



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SUAS TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



DANIEL VICTOR DA CUNHA TELES

MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA MEIOS BIDIMENSIONAIS:
FORMULAÇÃO PARA MODO I COM LEI DE DANO NÃO LINEAR

São Cristóvão – SE

2022

DANIEL VICTOR DA CUNHA TELES

**MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO PARA MEIOS BIDIMENSIONAIS:
FORMULAÇÃO PARA MODO I COM LEI DE DANO NÃO LINEAR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (UFS) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

São Cristóvão – SE

2022

AGRADECIMENTOS

Ao meu Pai Paulo e à minha Mãe Selma, por sempre batalhar para me proporcionar tudo o que fosse necessário, e por me apoiar incondicionalmente em todas as etapas.

À minha irmã Paulinha por me apoiar e ajudar em todas as decisões tomadas ao longo de toda minha vida e ao meu pequeno irmão João Pedro, que chegou há pouco mais de seis anos para trazer muita alegria para toda família.

À minha companheira Jéssica, por sempre estar ao meu lado nos últimos oito anos, me apoiar, incentivar e me compreender em todos os momentos.

Aos meus avós, tios e primos que sempre se mostraram muito orgulhosos e me apoiaram em todos os momentos.

Aos meus grandes irmãos da ADJMW pelos longos anos amizade, sintonia e por serem sempre inspiração e exemplos de parceria, respeito e compreensão.

A todos os amigos de jornada no PROEC, em especial àqueles que estiveram mais próximos devido à convivência no LAMEC enquanto foi possível, Danilo, Rafael, Alan e Leonardo.

Ao meu Orientador David, por grandes ensinamentos e orientação, e ao professor Ludmilson, por juntos proporcionarem a abertura do LAMEC, que é um exemplo do incentivo dado por vocês à pesquisa.

Aos demais professores com os quais pude aprender bastante no PROEC.

Aos professores Julio Flórez-López e Ricardo Picón pelas inúmeras contribuições no presente trabalho, incluindo a breve passagem por Sergipe que foi de fundamental importância na etapa experimental, e as reuniões nos mais variados horários e dias com contribuições sempre pertinentes.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

A todos que eu possa ter esquecido de citar, mas que fizeram parte direta ou indiretamente desta jornada.

RESUMO

A descrição do comportamento não linear de elementos estruturais é de fundamental importância na engenharia. Esta descrição é realizada a partir de modelos matemáticos capazes de simular fenômenos observados na realidade utilizando ferramentas computacionais para solução, a partir de métodos numéricos, destas formulações. Atualmente, os principais modelos utilizados são baseados em conceitos da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano. A primeira apresenta observações importantes a respeito dos fenômenos não lineares após o regime elástico. A segunda descreve o processo de deterioração por meio de fissuras discretas. A mecânica do dano, por sua vez, incorpora uma nova variável interna, denominada dano, responsável pela quantificação da deterioração do material na mesoescala. Apesar das grandes contribuições proporcionadas por estas teorias, a aplicação prática em alguns problemas de engenharia civil apresenta alguns entraves, como a falha ao tentar reproduzir pela plasticidade o comportamento não linear próximo ao colapso, a necessidade da consideração de fissuras iniciais na mecânica da fratura e a infinidade de soluções ao tentar analisar o fenômeno de localização de deformações pela mecânica do dano clássica. O fenômeno anteriormente citado é caracterizado fisicamente pela concentração de deformações em faixas estreitas dos materiais, que podem acelerar drasticamente a falha estrutural. Uma teoria mais recente tem sido exitosa ao analisar tal fenômeno, a mecânica do dano concentrado. Esta reúne conceitos-chave da mecânica da fratura e do dano em rótulas inelásticas. Posteriormente, a mecânica do dano concentrado foi estendida para análise de meios bidimensionais, dando início a chamada Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX). Neste sentido, as rótulas inelásticas passam a ser bandas de localização, e, portanto, o elemento é composto por linhas inelásticas que concentram os fenômenos não lineares enquanto todo o restante do elemento permanece elástico. O elemento finito alvo deste trabalho foi proposto inicialmente por Amorim (2016) para analisar chapas com modo de falha I. Este elemento conta com quatro bandas de localizações nas faces de um elemento quadrilateral com quatro nós. O objetivo do presente estudo é dar continuidade aos avanços obtidos até então na MDCX, introduzindo uma lei de dano não linear (LDNL) no elemento proposto por Amorim (2016) a fim de representar melhor o comportamento do material após o regime elástico. Os resultados mostram que a modificação apresenta resultados promissores, objetividade de solução e capacidade de localização da zona de falha em exemplos acadêmicos e experimentais.

Palavras-chave: lei de dano não linear; Mecânica do Dano Concentrado Expandida; chapas; Modo de falha I; localização de deformações; elementos finitos.

ABSTRACT

Description of nonlinear behaviour of structural elements is of fundamental importance in engineering. Mathematical models using computational tools that are able to simulate phenomena observed in reality make this description. Currently, the main models used are based on concepts of plasticity, fracture and damage mechanics. The first presents important remarks about nonlinear phenomena after the elastic regime. Second describes the deterioration process through a small number of discrete cracks. On the other hand, the damage mechanics incorporate a new internal variable responsible for material deterioration. Despite the great contributions provided by these theories, the practical application in civil engineering situations presents some problems, such as the failure to reproduce through plasticity the nonlinear behaviour close to collapse, the need to consider initial cracks in fracture mechanics and the infinity of solutions when trying to analyse the phenomenon of strain localization by classic damage mechanics. The aforementioned phenomenon is physically characterized by the concentration of deformations in narrow bands of materials, which can drastically accelerate structural failure. A more recent theory has been successfully in analysing this phenomenon, the lumped damage mechanics. This theory uses key concepts of fracture and mechanics in inelastic hinges. Later, the lumped damage mechanics was extended to the analysis of two-dimensional problems, initialling the so-called Expanded Lumped Damage Mechanics (XLDM). In this sense, the inelastic hinge become localization bands, and, therefore, the element is composed by inelastic lines that concentrate non-linear phenomena while all the rest of the element remains elastic. The target finite element of this work was initially proposed by Amorim (2016) to analyse plates with failure mode I. This element has four localization bands on the faces of a quadrilateral element with four nodes. The objective of this study is to continue the advances obtained so far in MDCX, introducing a nonlinear damage law on the element proposed by Amorim (2016) in order to improve the behaviour of the material after the elastic regime. The results show that the modification presents promising results, solution objectivity and ability to locate the zone failure in academic and experimental examples.

Keywords: nonlinear damage law; Extended Lumped Damage Mechanics; thin plates; failure Mode I; Strain localization; finite elements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Chapa infinita com furo em forma de elipse.....	21
Figura 2.2. Modos de propagação de fissuras.	22
Figura 2.3. Elemento sujeito a carga uniaxial danificado.....	24
Figura 2.4. (a) Barra sujeita a deslocamento imposto em sua extremidade livre, e (b) comportamento tensão-deformação no modelo de dano.	27
Figura 2.5. (a) Comportamento tensão-deformação do exemplo, (b) Solução única antes do pico, (c) solução homogênea e (d) solução localizada.	29
Figura 2.6. Dependência de malha vista pela resposta força x deslocamento.....	29
Figura 2.7. Elemento finito com dano concentrado.....	31
Figura 2.8. (a) comportamento inelástico do material e (b) resposta numérica pela mecânica do dano concentrado para uma barra solicitada uniaxialmente.	32
Figura 2.9. (a) comportamento inelástico do material e (b) curva força-deslocamento com LDNL.	33
Figura 2.10 Elemento finito quadrilateral no espaço cartesiano (a) e isoparamétrico (b).....	34
Figura 2.11. (a) Elemento quadrilateral de 4 nós (b) treliça equivalente de 5 barras (c) espaço de referência.	35
Figura 2.12. (a) Posição das bandas de localização (b) espessura das bandas.	37
Figura 2.13. Elemento proposto por (a) Amorim (2016) e (b) Oliveira (2020).	39
Figura 2.14. Elemento finito quadrilateral com seis bandas de localização.....	40
Figura 2.15. (a) Elemento quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço de referência...42	
Figura 3.1. Fluxograma da solução local no PEEF.	47
Figura 3.2. (a) e (b) Ensaio de flexão de 3 pontos monitorado, (c) situação de um dos prismas após o ensaio.....	50
Figura 3.3. Curvas força-deslocamento dos prismas ensaiados.	51
Figura 3.4. Medição da abertura de fissura no <i>Correli-Q4</i>	51
Figura 3.5. Curva força-abertura de fissura.....	51
Figura 4.1. Chapa sólida em L.....	52
Figura 4.2. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).	54
Figura 4.3. Repostas das malhas mais refinadas simuladas: 432 e 768 elementos.	55
Figura 4.4. Resultados para $q = -6,25$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	57

Figura 4.5. Resultados para $q = -8,3$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	58
Figura 4.6. Resultados para $q = -25,0$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	59
Figura 4.7. Resultados para $q = -37,5$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	60
Figura 4.8. Resultados para $q = -50,0$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	61
Figura 4.9. Comparação entre as curvas força-deslocamento com a variação do parâmetro q para a malha com 768 elementos.....	62
Figura 4.10. Resultados para $\sigma_{cr} = 1,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	64
Figura 4.11. Resultados para $\sigma_{cr} = 3,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	65
Figura 4.12. Resultados para $\sigma_{cr} = 4,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).....	66
Figura 4.13. Comparação entre as curvas força-deslocamento com a variação de σ_{cr} para a malha com 768 elementos.	67
Figura 4.14. Exemplo para análise do fator de escala.	68
Figura 4.15. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada para H igual a 50 (b), 150 (c), 300 (d), 450 (e), 600 (f) e 1000 (g).....	69
Figura 4.16. Gráfico do fator de escala pelo elemento proposto.	70
Figura 4.17. Esquema das simulações.	71
Figura 4.18. Comparação das simulações com os experimentos realizados nos prismas da primeira moldagem: curvas força-deslocamento (a) curvas força-abertura de fissura (b), malha deformada com 40 (c), 140 (d), 240 (e) e 400 elementos (f).....	73
Figura 4.19. Comparação das simulações com os experimentos realizados nos prismas da segunda moldagem: curvas força-deslocamento (a) curvas força-abertura de fissura (b), malha deformada com 40 (c), 140 (d), 240 (e) e 400 elementos (f).....	74
Figura 6.1. Configuração do hexágono duplo.	76
Figura 6.2. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 230 (b), 468 (c), 672 (d) e 829 elementos (e).....	77
Figura 6.3. Chapa em L apresentada em Winkler (2001).	78

Figura 6.4. Curvas força-deslocamento obtidas na simulação e intervalo experimental (a) respostas das malhas mais refinadas simuladas (b), malha deformada com 108 (c), 192 (d), 300 (e), 432 (f) e 588 elementos (g).	80
Figura 6.5. Comparação da resposta força-deslocamento entre o elemento com quatro e seis bandas, com lei de dano linear e não linear (a), deformada do elemento com quatro bandas (b), seis bandas e lei de dano linear (c) e seis bandas e LDNL (d).....	81
Figura 6.6. Comparação do L30 com diferentes valores de q.	82
Figura 0.1. Elemento finito de quatro nós.	93
Figura 0.1. Elemento finito irregular de quatro nós.	95
Figura 0.1. Representação das variáveis do modelo.....	100
Figura 0.2. Carga de impacto aplicada à meio-vão (simetria).....	101
Figura 0.3. Ajustes realizados para propor as funções do modelo.	102
Figura 0.1. Elemento de pórtico utilizado (PERDOMO et al., 2013).	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. Legenda das cores apresentadas nas figuras das malhas deformadas.	51
Tabela 4.2. Resultados das análises do efeito de escala.	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CPs	–	Corpos de prova
FCT	–	Fator de concentração de tensão
FIT	–	Fator de intensidade de tensão
MEF	–	Método dos elementos finitos
MDCX	–	Mecânica do Dano Concentrado Expandida
LDNL	–	Lei de dano não linear

LISTA DE SÍMBOLOS

x, y, z	– Coordenadas cartesianas
E	– Módulo de elasticidade ou de Young
s, t	– Coordenadas no espaço paramétrico
ε	– Deformação, deformação total
σ_{max}	– Tensão máxima local
σ_{med}	– Tensão média aplicada
a	– Diâmetro maior, comprimento de fissura
b	– Diâmetro menor
P	– Força, força axial
Δ	– Deslocamento, alongamento, deslocamento imposto
W_{ext}	– Trabalho externo
U	– Energia de deformação, deslocamentos nodais da estrutura
E_s	– Energia necessária para formação de novas superfícies de fissuras
E_T	– Energia total do sistema
G	– Taxa de liberação de energia ou força condutora da fissura
R	– Resistência a fissuração
A	– Área, área total, área da seção transversal
A_d	– Área de microdefeitos
σ	– Tensão normal média, tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}$	– Tensão efetiva
$\bar{A}$	– Área de resistência efetiva
ω	– Dano contínuo
$\bar{E}$	– Módulo de elasticidade efetivo
ε^e	– Deformação elástica
ε^ω	– Deformação de dano
ε^p	– Deformação plástica
G^ω	– Taxa de liberação de energia do elemento danificado
R^ω	– Função de resistência ao dano
L	– Comprimento da barra, comprimento total

ε_{cr}	– Deformação crítica
ε_u	– Deformação última
L_1	– Comprimento do elemento 1
L_2	– Comprimento do elemento 2
u	– Deslocamento imposto
σ_1	– Tensão no elemento 1
σ_2	– Tensão no elemento 2
N	– Força axial
ε_1	– Deformação no elemento 1
ε_2	– Deformação no elemento 2
$\{q\}$	– Vetor de deslocamentos nodais
u_i, u_j	– Deslocamento no nó i e j respectivamente
δ	– Alongamento, alongamento total do elemento
$\{Q\}$	– Forças nodais do elemento, forças nodais externas
δ^e	– Alongamento elástico
δ^d	– Alongamento de dano
δ_u	– Alongamento último
q	– Parâmetro presente na lei de dano não linear proposta
$\{\varepsilon\}$	– Deformações
$\{\sigma\}$	– Tensões
$[K]$	– Matriz de rigidez
$[B]$	– Matriz cinemática convencional
$[H]$	– Matriz de coeficientes elásticos
i	– Nó do elemento quadrilateral, controle ou passo de iteração
j, k, l	– Nós do elemento quadrilateral
u, v	– Graus de liberdade dos nós do elemento na direção x e y , respectivamente
u_i, v_i	– Deslocamentos na direção x e y respectivamente para o nó i
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	– Tensões de compressão na direção x , y e tensão de cisalhamento no plano xy
$\{\delta\}$	– Deformações generalizadas ou alongamentos dos <i>numexes</i>

δ_{ij}	– Alongamento do <i>numex</i> entre os nós <i>i</i> e <i>j</i>
$[b]$	– Matriz de transformação cinemática
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	– Deformações na direção <i>x</i> , <i>y</i> e distorção no plano <i>xy</i> , respectivamente
a_1, a_3, b_2, b_3 e <i>c</i>	– Constantes independentes do campo de deformações
$[T]$	– Matriz de transformação dos <i>numexes</i>
$\{\delta^d\}$	– Alongamentos de dano
δ_{ij}^d	– Alongamento de dano do <i>numex</i> entre os nós <i>i</i> e <i>j</i>
$e_{i\eta}$	– Espessura da banda no nó <i>i</i> entre os nós <i>i</i> e <i>j</i> (direção η)
$\{\delta^e\}$	– Alongamentos elásticos
<i>e</i>	– Espessura da banda de localização, elemento finito
e_i^{ij}	– Espessura da banda <i>ij</i> no nó <i>i</i>
$\{FR\}$	– Vetor de forças residuais
U_i	– Deslocamento da estrutura na iteração <i>i</i>
g_i^{ij}	– Lei de evolução do nó <i>i</i> da banda <i>ij</i>
σ_i^{ij}	– Tensão normal no nó <i>i</i> da banda <i>ij</i>
$\sigma_{cr_i}^{ij}$	– Tensão crítica no nó <i>i</i> da banda <i>ij</i>
$\delta_{u_i}^{ij}$	– Alongamento ultimo do nó <i>i</i> da banda <i>ij</i>
ζ	– Controle de incrementação do passo <i>i</i>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. Considerações iniciais	15
1.2. Objetivos.....	19
1.2.1 <i>Objetivo Geral</i>	19
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i>	19
1.3. Organização do trabalho	19
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1. Mecânica da fratura	20
2.2. Mecânica do dano	22
2.3. Localização de deformações	26
2.4. Mecânica do dano moderna.....	30
2.5. Mecânica do dano concentrado	30
2.6. Mecânica do dano concentrado expandida (MDCX)	33
3. METODOLOGIA.....	43
3.1. Elemento proposto e implementação numérica.....	43
3.2. Procedimento experimental	48
4. RESULTADOS	52
4.1. Exemplo chapa em L para $q = -12,5$	52
4.2. Análise paramétrica da variação do parâmetro q	55
4.3. Análise paramétrica da variação da tensão crítica σ_{cr}	62
4.4. Efeito de escala.....	67

4.5. Vigas do LAMCE	71
5. EXPANSÃO DA LDNL PARA ELEMENTO PROPOSTO POR SANTOS (2021)	75
6. RESULTADOS PARA O ELEMENTO COM SEIS BANDAS E LDNL	76
6.1. Hexágono duplo	76
6.2. Experimento chapa em L	78
6.3. Estudo do parâmetro q	81
7. CONCLUSÕES.....	84
REFERÊNCIAS	85
APÊNDICE A – Matrizes do elemento quadrilateral da MDCX proposto por Amorim (2016)	91
APÊNDICE B – Matrizes do elemento quadrilateral da MDCX proposto por Santos (2021)	95
APÊNDICE C – Montagem da matriz jacobiana do sistema linearizado	97
APÊNDICE D – Análise de vigas de concreto armado que falham por cisalhamento solicitadas por cargas de impacto	99
APÊNDICE E – Modelo para analisar pórticos de concreto armado	103

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações iniciais

A mecânica estrutural proporciona formulações que descrevem o comportamento mecânico dos materiais. Uma vez que soluções analíticas das equações diferenciais que governam o problema são limitadas a um conjunto de exemplos com restritas condições de contorno e descrição do comportamento material, utilizam-se soluções aproximadas via métodos numéricos. Neste sentido, torna-se possível a solução de problemas em larga escala com a utilização de computadores. Um dos procedimentos numéricos mais utilizados e pesquisados atualmente é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que requer basicamente a divisão do domínio da estrutura analisada, isto é, realiza-se uma discretização geométrica do problema em partes menores, denominadas de elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). O elemento finito é responsável pela descrição do comportamento estrutural, existindo diferentes formulações de elementos finitos que dependem essencialmente do fenômeno e estrutura analisados. Os principais modelos estruturais desenvolvidos a fim de representar fenômenos fisicamente não lineares são a teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano contínuo.

A teoria da plasticidade surge a partir da observação de fenômenos não lineares em metais, sendo o encruamento e as deformações permanentes/plásticas os principais, ocorrendo após o regime elástico. O primeiro é caracterizado pelo ganho de resistência com o crescimento das deformações, e o segundo pelo surgimento de deformações permanentes. A fim de avaliar estas grandezas, é necessário observar os critérios de falha, regra de fluxo e de encruamento. Dentre os critérios de falha para diferentes gamas de materiais, com diferentes mecanismos de ruptura, tem-se, por exemplo, o critério da tensão normal máxima, critério de Tresca, de Mohr-Coulomb, de Beltrami, de von Mises, de Drucker-Prager e de Green. A regra de fluxo, por sua vez, descreve a relação entre tensão e deformação plástica, enquanto que a regra de encruamento define a mudança do encruamento com a deformação plástica. Estas observações são importantes em diversas aplicações na engenharia, no entanto, a teoria apresenta limitações importantes, falhando ao tentar reproduzir comportamentos não lineares próximo ao colapso.

A mecânica da fratura, por sua vez, representa a deterioração dos materiais considerando descontinuidades discretas, de modo a determinar quando e como tais descontinuidades surgem e evoluem com a intensidade do carregamento (BROEK, 1974). Em meios contínuos, a

deterioração estrutural é modelada por meio da propagação de fissuras discretas, apresentando boa precisão em diversos problemas de alguns ramos da engenharia, como a engenharia aeronáutica. Por outro lado, em estruturas mais corriqueiras da engenharia civil acaba sendo pouco efetiva devido ao esforço computacional demasiado. Por exemplo, em um elemento de concreto armado, a aplicação da mecânica da fratura resulta em controlar a propagação de diversas fissuras, considerando a interação entre diferentes tipos de elementos finitos. Tal condição, apesar de acurada, tem aplicação prática limitada devido ao elevado custo computacional. Ainda assim, a teoria apresenta vários conceitos importantes aplicados posteriormente em novos modelos, como pode ser visto na seção 2.1.

A mecânica do dano contínuo surge utilizando conceitos de um trabalho pioneiro sobre integridade de materiais proposto por Kachanov (1958) e posteriormente desenvolvido por Rabotnov (1969). O trabalho pioneiro buscava modelar o comportamento de ruptura por deformação lenta, conhecido como fluência (KACHANOV, 1958). Neste novo ramo da mecânica estrutural, incorpora-se uma nova variável interna, chamada de dano (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990), responsável pela caracterização da deterioração do material. Tal variável é introduzida nas leis de comportamento, surgindo assim os conceitos de tensão efetiva e hipótese de equivalência em deformações. Apesar destes importantes conceitos, formulações baseadas na mecânica do dano contínuo podem levar a problemas dependentes de malha, levando a um número infinito de soluções que satisfazem as equações locais da teoria (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Como alternativa para modelagem do comportamento de estruturas da engenharia civil, a mecânica do dano concentrado surge na década de 1990 a partir do trabalho de Flórez-López (1993) aplicando os principais conceitos da mecânica da fratura e da mecânica do dano clássica em rótulas plásticas, provenientes da teoria da plasticidade. Vale ressaltar que a mecânica do dano concentrado difere da mecânica do dano contínuo, visto que nesta, a variável de dano trata de defeitos na mesoescala a partir de um elemento de volume representativo (EVR), enquanto que na primeira a variável de dano trata da macro fissuração no material. Embora a mecânica do dano concentrado utilize conceitos como tensão efetiva e hipótese de equivalência em deformações, sua aplicação aproxima-se mais da mecânica da fratura no que se refere as leis de evolução da fissuração, pois utiliza-se do critério de Griffith.

A mecânica do dano concentrado foi inicialmente desenvolvida como um método simplificado de dano para pórticos (ALVA; EL DEBS, 2010; CIPOLLINA; LÓPEZ-

INOJOSA; FLÓREZ-LÓPEZ, 1995; KAEWKULCHAI; WILLIAMSON, 2004; LIU; LIU, 2004; PERDOMO et al., 2013) e desde então vem sendo desenvolvida para diferentes problemas de engenharia, como arcos de concreto armado (AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2013; BRITO et al., 2020), pórticos metálicos (BAI et al., 2016; BAI; GUAN; FLÓREZ-LÓPEZ, 2017), vigas e túneis de concreto simples (AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2014). Recentemente, um modelo simplificado baseado na mecânica do dano concentrado foi desenvolvido para análise de vigas de concreto armado solicitadas por cargas de impacto (OLIVEIRA; TELES; AMORIM, 2020; TELES; OLIVEIRA; AMORIM, 2020) (Apêndice D). Ressalta-se também que o modelo simplificado da mecânica do dano concentrado para pórticos já foi utilizado para análises sísmicas (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FLÓREZ-LÓPEZ, 1995; PERDOMO; RAMÍREZ; FLÓREZ-LÓPEZ, 1999; TELES et al., 2021) (Apêndice E). Amorim (2016), Amorim et. al (2018), Oliveira (2020), Santos (2021) e Picón et al., (2021) apresentaram novos avanços da teoria ao expandir os conceitos para análise de meios contínuos bidimensionais, como chapas e placas, criando a chamada Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX). As principais vantagens desta nova teoria são a análise com independência de malha, baixo custo computacional e não violação do princípio dos efeitos locais, tornando-a assim uma teoria válida para analisar o comportamento não linear de estruturas, incluindo as sujeitas ao fenômeno de localização de deformações.

Diante do exposto, o presente trabalho objetiva dar continuidade aos desenvolvimentos obtidos anteriormente pelo grupo de pesquisa iniciado pelos professores Júlio Flórez-López¹, Sérgio Persival Baroncini Proença² e Ricardo Picón³, que deu origem a MDCX. Os primeiros resultados são apresentados em Amorim (2016) e Amorim et. al (2018) utilizando um elemento regular com quatro bandas de localização em suas faces. Posteriormente o elemento foi modificado por Oliveira (2020), que implementou bandas diagonais e possibilitou a utilização de malhas irregulares. Neste último trabalho foi reportado um desvio na resposta de alguns exemplos devido à falta de bandas em duas das faces, problema similar ao encontrado em trabalhos na literatura técnica como “*mesh bias*” ou “*mesh orientation*”. Em seguida, Santos (2021) e Picón et al., (2021) implementaram o elemento com seis bandas de localização, obtendo, a partir de diversos exemplos acadêmicos, com diferentes configurações geométricas,

¹ School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing, China.

² Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

³ Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile.

resultados que apresentam independência de malha. Além disso, Santos (2021) e Picón et al., (2021) apresentaram um exemplo mostrando que o elemento é capaz de capturar o efeito de escala (*size effect*). Neste sentido, o presente trabalho visa dar continuidade aos anteriormente citados, modificando primeiramente o elemento proposto por Amorim (2016) para inclusão de uma lei de dano não linear (LDNL). A lei de dano escolhida é uma função exponencial, que apresenta, conforme será visto no presente trabalho, comportamento semelhante ao apresentado em experimentos. Paralelamente a este trabalho, outros desenvolvimentos têm sido realizados dentro do grupo de pesquisa. Sob orientação dos professores Júlio Flórez-López¹ e Sérgio Persival Baroncini², a pesquisa de doutorado de Paulo Victor Campos Guimarães² busca a inclusão de dano distribuído nos modelos com dano concentrado. O doutorando Rafael Nunes da Cunha⁴, sob orientação dos professores David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim^{4,5} e Júlio Flórez-López¹, está desenvolvendo um modelo de placa para análise de lajes e um modelo de casca para análises de abóbadas, ambos de concreto armado. Os alunos Wei ershuai¹, Wang Yuqian¹ e Shuhong Wang¹ sob orientação de Yongtao Bai¹ e Júlio Flórez-López¹, estão desenvolvendo um elemento de banda/charneira para analisar estruturas origami em parceria com o programa espacial chinês. Caso seja aprovado o doutorado “sanduíche” de Rafael Nunes da Cunha⁴, este se unirá aos esforços científicos no projeto da agência espacial chinesa. Neste caso, o elemento de casca em desenvolvimento por Rafael Nunes da Cunha⁴ será uma alternativa ao elemento de banda/charneira, como forma de garantir que os resultados por ambas as abordagens numéricas são coerentes com o projeto da agência espacial chinesa. O elemento finito desenvolvido por Santos (2021) foi cedido ao aluno Stu Changqi¹ sob orientação de Hu Yan-Gao¹ para aplicação em micromecânica e materiais compósitos. O doutorando Lucas Henrique Oliveira Muniz⁴, sob orientação do David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim^{4,5} expandirá o elemento desenvolvido no presente trabalho para analisar a interação rocha-concreto, como alternativa para o estudo de colapso de barragens.

⁴ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil.

⁵ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Brasil.

1.2. Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo principal do presente trabalho é contribuir para a evolução da Mecânica do Dano Concentrado Expandida, por meio da proposta de uma nova lei de dano no elemento finito quadrilateral com quatro bandas de localização proposto anteriormente por Amorim (2016).

1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral da pesquisa, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Implementar uma LDNL no elemento finito quadrilateral com quatro bandas de localização desenvolvido anteriormente por Amorim (2016);
- Realizar simulações numéricas que apresentem objetividade de solução, visando reproduzir experimentos realizados no Laboratório de Materiais de Construção e Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (LAMCE/DEC/UFS), e exemplos experimentais reportados na literatura técnica.

1.3. Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, na qual são mostrados diversos conceitos que são base para a MDCX, tais como os presentes na mecânica da fratura e mecânica do dano contínuo. Além disso, são apresentados os conceitos e a formulação da mecânica do dano concentrado e da MDCX. No capítulo 3 apresenta-se a implementação numérica do elemento finito proposto e os procedimentos experimentais utilizados. No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos com a implementação do elemento finito proposto, que incluem duas análises paramétricas, a reprodução do fenômeno de efeito de escala e a reprodução dos experimentos apresentados na seção 3.2. O capítulo 5 apresenta a mudança necessária na formulação para a expansão do elemento finito com quatro bandas de localização para o elemento com seis bandas de localização, com a implementação da LDNL no elemento apresentado em Santos (2021). No capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos com o elemento com seis bandas, sendo um exemplo acadêmico analisado com malhas irregulares e um exemplo comparando resposta experimental e numérica, além de uma breve discussão da relação entre o parâmetro novo que aparece na formulação com LDNL e uma quantidade conhecida na mecânica da fratura. O capítulo 7 apresenta as conclusões do presente trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Mecânica da fratura

Nas teorias da elasticidade, plasticidade e na mecânica do dano, assume-se que o sólido não tem seus contornos modificados durante a análise, ou seja, não considera a possibilidade de representar a propagação de fissuras de forma discreta. Por sua vez, a mecânica da fratura surge como alternativa para fazer tal consideração, com objetivo principal de determinar justamente as condições para a propagação destas fissuras em meios elásticos, elasto-plásticos e quase frágeis (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Até o início do século XX, o critério de falha utilizado era baseado no equilíbrio de forças, sendo o Fator de Concentração de Tensão (FCT) um importante conceito deste critério. O FCT é dado pela razão entre a tensão máxima local ($\sigma_{\max}$) e a tensão média (σ_{med}) na estrutura, conforme a equação a seguir.

