



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Danilo Menezes Santos

Formulação em Dano Concentrado para Meios Contínuos
Bidimensionais com Localização de Deformações em Modo I

Danilo Menezes Santos

Formulação em Dano Concentrado para Meios Contínuos
Bidimensionais com Localização de Deformações em Modo I

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade
Federal de Sergipe (UFS) como etapa final da Pós-
Graduação em Engenharia Civil para obtenção do
título de mestre.

Orientador: David Leonardo Nascimento de
Figueiredo Amorim.

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta monografia e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Danilo Menezes Santos

SANTOS, Danilo Menezes.

FORMULAÇÃO EM DANO CONCENTRADO PARA MEIOS CONTÍNUOS BIDIMENSIONAIS COM LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES EM MODO I/ Danilo Menezes Santos.

São Cristóvão, 2021

93 p.: il.

Trabalho Acadêmico Orientado. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

I. Universidade Federal de Sergipe

II. Formulação em Dano Concentrado para Meios Contínuos Bidimensionais com Localização de Deformações em Modo I

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a Deus e Nossa Senhora das Graças que sempre me deram sabedoria e perseverança nessa caminhada.

Ao meu orientador Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim, por todo apoio, incentivo, conhecimento, entusiasmo e as muitas histórias contadas ao longo dessa jornada.

Aos professores Julio Flórez-López e Ricardo Picón, pela contribuição primordial neste trabalho, serei eternamente grato pela oportunidade de ter participado de um projeto de pesquisa com grandes fontes de inspiração como os senhores.

A todos os professores do DEC/PROEC UFS, com menção especial a: Jorge Costa, Nilma Fontes, Débora de Gois e Higor Sérgio, que sempre estiveram dispostos a me receber e auxiliar com os mais diversos assuntos; ao professor Ludmilson idealizador do LAMEC, ver sua dedicação em incentivar e melhorar cada dia mais o ensino e a pesquisa na universidade foram bastante estimulantes; Ao professor Erinaldo Cavalcante e toda sua prontidão em auxiliar com as questões laboratoriais.

A todos do corpo administrativo do DEC UFS, principalmente o técnico em laboratório Matheus Alves que foi extremamente solícito em todas as minhas jornadas no LAMCE.

Aos amigos da vida: André, Felipe, Geninho, Fábio, Layne, William e Cabelinho, que estiveram comigo desde o IFS compartilhando vitórias e derrotas. Aos amigos do LAMEC principalmente: Rafael Nunes, Leandro Santana e Alan, pelo companheirismo e xícaras de café compartilhadas. A Daniel Teles, que possui contribuição inestimável nesse trabalho desde revisar texto até realizar simulações computacionais.

Aos meus familiares, em especial minha irmã Taíssa e minhas tias: Vânia, Ana e Neide, que me apoiaram ao longo de toda essa jornada.

Aos meus avôs (in memoriam) com os quais tive pouco contato, mas sei que, lá de cima, olham por mim. A minhas avós Maria Elze e Ibelza (in memoriam), duas matriarcas incríveis às quais eu e todos da família devemos tudo.

Aos meus pais Paulo e Maria José, que me transmitiram os melhores valores que uma pessoa poderia receber; além de sempre terem feito de tudo para proporcionar a melhor educação a mim e a minha irmã.

Resumo

A integridade estrutural encontra-se diretamente influenciada pelas características dos materiais constituintes da estrutura. Materiais com comportamentos não lineares como o concreto, aço e geomateriais, possuem em sua fase de amolecimento uma tendência ao surgimento de pequenas regiões com alta concentração de deformações totais, plásticas e de dano. Esse fenômeno, por vezes, não é previsto durante a etapa de dimensionamento e sua ocorrência, caracteriza um tipo especial de colapso conhecido como falha por localização de deformações. Em simulações numéricas, o fenômeno da localização de deformações está relacionado a perda de elipticidade da equação diferencial que governa o equilíbrio estático ou dinâmico local. A perda de elipticidade provoca em análises por elementos finitos, com modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Clássico, o surgimento de infinitas soluções, o que acarreta em problemas mal postos. Essa situação pode ser contornada ao se adotar critérios de regularização, baseados principalmente em modelos não locais e/ou gradientes. Recentemente, a abordagem conhecida como Mecânica do Dano Concentrada Expandida (MDCX) vêm obtendo resultados bastantes satisfatórios para a descrição do fenômeno de localização em elementos de chapas e placas. Assim como na Teoria do Dano Concentrado (TDC), a MDCX busca contornar perda de elipticidade das soluções por meio da introdução de novas variáveis cinemáticas ao problema de equilíbrio. Este trabalho trata-se de uma continuidade dos estudos já existentes relacionados à MDCX. É proposto aqui um elemento finito isoparamétrico quadrilateral, composto por 6 bandas de localização, sendo quatro localizadas em suas faces e duas internas, para análise de chapas submetidas a solicitação de modo I. O elemento proposto foi aplicado a um conjunto de exemplos obtendo unicidade de solução conforme ocorreu o refinamento de malha, além de obter zonas de ruptura coerentes com o esperado. Também foi observado que a MDCX é capaz de capturar o efeito de escala, fenômeno que é observado experimentalmente.

Palavras-chave: Mecânica do Dano Expandida; Localização de Deformações; Elementos Finitos; Modo I; Chapas; Não Linearidade Física; Efeito de Escala.

Abstract

The structural integrity is directly influenced by the characteristics of materials using in structures. Materials with nonlinear behavior such as concrete, steel and geomaterials in their softening phase there is a tendency for the appearance of small regions with a high concentration of total deformations, plastic and damage. This phenomenon, sometimes, is not predicted during the dimensioning stage and its occurrence characterizes a special type of collapse known as a failure due to strain localization. In numerical simulations, the phenomenon of strain localization is related to loss of ellipticity in the differential equation that governs the local static or dynamic equilibrium. The loss of ellipticity causes in finite element analysis, with constitutive models based on the Continuum Damage Mechanics, the appearance of infinite solutions, which leads to ill-posed problems. This situation can be overcome by adopting regularization criteria, based mainly on non-local models and/or gradients. Recently, the approach known as Extended Lumped Damage Mechanics (XLDM), has been obtaining quite satisfactory results for the description of the phenomenon of localization in plate and 2D continuum elements. As in the Lumped Damage Mechanics (LDM), the XLDM seeks to circumvent the loss of ellipticity of solutions by introducing new kinematic variables to the equilibrium problem. This work is a continuation of the existing studies related to XLDM. A quadrilateral isoparametric finite element is proposed here, consisting of 6 location bands, four located on their faces and two internal, for analysis of plates submitted to mode I stress. The proposed element was applied to a set of examples obtaining uniqueness of solution as the mesh refinement occurred, in addition to obtaining rupture zones consistent with the expected. Furthermore, the XLDM was able to capture the scale effect, a phenomenon observed experimentally.

Keywords: Extended Lumped Damage Mechanics; Strain Localization; Finite Elements; Mode I; Thin Plates; Physical Nonlinearity, Size-Effect.

Lista de Abreviaturas e Siglas

EC	–	Equação Cinemática
EF	–	Elemento Finito
EQ	–	Equação de Equilíbrio
LC	–	Lei Constitutiva
LE	–	Lei de Evolução
MDCX	–	Mecânica do Dano Concentrado Expandida
MEF	–	Método dos Elementos Finitos
PEEF	–	Programa Endogeno de Elementos Finitos
TDC	–	Teoria do Dano Concentrado

Lista de Símbolos

x, y, z	– Coordenadas cartesianas
E	– Módulo de elasticidade ou de Young
s, t	– Coordenadas no espaço paramétrico
ε	– Deformação, deformação total
σ_{max}	– Tensão máxima local
σ_{med}	– Tensão média aplicada
P	– Força, força axial
Δ	– Deslocamento, alongamento, deslocamento imposto
g	– Lei de evolução do dano
U	– Deslocamentos nodais
r	– Lei de estado
A	– Área, área total, área da seção transversal
A_d	– Área de microdefeitos
$R(\omega)$	– Resistência a fissuração
σ	– Tensão normal média, tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}$	– Tensão efetiva
ω	– Variável de Dano contínuo
ε^e	– Deformação elástica
ε^ω	– Deformação de dano
ε_u	– Deformação última
L	– Comprimento da barra, comprimento total
ε_{cr}	– Deformação crítica
ε_{eq}	– Deformação equivalente da barra
l_1, L_1	– Comprimento do elemento 1
l_2, L_2	– Comprimento do elemento 2
Δ	– Deslocamento imposto
σ_1	– Tensão no elemento 1
σ_2	– Tensão no elemento 2
n	– Força axial
ε_1	– Deformação no elemento 1

ε_2	– Deformação no elemento 2
$\{q\}$	– Vetor de deslocamentos nodais
u_i, u_j	– Deslocamento no nó i e j respectivamente
δ	– Alongamento, alongamento total do elemento
$\{Q\}$	– Forças nodais do elemento, forças nodais internas
δ^e	– Alongamento elástico
δ^d	– Alongamento de dano
δ_u	– Alongamento último
$\{\varepsilon\}, \{\varepsilon(x, y)\}$	– Vetor de deformações
$\{\sigma\}, \{\sigma(x, y)\}$	– Vetor de tensões generalizadas
$[K]$	– Matriz de rigidez
$[B], [B(x, y)]$	– Matriz cinemática convencional
$[H]$	– Matriz de coeficientes elásticos
i	– Nó do elemento quadrilateral, controle ou passo de iteração
$[N], [N]_q$	– Vetor de tensões nos “ <i>numexes</i> ”
$[T], [T(x, y)]$	– Matriz de Transformação dos <i>numexes</i>
j, k, l	– Nós do elemento quadrilateral
u, v	– Graus de liberdade dos nós do elemento na direção x e y , respectivamente
u_i, v_i	– Deslocamentos na direção x e y respectivamente para o nó i
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	– Tensões de compressão na direção x, y e tensão de cisalhamento no plano xy
Fx_i	– Força nodal no nó i na direção x
$\{\delta\}$	– Deformações generalizadas ou alongamentos dos <i>numexes</i>
δ_{ij}	– Alongamento do <i>numex</i> entre os nós i e j
$[b], [b]_q$	– Matriz de transformação cinemática para um elemento q
ξ, η	– Coordenadas do espaço de referência usual do elemento
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	– Deformações na direção x, y e distorção no plano xy , respectivamente
a_1, a_3, b_1, b_3 e c	– Constantes independentes do campo de deformações
$\{\delta^d\}, \{\delta^d\}_q$	– Alongamentos de dano para um elemento q
δ_{ij}^d	– Alongamento de dano do <i>numex</i> entre os nós i e j
e_{is}	– Espessura da banda no nó i entre os nós i e j (direção s)
$\{\delta^e\}, \{\delta^e\}_q$	– Alongamentos elásticos para um elemento q
σ_{it}	– Tensão normal ao nó i na direção do eixo t

σ_n, σ	– Tensão normal, tensão de Cauchy
e	– Espessura da banda de localização, elemento finito
$e_i^{ij}, e_{i,ij}$	– Espessura da banda ij no nó i
$\{FR\}$	– Vetor de forças residuais
U_i	– Deslocamento da estrutura na iteração i
$g_i^{ij}, g_{i,ij}$	– Lei de evolução do nó i da banda ij
$\sigma_i^{ij}, \sigma_{n,i,ij}$	– Tensão normal no nó i da banda ij
$\sigma_{cr,i}^{ij}, \sigma_{cr,i,ij}$	– Tensão crítica no nó i da banda ij
$\delta_{u,i}^{ij}, \delta_{u,i,ij}$	– Alongamento ultimo do nó i da banda ij
g_{is}, g_{it}	– Lei de evolução de dano para o nó i na direção s e t , respectivamente
$\sigma_{n,is}, \sigma_{n,it}$	– Tensão normal no nó i na direção s e t , respectivamente
$\sigma_{cr,is}, \sigma_{cr,it}$	– Tensão crítica no nó i na direção s e t , respectivamente
$\delta_{u,is}, \delta_{u,it}$	– Alongamento ultimo do nó i na direção s e t , respectivamente
e_{it}, e_{is}	– Espessura de banda no nó i na direção s e t , respectivamente
ζ	– Controle de incremento do passo i
ν	– Coeficiente de Poisson
ΔU	– Incremento de deslocamento
$\{P\}$	– Vetor de solicitações externas
s_{ij}	– Seno do plano perpendicular a banda ij e a horizontal
c_{ij}	– Cosseno do plano perpendicular a banda ij e a horizontal
$[B^0]$	– Matriz cinemática para o elemento unidimensional
$[U]_q$	– Vetor de deslocamentos globais para um elemento q

Lista de Figuras

Figura 1 - Modos de propagação de uma fissura.....	13
Figura 2 – Elemento danificado.	14
Figura 3 - Barra engastada dividida em dois elementos e sujeito a deslocamento imposto a) e história do deslocamento b).....	19
Figura 4 - Equação constitutiva e de equilíbrio.....	21
Figura 5 - Solução para o caso onde ambos os elementos estão na fase elástica.	21
Figura 6 – a) Solução homogênea e b) Solução localizada.	22
Figura 7 - Gráfico de força x deslocamento.	23
Figura 8 - Elemento finito com adição de banda de localização.	23
Figura 9 - (a) Resposta inelástica do material e (b) solução numérica via TDC para uma barra sob compressão.	25
Figura 10 – (a) Elemento finito quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço isoparamétrico. ...	26
Figura 11- a) Elemento clássico de 4 nós, b) treliça de 5 barras equivalente e c) espaço de referência.	27
Figura 12 – a) Indicação bandas de localização elemento 4 nós e b) espessuras das bandas.....	30
Figura 13 – Chapa sólida em L	32
Figura 14 - Curva força vs deslocamento.....	32
Figura 15 - Malha deformada a) com 75 elementos e b) com 432 elementos.....	33
Figura 16 - Elemento finito isoparamétrico com 4 bandas.....	34
Figura 17 - Esquema geral do modelo MDCX.....	34
Figura 18 - Estudo de convergência de Oliveira (2020).	36
Figura 19 - Análise comparativa entre os resultados de Oliveira (2020) e Amorim (2016).	37
Figura 20 - Malha deformada: a) Oliveira (2020) e b) Amorim (2016).....	37
Figura 21 - Chapa em L com condições de contorno modificadas.	38
Figura 22 - Análise comparativa para as condições de contorno modificadas.....	39
Figura 23 - Malha deformada exemplo modificado.....	39
Figura 24 - Elemento finito com 6 bandas.	42
Figura 25 – (a) Elemento quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço de referência.....	44
Figura 26 – Fluxograma da solução local no PEEF.	49
Figura 27 - Chapa tracionada com furo central.....	50
Figura 28 - Concentração de tensão chapa com furo circular.	51
Figura 29 – Modelo de análise.	51
Figura 30 - Campo de tensões chapa com furo.	52

Figura 31 - Solução de referência via Abaqus 6.421.5.0 versão estudantil.....	52
Figura 32 - Força vs deslocamento.	53
Figura 33 - Convergência malha 300 e 432 elementos.	54
Figura 34 - Comparação com os resultados de Amorim (2016).	55
Figura 35 - Malhas deformadas a) 75 elementos b) 192 elementos c) 300 elementos e d) 432 elementos.....	56
Figura 36 - Curva força vs. deslocamento.....	57
Figura 37 - Convergência malha 196 e 256 elementos.	57
Figura 38 - Malha deformada a) 287 elementos b) 169 elementos c) 527 elementos e d) 508 elementos.	58
Figura 39 - Malha indeformadas a) 42 elementos e b) 408 elementos.....	59
Figura 40 – Comparação resultado Regular e Irregular.	60
Figura 41 - Hexágono duplo.....	60
Figura 42 – Curvas <i>força vs deslocamento</i>	61
Figura 43 - Malha deformada a) 230 elementos b) 468 elementos c) 672 elementos e d) 829 elementos.	62
Figura 44 - Quadrado Vazado	63
Figura 45 - Gráfico de força vs deslocamento	64
Figura 46 - Malhas deformadas a) 72 elementos, b) 192 elementos, c) 300 elementos e d) 588 elementos.....	65
Figura 47 – Chapa baseada no teste de Hassazadeh (1981).	66
Figura 48 - Gráfico de força vs deslocamento	66
Figura 49 - Malhas deformadas a) 41 elementos, b) 125 elementos, c) 354 elementos, d) 534 elementos, e) 684 elementos e f) 1044 elementos.	67
Figura 50 - Resultados numéricos obtidos por Comi e Perego (2001).....	68
Figura 51 – Variação passo a) 0,211 mm, b) 0,411 mm, c) 0,511 mm e d) 0,711 mm.	69
Figura 52 - Curvas força vs deslocamento para variação do passo de carga.	70
Figura 53 - Viga Engastada.	71
Figura 54 - Gráficos de força vs deslocamento.....	71
Figura 55 - Malhas deformadas a) 250 elementos, b) 800 elementos c) 3200 elementos e d) 5000 elementos.....	72
Figura 56 – Gráfico <i>size effect</i> via MDCX.....	73

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. OBJETIVOS.....	17
2.1. OBJETIVO GERAL	17
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
3. REVISÃO DE LITERATURA	18
3.1. LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	18
3.2. PROBLEMA DA NÃO UNICIDADE DE SOLUÇÃO.....	19
3.3. ELEMENTO FINITO REGULAR DA MDCX	26
3.4. ELEMENTO IRREGULAR DA MDCX	33
4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	41
4.1. ELEMENTO PROPOSTO	41
4.2. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	44
5. RESULTADOS	50
5.1. EXEMPLO 1 – CHAPA TRACIONADA COM FURO.....	50
5.2. EXEMPLO 2 – CHAPA EM L DE AMORIM (2016) COM ELEMENTOS REGULARES.....	53
5.3. EXEMPLO 3 – CHAPA EM L DE AMORIM (2016) COM ELEMENTOS IRREGULARES.....	56
5.4. EXEMPLO 4 – HEXAGÓNO DUPLO.....	60
5.5. EXEMPLO 5 – QUADRADO VAZADO.....	63
5.6. EXEMPLO 5 – EXPERIMENTO DE HASSANZADEH	65
5.7. EFEITO DE ESCALA.....	70
6. CONCLUSÕES.....	74
REFERÊNCIAS	76
APÊNDICES	80

1. INTRODUÇÃO

Os materiais utilizados para a fabricação de estruturas, tais como concreto e metais, apresentam um comportamento não linear. Como observado por Lemaitre e Chaboche (1990), esse fenômeno ocorre devido à manifestação de processos irreversíveis na sua microestrutura, como por exemplo: escorregamentos relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contornos de grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos, entre outros.

Por meio da incorporação de variáveis internas aos modelos matemáticos, os estudos ligados as não linearidades físicas buscam reproduzir a influência desses fenômenos microscópicos nas análises estruturais. Deve-se reforçar que para análises numéricas precisas, que busquem mimetizar ao máximo o comportamento das estruturas reais, é indispensável a consideração da existência de defeitos nos meios materiais, já que esses, são potenciais causadores dos mecanismos de colapso estrutural, ligados principalmente a fenômenos de concentração de tensão e/ou energia.

Dentro dos modelos não lineares comumente utilizados na engenharia de estruturas, que tratam da análise do comportamento físico dos materiais, destacam-se três teorias principais: a teoria da plasticidade, a mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo.

A teoria da plasticidade surge da observação dos fenômenos macroscópicos associados aos metais, principalmente: o encruamento e a plasticidade. A ocorrência de ambos os fenômenos se dá após o regime elástico, sendo o encruamento definido como o ganho de resistência com o crescimento das deformações, e a plasticidade caracterizada como o surgimento de deformações permanentes. Por meio da teoria da plasticidade, os sólidos quando descarregados, podem apresentar dois tipos de deformação: as reversíveis (deformações elásticas) e as irreversíveis (deformações plásticas). Tal consideração conduz a resultados importantes para diversos casos de engenharia, como por exemplo, a determinação do colapso plástico das estruturas e o cálculo de tensões máximas e últimas em metais. Entretanto, cabe destacar que seu uso não pode ser aplicado em meios com fissuras, já que esse fenômeno causa modificações geométricas nas estruturas.

Já a Mecânica da Fratura parte do princípio que todos os materiais possuem fissuras iniciais que podem afetar a capacidade máxima de resistência das estruturas. Por considerar a presença de defeitos iniciais, a Mecânica da Fratura concentra-se em estudar as condições sob as quais ocorre o crescimento e instabilidade da fissura, sem se preocupar com a etapa de micro fissuração, momento anterior ao surgimento da fissura. É bastante empregada em simulações

com geometrias simples, presença de poucas fissuras e materiais homogêneos, como por exemplo, na verificação da integridade de peças da indústria aeronáutica.

Por meio da Mecânica da Fratura define-se a existência de três modos principais de solicitação ligados a manifestação de uma fissura, sendo eles: o Modo I (abertura no plano), Modo II (cisalhamento/escorregamento no plano) e o Modo III (cisalhamento/rasgamento fora do plano). É importante conhecer a relação entre fissuração e solicitação, pois, uma determinada fissura se propagará a partir da atuação individual ou combinada de cada um desses três modos principais. Na Figura 1, mostra-se por meio de um desenho esquemático como se dá cada processo individual de fissuração.

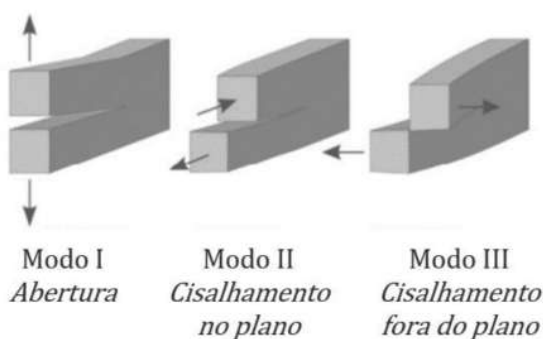


Figura 1 - Modos de propagação de uma fissura

Fonte: Amorim (2016).

Além da Mecânica da Fratura e da teoria da plasticidade, a descrição dos processos de ruína progressiva e falha estrutural podem ser modelados ainda via mecânica do dano contínuo. Essa é a mais recente das teorias principais, desenvolvida inicialmente por meio do trabalho de Kachanov (1958), que busca modelar o comportamento da ruptura por deformação lenta, conhecido como fluência. A ideia por trás da teoria do dano contínuo baseia-se na incorporação de uma variável interna, comumente chamada de dano, responsável por caracterizar a deterioração do material. Essa deterioração é manifestada por meio de descontinuidades superficiais ou volumétricas, na forma de microfissuras, micro vazios ou cavidades, que não possuem tamanho suficiente para serem consideradas como fissuras discretas, entretanto sua influência não pode ser desprezada. Como apresentado em Flórez-López, Marante e Picón (2015), para um elemento danificado (Figura 2) com uma área da seção transversal A e área de microdefeitos A_d , o dano ω é definido como mostrado em (1):

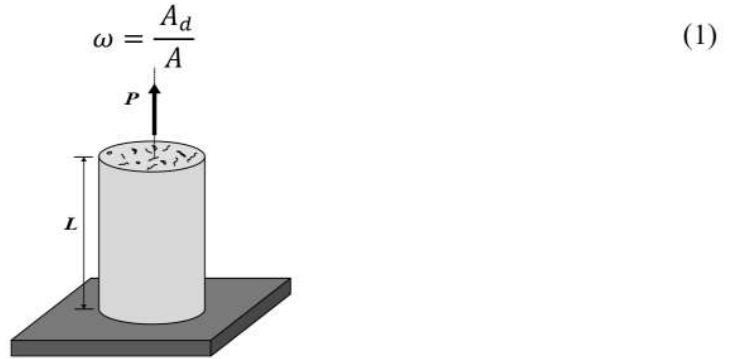


Figura 2 – Elemento danificado.

Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

Da expressão (1), percebe-se que a variável de dano pode assumir valores entre zero (situação onde material não está danificado) e um (elemento totalmente rompido).

