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f)(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi). \quad (\text{A.8})$$

Demonstração. Provemos inicialmente o item i). Primeiramente vamos provar o resultado para uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ e também $f \in C_0(\mathbb{R})$ e mostrar que

$$\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi). \quad (\text{A.9})$$

Com efeito, considerando $R > 0$ e integrando por partes, obtemos

$$\int_{-R}^R f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = f(x) e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-R}^R + 2\pi i \xi \int_{-R}^R f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (\text{A.10})$$

Como $f \in C_0(\mathbb{R})$, temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-R}^R = 0.$$

Logo, uma vez que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, tomando o limite em (A.10) quando $R \rightarrow \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

e provamos (A.9). Vamos supor que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $i = 1, \dots, n$ e também $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e mostrar que

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(\xi) = 2\pi i \xi_i \widehat{f}(\xi), \quad (\text{A.11})$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. De fato, pelo Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i d\tilde{x}, \end{aligned}$$

com $\mathbb{R}_i^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j \neq i\}$ e $\tilde{x}, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_i^{n-1}$. Por outro lado,

sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$; com x_j é fixo para $j \neq i$, é claro que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (f \circ \lambda)'(x_i),$$

com $\lambda(t) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \int_{\mathbb{R}} (f \circ \lambda)'(x_i) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \widehat{(f \circ \lambda)'(\xi_i)} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

É claro que as funções $f \circ \lambda \in C^1(\mathbb{R})$, $f \circ \lambda$, e $(f \circ \lambda)'$ estão em $L^1(\mathbb{R})$. Além disso, $f \circ \lambda \in C_0(\mathbb{R})$. Logo, por (A.9) obtemos

$$\widehat{(f \circ \lambda)'(\xi_i)} = 2\pi i \xi_i \widehat{(f \circ \lambda)}(\xi_i).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \int_{\mathbb{R}} (f \circ \lambda)'(x_i) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i d\tilde{x} \\ &= 2\pi i \xi_i \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \widehat{f \circ \lambda}(\xi_i) d\tilde{x} \\ &= 2\pi i \xi_i \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \int_{\mathbb{R}} (f \circ \lambda)(x_i) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i d\tilde{x} \\ &= 2\pi i \xi_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \end{aligned}$$

e provamos (A.11). Por fim, suponha que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, é tal que $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$ e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k - 1$. Vamos prosseguir com indução em $|\alpha|$. Já mostramos que o resultado vale quando α é um multi-índice tal que $|\alpha| = 1$. Assim, fixado

α , suponha que o resultado é verdadeiro para qualquer multi-índice β tal que $|\beta| = |\alpha| - 1$.

Escrevendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ note que existe $j = 1, \dots, n$ tal que

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_j^{\alpha_j-1} \partial x_1^{\alpha_1}} \right] (x) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\beta f)(x),$$

com $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha_n)$. Note que pelas nossas suposições, $\partial^\beta f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\beta f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\partial^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, pois, $|\beta| = |\alpha| - 1 \leq k - 1$. Dessa forma por (A.11), obtemos

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\beta f) \right) (\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{\partial^\beta f}(\xi),$$

logo pela hipótese de indução concluímos

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = 2\pi i \xi_j (2\pi i \xi_j)^\beta \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Vamos provar o item ii). Vamos mostrar primeiramente que $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Seja $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e suponha que $\xi_i \in (a, b)$. Seja $g : \mathbb{R}^n \times [a, b]$ uma função definida por

$$g(x, t) = f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi t}, \quad (\text{A.12})$$

com $\xi_t = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$. Logo Por hipótese, $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$. Com isto obtemos

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq 2\pi |x_i f(x)| = 2\pi |x^\alpha f(x)| \in L^1,$$

com $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (aqui o 1 está na i -ésima coordenada). Naturalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_i}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi + h e_i) - \widehat{f}(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} g(x, \xi_i + h) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, \xi_i)}{h} \\ &= F'(\xi_i), \end{aligned}$$

com $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, t) dx$. Portanto, pelo Teorema 2.3.16 (Regra de Leibniz) de fato F é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_i}(\xi) &= F'(\xi_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial t}(x, \xi_i) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_i f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f)(\xi). \end{aligned}$$

A continuidade de $\partial \widehat{f} / \partial \xi_i$ pode ser mostrada da maneira análoga utilizando novamente o Teorema 2.3.16 - (i) (Regra de Leibniz) e portanto $\widehat{f} \in C^1$. Fazendo uma pequena modificação na função em (A.12) podemos constatar que $\widehat{f} \in C^k$ para $|\alpha| = 1$. O caso geral segue por indução em $|\alpha|$ e utilizando argumentos semelhantes ao que já usamos. \square

Lema A.1.7. Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $\partial^\alpha f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para qualquer multi-índice α .

Demonstração. É suficiente mostrar que se $f \in C_c^\infty$ então $f_{x_i} \in C_c^\infty$. Com efeito, como $\text{supp}(f)$ é limitado existe $R > 0$ tal que $\text{supp}(f) \subset B[0, R]$. Dessa forma, como f se anula no aberto $\mathbb{R}^n \setminus B[0, R]$ temos f_{x_i} também se anula no mesmo. Portanto, $\text{supp}(f_{x_i}) \subset B[0, R]$. O resultado segue do fato de que um fechado contido num compacto sempre é compacto. \square

Teorema A.1.8 (Lema de Riemann-Lebesgue). Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0,$$

ou seja, $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que $\widehat{f} \in \overline{C_0(\mathbb{R}^n)}^u$ e utilizar a Proposição A.1.5 para concluir. Pela Proposição A.1.4, seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Primeiramente vamos mostrar que $\widehat{f}_k \in C_0(\mathbb{R}^n)$. É claro que $\partial^\alpha f_k \in L^1$, para todo multi-índice α , pois, pelo Lema A.1.7 $\partial^\alpha f_k \in C_c^\infty$. Assim, pela Proposição A.1.6 tomando $\alpha = (0, \dots, 2, \dots, 0)$; com o 2 na i -ésima coordenada, obtemos

$$(2\pi i)^2 \xi_i^2 \widehat{f}_k(\xi) = \frac{\partial^2 \widehat{f}_k}{\partial x_i^2}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Com isto, obtemos

$$|\xi_i^2 \widehat{f}_k(\xi)| \leq \frac{1}{4\pi^2} \left\| \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i^2} \right\|_1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

e $i = 1, \dots, n$. Concluimos assim que $|\xi|^2 \widehat{f}_k(\xi)$ é limitado para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e portanto, $\widehat{f}_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para finalizar vamos mostrar que $\widehat{f}_k \rightarrow \widehat{f}$ na métrica uniforme. De fato,

$$|\widehat{f}_k(\xi) - \widehat{f}(\xi)| = |\widehat{f_k - f}(\xi)| \leq \|f_k - f\|_1,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo tomando o supremo em \mathbb{R}^n obtemos $\|\widehat{f_k - f}\|_\infty \leq \|f_k - f\|_1$. Como $f_k \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ concluimos a prova. \square

Lema A.1.9. Seja $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Então $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$.