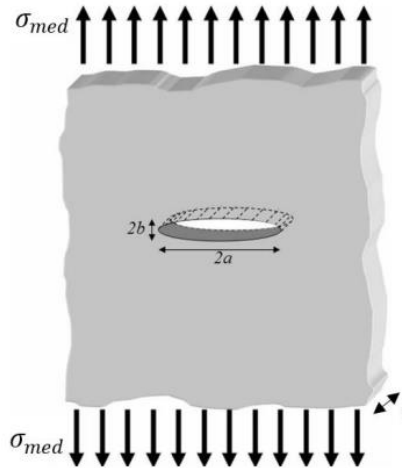
$$FCT = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{med}}} \quad (1)$$

No entanto, o FCT é ineficiente ao tentar descrever aberturas muito estreitas, como fissuras. Esta observação pode ser feita considerando o clássico exemplo da chapa infinita com furo. Considere t como espessura da chapa, com furo central em forma de elipse de diâmetros $2a$ e $2b$, submetida a uma tensão constante σ_{med} (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**). Neste caso, o FCT para o caso linear elástico na região do furo é dado pela seguinte equação (KIRSCH, 1898).

$$FCT = \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2)$$

Ao tentar aproximar o furo a uma fissura, fazendo b tender a zero, nota-se que o FCT tende ao infinito, ou seja, a tensão máxima no furo tende ao infinito independentemente da tensão média σ_{med} aplicada, indicando que a presença de qualquer fissura levaria o elemento ao colapso. Assim, fica evidente que este critério de falha, além de ineficiente, não pode ser usado como critério para propagação de fissuras (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Figura 2.1. Chapa infinita com furo em forma de elipse.



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

A fim de propor uma abordagem mais eficiente, Griffith (1921, 1924) propôs quantificar o processo de fratura a partir de um critério de energia, baseando-se em trabalhos anteriormente realizados. Este critério é dado por meio de um balanço de energia em função do comprimento da fissura ($2a$), utilizando a termodinâmica dos processos irreversíveis (AMORIM, 2016).

Os trabalhos de Griffith supracitados deram início ao que hoje é chamado mecânica da fratura, e para melhor compreensão de seu critério, um exemplo acadêmico é apresentado em Amorim (2016) e Amorim et al (2018).

Para problemas mecânicos, a energia total do sistema E_T , negligenciando-se ações térmicas, é dada por:

$$E_T = U - W_{ext} + E_s \quad (3)$$

sendo U a energia de deformação, W_{ext} o trabalho decorrente de ações externas, e E_s a energia necessária para formação de novas superfícies de fissuras.

Sendo a variação de energia total no sistema nula, o balanço de energia de Griffith resulta em:

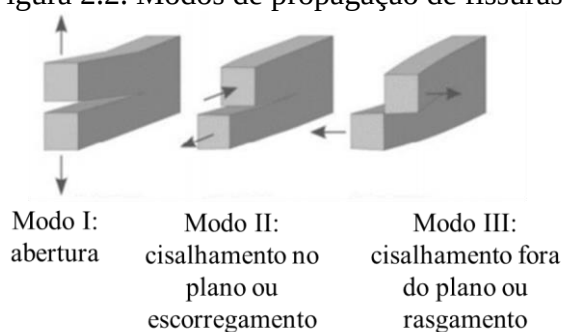
$$\frac{\partial E_T}{\partial a} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial(U - W_{ext})}{\partial a} = \frac{\partial E_s}{\partial a} \quad (4)$$

Em que o termo $\partial E_s / \partial a$ é chamado de resistência à fissuração R , e o termo $-\partial(U - W_{ext}) / \partial a$ é chamado de força condutora do dano ou taxa de liberação de energia G .

Sendo assim, a propagação de fissuras acontece apenas quando $G = R$. A força condutora da fissura G pode ser calculada por análise estrutural, e durante tal análise, enquanto este valor for menor que a resistência à fissuração R não ocorre a propagação de fissuras, sendo o valor de R calculado experimentalmente podendo ser função do comprimento da fissura.

Ainda na mecânica da fratura, qualquer comportamento que envolva a manifestação de fissuras pode ser expresso pela combinação de três modos. O modo I correspondente à abertura de fissuras no plano, o modo II correspondente ao cisalhamento/escorregamento no plano e modo III que corresponde ao cisalhamento/escorregamento fora do plano (Figura 2.2). A cada modo de solitação está associado um valor de taxa de liberação de energia G , e como este é um parâmetro global, torna-se difícil analisar o caso de múltiplas fissuras. Para contornar este problema, Irwin (1957) propôs um critério baseando-se numa grandeza chamada Fator de Intensidade de Tensão, por meio do qual se pode avaliar consistentemente a intensidade das tensões na ponta da fissura.

Figura 2.2. Modos de propagação de fissuras.



Fonte: Amorim (2016).

2.2. Mecânica do dano

Uma limitação importante da mecânica da fratura clássica é a necessidade de se considerar a presença de uma fissura inicial para realizar a análise, o que nem sempre acontece na macro escala em problemas reais de engenharia. Além disso, apesar de considerar a

degradação estrutural global por meio da modificação das condições de contorno, a teoria não considera a extensiva degradação local que antecede a propagação da fissura.

Utilizando a termodinâmica dos processos irreversíveis e baseado em trabalhos pioneiros anteriores, Lemaitre e Chaboche (1985) estabeleceram formalmente a mecânica do dano contínuo. Esta baseia-se na introdução de uma variável interna chamada dano ω , que quantifica a densidade de microdefeitos como microfissuras ou microvazios. A inserção desta variável objetiva descrever a evolução destes microdefeitos causados por carregamentos termomecânicos, que são considerados de forma discreta na mecânica da fratura. Vale ressaltar que estes microdefeitos são pequenos demais para serem considerados fissuras e grandes demais para serem negligenciados (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Considerando que a danificação apresenta uma distribuição uniforme em todas as direções, define-se a variável escalar de dano ω como sendo suficiente para caracterizar o estado de deterioração do material (dano isótropo). Agora, toma-se um elemento danificado em que A é a área de seção transversal deste elemento e A_d a área de microdefeitos, a variável de dano ω pode ser definida como:

$$\omega = \frac{A_d}{A} \quad (5)$$

Com isso, nota-se que os valores extremos da variável de dano são zero e um, em que o valor zero significa que o material está completamente íntegro e o valor unitário indica o oposto, que o material está completamente danificado.

Um importante conceito dentro da mecânica do dano contínuo é o de tensão efetiva, ou seja, tensão que está efetivamente atuando na área íntegra. Considerando o caso uniaxial da Figura 2.3, solicitado por uma carga axial P , a tensão efetiva é dada por:

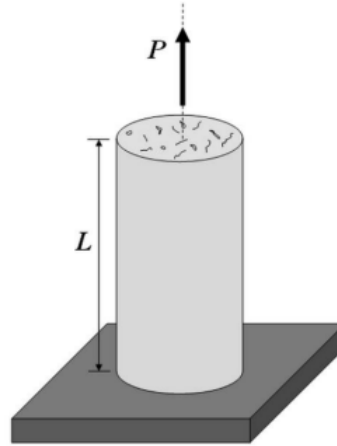
$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - A_d} \quad (6)$$

Substituindo a área danificada presente na Equação (5), obtém-se:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - A\omega} = \frac{P}{A(1 - \omega)} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (7)$$

Note que a tensão efetiva tende ao infinito quando o dano tende a um, e é igual a tensão nominal para o caso de materiais completamente íntegros (dano igual a zero).

Figura 2.3. Elemento sujeito a carga uniaxial danificado.



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

De forma semelhante ao anteriormente apresentado, Lemaitre e Chaboche (1985) propuseram outro importante conceito, a hipótese de equivalência em deformações. A hipótese consiste na consideração de que o comportamento do material danificado pode ser descrito com as mesmas equações do material intacto, desde que a tensão no elemento σ seja substituída pela tensão efetiva $\bar{\sigma}$. Desse modo, a lei de elasticidade para um material danificado, de acordo com a hipótese de equivalência em deformações, é dada por:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \Rightarrow \frac{\sigma}{1 - \omega} = E\varepsilon \Rightarrow \sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (8)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ε a deformação específica do mesmo. Note que o dano penaliza a rigidez do material, levando a um módulo de elasticidade efetivo $\bar{E} = (1 - \omega)E$. A Equação (8) também pode ser escrita em termos de flexibilidade, da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1-\omega)E} \sigma \quad (9)$$

A equação anterior pode ser reescrita ainda de outra forma, de modo a separar os termos de deformação relativos à elasticidade do material ε^e (Lei de Hooke), e a deformação relativa à danificação do material ε^ω :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{\omega}{E(1-\omega)} \sigma = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega \quad (10)$$

A lei elástica anterior pode ainda ser modificada para incluir análises de materiais elasto-plásticos, como os metais:

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \Rightarrow \sigma = (1-\omega)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (11)$$

ou ainda, em termos de flexibilidade:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{\omega}{E(1-\omega)} \sigma + \varepsilon^p = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega + \varepsilon^p \quad (12)$$

Note que se $\omega = 0$, então $\varepsilon^\omega = 0$, sendo $\varepsilon^\omega \neq 0$ para qualquer outro valor de dano desde que a tensão nominal não seja nula.

Agora, considere o critério generalizado de Griffith (MARIGO, 1985) aplicado à mecânica do dano contínuo:

$$G^\omega - R^\omega \leq 0 \quad (13)$$

sendo G^ω a taxa de liberação de energia de uma elemento danificado, e R^ω a resistência à danificação (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015). A taxa de liberação de energia pode ser expressa da seguinte forma:

$$G^\omega = -\frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial W}{\partial \omega} \quad (14)$$

em que U é a energia de deformação e W é a energia complementar, dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \omega) E \varepsilon^2 \\
 W &= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega) E}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

E por fim, a taxa de liberação de energia em um elemento danificado pode ser escrita em termos de rigidez ou flexibilidade:

$$G^w = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega) E} \tag{16}$$

Ressalta-se ainda, que o termo “taxa de liberação de energia” pode ser encontrado na literatura também como “força condutora da fissura” ou “momento de condução do dano”, a depender da análise em questão.

Como qualquer outra teoria, a mecânica do dano contínuo apresenta suas limitações. Uma delas é a dependência de malha, que é ilustrada para um caso uniaxial na seção 2.3.

2.3. Localização de deformações

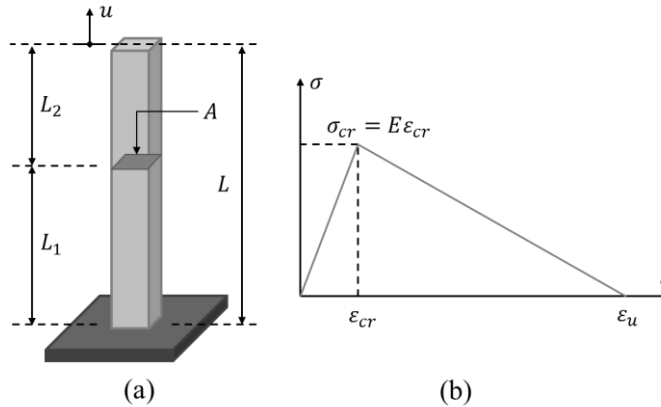
Localização de deformações é um fenômeno físico caracterizado pelo surgimento das bandas de localização que foi já notado em diversos materiais, incluindo metais dúcteis, materiais frágeis (rochas e concreto) e meios porosos (HOBBS; MÜHLHAUS; ORD, 1990; MARANTE; BENALLAL; FLÓREZ-LÓPEZ, 2007; RICE, 1976). Bandas de localização são definidas como estreitas faixas que concentram as deformações totais do elemento, gerando descontinuidade na taxa de deformações e acelerando drasticamente a falha estrutural (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Um estudo pioneiro realizado por Rudnicki e Rice (1975) descreveu matematicamente o comportamento na fronteira da banda de localização e as condições necessárias para a ocorrência do fenômeno, concluindo que este se apresenta como uma situação de instabilidade material e simultaneamente perda de elipticidade das equações diferenciais que governam o problema. Desde então o modelo foi utilizado e melhorado por diversos trabalhos (HASHIGUCHI; PROTASOV, 2004; MARANTE; FLÓREZ-LÓPEZ, 2004; STÖREN; RICE, 1975; ZHANG; LU; YU, 2003), sendo estendido ao caso de meios porosos resultando em aplicações importantes na engenharia geotécnica (BENALLAL; COMI, 2002, 2003). Posteriormente, foi apresentada por Desrues, Bésuelle e Lewis (2007) uma ampla revisão dos desenvolvimentos e interpretações laboratoriais do fenômeno em geomateriais, incluindo

rochas e solos granulares, argila e concreto. Dois modelos de bandas de localização em materiais dúcteis foram apresentados por Bordignon et al. (2015). Uma formulação para materiais transversalmente isotrópicos, investigando o efeito da temperatura e demonstrando a partir de simulações numéricas a importância da anisotropia, encruamento e amolecimento térmico no início e orientação da banda de localização foi desenvolvida por Semnani, White e Borja (2016).

Para exemplificar a dependência de malha ao tentar analisar a localização de deformações utilizando a mecânica do dano contínuo, será aqui ilustrado por simplicidade um caso uniaxial, conforme dedução matemática apresentada em Amorim et al. (2018) e Flórez-López, Marante e Picón (2015). Seja o problema exposto na Figura 2.4a, uma barra com uma extremidade engastada e outra livre, área de seção transversal A , dividida em dois elementos de comprimentos L_1 e L_2 , submetida a um incremento linear de deslocamento Δ .

Figura 2.4. (a) Barra sujeita a deslocamento imposto em sua extremidade livre, e (b) comportamento tensão-deformação no modelo de dano.



Fonte: adaptado de Amorim et al. (2018).

A compatibilidade cinemática para a barra analisada é dada por:

$$\epsilon_1 L_1 + \epsilon_2 L_2 = \Delta \quad (17)$$

sendo ϵ_1 e ϵ_2 as deformações específicas nos elementos 1 e 2 respectivamente, e L_1 e L_2 os comprimentos dos elementos 1 e 2, respectivamente. O equilíbrio, por sua vez, é dado por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} \quad (18)$$

sendo N o esforço normal na barra e σ_1 e σ_2 as tensões nos elementos 1 e 2, respectivamente.

Para tal exemplo, seja a lei de elasticidade dada pela Equação (8) e a lei de dano g dada por:

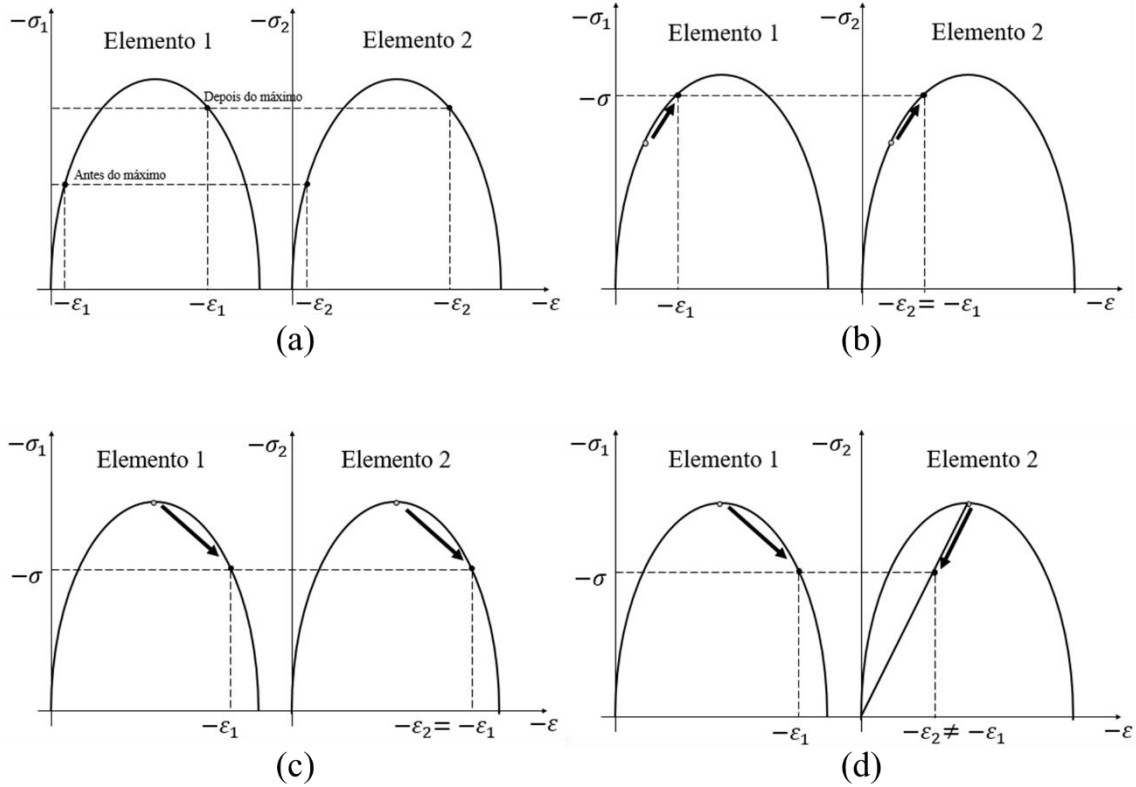
$$g = G(\varepsilon) - R(\omega) \leq 0 \Rightarrow g = |\varepsilon| - \frac{\varepsilon_{cr}\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \omega(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_u)} \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\varepsilon) = |\varepsilon| \\ R(\omega) = \frac{\varepsilon_{cr}\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \omega(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_u)} \end{array} \right. \quad (19)$$

em que ε_u é a deformação última do elemento e ε_{cr} a deformação dada no instante de tensão crítica (Figura 2.4b).

O comportamento de ambos os elementos é representado pela Figura 2.5a, sendo o equilíbrio indicado pela linha horizontal tracejada, com tensões iguais nos dois elementos. Antes do pico da curva, ao realizar incrementos de deslocamentos de modo que as deformações ainda estejam em sua fase elástica, haverá apenas uma solução capaz de satisfazer as equações cinemática (17) e de equilíbrio (18), conforme apresentado na Figura 2.5b. Continuando a incrementar deslocamentos, após ultrapassar o máximo da curva, a tensão em ambos os elementos reduz, visto que a estrutura está entrando na fase de amolecimento. Nesta fase, é possível notar duas soluções que atendem a equação de equilíbrio. A primeira solução indica a deformação específica igual em ambos os elementos e é chamada de solução homogênea (Figura 2.5c). A segunda solução mostra um aumento da deformação específica no elemento 1 (concentração de deformação específica e dano) e redução no elemento 2 (descarga elástica), caracterizando assim a solução localizada (Figura 2.5d). Ainda de acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), a solução encontrada em experimentos (ou seja, a solução real) é sempre localizada e a solução homogênea é fisicamente impossível, devido aos microdefeitos distribuídos aleatoriamente no material.

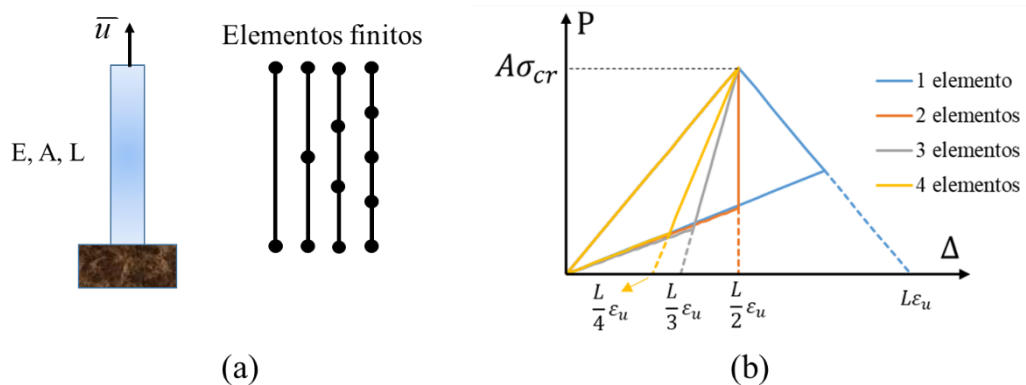
Figura 2.5. (a) Comportamento tensão-deformação do exemplo, (b) solução única antes do pico, (c) solução homogênea e (d) solução localizada.



Fonte: próprio autor.

A resposta força x deslocamento apresentada na Figura 2.6 também demonstra a dependência de malha para um problema uniaxial dividido em diferente número de elementos, em que é possível notar uma resposta diferente para cada divisão.

Figura 2.6. Dependência de malha vista pela resposta força x deslocamento.



Fonte: adaptado de Picón et al. (2021).

Portanto, é necessário escolher algum critério de regularização de modo a obter a resposta correta do ponto de vista físico quando se utiliza modelos da mecânica do dano para

prever colapso estrutural. Estes critérios de regularização surgem em modelos de dano mais recentes visando contornar matematicamente o problema para obtenção de resultados objetivos, sendo conhecidos como mecânica do dano moderna (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

2.4. Mecânica do dano moderna

Os principais métodos de regularização para contornar matematicamente o problema da localização de deformações em modelos de dano são dados por meio de uma abordagem não local ou pelo método do gradiente.

Nos modelos de dano não local, o dano depende das deformações dos elementos vizinhos, e não só do próprio ponto em estudo. O objetivo é evitar a descontinuidade impondo um campo de dano contínuo por meio de funções peso encarregadas da distribuição do dano ao longo dos elementos (PEERLINGS et al., 1996).

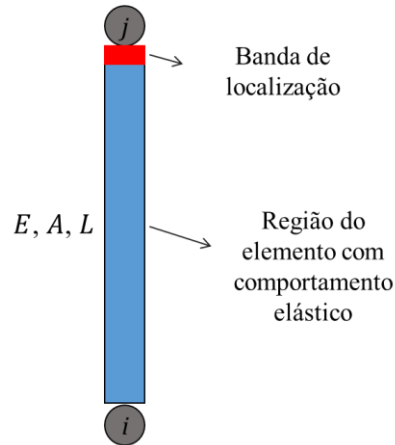
Por sua vez, a abordagem por gradiente admite que o dano dependa das derivadas de segunda ordem do campo de deformações, além das deformações no próprio elemento em estudo, em que também são impostos campos contínuos. Assim, por definição, a abordagem por gradiente é também uma abordagem não local.

Ao modificar a formulação considerando o comportamento de todo o elemento na análise de problemas de localização de deformações, as abordagens não locais não objetivam em essência uma representação melhor do problema físico, mas sim, contornar matematicamente o problema de modo a obter resultados objetivos.

2.5. Mecânica do dano concentrado

Na mecânica do dano concentrado, assume-se que o efeito de localização de deformações está concentrado numa região com espessura muito pequena comparada ao tamanho do elemento, enquanto que o restante deste elemento permanece elástico. Esta consideração contorna o problema de dependência de malha reescrevendo a hipótese de equivalência em deformações (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985) substituindo a deformação ϵ do elemento pela variável alongamento δ . Novamente, por simplicidade, considere o exemplo da barra engastada submetida a esforços uniaxiais, adotando um elemento finito com dois nós e uma banda de localização que concentra todo o dano, enquanto o restante do elemento permanece elástico (Figura 2.7).

Figura 2.7. Elemento finito com dano concentrado.



Fonte: adaptado de Amorim (2016).

A banda de localização, que concentra todos os efeitos inelásticos, tem espessura inicialmente nula e incrementada no decorrer da análise numérica. Para o elemento da Figura 2.7 os deslocamentos são expressos pelo vetor:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (20)$$

sendo u_i o deslocamento do nó i e u_j o deslocamento do nó j .

Conforme apresentado em Amorim (2016), com a substituição das deformações pelo alongamento, a equação cinemática que relaciona deslocamentos e alongamento é:

$$\delta = [B^0] \{q\} \quad (21)$$

sendo $[B^0] = [-1 \ 1]$ a matriz de transformação cinemática para o elemento unidimensional.

Já o vetor de forças internas $\{Q\}$ é determinado por:

$$\{Q\} = A[B^0]^T \sigma \quad (22)$$

sendo A a área da seção transversal do elemento e σ a tensão de Cauchy.

A hipótese de equivalência em alongamentos, conforme apresentado em Amorim (2016) é dada por:

$$\delta = \delta^e + \delta^d ; \text{ em que } \delta^e = \frac{L}{E} \sigma \quad (23)$$

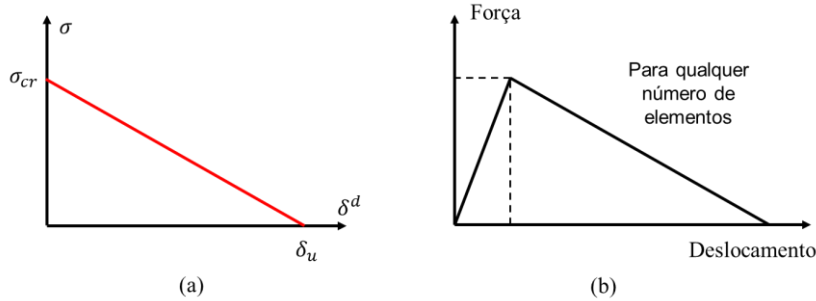
Sendo δ o alongamento total do elemento, δ^e o alongamento da parte elástica e δ^d o alongamento da banda de localização, relacionada ao dano.

Nos trabalhos anteriores (AMORIM, 2016; AMORIM et al., 2018; OLIVEIRA, 2020; PICÓN et al., 2021; SANTOS, 2021), a lei de dano, expressa anteriormente na equação (19), é alterada para incluir a nova variável cinemática da seguinte forma:

$$g = \sigma - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{\delta^d}{\delta_u} \right) \leq 0 \quad (24)$$

sendo σ_{cr} a tensão crítica e δ_u o alongamento último (Figura 2.8a). Com tais considerações, o elemento finito da Figura 2.7 apresenta comportamento independente de malha (Figura 2.8b).

Figura 2.8. (a) comportamento inelástico do material e (b) resposta numérica pela mecânica do dano concentrado para uma barra solicitada uniaxialmente.



Fonte: adaptado de Amorim (2016).

Conforme argumentado por Amorim (2016), é fácil notar a razão pela qual este novo elemento apresenta unicidade de solução enquanto o da mecânica do dano clássico não. O ponto chave é a substituição da variável cinemática (deformação por alongamento). Note que no modelo pela mecânica do dano clássico, quando dano é igual a 1, a tensão nominal é zero. Assim, a deformação elástica ε^e também é zero e apenas a deformação relacionada ao dano ε^d é não nula. Observando a lei de dano para $\sigma = 0$ nota-se que a deformação ε^d é igual a deformação última ε_u , e por sua vez, o deslocamento último é a multiplicação entre ε_u e o comprimento do elemento finito. Desse modo, o comportamento da curva força-deslocamento depende da divisão do problema em elementos finitos, que pode ser escolhida de forma

arbitrária com uma infinidade de elementos e comprimentos. Por outro lado, quando dano é igual a 1 no modelo com dano concentrado, a tensão é igual a zero e o alongamento da banda de localização é igual ao alongamento último δ_u . O restante da banda permanece indeformada e assim o deslocamento último independe do comprimento do elemento.

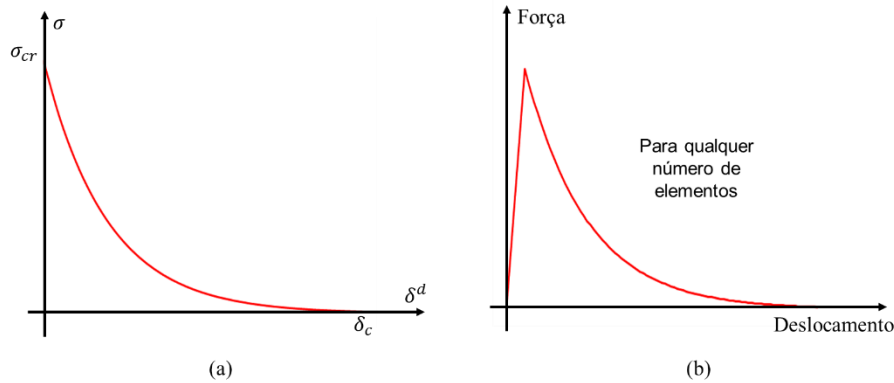
Conforme observado na Figura 2.8a, o comportamento da lei de dano após a ativação da banda ($\delta^d > 0$) é linear. No entanto, no presente trabalho, a lei de dano é modificada para uma função não linear (25) com o intuito de melhorar a resposta numérica do modelo, reproduzindo de forma mais acurada o comportamento experimental.

$$g = \sigma - \sigma_{cr} \exp(q\delta^d) \leq 0 \quad (25)$$

Sendo q um novo parâmetro na lei de dano.