Segundo Lemaitre e Chaboche (1990), o dano é introduzido nas leis de comportamento mediante o conceito de tensão efetiva combinada a uma hipótese de equivalência de deformações ou energia. A tensão efetiva é capaz de relacionar a variável de dano aos efeitos de carregamento impostos a uma determinada estrutura. Para o caso unidimensional como na Figura 2, a tensão efetiva para uma superfície danificada, é expressa via equação (2), sendo: $\bar{\sigma}$ a tensão efetiva para o caso danificado e σ a tensão normal para o caso sem dano:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - A_d} = \frac{P}{A(1 - \omega)} \therefore \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2)$$

A hipótese de equivalência de deformações proposta por Lemaitre e Chaboche (1990), estabelece que as equações constitutivas de uma estrutura em sua consideração intacta, continuam válidas durante o seu processo de danificação, desde que a medida de tensão normal σ seja substituída pela sua tensão efetiva $\bar{\sigma}$. Tal proposição é de fundamental importância para todo o desenvolvimento da mecânica do dano, pois permite que qualquer modelo (elástico, plástico, viscoplástico) possa ser modificado para incluir os efeitos do dano em sua análise. Para o caso da Figura 2, a variável de dano é incorporada a lei elástica, como expressada em (3):

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \therefore \sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (3)$$

Essa relação pode ainda ser rearranjada e representada em um formato mais interessante do ponto de vista físico, ao se dividir a lei elástica em dois termos: um relativo as deformações elásticas (ε^e) e o outro relacionado as deformações de dano (ε^ω).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega \therefore \varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{e} \quad \varepsilon^\omega = \frac{\omega}{(1 - \omega)E} \sigma \quad (4)$$

A mecânica do dano clássica tem sido muito exitosa na descrição local de uma grande variedade de mecanismos de deterioração. Entretanto, como destacado em Flórez-López, Marante e Picón (2015) formulações baseadas no dano contínuo podem levar a problemas dependentes de malha, fazendo com que um número infinito de soluções possa satisfazer as equações locais da teoria. Aspecto matemático que está diretamente ligado ao fenômeno físico da Localização de Deformações.

Quando se utiliza elementos finitos da mecânica do dano clássica para diagnosticar o fenômeno da Localização de Deformações, esbarra-se num problema de dependência de malha, culminando assim em infinitas soluções. Tal problema interfere em uma etapa bastante importante dentro do processo de cálculo. Como cada elemento aproxima localmente o problema original, quanto maior o número de elementos, maior a precisão do resultado. Este entendimento é semelhante ao processo de aproximar uma curva por retas, quanto maior for o número de pequenas retas usadas, maior será a aproximação da curva real. De modo geral, quanto mais refinada for a malha, melhor a solução do problema. Com isso, ao se fazer uma análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), é importante um estudo de convergência com malhas cada vez mais robustas, sendo que o resultado deve convergir para uma solução única.

Ao se analisar sobre esse aspecto, a Mecânica do Dano Contínuo apresenta falhas ao tentar modelar o fenômeno da localização, gerando dependência de malha (“*size dependence*”) e formulações mal postuladas. Como estratégia para combater tais problemas alguns autores propõem a utilização de métodos de regularização baseados em gradientes ou integrais não-locais.

A partir da década de 1990, Perdomo *et al* (1999) propôs a chamada Teoria do Dano Concentrado (TDC). A TDC surgiu como um método simplificado de dano para pórticos, e vêm sendo desenvolvida para diferentes problemas de engenharia tais como: pórticos (Cipollina, López-Inojosa, Flórez-López, 1995; Liu, Liu, 2004; Kaewkulchai, Williamson, 2004; Alva; El Debs, 2010; Perdomo et al., 2013) e arcos (Amorim; Proença; Flórez-López,

2013) de concreto armado, pórticos metálicos (Bai et al., 2016), além de vigas e túneis de concreto simples (Amorim; Proença; Flórez-López, 2014a). Recentemente os trabalhos de Amorim (2016), Amorim et al (2018) e Oliveira (2020) apresentaram novos avanços na utilização de dano concentrado, ao expandir os conceitos para análise de chapas e placas criando assim a chamada Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX).

Como explica Amorim et al (2018), a hipótese fundamental da TDC e da MDCX, é que a localização é um fenômeno separado que precisa da introdução de variáveis de estado específicas com suas respectivas leis de evolução. Possui como principal vantagem proporcionar análises com independência de malha, não violação do princípio dos efeitos locais e custo computacional reduzido. Esses atributos tornam a TDC uma teoria válida para analisar o comportamento não linear das estruturas, em particular as sujeitas ao fenômeno de localização de deformações.

Diante disso, este trabalho busca dar continuidade ao desenvolvimento das descobertas de Amorim (2016), Amorim *et al* (2018) e Oliveira (2020), modificando o elemento finito para análise de chapas da MDCX a partir da consideração de 6 bandas de localização. Sendo 4 localizadas nas faces do elemento e 2 internas ligando a suas diagonais. O intuito é melhorar a capacidade do elemento finito em captar as trajetórias de ruptura presentes nas análises, tornando a ferramenta ainda mais robusta para a detecção de falha estrutural.

O conteúdo desta dissertação é dividido como se segue. No capítulo 2, são abordados o objetivo principal e os objetivos específicos da pesquisa. No capítulo 3, apresenta-se uma pequena introdução sobre o fenômeno da localização de deformações e o problema de não unicidade de solução. Além disto, será demonstrado o processo de dedução dos elementos finitos utilizados por Amorim (2016) e Oliveira (2020). No capítulo 4, desenvolve-se a dedução do novo elemento finito com 6 bandas de cisalhamento. Será também apresentada sua implementação numérica no Programa Endógeno de Elementos Finitos (PEEF), proposto originalmente por Uzcategui (2012). No capítulo 5, encontra-se a discussão sobre os resultados obtidos via simulações numéricas. Por fim, no capítulo 6, estão registradas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

O objetivo principal dessa pesquisa é contribuir com a evolução da MDCX, desenvolvida inicialmente por Amorim (2016) e Amorim et al (2018), atuando principalmente na teoria de Localização de Deformações.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como objetivos específicos, buscam-se:

- Desenvolver um elemento finito de chapa irregular baseado nos conceitos da MDCX, contendo 6 bandas de localização, sendo: 4 nas arestas do elemento e 2 diagonais internas.
- Realizar simulações numéricas que comprovem a objetividade de solução.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, será apresentado uma revisão do fenômeno de localização de deformações e o seu tratamento segundo a TDC. Inicialmente para um exemplo uniaxial demonstra-se como a abordagem via Mecânica do Dano Clássica, leva a um problema de não unicidade de solução. Em seguida, o mesmo problema passa a ser tratado segundo a TDC, destacando como a adoção da banda de localização e da variável de alongamento corrigem a dependência de malha. Por último, será apresentado a expansão da TDC para chapas através dos elementos finitos de Amorim (2016) e Oliveira (2020).

3.1. LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

O termo localização pode se referir a uma condição matemática relacionada a modelos de dano ou a um fenômeno físico. No caso matemático, refere-se ao surgimento de um infinito número de soluções para o problema, e no caso físico, refere-se ao aparecimento de uma faixa onde deformação e dano são concentrados enquanto o restante do sólido tende a descarregar elasticamente. Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), observações experimentais mostram que antes do colapso total, frequentemente, deformações tendem a se concentrar em regiões ou faixas estreitas, denominadas de bandas de localização ou bandas de Lüder. Sendo essa concentração um mecanismo que acelera drasticamente a falha estrutural.

O comportamento na fronteira da banda de localização e as condições necessárias para a ocorrência do fenômeno foram determinados por Rudnicki e Rice (1975). Desde então, tal modelo foi amplamente utilizado e melhorado para os meios contínuos (Storen e Rice (1975); Zhang, Lu e Yu (2003); Marante, Picón e Flórez-López (2004); Marante e Flórez-López (2004) e Hashiguchi e Protasov (2004)). Ainda, os resultados de Rudnicki e Rice (1975) foram estendidos ao caso de meios porosos por Benallal e Comi (2002 e 2003); Mroginiski, Etse e Vrech (2011); Recchia et al (2020) resultando em importantes aplicações geotécnicas.

O trabalho desenvolvido por Rudnicki e Rice (1975), descreve matematicamente o comportamento que ocorre em uma banda de localização, além de apresentar as condições necessárias para a ocorrência do fenômeno de localização. Em seu estudo os autores chegaram à conclusão que o fenômeno de localização apresenta-se como uma situação de instabilidade material e simultaneamente perda de elipticidade das equações diferenciais que governam o equilíbrio. Storen e Rice (1975), complementaram o trabalho anterior o expandindo para os

casos de materiais dúcteis. Ambos os trabalhos caracterizam a teórica clássica de localização de deformações.

Como mostra Proença (2008), a existência de pontos singulares, que caracterizam a não unicidade de solução, surgem da mudança da condição matemática de elipticidade da equação diferencial que governa o equilíbrio estático ou dinâmico local. Quando não existem pontos de singularidade, como no caso elástico, tais condições são sempre atendidas, e um reflexo disso é a estabilidade das simulações numéricas, gerando convergência da solução aproximada para um resultado com precisão satisfatória.

Uma revisão geral dos conceitos da teoria de localização de deformações demonstrado de um modo mais didático pode ser observado em Marante, Benallal e Flórez-López (2007). Nesse trabalho os autores mostram como o processo de localização de deformações em um meio unidimensional, acaba por esbarrar em um problema de não unicidade de soluções. A explicação apresentada pode ainda ser extrapolada para casos bi e tridimensionais, tendo o cuidado, de tratar a existência de máximos locais por meio de um critério de localização adequado. A adoção desse critério, é justamente o ponto que marca a diferença entre TDC e MDCX, das soluções via métodos de regularização da mecânica do dano contínuo.

3.2. PROBLEMA DA NÃO UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Para exemplificar a questão da não unicidade de solução para os problemas de localização, adapta-se a dedução matemática proposta por Amorim et al (2018) e Flórez-López, Marante e Picón (2015), onde se toma uma barra engastada e livre, dividida em dois elementos finitos de comprimentos L_1 e L_2 , de mesmo material e área da seção transversal A . Em sua extremidade livre direita, impõem-se um incremento de deslocamento linear Δ , dependente do tempo como mostrado na Figura 3.

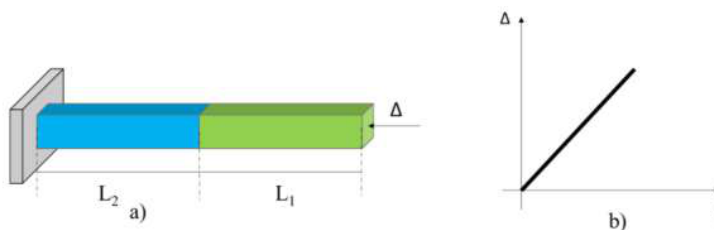


Figura 3 - Barra engastada dividida em dois elementos e sujeito a deslocamento imposto a) e história do deslocamento b).

Fonte: Adaptado de Amorim et al (2018).

Para o caso estudado o equilíbrio passa a ser definidos segundo:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{n}{A} \quad (5)$$

onde: σ_1 e σ_2 são as tensões normais nos elementos 1 e 2, respectivamente; n é o esforço normal, que é constante ao longo da barra. A compatibilidade cinemática para a barra da Figura 3 é expressa segundo:

$$\varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 L_2 = \Delta \quad (6)$$

sendo: ε_1 e ε_2 são as deformações no elemento 1 e 2, respectivamente. O modelo de dano contínuo adotado para essa estrutura é representado por meio da lei elástica e da lei de dano (g) apresentadas em (7):

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon$$

$$g = \varepsilon_{eq} - R(\omega) \therefore g = \varepsilon_{eq} - \frac{\varepsilon_{cr}\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \omega(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_u)} \quad (7)$$

onde: ε_u representa a deformação última do modelo; ε^ω a deformação de dano; ε_{cr} a deformação para a tensão crítica, ε_{eq} é a deformação equivalente, ω a variável de dano e $R(\omega)$ a função de resistência ao dano. Como a função g é uma função linear dependente de ε , a lei constitutiva passa a ser definida por duas funções lineares, uma para cada barra. Na Figura 4 são apresentada ambas as parábolas e o estado da estrutura em um determinado instante t , sendo a curva azul definida para o elemento 1 e a curva vermelha para o elemento 2. O equilíbrio é determinado pelas linhas horizontais pontilhadas e indica tensões iguais em ambos os elementos.

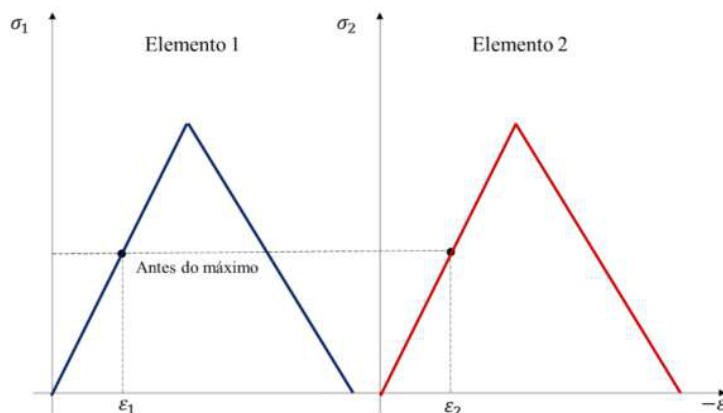


Figura 4 - Equação constitutiva e de equilíbrio.

Fonte: Autor.

No início da análise estrutural os pontos nos dois elementos estão localizados antes do pico da curva, no seu lado esquerdo. Ao realizar incrementos de deslocamentos, de modo que a deformação no elemento 1 encontre-se ainda em sua fase elástica (Figura 5), haverá apenas uma solução capaz de satisfazer, ao mesmo tempo, a equação local do elemento 2 e a equação de equilíbrio. Sendo essa solução o ponto onde a deformação no elemento 2 é igual à do elemento 1.

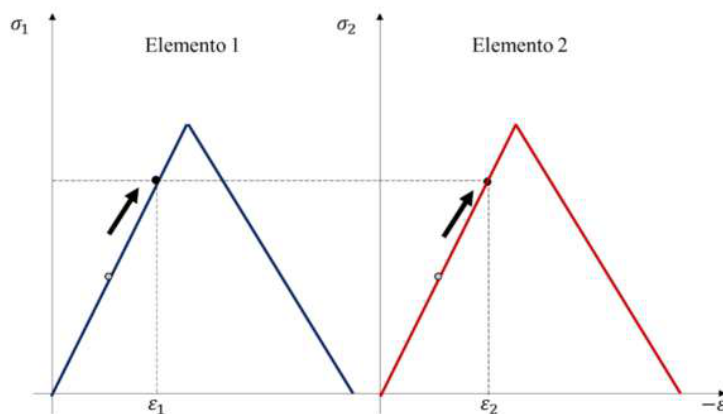


Figura 5 - Solução para o caso onde ambos os elementos estão na fase elástica.

Fonte: Autor

Ao continuar o incremento de deslocamento, chega-se ao momento onde a deformação nos dois elementos atinge o valor de pico, caracterizando a fase de início de amolecimento da estrutura. Conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), com a estrutura nessa etapa, o próximo incremento de deslocamento provocará uma redução na tensão de ambos os elementos.

Para que essa situação aconteça e a lei de equilíbrio seja atendida, duas situações diferentes podem acontecer. Na primeira, chamada de solução homogênea, ambos os elementos seguirão a curva constitutiva de carregamento, de modo que a deformação e o dano, tanto no elemento 1 quanto no elemento 2 serão os mesmos. Já no segundo caso, definido como solução localizada, a deformação do elemento 1 tende a crescer, enquanto para o elemento 2 acontecerá um descarregamento elástico. Nesse caso ocorre uma redução da deformação no segundo elemento, mesmo que o deslocamento total da barra aumente. Para essa situação, observa-se que a deformação e o dano tendem a se concentrar apenas no elemento 1. De acordo ainda com os autores, em casos experimentais a solução encontrada sempre é a localizada, ou seja, fisicamente a solução homogênea é impossível. A Figura 6 mostra o comportamento para a solução localizada e homogênea.

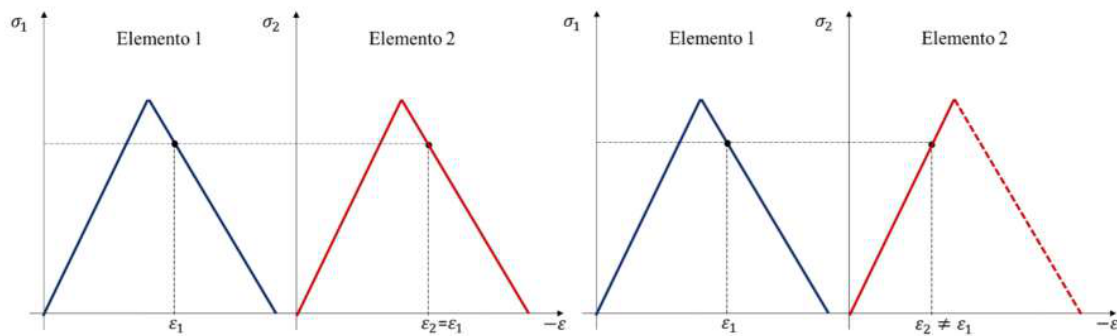


Figura 6 – a) Solução homogênea e b) Solução localizada.

Fonte: Autor.

Na Figura 7 tem-se representado o gráfico $P \times \Delta$ para soluções obtidas para diferentes valores de L_1 . Quando o dano atinge o seu valor limite o deslocamento máximo tende a um valor de $\epsilon_u L_1$. Sendo os comprimentos L_1 e L_2 dois valores arbitrários a barra pode ser dividida em 2 trechos por meio de infinitas possibilidades, desde que se mantenha a soma de suas partes igual a L . Como o deslocamento na situação localizada é dependente do valor de L_1 , para cada valor tomado será obtido um diferente deslocamento final. Desse modo, o problema fica dependente da subdivisão que for escolhida para realização da análise.

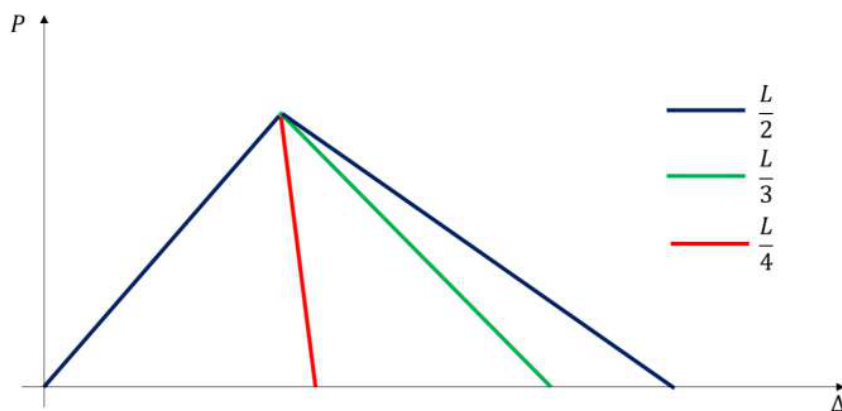


Figura 7 - Gráfico de força x deslocamento.

Fonte: Autor

Para demonstrar como a TDC contorna o problema de dependência de malha, Amorim (2016) reescreve a hipótese de equivalência de deformações apresentada por Lemaitre e Chaboche (1990), em função dos alongamentos do elemento, transformando ela agora em uma hipótese de equivalência de alongamentos. Para observar como essa modificação conduz a resultados objetivos, volta-se novamente a barra engastada da Figura 3, porém toma-se o elemento finito de dois nós com uma banda de localização (j) enquanto o resto do elemento permanece em sua fase elástica (Figura 8).

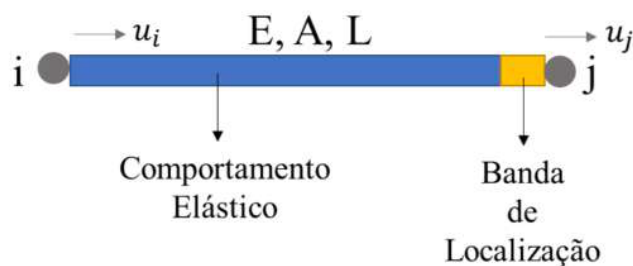


Figura 8 - Elemento finito com adição de banda de localização.

Fonte: Amorim (2016).

A banda de localização será responsável por concentrar todos os microdefeitos que possam acontecer no elemento. Sua espessura inicial é nula e será incrementada conforme se realiza a análise numérica. Como citado por Amorim (2016), a ideia por trás da banda de localização é semelhante ao conceito de rótula inelástica utilizado na TDC para pórticos e arcos. Os deslocamentos para o elemento da Figura 8, são expressos via vetor:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

onde: u_j é o deslocamento no nó j , u_i é o deslocamento no nó i e $\{q\}$ o vetor de deslocamentos nodais.

Conforme comentado anteriormente, Amorim (2016) propõe a substituição da variável ε pelo alongamento δ . A relação cinemática que expressa a relação entre deslocamentos e alongamentos é expressa via:

$$\delta = [B^0]\{q\} \therefore [B^0] = [-1 \quad 1] \quad (9)$$

sendo $[B^0]$ a matriz cinemática para o elemento unidimensional.

O vetor de forças internas $\{Q\}$ passa a ser determinado como:

$$\{Q\} = A[B^0]^T \sigma \quad (10)$$

onde σ é a tensão de Cauchy.

A hipótese de equivalência de alongamentos é determinada por Amorim (2016), conforme se vê a seguir:

$$\delta = \delta^e + \delta^d \therefore \delta^e = \frac{L}{E} \sigma \quad (11)$$

onde, δ é o alongamento total do elemento, δ^e alongamento da parte elástica e δ^d alongamento da banda de localização, relacionado ao dano. Ao adotar esse hipótese, altera-se também a lei de dano apresentada em (7), expressando ela por meio da nova variável cinemática:

$$g = \sigma - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{\delta^d}{\delta^u} \right) \leq 0 \quad (12)$$

onde σ_{cr} e δ^u são a tensão crítica e o alongamento último, respectivamente. A partir dessas considerações o elemento finito mostrado na Figura 8, gera curvas *força vs deslocamento* independentes de malha (Figura 9), como se confirma analiticamente e numericamente nos trabalhos de Amorim (2016), Amorim *et al* (2018) e Oliveira (2020). Cabe dizer que o modelo até aqui demonstrado não admite a presença de deformações plásticas e nem de dano distribuído

no elemento. Assim, os casos estudados são representados por um estado binário, ou elástico ou com presença de dano concentrado, para descrever a fase de amolecimento da estrutura. Por meio da Figura 9 é demonstrado o comportamento da lei de dano após sua ativação, e o gráfico *força vs deslocamento* para a barra engastada.

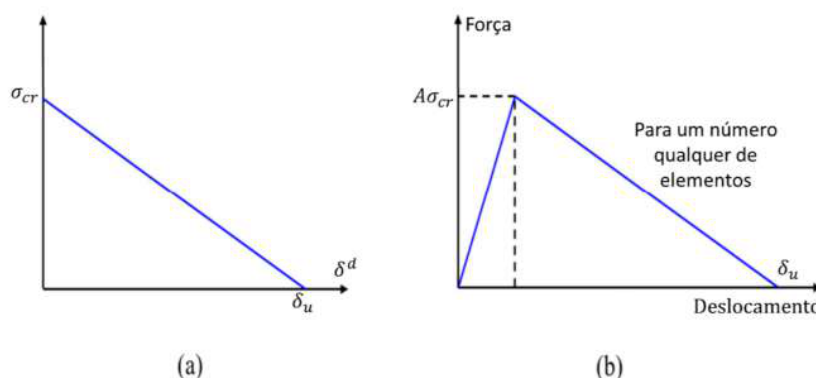


Figura 9 - (a) Resposta inelástica do material e (b) solução numérica via TDC para uma barra sob compressão.

Fonte: Amorim (2016).

Amorim (2016) explica ainda sobre o porquê desse novo elemento produzir resultados únicos enquanto os da mecânica do dano clássica falham nessa tarefa. Tais considerações são importantes, pois são a base da generalização da MDCX para meios bi e tridimensionais. Conforme o autor, o ponto principal, como já destacado anteriormente, ocorre por meio da troca da variável cinemática (deformação por alongamento). No modelo de dano clássico, quando dano for igual a um, tem-se tensão igual a zero e apenas a presença do termo de deformação por dano ε^ω . Analisando a lei de dano, para essa situação a deformação por dano ε^ω é igual a deformação última ε_u . O alongamento último encontrado nesse caso, será igual a deformação última multiplicada pelo comprimento do elemento finito, situação igual a solução localizada apresentado por Flórez-López, Marante e Picón (2015). Já no modelo de dano concentrado, como a lei de dano agora está dependente dos alongamentos da banda, a tensão será igual a zero e o dano igual a um, quando o alongamento de dano da banda de localização for igual ao seu alongamento último δ_u . Note que os alongamentos das bandas são variáveis independentes do comprimento de seu elemento, desse modo para qualquer malha escolhida, o mesmo critério de falha do material será mantido.

3.3. ELEMENTO FINITO REGULAR DA MDCX

O início da MDCX ocorreu com Amorim (2016), introduzindo os conceitos das bandas de localização e da hipótese de equivalência em alongamentos para elementos finitos de chapa e placa. Com essas modificações, tornou-se possível adicionar novas variáveis internas ao modelo de não linearidade física, substituindo as equações constitutivas, antes dependentes das deformações, por funções relativas aos alongamentos. Nesta seção será discutido o procedimento aplicado para o elemento finito quadrilateral elástico regular (Figura 10) utilizado por Amorim (2016), para a análise de chapas.