Demonstração. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_i^2} dx_i = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right)^n \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, lembre-se que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

logo, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ e com isso concluimos. \square

Teorema A.1.10 (Fórmula da inversão). Se $f \in L^1$ é tal que $\widehat{f} \in L^1$ então

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (\text{A.14})$$

em quase toda parte.

Demonstração. Defina $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ e $\psi_\epsilon(x) = e^{-\pi\epsilon^2|x|^2}$. Em geral se $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ com $a > 0$, então $\widehat{f}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{a}}$ (FOLLAND, 1999, Proposição 8.24), logo, aplicando isto a ψ com $a = 1$ obtemos $\widehat{\psi} = \psi$. Além disso, note que $\psi_\epsilon = \psi \circ \delta_\epsilon$, com $\delta_\epsilon(x) = \epsilon x$, logo, pela Proposição A.1.3 - (ii), obtemos

$$\widehat{\psi}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n} \widehat{\psi}(\epsilon^{-1}\xi) = \epsilon^{-n} \psi(\epsilon^{-1}\xi). \quad (\text{A.15})$$

Defina

$$I_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi. \quad (\text{A.16})$$

De fato, seja $g_n(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-\pi(1/n)^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi \cdot x}$ e $g(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi \cdot x}$. Note que $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1$ pois $e^{-\pi(1/n)^2|\xi|^2} \leq 1$ e $\widehat{f} \in L^1$. Observe também que $g_n \rightarrow g$ pontualmente. Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada (FOLLAND, 1999, Teorema 2.24) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_n = \int_{\mathbb{R}^n} g,$$

e mostramos (A.16). Por outro lado, definindo para cada x , a função

$$g_x(z) = \psi_\epsilon(z) e^{2\pi i x \cdot z},$$

pela Proposição A.1.3 - (iii), obtemos $\widehat{g}_x(y) = \widehat{\psi}_\epsilon(y - x)$. Além disso, por (A.15), obtemos

$$\widehat{g}_x(y) = \epsilon^{-n} \psi\left(\frac{y - x}{\epsilon}\right).$$

Definindo $\psi^\epsilon(y) = \epsilon^{-n} \psi(\epsilon^{-1}y)$, podemos escrever $\widehat{g}_x(y) = \psi^\epsilon(y - x)$, ou, devido a simetria de ψ , $\widehat{g}_x(y) = \psi^\epsilon(x - y)$. Pela fórmula do produto (A.3) obtemos

$$\begin{aligned} I_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g_x(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_x(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi^\epsilon(x - \xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_\epsilon(x) = \psi^\epsilon * f(x) = f * \psi^\epsilon(x). \quad (\text{A.17})$$

Em geral, se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = a$ e $f \in L^p$ com $1 \leq p < \infty$ e $\phi^\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(\epsilon^{-1}x)$ então $\|f * \phi^\epsilon - f\|_p \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ (FOLLAND, 1999, Teorema 8.14), com isso, pelo Lema

A.1.9 temos que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ e

$$\|f * \psi^\epsilon - f\|_1 \rightarrow 0,$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ e portanto $f * \psi^\epsilon \rightarrow f$, qtp (BREZIS, 2011, Teorema 4.9). Portanto, por (A.16) e (A.17) concluímos (A.14). \square

Corolário A.1.11. Se f e \widehat{f} são integráveis então f é contínua.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência convergindo para x . Defina as funções $g_k(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x_k}$ e $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$. É claro que $g_k \rightarrow g$ pontualmente, $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset L^1$ e $|g_k| \leq |\widehat{f}|$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos $\int_{\mathbb{R}^n} g_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g$ quando $k \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x_k} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}.$$

Com isto, pelo Teorema A.1.10, obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$. \square

Seja $f \in L^1$ tal que $\widehat{f} \in L^1$ e defina $g(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$. Utilizando o Teorema A.1.10 concluímos facilmente que $\widehat{g}(x) = f(x)$. Isto motiva o seguinte:

Definição 19. Dado $f \in L^1$ tal que $\widehat{f} \in L^1$ definimos a transformada de Fourier inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi.$$

Note que de fato $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ e $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f$. Vejamos algumas propriedades da transformada de Fourier inversa.

Proposição A.1.12. Seja $f \in L^1$ tal que $\widehat{f} \in L^1$ e defina $\widetilde{f}(x) = f(-x)$. Então:

- i) $\check{\check{f}} = \widehat{\widehat{f}} = \widetilde{\widetilde{f}}$;
- ii) $\widehat{\widetilde{f}} = \check{f}$;
- iii) $\widetilde{\check{f}} = \widehat{\widehat{f}}$.

As igualdades acima são no sentido em quase toda parte.

Demonstração. Com uma simples mudança de variáveis, deduzimos que

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(-\xi)e^{-2\pi i\xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi \cdot x} d\xi = \widehat{\widetilde{f}}(x).$$

Por outro lado, segue diretamente da definição de transformada de Fourier inversa que $\widetilde{\check{f}}(x) = \check{f}(x)$. Com isto verificamos o item i). Pelo Teorema A.1.10, obtemos

$$\widehat{\widetilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(-x) \cdot \xi} d\xi = f(-x) = \check{f}(x).$$

Com isto concluímos o item ii). Por fim, para a prova do item iii) utilizamos novamente o Teorema A.1.10:

$$\overline{f}(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \widehat{\widehat{f}}(x).$$

□

Corolário A.1.13. Seja $f, g \in L^1$ tais que $\widehat{f}, \widehat{g}, fg \in L^1$. Então,

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}. \quad (\text{A.18})$$

Demonstração. Pela Proposição A.1.12 - (ii) obtemos

$$\widehat{fg} = \widetilde{fg} = \widetilde{f} \widetilde{g} = \widehat{\widehat{f}} \widehat{\widehat{g}}.$$

Com isto, pela fórmula da convolução (A.4) temos que $\mathcal{F}(\widehat{fg}) = \mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{g})$. Aplicando a transformada de Fourier inversa obtemos (A.18). □

A.1.2 A classe de Schwartz

Nosso objetivo nesta seção é apresentar o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e obter algumas propriedades da transformada de Fourier de funções deste espaço. Em particular, o nosso principal resultado é mostrar que o operador \mathcal{F} restrito a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um homeomorfismo.

Antes de definir o espaço de Schwartz precisamos fixar algumas notações. Um multi-índice é uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ em \mathbb{Z}_+^n e definimos sua norma como sendo o número $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, com $x_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, utilizaremos a notação

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Em geral, se $x_{j_1} = \dots = x_{j_p} = 0$, com $p = 1, \dots, n$, então definimos,

$$x^\alpha = \prod_{i \neq j_l} x_i^{\alpha_i}, \quad l = 1, \dots, p.$$

Ainda, dado $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos a sua derivada em relação a α como a função

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}(x).$$

Exemplo A.1.14.