Com esta nova função, o comportamento inelástico pode ser visto na Figura 2.9a. Para o mesmo exemplo uniaxial tem-se na Figura 2.9b a curva força-deslocamento com a LDNL.

Figura 2.9. (a) comportamento inelástico do material e (b) curva força-deslocamento com LDNL.

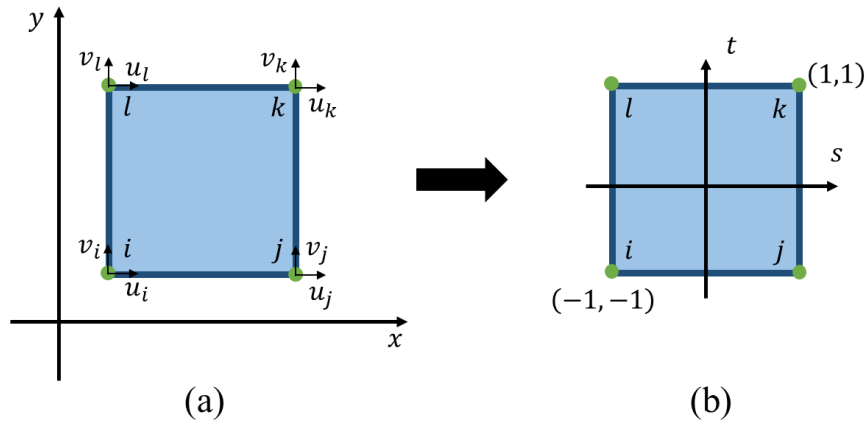


Fonte: próprio autor.

2.6. Mecânica do dano concentrado expandida (MDCX)

Os conceitos anteriormente apresentados para problemas uniaxiais foram expandidos para meios contínuos bidimensionais em Amorim (2016) por meio da introdução das bandas de localização e hipótese de equivalência em alongamentos em elementos finitos de chapas e placas. O procedimento aplicado por Amorim (2016) para o elemento finito quadrilateral elástico regular (Figura 2.10) para análise de chapas é discutido a seguir.

Figura 2.10 Elemento finito quadrilateral no espaço cartesiano (a) e isoparamétrico (b).



Fonte: adaptado de Amorim (2016).

Para este elemento clássico em um meio bidimensional contínuo, o comportamento elástico é definido pelas equações (26)-(29).

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B(x, y)]\{q\} \quad (26)$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H]\{\varepsilon(x, y)\} = [H][B(x, y)]\{q\} \quad (27)$$

$$\{Q\} = \iiint_V [B(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \quad (28)$$

$$[K] = \iiint_V [B(x, y)]^T [H] [B(x, y)] dV \quad (29)$$

Sendo $\{\varepsilon(x, y)\}$ o vetor de deformações, $\{\sigma(x, y)\}$ o vetor de tensões, $\{Q\}$ o vetor de forças internas, $[H]$ a matriz de coeficientes elásticos, $[B(x, y)]$ a matriz de transformação cinemática e $[K]$ a matriz de rigidez. Ainda, para o mesmo elemento, o campo de deslocamentos pode ser definido pelo triângulo de Pascal linear, como apresentado em na equação (30).

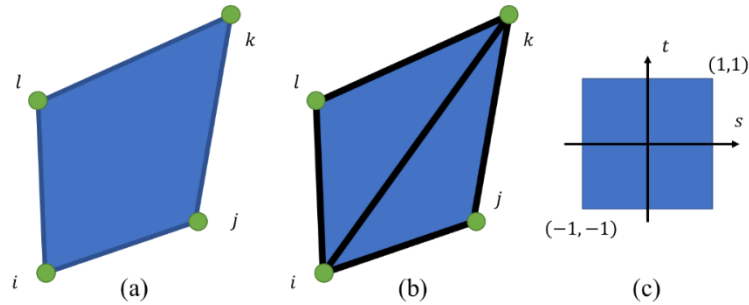
$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned} \quad (30)$$

Por sua vez, o tensor de deformações em qualquer ponto interno do elemento pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_3 y \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_2 + b_3 x \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + a_3 x + b_1 + b_3 y = c + a_3 x + b_3 y
\end{aligned} \tag{31}$$

Então, o campo de deformações pode ser definido em função de cinco constantes independentes (a_1 , a_3 , b_2 , b_3 e $c = a_2 + b_1$). Tendo em vista esta observação, Amorim (2016) propôs um campo de deformações generalizadas, que pode ser representado em função dos alongamentos das barras de uma treliça equivalente (Figura 2.11b), composta por 5 barras denominadas extensômetros numéricos, ou “*numexes*”, que conectam os quatro vértices do quadrilátero (Figura 2.11a).

Figura 2.11. (a) Elemento quadrilateral de 4 nós (b) treliça equivalente de 5 barras (c) espaço de referência.



Fonte: adaptado de Amorim (2016).

O campo de deformações generalizadas, no qual são computados os alongamentos dos *numexes* é dado pelo seguinte vetor:

$$\{\delta\}^T = [\delta_{ij}, \delta_{ik}, \delta_{il}, \delta_{jk}, \delta_{kl}] \tag{32}$$

sendo δ_{ij} o alongamento da barra entre os nós *i* e *j*, e o mesmo vale para os demais. Observe que qualquer combinação de cinco *numexes* é suficiente para definir o estado deformado do elemento, ou seja, a barra diagonal *j-l* poderia substituir qualquer uma das outras barras.

Utilizando agora o vetor de deformações generalizadas, a equação cinemática (26) passa a ser:

$$\{\delta\}=[b]\{q\} \quad (33)$$

sendo $[b]$ a matriz de transformação cinemática para o elemento regular (quadrado), expressa no seu espaço de referência por:

$$[b]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

De forma semelhante, as deformações do elemento podem ser representadas em função das deformações generalizadas por:

$$\{\varepsilon\}=[T]\{\delta\} \quad (35)$$

e

$$[B]=[T][b] \quad (36)$$

sendo $[B]$ a matriz cinemática convencional e $[T]$ a matriz de transformação dos *numexes*, ambas apresentadas em função das suas coordenadas cartesianas no Apêndice A. Para o espaço de referência (Figura 2.11c) a matriz $[T]$ é dada por:

$$[T]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 & 1+s \\ 0 & 0 & 1-t & 1+t & 0 \\ -1-t & 2\sqrt{2} & -1-s & s-1 & t-1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

No mesmo sentido, as tensões, forças internas e matriz de rigidez, anteriormente representadas pelas equações (27)-(29), respectivamente, são agora apresentadas em função das deformações generalizadas:

$$\{\sigma(x, y)\} = [H][T(x, y)]\{\delta\} \quad (38)$$

$$\{Q\} = [b]^T \iiint_V [T(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \quad (39)$$

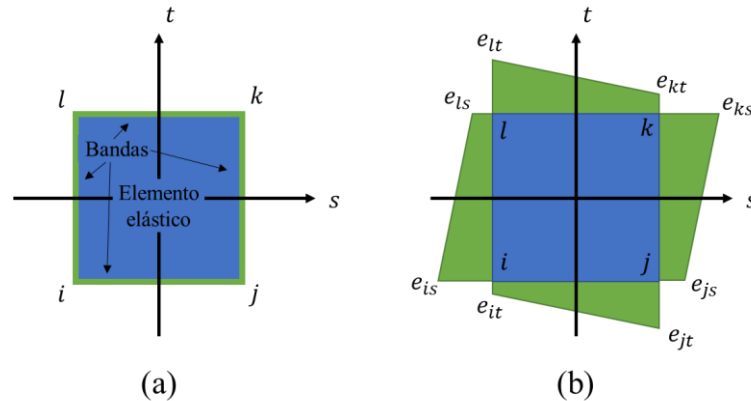
$$[K] = [b]^T \left(\iiint_V [T(x, y)]^T [H][T(x, y)] dV \right) [b] \quad (40)$$

As equações anteriores são obtidas levando em conta apenas a parte elástica da análise. A partir da introdução das bandas de localização é que são inseridos os efeitos do processo de danificação do material. Amorim (2016) propôs a adição de quatro bandas de localização fixas nas arestas do elemento (Figura 2.12). Dada a linearidade das funções de forma do elemento, o campo de tensões também se apresenta linear, e assim a espessura de banda entre nós também apresenta comportamento linear. Inicialmente as bandas apresentam espessura zero e ao avançar a análise são obtidos alongamentos adicionais relacionados ao dano localizado. Por sua vez, este incrementará as espessuras iniciais das bandas ao qual estão ligados. A relação entre alongamentos de dano e espessuras de banda utilizadas por Amorim (2016) para o espaço de referência é dada pela equação (41) e em termos de coordenadas cartesianas no Apêndice A.

$$\{\delta^d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{it} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e_{it} \\ e_{jt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{js} \\ e_{ks} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ e_{ks} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_{kt} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e_{lt} \\ e_{kt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{is} \\ e_{is} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ e_{ls} \end{bmatrix} \quad (41)$$

sendo e_{it} a espessura de banda no nó i no lado ij , e_{ks} a espessura de banda no nó k no lado jk , e assim sucessivamente.

Figura 2.12. (a) Posição das bandas de localização (b) espessura das bandas.



Fonte: adaptado de Amorim (2016).

A hipótese de equivalência em alongamentos anteriormente apresentada na equação (23) é dada agora para meios bidimensionais:

$$\{\delta\} = \{\delta^e\} + \{\delta^d\} \quad (42)$$

sendo $\{\delta\}$ o vetor que contém os alongamentos totais dos *numexes*, $\{\delta^e\}$ o vetor de alongamentos do elemento elástico e $\{\delta^d\}$ o vetor de alongamentos devido à danificação. Assim, a lei elástica é reescrita:

$$\{\sigma\} = [H][T]\{\delta - \delta^d\} \quad (43)$$

sendo $\{\sigma\}$ é o vetor de tensões nodais.

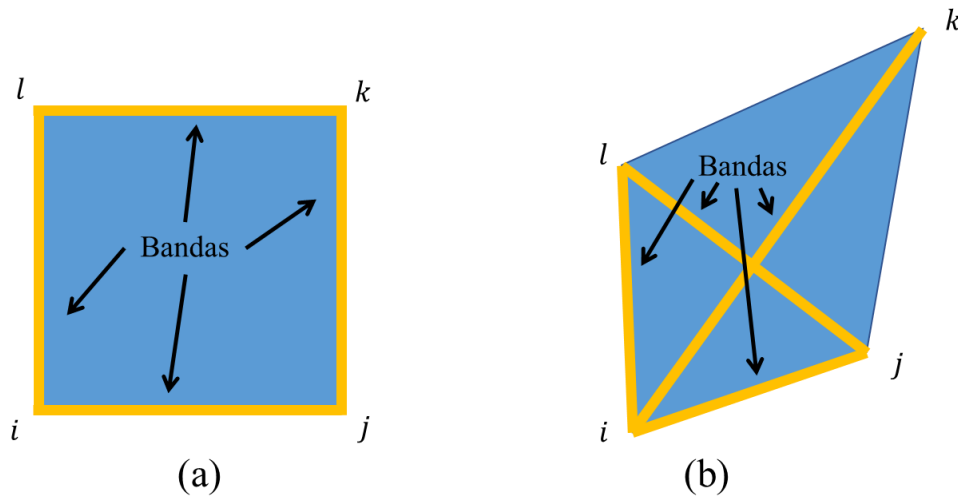
Para completar o modelo, Amorim (2016) inseriu ainda as funções de dano, apresentadas para o caso uniaxial na equação (24), em cada espessura de banda de cada nó do elemento, totalizando oito funções de dano. E por fim, as equações cinemática e de equilíbrio são mantidas conforme apresentadas nas equações (33) e (39), respectivamente.

Para validar o modelo proposto, Amorim (2016) implementou o elemento finito proposto em um programa de análise estrutural desenvolvido originalmente por Uzcátegui (2012), e estudou a convergência de seis malhas regulares de um exemplo acadêmico. Neste exemplo, é possível notar que o autor conseguiu convergência de resultados ao passo que se aumenta o número de elementos, tendendo a uma única solução. Além disso, nos resultados do exemplo analisado por Amorim (2016) é possível notar que a falha (abertura da banda de localização) ocorreu na região esperada para uma estrutura real submetida a tais condições. Vale ressaltar que isto ocorre sem que seja necessário definir previamente o ponto ou região onde a estrutura está mais sujeita a formação de bandas de localização e consequentemente falha estrutural, visto que o modelo por si só tem a capacidade de identificar as zonas de concentração de esforços.

Conforme discutido ainda em Amorim (2016), apesar das grandes vantagens proporcionadas, o elemento finito se torna ineficiente em alguns casos em que a banda de localização tende a cruzar diagonalmente o interior do elemento, e para representar fisicamente a solução nestes casos, seriam necessárias malhas muito refinadas. Tendo isso em vista, Oliveira

(2020) modificou em seu trabalho o elemento de Amorim (2016) trocando duas das bandas laterais por duas bandas diagonais. Com essa modificação, esperava-se corrigir a ineficiência anteriormente discutida e que o elemento conseguisse identificar e analisar problemas com regiões de falha ainda mais complexas. O procedimento de implementação de Oliveira (2020) seguiu os mesmos passos realizados por Amorim (2016), com alteração no vetor de alongamentos de dano $\{\delta^d\}$ e funções de dano, substituindo as bandas jk e kl pelas bandas ik e jl (Figura 2.13).

Figura 2.13. Elemento proposto por (a) Amorim (2016) e (b) Oliveira (2020).



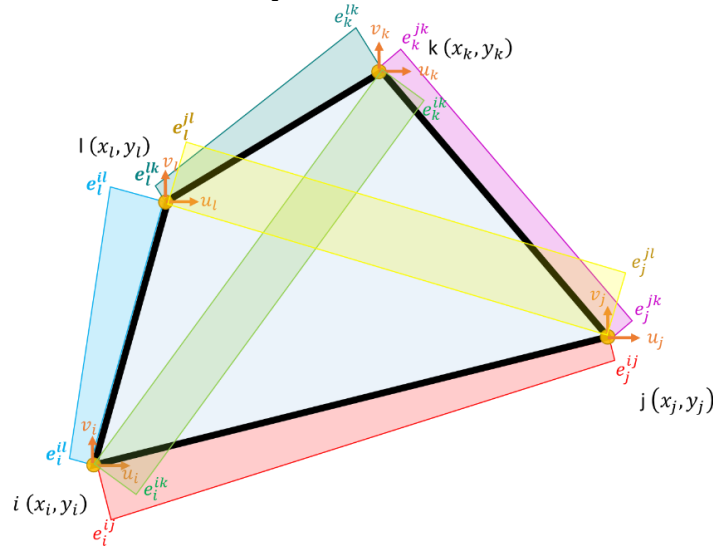
Fonte: próprio autor.

Os resultados de Oliveira (2020) também apresentaram objetividade de solução e convergência para uma solução única quanto mais refinada era a malha. No entanto, quando comparado aos resultados de Amorim (2016) notou-se uma discrepância no valor de carga última encontrada. Segundo o autor do estudo, esta diferença é explicada devido a constituição do elemento finito, que por possuir bandas apenas em duas das arestas, a depender da orientação de nós adotada na geração de malha, pode-se obter um resultado final tendencioso. Conforme discutido por Oliveira (2020), quando não há bandas de localização no caminho previsto para a formação da falha, busca-se a banda mais próxima, que no caso deste elemento é uma banda diagonal, provocando uma tendência de falha que leva a resultados diferentes quando comparados aos obtidos por Amorim (2016). Este problema se assemelha ao encontrado em outros trabalhos na literatura técnica como “*mesh bias*” ou “*mesh orientation*”. Para comprovar tal explicação para a discrepância dos resultados, o autor realizou uma análise com as mesmas malhas, mudando apenas a posição das condições de contorno, de modo que fisicamente se

tratava do mesmo problema. Nesta análise, os resultados foram compatíveis com os reportados por Amorim (2016), mostrando que de fato, o elemento apresenta resultados compatíveis ou tendenciosos a depender da formação da malha.

Por sua vez, a fim de contornar os problemas encontrados nos trabalhos de Amorim (2016) e Oliveira (2020), Santos (2021) propôs um elemento finito quadrilateral composto por seis bandas de localização (Figura 2.14), as quatro nas arestas como em Amorim (2016) e as duas diagonais presentes no trabalho de Oliveira (2020).

Figura 2.14. Elemento finito quadrilateral com seis bandas de localização.



Fonte: Santos (2021).

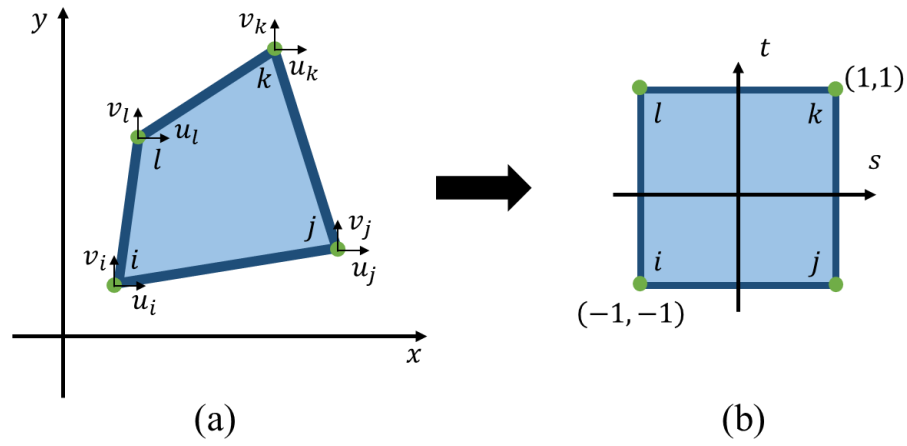
O mesmo procedimento dos trabalhos anteriores foi adotado por Santos (2021) para deduzir a formulação, alterando-se apenas os vetores de alongamento por dano $\{\delta^d\}$ e as leis de evolução do dano, que agora passam a ser doze. Todos os componentes do vetor $\{\delta^d\}$ são apresentados no Apêndice A, e as leis de evolução do dano para este elemento são novamente semelhantes à apresentadas na equação (24), dadas aqui para cada espessura de banda em cada nó do elemento:

$$\begin{aligned}
g_i^{ij} &= \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \left(1 - \frac{e_i^{ij}}{\delta_{u_i}^{ij}} \right) \leq 0; \quad g_j^{ij} = \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \left(1 - \frac{e_j^{ij}}{\delta_{u_j}^{ij}} \right) \leq 0 \\
g_i^{ik} &= \sigma_i^{ik} - \sigma_{cr_i}^{ik} \left(1 - \frac{e_i^{ik}}{\delta_{u_i}^{ik}} \right) \leq 0; \quad g_k^{ik} = \sigma_k^{ik} - \sigma_{cr_k}^{ik} \left(1 - \frac{e_k^{ik}}{\delta_{u_k}^{ik}} \right) \leq 0 \\
g_i^{il} &= \sigma_i^{il} - \sigma_{cr_i}^{il} \left(1 - \frac{e_i^{il}}{\delta_{u_i}^{il}} \right) \leq 0; \quad g_l^{il} = \sigma_l^{il} - \sigma_{cr_l}^{il} \left(1 - \frac{e_l^{il}}{\delta_{u_l}^{il}} \right) \leq 0 \\
g_j^{jl} &= \sigma_j^{jl} - \sigma_{cr_j}^{jl} \left(1 - \frac{e_j^{jl}}{\delta_{u_j}^{jl}} \right) \leq 0; \quad g_l^{jl} = \sigma_l^{jl} - \sigma_{cr_l}^{jl} \left(1 - \frac{e_l^{jl}}{\delta_{u_l}^{jl}} \right) \leq 0 \\
g_j^{jk} &= \sigma_j^{jk} - \sigma_{cr_j}^{jk} \left(1 - \frac{e_j^{jk}}{\delta_{u_j}^{jk}} \right) \leq 0; \quad g_k^{jk} = \sigma_k^{jk} - \sigma_{cr_k}^{jk} \left(1 - \frac{e_k^{jk}}{\delta_{u_k}^{jk}} \right) \leq 0 \\
g_l^{lk} &= \sigma_l^{lk} - \sigma_{cr_l}^{lk} \left(1 - \frac{e_l^{lk}}{\delta_{u_l}^{lk}} \right) \leq 0; \quad g_k^{lk} = \sigma_k^{lk} - \sigma_{cr_k}^{lk} \left(1 - \frac{e_k^{lk}}{\delta_{u_k}^{lk}} \right) \leq 0
\end{aligned} \tag{44}$$

sendo g_i^{ij} , σ_i^{ij} , $\sigma_{cr_i}^{ij}$, e_i^{ij} e $\delta_{u_i}^{ij}$, respectivamente, a lei de dano, tensão no nó, tensão crítica, espessura de banda e alongamento último, referentes ao nó i da banda ij , e assim sucessivamente para os demais índices.

Conforme apresentado pelas equações (39) e (40), a obtenção das forças equivalentes e da matriz de rigidez dependem da solução de integrais no domínio do elemento. Conforme discutido em Santos (2021), ao analisar estruturas irregulares, o processo de determinação e solução de tais domínios pode se tornar muito complexo, devido à inclinações e distorções entre arestas do elemento e os eixos de referência. A fim de contornar este problema e permitir a utilização de malhas irregulares, utilizou-se mapeamento isoparamétrico, que consiste na transformação de coordenadas e deslocamentos globais do elemento quadrilateral (Figura 2.15a) em deslocamentos e coordenadas equivalentes em um espaço de coordenadas de referência (Figura 2.15b). Dessa forma, torna-se possível resolver as integrais de modo mais simples, seja numericamente ou analiticamente. O termo “isoparamétrico” indica que as funções de forma adotadas no espaço global e de referência possuem funções de interpolação idênticas, que para este trabalho e os anteriores são funções lineares.

Figura 2.15. (a) Elemento quadrilateral no espaço cartesiano e (b) no espaço de referência.



Fonte: adaptado de Oliveira (2020).

3. METODOLOGIA

3.1. Elemento proposto e implementação numérica

A MDCX tem apresentado êxito ao analisar o fenômeno de localização de deformações em chapas bidimensionais com modo I de falha, atingindo resultados numéricos com objetividade de solução e independência de malha, como discutido na seção 2.6. Santos (2021) contornou limitações quanto ao uso de malhas irregulares e falhas devido as condições de contorno, apresentados nos trabalhos anteriores (AMORIM, 2016; OLIVEIRA, 2020). No entanto, como destacado pelos autores anteriormente citados, ainda existem muitos avanços possíveis no desenvolvimento da MDCX. Um destes avanços, indicado em Santos (2021), é justamente a utilização de leis de dano não lineares, a fim de representar o comportamento de materiais usuais, como concreto, metais, argamassas e rochas na fase de amolecimento.

Desse modo, o presente trabalho utiliza o elemento finito proposto por Amorim (2016) (Figura 2.12) modificando suas leis de dano, implementando a apresentada na equação (25). Com essa modificação nas leis de dano foram realizados testes em exemplos acadêmicos, conforme será apresentado nas seções a seguir. Além disso, serão realizadas simulações de modo a confrontar as respostas numéricas com as respostas obtidas em experimentos disponíveis da literatura.

Assim, a formulação do elemento finito se dá pelo mesmo processo adotado em Amorim (2016), Oliveira (2020) e Santos (2021), alterando-se a etapa que contém as leis de evolução do dano para implementar a citada anteriormente. Para o elemento com quatro bandas de localização (AMORIM, 2016), as leis de dano em cada nó de cada banda do elemento passam a ser $g = \sigma - \sigma_{cr} \exp(q\delta^d) \leq 0$ para cada espessura de banda, ou seja:

$$\begin{aligned}
 g_i^{ij} &= \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \exp(qe_i^{ij}) \leq 0; & g_j^{ij} &= \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \exp(qe_j^{ij}) \leq 0 \\
 g_i^{il} &= \sigma_i^{il} - \sigma_{cr_i}^{il} \exp(qe_i^{il}) \leq 0; & g_l^{il} &= \sigma_l^{il} - \sigma_{cr_l}^{il} \exp(qe_l^{il}) \leq 0 \\
 g_j^{jk} &= \sigma_j^{jk} - \sigma_{cr_j}^{jk} \exp(qe_j^{jk}) \leq 0; & g_k^{jk} &= \sigma_k^{jk} - \sigma_{cr_k}^{jk} \exp(qe_k^{jk}) \leq 0 \\
 g_l^{lk} &= \sigma_l^{lk} - \sigma_{cr_l}^{lk} \exp(qe_l^{lk}) \leq 0; & g_k^{lk} &= \sigma_k^{lk} - \sigma_{cr_k}^{lk} \exp(qe_k^{lk}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{45}$$

sendo q um parâmetro da nova formulação com LDNL, a ser ajustado para cada material por meio de experimentos, e todas as outras variáveis com o mesmo significado dos apresentados em (44).

Assim como nos trabalhos de Amorim (2016), Oliveira (2020) e Santos (2021), o elemento finito proposto no presente trabalho, foi implementado no Programa Endógeno de Elementos Finitos (PEEF). Este programa foi desenvolvido inicialmente por Uzcátegui (2012), possuindo atualmente uma vasta biblioteca de modelos utilizados para estruturas baseados na Mecânica do Dano Concentrado. O PEEF permite a análise estática ou dinâmica, linear e não linear de estruturas planas ou espaciais.

As análises no programa são realizadas em dois níveis, um local e outro global, sendo o primeiro caracterizado pela solução das leis de comportamento para cada elemento da estrutura, enquanto o segundo se caracteriza como a solução do sistema de equações formado pela equação de equilíbrio sujeita a condições de contorno simples.

O funcionamento do PEEF a nível global se dá inicialmente pela leitura dos dados do problema por meio de um arquivo de entrada que contém as coordenadas dos nós da estrutura, a conectividade de cada elemento, as condições de contorno e o tipo de elemento utilizado. Nos problemas analisados neste trabalho, adotou-se um procedimento de incremento de deslocamentos, realizado em alguns pontos da estrutura com valores pré-definidos a cada passo. A partir destes deslocamentos são obtidos os valores de carga correspondentes através de um processo iterativo, em que para cada passo da análise, fica definido o equilíbrio em função do balanço de forças $\{FR\}$, obtido por meio das forças externas $\{P\}$ e esforços internos da estrutura $\{Q\}$, sendo respeitadas as condições de contorno do problema:

$$\{FR\} = \{Q\} - \{P\} = 0 \quad (46)$$

Assim, a estrutura é considerada em equilíbrio quando a equação (46) é atendida. Além disso, por se tratar de um problema de não-linearidade física, a resolução do problema precisa ser realizada através da linearização do sistema, acompanhado por algum procedimento numérico iterativo. No presente trabalho, foi utilizado o método de Newton-Raphson, que é um dos mais utilizados na literatura. A equação a seguir representa a expressão do sistema global linearizada:

$$\left\{ \frac{\partial Q(U)}{\partial U} \right\} (\Delta U) + \{P\} = 0 \quad (47)$$

sendo $\{\partial Q(U)/\partial U\}$ a matriz de rigidez (ou jacobiana), atualizada a cada iteração realizada, $\{P\}$ o vetor de solicitações externas e ΔU o incremento de deslocamentos.

Por sua vez, a solução local da estrutura está relacionada à rotina que contém o elemento finito proposto no presente trabalho e ocorre elemento a elemento, em que as etapas implementadas realizam o cálculo das variáveis ligadas aos *numexes* e ao dano. Dentro do algoritmo, o primeiro passo é o cálculo das deformações generalizadas $\{\delta\}_q$, que são obtidas a partir dos valores de deslocamento encontradas na análise elástica global:

$$\{\delta\}_q = [b]_q \{U\}_q \quad (48)$$

em que $[b]_q$ é a matriz de transformação cinemática em um elemento específico q , $\{U\}_q$ o vetor de deslocamentos nodais globais e $\{\delta\}_q$ as deformações generalizadas em um elemento q . Posteriormente inicia-se a etapa de predição elástica, na qual obtém-se inicialmente as tensões generalizadas $\{N\}_q$ por meio da lei de comportamento do modelo:

$$\{N\}_q = [E](\{\delta\}_q - \{\delta^d\}_q) \quad (49)$$

sendo $\{\delta^d\}_q$ o vetor de alongamentos de dano no elemento q e $[E]$:

$$[E] = \iiint_v [T]^T [H] [T] dV \quad (50)$$

Após determinar as tensões generalizadas, calculam-se as tensões normais atuantes nos nós do elemento:

$$\{\sigma\}_q = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_q = [H][T][E]^{-1}\{N\}_q \quad (51)$$

sendo σ_{11} a tensão normal no eixo x em um dado nó, σ_{22} a tensão normal no eixo y em um dado nó, τ_{12} a tensão de cisalhamento xy em um dado nó e a matriz $[E]^{-1}$ a inversa da integral apresentada na equação (50).