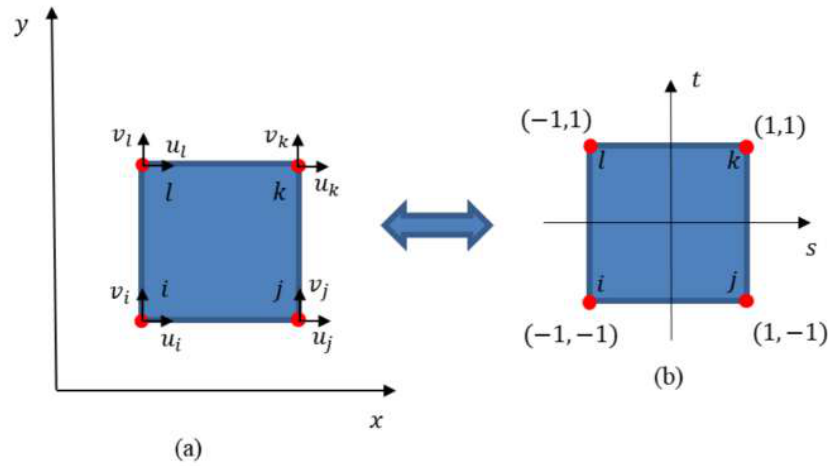


Figura 10 – (a) Elemento finito quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço isoparamétrico.

Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

O elemento finito clássico de 4 nós para um meio bidimensional e contínuo, possui sua dedução definida em função dos seus deslocamentos nodais $\{q\}$ como apresentado em (13).

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon(x, y)\} &= [B(x, y)]\{q\} \\
 \{\sigma(x, y)\} &= [H]\{\varepsilon(x, y)\} = [H][B(x, y)]\{q\} \\
 \{Q\} &= \iiint_V [B(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \\
 [K] &= \iiint_V [B(x, y)]^T [H][B(x, y)] dV
 \end{aligned} \tag{13}$$

onde: $\{\varepsilon(x, y)\}$ é o vetor de deformações, $\{\sigma(x, y)\}$ expressa o vetor de tensões, $\{Q\}$ configura o vetor de forças internas, $[H]$ é a matriz de coeficientes elásticos, $[B(x, y)]$ a matriz de transformação cinemática e $[K]$ a matriz de rigidez. Para esse elemento o campo de deslocamentos é definido através do triângulo de Pascal linear, como apresentado em (14):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned} \quad (14)$$

E por consequência o tensor de deformações para qualquer ponto interno do elemento passa a ser expresso por (15).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_3y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_2 + b_3x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + a_3x + b_1 + b_3y = c + b_3y + a_3x \end{aligned} \quad (15)$$

Como pode ser observado o campo de deformações é determinado em função de cinco constantes independentes (a_1, a_3, b_1, b_3 e c). A partir dessa observação, Amorim (2016) propôs que o campo de deformações, pode ser representado segundo os alongamentos das barras de uma treliça equivalente (Figura 11), composta por 5 barras denominadas extensômetros numéricos ou “*numexes*”, que conectam os quatro vértices do quadrilátero.

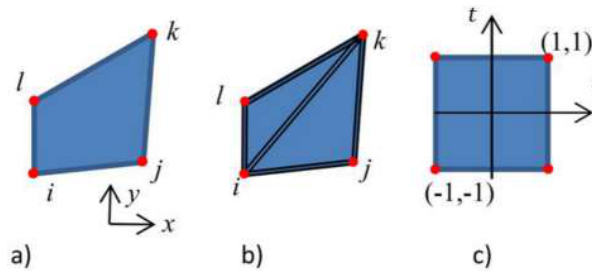


Figura 11- a) Elemento clássico de 4 nós, b) treliça de 5 barras equivalente e c) espaço de referência.

Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

A utilização dessa analogia de treliça permite, de maneira mais simples, a formulação do elemento finito de chapa da MDCX. Os alongamentos dos *numexes* são computados no vetor de deformações generalizadas $\{\delta\}^T = [\delta_{ij}, \delta_{ik}, \delta_{il}, \delta_{jk}, \delta_{lk}]$, onde δ_{ij} representa o alongamento da barra entre os nós i e j , e assim sucessivamente. Note que qualquer combinação de cinco *numexes* seria suficiente para definir o estado de deformação do elemento. Por exemplo, a diagonal $j - l$ poderia ter sido escolhida ao invés da $i - k$, ou em substituição a qualquer das outras barras laterais. A equação cinemática entre os deslocamentos nodais e as deformações generalizadas é dada por:

$$\{\delta\} = [b]\{q\} \quad (16)$$

sendo $[b]$ a matriz de transformação cinemática para o elemento regular, expressa no seu espaço de referência por:

$$[b] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

De maneira semelhante as deformações do elemento podem ser expressas em função das deformações generalizadas via:

$$\{\varepsilon\} = [T]\{\delta\} \quad (18)$$

e

$$[B] = [T][b] \quad (19)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação dos *numexes* e $[B]$ a matriz cinemática convencional, ambas são apresentadas em função das suas coordenadas cartesianas no Apêndice A. Para o espaço de referência a matriz $[T]$ é definida segundo:

$$[T] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 & 1+s \\ 0 & 0 & 1-t & 1+t & 0 \\ -(1+t) & 2\sqrt{2} & -(1+s) & s-1 & t-1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Tem-se ainda que as tensões, forças internas e a matriz de rigidez antes expressas em função do campo de deformações do elemento, são agora redefinidas em função das deformações generalizadas:

$$\begin{aligned} \{\sigma(x, y)\} &= [H][T(x, y)]\{\delta\} \\ \{Q\} &= [b]^T \iiint_V [T(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \\ [K] &= [b]^T \left(\iiint_V [T(x, y)]^T [H][T(x, y)] dV \right) [b] \end{aligned} \quad (21)$$

Destaca-se que os tensores encontrados em (13) e (21) são idênticos. E como dito anteriormente buscam apenas tornar a formulação numérica mais prática para incorporação das novas variáveis internas da MDCX.

As equações apresentadas em (21) são obtidas para a condição de material elástico. Os efeitos do processo de danificação do material serão incorporados ao elemento finito (Figura 11), através das bandas de cisalhamento. Em seu trabalho, Amorim (2016), propôs a adição de quatro bandas de localização fixadas nos lados do elemento finito quadrilateral (arestas: $i-j$, $j-k$, $i-l$ e $l-k$), como mostrado na Figura 12. Devido as funções de forma do elemento, o campo de tensões apresenta-se como linear, sendo assim, a variação da espessura de banda entre nós também apresentará comportamento linear. As bandas inicialmente possuem espessura igual a zero, ao passo que a análise avança, são obtidos alongamentos adicionais relacionados ao dano localizado, que por sua vez incrementarão as espessuras iniciais das bandas ao qual estão ligados. Para o espaço de referência, a relação entre alongamentos de dano e as espessuras de banda utilizadas por Amorim (2016), tem a seguinte forma:

$$\{\delta^d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{e_{it}}{2} \\ e_{it} \\ e_{jt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e_{is}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e_{ks} \\ 0 \\ 0 \\ e_{ks} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{e_{kt}}{2} \\ e_{lt} \\ e_{kt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e_{is}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{ls} \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde e_{it} é a espessura de banda no nó i no lado ij , e_{js} a espessura do nó j no lado jk e assim por diante. O vetor $\{\delta^d\}$ expresso em coordenadas cartesianas pode ser encontrado no Apêndice A.

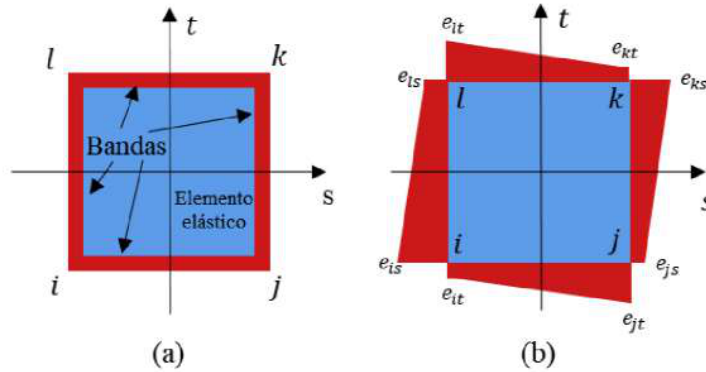


Figura 12 – a) Indicação bandas de localização elemento 4 nós e b) espessuras das bandas.

Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

Além da adição das bandas de localização, Amorim (2016) estende a hipótese de equivalência de alongamentos para o caso bidimensional. Os alongamentos totais dos *numexes* $\{\delta\}$ passam a ser iguais ao somatório dos alongamentos do elemento elástico $\{\delta^e\}$ mais os alongamentos de dano $\{\delta^d\}$. A lei elástica passa a ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \{\delta^d\} + \{\delta^e\} \\ \{\sigma\} &= [H][T]\{\delta - \delta^d\} \end{aligned} \quad (23)$$

com $\{\sigma\}$ expressa o vetor de tensões nos *numexes*.

Ainda são adicionadas as equações constitutivas (23) oito funções de danos, uma para cada espessura de banda em cada nó do elemento. As equações propostas por Amorim (2016), consistiam de modelos lineares de dano, similar ao utilizado em (12).

$$\begin{aligned}
g_{is} &= \sigma_{n_{is}} - \sigma_{cr_{is}} \left(1 - \frac{e_{is}}{\delta_{u_{is}}} \right) \leq 0 ; g_{it} = \sigma_{n_{it}} - \sigma_{cr_{it}} \left(1 - \frac{e_{it}}{\delta_{u_{it}}} \right) \leq 0 \\
g_{js} &= \sigma_{n_{js}} - \sigma_{cr_{js}} \left(1 - \frac{e_{js}}{\delta_{u_{js}}} \right) \leq 0 ; g_{jt} = \sigma_{n_{jt}} - \sigma_{cr_{jt}} \left(1 - \frac{e_{jt}}{\delta_{u_{jt}}} \right) \leq 0 \\
g_{ks} &= \sigma_{n_{ks}} - \sigma_{cr_{ks}} \left(1 - \frac{e_{ks}}{\delta_{u_{ks}}} \right) \leq 0 ; g_{kt} = \sigma_{n_{kt}} - \sigma_{cr_{kt}} \left(1 - \frac{e_{kt}}{\delta_{u_{kt}}} \right) \leq 0 \\
g_{ls} &= \sigma_{n_{ls}} - \sigma_{cr_{ls}} \left(1 - \frac{e_{ls}}{\delta_{u_{ls}}} \right) \leq 0 ; g_{lt} = \sigma_{n_{lt}} - \sigma_{cr_{lt}} \left(1 - \frac{e_{lt}}{\delta_{u_{lt}}} \right) \leq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

onde: g_{is} é a lei de dano para o nó i na direção s , g_{it} representa a lei de dano para o nó i na direção t , $\sigma_{n_{is}}$ equivale a tensão no nó i na direção s , $\sigma_{n_{it}}$ corresponde a tensão do nó i na direção t , $\sigma_{cr_{is}}$ constitui a tensão crítica para o nó i na direção s , $\sigma_{cr_{it}}$ expressa a tensão crítica para o nó i na direção t , e_{is} significa a espessura de banda no nó i para a direção s , e_{it} configura a espessura de banda no nó i para a direção t , $\delta_{u_{is}}$ é o alongamento último para o nó i na direção s e $\delta_{u_{it}}$ representa o alongamento último para o nó i na direção t .

Por último, tem-se as equações de equilíbrio em função dos alongamentos dos *numexes*:

$$\begin{aligned}
\{\delta\} &= [b]\{q\} \\
\{Q\} &= [b]^T \iiint_V [T(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV
\end{aligned} \tag{25}$$

Para comprovar a validade do modelo proposto, Amorim (2016) analisou a chapa apresentada na Figura 13. A chapa sólida formada em “L” está fixada na base e submetida a um carregamento monotônico crescente no ponto A. A lei de dano adotada foi utilizada conforme as equações apresentadas em (24). Como critério de parada adotado, definiu-se o término da análise o momento onde alcançou-se alongamento de banda último para os elementos no interior do sólido. As propriedades do material e as dimensões são apresentadas na Figura 13.

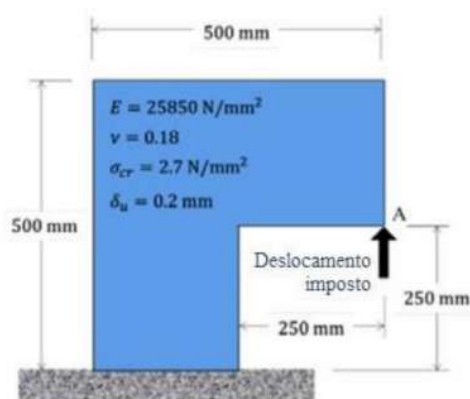


Figura 13 – Chapa sólida em L

Fonte: Amorim (2016).

Em seu trabalho, Amorim (2016), estudou a convergência via seis malhas regulares, compostas por 12, 48, 108, 192, 300 e 432 elementos. Para cada malha o tamanho do elemento finito adotado foi, respectivamente, igual a: 12, 48, 108, 192, 300 e 432 elementos.

Observando a curva força vs. deslocamento apresentada na Figura 14, percebe-se que ocorre convergência de resultados para o exemplo analisado por Amorim (2016). Ao passo que o número de elementos presentes em cada malha aumenta, o modelo numérico tende a alcançar uma solução única, fato que não ocorre para os modelos numéricos da Mecânica do Dano Contínuo em sua forma clássica.

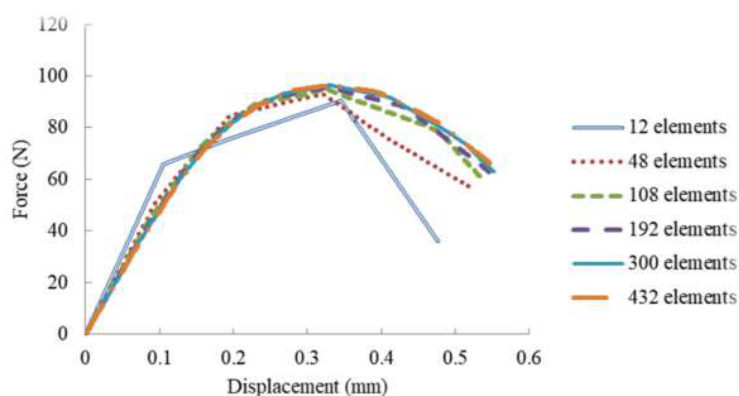


Figura 14 - Curva força vs deslocamento.

Fonte: Amorim (2016).

Na Figura 15 está apresentada a configuração deformada para duas malhas. A escala de cores representa a espessura da banda, em milímetros. Como discutido por Amorim (2016),

através da formulação proposta não é necessário definir previamente o ponto ou região onde a estrutura está mais sujeita ao surgimento das bandas de localização e a falha estrutural, pois, o próprio modelo tem a capacidade de identificar as zonas de concentração de esforços. Para o exemplo em questão, nota-se que a banda que leva ao colapso final se inicia no canto interno do sólido, sendo condizente com o que se é esperado para uma estrutura real submetida a essas condições de contorno. Essa capacidade é uma das principais características do modelo proposto, tendo em vista que métodos como os baseados na Mecânica da Fratura, por exemplo, conseguem reproduzir resultados numéricos precisos, porém para isso, faz-se necessário a determinação da zona de falha, o que se torna extremamente difícil para problemas complexos.

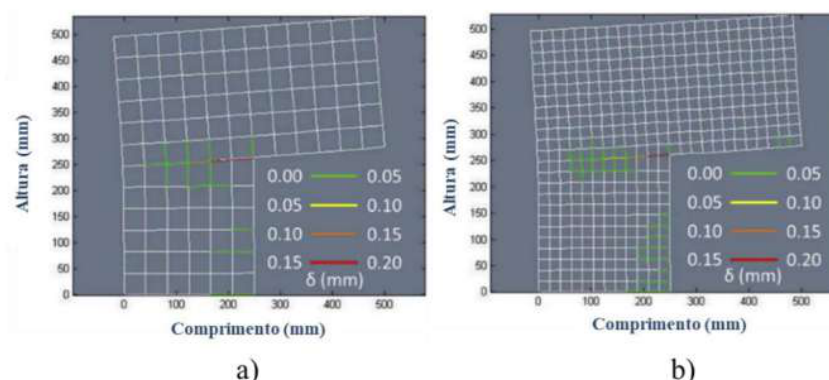


Figura 15 - Malha deformada a) com 75 elementos e b) com 432 elementos.

Fonte: Adaptada de Amorim (2016).

3.4. ELEMENTO IRREGULAR DA MDCX

Oliveira (2020), buscando aprimorar o elemento finito proposto por Amorim (2016), expandiu a formulação para um elemento finito quadrilateral isoparamétrico. Além de substituir duas das bandas laterais por bandas diagonais internas, visando melhorar a capacidade do elemento finito em identificar regiões de falha ainda mais complexas. Uma representação do elemento finito final proposto por Oliveira (2020) é encontrada na Figura 16.

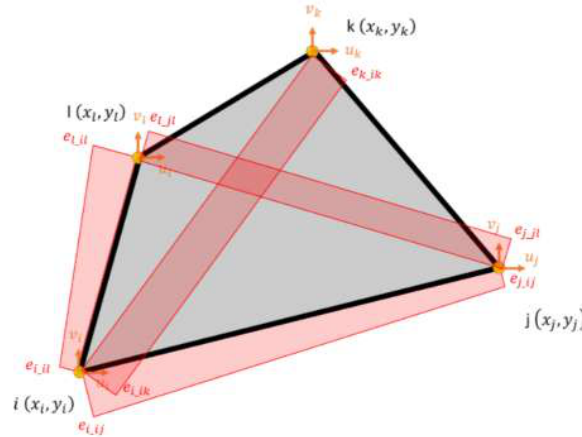


Figura 16 - Elemento finito isoparamétrico com 4 bandas.

Fonte: Oliveira (2020).

Um resumo da formulação completa adotada por Oliveira (2020), pode ser encontrado na Figura 17, onde estão destacadas as equações do problema global e local, assim como as equações cinemáticas, de equilíbrio e constitutivas.

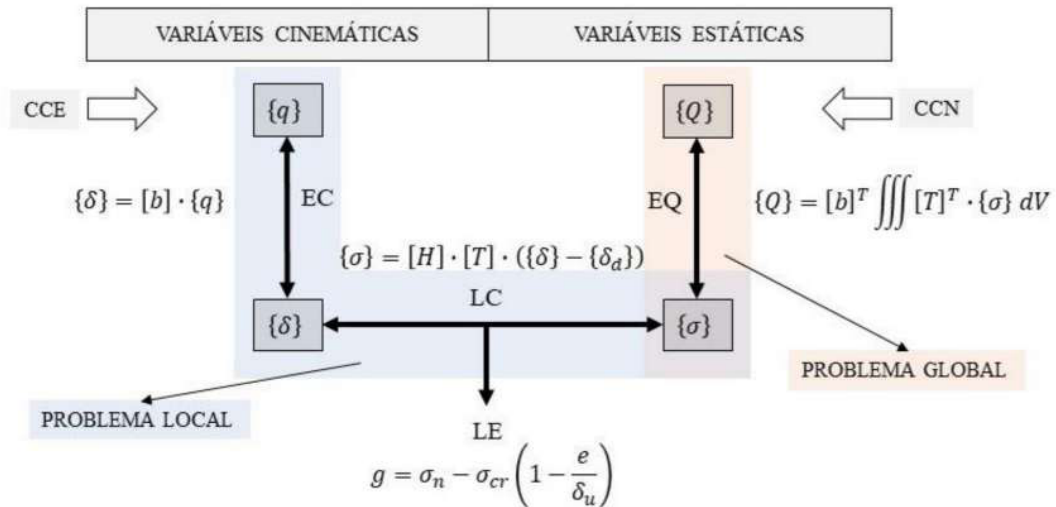


Figura 17 - Esquema geral do modelo MDCX

Fonte: Oliveira (2020).

O procedimento de implementação utilizado por Oliveira (2020), segue os mesmos passos realizados por Amorim (2016), com alteração apenas no vetor de alongamentos de dano $\{\delta^d\}$ e das leis de evolução do dano, visto que, ocorreu a substituição das bandas jk e lk pelas bandas ik e jl (Figura 16). O vetor $\{\delta^d\}$ expresso em função de coordenadas cartesianas pode

ser encontrado no Apêndice B. As novas leis de evolução para o novo elemento finito ficam definidas por:

$$\begin{aligned}
 g_{i,ij} &= \sigma_{n_{i,ij}} - \sigma_{cr_{i,ij}} \left(1 - \frac{e_{i,ij}}{\delta_{u_{i,ij}}} \right) \leq 0 ; g_{j,ij} = \sigma_{n_{j,ij}} - \sigma_{cr_{j,ij}} \left(1 - \frac{e_{j,ij}}{\delta_{u_{j,ij}}} \right) \leq 0 \\
 g_{i,il} &= \sigma_{n_{i,il}} - \sigma_{cr_{i,il}} \left(1 - \frac{e_{i,il}}{\delta_{u_{i,il}}} \right) \leq 0 ; g_{l,il} = \sigma_{n_{l,il}} - \sigma_{cr_{l,il}} \left(1 - \frac{e_{l,il}}{\delta_{u_{l,il}}} \right) \leq 0 \\
 g_{i,ik} &= \sigma_{n_{i,ik}} - \sigma_{cr_{i,ik}} \left(1 - \frac{e_{i,ik}}{\delta_{u_{i,ik}}} \right) \leq 0 ; g_{k,ik} = \sigma_{n_{k,ik}} - \sigma_{cr_{k,ik}} \left(1 - \frac{e_{k,ik}}{\delta_{u_{k,ik}}} \right) \leq 0 \\
 g_{j,jl} &= \sigma_{n_{j,jl}} - \sigma_{cr_{j,jl}} \left(1 - \frac{e_{j,jl}}{\delta_{u_{j,jl}}} \right) \leq 0 ; g_{l,jl} = \sigma_{n_{l,jl}} - \sigma_{cr_{l,jl}} \left(1 - \frac{e_{l,jl}}{\delta_{u_{l,jl}}} \right) \leq 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

sendo: $g_{i,ij}$ é a lei de dano para o nó i da banda ij , $g_{j,ij}$ é a lei de dano para o nó j da banda ij , $g_{i,ik}$ é a lei de dano para o nó i da banda ik , $g_{k,ik}$ é a lei de dano para o nó k da banda ik , $g_{i,il}$ é a lei de dano para o nó i da banda il , $g_{l,il}$ é a lei de dano para o nó l da banda il , $g_{j,jl}$ é a lei de dano para o nó j da banda jl e $g_{l,jl}$ é a lei de dano para o nó l da banda jl ; $\sigma_{n_{i,ij}}$ equivale a tensão no nó i para a banda ij , $\sigma_{n_{j,ij}}$ equivale a tensão no nó j para a banda ij , $\sigma_{n_{i,ik}}$ equivale a tensão no nó i para a banda ik , $\sigma_{n_{k,ik}}$ equivale a tensão no nó k para a banda ik , $\sigma_{n_{i,il}}$ equivale a tensão no nó i para a banda il , $\sigma_{n_{l,il}}$ equivale a tensão no nó l para a banda il , $\sigma_{n_{j,jl}}$ equivale a tensão no nó j para a banda jl e $\sigma_{n_{l,jl}}$ equivale a tensão no nó l para a banda jl ; $\sigma_{cr_{i,ij}}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda ij , $\sigma_{cr_{j,ij}}$ constitui a tensão crítica para o nó j da banda ij , $\sigma_{cr_{i,ik}}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda ik , $\sigma_{cr_{k,ik}}$ constitui a tensão crítica para o nó k da banda ik , $\sigma_{cr_{i,il}}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda il , $\sigma_{cr_{l,il}}$ constitui a tensão crítica para o nó l da banda il , $\sigma_{cr_{j,jl}}$ constitui a tensão crítica para o nó j da banda jl e $\sigma_{cr_{l,jl}}$ constitui a tensão crítica para o nó l da banda jl ; $e_{i,ij}$ significa a espessura de banda no nó i para a banda ij , $e_{j,ij}$ significa a espessura de banda no nó j para a banda ij , $e_{i,ik}$ significa a espessura de banda no nó i para a banda ik , $e_{k,ik}$ significa a espessura de banda no nó k para a banda ik , $e_{i,il}$ significa a espessura de banda no nó i para a banda il , $e_{l,il}$ significa a espessura de banda no nó l para a banda il , $e_{j,jl}$ significa a espessura de banda no nó j para a banda jl e $e_{l,jl}$ significa a espessura de banda no nó l para a banda jl ; $\delta_{u_{i,ij}}$ é o alongamento último para o nó i da banda ij , $\delta_{u_{j,ij}}$ é o alongamento último para o nó j da banda ij , $\delta_{u_{i,ik}}$ é o alongamento

último para o nó i da banda ik , $\delta_{u_{k,ik}}$ é o alongamento último para o nó k da banda ik , $\delta_{u_{i,il}}$ é o alongamento último para o nó i da banda il , $\delta_{u_{l,il}}$ é o alongamento último para o nó l da banda il , $\delta_{u_{j,jl}}$ é o alongamento último para o nó j da banda jl e $\delta_{u_{l,jl}}$ é o alongamento último para o nó l da banda jl .