- 1) Considere os vetores $x = (1, 1, 2, 3, \pi)$, $y = (1, 0, 3, 4, 0)$ e multi-índice $\alpha = (1, 2, 1, 1, 2)$.

Então, $x^\alpha = 6\pi^2$ e

$$y^\alpha = (1, 3, 4)^{(1,1,1)} = 12.$$

2) Considere o multi-índice $\alpha = (1, 1, 2) \in \mathbb{Z}^3$, $x = (\pi, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + xz^2y^3 + xyz^2.$$

Então, $|\alpha| = 4$, $x^\alpha = 4\pi$ e

$$\partial^\alpha \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial y \partial x}(x, y, z) = 6y^2 + 2.$$

O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consiste das funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que, junto com todas as suas derivadas, se anulam no infinito mais rápido do que qualquer potência de $|x|$. Mais precisamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^N \partial^\alpha \varphi(x) = 0, \quad (\text{A.19})$$

para todo multi-índice α e para todo $N \in \mathbb{N}$. Vejamos um Lema que será útil para algumas caracterizações do espaço de Schwartz

Lema A.1.15. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ multi-índices e $N \in \mathbb{Z}_+$. Então existe uma constante $C_{N,n}$ tal que

$$|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \quad (\text{A.20})$$

e

$$|x|^N \leq C_{N,n} \sum_{|\beta|=N} |x^\beta|. \quad (\text{A.21})$$

Demonstração. Denote $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Logo

$$|x^\alpha| = \left| \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \right| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n |x|^{\alpha_i} = |x|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = |x|^{|\alpha|}.$$

Com isto provamos (A.20). Indutivamente, utilizando a expansão binomial

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^{N-k} b^k, \quad (\text{A.22})$$

constatamos que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^N \leq C_{N,n} \sum_{|\beta|=N} a^\beta,$$

com $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, é claro que $|x| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$, pois

$$\sum_i^n x_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2.$$

Portanto,

$$|x|^N \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^N,$$

o que implica

$$|x|^N \leq C_{N,n} \sum_{|\beta|=N} (|x_1|, \dots, |x_n|)^\beta = C_{N,n} \sum_{|\beta|=N} |x^\beta|.$$

□

Vejamos outra caracterização do espaço de Schwartz.

Proposição A.1.16. Dados multi-índices α, β defina

$$\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|\}.$$

Então,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} < \infty$, para quaisquer multi-índices α, β . Por (A.21) temos que

$$\begin{aligned} ||x|^N \partial^\alpha \varphi(x)| &= |x|^{N+1} |\partial^\alpha \varphi(x)| |x|^{-1} \\ &\leq \left(C_{N+1,n} \sum_{|\beta|=N+1} |x^\beta| \right) |\partial^\alpha \varphi(x)| |x|^{-1} \\ &= C_{N+1,n} \left(\sum_{|\beta|=N+1} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \right) |x|^{-1} \\ &= C_{N+1,n} \left(\sum_{|\beta|=N+1} \|\varphi\|_{(\beta,\alpha)} \right) |x|^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, quando $|x| \rightarrow \infty$ a função φ satisfaz (A.19). Por outro lado, suponha que $\varphi \in C^\infty$ satisfaz (A.19). Assim, existe $M_{N,\beta} > 0$ tal que

$$|x|^N \partial^\beta \varphi(x) \leq M_{N,\beta},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, tomando um número natural $N_0 > |\alpha|$ por (A.20), obtemos

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \leq M_{N_0,\beta},$$

sempre que $|x| \geq 1$. Utilizando a continuidade de $\partial^\beta \varphi$ concluímos a limitação de $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ também em $B[0, 1]$ e portanto $\|\varphi\|_{(\alpha, \beta)} < \infty$. \square

Com argumentos análogos ao da demonstração da Proposição anterior podemos provar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções em C^∞ tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|)^N |\partial^\alpha \varphi(x)|\} < \infty,$$

para todo inteiro positivo N e qualquer multi-índice α . Com isso, uma função φ está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, para todo inteiro não negativo N e para qualquer multi-índice α existe uma constante $C_{\alpha, N} > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |x|)^{-N}, \quad (\text{A.23})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição A.1.17. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\partial^\alpha \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$. Em particular,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.24})$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $1 \leq p < \infty$. É suficiente mostrar que a aplicação $(1 + |x|)^{-N}$ está em L^p para $n/p < N < \infty$ e utilizar (A.23) para concluir. Pelo Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-Np} dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1 + |ry|)^{-Np} r^{n-1} d\sigma(y) dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (1 + r)^{-Np} r^{n-1} d\sigma(y) dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty (1 + r)^{-Np} r^{n-1} dr \\ &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \left[\int_0^1 (1 + r)^{-Np} r^{n-1} dr + \int_1^\infty (1 + r)^{-Np} r^{n-1} dr \right]. \end{aligned}$$

Iremos verificar que as duas últimas integrais são finitas. De fato, note que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 + r)^{-Np} r^{n-1} dr &\leq \int_0^1 (1 + r)^{-Np} dr \\ &= \frac{1 - 2^{1-Np}}{Np - 1} < \infty. \end{aligned}$$

O numerador e denominador da última fração são positivos uma vez que $N > n/p$. Por outro

lado, como $(1+r)^{-Np} \leq r^{-Np}$ e $(n-Np) < 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty (1+r)^{-Np} r^{n-1} dr &\leq \int_1^\infty r^{n-Np-1} dr \\ &= \frac{1}{n-Np} \lim_{s \rightarrow \infty} (s^{n-Np} - 1^{n-Np}) \\ &= \frac{1}{Np-n} < \infty. \end{aligned}$$

Para finalizar, note que $\partial^\alpha \varphi \in L^\infty$, pois, por (A.23) podemos constatar que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi(x) = 0,$$

o que nos diz que $\partial^\alpha \varphi$ é limitada. \square

Proposição A.1.18. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Então $C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, para todo $0 < p < \infty$. Em particular, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Demonstração. Seja f uma função contínua em \mathbb{R}^n . Denotando por K o suporte de μ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu = \int_K |f|^p d\mu \leq \sup_{x \in K} \{|f(x)|^p\} \mu(K) < \infty,$$

e finalizamos a prova. \square

Proposição A.1.19. O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está contido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Lema A.1.7 sabemos que $\partial^\alpha \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para qualquer multi-índice α . Com isto, é claro que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^N \partial^\alpha \varphi(x) = 0$, pois, por 2.3) temos $\text{supp}(| \cdot |^N \partial^\alpha \varphi) \subset \text{supp}(\partial^\alpha \varphi)$. Portanto, por (A.19) concluímos que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposição A.1.20. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ na norma $\| \cdot \|_p$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Pela Proposição A.1.19 temos que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)^p} \subset \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^p}$, logo, através da Proposição A.1.4 concluímos que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^p}$. Por (A.24), temos a inclusão $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^p} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ e concluímos. \square