A partir das relações de estado plano, encontra-se a tensão atuante no plano perpendicular à banda de localização, como por exemplo para a banda ik no nó i :

$$\sigma_i^{ik} = \sigma_{11}c_{ik}^2 + \sigma_{22}s_{ik}^2 + \tau_{12}c_{ik}s_{ik} \quad (52)$$

em que c_{ik} e s_{ik} são os cossenos e senos encontrados para o plano perpendicular à banda de localização ik . Após calcular os valores de tensão, ativa-se o algoritmo de predição elástica e correção inelástica, sendo o primeiro responsável por verificar a existência de bandas ativas a partir da determinação do valor da lei de dano:

$$g_i^{ik} = \sigma_i^{ik} - \sigma_{c_{r_i}}^{ik} \exp(qe_i^{ik}) \quad (53)$$

em que se $\{g\} \leq 0$ nenhuma banda está ativa, logo, não há necessidade de incrementar alongamentos de dano no elemento. Por outro lado, se em alguma banda ocorrer $g > 0$, é necessário fazer uma correção dos valores de tensão dos *numexes* e das espessuras de banda inicialmente adotadas, por meio do algoritmo de correção inelástica. Para obter estes valores é montado um sistema matricial que contém as cinco leis de estado (equações ligadas ao cálculo das tensões nos *numexes*) e pelas oito leis de evolução de dano:

$$\begin{aligned} \{r(N, e)\} &= (\{\delta\}_q - \{\delta^d\}_q) - [E]^{-1}\{N\} = 0 \\ \{g(N, e)\} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Visto que as equações envolvidas no processo são não lineares, o sistema apresentado na equação (54) é linearizado e resolvido através de um processo iterativo baseado no método de Newton-Raphson (Apêndice C).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial N} & \frac{\partial r}{\partial e} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 - N \\ e_0 - e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_0 \\ g_0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

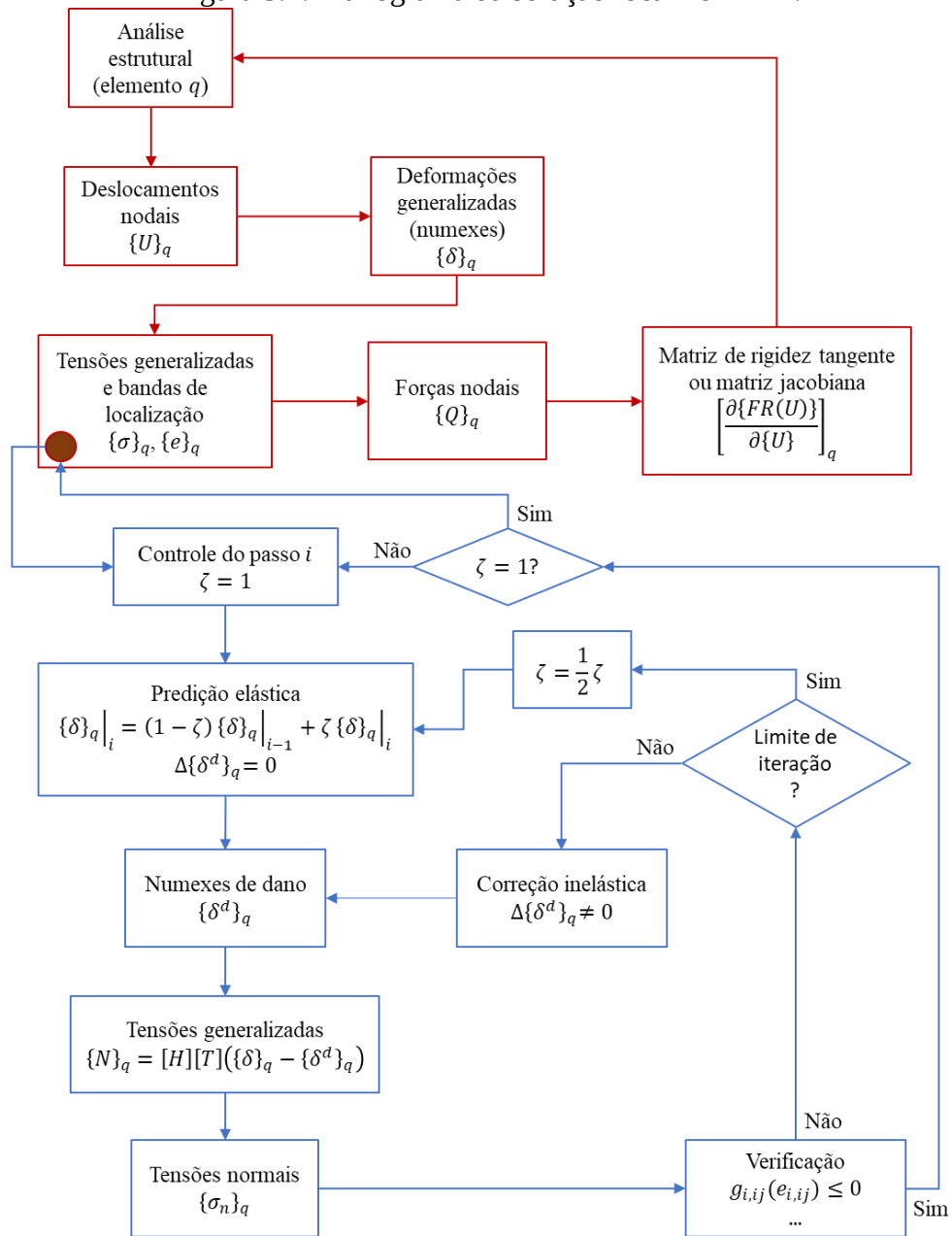
Ao final deste processo de correção inelástica são obtidos os valores de $\{N\}_q$, $\{e\}_q$, $\{\delta\}_q$, e $\{\sigma_n\}_q$ de modo que todos os valores de $\{g\}$ sejam inferiores a zero.

Por fim são calculadas as forças internas e a matriz de rigidez do elemento, e retorna-se para o algoritmo de análise global:

$$\begin{aligned} \{Q\} &= [b]_q^T \iiint_V [T]^T \{\sigma\}_q dV \\ [K] &= [b]_q^T \left(\iiint_V [T]^T [H][T] dV \right) [b]_q \end{aligned} \quad (56)$$

Quando esse processo iterativo não apresenta convergência, atingindo um número de iterações limite sem solução, o incremento de deslocamento dessa etapa é reduzido e realiza-se novamente todo o processo, conforme pode ser visto no fluxograma apresentado na Figura 3.1.

Figura 3.1. Fluxograma da solução local no PEEF.



Fonte: adaptado de Oliveira (2020).

3.2. Procedimento experimental

Conforme discutido anteriormente, o intuito de adotar uma LDNL se deu principalmente na tentativa de reproduzir o comportamento experimental de materiais usuais na engenharia. Neste sentido, a fim de validar a implementação proposta neste trabalho, foram realizados experimentos no Laboratório de Materiais de Construção e Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe (LAMCE/DEC/UFS). Estes experimentos foram realizados devido ao aporte PROAP/CAPES 23113.058556/2019-31 via PROEC/UFS.

Nesta etapa do trabalho, foram produzidos corpos de prova (CPs) de concreto simples, prismáticos para rompimento em ensaios de flexão de três pontos, e cilíndricos para determinação da resistência à compressão e módulo de elasticidade longitudinal, seguindo as recomendações estabelecidas pelas normas ABNT NBR 5739 (2018) e ABNT NBR 8522 (2017), respectivamente. Os procedimentos de produção e realização dos ensaios foram baseados nas normas técnicas disponibilizadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Divididos em duas moldagens, foram preparados sete CPs prismáticos com dimensões de 10x10x40 cm³ e dez CPs cilíndricos, com traço calculado de acordo com o método apresentado pela Associação Brasileira de Cimento Portland (ABCP). Em ambas as moldagens foi utilizado o cimento CP-II, brita 0 e areia com módulo de finura 2,70. Na primeira moldagem foram preparados quatro prismas e cinco cilindros, com traço 1:1,82:1,89, relação água-cimento 0,50, consumo de cimento de 440,0 kg/m³. Na segunda moldagem foram preparados três prismas e cinco cilindros, com traço 1:1,72:1,78, relação água-cimento 0,70, consumo de cimento de 410,0 kg/m³. Vale ressaltar que a relação água-cimento muito maior no concreto da segunda moldagem se deu devido a um erro na pesagem. Todos os CPs moldados foram submetidos a cura em tanque de imersão com água por 27 dias. Para cada mistura foram realizados ensaios de compressão em dois CPs cilíndricos até a falha (seguindo o indicado na ABNT NBR 5739 (2018)) e de módulo de elasticidade em três CPs cilíndricos (seguindo o indicado na ABNT NBR 8522 (2017)) aos 28 dias. Após estes ensaios, foi obtida uma resistência à compressão média de 28,29 MPa para o concreto da primeira mistura e 22,47 MPa para o concreto da segunda mistura. Por sua vez, o módulo de elasticidade foi de 36,20 GPa e 30,16 GPa para o concreto das misturas 1 e 2, respectivamente.

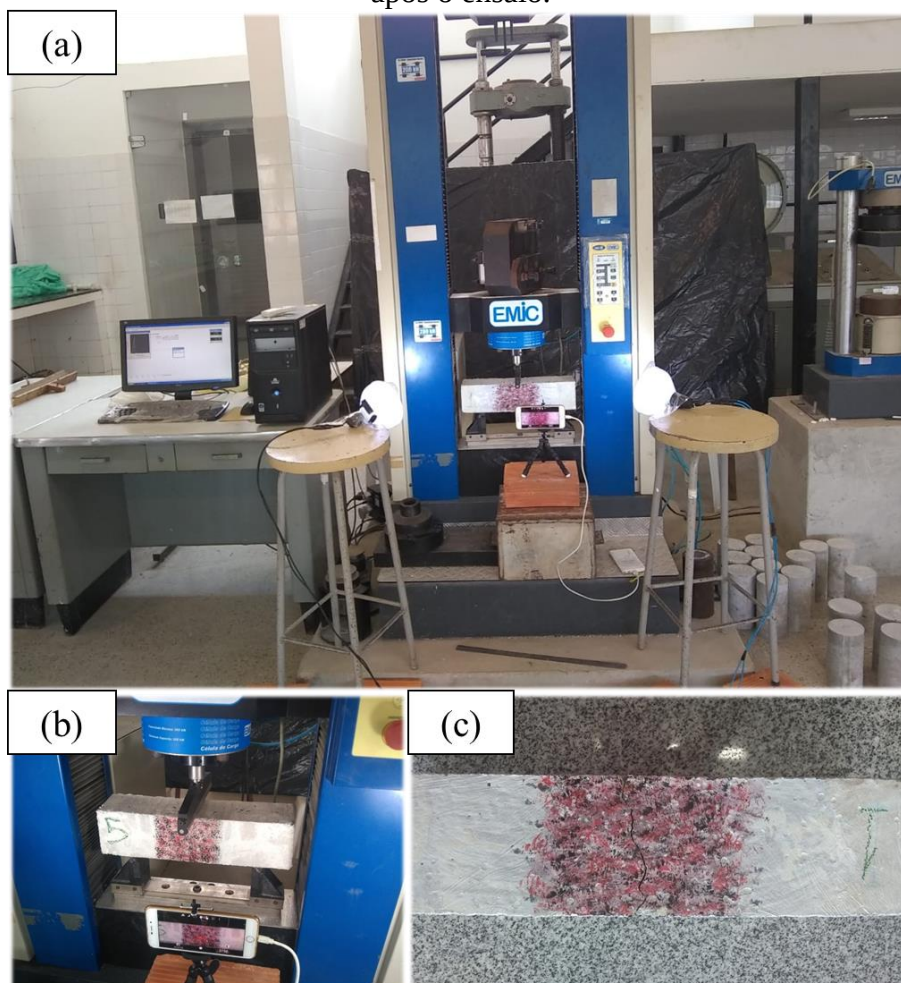
Os CPs prismáticos foram ensaiados por flexão de 3 pontos utilizando uma máquina universal de ensaios, modelo DL 20, da marca EMIC. A máquina pode realizar ensaios de

tração, compressão e flexão de aços, concretos, argamassas, blocos, telhas e placas cerâmicas, possuindo dispositivo para ensaio de compressão com capacidade de até 100 tf, computadorizada.

Nesta etapa do rompimento, para medição da abertura de fissuras foi utilizada a técnica de correlação de imagens digitais, com o processamento das imagens pelo software *Correli-Q4*. Para utilização desta técnica foi necessário pintar a região de interesse no prisma antes dos ensaios, com diferentes cores (no presente trabalho, vermelho, preto e branco, embora azul, preto e branco seja a combinação mais indicada), de modo a desenvolver uma distribuição de cores que varie o mais uniformemente possível. Para avaliar esta qualidade da pintura, são realizadas duas etapas de análise no *Correli-Q4*, de textura e incertezas, em que são mensuradas a qualidade da pintura da região de interesse e incertezas no processo de cálculo, respectivamente. Assim, caso os resultados destas duas análises mostrem baixa qualidade na textura/altos valores de incerteza, o prisma pode ter sua pintura melhorada e novamente realizam-se essas duas etapas até que os resultados mostrem um baixo valor de incerteza.

Por fim, após a preparação, posicionam-se os prismas sobre os apoios da máquina (distância entre apoios de 26 cm) e procede-se o monitoramento dos dados do ensaio, com força e deslocamento monitorados pela máquina DL 20 da EMIC, com taxa de deslocamento imposto de 0,2 mm/min (exceto para um dos prismas, identificado por P3-2020-02-19, que foi ensaiado com velocidade de 0,1 mm/min), e imagens com utilização de câmera fotográfica programada para tirar fotos com intervalo de tempo definido. Todas estas informações podem ser verificadas na Figura 3.2a e b, enquanto que a situação de um dos prismas é apresentada na Figura 3.2c.

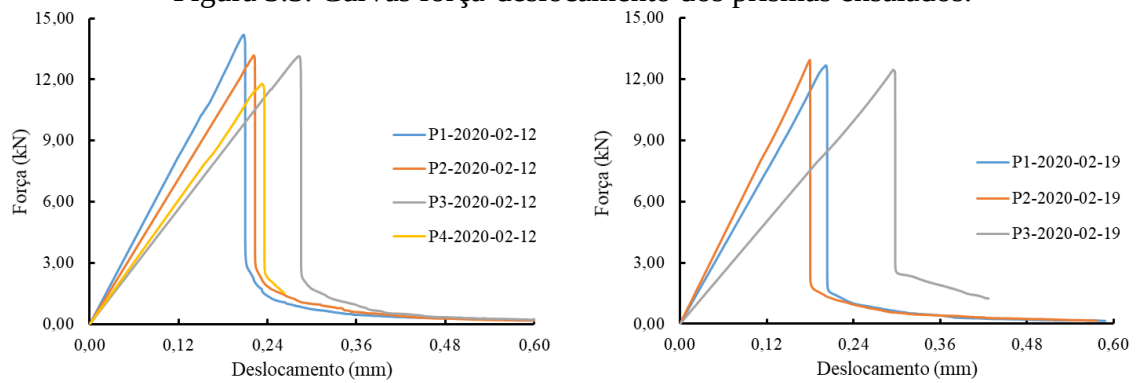
Figura 3.2. (a) e (b) Ensaio de flexão de 3 pontos monitorado, (c) situação de um dos prismas após o ensaio.



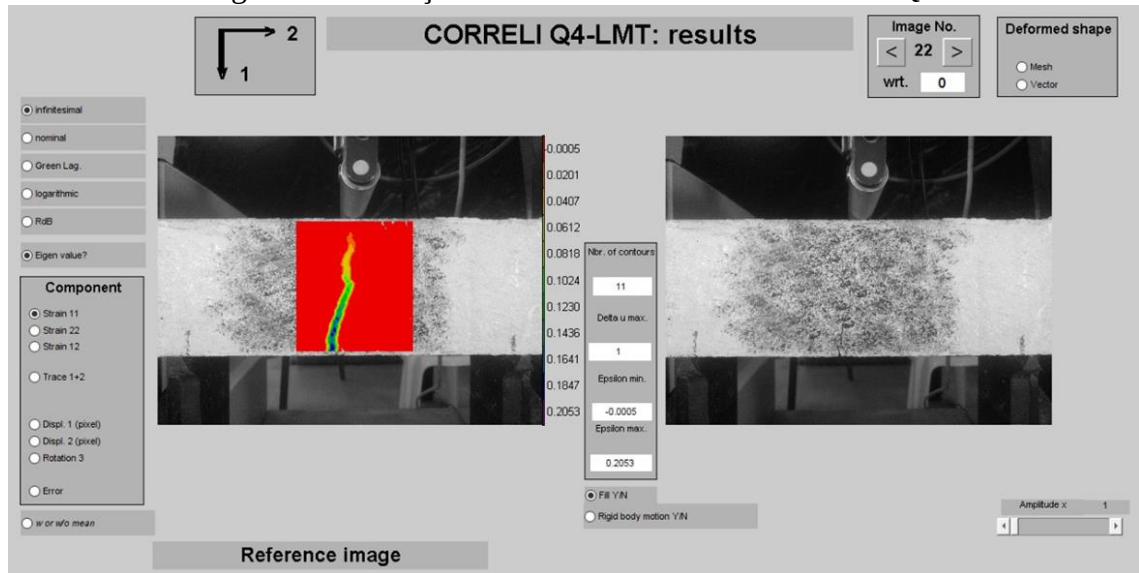
Fonte: próprio autor.

Após realizados os experimentos, obtiveram-se as curvas força-deslocamento registradas pela máquina (Figura 3.3). Posteriormente foram analisadas as imagens registradas durante os ensaios com a utilização do *Correli-Q4*, nas quais é possível medir a abertura de fissuras (Figura 3.4). Na Figura 3.5 é apresentada a curva força-abertura de fissura na região inferior de cada prisma testado.

Figura 3.3. Curvas força-deslocamento dos prismas ensaiados.

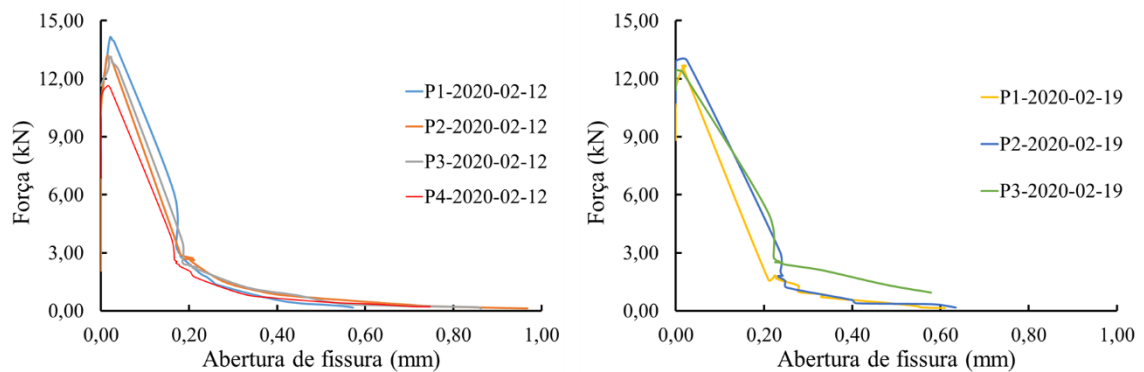


Fonte: próprio autor.

Figura 3.4. Medição da abertura de fissura no *Correli-Q4*.

Fonte: próprio autor.

Figura 3.5. Curva força-abertura de fissura.



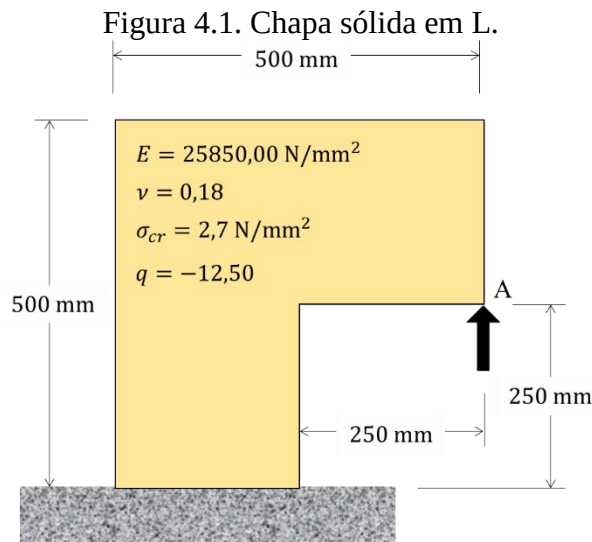
Fonte: próprio autor.

4. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com a implementação anteriormente discutida. Inicialmente são apresentados os resultados para um dos exemplos acadêmicos discutido nos trabalhos anteriores (AMORIM, 2016; OLIVEIRA, 2020; SANTOS, 2021) utilizando o elemento com 4 bandas de localização e LDNL. Posteriormente são apresentadas duas análises paramétricas do mesmo exemplo, variando os parâmetros q e tensão crítica σ_{cr} . Em seguida, é apresentado um exemplo de efeito de escala (*size effect*), que é um fenômeno já comprovado experimentalmente por diversos autores.

4.1. Exemplo chapa em L para $q = -12,5$

Este exemplo é apresentado inicialmente em Amorim (2016) e se trata de uma chapa sólida em L submetida a um deslocamento vertical u (Figura 4.1). O material da chapa tem módulo de elasticidade longitudinal $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, tensão crítica $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}^2$ e parâmetro $q = -12,50$. Foram utilizadas 7 malhas regulares para analisar o problema, com 12, 48, 108, 192, 300, 432 e 768 elementos.



As curvas força-deslocamento no ponto A (Figura 4.1) de todas as malhas são apresentadas na Figura 4.2a, na qual percebe-se a independência de malha e objetividade de solução, conforme também apresentado nos estudos anteriores (AMORIM, 2016; OLIVEIRA, 2020; SANTOS, 2021). A Figura 4.3 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos

com as duas malhas mais refinadas do exemplo, que mostra uma boa convergência de resultados.

Ainda, a formação da zona de falha se dá na parte interior do elemento, conforme esperado fisicamente para um problema com as mesmas condições (Figura 4.2b - h). Nas figuras, cada cor define um valor de espessura das bandas de localização, variando de zero (linhas brancas) até o valor máximo calculado (vermelho). Assim, os valores intermediários são definidos pelas demais cores, conforme apresentado na Tabela 4.1.

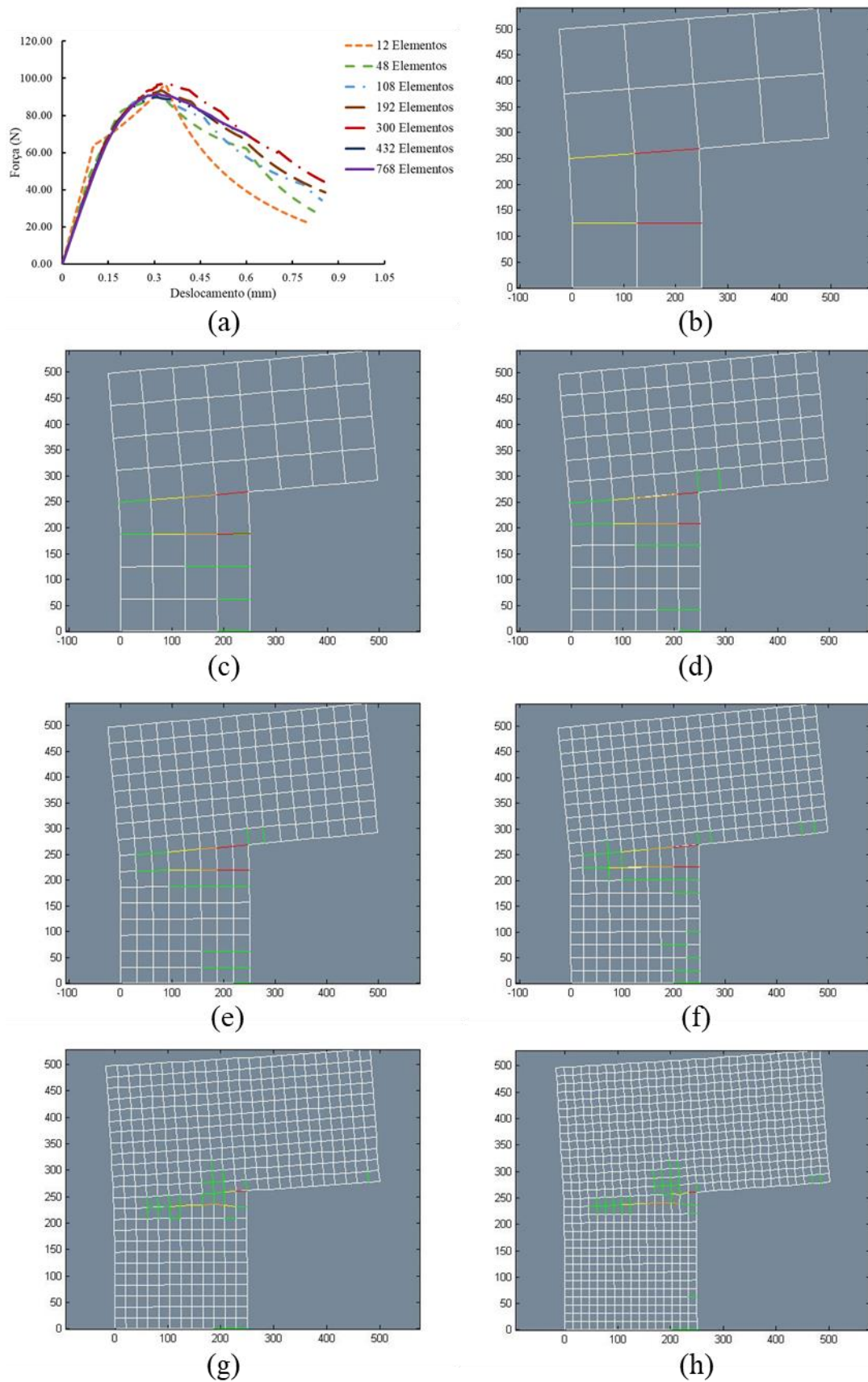
Tabela 4.1. Legenda das cores apresentadas nas figuras das malhas deformadas.

Cor	Intervalo de valores de alongamento de banda
Branco	0,00
Verde	$0,00 < e \leq e_{\text{máx}}/4$
Amarelo	$e_{\text{máx}}/4 < e \leq e_{\text{máx}}/2$
Laranja	$e_{\text{máx}}/2 < e \leq 3e_{\text{máx}}/4$
Vermelho	$3e_{\text{máx}}/4 < e \leq e_{\text{máx}}$

Fonte: próprio autor.

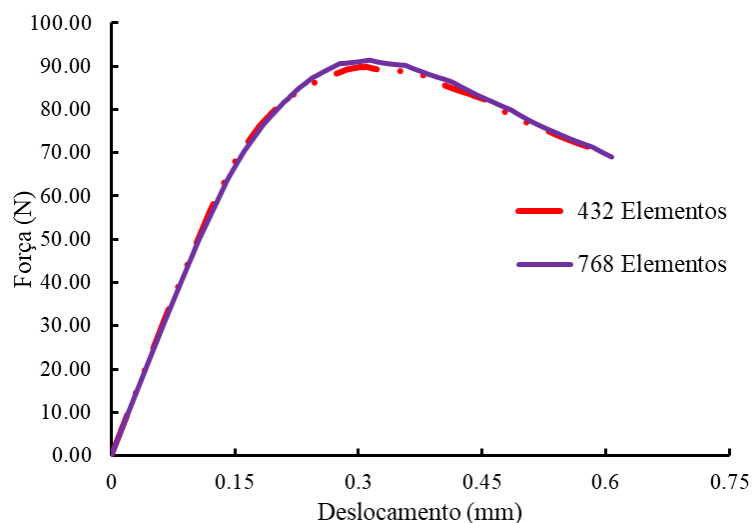
Assim, é possível notar na Figura 4.2b – h que todas as análises ocorreram até atingir o valor de espessura de banda de 0,2 mm, aparecendo na região interna do elemento. É possível observar também o surgimento de algumas poucas bandas com espessuras inferiores a 0,05mm (verde) em regiões afastadas da zona de falha. Justamente por se tratarem de valores pequenos e estarem longe da região de colapso, estas bandas pouco influenciam na falha da estrutura.

Figura 4.2. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



Fonte: próprio autor.

Figura 4.3. Repostas das malhas mais refinadas simuladas: 432 e 768 elementos.



Fonte: próprio autor.