Para testar o desempenho desse elemento finito, Oliveira (2020) realizou um estudo de convergência para o mesmo exemplo e com as mesmas seis malhas utilizadas (Figura 13) por Amorim (2016). Segundo Oliveira (2020), apesar da nova formulação permitir malhas com elementos finitos irregulares, escolheu-se o uso de malhas regulares nesta fase inicial de estudo para possibilitar uma comparação completa com os resultados obtidos por Amorim (2016). Na Figura 18 estão os gráficos força vs. deslocamento para as malhas usadas, onde o numeral após a letra “L” significa o número de elementos finitos utilizados na análise e a letra “N” ao final serve para identificar que a simulação é referente ao novo elemento proposto por Oliveira (2020).

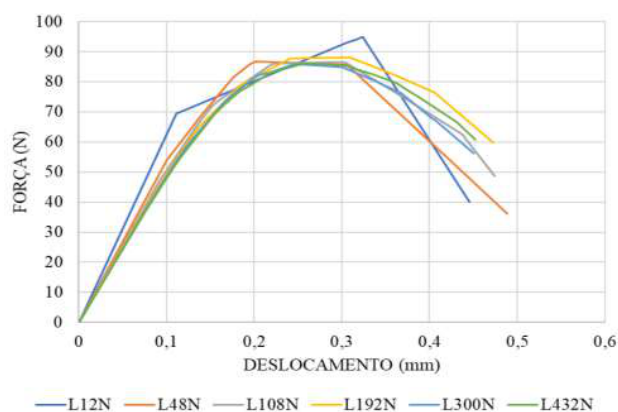


Figura 18 - Estudo de convergência de Oliveira (2020).

Fonte: Oliveira (2020).

Assim, como no caso anterior, percebe-se que a análise tende a ter convergência dos resultados para uma solução única, na medida em que se refina a malha. Porém, ao se comparar os resultados aos obtidos por Amorim (2016), pode-se observar uma forte distorção no valor de carga última encontrada, fato esse que não deveria ocorrer, já que se trata do mesmo problema físico apenas com elementos finitos diferentes. A Figura 19 traz a análise comparativa das duas análises para a malha com 432 elementos, onde a curva L432A trata-se dos resultados encontrados em Amorim (2016) e a curva L432N os de Oliveira (2020).

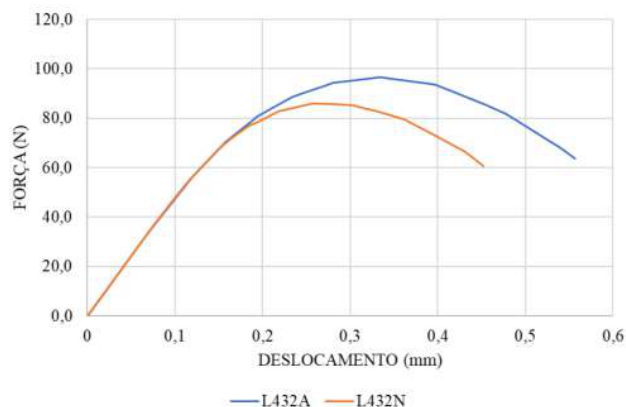


Figura 19 - Análise comparativa entre os resultados de Oliveira (2020) e Amorim (2016).

Fonte: Oliveira (2020).

Segundo Oliveira (2020), essa divergência pode ser explicada devido a própria constituição do elemento finito usado em cada análise, mais precisamente em relação ao local de previsão de formação das bandas de localização. Como o elemento proposto por Oliveira (2020) possui bandas apenas em dois dos seus lados (Figura 16), a depender da orientação de nós adotada na geração da malha, pode-se obter um resultado final tendencioso. Durante a análise quando a concentração de esforços não encontra um caminho previsto de bandas na direção da formação da falha, o programa busca a banda mais próxima, que no caso do novo elemento proposto é uma banda diagonal, gerando assim uma tendência que leva a resultados diferentes se comparado com o elemento de Amorim (2016), que possui bandas em todos os lados do elemento finito (Figura 12). Tal fenômeno fica mais nítido ao observar as malhas deformadas apresentadas na Figura 20.

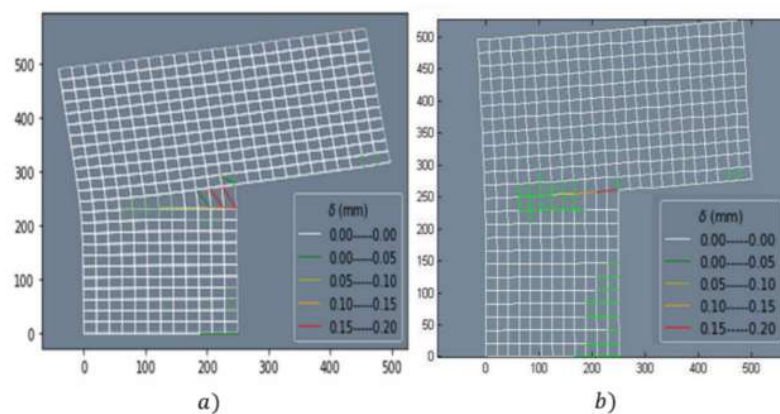


Figura 20 - Malha deformada: a) Oliveira (2020) e b) Amorim (2016).

Fonte: Adaptada de Oliveira (2020)

Como dito por Oliveira (2020), imaginando que a estrutura está dividida em quadrantes, o surgimento da primeira banda ocorre no elemento do canto superior direito do quadrante inferior esquerdo. Na análise da direita, feita por Amorim (2016), obtém-se uma banda prevista na região superior, assim, a região de falha inicia-se a partir desse ponto, como esperado. Já na análise da esquerda, que faz uso do elemento com bandas diagonais, por não encontrar banda prevista na região superior o programa compensa essa falha ativando a banda do lado inferior e também a diagonal, como forma de compensar o caminho esperado da falha que se daria no local da banda superior inexistente.

Buscando atestar o que foi concluído, Oliveira (2020) utilizando das mesmas malhas do exemplo anterior, modifica as condições de contorno do problema como mostrado na Figura 21.

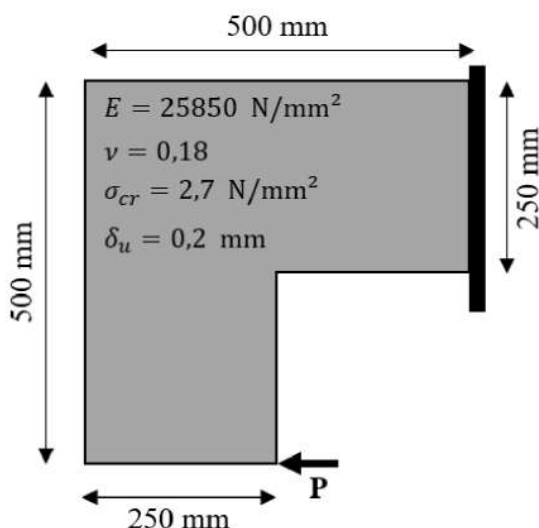


Figura 21 - Chapa em L com condições de contorno modificadas.

Fonte: Oliveira (2020)

Conforme Oliveira (2020), nesse caso, a lateral na região direita está fixada e foi imposto um deslocamento monotônico e crescente no ponto P. Fisicamente trata-se do mesmo problema estudado anteriormente já que a estrutura apresenta simetria nas dimensões, a diferença está em qual elemento será ativado primeiro, sendo nesse caso o elemento inferior esquerdo do quadrante superior direito. Como na formulação de Oliveira (2020), existe a previsão de formação de banda na lateral esquerda contorna-se o problema de distorção no valor da carga última obtida, assim os resultados passam a ser compatíveis com os apresentados por Amorim (2016), como pode ser visto por meio da Figura 22.

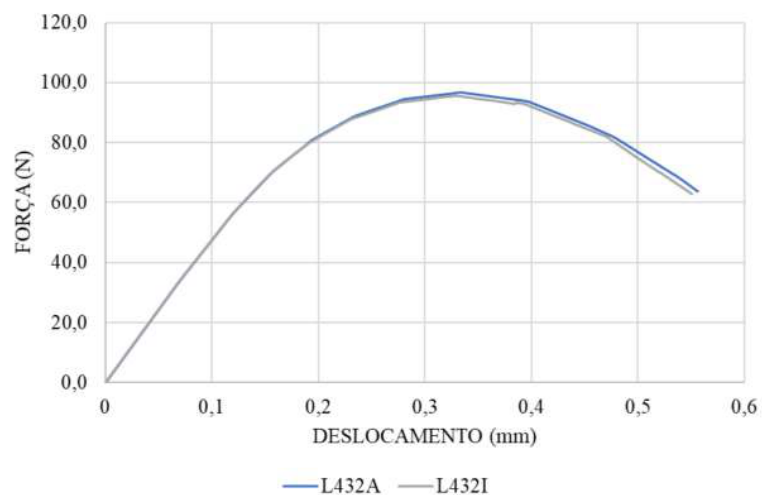


Figura 22 - Análise comparativa para as condições de contorno modificadas.

Fonte: Oliveira (2020)

A estrutura deformada apresentada na Figura 23, confirma as conclusões obtidas até aqui, tendo em vista uma formação de superfície de falha conforme o esperado e visto nas análises de Amorim (2016).

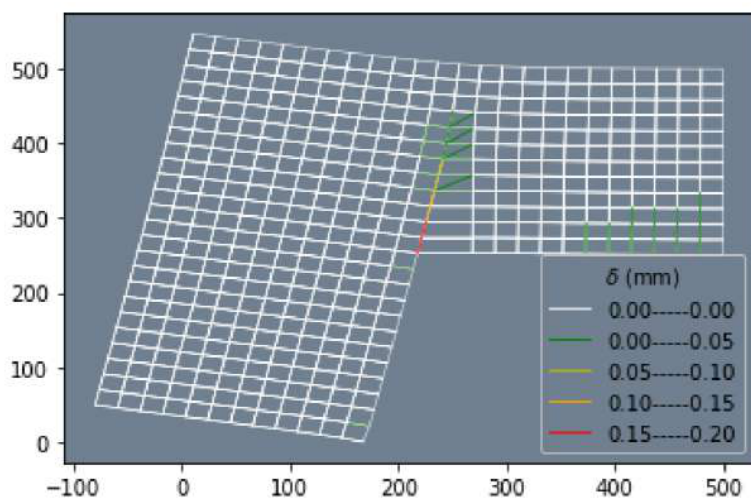


Figura 23 - Malha deformada exemplo modificado

Fonte: Oliveira (2020)

Como concluído por Oliveira (2020), a formulação por ele proposta segue o caminho dos resultados de Amorim (2016), obtendo objetividade de solução e convergência de

resultados para uma solução única ao passo que se utiliza malhas mais refinadas. Entretanto, a retirada das bandas laterais contribuiu para eventuais erros de análise, pois gera caminhos de formação de bandas tendenciosos, como foi demonstrado nos exemplos numéricos mostrados através da Figura 19 e Figura 22.

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, será apresentado o elemento finito proposto neste trabalho. Na primeira parte demonstra-se as diferenças trazidas neste trabalho em relação ao de Amorim (2016) e Oliveira (2020). Após isso, aborda-se o processo de implementação numérica no Programa Endógeno de Elementos Finitos.

4.1. ELEMENTO PROPOSTO

Como visto no capítulo anterior, a MDCX têm sido bastante exitosa em simular o fenômeno de localização de deformações para chapas bidimensionais em modo I. Nos trabalhos de Amorim (2016) e Oliveira (2020), os problemas de convergência de malha e de determinação da região de falha, foram contornados através da adoção da hipótese de equivalência de alongamentos e de novas variáveis internas (espessuras de banda e “*numexes*”). Entretanto, como destacado pelos autores ainda existem muitos avanços possíveis dentro do desenvolvimento da MDCX.

Segundo Amorim (2016), o elemento finito regular com quatro bandas, tende a se tornar ineficiente nos casos onde a banda de localização tende a cruzar o seu interior. Para essa situação o caminho de crescimento da região de localização, acaba tornando-se enviesado, sendo necessário o uso de malhas bastante refinadas para contornar tal problema. Outro contratempo encontrado é a limitação quanto a utilização de malhas regulares.

O elemento irregular de Oliveira (2020), composto por quatro bandas, é suscetível a eventuais erros na análise numérica, devido ao posicionamento das bandas em apenas dois dos seus lados. Essa condição gera uma forte tendência no caminho de formação da região de falha e obtenção da resposta força vs. deslocamento diferente da esperada, como foi demonstrado no exemplo numérico.

Desse modo, neste trabalho, adota-se um elemento finito (Figura 24) capaz de contornar os problemas encontrados tanto por Amorim (2016) quanto por Oliveira (2020). Para isso, utiliza-se um elemento finito quadrilateral composto por doze bandas de localização, sendo oito delas localizadas em suas laterais, como em Amorim (2016), e outras quatro bandas diagonais internas, assim como as adotadas por Oliveira (2020). Além disso, o elemento finito é deduzido via mapeamento isoparamétrico permitindo a adoção de malhas irregulares.

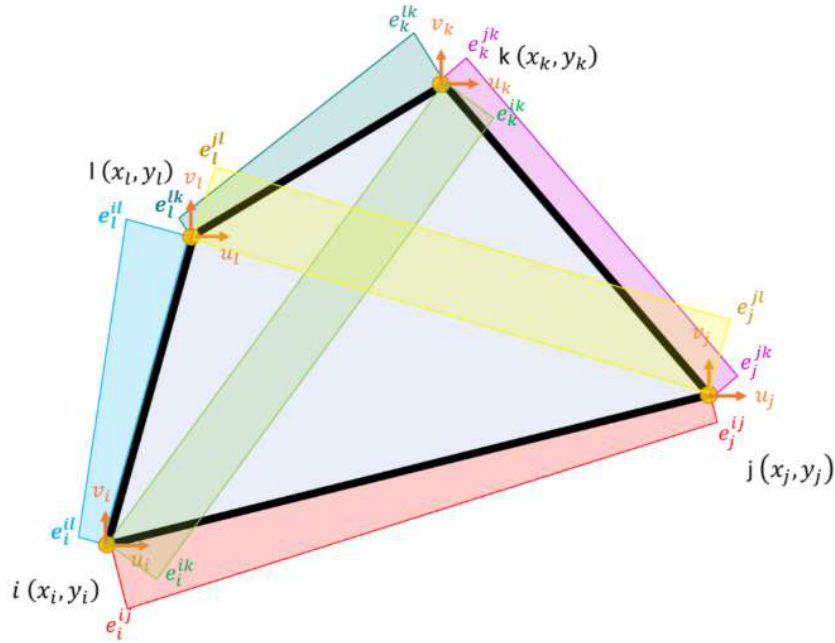


Figura 24 - Elemento finito com 6 bandas.

Fonte: Autor

Para a formulação do novo elemento finito, utilizou-se do mesmo procedimento adotado por Amorim (2016) e Oliveira (2020), apresentado no capítulo 2. Alterando-se apenas os vetores de alongamento relacionados ao dano $\{\delta^d\}$ e as leis de evolução de dano, que agora passam a ser doze. A construção de todos os componentes do vetor $\{\delta^d\}$ está apresentada no Apêndice C. Já as leis de evolução para o novo elemento finito são dadas por:

$$\begin{aligned}
 g_i^{ij} &= \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \left(1 - \frac{e_i^{ij}}{\delta_{u_i}^{ij}}\right) \leq 0; \quad g_j^{ij} = \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \left(1 - \frac{e_j^{ij}}{\delta_{u_j}^{ij}}\right) \leq 0 \\
 g_i^{ik} &= \sigma_i^{ik} - \sigma_{cr_i}^{ik} \left(1 - \frac{e_i^{ik}}{\delta_{u_i}^{ik}}\right) \leq 0; \quad g_k^{ik} = \sigma_k^{ik} - \sigma_{cr_k}^{ik} \left(1 - \frac{e_k^{ik}}{\delta_{u_k}^{ik}}\right) \leq 0 \\
 g_i^{il} &= \sigma_i^{il} - \sigma_{cr_i}^{il} \left(1 - \frac{e_i^{il}}{\delta_{u_i}^{il}}\right) \leq 0; \quad g_l^{il} = \sigma_l^{il} - \sigma_{cr_l}^{il} \left(1 - \frac{e_l^{il}}{\delta_{u_l}^{il}}\right) \leq 0 \\
 g_j^{jl} &= \sigma_j^{jl} - \sigma_{cr_j}^{jl} \left(1 - \frac{e_j^{jl}}{\delta_{u_j}^{jl}}\right) \leq 0; \quad g_l^{jl} = \sigma_l^{jl} - \sigma_{cr_l}^{jl} \left(1 - \frac{e_l^{jl}}{\delta_{u_l}^{jl}}\right) \leq 0 \\
 g_j^{jk} &= \sigma_j^{jk} - \sigma_{cr_j}^{jk} \left(1 - \frac{e_j^{jk}}{\delta_{u_j}^{jk}}\right) \leq 0; \quad g_k^{jk} = \sigma_k^{jk} - \sigma_{cr_k}^{jk} \left(1 - \frac{e_k^{jk}}{\delta_{u_k}^{jk}}\right) \leq 0 \\
 g_l^{lk} &= \sigma_l^{lk} - \sigma_{cr_l}^{lk} \left(1 - \frac{e_l^{lk}}{\delta_{u_l}^{lk}}\right) \leq 0; \quad g_k^{lk} = \sigma_k^{lk} - \sigma_{cr_k}^{lk} \left(1 - \frac{e_k^{lk}}{\delta_{u_k}^{lk}}\right) \leq 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

onde: g_i^{ij} é a lei de dano para o nó i da banda ij , g_j^{ij} é a lei de dano para o nó j da banda ij , g_i^{ik} é a lei de dano para o nó i da banda ik , g_k^{ik} é a lei de dano para o nó k da banda ik , g_i^{il} é a lei de dano para o nó i da banda il , g_l^{il} é a lei de dano para o nó l da banda il , g_j^{jl} é a lei de dano para o nó j da banda jl , g_l^{jl} é a lei de dano para o nó l da banda jl , g_j^{jk} é a lei de dano para o nó j da banda jk , g_k^{jk} é a lei de dano para o nó k da banda jk , g_l^{lk} é a lei de dano para o nó l da banda lk e g_k^{lk} é a lei de dano para o nó k da banda lk ; σ_i^{ij} equivale a tensão no nó i para a banda ij , σ_j^{ij} equivale a tensão no nó j para a banda ij , σ_i^{ik} equivale a tensão no nó i para a banda ik , σ_k^{ik} equivale a tensão no nó k para a banda ik , σ_i^{il} equivale a tensão no nó i para a banda il , σ_l^{il} equivale a tensão no nó l para a banda il , σ_j^{jl} equivale a tensão no nó j para a banda jl e σ_l^{jl} equivale a tensão no nó l para a banda jl , σ_j^{jk} equivale a tensão no nó j para a banda jk , σ_k^{jk} equivale a tensão no nó k para a banda jk , σ_l^{lk} equivale a tensão no nó l para a banda lk e σ_k^{lk} equivale a tensão no nó k para a banda lk ; $\sigma_{cr_i}^{ij}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda ij , $\sigma_{cr_j}^{ij}$ constitui a tensão crítica para o nó j da banda ij , $\sigma_{cr_i}^{ik}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda ik , $\sigma_{cr_k}^{ik}$ constitui a tensão crítica para o nó k da banda ik , $\sigma_{cr_i}^{il}$ constitui a tensão crítica para o nó i da banda il , $\sigma_{cr_l}^{il}$ constitui a tensão crítica para o nó l da banda il , $\sigma_{cr_j}^{jl}$ constitui a tensão crítica para o nó j da banda jl , $\sigma_{cr_l}^{jl}$ constitui a tensão crítica para o nó l da banda jl , $\sigma_{cr_j}^{jk}$ constitui a tensão crítica para o nó j da banda jk , $\sigma_{cr_k}^{jk}$ constitui a tensão crítica para o nó k da banda jk , $\sigma_{cr_l}^{lk}$ constitui a tensão crítica para o nó l da banda lk e $\sigma_{cr_k}^{lk}$ constitui a tensão crítica para o nó k da banda lk ; e_i^{ij} significa a espessura de banda no nó i para a banda ij , e_j^{ij} significa a espessura de banda no nó j para a banda ij , e_i^{ik} significa a espessura de banda no nó i para a banda ik , e_k^{ik} significa a espessura de banda no nó k para a banda ik , e_i^{il} significa a espessura de banda no nó i para a banda il , e_l^{il} significa a espessura de banda no nó l para a banda il , e_j^{jl} significa a espessura de banda no nó j para a banda jl , e_l^{jl} significa a espessura de banda no nó l para a banda jl , e_j^{jk} significa a espessura de banda no nó j para a banda jk , e_k^{jk} significa a espessura de banda no nó k para a banda jk , e_l^{lk} significa a espessura de banda no nó l para a banda lk e e_k^{lk} significa a espessura de banda no nó k para a banda lk ; $\delta_{u_i}^{ij}$ é o alongamento último para o nó i da banda ij , $\delta_{u_j}^{ij}$ é o alongamento último para o nó j da banda ij , $\delta_{u_i}^{ik}$ é o alongamento último para o nó i da banda ik , $\delta_{u_k}^{ik}$ é o alongamento

último para o nó k da banda ik , $\delta_{u_i}^{il}$ é o alongamento último para o nó i da banda il , $\delta_{u_l}^{il}$ é o alongamento último para o nó l da banda il , $\delta_{u_j}^{jl}$ é o alongamento último para o nó j da banda jl , $\delta_{u_l}^{jl}$ é o alongamento último para o nó l da banda jl , $\delta_{u_j}^{jk}$ é o alongamento último para o nó j da banda jk , $\delta_{u_k}^{jk}$ é o alongamento último para o nó k da banda jk , $\delta_{u_l}^{lk}$ é o alongamento último para o nó l da banda lk e $\delta_{u_k}^{lk}$ é o alongamento último para o nó k da banda lk .

Como pode ser observado através da equação (21) a obtenção das forças equivalentes, da matriz de rigidez e das tensões dependem da solução de integrais no domínio do elemento, para o caso de estruturas irregulares o processo de determinação e solução de tais domínios torna-se extremamente complexo, devido a presença de inclinações e distorções entre as arestas do elemento e os eixos de referência. Para contornar tal problema e permitir assim a utilização de malhas irregulares, fez-se a utilização de mapeamento isoparamétrico. A técnica de mapeamento consiste na transformação das coordenadas e deslocamentos globais do elemento quadrilateral, em deslocamentos e coordenadas equivalentes em um espaço de coordenadas de referência. No espaço de referência as integrais podem ser resolvidas de modo mais simples via integração analítica ou numérica. O termo isoparamétrico por sua vez indica que as funções de forma adotadas no espaço global e de referência, possuem funções de interpolação idênticas. Na Figura 25 são mostrados os elemento em seu espaço de coordenadas globais e de referência, para nosso caso ambas as funções são lineares.

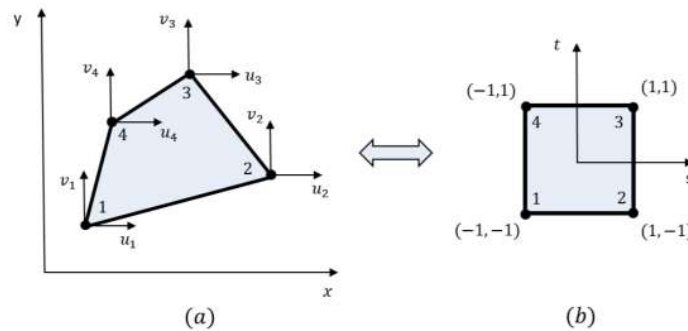


Figura 25 – (a) Elemento quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço de referência.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2020).

4.2. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Assim como no caso de Amorim (2016) e Oliveira (2020), o elemento finito aqui proposto foi implementado no Programa Endógeno de Elementos Finitos (PEEF). O PEEF é

um programa de elementos finitos, desenvolvido por Uzcategui (2012) em linguagem Fortran, que permite a análise de estruturas lineares e não lineares, através de análise dinâmica ou estática. Atualmente possui uma grande biblioteca de modelos utilizados para a análise de estruturas baseados na TDC.

As análises com o PEEF são realizadas em dois níveis: um global e outro local. O problema global caracteriza-se como a solução do sistema de equações formado pela equação de equilíbrio, submetida às condições de contorno impostas. Enquanto o problema local é caracterizado pela solução das leis de comportamento para cada elemento da estrutura. Segundo Avon (2002), utilizar uma solução numérica em nível global e local permite uma melhor convergência para modelos que tenham o fenômeno de amolecimento.