Exemplo A.1.21. Vimos na Proposição 2.3.19 que a função $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp[(|x|^2 - 1)^{-1}] & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

está em C_c^∞ , logo, pela Proposição A.1.19 a mesma está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.1.22. Uma função φ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiramente, suponha que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dessa forma, $x^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α e portanto por (A.24) $x^\alpha \varphi \in L^1$. Portanto, pela Proposição A.1.6 - (ii) temos que $\widehat{\varphi} \in C^\infty$. Sejam α, β multi-índices. Por (A.8) obtemos

$$\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \xi^\beta (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} (2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|} (2\pi i \xi)^\beta \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi).$$

Por (A.7), temos $(2\pi i \xi)^\beta \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha \varphi))(\xi)$. Logo,

$$|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| = |(2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|} \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha \varphi))(\xi)| \leq |(2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}| \|\partial^\beta (x^\alpha \varphi)\|_1.$$

Portanto

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)|\} < \infty$$

e concluímos que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Suponha que φ é uma função tal que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, pelo que acabamos de provar sabemos que $\widehat{\widehat{f}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De acordo com a Proposição A.1.12 - (ii) $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ e portanto $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Proposição A.1.23. Sejam $f, g \in L^1$, com $\widehat{f} \in L^1$. Então,

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \widehat{\bar{g}} \text{ (Parseval);}$$

$$\text{ii) } \|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \text{ (Plancherel).}$$

Demonstração. Pela Proposição A.1.12 - (ii), uma simples mudança de coordenadas e pela Fórmula do Produto (A.3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-x) \bar{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) \bar{g}(-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) h(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \widehat{h} dy$$

com $h(y) = \bar{g}(-y)$. Mostremos que $\widehat{h} = \widehat{\bar{g}}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \widehat{h}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} h(z) e^{-2\pi i z \cdot y} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(-z) e^{-2\pi i z \cdot y} dz \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} g(-z) e^{2\pi i z \cdot y} dz} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} g(w) e^{-2\pi i w \cdot y} dw} \\ &= \widehat{\bar{g}}(y). \end{aligned}$$

Com isto concluímos a prova do item i). Para o item ii) basta tomar $g = f$. \square

O resultado a seguir segue imediatamente da combinação do Teorema A.1.22 e da Proposição A.1.23.

Corolário A.1.24. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então,

- i) $\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\widehat{\bar{g}}$ (Parseval);
- ii) $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ (Plancherel).

Em particular a transformada de Fourier é uma isometria de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo.

Proposição A.1.25. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pela Proposição 2.3.17. É uma consequência da regra da cadeia e do Teorema 2.3.16 (Regra de Leibniz) que o produto de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, o Teorema A.1.22 garante que \widehat{f} e \widehat{g} estão em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\widehat{f}\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com isso e pela fórmula da convolução (A.4) concluímos que $\widehat{f * g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e portanto, aplicando a transformada de Fourier inversa concluímos que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

O fato de cada função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ser a transformada de Fourier de outra função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é bastante útil para construir muitos exemplos interessantes. O próximo, por exemplo, será importante na Seção 5.1.

Exemplo A.1.26. Vamos obter uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, não negativa com $\varphi \geq 1$ em $B(0, 1)$ e $\text{supp}(\widehat{\varphi}) \subset B(0, 1)$ e $\widehat{\varphi} \geq 0$. De fato, pelo Lema de existência de funções de corte 2.3.20 escolha uma função $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, não negativa, com suporte em $B(0, 1/2)$ e que satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 2$. Pelas Proposições A.1.19 e A.1.25 temos que $\psi * \tilde{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$. Logo, faz sentido definir $\eta = \mathcal{F}^{-1}(\psi * \tilde{\psi})$. Pelo Teorema A.1.22 temos que $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que η é não negativa, e para tanto, vamos verificar que

$$\eta(x) = |\widehat{\psi}(x)|^2. \quad (\text{A.26})$$

Com efeito, utilizando o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\psi * \tilde{\psi})(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi * \tilde{\psi})(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi - y) \psi(-y) dy e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi - y) \psi(-y) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi - y) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right] dy \end{aligned}$$

Considerando a mudança de coordenadas $z = \xi - y$ na integral do colchetes, obtemos

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) e^{2\pi i x \cdot z} e^{2\pi i x \cdot y} dz \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y) e^{2\pi i x \cdot y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) e^{2\pi i x \cdot z} dz \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y) e^{2\pi i x \cdot y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) e^{-2\pi i x \cdot z} dz \right] dy \\ &= \overline{\widehat{\psi}(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y) e^{2\pi i x \cdot y} dy\end{aligned}$$

Por fim, fazendo a mudança de coordenadas $h = -y$, obtemos

$$\eta(x) = \overline{\widehat{\psi}(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(h) e^{-2\pi i x \cdot h} dh = \overline{\widehat{\psi}(x)} \widehat{\psi}(x) = |\widehat{\psi}(x)|^2.$$

Vamos mostrar que $\text{supp}(\widehat{\eta}) \subset B(0, 1)$. De fato, pela definição de η temos que $\widehat{\eta} = \psi * \check{\psi}$. Dessa forma, tomando a mudança de coordenadas $z = -y$ obtemos

$$\widehat{\eta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi - y) \psi(-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi + z) \psi(z) dz = \int_{B(0, 1/2)} \psi(\xi + z) \psi(z) dz. \quad (\text{A.27})$$

Assim, se $\xi \notin B(0, 1)$ então para $z \in B(0, 1/2)$ temos $\xi + z \notin B(0, 1/2)$, pois,

$$|\xi + z| \geq |\xi| - |z| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e concluímos que $\widehat{\eta}(\xi) = 0$, sempre que $\xi \notin B(0, 1)$, ou seja, $\text{supp}(\widehat{\eta}) \subset B(0, 1)$. É importante notar também que a expressão (A.27) nos diz que $\widehat{\eta}$ é não negativa. Segue diretamente de (A.26) e do fato de $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 2$ que $0 \leq \eta(x) \leq 4$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\eta(x) = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) d\xi \right)^2 = 4 \quad (\text{A.28})$$

Além disso, analisando (A.28) note que $\eta(0) = 4$. Dessa forma, pela continuidade de η na origem, existe $0 < r < 1$, tal que $\eta(x) > 1$ quando $x \in B(0, r)$. Por fim, defina $\varphi(x) = \eta(rx)$ e note que $\varphi \geq 1$ em $B(0, 1)$, $\widehat{\varphi}(x) = r^{-n} \widehat{\eta}(x/r)$, o que mostra que $\widehat{\varphi}$ é não negativa e $\text{supp}(\widehat{\varphi}) \subset B(0, r) \subset B(0, 1)$.