4.2. Análise paramétrica da variação do parâmetro q

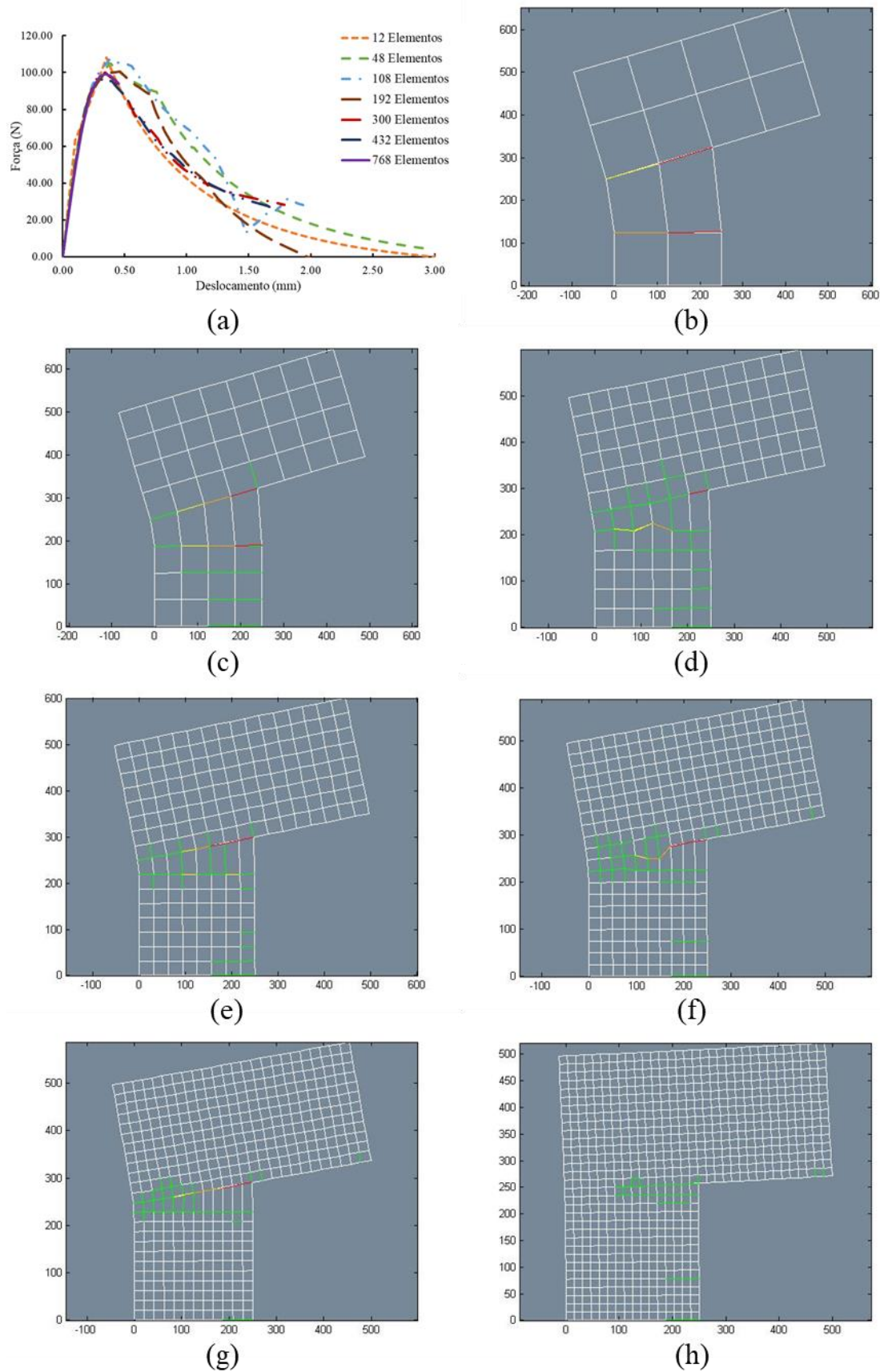
Para analisar como se comportam as análises com a variação do parâmetro q presente na lei de dano proposta, foi realizada uma análise paramétrica adotando seis valores para tal parâmetro. O mesmo exemplo apresentado na seção 4.1 foi analisado então com os seguintes valores para o parâmetro q : -6,25, -8,3, -12,5, -25,0, -37,5 e -50,0. Todas as demais propriedades foram mantidas constantes: módulo de elasticidade longitudinal $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, tensão crítica $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}$.

Os resultados para as simulações com os valores do parâmetro q anteriormente citados estão apresentados, na ordem, nas Figura 4.4, 4.5, 4.2, 4.6, 4.7 e 4.8. Para todas estas análises é possível notar objetividade de solução com o aumento do número de elementos na malha. É também possível notar que a zona de falha em todas as análises aparece na mesma localização, exceto para a malha com 432 elementos para $q = -25,0$, em que a região de falha ocorre um pouco abaixo das demais simulações.

Com o aumento do valor absoluto do parâmetro q foi possível notar uma maior dificuldade de evolução nas simulações com as malhas com menos elementos. Isto é claramente notado ao observar os resultados para $q = -12,5$ (Figura 4.2) e para $q = -50,0$ (Figura 4.8), no qual para o primeiro, todas as análises pararam ao atingir o alongamento de 0,2 mm, enquanto que para o segundo, as análises com 12 (Figura 4.8b), 48 (Figura 4.8c) e 108 (Figura 4.8d) elementos não atingiram o mesmo alongamento e apresentam pequeno pós pico da curva força-deslocamento.

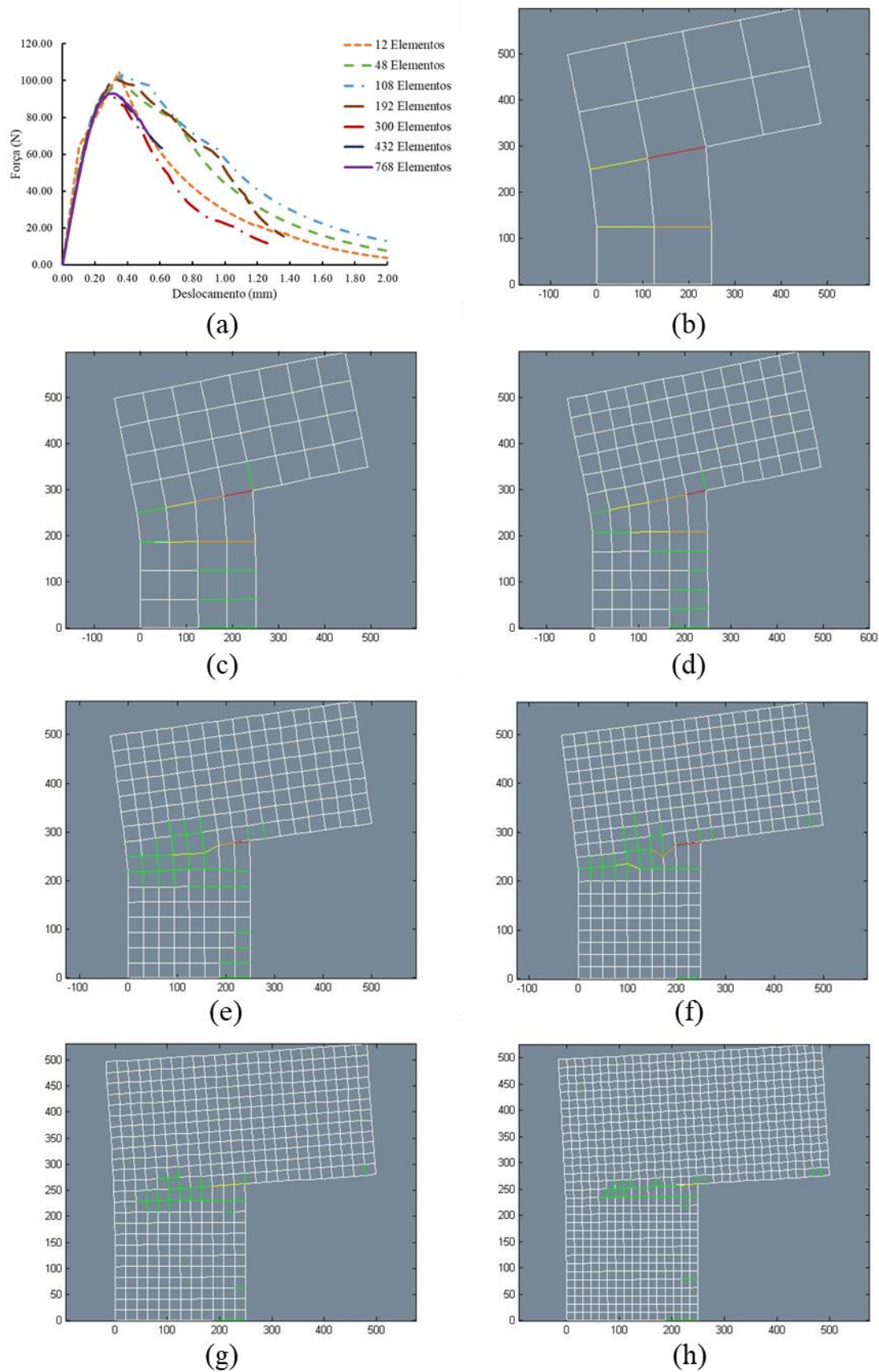
Por fim, foi possível notar também uma maior dificuldade na evolução da análise com as malhas mais refinadas nas análises com os menores valores absolutos do parâmetro q . Esta observação é notada nas análises com 768 elementos com $q = 8,3$ (Figura 4.5h) e $q = 6,25$ (Figura 4.4h), que não avançaram até atingir alongamento encontrado nas demais análises. Estas dificuldades estão também relacionadas ao tamanho do passo de carga adotado em cada simulação, conforme discutido em Santos (2021), sendo possível avançar variando-se este parâmetro e realizando novas tentativas.

Figura 4.4. Resultados para $q = -6,25$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



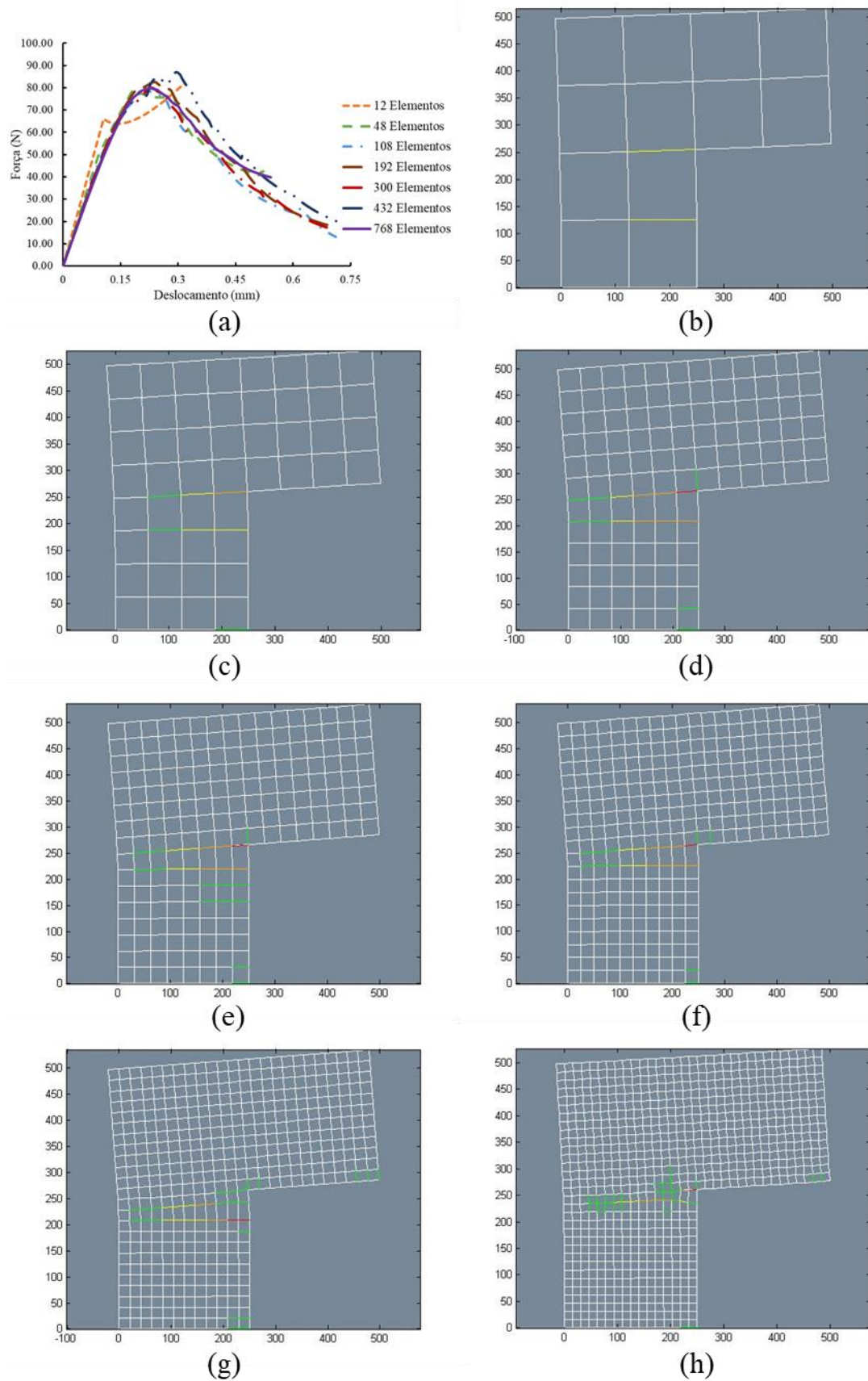
Fonte: próprio autor.

Figura 4.5. Resultados para $q = -8,3$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



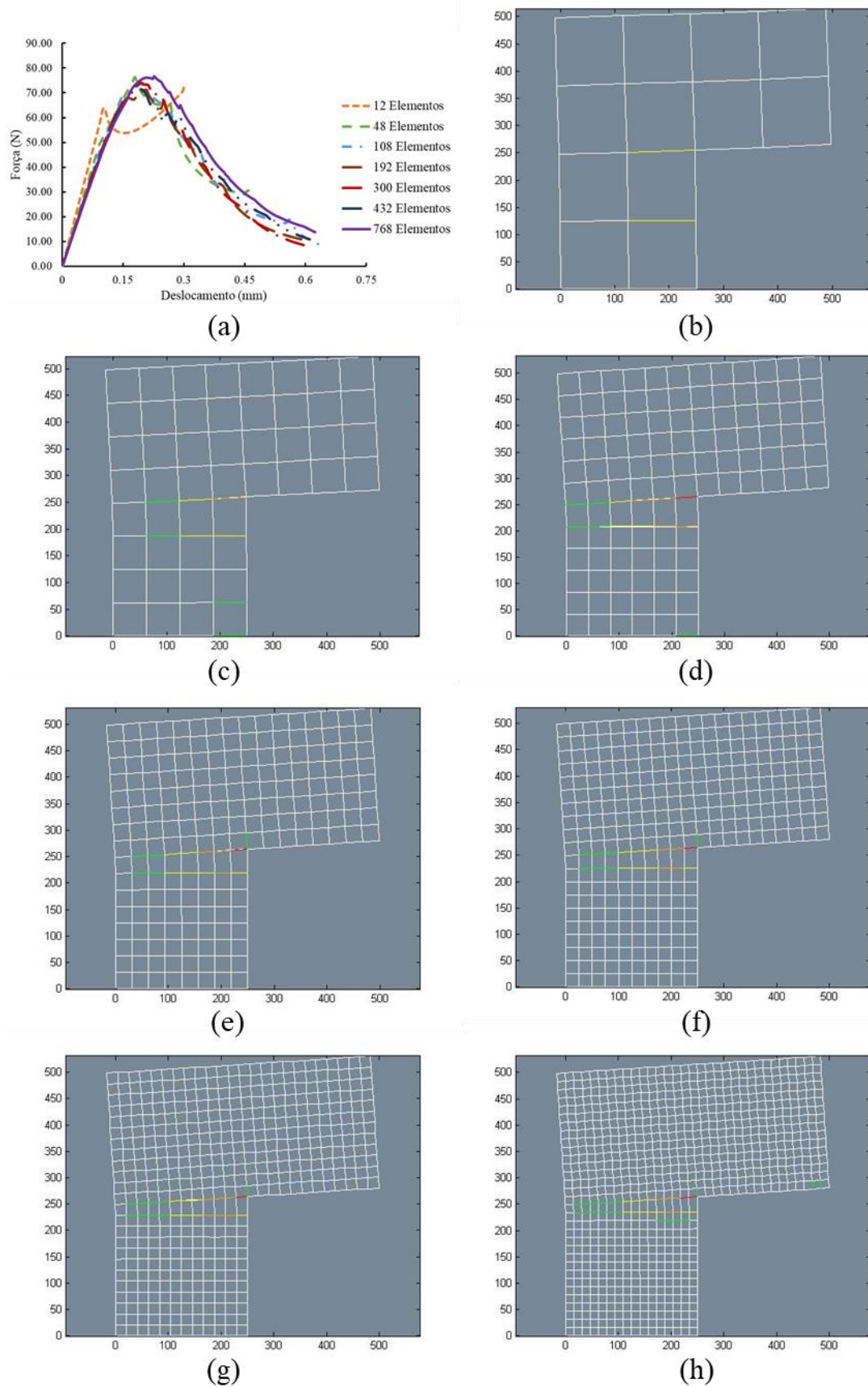
Fonte: próprio autor.

Figura 4.6. Resultados para $q = -25,0$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



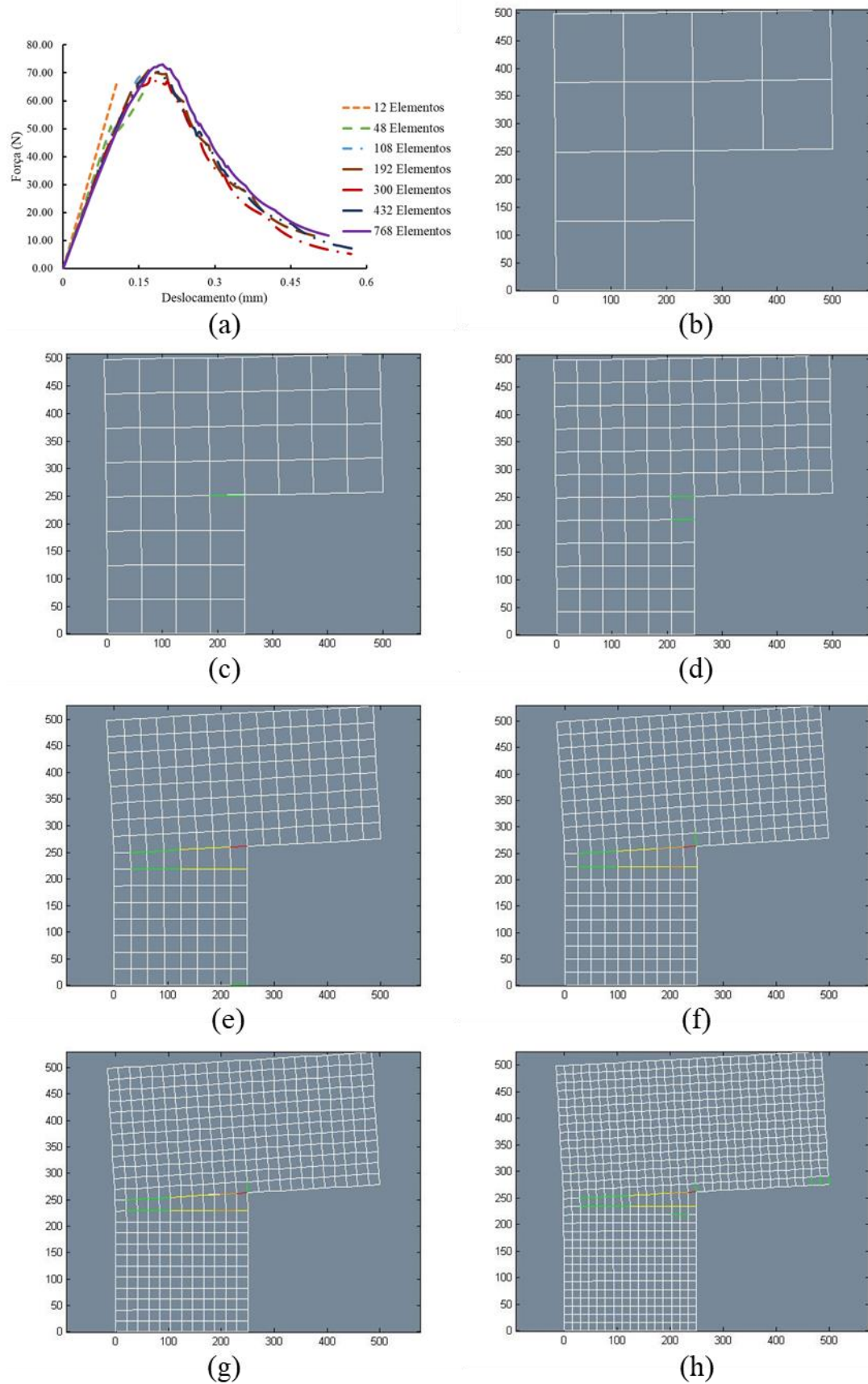
Fonte: próprio autor.

Figura 4.7. Resultados para $q = -37,5$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



Fonte: próprio autor.

Figura 4.8. Resultados para $q = -50,0$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).

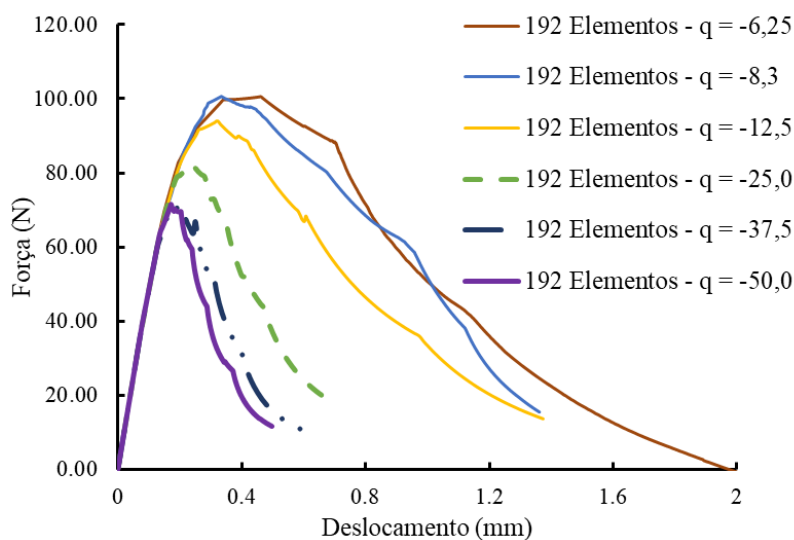


Fonte: próprio autor.

Uma comparação entre as respostas com a variação do parâmetro em análise é apresentada na Figura 4.9 para a malha com 192 elementos. Nesta comparação é possível notar uma influência do parâmetro no valor da carga de última, em que quanto menor em termos absolutos é o valor de q , maior o valor da carga de colapso. Outra influência do parâmetro é notada no pós pico da curva força-deslocamento, no qual, conforme esperado, a inclinação aumenta quanto maior em termos absolutos é o valor de q . Ou seja, para valores menores do parâmetro, a queda da curva se dá de maneira mais suave.

A influência do parâmetro q na inclinação do pós pico pode justificar a dificuldade relatada anteriormente na evolução das simulações de malhas com menos elementos com maiores valores absolutos do parâmetro. Isto é, a queda mais brusca na curva força-deslocamento torna-se difícil de ser reproduzida numa análise com uma malha mais grosseira, ou seja, com um menor número de elementos.

Figura 4.9. Comparação entre as curvas força-deslocamento com a variação do parâmetro q para a malha com 192 elementos.



Fonte: próprio autor.

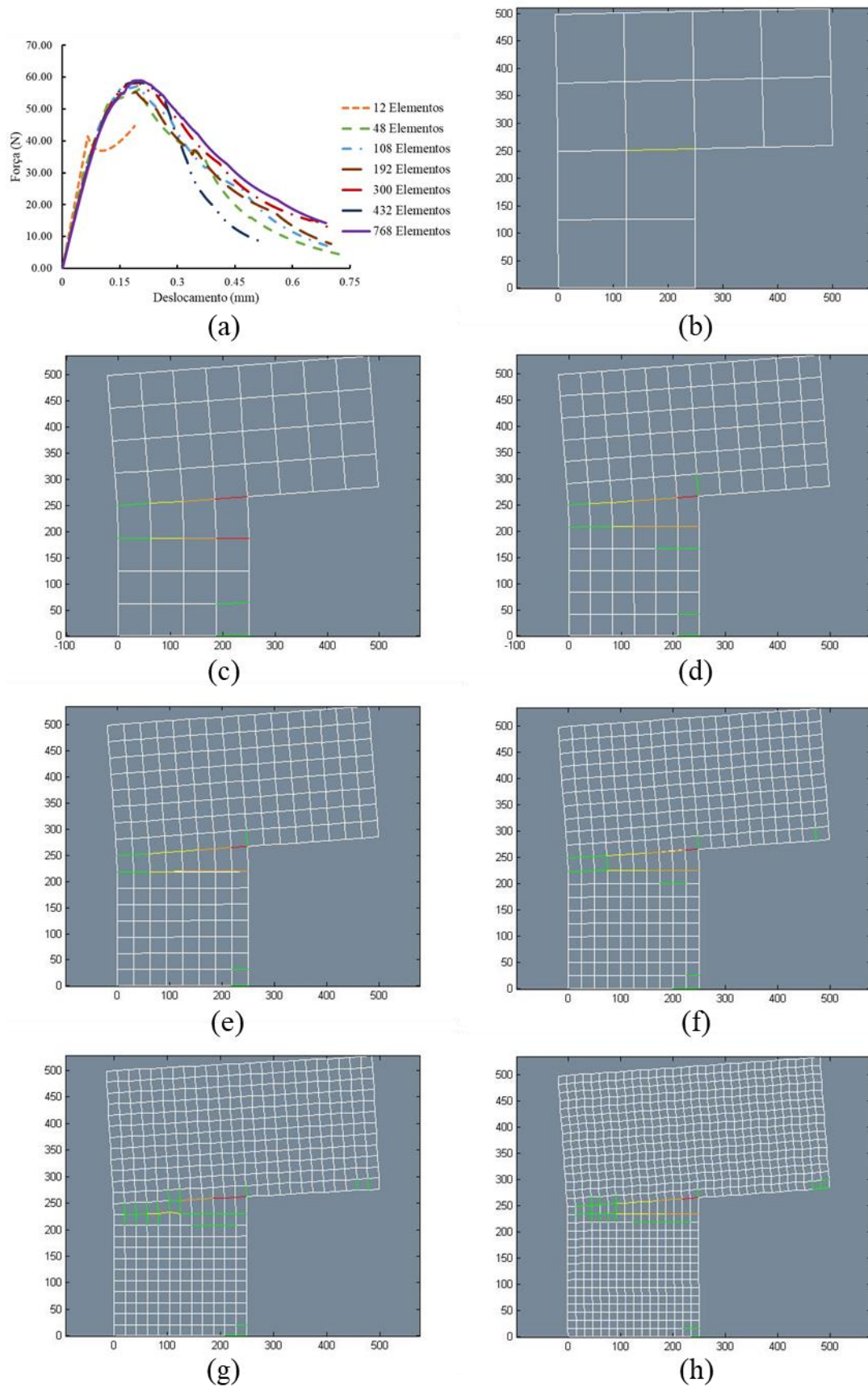
4.3. Análise paramétrica da variação da tensão crítica σ_{cr}

Novamente foram simuladas as mesmas malhas anteriormente apresentadas, variando apenas a propriedade em estudo e mantendo constantes as demais com os seguintes valores: módulo de elasticidade longitudinal $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$ e parâmetro $q = -25,0$. Foram escolhidos também quatro valores para a tensão crítica: $1,70 \text{ N/mm}^2$ (Figura 4.10), $2,70 \text{ N/mm}^2$ (Figura 4.6), $3,70 \text{ N/mm}^2$ (Figura 4.11) e $4,70 \text{ N/mm}^2$ (Figura 4.12).

É possível notar objetividade de solução com o aumento do número de elementos na malha independentemente do valor de tensão crítica, e também o surgimento da zona de falha na localização esperada.