O funcionamento do PEEF, a nível global, pode ser descrito inicialmente, através da leitura de dados do problema por meio de um arquivo de entrada contendo as coordenadas dos nós da estrutura, a conectividade de cada elemento, condições de contorno e o tipo de elemento utilizado. Para os problemas analisados nesse trabalho, adotou-se um procedimento de incremento de deslocamentos, sendo assim, durante cada passo da análise estrutural em alguns pontos da estrutura incrementa-se valores de deslocamentos pré-definidos, e a partir desses deslocamentos serão obtidos os valores de carga correspondentes por meio de um processo iterativo. Para cada passo da análise o equilíbrio fica definido em função do balanço de forças $\{FR\}$, obtido por meio das forças externas $\{P\}$ e esforços internos da estrutura $\{Q\}$, respeitando as condições de contorno do problema.

$$\{FR\} = \{Q\} - \{P\} = 0 \quad (28)$$

A estrutura passa a ser considerada em equilíbrio quando o balanço de forças da equação (28) é igual a 0. Por se tratar de um problema de não linearidade física a resolução do problema (28) necessita ser realizada através da linearização do sistema acompanhado por algum procedimento numérico iterativo.

$$\left\{ \frac{\partial Q(U)}{\partial U} \right\} (\Delta U) + \{P\} = 0 \quad (29)$$

A equação (29) representa a expressão do sistema global linearizada, onde $\left\{ \frac{\partial Q(U)}{\partial U} \right\}$ é a matriz de rigidez (ou jacobiana), $\{P\}$ é o vetor de solicitações externas e ΔU o incremento de

deslocamentos. Um dos métodos mais utilizados na literatura e empregado nesse trabalho foi o método de Newton-Raphson.

A solução local da estrutura por sua vez ocorre elemento a elemento, e está relacionada à rotina que contém o elemento finito proposto nesse trabalho. As etapas implementadas realizam os cálculo das variáveis ligadas aos “*numexes*” e ao dano.

O primeiro passo dentro do algoritmo é o cálculo das deformações generalizadas $\{\delta\}_q$, obtidas dos valores de deslocamento encontradas na análise elástica global. O cálculo é realizado com a operação cinemática a seguir:

$$\{\delta\}_q = [b]_q \{U\}_q \quad (30)$$

sendo: $[b]_q$ é a matriz de transformação cinemática para um elemento específico q , $\{U\}_q$ é o vetor de deslocamentos globais e $\{\delta\}_q$ as deformações generalizadas para um elemento q .

Em seguida, inicia-se a etapa de predição elástica. Para essa etapa, inicialmente, obtêm-se as tensões generalizadas $\{N\}_q$ através da lei de comportamento do modelo.

$$\{N\}_q = [H] [T] (\{\delta\}_q - \{\delta^d\}_q) \quad (31)$$

onde: $\{\delta^d\}_q$ é o vetor de alongamentos de dano para um elemento específico q , $[H]$ é a matriz de coeficientes elásticos e $[T]$ a matriz de transformação dos numexes para um elemento.

Determinadas as tensões generalizadas, calcula-se as tensões normais atuantes, nos nós do elemento.

$$\{\sigma\}_q = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_q = [H][T][E]^{-1}\{N\}_q \quad (32)$$

onde:

$$[E] = \iiint_V [T]^T [H][T] dV \quad (33)$$

sendo, σ_{11} é a tensão principal no eixo x, σ_{22} é a tensão principal no eixo y, τ_{12} é a tensão de cisalhamento xy, a matriz $[E]^{-1}$ representa a inversa da integral apresentada em (33).

Através das relações, de estado plano, encontra-se a tensão atuante no plano perpendicular a banda de localização. Por exemplo para a banda ik no nó i :

$$\sigma_i^{ik} = \sigma_{11} \cdot c_{ik}^2 + \sigma_{22} \cdot s_{ik}^2 + 2 \cdot \tau_{12} \cdot c_{ik} \cdot s_{ik} \quad (34)$$

onde c_{ik} e s_{ik} são os cossenos e senos encontrados para o plano perpendicular a banda de localização ik .

Encontrado os valores de tensão, ativa-se o algoritmo de predição elástica e correção inelástica. A etapa de predição é o momento onde verifica-se se a existência de bandas ativas ou não, sendo realizada por meio da determinação do valor da lei de evolução de dano.

$$g_i^{ik} = \sigma_i^{ik} - \sigma_{cr_i}^{ik} \left(1 - \frac{e_i^{ik}}{\delta_{u_i}^{ik}} \right) \quad (35)$$

Caso o valor de $\{g\} \leq 0$ nenhuma banda estará ativa, logo não ocorrerá a necessidade de incrementar alongamentos de dano ao elemento. Por outro lado, se alguma banda apresentar $g > 0$ será necessário fazer uma correção dos valores de tensão dos “*numexes*” e das espessuras de banda inicialmente adotadas, via um algoritmo de correção inelástica. Para se obter tais valores, monta-se um sistema matricial contendo as cinco leis de estado (equações relacionadas ao cálculo das tensões nos numexes) e pelas doze leis de evolução de dano.

$$\begin{aligned} \{r(N, e)\} &= B(\{\delta\}_q - \{\delta^d\}_q) - [E^{-1}]\{N\} = 0 \\ \{g(N, e)\} &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Como as equações envolvidas no processo são não lineares, o sistema apresentado em (36) é linearizado e resolvido através de um procedimento iterativo baseado no método de Newton-Raphson.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial N}_{5 \times 5} & \frac{\partial r}{\partial e}_{5 \times 12} \\ \frac{\partial g}{\partial N}_{12 \times 5} & \frac{\partial g}{\partial e}_{12 \times 12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 - N \\ e_0 - e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_0 \\ g_0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Ao término do procedimento de correção inelástica, obtém-se os novos valores de $\{N\}_q$, $\{e\}_q$, $\{\delta\}_q$ e $\{\sigma_n\}_q$ de modo que todos os valores de $\{g\}$ sejam inferiores a zero. Por fim, realiza-se o cálculo das forças internas e da matriz de rigidez do elemento, e retorna-se para o algoritmo de análise global.

$$\begin{aligned} \{Q\} &= [b]_q^T \iiint_V [T]^T \{\sigma\}_q dV \\ [K] &= [b]_q^T \left(\iiint_V [T]^T [H][T] dV \right) [b]_q \end{aligned} \tag{38}$$

Caso o procedimento iterativo mostrado acima possua uma convergência lenta, atingindo um número de iterações limite sem solução, o incremento de deslocamento dessa etapa de carga é reduzido e realiza-se novamente todas as etapas de cálculo. A Figura 26 apresenta uma visão geral do fluxograma com os passos de cálculo realizados no algoritmo. Cabe destacar que o índice q indica que é aquela variável pertence ao elemento.

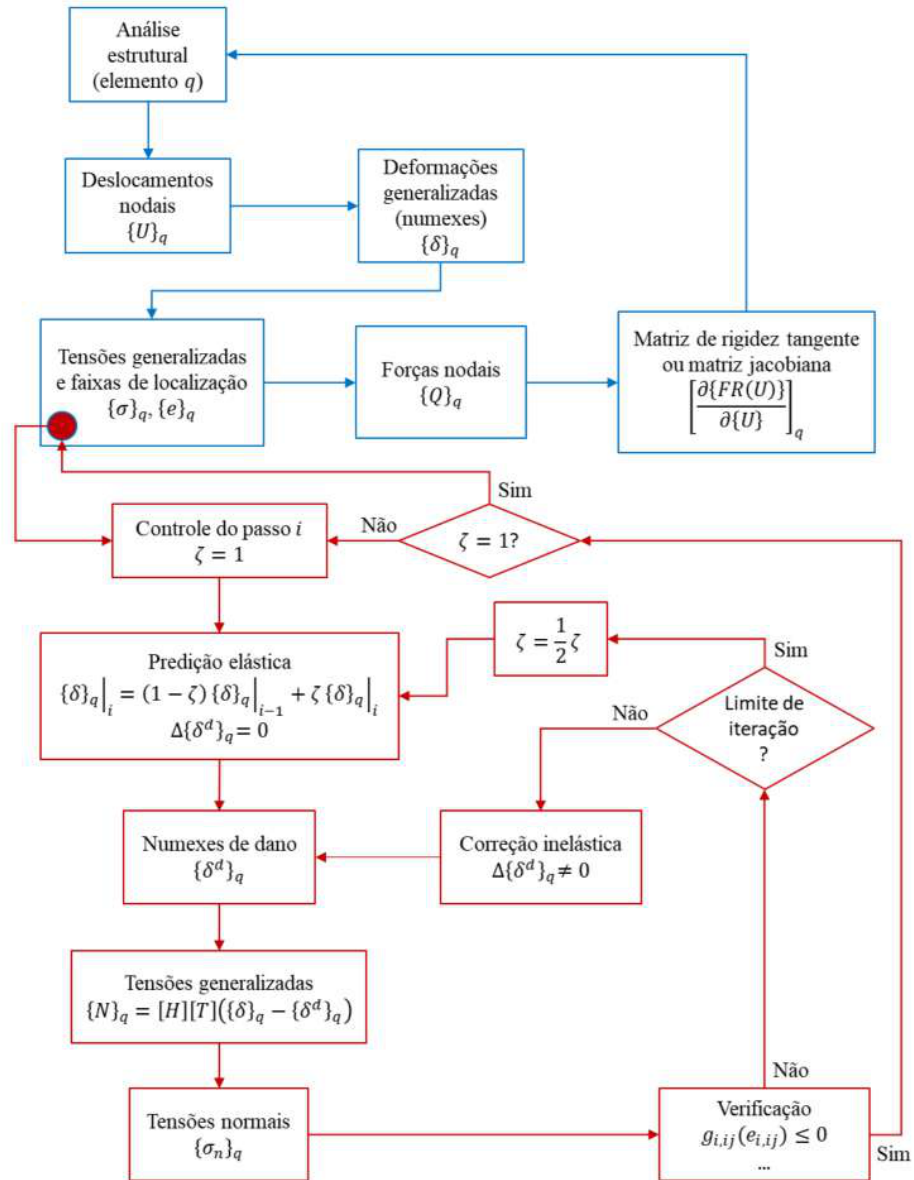


Figura 26 – Fluxograma da solução local no PEEF.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2020).

5. RESULTADOS

Para validação da implementação discutida neste trabalho, analisou-se numericamente algumas chapas composta por malhas regulares e malhas irregulares. Por meio dos resultados obtidos, discute-se alguns aspectos numéricos e teóricos observados. De maneira complementar, também será abordado uma investigação qualitativa do fenômeno físico conhecido como efeito escala

5.1. EXEMPLO 1 – CHAPA TRACIONADA COM FURO

A Figura 27 mostra uma chapa tracionada com a presença de um furo no seu centro e as propriedades do material para esse exemplo são $\nu = 0.18$ e $E = 25850 \text{ N/mm}^2$. A chapa está submetida a um deslocamento horizontal em suas faces laterais P igual a 0,15 mm.

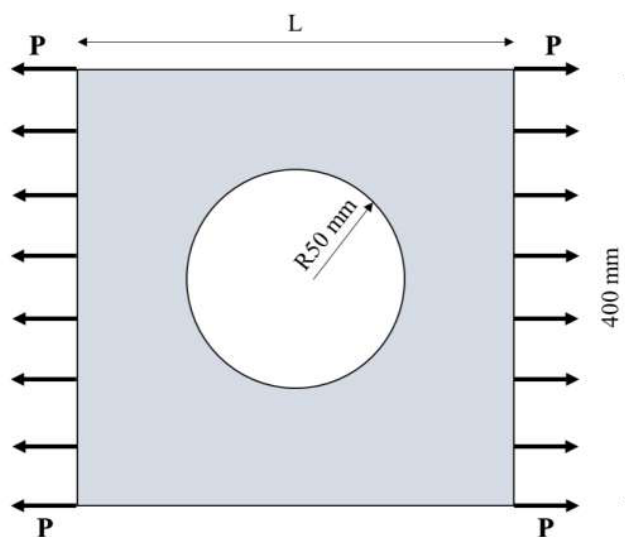


Figura 27 - Chapa tracionada com furo central

Fonte: Autor

Por se tratar de uma chapa infinita a presença do furo acaba por modificar a distribuição de tensões, induzindo o surgimento de tensões locais mais altas ao redor do furo. Como indicado em Amorim (2020) e representado na Figura 28, para o caso de furo circular a tensão que ocorre no perímetro do furo terá magnitude 3 vezes superior à tensão encontrada no ponto de aplicação de carga.

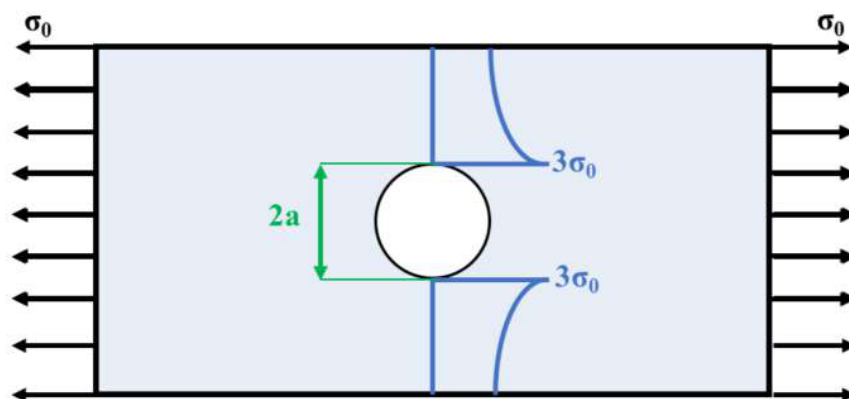


Figura 28 - Concentração de tensão chapa com furo circular.

Fonte: Adaptado de Amorim (2016).

O exemplo foi analisado via análise linear elástica, através de uma malha irregular de elementos finitos composta por 353 elementos e 393 nós. A mesma malha também foi analisada no software Abaqus com o elemento CPS4R para produzir uma solução de referência (Figura 31). Com esse resultado, busca-se comprovar que a formulação do elemento finito quadrilateral elástico deduzido a partir dos alongamentos dos “*numexes*” e com integração numérica, produz resultados condizentes aos analíticos. Por questões de simplicidade dada a dupla simetria do problema, o modelo considerado para a simulação foi simplificado conforme indicado na Figura 29.

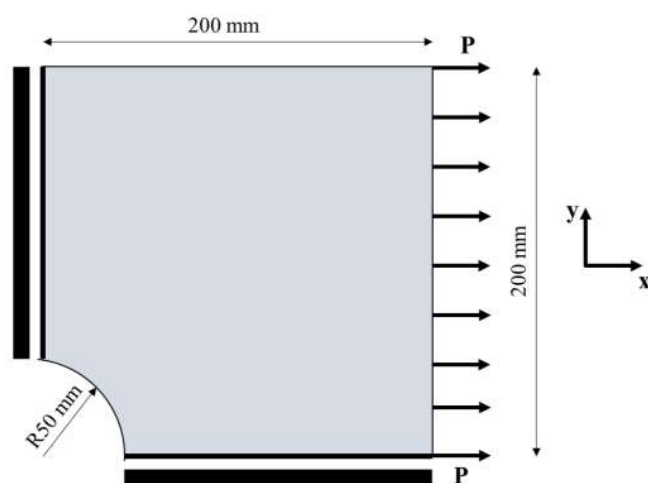


Figura 29 – Modelo de análise.

Fonte: Autor

Os resultados obtidos para o elemento finito proposto são mostrados na Figura 30. O mapa de tensão foi gerado via pós-processador próprio. As tensões foram obtidas para os pontos de integração, e interpoladas com o auxílio de funções de forma lineares. Já a Figura 31 traz a solução de referência obtida através do programa Abaqus 6.421.5.0 versão estudantil. Ao se comparar as duas imagens, percebe-se como ambas soluções convergiram para os mesmos resultados, demonstrando assim que a implementação do elemento irregular proposto apresenta resultados satisfatórios.

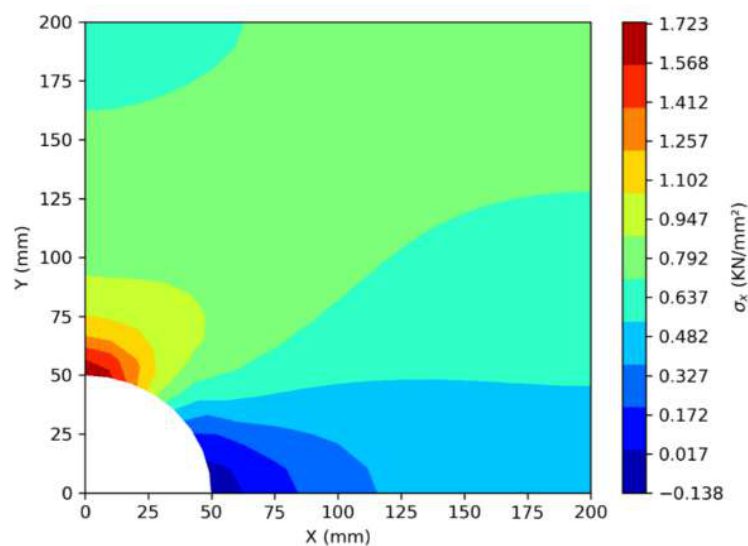


Figura 30 - Campo de tensões chapa com furo.

Fonte: Autor

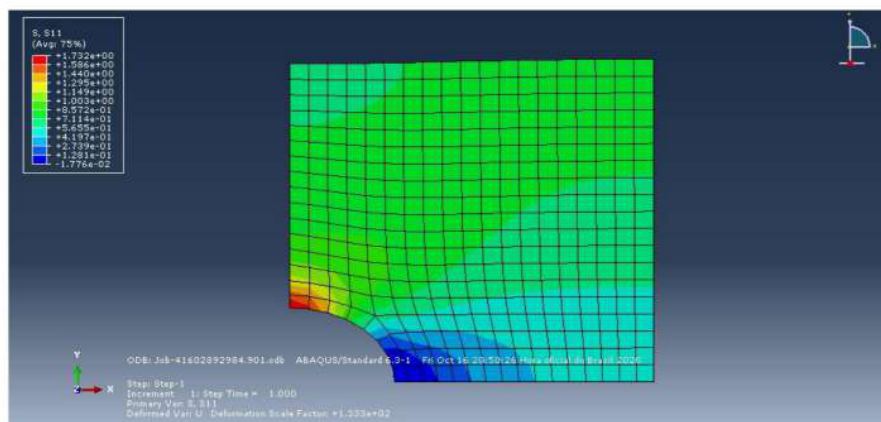


Figura 31 - Solução de referência via Abaqus 6.421.5.0 versão estudantil.

Fonte: Autor.

5.2. EXEMPLO 2 – CHAPA EM L DE AMORIM (2016) COM ELEMENTOS REGULARES

Neste exemplo apresentado na Figura 13 e estudado por Amorim (2016) e Oliveira (2020), tem-se uma chapa sólida submetida a um deslocamento vertical imposto P . As propriedades utilizadas na análise foram as mesmas apresentadas nos trabalhos anteriores, sendo: $\nu = 0,18$, $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}^2$ e $\delta_u = 0,2 \text{ mm}$.

Ao contrário do Exemplo 1, a análise ocorreu até atingir o alongamento último do material. Para comprovar a independência de malha foi realizado um estudo de convergência com as mesmas 6 malhas regulares (12, 48, 108, 192, 300 e 432 elementos) utilizadas por Amorim (2016) e Oliveira (2020). A Figura 32 apresenta o gráfico de *força vs deslocamento* para as curvas analisadas e a Figura 33 mostra o resultado para as duas melhores curvas: 300 e 432 elementos.

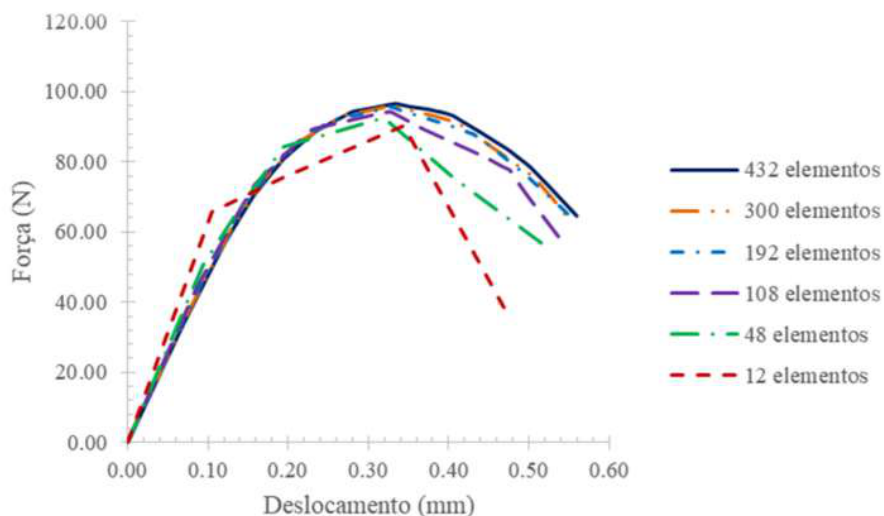


Figura 32 - Força vs deslocamento.

Fonte: Autor

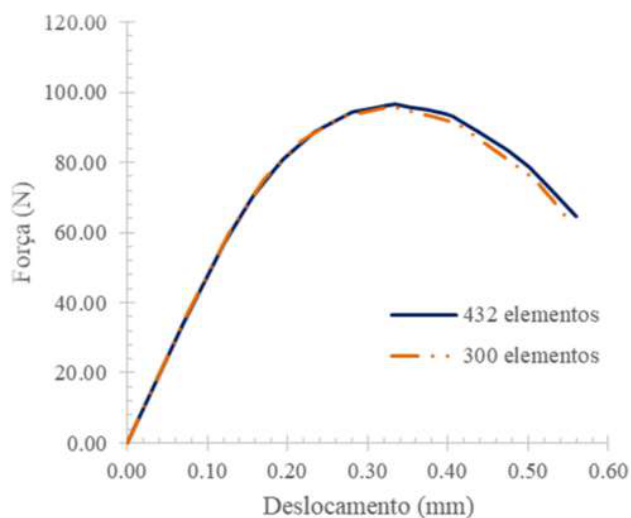


Figura 33 - Convergência malha 300 e 432 elementos.

Fonte: Autor

Como pode ser visto nos dois resultados, o novo elemento assim como os de Amorim (2016) e Oliveira (2020), apresenta unicidade de solução, com os resultados convergindo para uma solução única conforme ocorre o aumento do número de elementos da análise.

Como dito nos capítulos anteriores, para esse exemplo em questão, o elemento irregular proposto por Oliveira (2020) devido a não adoção de bandas de localização em todas as suas faces torna-se sensível as condições de contorno, apresentando para essa configuração resposta de força última superior (Figura 19) a obtida por Amorim (2016). Corrigir tal problema foi o ponto de motivação para o posicionamento e o aumento no número de bandas de localização adotadas no elemento finito apresentado neste trabalho. A Figura 34 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos para a simulação com a malha de 432 elementos para dois elementos finitos da MDCX, a curva L432A representa os resultados de referência encontrados em Amorim (2016) e a curva L432D os obtidos com o novo elemento finito irregular.

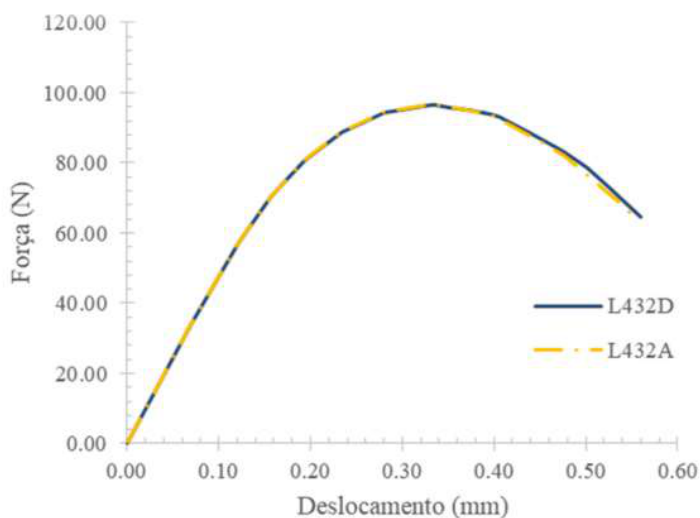


Figura 34 - Comparação com os resultados de Amorim (2016).

Fonte: Autor

Observa-se que ambas as curvas obtiveram mesmo gráfico de *força vs deslocamento*, desse modo temos constatado que a ideia de aumentar o número de bandas de localização realmente corrige os problemas de dependência do formato de geração de malha encontrado nos resultados de Oliveira (2020).