Observação A.1.27. Pelo Exemplo A.1.26 é sempre possível encontrar uma função não negativa φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi \geq 1$ em $B(0, 1)$ e $\text{supp}(\widehat{\varphi}) \subset B(0, 1)$. Com isto, considerando $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por $\psi = \check{\varphi}$ temos que $\widehat{\psi}$ é não negativa e satisfaz $\widehat{\psi} \geq 1$ em $B(0, 1)$. Com isso, é sempre possível encontrar uma função γ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, positiva e com $\widehat{\gamma} \geq 1$ numa bola $B(0, r)$ e para tanto, basta considerar $\gamma(x) = r^n \psi(rx)$ e utilizar a Proposição A.1.3 - (ii) para perceber que $\widehat{\gamma}(\xi) = \widehat{\psi}(r^{-1}\xi)$.

A.1.2.1 Transformada de Fourier em L^2

Nesta seção, iremos estender o conceito de transformada de Fourier para funções em L^2 . A definição (A.1) não pode ser usada para definir transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois a integral pode não existir se f não for integrável. Vimos na Proposição A.1.20 que o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ na norma $\|\cdot\|_2$. Dessa forma, dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Pelo Corolário A.1.24 - (ii) (fórmula de Plancherel), temos que a sequência $\{\widehat{f_k}\}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, dessa forma, pela completude do mesmo (FOLLAND, 1999, Teorema 6.6) existe uma função em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que é o limite da sequência $\{\widehat{f_k}\}$ em L^2 , denote

$$\widehat{f} := \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f_k},$$

com o limite sendo tomado no sentido de L^2 . Afirmamos que \widehat{f} está bem definida. Com efeito, seja $\{g_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ outra sequência tal que $\|g_k - f\|_2 \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, defina a sequência

$$h_k = \begin{cases} f_m & \text{se } k = 2m - 1 \\ g_m & \text{se } k = 2m. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Dessa forma a sequência $\{h_k\}$ é convergente em L^2 ; e converge para f em L^2 , e pelo mesmo argumento anterior, $\{\widehat{h_k}\}$ converge em L^2 para alguma função $\phi \in L^2$. Com isto podemos concluir que as sequências $\{\widehat{f_k}\}$, $\{\widehat{g_k}\}$ possuem uma subsequência que converge para ϕ e consequentemente temos a igualdade dos limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{g_k}.$$

Além disso, segue da continuidade da norma $\|\cdot\|_2$ na topologia de L^2 e da fórmula de Plancherel

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

para toda $f \in L^2$. Com isto provamos o seguinte resultado:

Teorema A.1.28 (Plancherel). Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ se estende unicamente a um isomorfismo isométrico sobre L^2 .

Vejamos um resultado que é bastante útil a respeito da transformada de Fourier de funções em L^2 .

Proposição A.1.29 (Fórmula do produto em L^2). Dado $f \in L^2$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \varphi. \quad (\text{A.30})$$

Demonstração. Dado $f \in L^2$, seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência tal que $\|f - f_k\|_2 \rightarrow 0$.

Por definição sabemos que $\|\widehat{f} - \widehat{f}_k\|_2 \rightarrow 0$. Com isso, existe uma subsequência de $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ que converge para f qtp, digamos, $f_{k_l}(x) \rightarrow f(x)$, qtp. Como $\{\widehat{f}_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ é uma subsequência de $\{\widehat{f}_k\}_{k=1}^\infty$ concluímos que $\|\widehat{f} - \widehat{f}_{k_l}\|_2 \rightarrow 0$ e portanto, a menos de subsequência concluímos também que $\widehat{f}_{k_l}(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$ qtp. É importante observamos também que se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$|f_{k_l}\varphi| \leq \epsilon|\varphi| + |f\varphi|,$$

para l suficientemente grande em quase toda parte. Além disso, note que o limitante de $|f_{k_l}\varphi|$ é integrável, pois $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e pela Desigualdade de Hölder sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\varphi| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada e pela fórmula do produto para funções em L^1 (A.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{\varphi} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_{k_l}\widehat{\varphi} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_{k_l}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{l \rightarrow \infty} \widehat{f}_{k_l})\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\varphi,$$

e com isso finalizamos a prova. □

Observação A.1.30. Podemos ver a transformada de Fourier de uma função f em L^2 de maneira mais concreta da seguinte forma: Seja $\{f_k\}$ uma sequência com $f_k = \chi_{B(0,k)}f$. É de rápida verificação que $f_k \in L^1 \cap L^2$, pois em geral, funções em L^p , $1 < p < \infty$, são localmente integráveis. De fato, sejam $g \in L^p$, $1 < p < \infty$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Note que $\chi_K \in L^{p'}$, com p' sendo o expoente conjugado de p . Logo, pela Desigualdade de Hölder temos que

$$\int_K |f| = \|\chi_K f\|_1 \leq \|\chi_K\|_{p'} \|f\|_p < \infty.$$

Utilizando a versão da identidade de Plancherel para funções em $L^1 \cap L^2$ (STEIN; WEISS, 1971, Teorema 2.1) concluímos também que a sequência $\{\widehat{f}_k\}$ é de Cauchy em L^2 e portanto converge e fica bem definido $\widehat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k$, no sentido de L^2 . Ainda, como $\|\widehat{f} - \widehat{f}_k\|_2 \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, por (BREZIS, 2011, Teorema 4.9), a menos de subsequência, $\widehat{f}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k(\xi)$, em quase toda parte, isto é,

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B(0,k)} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

em quase toda parte.

No que segue, iremos mostrar que os resultados que valem para a transformada de Fourier de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também vale para funções em L^2 .

Proposição A.1.31. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \neq 0$.

i) Considere a translação τ_a por $\tau_a(x) = x + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, $f \circ \tau_a \in L^2$ e

$$\widehat{f \circ \tau_a} = e^{2\pi i \langle a, \cdot \rangle} \widehat{f};$$

ii) Considere a dilatação δ_r por $\delta_r(x) = rx$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, $f \circ \delta_r \in L^2$ e

$$\widehat{f \circ \delta_r} = |r|^{-n} \widehat{f}(r^{-1} \cdot);$$

iii) Seja $e_a(x) = e^{2\pi i a \cdot x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então $e_a f \in L^2$ e

$$\widehat{e_a f} = \widehat{f}(\cdot - a);$$

iv) Seja T um operador linear invertível de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e denote $T^{-t} = (T^{-1})^t$. Então, $f \circ T \in L^2$ e

$$\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t},$$

Em particular, no caso em que T é uma aplicação ortogonal, isto é, $T^t T = I$ temos

$$\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T.$$

Demonstração. Vamos provar o item iv). Sejam $f \in L^2$ e $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \rightarrow f$ em L^2 . Note que $f \circ T \in L^2$ e $f_k \circ T \rightarrow f \circ T$ em L^2 . Dessa forma, pela Proposição A.1.3 - (iv), obtemos

$$\widehat{f \circ T} := \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f_k \circ T} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\det T|^{-1} \widehat{f_k} \circ T^{-t} = |\det T|^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f_k} \circ T^{-t},$$

no sentido de L^2 . Com uma simples mudança de coordenadas, podemos concluir que $\|\widehat{f_k} \circ T^{-t} - \widehat{f} \circ T^{-t}\|_2 \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo, pela unicidade do limite concluimos que

$$\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t}.$$

A prova dos outros itens seguem de maneira análoga, utilizando mudança de coordenadas convenientes e a Proposição A.1.3 - (iv). \square

A.1.2.2 Transformada de Fourier em L^p , $1 < p < 2$

Definir a transformada de Fourier para funções em L^p , $1 < p < 2$ será fundamental para entender o problema da restrição. No que segue iremos definir a transformada de Fourier para funções f em L^p , $1 < p < 2$.