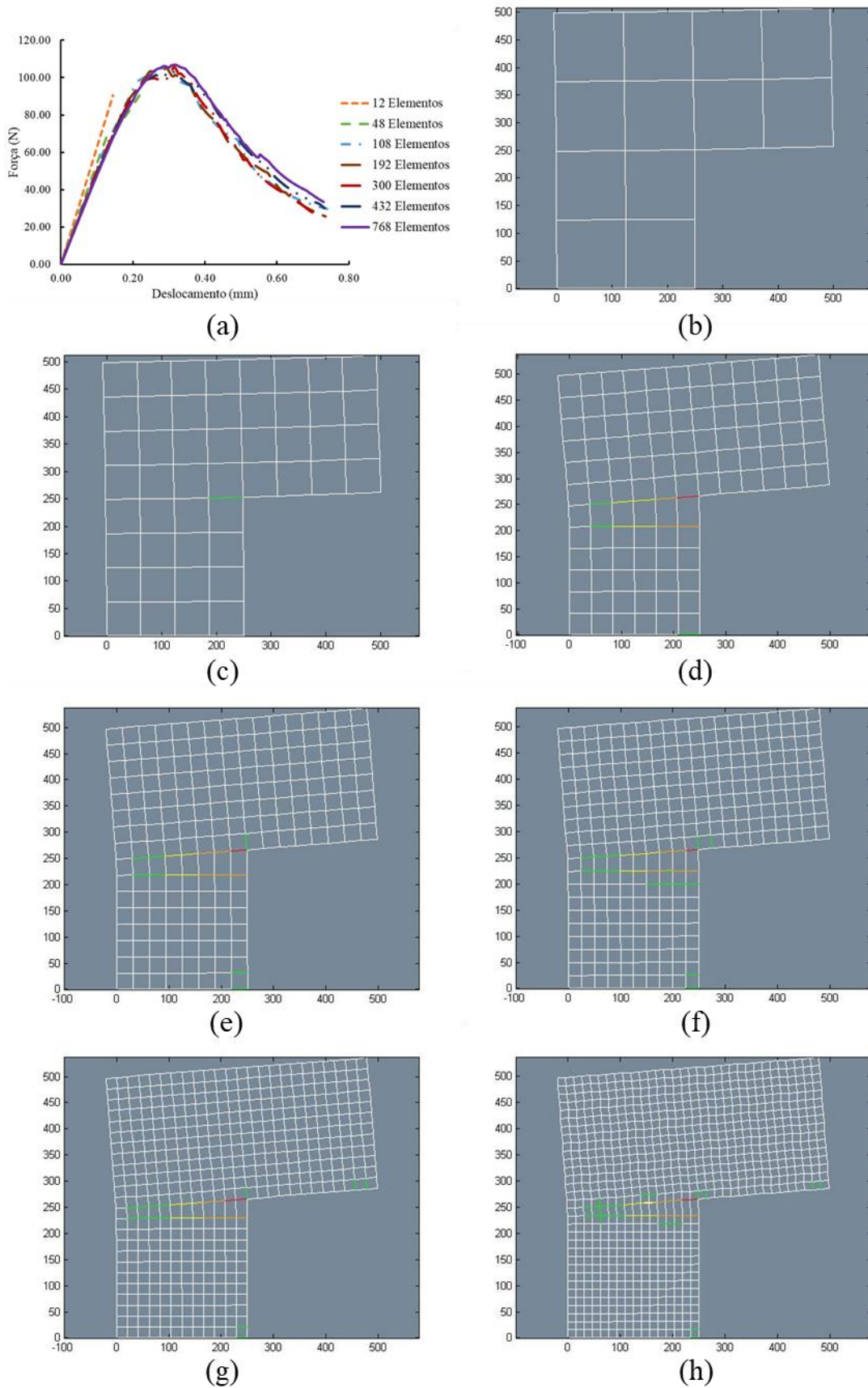
Conforme previsto, a alteração do valor de σ_{cr} interfere majoritariamente no valor de carga última. Assim, quanto maior o valor da tensão crítica, maior a carga de colapso obtida. Esta observação pode ser vista na Figura 4.13, que apresenta a comparação das curvas força-deslocamento para a malha mais refinada analisada com a variação da propriedade em estudo. Nesta comparação pode-se notar que as curvas apresentam formas semelhantes, alterando-se basicamente o valor da carga última.

Figura 4.10. Resultados para $\sigma_{cr} = 1,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



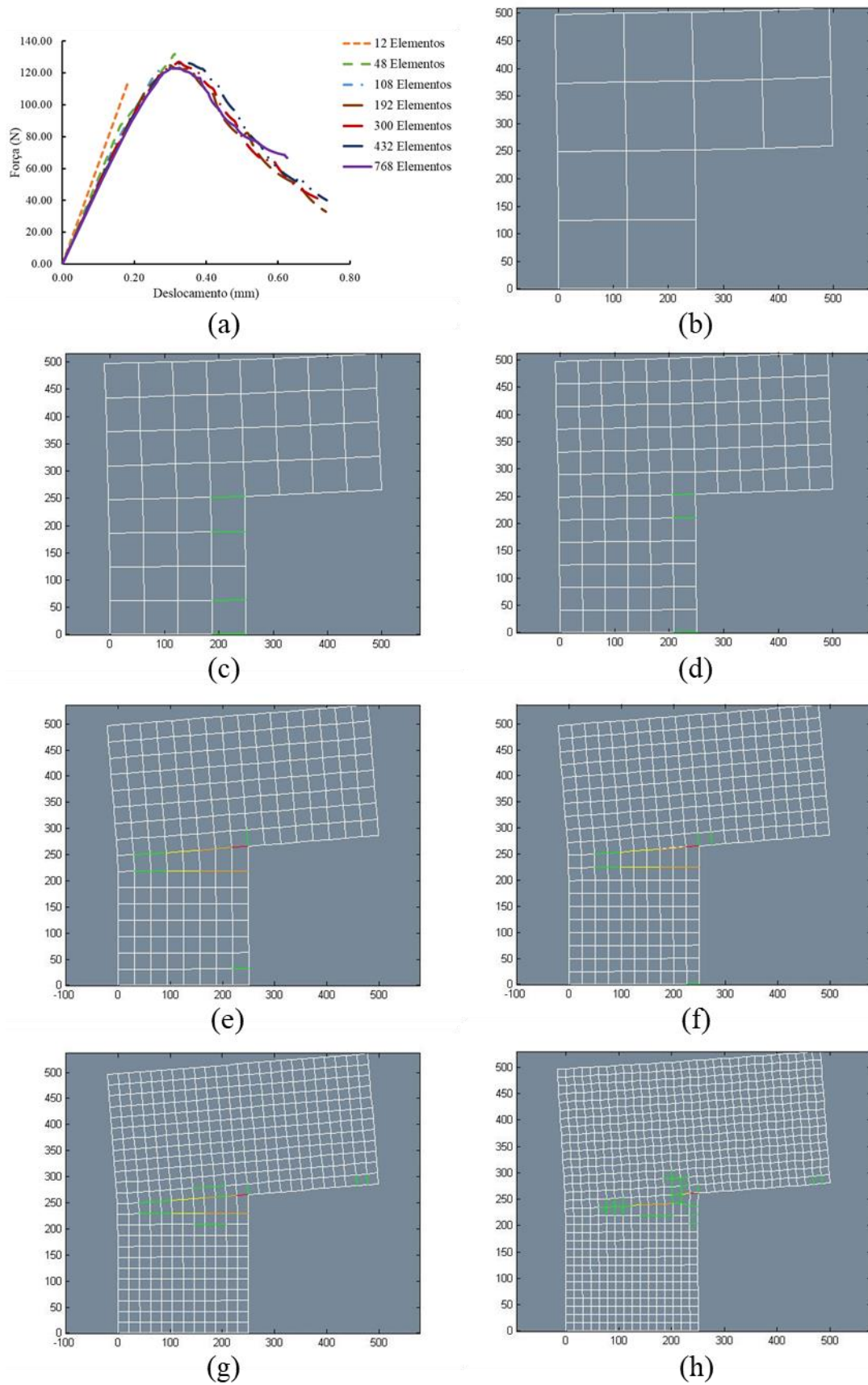
Fonte: próprio autor.

Figura 4.11. Resultados para $\sigma_{cr} = 3,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



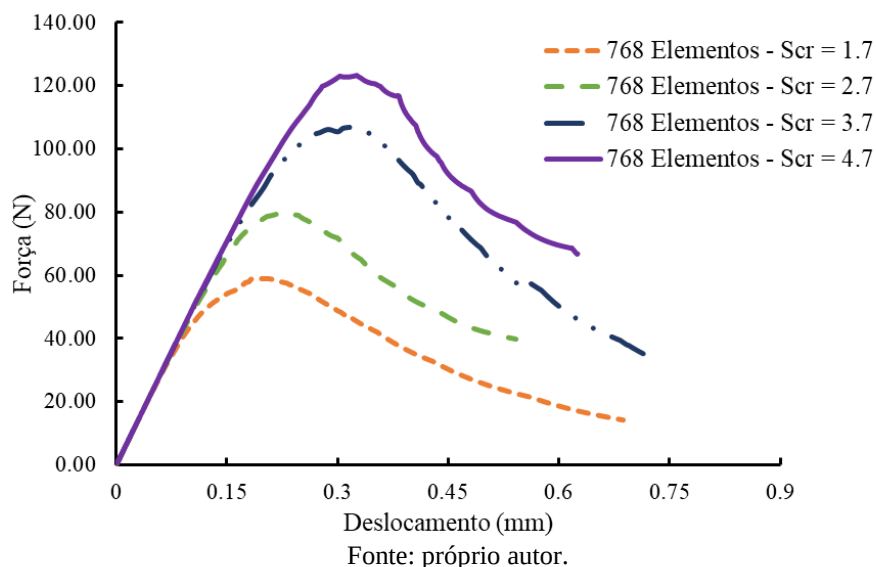
Fonte: próprio autor.

Figura 4.12. Resultados para $\sigma_{cr} = 4,7 \text{ N/mm}^2$: curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 12 (b), 48 (c), 108 (d), 192 (e), 300 (f), 432 (g) e 768 elementos (h).



Fonte: próprio autor.

Figura 4.13. Comparação entre as curvas força-deslocamento com a variação de σ_{cr} para a malha com 768 elementos.

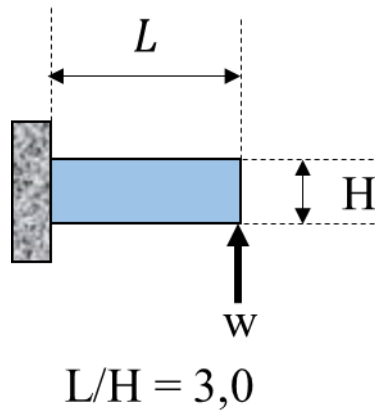


4.4. Efeito de escala

Este é um fenômeno já comprovado experimentalmente, no qual estruturas com condições de contorno e geometria similares, apresentam decaimento da tensão normal de colapso com o crescimento das dimensões da estrutura. Estudos experimentais para analisar o fenômeno em concreto (KANI, 1967; KARIHALOO; ABDALLA; XIAO, 2003), madeira (MOREL; DOURADO, 2011) e rochas (WANG; ZHANG; XIE, 2010) foram realizados desde o século passado. Por outro lado, estudos visando o desenvolvimento de ferramentas numéricas que consigam prever tal fenômeno foram realizados, utilizando por exemplo integrais não locais (GRÉGOIRE; ROJAS-SOLANO; PIAUDIER-CABOT, 2013; HAVLÁSEK; GRASSL; JIRÁSEK, 2016), análise estatística (MIHASHI; WITTMANN, 1983; MIHASHI; ZAITSEV, 1981; WEIBUL, 1939) e mecânica da fratura (BAŽANT, 1989; BAŽANT; PLANAS, 1997).

Para mostrar que o elemento finito da MDCX capta o efeito de escala, o exemplo apresentado na Figura 4.14 foi simulado. Trata-se de uma viga engastada em uma das extremidades e submetida a um deslocamento imposto na outra extremidade. As análises foram realizadas com uma relação de aspecto L/H de 3,0, com espessura da chapa constante com valor de 1,0.

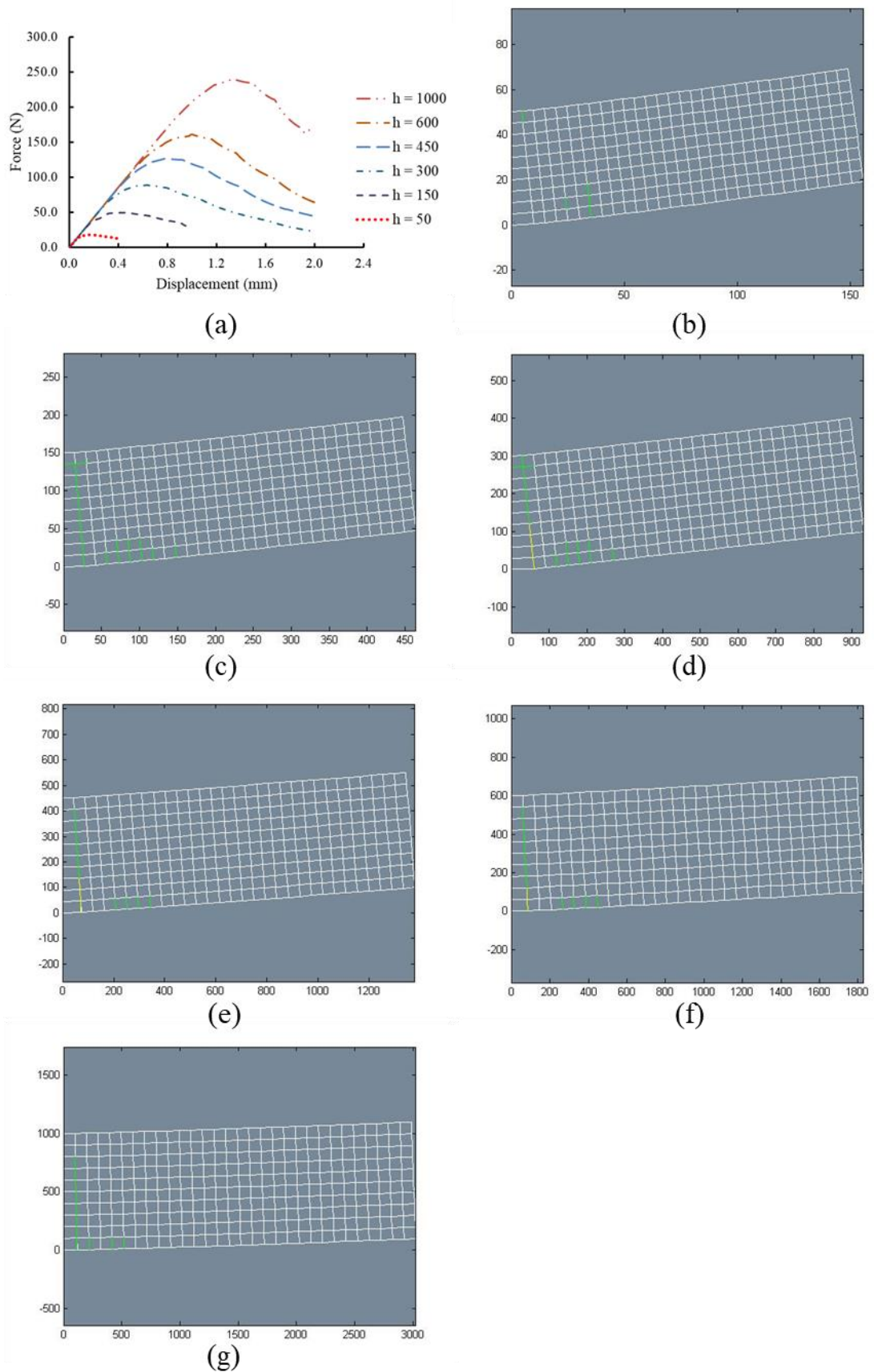
Figura 4.14. Exemplo para análise do fator de escala.



Fonte: próprio autor.

O exemplo foi simulado com malhas regulares de 300 elementos com os seguintes valores de H em milímetros: 50, 150, 300, 450, 600 e 1000. O módulo de elasticidade foi 26000,00 N/mm², a tensão crítica foi 3,00 N/mm², o coeficiente de Possion 0,25, e o parâmetro q foi - 9,375. A Figura 4.15a apresenta a curva força-deslocamento de todas as seis simulações realizadas e a Figura 4.15b-g apresenta a configuração deformada e região de falha do exemplo.

Figura 4.15. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada para H igual a 50 (b), 150 (c), 300 (d), 450 (e), 600 (f) e 1000 (g).



Fonte: próprio autor.

Para cada simulação realizada foi extraído o valor da força de colapso P_u e determinada a tensão de colapso σ_t :

$$\sigma_t = \frac{P_u LH}{2I} \quad (57)$$

sendo L o comprimento da viga, H a altura da viga e I o momento de inércia da seção. Os valores calculados são apresentados na Tabela 4.2.

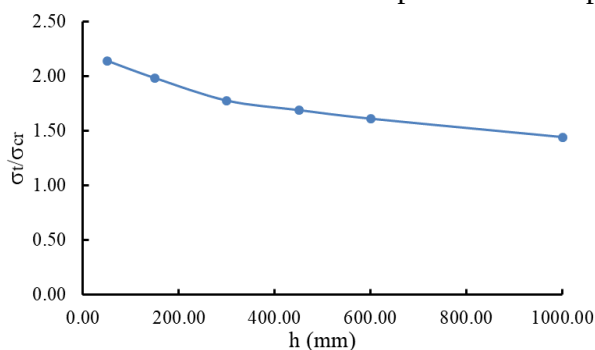
Tabela 4.2. Resultados das análises do efeito de escala.

H (mm)	P_u (N)	L (mm)	I (mm ⁴)	σ_t (N/mm ²)	σ_t/σ_{cr}
50	17,87	150	10416,67	6,43	2,14
150	49,63	450	281250,00	5,96	1,99
300	88,93	900	2250000,00	5,34	1,78
450	126,86	1350	7593750,00	5,07	1,69
600	161,30	1800	18000000,00	4,84	1,61
1000	240,63	3000	83333333,33	4,33	1,44

Fonte: próprio autor.

Conforme reportado na literatura técnica a respeito do fenômeno de efeito de escala, a tensão de colapso decresce nas simulações com o elemento proposto à medida em que se aumentam as dimensões do elemento analisado. Esta observação pode ser visualizada na Figura 4.16, que apresenta comportamento similar ao mostrado em trabalhos anteriores, como o de Ozbolt, Eligehausen e Petrangeli (1994), no qual nota-se que a redução na tensão de ruptura ocorre de maneira mais suave para elementos com dimensões elevadas, enquanto que essa variação ocorre mais rapidamente para elementos com dimensões menores.

Figura 4.16. Gráfico do fator de escala pelo elemento proposto.

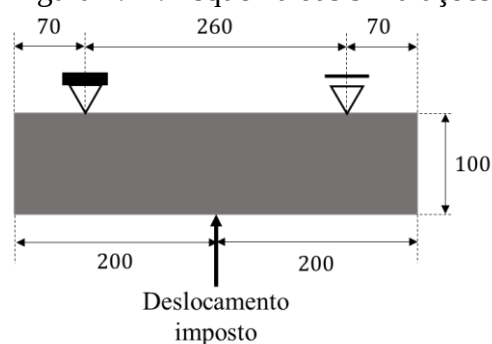


Fonte: próprio autor.

4.5. Vigas do LAMCE

Para simular os experimentos realizados no LAMCE, o esquema utilizado foi o apresentado na Figura 4.17, com dimensões em milímetros. A aplicação do deslocamento imposto, de baixo para cima, se deu apenas para facilitar o pós-processamento, com a obtenção de força e deslocamento positivos.

Figura 4.17. Esquema das simulações.



Fonte: próprio autor.

Para simular os prismas da primeira moldagem (2020-02-12) utilizaram-se as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 5,00 \text{ kN/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tensão crítica $\sigma_{cr} = 3,10 \text{ N/mm}^2$ e parâmetro $q = -28,89$, e os resultados estão apresentados na Figura 4.18. Para que a parte elástica das simulações fosse condizente com o obtido experimentalmente, o módulo de elasticidade utilizado foi menor que o obtido em laboratório. O coeficiente de Poisson foi adotado em conformidade com o valor médio encontrado para concreto na literatura técnica, visto que não foi realizado ensaio experimental que determinasse tal valor nos corpos de prova ensaiados. Para a tensão crítica, adotou-se nas simulações um valor que fica entre as resistências à tração mínima e máxima determinada na ABNT NBR 6118 (2014) pelas equações (58) e (59). Também se levou em consideração que esta propriedade fosse próxima ao valor de resistência à tração média determinado na ACI 318 (2008) pela equação (60).

$$f_{\alpha, mínima} = 0,21\sqrt[3]{f_c^2} \quad (58)$$

$$f_{\alpha, máxima} = 0,39\sqrt[3]{f_c^2} \quad (59)$$

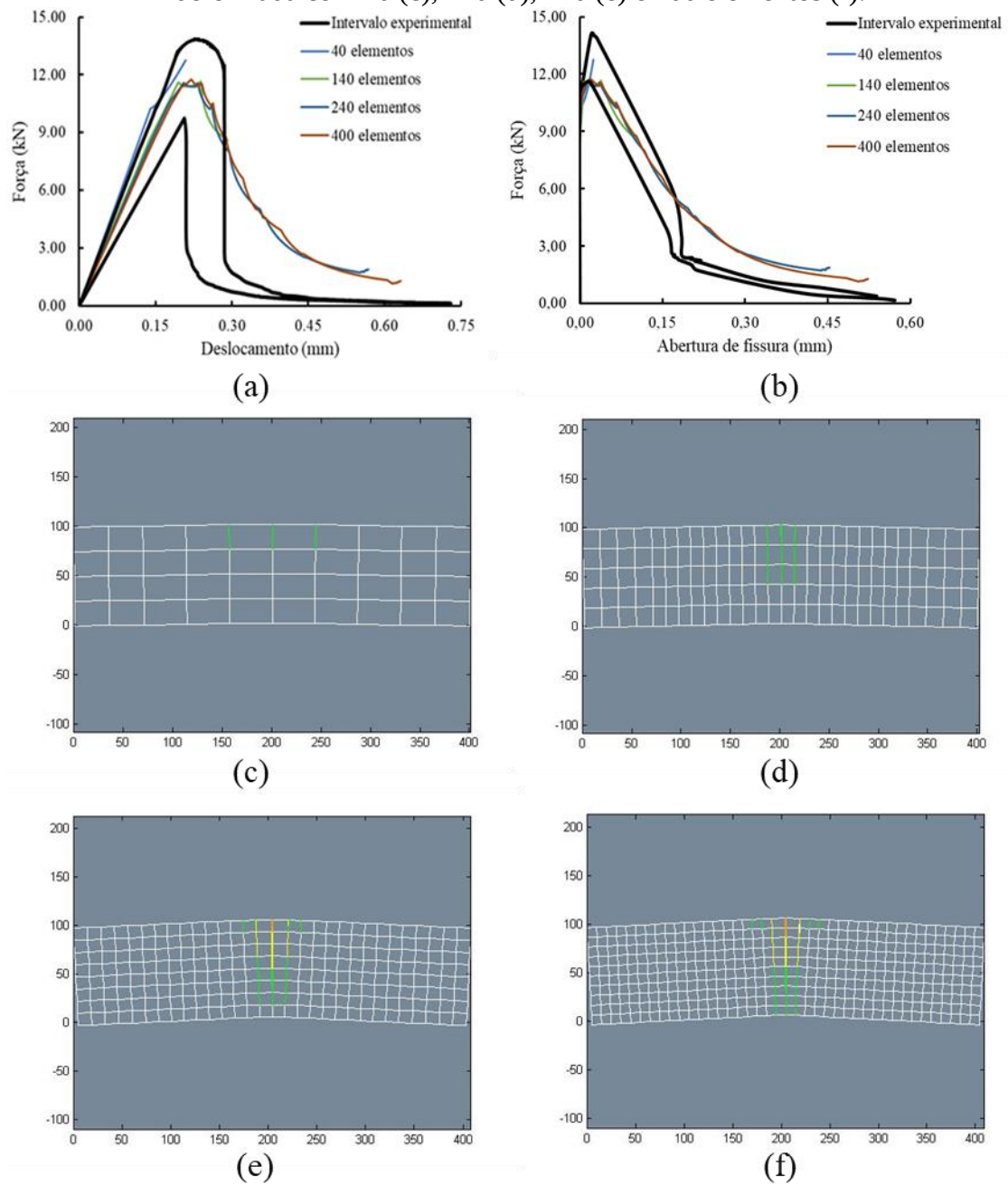
$$f_{ct} = 0,56\sqrt{f_c} \quad (60)$$

Sendo f_c a resistência à compressão.

Para simular os prismas da segunda moldagem (2020-02-19) utilizaram -se as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 5,00 \text{ kN/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tensão crítica $\sigma_{cr} = 2,90 \text{ N/mm}^2$ e parâmetro $q = -28,89$, e os resultados estão apresentados na Figura 4.19. Foram adotadas as mesmas condições anteriormente comentadas para determinação das propriedades do material.

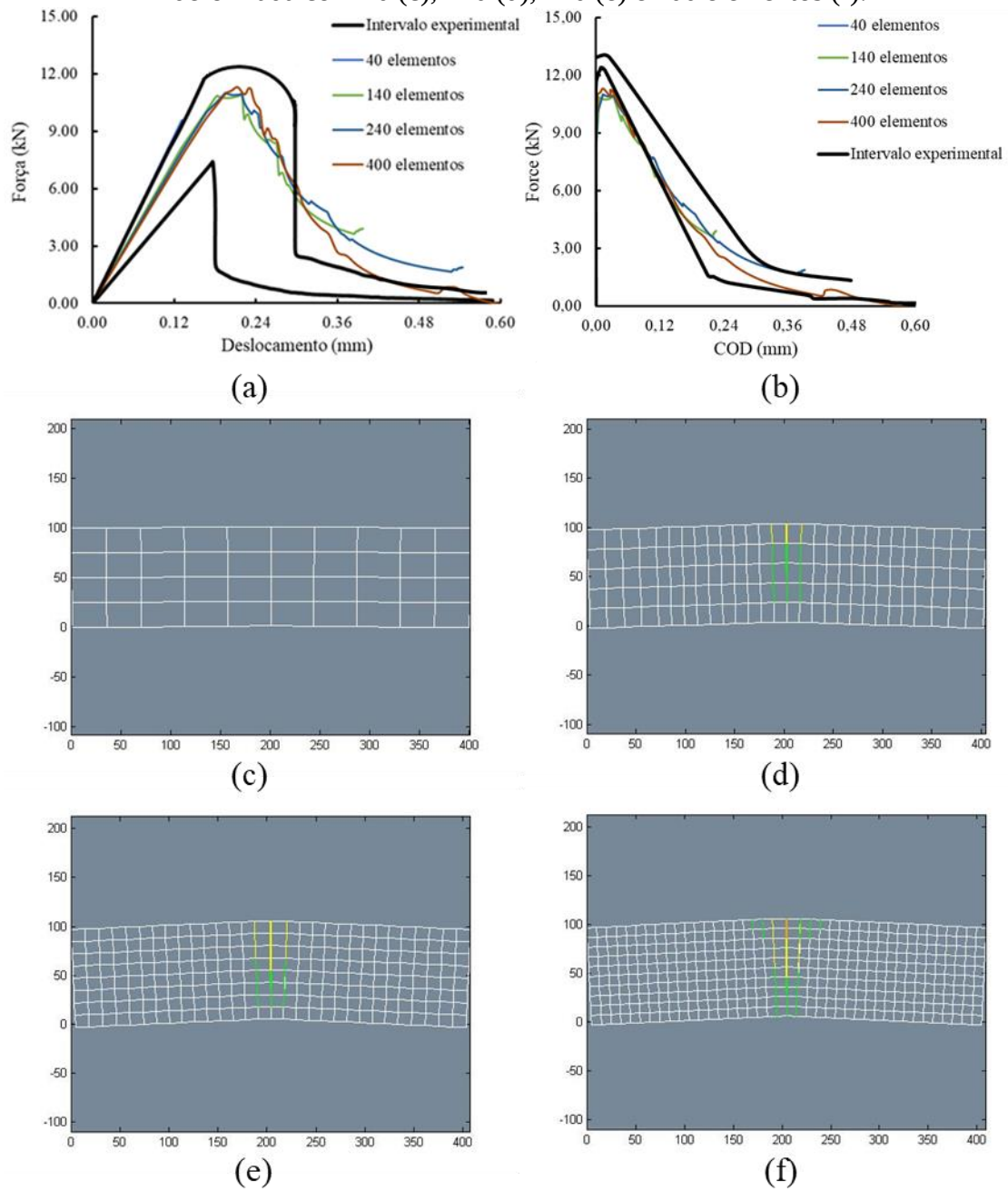
É possível notar objetividade de solução e reprodução da zona de falha nas simulações com as propriedades das duas moldagens. Por outro lado, observa-se a dificuldade de reprodução da queda brusca nas curvas força-deslocamento. Ainda assim, as curvas força-abertura de fissura, para as malhas mais refinadas, se encontram em concordância com o obtido experimentalmente a partir da utilização do *Correli-Q4*.

Figura 4.18. Comparação das simulações com os experimentos realizados nos prismas da primeira moldagem: curvas força-deslocamento (a) curvas força-abertura de fissura (b), malha deformada com 40 (c), 140 (d), 240 (e) e 400 elementos (f).



Fonte: próprio autor.

Figura 4.19. Comparação das simulações com os experimentos realizados nos prismas da segunda moldagem: curvas força-deslocamento (a) curvas força-abertura de fissura (b), malha deformada com 40 (c), 140 (d), 240 (e) e 400 elementos (f).