Na Figura 35, tem-se os resultados quanto a formação da zona de falha para quatro malhas analisadas (75, 192, 300 e 432 elementos). Assim como nos trabalhos anteriores, percebe-se a formação da zona de falha na parte interior do sólido atingindo nessa região o alongamento último de 0,2 mm. Cabe destacar que na parte inferior próximo aos apoios ocorre o surgimento de algumas poucas bandas horizontais com espessuras da ordem de grandeza inferior a 0,05mm, essas bandas por se tratarem de valores muito pequenos e longe da zona de falha pouco influenciam para o colapso da estrutura.

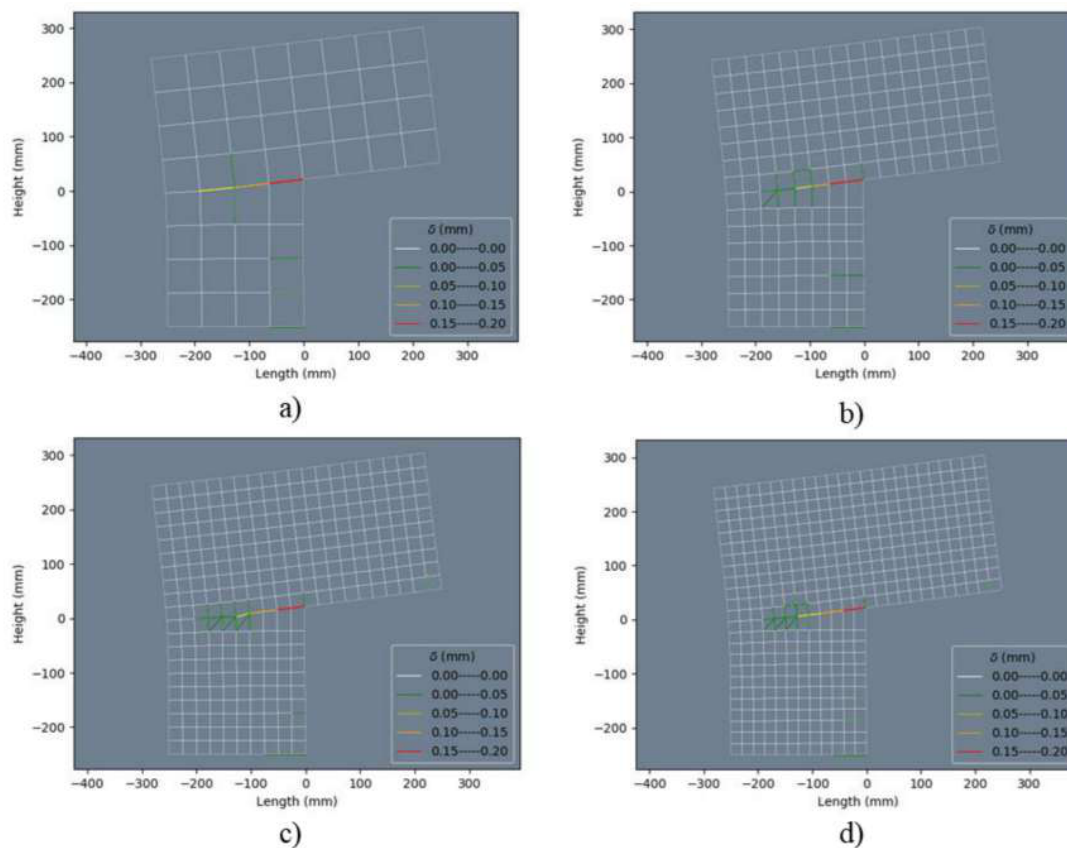


Figura 35 - Malhas deformadas a) 75 elementos b) 192 elementos c) 300 elementos e d) 432 elementos.

Fonte: Autor.

5.3. EXEMPLO 3 – CHAPA EM L DE AMORIM (2016) COM ELEMENTOS IRREGULARES

A chapa submetida a análise no Exemplo 2, também foi simulada com malhas irregulares. O estudo de convergência considerou 6 malhas (42, 169, 287, 408, 508, e 527 elementos), os resultados estão apresentados na Figura 36. Já a Figura 37 apresenta os resultados para as três melhores malhas: 169, 408 e 508 elementos.

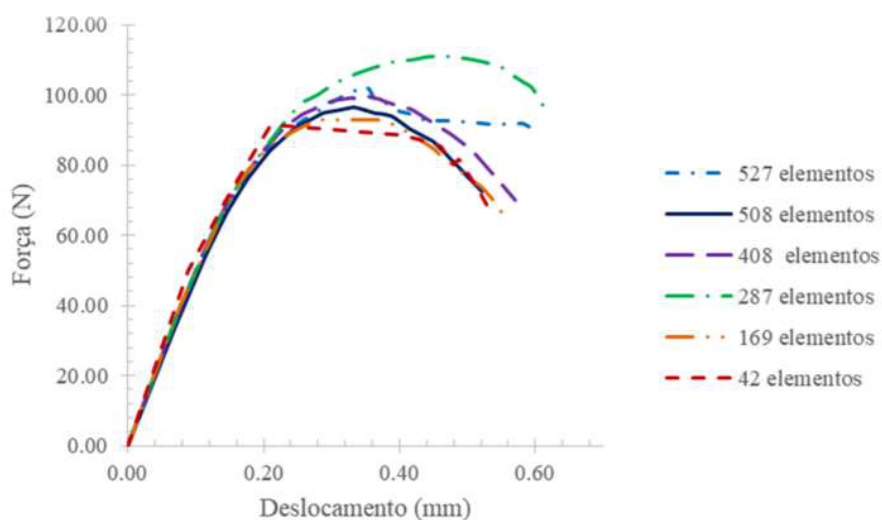


Figura 36 - Curva força vs. deslocamento

Fonte: Autor

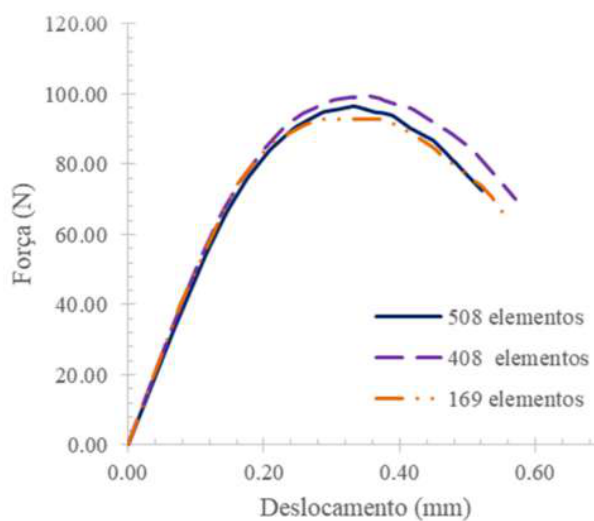


Figura 37 - Convergência malha 196 e 256 elementos.

Fonte: Autor

Analisando as curvas apresentadas na Figura 36, pode-se afirmar que ocorre convergência dos resultados das malhas de 169, 408 e 508 elementos. Entretanto, diferente do que ocorre para o caso regular, ao se aumentar o número de elementos da análise algumas malhas passam a gerar curvas de *força vs. deslocamento* que fogem ao padrão esperado. Por exemplo, para a análise com 287 elementos, obtém-se um valor de força de ruptura bastante

diferente do encontrado para as outras malhas, e para o caso com 527 elementos o pós-pico encontrado possui um patamar. A Figura 38 mostra um comparativo das malhas em sua configuração deformada que apresentaram distorção da resposta (527 e 287), com duas malhas de tamanhos semelhantes e que apresentaram resultados conforme o esperado (169 e 508 elementos).

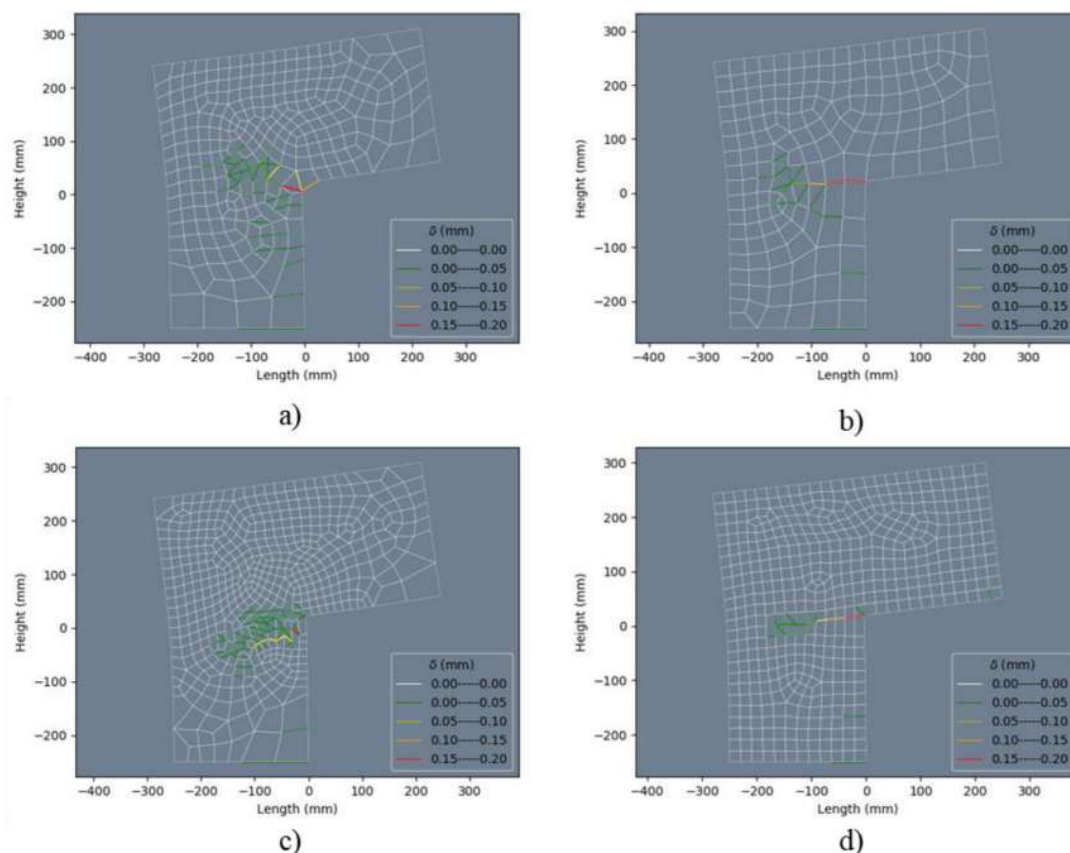


Figura 38 - Malha deformada a) 287 elementos b) 169 elementos c) 527 elementos e d) 508 elementos.

Fonte: Autor

Ao observar o processo de falha encontrado para as quatro malhas, percebe-se que em todos os casos ocorreu início do processo de ruptura na região interna da chapa, sendo essa região a que apresenta as maiores espessuras de banda. Para as situações onde o comportamento da curva *força vs deslocamento* ocorreu conforme o esperado (letras b e d), a concentração de deformações se propaga pelo interior da chapa de modo semelhante ao encontrado nas malhas regulares. Por outro lado, nas malhas de 287 e 527 elementos, nota-se que ocorre uma tendência

a propagação das bandas seguindo um caminho diagonal. Essa distorção de resposta pode ser justificada ao se observar que nas malhas dos casos a e c, o início do processo de falha ocorre em quadriláteros rotacionados que podem estar desviando o caminho de ruptura da estrutura. Na Figura 39, são apresentadas as outras malhas utilizadas para o estudo de convergência. Nota-se para essas duas análises que novamente a região de falha por não ter elementos rotacionados se comporta de modo semelhante ao encontrado nas malhas regulares.

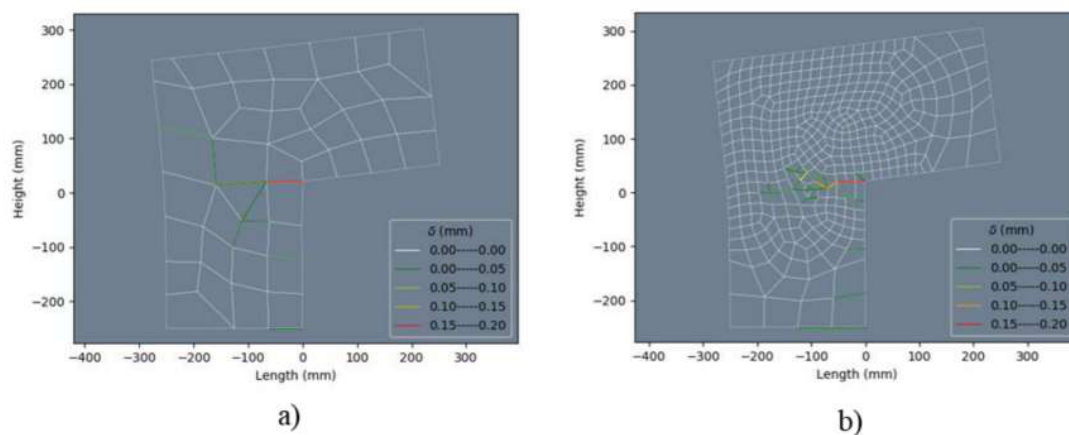


Figura 39 - Malha indeformadas a) 42 elementos e b) 408 elementos.

Fonte: Autor.

A Figura 40 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com a malha de 508 elementos irregular e a malha de 432 elementos regular. Nota-se dessa figura que a proposta de elemento finito irregular atinge resultados idênticos aos obtidos com malhas regulares.

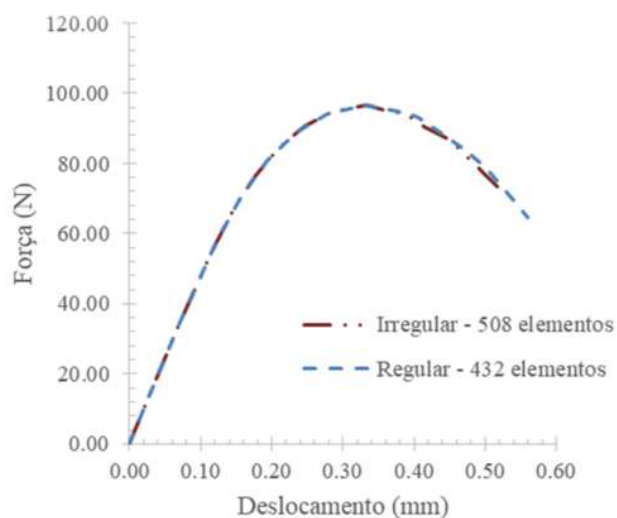


Figura 40 – Comparação resultado Regular e Irregular.

Fonte: Autor.

5.4. EXEMPLO 4 – HEXÁGONO DUPLO

O exemplo 4 trata-se de uma chapa composta pela junção de dois hexágonos, onde as condições de contorno são: um deslocamento imposto no trecho G-F e a restrição de deslocamento no trecho A-B. A Figura 41 traz o esboço da chapa analisada.

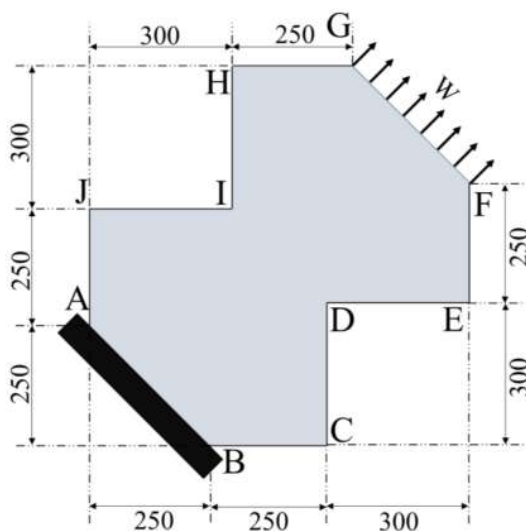


Figura 41 - Hexágono duplo.

Fonte: Autor.

As propriedades do material foram arbitradas como: $\nu = 0,18$, $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}^2$, espessura = 1 mm e $\delta_u = 0,2 \text{ mm}$. Para o estudo de convergência simulou-se quatro malhas irregulares compostas por: 230, 468, 672 e 829 elementos. Na Figura 42 estão apresentadas as quatro curvas de *força vs deslocamento* para as malhas estudadas. Destaca-se que em todas as análises numéricas o término da análise ocorreu quando o alongamento último foi atingido.

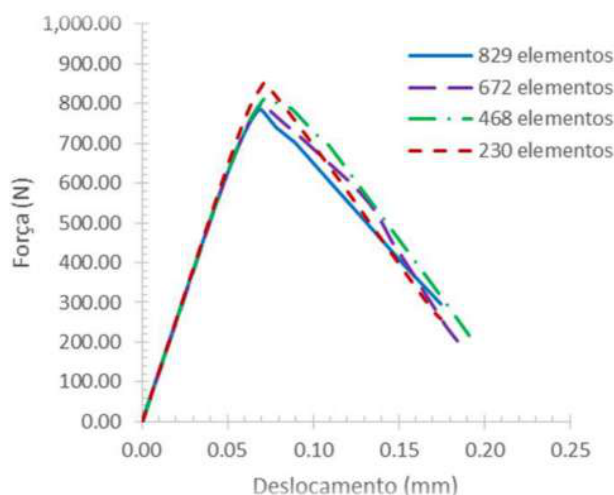


Figura 42 – Curvas *força vs deslocamento*.

Fonte: Autor

Por meio dos gráficos da Figura 42, entende-se que todas as malhas apresentaram resultados semelhantes, pois as curvas localizaram-se dentro de uma faixa próxima de resultados. Em especial, comparando as malhas de 829 e 672 elementos, é possível observar a existência de um deslocamento entre ambas as curvas no seu pós pico. Esse efeito está ligado a ocorrência de um fenômeno conhecido como “*mesh bias*” ou “*mesh alignment dependence*”.

Como definem Dias, Oliver e Huespe (2012), o fenômeno de “*mesh bias*” está relacionado a tendência da localização em desenvolver-se segundo uma direção, influenciada pelo alinhamento da malha de elementos finitos na região de concentração de tensões. Cabe destacar que o “*mesh bias*” difere do problema de dependência de malha discutido anteriormente nesse trabalho (“*size dependence*”), tendo em vista que o primeiro está relacionado a variações pequenas dos resultados ligadas a modificações na inclinação dos elementos presentes na região de falha, enquanto o segundo versa sobre alteração dos resultados

devido a variação do número de elementos presentes na malha de elementos finitos. Para maiores informações sobre o fenômeno de “*mesh bias*” e sua ocorrência em análises de elementos finitos via Strong Discontinuity por exemplo, recomenda-se os trabalhos de: Cervera e Chiumenti (2006); Cervera et al (2010); Dias, Oliver e Huespe (2012).

Além da curva de *força vs deslocamento*, apresenta-se na Figura 43 as quatro malhas deformadas e suas zonas de formação de falha. Mesmo não existindo resultado experimental para comparação, pode-se admitir que a formação da zona de ruptura está de acordo com o que é esperado, tendo em vista o surgimento das bandas com maior espessura na região onde ocorre a redução da seção transversal da chapa.

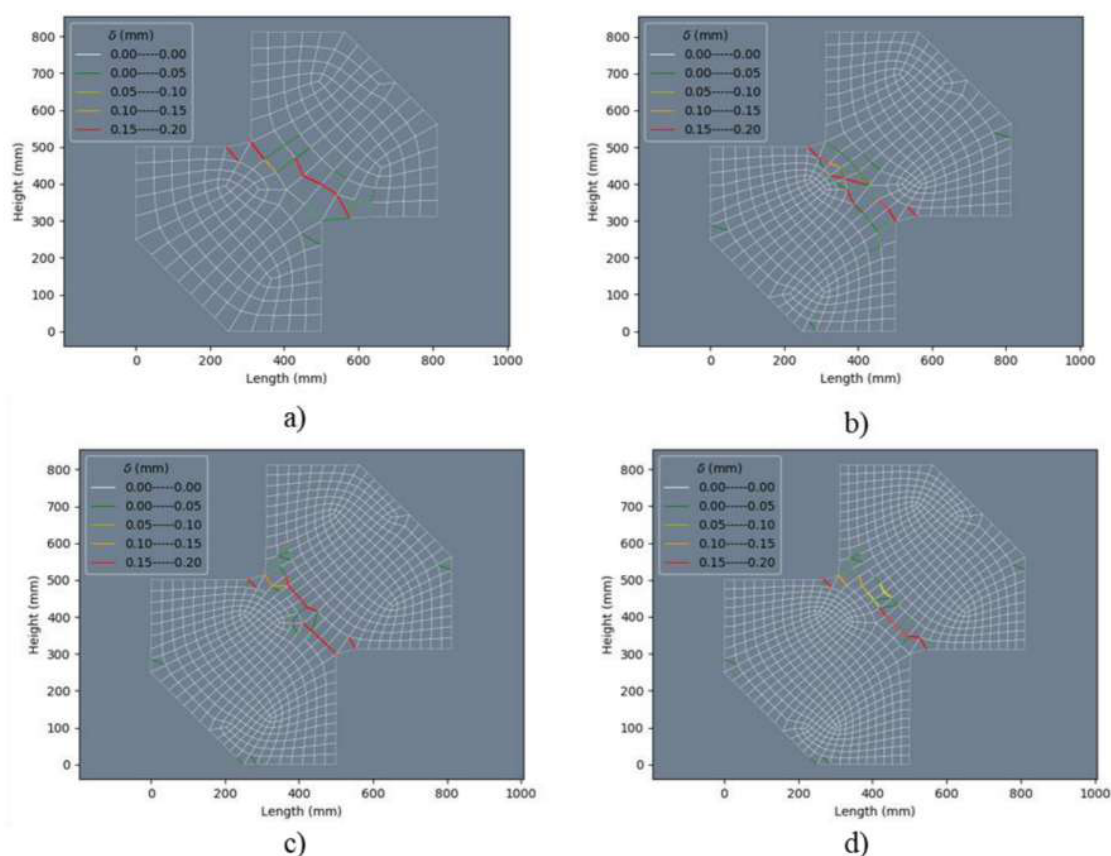


Figura 43 - Malha deformada a) 230 elementos b) 468 elementos c) 672 elementos e d) 829 elementos.

Fonte: Autor.

5.5. EXEMPLO 5 – QUADRADO VAZADO

O exemplo 5 refere-se a simulação de um quadrado vazado, com um deslocamento imposto em sua aresta interna B – C, deslocamento vertical restrito para as arestas A – B e C – D e deslocamento horizontal restrito para a aresta A – D. Via Figura 47 são apresentados as características geométricas do exemplo atual.

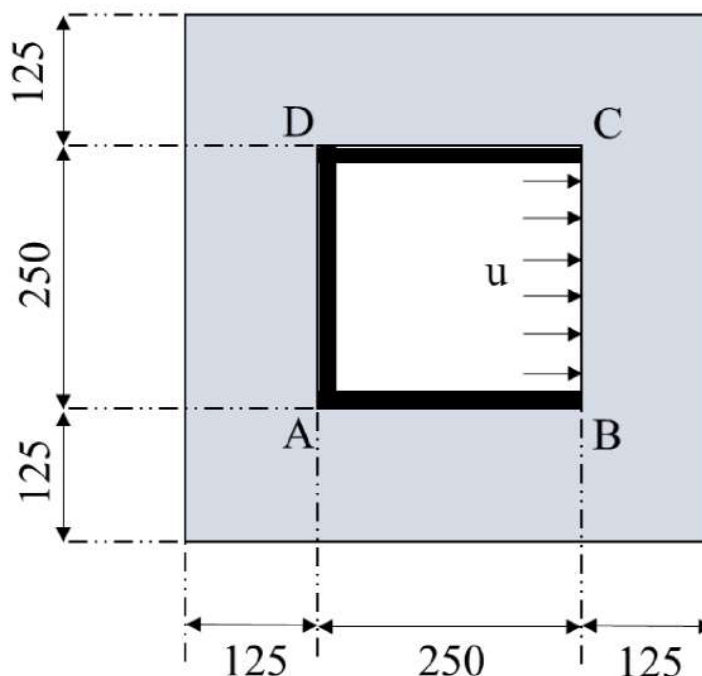


Figura 44 - Quadrado Vazado.

Fonte: Autor

As propriedades do material foram arbitradas como: $\nu = 0,18$, $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}^2$, espessura = 1 mm e $\delta_u = 0,2 \text{ mm}$. A análise de convergência foi realizada com cinco malhas regulares compostas por: 72, 192, 300, 432 e 588 elementos. Por meio da Figura 48, nota-se que excluindo a malha de 72 elementos todas as outras curvas de *força vs deslocamento* analisadas, apresentaram resultado final muito semelhantes.