Em seções anteriores definimos a transformada de Fourier de funções em L^1 e em L^2 . No que

segue, iremos mostrar que de fato $L^p \subset L^1 + L^2$ para $1 < p < 2$ e usaremos isto para definir a transformada de Fourier neste espaço. Sejam $f \in L^p$, $1 < p < 2$ e A_1, A_2 conjuntos dados por

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq 1\}.$$

Defina $f_1 = f\chi_{A_1}$ e $f_2 = f\chi_{A_2}$. É claro que $f = f_1 + f_2$. Vamos mostrar que $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$. De fato, é de rápida verificação que $p > 1$ e $|f(x)| > 1$ implica $|f(x)| < |f(x)|^p$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1| = \int_{A_1} |f| \leq \int_{A_1} |f|^p < \infty.$$

Por outro lado, se $p < 2$ e $|f(x)| \leq 1$, então $|f(x)|^2 \leq |f(x)|^p$ e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \chi_{A_2} = \int_{A_2} |f|^2 < \infty.$$

Com isso podemos definir

$$\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}. \quad (\text{A.31})$$

A definição (A.31) não depende da escolha de f_1, f_2 , pois, se h_1, h_2 forem funções em L^1 e em L^2 respectivamente tais que $f = h_1 + h_2$ então teríamos $f_1 - h_1 = h_2 - f_2 \in L^1 \cap L^2$. Isto implica $\widehat{f_1} - \widehat{h_1} = \widehat{h_2} - \widehat{f_2}$. Logo, utilizando a linearidade da transformada de Fourier tanto em L^1 quanto em L^2 , obtemos $\widehat{f_1} - \widehat{h_1} = \widehat{h_2} - \widehat{f_2}$, ou seja, $\widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{h_1} + \widehat{h_2}$. Em geral, poderíamos ter definido a transformada de Fourier no espaço maior $L^1 + L^2$ exatamente como fizemos em (A.31). Além disso, veremos na Seção 2.7, através da Desigualdade de Hausdorff-Young que se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p < 2$, então \widehat{f} , como definimos aqui, está em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, com p' sendo o expoente conjugado de p .

A.1.3 Transformada de Fourier de funções radiais

Nesta seção, iremos obter uma fórmula explícita para a transformada de Fourier de funções radiais e também iremos ver algumas propriedades das funções de Bessel. Estas ferramentas serão úteis na Seção 4.1 para o cálculo da transformada de Fourier da medida de superfície sobre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Nesta seção, iremos supor que $n \geq 2$. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = \psi(|x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Iremos fazer uso do Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares). Além disso, fixado $c \in \mathbb{S}^{n-1}$ seja

$$S_\theta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : c \cdot x = \cos(\theta)\},$$

para $0 \leq \theta \leq \pi$. É claro que S_θ é uma esfera de dimensão $(n - 2)$ com raio $\sin(\theta)$. Iremos denotar por $\sigma_{\sin(\theta)}^{n-2}$ e medida de superfície na esfera S_θ . Dessa forma, utilizando a mudança de

coordenadas $x \mapsto x/\sin(\theta)$, obtemos

$$\sigma_{\sin(\theta)}^{n-2}(S_\theta) = b(n)(\sin(\theta))^{n-2},$$

com $b(n) = \sigma^{n-2}(\mathbb{S}^{n-2})$. Então, para $g \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g d\sigma^{n-1} = \int_0^\pi \left(\int_{S_\theta} g d\sigma_{\sin(\theta)}^{n-2} \right) d\theta. \quad (\text{A.32})$$

Pelo Teorema 2.4.16 (integração em coordenadas polares), obtemos

$$\widehat{f}(rc) = \int_0^\infty \psi(s) s^{n-1} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r s c \cdot y} d\sigma_y^{n-1} \right) ds.$$

Vamos calcular a integral do parêntese com a ajuda de (A.32) pois $e^{-2\pi i r s c \cdot x}$ é constante em S_θ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r s c \cdot x} d\sigma_x^{n-1} &= \int_0^\pi \left(\int_{S_\theta} e^{-2\pi i r s c \cdot x} d\sigma_{\sin(\theta)_x}^{n-2} \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos(\theta)} \sigma_{\sin(\theta)}^{n-2}(S_\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos(\theta)} \sigma_{\sin(\theta)}^{n-1}(S_\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r s c \cdot x} d\sigma_x^{n-1} = b(n) \int_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos(\theta)} (1 - \cos^2(\theta))^{(n-2)/2} d\theta. \quad (\text{A.33})$$

Dado $m > -1/2$, seja $J_m : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por

$$J_m(t) = \frac{(t/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its} (1-s^2)^{m-1/2} ds,$$

com $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, para todo $x > 0$. A função J_m é chamada de função de Bessel. Com isto, considerando a mudança de coordenadas $\cos(\theta) \mapsto -t$ temos que $d\theta = (1-t^2)^{-1/2} dt$ e observando que $(n-2)/2 > -1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r s c \cdot x} d\sigma_x^{n-1} &= b(n) \int_{-1}^1 e^{i(2\pi r s)t} [(1-t^2)^{(n-2)/2}]^{-1/2} dt \\ &= b(n) \left(\frac{(2\pi r s/2)^{(n-2)/2}}{\Gamma([(n-2)/2] + 1/2)\Gamma(1/2)} \right)^{-1} J_{(n-2)/2}(2\pi r s) \\ &= c(n) (r s)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi r s), \end{aligned}$$

com

$$c(n) = \frac{b(n)\pi^{-(n-2)/2}}{[\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2)]^{-1}}.$$

Logo,

$$\widehat{f}(rc) = c(n) r^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \psi(s) J_{(n-2)/2}(2\pi r s) s^{n-1} s^{n/2} ds.$$

Portanto, dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $x = rc$, com $r = |x|$ e $c = x/|x| \in \mathbb{S}^{n-1}$. Com isto, obtemos a fórmula para a transformada de Fourier para funções radiais:

Teorema A.1.32. Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $f(x) = \psi(|x|)$, para alguma $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Então,

$$\hat{f}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \psi(s) J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s) s^{n/2} ds. \quad (\text{A.34})$$

Observação A.1.33. Seja $f \in L^2$ tal que $f(x) = \psi(|x|)$, para alguma função complexa $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definida em $[0, \infty)$. Logo, pela Observação A.1.30 podemos considerar uma sequência em $L^1 \cap L^2$ formada por funções radiais e que convergem para f em L^2 . Com isto, f satisfaz (A.34) em quase toda parte.