Fonte: próprio autor.

5. EXPANSÃO DA LDNL PARA ELEMENTO PROPOSTO POR SANTOS (2021)

Neste capítulo são apresentadas as alterações necessárias para a implementação da LDNL no elemento com 6 bandas de localização desenvolvido anteriormente por Santos (2021).

Assim como apresentado na seção 3.1, a formulação do elemento finito é alterada apenas na etapa que contém as leis de evolução do dano, neste caso para implementar a LDNL em cada nó das seis bandas de localização:

$$\begin{aligned}
 g_i^{ij} &= \sigma_i^{ij} - \sigma_{cr_i}^{ij} \exp(qe_i^{ij}) \leq 0; \quad g_j^{ij} = \sigma_j^{ij} - \sigma_{cr_j}^{ij} \exp(qe_j^{ij}) \leq 0 \\
 g_i^{ik} &= \sigma_i^{ik} - \sigma_{cr_i}^{ik} \exp(qe_i^{ik}) \leq 0; \quad g_k^{ik} = \sigma_k^{ik} - \sigma_{cr_k}^{ik} \exp(qe_k^{ik}) \leq 0 \\
 g_i^{il} &= \sigma_i^{il} - \sigma_{cr_i}^{il} \exp(qe_i^{il}) \leq 0; \quad g_l^{il} = \sigma_l^{il} - \sigma_{cr_l}^{il} \exp(qe_l^{il}) \leq 0 \\
 g_j^{jl} &= \sigma_j^{jl} - \sigma_{cr_j}^{jl} \exp(qe_j^{jl}) \leq 0; \quad g_l^{jl} = \sigma_l^{jl} - \sigma_{cr_l}^{jl} \exp(qe_l^{jl}) \leq 0 \\
 g_j^{jk} &= \sigma_j^{jk} - \sigma_{cr_j}^{jk} \exp(qe_j^{jk}) \leq 0; \quad g_k^{jk} = \sigma_k^{jk} - \sigma_{cr_k}^{jk} \exp(qe_k^{jk}) \leq 0 \\
 g_l^{lk} &= \sigma_l^{lk} - \sigma_{cr_l}^{lk} \exp(qe_l^{lk}) \leq 0; \quad g_k^{lk} = \sigma_k^{lk} - \sigma_{cr_k}^{lk} \exp(qe_k^{lk}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{61}$$

sendo todas as variáveis com o mesmo significado dos apresentados em (45).

Todo o restante da implementação permanece conforme apresentado na seção 3.1 e em Santos (2021) (Apêndice B).

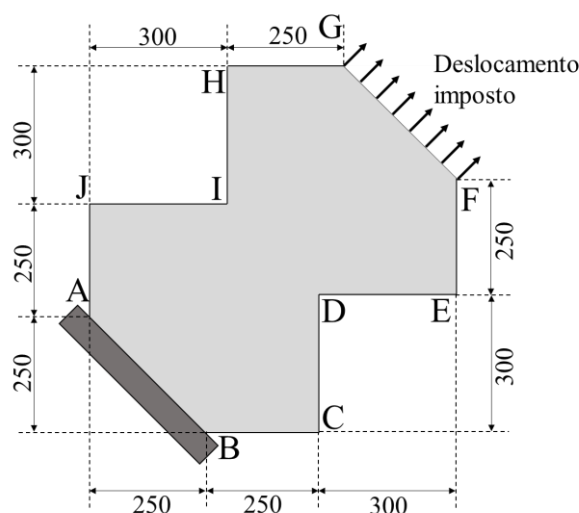
6. RESULTADOS PARA O ELEMENTO COM SEIS BANDAS E LDNL

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com a implementação utilizando o elemento com seis bandas de localização e LDNL. A geometria do primeiro exemplo apresentado é semelhante a um hexágono duplo, sendo necessárias malhas irregulares para realizar as simulações, que não seriam possíveis com o elemento apresentado na seção 3.1. Em seguida é apresentado um exemplo que possui resultados experimentais já publicados na literatura técnica. Por fim, a seção 6.3 discute a possível relação entre o parâmetro q , introduzido na formulação a partir do presente trabalho, e a energia de fratura presente em formulações da mecânica da fratura.

6.1. Hexágono duplo

O exemplo trata de uma chapa com geometria e condições de contorno conforme apresentado na Figura 6.1, com deslocamentos restringidos na face que liga os nós A e B, e deslocamento imposto inclinado à 45° imposto na face que liga os nós G e F. O material da chapa tem módulo de elasticidade longitudinal $E = 25850,00 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, tensão crítica $\sigma_{cr} = 2,70 \text{ N/mm}^2$ e parâmetro $q = -15,00$. Foram utilizadas 4 malhas irregulares para analisar o problema, com 230, 468, 672 e 829 elementos.

Figura 6.1. Configuração do hexágono duplo.

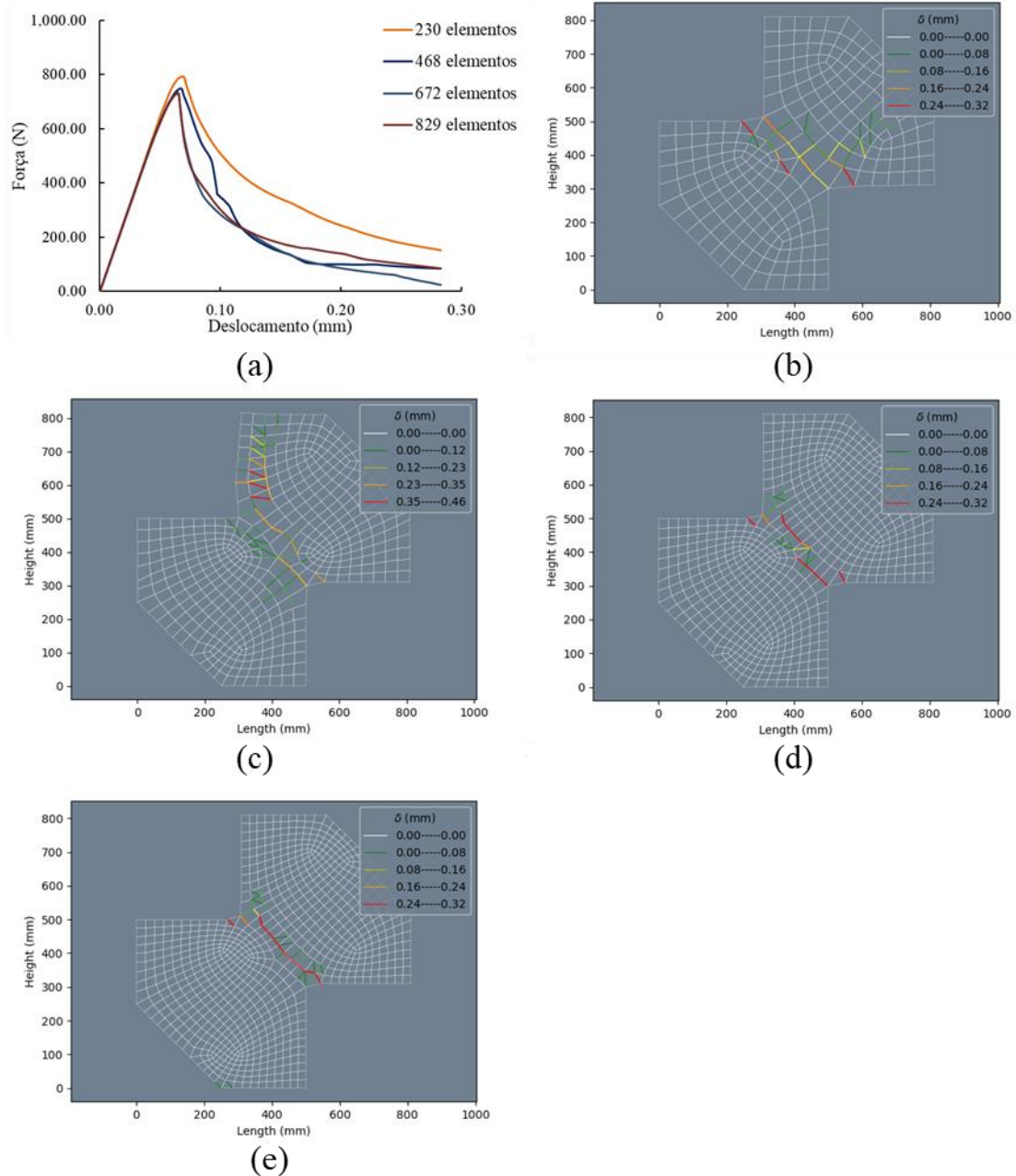


Fonte: próprio autor.

Os resultados são apresentados na Figura 6.2, sendo observada a independência de malha e objetividade de solução na curva força-deslocamento (Figura 6.2a). A região de falha observada nas malhas com 230, 630 e 829 elementos é, conforme esperado, na parte mais

estreita da chapa, que liga os dois hexágonos. Na malha com 468 elementos é possível notar um pequeno desvio na região de falha, que apesar de observados altos valores de espessuras de banda na região mais estreita da chapa, também se nota altos valores na região superior.

Figura 6.2. Curvas força-deslocamento (a) malha deformada com 230 (b), 468 (c), 672 (d) e 829 elementos (e).

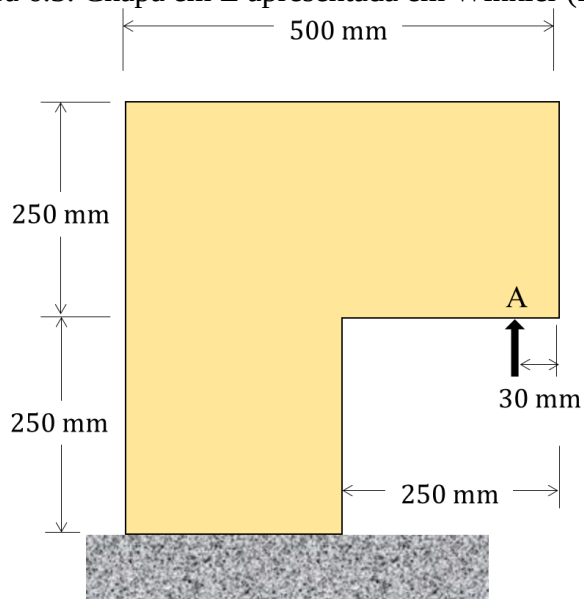


Fonte: próprio autor.

6.2. Experimento chapa em L

O exemplo testado nesta seção trata de uma chapa em L submetida a um deslocamento imposto a 30 mm da extremidade, conforme apresentado na Figura 6.3. Resultados experimentais com esta configuração foram obtidos na Universidade de Innsbruck por Winkler (2001). No trabalho original os experimentos foram realizados em quatro séries de chapa em L, que diferiam entre si na armadura. Cada série consistia de três chapas em L com configuração idêntica. Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001) utilizaram os mesmos resultados experimentais para comparar com suas respostas numéricas obtidas a partir de um modelo elastoplástico para avaliar fissuração em concreto. Com o mesmo propósito, Feist et al. (2004) utilizou os resultados experimentais da série de chapas formada apenas por concreto simples. No presente trabalho, para comparar com os resultados numéricos obtidos com o elemento proposto, foi utilizada a mesma série de resultados apresentada em Feist et al. (2004).

Figura 6.3. Chapa em L apresentada em Winkler (2001).



Fonte: adaptado de Feist et al. (2004).

O material utilizado na chapa foi concreto, com módulo de elasticidade de 25850 N/mm², coeficiente de Poisson de 0,18, resistência à compressão de 31,0 N/mm² e resistência à tração de 2,7 N/mm² (WINKLER, 2001).

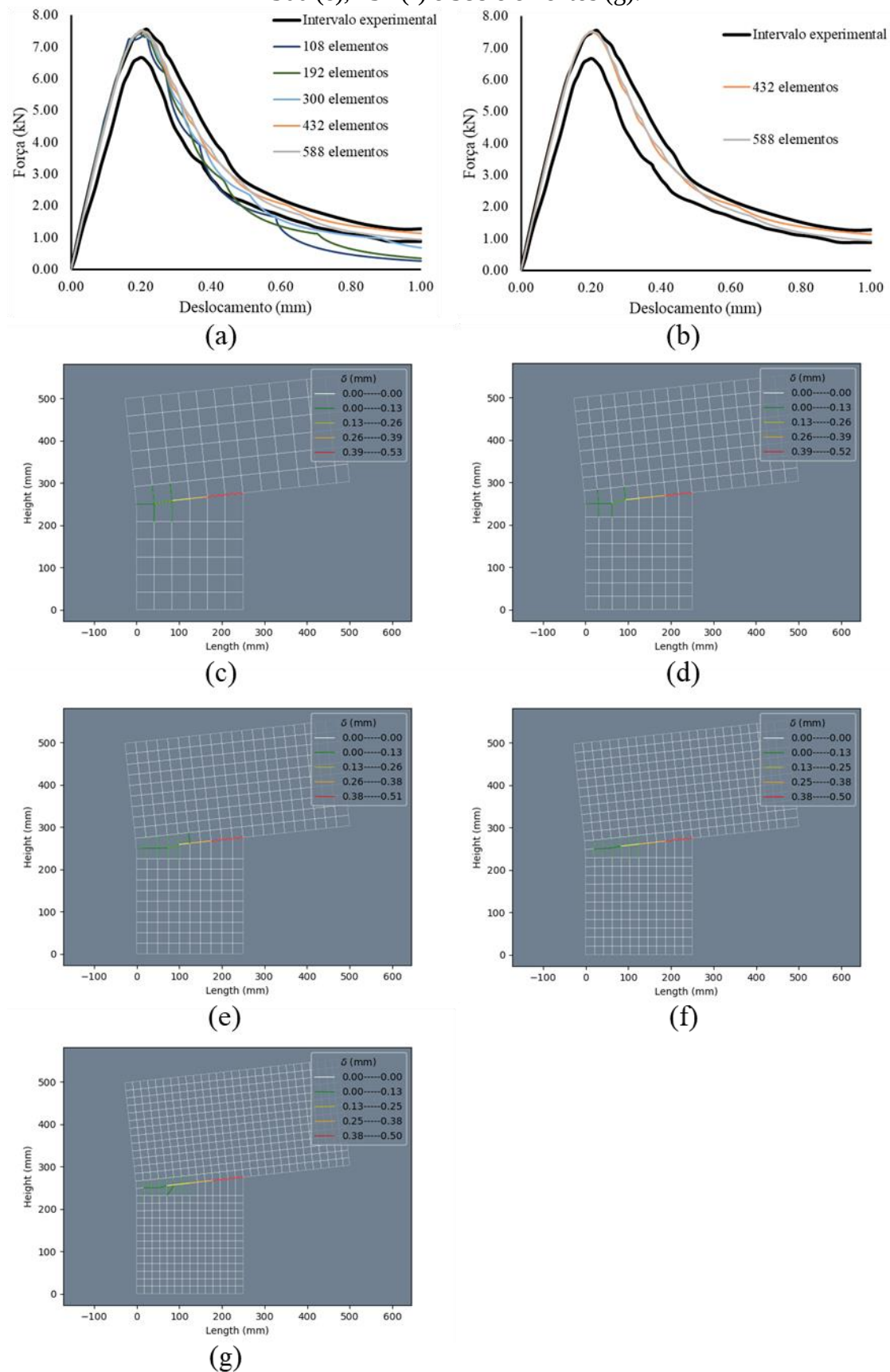
Nas simulações foi utilizado o parâmetro q com o valor de -20,0. Para que a parte elástica das simulações fosse condizente com o obtido experimentalmente, o módulo de elasticidade utilizado foi 20000,00 N/mm². Para o valor de tensão crítica σ_{cr} foi utilizada a

resistência à tração obtida experimentalmente de 2,70 N/mm². Para o coeficiente de Poisson também se utilizou o valor obtido pelos autores do experimento, de 0,18. Na Figura 6.4 são apresentados os resultados das simulações e o intervalo das respostas força-deslocamento experimentais.

Novamente ressalta-se a objetividade de solução e independência de malha nas simulações realizadas. Nota-se pela Figura 6.4b que as respostas força-deslocamento nas duas malhas mais refinadas apresentam um ótimo ajuste com o intervalo experimental ao longo de toda a curva.

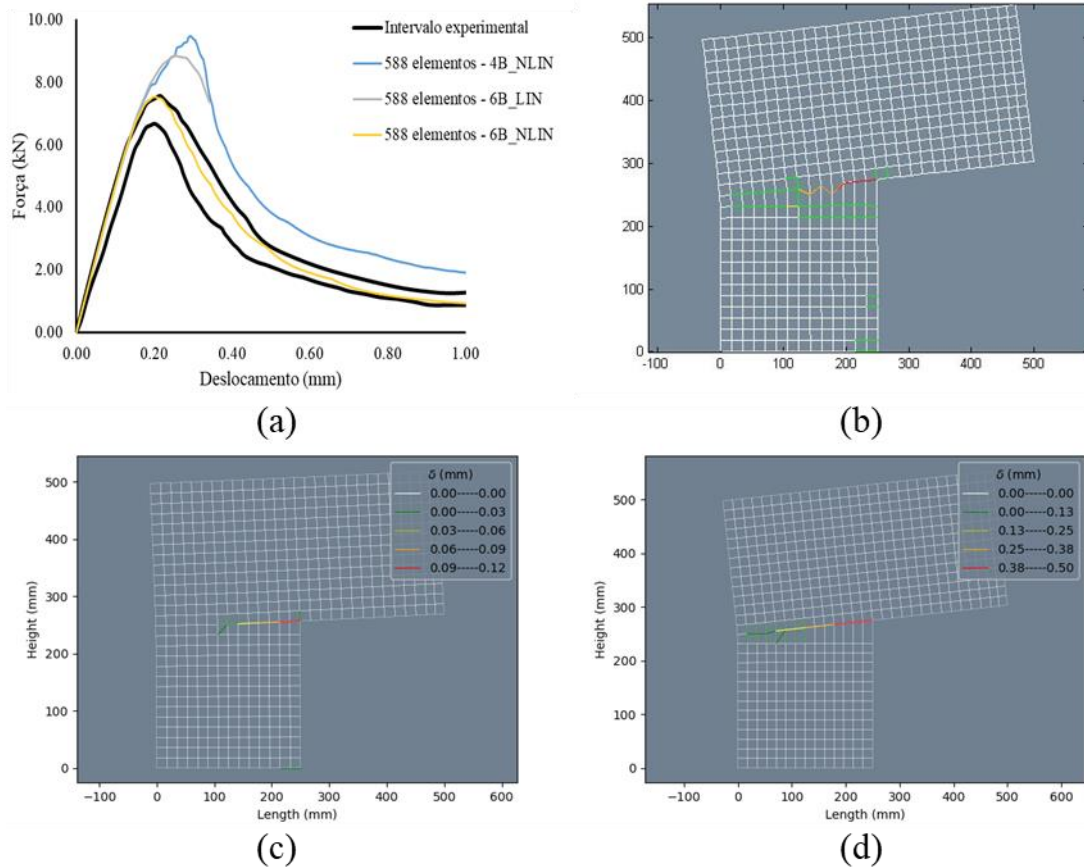
Na Figura 6.5 é apresentada uma comparação entre as respostas obtidas para a malha mais refinada testada, utilizando o elemento com seis bandas de localização e lei de dano linear (SANTOS, 2021), e os elementos desenvolvidos no presente trabalho com quatro e seis bandas de localização e LDNL. No elemento com lei de dano linear, foi adotado alongamento último $\delta_u = 0,12$. A análise com este elemento é interrompida quando é atingido o alongamento último, sendo este o motivo pelo qual sua resposta apresenta um pós-pico bem menor comparado aos elementos com LDNL. É importante notar que todos os elementos citados são capazes de capturar com êxito a região de falha, e a grande vantagem dos elementos com LDNL é justamente a capacidade de reprodução das curvas força-deslocamento obtidas experimentalmente. Esta capacidade não é refletida neste exemplo utilizando o elemento com quatro bandas de localização, que apresenta uma resposta força-deslocamento que não está conforme o experimental. Isto pode ter ocorrido devido à ausência das bandas de localização diagonais que são ativas nas regiões mais internas do exemplo, sendo este problema corrigido com a utilização do elemento com seis bandas de localização.

Figura 6.4. Curvas força-deslocamento obtidas na simulação e intervalo experimental (a) respostas das malhas mais refinadas simuladas (b), malha deformada com 108 (c), 192 (d), 300 (e), 432 (f) e 588 elementos (g).



Fonte: próprio autor.

Figura 6.5. Comparação da resposta força-deslocamento entre o elemento com quatro e seis bandas, com lei de dano linear e não linear (a), deformada do elemento com quatro bandas (b), seis bandas e lei de dano linear (c) e seis bandas e LDNL (d).



Fonte: próprio autor.

6.3. Estudo do parâmetro q

Como pode ser visto a LDNL apresenta resultados muito promissores. No entanto, ainda não se tem uma relação clara do parâmetro q introduzido na formulação com as propriedades do material a ser testado. Tendo isso em vista, esta seção busca avaliar o parâmetro relacionando-o com a energia de fratura presente em formulações da mecânica da fratura (BROEK, 1974; LEONEL, 2021). A escolha por tentar relacionar o parâmetro com a energia de fratura se deu justamente devido ao discutido na seção 1.1, que a formulação em MDCX se aproxima da mecânica da fratura ao utilizar as leis de evolução de fissuração a partir do critério de Griffith.

De forma resumida, a energia de fratura corresponde ao trabalho necessário para a ruptura completa de uma seção transversal entalhada, que pode ser calculada a partir da área sob a curva observada na Figura 2.9a. Esta área pode ser calculada a partir da equação (62).

$$G_f = \int_0^{\delta_c} \sigma(\delta^d) d\delta^d \quad (62)$$

Sendo δ_c dado na Figura 2.9a e $\sigma(\delta^d)$, observando a equação (25), dado por:

$$\sigma(\delta^d) = \sigma_{cr} \exp(q\delta^d) \quad (63)$$

Assim, conhecidos os valores de q e σ_{cr} , é possível determinar o valor de G_f . Além disso, analisando as unidades das grandezas presentes na equação (62), é possível determinar que a unidade do parâmetro q seria o inverso de uma medida de comprimento (m^{-1} , mm^{-1} , pol^{-1} , etc.).

Tendo isso em vista, o exemplo apresentado na seção 6.2 foi simulado com três valores de parâmetro q , que correspondem a três diferentes valores de G_f (Tabela 6.1). As demais propriedades foram mantidas conforme os resultados apresentados anteriormente.

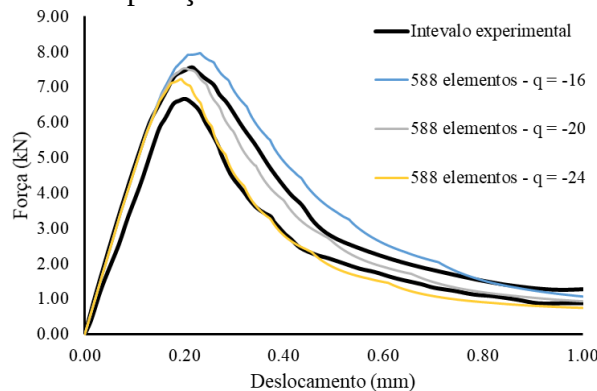
Tabela 6.1. Valores de G_f correspondentes aos valores de q testados.

q (mm^{-1})	G_f (N/mm)
-16,0	0,1687
-20,0	0,1350
-24,0	0,1125

Fonte: próprio autor.

Com os três valores de parâmetro q apresentados na Tabela 6.1, as respostas força-deslocamento são apresentadas na Figura 6.6. O resultado com $q = -16 \text{ mm}^{-1}$ se apresenta menos ajustado à curva experimental que os demais, levando a conclusão que a energia de fratura teria um valor mais próximo aos correspondentes a $q = -20 \text{ mm}^{-1}$ e $q = -24 \text{ mm}^{-1}$.

Figura 6.6. Comparação do L30 com diferentes valores de q .



Fonte: próprio autor.

Os autores dos experimentos, Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001), apresentam em seu trabalho a energia de fratura com valor de $G_f = 0,065$ N/mm. Em um trabalho posterior, Feist et al. (2004) apresentam para os mesmos experimentos um valor diferente para a energia de fratura, $G_f = 0,090$ N/mm. Vale ressaltar que um dos autores do segundo trabalho também é autor do primeiro. Apesar da incerteza quanto ao valor de tal quantidade, é possível notar que o menor valor de G_f numericamente estimado no presente trabalho ($G_f = 0,1125$ N/mm) é próximo ao apresentado por Feist et al. (2004).

Com isso, é possível notar que pode haver uma relação entre o parâmetro q , proposto no presente trabalho, e a energia da fratura presente nos modelos com mecânica da fratura. No entanto, mais exemplos, com diferentes materiais e configurações de geometria e condições de contorno, são necessários para determinar se a relação direta entre G_f e q conforme apresentado nesta seção é adequada.

7. CONCLUSÕES

A presente pesquisa visou contribuir com o desenvolvimento da Mecânica do Dano Concentrado Expandida (MDCX) a partir da proposta de alteração da lei de dano para uma equação que pudesse reproduzir o comportamento experimental de materiais submetidos a modo I de falha. O elemento com quatro bandas de localização teve relativo êxito ao reproduzir experimentos de flexão de 3 pontos em vigas, devido à dificuldade de reprodução da brusca queda na resposta força-deslocamento. Ainda assim o elemento atingiu objetividade de solução, independência de malha e bom ajuste na relação entre força e abertura de fissuras para o mesmo exemplo.

A implementação da LDNL no elemento com seis bandas de localização contornou limitações quanto a aplicação em exemplos com malhas irregulares. Além disso, a partir da comparação dos resultados numéricos e experimentais obtidos para a chapa em L, foi possível concluir que o elemento apresenta resultados razoavelmente melhores aos apresentados pelos elementos anteriores, mesmo em malhas regulares.

Os resultados apresentados com a LDNL proposta são promissores tendo em vista o relativo êxito em reproduzir exemplos experimentais. No entanto, ainda não há uma compreensão completa da relação entre o parâmetro q inserido na formulação e as propriedades dos materiais. Uma relação promissora com a energia de fratura foi apresentada, apesar da incerteza quanto ao valor real da propriedade devido aos resultados diferentes apresentados pelos autores dos experimentos. Neste sentido, este é um dos desafios que podem ser explorados em trabalhos futuros, a partir da aplicação em outros experimentos com diferentes configurações e materiais.

Esforços futuros na MDCX podem ser voltados também para a formulação de um elemento finito que seja capaz de reproduzir o comportamento de exemplos com falha ao modo II, permitindo assim a aplicação em experimentos que falham devido ao cisalhamento. Neste elemento, as bandas de localização devem ter interpretação diferente, referindo-se à deformação inelástica por cisalhamento ou distorção.

A expansão da formulação para meios tridimensionais também se apresenta como um desafio futuro na MDCX, sendo um elemento hexaédrico com 8 nós o mais próximo do elemento finito apresentado no presente trabalho. Neste sentido, o elemento teria 24 graus de liberdade, sendo necessários 18 *numexes*.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318**: Building code requeriments for structural concrete. Farmington Hills, p.624, 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, p. 238. 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5739**: Concreto - Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, p. 9. 2018.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522**: Concreto - Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão. Rio de Janeiro, p. 20. 2017.
- ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. DE C. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, v. 32, n. 4, p. 974–981, abr. 2010.
- AMORIM, D. L. N. F. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications**. 2016. 193 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- AMORIM, D. L. N. DE F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 24, p. 4070–4079, nov. 2013.
- AMORIM, D. L. N. DE F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, jul. 2014.
- AMORIM, D. L. N. F. et al. The extended lumped damage mechanics: A new formulation for the analysis of softening with FE size-independence. **Mechanics Research Communications**, 2018.
- BAI, Y. et al. Macromodeling of Crack Damage in Steel Beams Subjected to Nonstationary Low Cycle Fatigue. **Journal of Structural Engineering**, v. 142, n. 10, p. 04016076, out. 2016.
- BAI, Y.; GUAN, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Development of a damage model for assessing fracture failure of steel beam-to-column connections subjected to extremely low-cycle fatigue.

Engineering Failure Analysis, v. 82, p. 823–834, dez. 2017.

BAŽANT, Z. P. Fracture Energy of Heterogeneous Materials and Similitude. In: **Fracture of Concrete and Rock**. New York, NY: Springer New York, 1989. p. 229–241.

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials**. New York, NY: CRC Press, 1997.

BENALLAL, A.; COMI, C. Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. **International Journal of Solids and Structures**, 2002.

BENALLAL, A.; COMI, C. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2003.

BORDIGNON, N. et al. Strain localization and shear band propagation in ductile materials. **Frontiers in Materials**, 2015.

BRITO, T. I. DE J. et al. On the lumped damage modelling of reinforced concrete beams and arches. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 14, n. 54, p. 1–20, out. 2020.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. 1. ed. [s.l.] Martinus Nijhoff, 1974.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, mar. 1995.