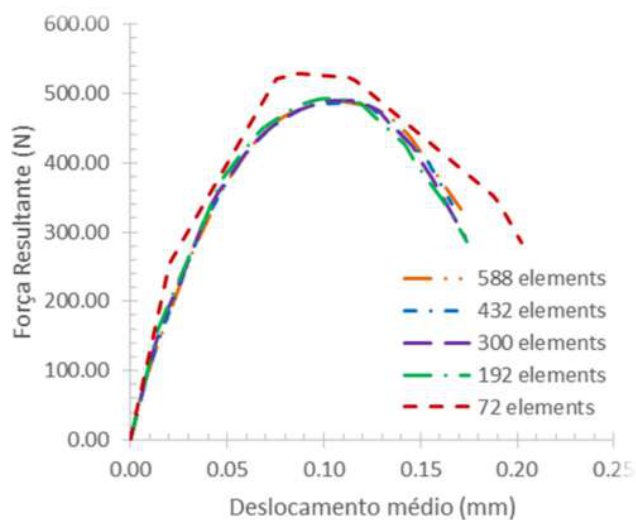


Figura 45 - Gráfico de força vs deslocamento

Fonte: Autor

Em relação as malhas deformadas apresentadas na Figura 46, percebeu-se que a formação de falha ocorreu de mesmo modo para todas as quatro malhas simuladas, com a zona de ruptura concentrando-se preferencialmente no canto interno superior direito e no canto interno inferior esquerdo. É interessante destacar que nos elementos onde se alcança alongamento último, tem-se a ativação da banda diagonal, com um adendo que nas malhas mais refinadas apenas as bandas diagonais são capazes de alcançar o valor de δ_u limite.

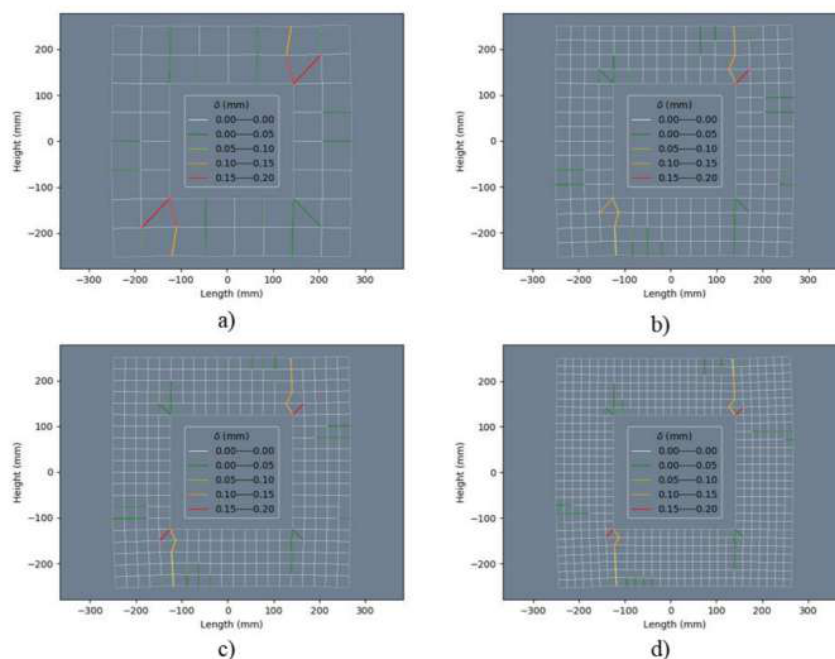


Figura 46 - Malhas deformadas a) 72 elementos, b) 192 elementos, c) 300 elementos e d) 588 elementos.

Fonte: Autor.

5.6. EXEMPLO 5 – EXPERIMENTO DE HASSANZADEH

O quinto exemplo refere-se à simulação de um modelo similar ao experimento realizado por Hassanzadeh (1991). As dimensões adotadas nesse trabalho diferem do original, desse modo a chapa é composta por um retângulo de dimensões 600 x 700 mm² onde a meia altura ocorre um estreitamento da seção transversal para 310 mm. As condições de contorno impostas são: o impedimento de deslocamento na direção horizontal e vertical para a base da chapa, um deslocamento imposto no trecho G – H e o travamento do movimento horizontal do trecho B – C, F – G, H – I e L – A. Por meio da Figura 47 pode se ver as características geométricas e condições de contorno impostas para a chapa.

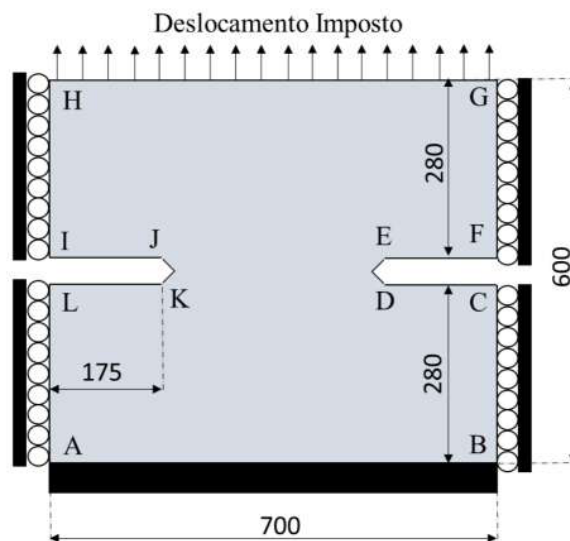


Figura 47 – Chapa baseada no teste de Hassazadeh (1981).

Fonte: Autor

As propriedades do material foram tomadas semelhantes as utilizadas em Comi e Perego (2001), onde: $\nu = 0,15$, $E = 36000,00 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{cr} = 3,50 \text{ N/mm}^2$, espessura = 1 mm e $\delta_u = 0,2 \text{ mm}$. A análise de convergência foi realizada com seis malhas irregulares formadas por: 41, 125, 354, 534, 684 e 1044 elementos. Por meio da Figura 48, nota-se que todas as outras curvas de força vs. deslocamento analisadas, apresentaram resultado final muito semelhantes.

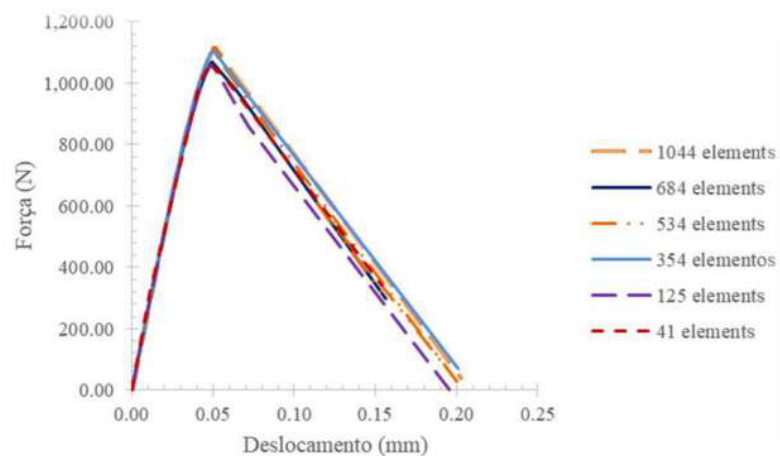


Figura 48 - Gráfico de força vs deslocamento

Fonte: Autor

Em relação as malhas deformadas apresentadas na Figura 49, percebemos que o processo de falha para todas as seis malhas simuladas, ocorre local de redução da seção transversal. Utiliza-se também como referência o mapa de dano obtido por Comi e Perego (2001), via emprego de um modelo de dano bi-dissipativo para um exemplo semelhante, como apresentado na Figura 50.

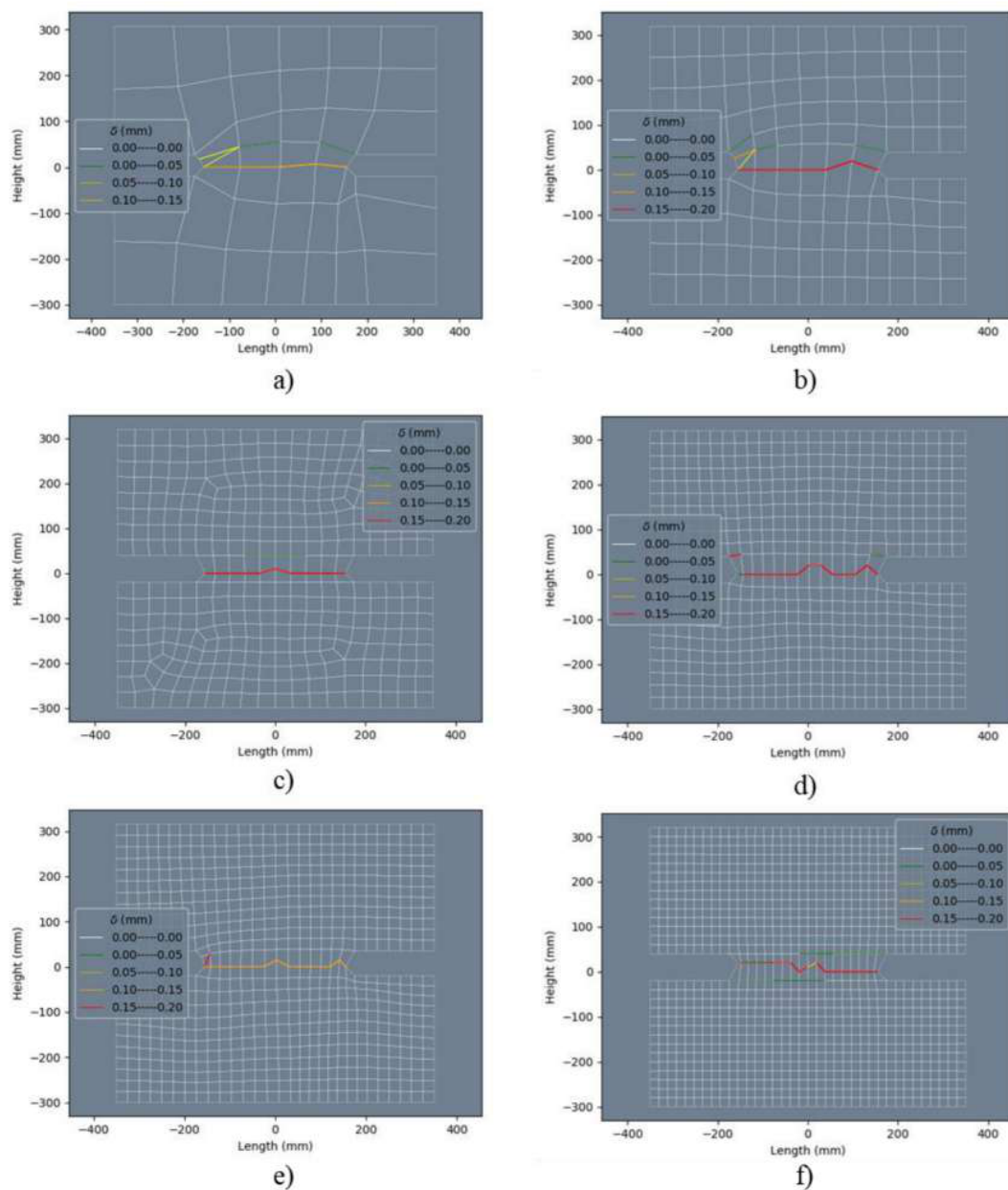


Figura 49 - Malhas deformadas a) 41 elementos, b) 125 elementos, c) 354 elementos, d) 534 elementos, e) 684 elementos e f) 1044 elementos.

Fonte: Autor

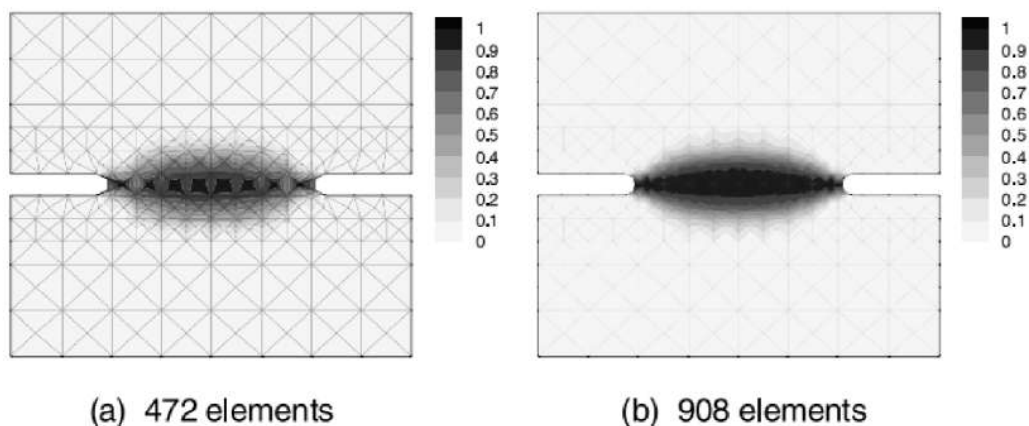


Figura 50 - Resultados numéricos obtidos por Comi e Perego (2001).

Fonte: Comi e Perego (2001).

A partir das malhas indeformadas vistas na Figura 49 percebe-se que na região onde ocorreu a concentração de deformações temos o surgimento de algumas distorções no caminho de falha, devido a alguns nós apresentarem deslocamentos diferentes. Com o objetivo de investigar a influência desse comportamento, foi utilizada a malha com 354 elementos como base para investigar o motivo dessa não uniformidade dos valores de deslocamento na região central.

Após análises percebeu-se que existe uma influência do tamanho do incremento de carga no processo de abertura das bandas de localização, e, conseqüentemente, na deformação dos elementos finitos da região de falha. A Figura 51 traz os resultados da malha indeformada com 354 elementos, a partir da utilização de quatro valores diferentes de passo de carga, sendo eles: 0,211, 0,411, 0,511 e 0,711 mm.

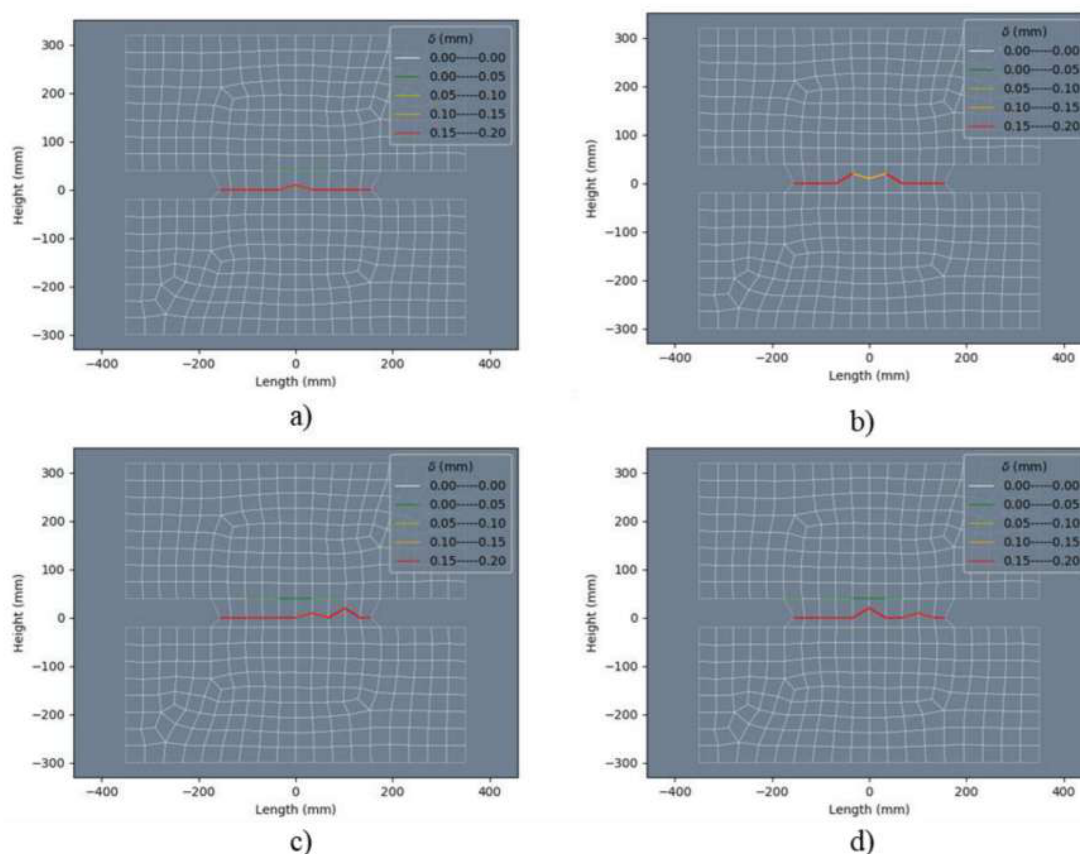


Figura 51 – Variação passo a) 0,211 mm, b) 0,411 mm, c) 0,511 mm e d) 0,711 mm.

Fonte: Autor.

Como pode-se notar a variação do valor do passo de carga, por intermédio da modificação do deslocamento imposto, provocou sim uma mudança nos deslocamentos e nas ativações das bandas de localização. Ao analisarmos a rotina numérica percebemos que através da linearização do sistema local, encontra-se uma matriz de solução com um número de condicionamento relativamente alto da ordem de 10^6 , além disso, a diferença de magnitude entre valores da diagonal principal atinge ordem de grandeza semelhante (valores 10^5 a 10^6 vezes maiores que outros), essas características fazem com que uma pequena alteração no valor do passo de carga, provoque a aceleração da ativação ou crescimento de uma banda de localização, influenciando no processo de deformação dos elementos.

Devido a esse fenômeno, buscou-se compreender se a existência dessa distorção na formação da região de falha pode ou não impactar de modo significativo nos resultados das curvas de força vs. deslocamento. Por meio dos gráficos apresentados na Figura 52, nota-se que

ao contrário do que ocorre com a deformada da estrutura, a mudança do passo de carga pouco influencia na resposta obtida para as curvas de força vs deslocamento.

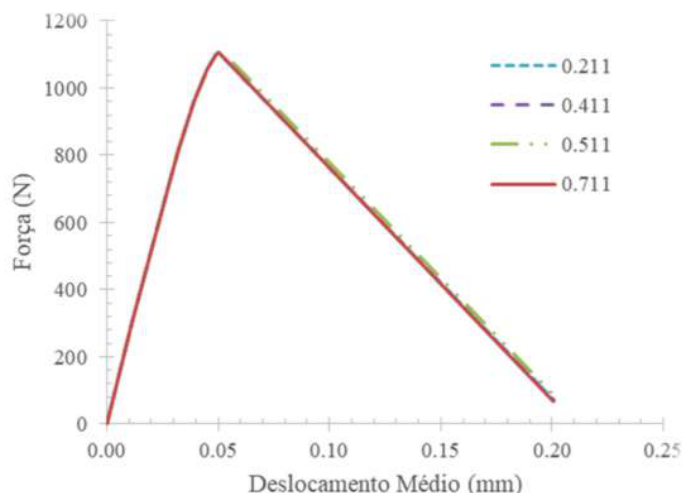


Figura 52 - Curvas força vs deslocamento para variação do passo de carga.

Fonte: Autor.

5.7. EFEITO DE ESCALA

Através de análises experimentais diversos autores comprovaram a existência do fenômeno conhecido como efeito de escala (*size effect*). Esse evento mostra que para estruturas com geometrias e condições de contornos similares, mas com dimensões diferentes, existe um decaimento da tensão normal de ruptura conforme ocorre um crescimento das dimensões da estrutura.

Estudos ligados ao efeito de escala vêm sendo desenvolvidos há anos via análises experimentais para diferentes materiais, como: concreto (Kani, 1967; Karihaloo, Abdalla e Xiao, 2003), madeira (Morel e Dourado, 2011), rochas (Wang, Zhang e Xie, 2010), entre outros. De modo paralelo, tem-se o desenvolvimento de ferramentas numéricas que buscam prever esse fenômeno, como por exemplo: uso de integrais não locais (Havlásek, Grassl e Jirásek, 2016; Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot, 2013), análise estatística (Weibull, 1939; Mihashi e Zaitsev, 1981; Mihashi, 1983), mecânica da fratura (Bažant, 1984; Bažant e Planas, 1998), entre outros.

Neste exemplo, busca-se analisar o desempenho do elemento finito proposto via MDCX para a investigação do efeito de escala. Será analisado um conjunto de vigas engastadas

submetidas a uma carga concentrada em sua extremidade, como pode ser visto na Figura 53. Em todas as análises foi arbitrada uma relação de aspecto L/H igual a 2,5, com espessura da chapa (d) constante em 38 mm. Foram utilizados seis diferentes valores para H , sendo eles: 250, 400, 800, 1600, 3200, 5000 e 7000 mm. Todas as simulações foram realizadas via malhas irregulares.

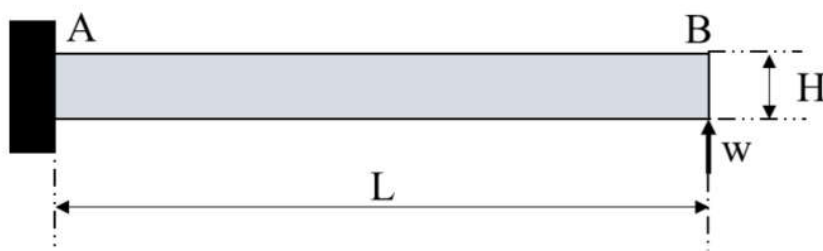


Figura 53 - Viga Engastada.

Fonte: Autor

O módulo de Young, a tensão crítica e o coeficiente de Poisson também foram retirados do trabalho de Ožbolt, Eligehausen e Petrangeli (1994), sendo: 32000,00 N/mm², 4,5 N/mm² e 0,18, respectivamente. O alongamento último foi tomado como 0,8 mm, desse modo as vigas com maior altura puderam também apresentar um pós pico significativo. A Figura 54, representa os resultados das curvas de força vs. deslocamento para as seis vigas analisadas e na Figura 55, têm-se os resultados para as malhas deformadas 250, 800, 5000 e 3200.

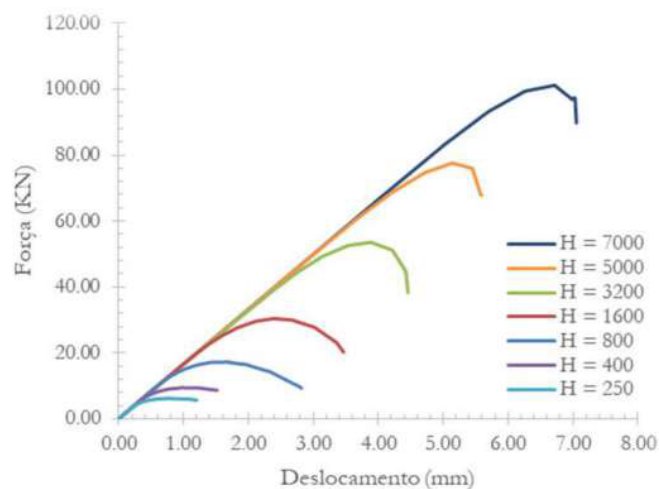


Figura 54 - Gráficos de força vs deslocamento

Fonte: Autor.

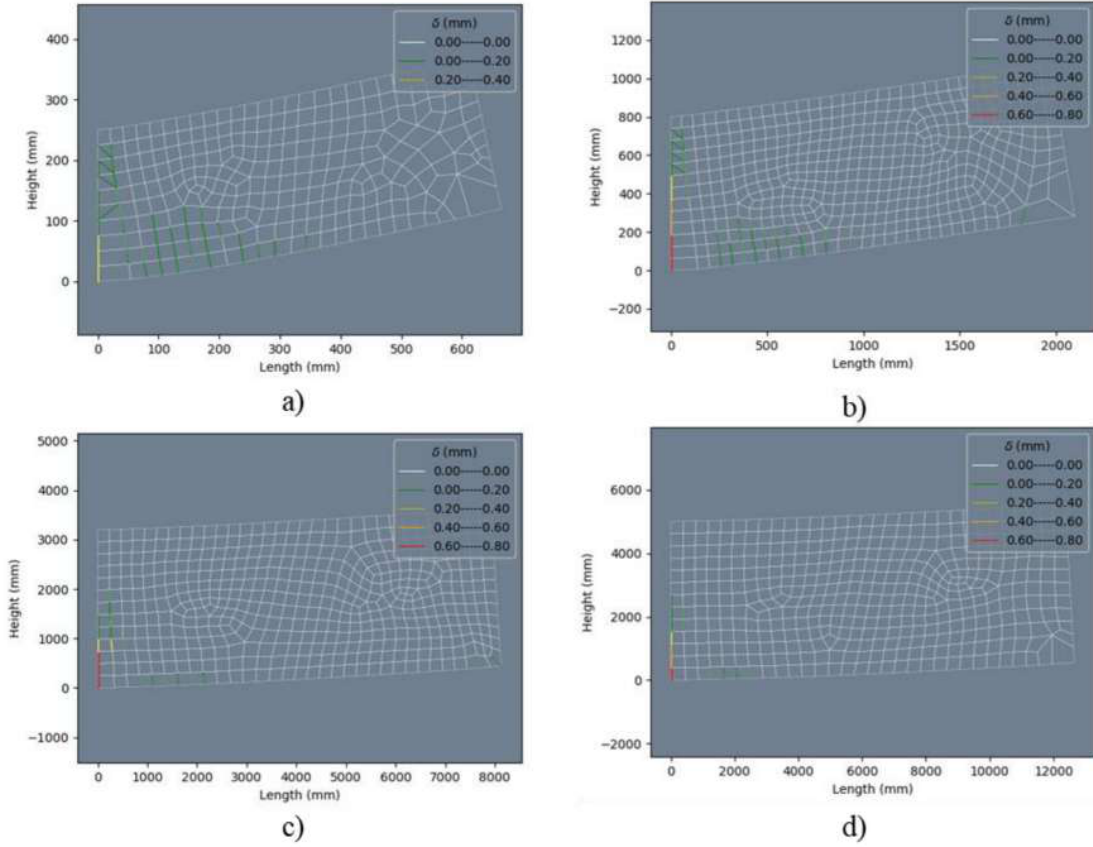


Figura 55 - Malhas deformadas a) 250 elementos, b) 800 elementos c) 3200 elementos e d) 5000 elementos.