É do nosso interesse obter mais propriedades da transformada de Fourier de funções radiais e como a mesma é descrita em termos de uma função de Bessel faz-se necessário conhecer seu comportamento.

Proposição A.1.34. Seja $m > -1/2$ e $t > 0$. Então,

$$\text{i) } \frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) = t^m J_{m-1}(t);$$

$$\text{ii) } \frac{d}{dt}(t^{-m} J_m(t)) = -t^{-m} J_{m+1}(t);$$

$$\text{iii) } |J_m(t)| \leq k(m)t^m;$$

$$\text{iv) } |J_m(t)| \leq k(m)t^{-1/2}.$$

Demonstração. Inicialmente, pela regra da cadeia temos que $\frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) = mt^{m-1} J_m + t^m J'_m(t)$. Utilizando o Teorema 2.3.16 - (ii) (Regra de Leibniz) obtemos

$$t^m J'_m(t) = \frac{mt^{(2m-1)2^{-m}}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its} (1-s^2)^{m-1/2} + \frac{t^{2m} 2^{-m}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 i s e^{its} (1-s^2)^{m-1/2} ds$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{-1}^1 i s e^{its} (1-s^2)^{m-1/2} ds = \int_{-1}^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{ist}}{t} \right) (1-s^2)^{m-1/2} ds = - \int_{-1}^1 \frac{e^{ist}}{t} [(1-s^2)^{m-1/2} s]' ds,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) &= \frac{mt^{2m-1}2^{-m}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^{m-1/2} ds + t^m J'_m(t) \\
 &= \frac{2mt^{2m-1}2^{-m}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^{m-1/2} ds + t^m J'_m(t) - \\
 &\quad \frac{t^{2m-1}2^{-m}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{ist}[(1-s^2)^{m-1/2}s]' ds \\
 &= \frac{t^{2m-1}2^{-m}}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{ist}(2m(1-s^2)^{m-1/2} - [(1-s^2)^{m-1/2}s]') ds
 \end{aligned}$$

É de rápida verificação que

$$2m(1-s^2)^{m-1/2} - [(1-s^2)^{m-1/2}s]' = (2m-1)(1-s^2)^{m-3/2}.$$

Com isto obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) &= \frac{t^{2m-1}2^{-m}(2m-1)}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{ist}(1-s^2)^{m-3/2} ds \\
 &= \frac{t^m t^{m-1}2^{-(m-1)}(m-2^{-1})}{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{ist}(1-s^2)^{(m-1)-1/2} ds
 \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a propriedade da função gama $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ podemos concluir que

$$\Gamma(m+1/2) = (m-2^{-1})\Gamma(m-1+1/2)$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(t^m J_m(t)) &= t^m \left[\frac{t^{m-1}2^{-(m-1)}}{\Gamma((m-1)+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{ist}(1-s^2)^{(m-1)-1/2} ds \right] \\
 &= t^m J_{m-1}(t),
 \end{aligned}$$

e com isso mostramos o item i). O item ii) pode ser provado de maneira análoga. Provemos o item iii). Naturalmente

$$|J_m(t)| \leq \frac{t^m 2^{-m}}{|\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)|} \left| \int_{-1}^1 (1-s^2)^{m-1/2} ds \right|.$$

Logo, com a mudança de coordenadas $s \mapsto \sin(\theta)$ obtemos

$$\int_{-1}^1 (1-s^2)^{m-1/2} ds = \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (\cos(\theta))^{2m} d\theta.$$

Portanto,

$$|J_m(t)| \leq k(m)t^{-m},$$

com

$$k(m) = \frac{2^{-m}\pi}{|\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)|}.$$

O item iv) pode ser mostrado utilizando o fato de que funções de Bessel podem ser escritas em termos de funções elementares o que pode ser visto com mais detalhes em (GRAFAKOS, 2014, Apêndice B). \square

Observação A.1.35. Uma propriedade das funções de Bessel que será útil quando tratarmos da transformada de Fourier da medida de superfície na esfera é o seguinte comportamento assintótico:

$$J_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-1/2} \cos\left(t - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(t^{-3/2}),$$

quando $t \rightarrow \infty$. Não exibiremos a demonstração de tal fato, porém a mesma pode ser consultada em (STEIN; WEISS, 1971, Lema 3.11).

Exemplo A.1.36. A seguinte estimativa é válida

$$|\widehat{\chi_{B[0,1]}}(x)| \leq C(n)|x|^{-(n+1)/2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, denote $B = B[0, 1]$. É claro que a função χ_B é radial com $\chi_B(x) = \psi(|x|)$, $\psi(r) = \chi_{[0,1]}(r)$. Logo, pelo Teorema A.1.32 obtemos

$$\widehat{\chi_B}(x) = c(n)|x|^{-(n-2)/2} \int_0^1 J_{(n/2)-1}(2\pi|x|s) s^{n/2} ds,$$

fazendo a mudança de coordenadas $t \mapsto 2\pi|x|s$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_B}(x) &= c(n)|x|^{-(n-2)/2} \int_0^{2\pi|x|} (2\pi|x|)^{-1} J_{(n/2)-1}(t) [t(2\pi|x|)^{-1}]^{n/2} dt \\ &= c(n)|x|^{-(n-2)/2} (2\pi|x|)^{-(n/2)-1} \int_0^{2\pi|x|} J_{(n/2)-1}(t) t^{n/2} dt \\ &= c(n)|x|^{-n} (2\pi)^{-(n/2)-1} \int_0^{2\pi|x|} J_{(n/2)-1}(t) t^{n/2} dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição A.1.34 - (iv) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi|x|} J_{(n/2)-1}(t) t^{n/2} dt \right| &= \left| \int_0^{2\pi|x|} \frac{d}{dt} (t^{n/2} J_{n/2}(t)) dt \right| \\ &= |(2\pi|x|)^{n/2} J_{n/2}(2\pi|x|)| \\ &\leq (2\pi|x|)^{n/2} k(n/2) (2\pi|x|)^{-1/2} \\ &= (2\pi|x|)^{(n-1)/2} k(n/2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\widehat{\chi_B}(x)| \leq C(n)|x|^{-(n+1)/2},$$

com $C(n) = c(n)k(n/2)(2\pi)^{-3/2}$. Com isto concluímos.

A.2 A Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev

Nesta seção, iremos demonstrar o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev. A referência utilizada nesta seção foram (SOGGE, 2017) e (SANTOS, 2020).