Fonte: Autor.

Em cada análise foi extraído o valor da força de colapso (P_u), utilizado para a determinação da tensão de colapso (f_t), determinada por meio de (39):

$$f_t = \frac{P_u LH}{2I} \quad (39)$$

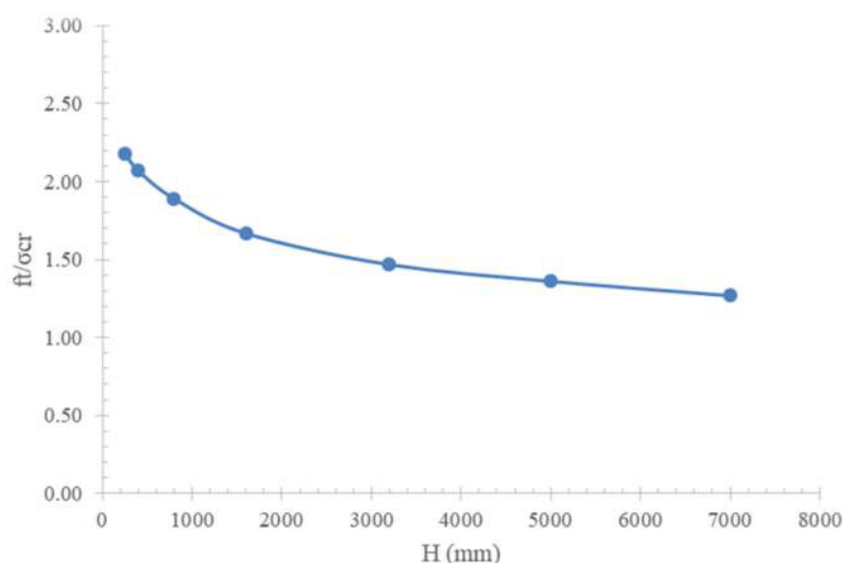
onde: P_u é a carga de colapso, L é o vão da viga, H é a altura da viga e I é o momento de inércia da seção. Os resultados de f_t são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Resultados "size effect"

H (mm)	Nº de Elementos	P_u (N)	L (mm)	b (mm)	I (mm ⁴)	f_t (N/mm ²)	f_t/σ_{cr}
250	254	6211,420	625	38	4,95E+07	9,808	2,179
400	366	9438,490	1000	38	2,03E+08	9,314	2,070
800	466	17237,400	2000	38	1,62E+09	8,505	1,890
1600	477	30416,900	4000	38	1,30E+10	7,504	1,668
3200	479	53534,100	8000	38	1,04E+11	6,604	1,467
5000	431	77544,200	12500	38	3,96E+11	6,122	1,360
7000	559	101182,000	17500	38	1,09E+12	5,706	1,268

Fonte: Autor.

Como pode ser notado o comportamento da tensão de ruptura obtida via simulação de elementos finitos, comportam-se de modo semelhante ao que se encontra na literatura, ocorrendo o decréscimo conforme aumenta-se as dimensões da viga. De modo complementar na Figura 56, tem-se a relação entre a razão de f_t/σ_{cr} e a variação de H. Pode se perceber que a curva apresentada se comporta de modo semelhante ao encontrado em outros trabalhos como os de Ožbolt, Eligehausen e Petrangeli (1994), onde para valores menores de H ocorre uma variação maior da tensão de ruptura, enquanto que para valores elevados de H a redução da tensão de ruptura passa a ocorrer de modo mais suave, aproximando-se do seu valor crítico.

Figura 56 – Gráfico *size effect* via MDCX.

Fonte: Autor.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho, de modo geral, trata da formulação de um elemento finito irregular com 6 bandas de localização para análise de chapas, empregadas em problemas de localização de deformações. O desenvolvimento desse elemento trata-se de uma continuação do avanço da MDCX, para meios contínuos bidimensionais, em especial, esta pesquisa apresenta mais uma ferramenta para modelar a degradação de materiais genéricos caracterizados por leis de dano linear.

A princípio, fez-se uma pequena revisão sobre o problema de localização de deformações, discutindo os seus aspectos numéricos e físicos. Através de um exemplo simples de barra engastada submetida a um deslocamento axial, discute-se o problema de não unicidade de solução que ocorre em problemas de localização analisados via Mecânica do Dano Clássico. Em seguida, o mesmo exemplo é abordado por meio da TDC, e dessa maneira é demonstrado como a utilização da variável de alongamento nas equações constitutivas do material, e a adoção de bandas de localização no elemento finito, contornam os problemas anteriormente encontrados no modelo de dano clássico.

Posteriormente, faz-se uma revisão sobre a expansão da TDC para meios contínuos bidimensionais, descrevendo principalmente sobre o processo de dedução do elemento finito quadrilateral através dos “*numexes*”, da adição das bandas de localização e espessuras de banda nas leis constitutivas do elemento. Via observação dos resultados obtidos por Amorim (2016) e Oliveira (2020) foi determinado como objetivo deste trabalho, a construção de um elemento finito isoparamétrico com seis bandas de localização.

De maneira geral, os resultados apresentados nessa pesquisa reforçam a hipótese de que o uso da MDCX alcança soluções numéricas com objetividade de solução e independência de malha. Em especial, o elemento irregular com seis bandas, aqui desenvolvido, teve relativo sucesso em contornar as limitações quanto ao uso de malhas irregulares e falhas devido as condições de contorno, anteriormente apresentadas nos trabalhos de Amorim (2016) e Oliveira (2020), respectivamente.

No entanto, pode-se perceber também o surgimento de novos desafios que poderão ser investigados nos próximos estudos ligados a MDCX, sendo eles: a influência exercida pelo tamanho do incremento de carga encontrada no Exemplo 6 e os problemas ligados a orientação da malha observados nos Exemplos 3 e 4. Cabe destacar que problemas semelhantes também são encontrados e já discutidos em teorias mais consolidadas como pode ser visto nos trabalhos de Comi e Perego (2001) e Dias, Oliver e Huespe (2012).

Dessa maneira, pode-se perceber que ainda existem melhorias a serem desenvolvidas no modelo e no elemento finito proposto, de modo a conseguir cada vez mais aproximar de maneira precisa o comportamento dos materiais estudados. Algumas sugestões de trabalhos futuros são:

- A incorporação de leis de dano não lineares específicas para materiais como: o concreto, os metais, argamassas e rochas. Isso será possível através da realização de uma rotina de ensaios experimentais;
- O desenvolvimento de elementos finitos capazes de captar o comportamento relacionado ao modo II (cisalhamento no plano);
- A substituição do elemento finito quadrilateral aqui utilizado pelo LST (“*Linear Strain Triangle*”), onde se espera que por sua maior ordem seja capaz de captar mais zonas de localização, além de diminuir os problemas relacionados ao “*mesh bias*”;
- Expansão para meios tridimensionais usando, por exemplo, um elemento finito hexaédrico com oito nós e vinte e quatro graus de liberdade;

REFERÊNCIAS

ABAQUS 6.421.5.0 – Student Version, 2019

ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. C. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, v. 32, p. 974-981, 2010

AMORIM, D. L. N. F.; PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. The extended lumped damage mechanics: a new formulation for the analysis of softening with FE size independence. *Mechanics Research Communications*, [S. l.], v. 91, p. 13–18, 2018.

AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: application in tunnel linings. *Engineering Structures*, v. 70, p. 23-35, 2014a

AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, n. 24, p. 4070-4079, 2013

AMORIM, D. L. N. F. On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analysis: new developments and applications. 2016. - University of São Paulo, [s. l.], 2016.

AVON, D. T. Un algoritmo para mejorar la convergencia de problemas no lineales em mecanica de sólidos. 2002. Universidad de Los Andes, [s. l.], 2002

BAI Y., KURATA M., FLÓREZ-LÓPEZ J., Nakashima M. Model for fatigue crack propagation and closure in steel beams subjected to non-stationary loading. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Forthcoming, 2016

BAŽANT, Z. P. Fracture energy of heterogeneous materials and similitude. In: *Fracture of concrete and rock*. Springer, New York, NY. p. 229-241, 1989.

BAZANT, Z. P.; PLANAS, J. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. CRC press, 1997.

BENALLAL, A.; COMI, C. Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. *International journal of solids and structures*, v. 39, n. 13-14, p. 3693-3716, 2002.

BENALLAL, A.; COMI, C. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 51, n. 5, p. 851-899, 2003.

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 196, n. 1-3, p. 304-320, 2006.

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M.; CODINA, R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics: Part I: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 37-40, p. 2559-2570, 2010.

- CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures*, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.
- COMI, C.; PEREGO, U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International journal of solids and structures*, v. 38, n. 36-37, p. 6427-6454, 2001.
- DIAS, I. F.; OLIVER, J.; HUESPE, A. E. Strain injection techniques in numerical modeling of propagating material failure. *International Center for Numerical Methods in Engineering*, 2012.
- FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. Fracture and damage mechanics for structural engineering of frames: state-of-the-art industrial application. Hershey, Pennsylvania, USA: IGI Global, 2015. *E-book*.
- GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 37, n. 10, p. 1434-1452, 2013.
- HASHIGUCHI, K.; PROTASOV, A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. *Int. J. Plasticity*, [S. l.], v. 20, n. 10, p. 1909–1930, 2004.
- HASSANZADEH, M. Behaviour of fracture process zones in concrete influenced by simultaneously applied normal and shear displacements. *Division of Building Materials, Lund Institute of Technology*, 1992.
- HAVLÁSEK, P.; GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. Analysis of size effect on strength of quasi-brittle materials using integral-type nonlocal models. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 157, p. 72-85, 2016.
- KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. *Otdeleniye Technicheskikh Nauk*, [S. l.], v. 8, p. 28–31, 1958.
- KAEWKULCHAI, G.; WILLIAMSON, E. B. Beam element formulation and solution procedure for dynamic progressive collapse analysis. *Computers and Structures*, v. 82, p. 639-651, 2004.
- KANI, G.. How safe are our large reinforced concrete beams?. In *Journal Proceedings* ,v. 64, n. 3, p. 128-141, 1967.
- KARIHALOO, B. L.; ABDALLA, H. M.; XIAO, Q. Z. Size effect in concrete beams. *Engineering fracture mechanics*, v. 70, n. 7-8: p. 979-993, 2003.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. *Mechanics of solid materials*. [S. l.]: Cambridge University Press, 1990. *E-book*.
- LIU, Y.-B., LIU, J.-B. A damage beam element model for nonlinear analysis of reinforced concrete member. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, v. 24, n. 02, p. 95-100, 2004.

- MARANTE, M. E.; BENALLAL, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de falla de sólidos inelásticos mediante la teoría de localización. *Ingeniería Acta Científica Venezolana*, [S. l.], v. 58, n. 2, p. 43–51, 2007.
- MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Plastic localization revisited. *Journal of Applied Mechanics*, [S. l.], v. 71, 2004.
- MARANTE, M. E.; PICÓN, R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Analysis of localization in frame members with plastic hinges. *International Journal of Solids and Structures*, [S. l.], v. 41, p. 3961–3975, 2004.
- MIHASHI, H. , A stochastic theory for fracture of concrete. *Fracture mechanics of concrete*, p. 301-340, 1983.
- MIHASHI, H.; ZAITSEV, J. W. Statistical nature of crack propagation. Report to RILEM TC, v. 50, n. 1-21, 1981.
- MOREL, S.; DOURADO, N. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures*, v. 48, n. 10: p. 1403-1412, 2011.
- MROGINSKI, J. L.; ETSE, G.; VRECH, S. M. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *International Journal of Plasticity*, v. 27, n. 4, p. 620-634, 2011.
- OLIVEIRA, J. M. Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios Bidimensionais: Elemento Finito para Problemas de Localização de Deformações em Chapas. 2020, Universidade Federal de Sergipe.
- OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R.; PETRANGELI, M. The size effect in concrete structures. 1994.
- PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simulation of damage in RC frames with variable axial force. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 28, p. 311-328, 1999
- PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; HILD, F.; ROUX, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. *Engineering Structures*, v. 46, p. 407-416, 2013
- PROENÇA, S. P. B. Introdução às mecânicas do dano e da fratura - notas de aula. São Carlos: Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, 2008. *E-book*.
- RECCHIA, Giuseppina et al. DEM simulation of anisotropic granular materials: elastic and inelastic behavior. *Granular Matter*, v. 22, n. 4, p. 1-13, 2020.
- RUDNICKI, J. W.; RICE, J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, [S. l.], v. 23, 1975.
- STOREN, S.; RICE, J. R. Localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, [S. l.], v. 23, n. 6, p. 421–441, 1975.

UZCATEGUI. Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la web. 2012. - University of Los Andes, Venezuela, 2012.

WANG, Q. Z.; ZHANG, S.; XIE, H. P. Rock dynamic fracture toughness tested with holed-cracked flattened Brazilian discs diametrically impacted by SHPB and its size effect. *Experimental mechanics*, v. 50, n. 7, p. 877-885, 2010.

WEIBULL, W. A statistical theory of strength of materials. IVB-Handl., 1939.

ZHANG, Y. Q.; LU, Y.; YU, M. H. Investigation of strain localization in elastoplastic materials with transversely isotropic elasticity. *Int. J. Mech. Sci., [S. l.]*, v. 45, n. 2, p. 217–233, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto por Amorim (2016).

Neste apêndice algumas das matrizes encontradas por Amorim (2016) são expressas em um sistema de coordenadas cartesianas global (x, y) .

A matriz de transformação cinemática $[b]$ é determinada em (A.1).

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$b_{11} = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$b_{12} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.3})$$

$$b_{13} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.4})$$

$$b_{14} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.5})$$

$$b_{21} = \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.6})$$

$$b_{22} = \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.7})$$

$$b_{25} = \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$b_{26} = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.9})$$

$$b_{31} = \frac{x_i - x_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$b_{32} = \frac{y_i - y_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.11})$$

$$b_{37} = \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.12})$$

$$b_{38} = \frac{y_l - y_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$b_{43} = \frac{x_j - x_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.14})$$

$$b_{44} = \frac{y_j - y_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.15})$$

$$b_{45} = \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.16})$$

$$b_{46} = \frac{y_k - y_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.17})$$

$$b_{55} = \frac{x_k - x_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.18})$$

$$b_{56} = \frac{y_k - y_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.19})$$

$$b_{57} = \frac{x_l - x_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.20})$$

$$b_{58} = \frac{y_l - y_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.21})$$

A matriz de transformação dos “*numexes*” $[T]$ em coordenadas cartesianas é obtida através de simples manipulação matricial das equações (16), (18) e (19):

$$[T] = ([B][b]^T)([b][b]^T)^{-1} \quad (\text{A.22})$$

Para o elemento finito de quatro nós da Figura A.1, a matriz cinemática $[B]$ pode ser obtida com base nas funções de forma do elemento de quatro nós $(N(x, y))$:

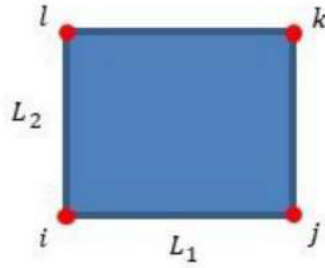


Figura A.1 - Elemento Finito de quatro nós

Fonte: Oliveira (2020)

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (A.23)$$

sendo:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.24)$$

$$N_j(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.25)$$

$$N_k(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.26)$$

$$N_l(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.27)$$

Outro modo de se obter $[B]$, é com base nas suas deformações $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$, como mostrado em (A.28).

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_l} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_l} \end{bmatrix} \quad (A.28)$$

onde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ são obtidas conforme equação (15).

A matriz de coeficientes elásticos $[H]$, para um estado plano de tensões e material isotrópico, é definida por:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-v^2} & \frac{E \cdot v}{1-v^2} & 0 \\ \frac{E \cdot v}{1-v^2} & \frac{E}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 \cdot (1+v)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Por último, o vetor de deformações generalizadas ou alongamentos de dano $\{\delta_d\}$ causados devido a formação de bandas de localização, é expressado por:

$$\begin{aligned} \{\delta_d\} = & \begin{pmatrix} 0 \\ e_i^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_i^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_j^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} e_j^{jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ e_k^{jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_k^{jk} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ e_k^{kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_l^{kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_k^{kl} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} e_i^{li} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ e_i^{li} \frac{x_i y_k - x_k y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_l^{li} \frac{x_i y_k - x_k y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \end{array} \right\}$$

APÊNDICE B – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto por Oliveira (2020).

Para o elemento finito de Oliveira (2020) com bandas diagonais e possibilidade de malhas com elementos irregulares, o vetor de deformações generalizadas ou alongamentos de dano $\{\delta_d\}$, escrito em coordenadas cartesianas, é dado por:

$$\{\delta_d\} = [b] \left\{ \begin{array}{c} s_{ij}e_i^{ij} + s_{ik}e_i^{ik} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} - c_{ik}e_i^{ik} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{ik}}e_i^{ik} + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ik}}e_k^{ik} + s_{jl}e_j^{jl} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - \frac{(x_k - x_j)}{l_{ik}}e_i^{ik} - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ik}}e_k^{ik} + c_{jl}e_j^{jl} \\ s_{ik}e_k^{ik} - \frac{(y_l - y_k)}{l_{jl}}e_j^{jl} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{jl}}e_l^{jl} \\ -c_{ik}e_k^{ik} + \frac{(x_l - x_k)}{l_{jl}}e_j^{jl} + \frac{(x_k - x_j)}{l_{jl}}e_l^{jl} \\ -s_{il}e_l^{il} + s_{jl}e_l^{jl} \\ c_{il}e_l^{il} + c_{jl}e_l^{jl} \end{array} \right\} \quad (B.1)$$

onde $[b]$ é a matriz de transformação cinemática expressa no Apêndice A e e são as espessuras de cada banda em cada nó. Os termos s e c são os cossenos e senos diretores de cada banda, obtidos por:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{(x_j - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \\ s_{ij} &= \frac{(y_j - y_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \\ c_{il} &= \frac{(x_l - x_i)}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \\ s_{il} &= \frac{(y_l - y_i)}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \\ c_{ik} &= \frac{(x_k - x_i)}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$s_{ik} = \frac{(y_k - y_i)}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

$$c_{jl} = \frac{(x_j - x_l)}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}}$$

$$s_{jl} = \frac{(y_l - y_j)}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}}$$

APÊNDICE C – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX atual

Para o elemento finito deduzido nesse trabalho toma-se como base o elemento quadrilateral irregular da Figura C.1

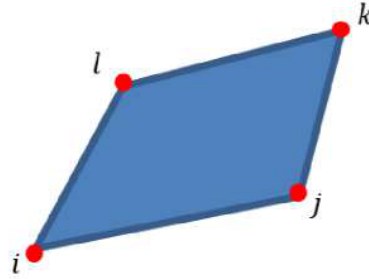


Figura C.1 - Elemento finito irregular de quatro nós

Fonte: Autor

Tomando o sentido de orientação das bandas definido como: $i - j, j - k, i - l, l - k, i - k$ e $j - l$ a matriz de transformação cinemática $[b]$ passa a ser definida como:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

onde:

$$b_{11} = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (C.2)$$

$$b_{12} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (C.3)$$

$$b_{13} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (C.4)$$

$$b_{14} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (C.5)$$

$$b_{21} = \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{C.6})$$

$$b_{22} = \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{C.7})$$

$$b_{25} = \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{C.8})$$

$$b_{26} = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{C.9})$$

$$b_{31} = \frac{x_i - x_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{C.10})$$

$$b_{32} = \frac{y_i - y_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{C.11})$$

$$b_{37} = \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{C.12})$$

$$b_{38} = \frac{y_l - y_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{C.13})$$

$$b_{43} = \frac{x_j - x_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{C.14})$$

$$b_{44} = \frac{y_j - y_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{C.15})$$

$$b_{45} = \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{C.16})$$

$$b_{46} = \frac{y_k - y_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{C.17})$$

$$b_{55} = \frac{x_k - x_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{C.18})$$

$$b_{56} = \frac{y_k - y_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{C.19})$$

$$b_{57} = \frac{x_l - x_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{C.20})$$

$$b_{58} = \frac{y_l - y_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{C.21})$$

O vetor de alongamentos generalizados ou de dano $\{\delta_a\}$, passa a ser definido através de:

$$\{\delta_d\} = [b] \left\{ \begin{array}{c} s_{ij}e_i^{ij} + s_{ik}e_i^{ik} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} - c_{ik}e_i^{ik} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{ik}}e_i^{ik} + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ik}}e_k^{ik} + s_{jl}e_j^{jl} + s_{jk}e_j^{jk} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - \frac{(x_k - x_j)}{l_{ik}}e_i^{ik} - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ik}}e_k^{ik} - c_{jl}e_j^{jl} - c_{jk}e_j^{jk} \\ s_{ik}e_k^{ik} - \frac{(y_k - y_l)}{l_{jl}}e_j^{jl} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{jl}}e_l^{jl} - s_{kl}e_k^{kl} + s_{jk}e_k^{jk} \\ -c_{ik}e_k^{ik} + \frac{(x_k - x_l)}{l_{jl}}e_j^{jl} - \frac{(x_k - x_j)}{l_{jl}}e_l^{jl} + c_{kl}e_k^{kl} - c_{jk}e_k^{jk} \\ -s_{il}e_l^{il} + s_{jl}e_l^{jl} - s_{kl}e_l^{kl} \\ c_{il}e_l^{il} - c_{jl}e_l^{jl} + c_{kl}e_l^{kl} \end{array} \right\} \quad (C.22)$$

As matrizes $[B]$, $[T]$ e $[H]$ são definidas como mostrado no Apêndice A.

APÊNDICE D – Montagem da matriz Jacobiana do sistema linearizado

Com mostrado no capítulo 4, um passo importante durante o processo de análise é a obtenção da solução iterativa através do sistema linearizado, neste capítulo mostraremos como é montada a matriz Jacobiana.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial N}_{5 \times 5} & \frac{\partial r}{\partial e}_{5 \times 12} \\ \frac{\partial g}{\partial N}_{12 \times 5} & \frac{\partial g}{\partial e}_{12 \times 12} \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

A primeira submatriz está relacionada as derivadas da lei de estado em relação as tensões dos numexes:

$$\frac{\partial r}{\partial N}_{5 \times 5} = -[E]^{-1} \quad (D.2))$$

A segunda submatriz é definida como a derivada das lei de estado em relação as espessuras de banda de localização:

$$\frac{\partial r}{\partial e}_{5 \times 12} = -B \frac{\partial \delta^d}{\partial e} \quad (D.3)$$

Para montagem das submatrizes relacionadas a leis de dano é necessário se adicionar condicionais que avaliem se a lei de dano está ativa ou não. Cabe ressaltar que o índice *bd* indica que é aquela variável pertence a uma banda de localização, e o índice *bde* a uma espessura de banda.

No caso da terceira submatriz que relaciona a derivada da lei de evolução do dano em relação as tensões dos numexes fazemos a seguinte consideração:

- Se g_{bde} estiver ativo, ou seja, $g_{bde} > 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial N}_{1 \times 5} = [H][T][E]^{-1} \quad (D.4)$$

- Se g_{bde} não estiver ativo, ou seja, $g_{bde} \leq 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial N}_{1 \times 5} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (D.5)$$

Por último a quarta submatriz que está ligada a derivada da lei de evolução do dano em relação as espessura de dano, apenas a diagonal principal possui valores diferentes de 0, sendo definida através de:

- Se g_{bde} estiver ativo, ou seja, $g_{bde} > 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial e}_{1 \times 1} = \frac{\sigma_{cr}}{\delta_u} \quad (D.6)$$

- Se g_{bde} não estiver ativo, ou seja, $g_{bde} \leq 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial e_{1x1}} = 1 \tag{D.7}$$