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \alpha < n$. O potencial de Riesz I_α é definido por

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} K_{(n-\alpha)}(x-y)f(y)dy = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} (K_{(n-\alpha)} * f)(x),$$

com $\gamma_n(\alpha)$ sendo uma constante de normalização. É importante lembrar que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p < \infty$. De fato, seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e considere um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_K |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_K f| \leq \|\chi_K\|_{p'} \|f\|_p < \infty.$$

Dado $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos o operador maximal de Hardy-Littlewood como sendo

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Lema A.2.1. Se $0 < \alpha < n$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{B[x,r]} |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy \leq Cr^\alpha Mf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0.$$

Demonstração. Naturalmente, temos que

$$B[x,r] = \bigcup_k A_k, \quad \text{com } A_k = \left\{ y : \frac{r}{2^{k+1}} < |x-y| \leq \frac{r}{2^k} \right\}.$$

Logo,

$$\int_{B[x,r]} |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy = \sum_k \int_{A_k} |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, é de rápida verificação que $|x-y|^{\alpha-n} < (r2^{-(k+1)})^{\alpha-n}$, para todo $y \in A_k$. Com isto, deduzimos que

$$\int_{A_k} |f(y)||x-y|^{\alpha-n}dy \leq (r2^{-(k+1)})^{\alpha-n} \int_{B[x, \frac{r}{2^k}]} |f(y)|dy.$$

Lembre que $\mathcal{L}^n(B(x, r)) = r^n \mathcal{L}^n(B[0, 1])$. Com isto, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \int_{B[x, r]} |f(y)| |x - y|^{\alpha - n} dy &= \sum_k (r 2^{-(k+1)})^{\alpha - n} \int_{B[x, \frac{r}{2^k}]} |f(y)| dy \\ &= \sum_k 2^{-k(\alpha - n)} r^\alpha \frac{1}{r^n} (2^{-kn}) \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \\ &\lesssim r^\alpha \sum_k 2^{-k\alpha} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \\ &\lesssim r^\alpha Mf(x), \end{aligned}$$

pois a série $\sum_k 2^{-k\alpha}$ é convergente. □

Lema A.2.2. Sejam $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ não negativa. Então,

$$(I_\alpha f)(x) \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha p}{n}} [(Mf)(x)]^{1 - \frac{\alpha p}{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Como $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, então a aplicação $y \mapsto |x - y|^{-(n-\alpha)}$ está em $L^{p'}(\mathbb{R}^n \setminus B(x, r))$. Logo, pela Desigualdade de Hölder, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)} K_{n-\alpha}(x - y) |f(y)| dy &\lesssim \|K_{n-\alpha}(x - \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n \setminus B(x, r))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(x, r))} \\ &\lesssim r^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema A.2.1, obtemos

$$\int_{B[x, r]} K_{n-\alpha}(x - y) |f(y)| dy \lesssim r^\alpha Mf(x).$$

Portanto, escolhendo $r = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{n}}$, obtemos

$$\begin{aligned} (I_\alpha f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)} K_{n-\alpha}(x - y) |f(y)| dy + \int_{B[x, r]} K_{n-\alpha}(x - y) |f(y)| dy \\ &\leq C_1 r^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_{L^p} + C_2 r^\alpha Mf(x) \\ &\lesssim \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{Mf(x)}\right)^{\frac{p\alpha}{n} - 1} \|f\|_{L^p} + \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{Mf(x)}\right)^{\frac{p\alpha}{n}} Mf(x) \\ &= \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} [Mf(x)]^{1 - \frac{\alpha p}{n}}. \end{aligned}$$

□

Teorema A.2.3 (Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev). Sejam $1 < p < q < \infty$ e $0 < \alpha < n$ tais que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Então, existe uma consta $C > 0$ satisfazendo

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Utilizando o Lema A.2.2, deduzimos que existe uma constante $A > 0$ tal que

$$[(I_{\alpha}f)(x)]^q \lesssim A^q \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha q p}{n}} [(Mf)(x)]^{q - \frac{\alpha p q}{n}} = A^q \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha q p}{n}} [(Mf)(x)]^p.$$

Assim,

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(I_{\alpha}f)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(Mf)(x)|^p dx \right)^{\frac{p}{q p}} = A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}.$$

Utilizando a hipótese $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, obtemos $\frac{p}{q} = 1 - \frac{\alpha p}{n}$. Para dar continuidade, iremos fazer uso do Teorema Maximal de Hardy–Littlewood, o qual garante que $\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, para todo $1 \leq p < \infty$ (SOGGE, 2017, Teorema 0.2.1). Portanto,

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^q} \leq A \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1 - \frac{\alpha p}{n}} = \|f\|_{L^p}$$

e com isto concluímos. \square

Corolário A.2.4. Seja $0 < \gamma < 1$ e $1 < s < t < \infty$ tais que $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} + \gamma - 1$. Então

$$\|K_{\gamma} * g\|_{L^t(\mathbb{R})} \lesssim \|g\|_{L^s(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in L^s(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Definindo $\alpha = 1 - \lambda$, temos $0 < \alpha < 1$ e $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{1}$. Logo, aplicando o Teorema A.2.3 com $n = 1$, obtemos

$$\|I_{\alpha}(g)\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} = \left\| \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} K_{(1-\alpha)} * g \right\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \leq C \|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall g \in L^s(\mathbb{R}^n),$$

isto implica

$$\|K_{\gamma} * g\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

\square

Historicamente, Hardy e Littlewood provaram em (HARDY; LITTLEWOOD, 1928) provaram o caso unidimensional do Teorema A.2.3 e Sobolev em (SOBOLEV, 1938) utilizou o mesmo para generalizar para o \mathbb{R}^n .

Observação A.2.5. Se s e γ forem tais que $0 < \gamma < 1$, $1 < s < 2$ e $\frac{2}{s} = 2 - \gamma$, então os mesmos satisfazem

$$1 < s < s' < \infty, \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \gamma - 1,$$

o que equivale à condição para a Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev. De fato, é de rápida verificação que $s' \neq \infty$ sempre que $s \neq 1$. Por outro lado, como $s' = s/(s - 1)$ e $s < 2$

rapidamente verificamos que $s' > s$. Por fim,

$$2 - \gamma = \frac{2}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \left(1 - \frac{1}{s'}\right),$$

e, com isso, deduzimos que

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \gamma - 1.$$

Portanto, pela Observação A.2.5 e pelo Corolário A.2.4 concluímos que

$$\|K_\gamma * g\|_{L^{s'}(\mathbb{R})} \lesssim \|g\|_{L^s(\mathbb{R})}, \quad (\text{A.35})$$

sempre que s e γ satisfizerem

$$0 < \gamma < 1, 1 < s < 2 \text{ e } \frac{2}{s} = 2 - \gamma. \quad (\text{A.36})$$