DESRUES, J.; BÉSUELLE, P.; LEWIS, H. **Strain localization in geomaterials**. Geological Society Special Publication. **Anais...**2007

FEIST, C. et al. **A comparative study of numerical models for concrete cracking**. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. **Anais...**Jyvaskyla: 2004

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos de daño concentrados para la simulación numérica del colapso de pórticos planos. **Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria**, v. 9, n. 2, p. 123–139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Application**. Hershey: IGI

Global, 2015.

GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, n. 10, p. 1434–1452, jul. 2013.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, v. 221, p. 163–198, 1921.

GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture**. In: FIRST INTERNATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS. **Anais...**Delft: 1924

HASHIGUCHI, K.; PROTASOV, A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. **International Journal of Plasticity**, 2004.

HAVLÁSEK, P.; GRASSL, P.; JIRÁSEK, M. Analysis of size effect on strength of quasi-brittle materials using integral-type nonlocal models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 157, p. 72–85, maio 2016.

HOBBS, B. E.; MÜHLHAUS, H. B.; ORD, A. Instability, softening and localization of deformation. **Geological Society Special Publication**, 1990.

IRWIN, G. R. **Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate****Journal of Applied Mechanics**, 1957.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdeleniye Technicheskikh Nauk**, v. 8, p. 28–31, 1958.

KAEWKULCHAI, G.; WILLIAMSON, E. B. Beam element formulation and solution procedure for dynamic progressive collapse analysis. **Computers & Structures**, v. 82, n. 7–8, p. 639–651, mar. 2004.

KANI, G. N. J. How Safe are Our Large Reinforced Concrete Beams? **Journal Proceedings**, v. 64, n. 3, p. 128–141, 1967.

KARIHALOO, B. .; ABDALLA, H. .; XIAO, Q. Size effect in concrete beams. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 7–8, p. 979–993, maio 2003.

KIRSCH, C. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v. 42, p. 797-807, 1898.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mécaniques des matériaux solides**. [s.l.: s.n.].

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of Solid Materials**. [s.l.] Cambridge University Press, 1990.

LEONEL, E. D. **Aspectos teóricos da Mecânica da Fratura**. Notas de aula da Disciplina Introdução à Mecânica da Fratura da Escola de Engenharia de São Carlos da USP, 2021.

LIU, Y.; LIU, J. A damage beam element model for nonlinear analysis of reinforced concrete member. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, v. 24, n. 2, p. 95–100, 2004.

MARANTE, M. E.; BENALLAL, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de falla de sólidos inelásticos mediante la teoría de localización. **Acta Científica Venezolana**, 2007.

MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Plastic localization revisited. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, 2004.

MARIGO, J. J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. **Engineering Fracture Mechanics**, 1985.

MIHASHI, H.; WITTMANN, F. H. A stochastic theory for fracture of concrete. **Fracture Mechanics of Concrete**, p. 301–339, 1983.

MIHASHI, H.; ZAITSEV, J. W. Statistical nature of crack propagation. **Report to RILEM TC**, v. 50, p. 1–21, 1981.

MOREL, S.; DOURADO, N. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. **International Journal of Solids and Structures**, v. 48, n. 10, p. 1403–1412, maio 2011.

OLIVEIRA, J. M. DE J. **Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios Bidimensionais: Elemento Finito para Problemas de Localização de Deformações em Chapas**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, 2020.

OLIVEIRA, M. C.; TELES, D. V. DA C.; AMORIM, D. L. N. DE F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 14, n. 53, p. 13–25, 11 maio 2020.

OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R.; PETRANGELI, M. The size effect in concrete structures. 1994.

PEERLINGS, R. H. J. et al. Some observations on localization in non-local and gradient damage models. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, 1996.

PERDOMO, M. E. et al. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, v. 46, p. 407–416, jan. 2013.

PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simulation of damage in RC frames with variable axial forces. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 28, n. 3, p. 311–328, mar. 1999.

PICÓN, R. A. et al. Modeling of localization using Nash variational formulations: The extended damage mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 258, p. 108083, dez. 2021.

RABOTNOV, Y. N. Creep rupture. In: **Applied Mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1969. p. 342–349.

RICE, J. R. The localization of plastic deformation. **14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics**, 1976.

RUDNICKI, J. W.; RICE, J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1975.

SANTOS, D. M. **Formulação em Dano Concentrado para Meios Contínuos Bidimensionais com Localização de Deformações em Modo I**. 2021. 92 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2021.

SEMNANI, S. J.; WHITE, J. A.; BORJA, R. I. Thermoplasticity and strain localization in transversely isotropic materials based on anisotropic critical state plasticity. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2016.

STÖREN, S.; RICE, J. R. Localized necking in thin sheets. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1975.

TELES, D. V. C.; OLIVEIRA, M. C.; AMORIM, D. L. N. F. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. **Engineering Structures**, v. 205, fev. 2020.

TELES, D. V. DA C. et al. Parametric study of dynamic behaviour of RC dual system design with the Brazilian Standard Code using the lumped damage model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 43, n. 5, p. 246, 10 maio 2021.

UZCÁTEGUI, M. Y. **Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la WEB**. Mérida: Universidad de Los Andes, 2012.

WANG, Q. Z.; ZHANG, S.; XIE, H. P. Rock Dynamic Fracture Toughness Tested with Holed-Cracked Flattened Brazilian Discs Diametrically Impacted by SHPB and its Size Effect. **Experimental Mechanics**, v. 50, n. 7, p. 877–885, 7 set. 2010.

WEIBUL, W. A statistical theory of the strength of materials. **Swed R Inst Eng Res**, v. 151, p. 1–45, 1939.

WINKLER, B. J. **Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton**. 2001. Tese (Doutorado) – Innsbruck University, Innsbruck, 2001.

WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; NIEDERWANGER, G. Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications**, v. 215, n. 2, p. 75–86, 1 abr. 2001.

ZHANG, Y. Q.; LU, Y.; YU, M. H. Investigation of strain localization in elastoplastic materials with transversely isotropic elasticity. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2003.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. [s.l.] Elsevier, 2005.

APÊNDICE A – MATRIZES DO ELEMENTO QUADRILATERAL DA MDCX PROPOSTO POR AMORIM (2016)

Neste apêndice são apresentadas algumas das matrizes que compõem a formulação do elemento finito de quatro nós da MDCX (AMORIM, 2016), em coordenadas cartesianas, conforme foi programado.

A matriz de transformação cinemática $[b]$ é dada por:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Sendo:

$$b_{11} = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (A.2)$$

$$b_{12} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (A.3)$$

$$b_{13} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (A.4)$$

$$b_{14} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (A.5)$$

$$b_{21} = \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (A.6)$$

$$b_{22} = \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (A.7)$$

$$b_{25} = \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (A.8)$$

$$b_{26} = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (A.9)$$

$$b_{31} = \frac{x_i - x_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$b_{32} = \frac{y_i - y_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.11})$$

$$b_{37} = \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.12})$$

$$b_{38} = \frac{y_l - y_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$b_{43} = \frac{x_j - x_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.14})$$

$$b_{44} = \frac{y_j - y_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.15})$$

$$b_{45} = \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.16})$$

$$b_{46} = \frac{y_k - y_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.17})$$

$$b_{55} = \frac{x_k - x_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.18})$$

$$b_{56} = \frac{y_k - y_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.19})$$

$$b_{57} = \frac{x_l - x_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.20})$$

$$b_{58} = \frac{y_l - y_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.21})$$

A matriz de transformação dos *numexes* em coordenadas cartesianas é obtida a partir da manipulação matricial da equação (36), resultando em:

$$[T] = ([B][b]^T)([b][b]^T)^{-1} \quad (\text{A.23})$$

Em que a matriz cinemática $[B]$ para o elemento finito quadrilateral de quatro nós da Figura 0.1 pode ser obtida com base nas funções de forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (A.24)$$

Sendo:

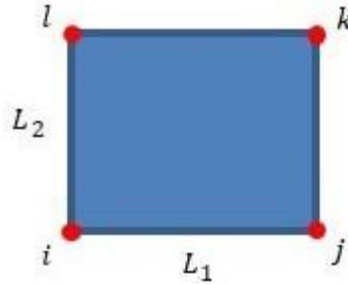
$$N_i(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.25)$$

$$N_j(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.26)$$

$$N_k(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.27)$$

$$N_l(x, y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.28)$$

Figura 0.1. Elemento finito de quatro nós.



Fonte: Oliveira (2020).

A mesma matriz cinemática $[B]$ pode ainda ser obtida com base nas deformações $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_l} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_l} \end{bmatrix} \quad (A.29)$$

Em que $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ são obtidos conforme a equação (31).

A matriz de coeficientes elásticos $[H]$ para um estado plano de tensões e material isotrópico é:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

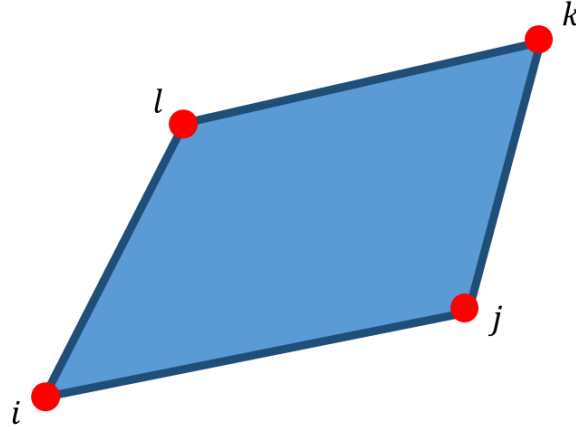
O vetor de deformações generalizadas ou alongamentos de dano $\{\delta_d\}$ causados pela formação das bandas de localização, em coordenadas cartesianas, é dado por:

$$\{\delta_d\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_{ij}^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_{ij}^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_j^{ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_j^{jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ e_k^{jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_k^{jk} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_k^{kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_l^{kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_k^{kl} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_i^{il} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ e_i^{il} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_l^{il} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \end{array} \right\} \quad (A.31)$$

APÊNDICE B – MATRIZES DO ELEMENTO QUADRILATERAL DA MDCX PROPOSTO POR SANTOS (2021)

Para o elemento com seis bandas de localização apresentado em Santos (2021), tem-se como base o elemento finito quadrilateral irregular da Figura 0.1.

Figura 0.1. Elemento finito irregular de quatro nós.



Fonte: Santos (2021).

Sendo as bandas orientadas na direção a seguir: $i-j$, $i-k$, $i-l$, $j-l$, $j-k$, $l-k$, o vetor de alongamento de dano $\{\delta_d\}$ passa a ser:

$$\{\delta_d\} = [b] \left\{ \begin{array}{c} s_{ij}e_i^{ij} + s_{ik}e_i^{ik} - s_{il}e_i^{il} \\ -c_{ij}e_i^{ij} - c_{ik}e_i^{ik} + c_{il}e_i^{il} \\ s_{ij}e_j^{ij} + \frac{y_k - y_j}{l_{ik}}e_i^{ik} + \frac{y_j - y_i}{l_{ik}}e_k^{ik} + s_{jl}e_j^{jl} + s_{jk}e_j^{jk} \\ -c_{ij}e_j^{ij} - \frac{x_k - x_j}{l_{ik}}e_i^{ik} - \frac{x_j - x_i}{l_{ik}}e_k^{ik} - c_{jl}e_j^{jl} - c_{jk}e_j^{jk} \\ s_{ik}e_k^{ik} - \frac{y_k - y_l}{l_{jl}}e_j^{jl} + \frac{y_k - y_j}{l_{jl}}e_l^{jl} - s_{lk}e_k^{lk} + s_{jk}e_k^{jk} \\ -c_{ik}e_k^{ik} + \frac{x_k - x_l}{l_{jl}}e_j^{jl} - \frac{x_k - x_j}{l_{jl}}e_l^{jl} + c_{lk}e_k^{lk} - c_{jk}e_k^{jk} \\ -s_{il}e_l^{il} + s_{jl}e_l^{jl} - s_{lk}e_l^{lk} \\ c_{il}e_l^{il} - c_{jl}e_l^{jl} + c_{lk}e_l^{lk} \end{array} \right\} \quad (B.1)$$

Em que os termos s , c e l são, respectivamente, os senos e cossenos diretores e o comprimento de cada banda, obtidos conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}; S_{ij} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \\
c_{ik} &= \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}; S_{ik} = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \\
c_{il} &= \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}}; S_{il} = \frac{y_l - y_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \\
c_{jl} &= \frac{x_l - x_j}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}}; S_{jl} = \frac{y_l - y_j}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}} \\
c_{jk} &= \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}}; S_{jk} = \frac{y_k - y_j}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\
c_{lk} &= \frac{x_l - x_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}}; S_{lk} = \frac{y_l - y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\
l_{ik} &= \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}; l_{jl} = \sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

As matrizes $[b]$, $[B]$, $[T]$ e $[H]$ são as mesmas apresentadas no Apêndice A.

APÊNDICE C – MONTAGEM DA MATRIZ JACOBIANA DO SISTEMA LINEARIZADO

Conforme discutido na seção a respeito da implementação numérica, um dos passos de análise é a obtenção, a partir do sistema linearizado, da solução iterativa. Como pode ser observado na equação (55), a matriz jacobiana para o elemento com seis bandas de localização é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial N_{5 \times 5}} & \frac{\partial r}{\partial e_{5 \times 12}} \\ \frac{\partial g}{\partial N_{12 \times 5}} & \frac{\partial g}{\partial e_{12 \times 12}} \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

Vale ressaltar que para o elemento com quatro bandas de localização, a quantidade de linhas/colunas nas submatrizes muda de 12 para 8.

A primeira submatriz diz respeito às derivadas da lei de estado com relação as tensões nos numexes:

$$\frac{\partial r}{\partial N_{5 \times 5}} = -[E]^{-1} \quad (C.2)$$

A segunda submatriz diz respeito às derivadas das leis de estado com relação as espessuras das bandas de localização:

$$\frac{\partial r}{\partial e_{5 \times 12}} = -[B] \frac{\partial \delta^d}{\partial e} \quad (C.3)$$

Para a montagem das submatrizes relacionadas às leis de dano, é necessário incluir condicionais que avaliem se a lei de dano está ativa ou não. O índice *bde* indica que a variável pertence a uma espessura de banda. Na terceira submatriz, que diz respeito a derivada da lei de evolução do dano em relação às tensões dos numexes tem-se a seguinte condicional:

- Se g_{bde} estiver ativo, ou seja, $g_{bde} > 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial N_{1 \times 5}} = [H][T][E]^{-1} \quad (C.4)$$

- Se g_{bde} não estiver ativo, ou seja, $g_{bde} \leq 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial N} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (C.5)$$

A quarta submatriz diz respeito a derivada da lei de evolução do dano com relação as espessuras de banda, sendo que apenas a diagonal principal possui valores diferentes de zero, dados por:

- Se g_{bde} estiver ativo, ou seja, $g_{bde} > 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial e} = -q\sigma_{cr} \exp(qe_i^{ij}) \quad (C.6)$$

Para a banda ij no nó i , por exemplo.

- Se g_{bde} não estiver ativo, ou seja, $g_{bde} \leq 0$:

$$\frac{\partial g_{bde}}{\partial e} = 1 \quad (C.7)$$

APÊNDICE D –ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO QUE FALHAM POR CISALHAMENTO SOLICITADAS POR CARGAS DE IMPACTO

No decorrer dos trabalhos desta dissertação, além da formulação e resultados apresentados ao longo do texto, foi desenvolvido a partir do projeto de iniciação científica da aluna de graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe Victória Eduarda de Souza Cruz, um modelo baseado na Teoria do Dano Concentrado para análise de vigas de concreto armado que falham por cisalhamento solicitadas por cargas de impacto.

O trabalho de Teles, Oliveira e Amorim (2020) propôs um modelo para análise de vigas de concreto armado que falham por flexão solicitadas por cargas de impacto. O modelo foi capaz, a partir da proposta de uma lei de dano, de estimar com precisão o deslocamento plástico e a danificação de vigas experimentadas com resultados publicados na literatura técnica. Oliveira, Teles e Amorim (2020) mostrou resultados promissores utilizando uma formulação semelhante. No entanto, neste último trabalho não são apresentadas funções de resistência à fissuração e escoamento, tornando inviável a aplicação em larga escala do modelo. Tendo isso em vista, o modelo iniciado em Oliveira, Teles e Amorim (2020) foi aplicado em outras vigas experimentadas, tornando possível propor uma função de resistência à fissuração e de escoamento.

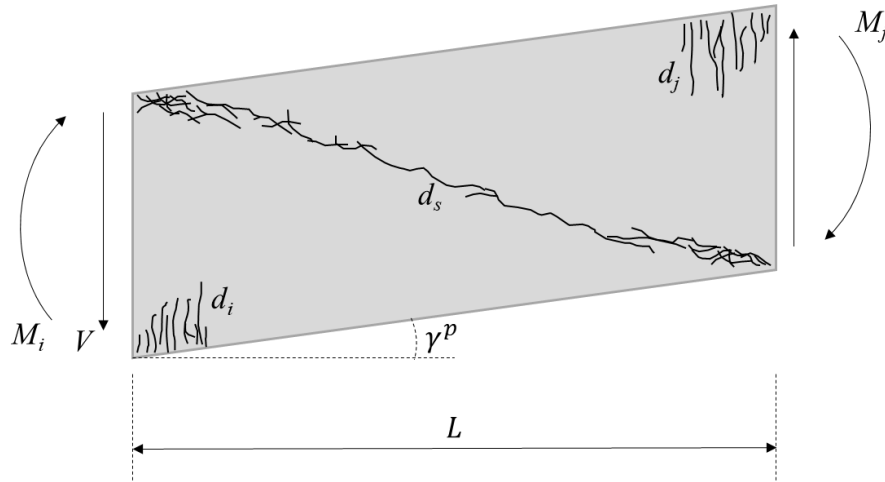
Modelo proposto em Oliveira, Teles e Amorim (2020)

Para vigas que falham por cisalhamento, abordando a Teoria do Dano Concentrado a partir da termodinâmica dos processos irreversíveis, a energia dissipada no processo é dada por:

$$\{M\}^T\{\gamma^p\} + G_s d_s > 0 \quad (D.1)$$

Sendo $\{M\}$ o vetor de tensões generalizadas do elemento, que são neste caso os momentos fletores M_i e M_j nos nós i e j , respectivamente, $\{\gamma^p\}$ as distorções plásticas nodais, G_s o momento de condução do dano dado pela equação (D.2), e d_s o dano devido ao cisalhamento (Figura 0.1).

Figura 0.1. Representação das variáveis do modelo.



Fonte: Adaptado de Oliveira, Teles e Amorim (2020).

$$G_s = \frac{LV^2}{2GA(1 - d_s)^2} \quad (D.2)$$

Em que L é o comprimento, G é a rigidez à torção e A é a área da seção transversal do elemento analisado, e V é o maior valor de cortante observado no elemento analisado.

Em um trabalho que visava quantificar os efeitos inelásticos de vigas de concreto armado submetidas a cargas de impacto, Fujikake, Li e Soeun (2009) apresentaram um modelo analítico baseado em um balanço de energia de um sistema massa-mola-amortecedor. Neste modelo, a energia dissipada durante o impacto é dada por:

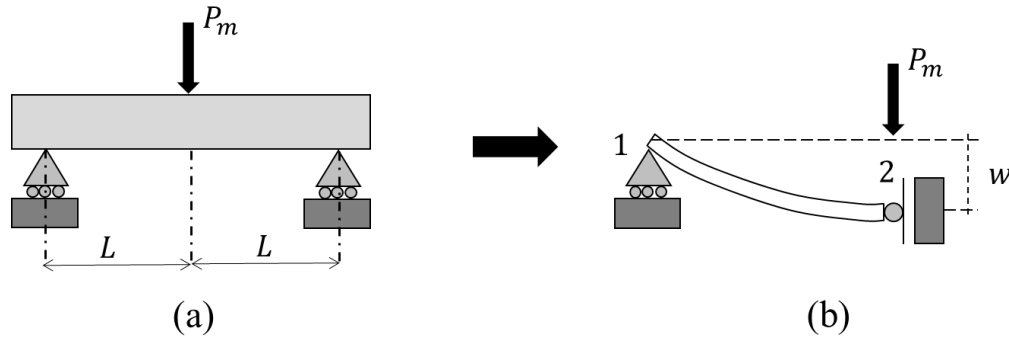
$$\int P(w)dw = \frac{m_H v^2}{2} - \frac{m_B m_H}{2(m_B + m_H)} v^2 + (m_B + m_H) g w_{max} \quad (D.3)$$

Sendo m_H a massa do objeto solto sobre a viga, m_B a massa da viga, g a aceleração da gravidade, w_{max} o deslocamento máximo à meio-vão da viga e v a velocidade de impacto. Considerando a simetria da viga (Figura 0.2), o problema pode ser resolvido utilizando apenas um elemento finito. Ainda, visto que as equações (D.1) e (D.3) tratam-se ambas de um processo dissipativo, estas podem ser igualadas resultando em:

$$\frac{m_H v^2}{2} - \frac{m_B m_H}{2(m_B + m_H)} v^2 + (m_B + m_H) g w_{max} = M_j \gamma_j^p + G_s d_s \quad (D.3)$$

Sendo γ_j^p a distorção plástica sofrida pela viga (Figura 0.1).

Figura 0.2. Carga de impacto aplicada à meio-vão (simetria).



Fonte: Adaptado de Oliveira, Teles e Amorim (2020).

Funções de resistência a fissuração e de escoamento propostas

Para propor as leis de evolução do dano e lei de escoamento, foram utilizados experimentos realizados por Bhatthi et al. (2009). Nestes, foram testadas vigas com duas configurações de armação transversal diferentes, aqui chamadas de tipo A e B, sendo a primeira com espaçamento entre estribos de 15 cm e a segunda com espaçamento de 7,5 cm. Nos experimentos, estas vigas foram impactadas por um martelo com 400 kg de massa, solto de diferentes alturas.

Utilizando a formulação anteriormente apresentada, é possível calcular o momento de condução do dano G_s e o valor de dano nas vigas após os ensaios. Realizando estes cálculos para as vigas experimentadas por Bhatthi et al. (2009), foram propostas as seguintes funções de resistência a fissuração e de escoamento:

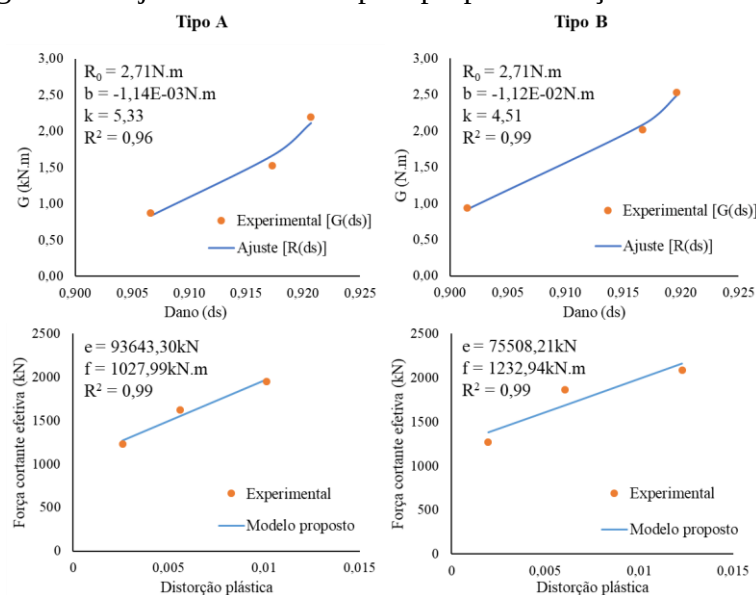
$$R(d_s) = R_0 k^2 + b \frac{\ln(1 - d_s)}{(1 - d_s)^k} \quad (D.4)$$

$$f_s = |\bar{V} - e\gamma^p| - f = 0 \quad (D.5)$$

Em que R_0 , b , k , e e f são parâmetros que dependem das características do elemento analisado, e $\bar{V}$ é a força cortante efetiva, dada por $\bar{V} = V/(1 - d_s)$.

Os ajustes considerados para propor as funções são apresentados na Figura 0.3.

Figura 0.3. Ajustes realizados para propor as funções do modelo.



Fonte: próprio autor.

REFERÊNCIAS

- BHATTI, A. Q.; KISHI, N.; MIKAMI, H.; ANDO, T. Elasto-plastic impact response analysis of shear-failure-type RC beams with shear rebars. **Materials & Design**, v. 30, n. 3, p. 502–510, 2009.
- FUJIKAKE, K.; LI, B.; SOEUN, S. Impact Response of Reinforced Concrete Beam and Its Analytical Evaluation. **Journal of Structural Engineering**, v. 135, n. 8, 2009.
- OLIVEIRA, M. C.; TELES, D. V. DA C.; AMORIM, D. L. N. DE F. Shear behaviour of reinforced concrete beams under impact loads by the lumped damage framework. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 14, n. 53, p. 13–25, 11 maio 2020.
- TELES, D. V. C.; OLIVEIRA, M. C.; AMORIM, D. L. N. F. A simplified lumped damage model for reinforced concrete beams under impact loads. **Engineering Structures**, v. 205, fev. 2020.

APÊNDICE E – MODELO PARA ANALISAR PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

Um outro projeto desenvolvido no decorrer dos trabalhos desta dissertação visava analisar pórticos, dimensionados seguindo as diretrizes das normas brasileiras, submetidos a ações sísmicas (TELES et al., 2021).

A primeira etapa do projeto consistiu no dimensionamento de 11 estruturas, sendo 6 com sistema de contraventamento formado apenas por pórticos e outras 5 formado pelo conjunto de pórticos e pilares-parede, com número de pavimentos variando entre 5 e 20. Todas estas estruturas foram dimensionadas seguindo as diretrizes das normas brasileiras vigentes, e mais detalhes são apresentados em Teles et al. (2021). Posteriormente, foram obtidos acelerogramas sísmicos de eventos reais, com 7 diferentes magnitudes, variando na escala Richter entre 3,0ML e 6,0ML. Por fim, as cargas resultantes de cada um destes acelerogramas foram aplicadas na base de cada uma das estruturas dimensionadas. Para realizar estas simulações foi utilizado o elemento finito de pórtico desenvolvido por Perdomo et al. (2013), implementado no programa endógeno de elementos finitos (UZCÁTEGUI, 2012).

O elemento finito de pórtico proposto por Perdomo et al. (2013) é baseado na Teoria do Dano Concentrado. No elemento, os efeitos inelásticos devido à flexão estão concentrados nos nós do elemento, enquanto os efeitos inelásticos causados pelo cisalhamento estão distribuídos no elemento (Figura 0.1).

Neste sentido, considerando um elemento entre os nós i e j , a configuração deformada pode ser descrita por duas rotações relativas, ϕ_i e ϕ_j , e um alongamento δ , sendo definida então a matriz de deformações generalizadas:

$$\{\Phi\} = \{\phi_i \quad \phi_j \quad \delta\}^T \quad (E.1)$$

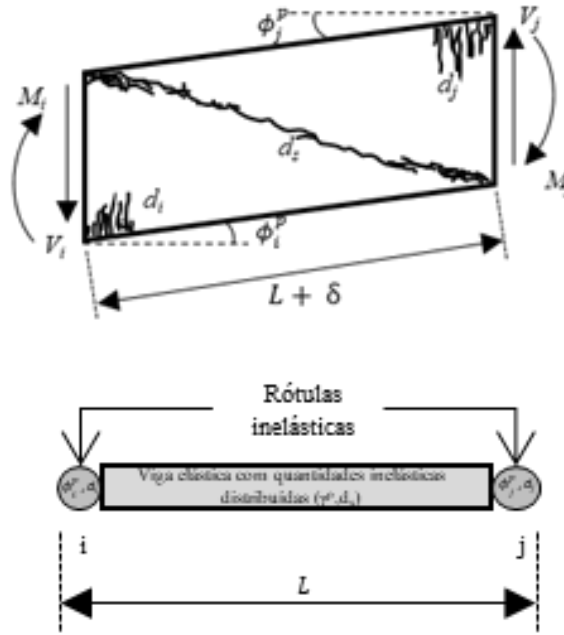
em que o sobrescrito T indica a transposta.

Por sua vez, a matriz de tensões generalizadas é dada por:

$$\{\mathbf{M}\} = \{M_i \quad M_j \quad N\}^T \quad (E.2)$$

sendo M_i e M_j com o mesmo significado apresentado na Figura 0.1, e N sendo a força axial.

Figura 0.1. Elemento de pórtico utilizado (PERDOMO et al., 2013).



Fonte: adaptado de Teles et al. (2021).

A força cortante também é considerada na formulação, podendo ser expressa por:

$$V_i \cong V_j \cong V = \frac{M_i + M_j}{L} \quad (\text{E.3})$$

Considerando a hipótese de equivalência em deformações, a matriz de deformações generalizadas é dada por:

$$\{\Phi\} = \{\Phi^e\} + \{\Phi^d\} + \{\gamma^d\} + \{\Phi^p\} + \{\gamma^p\} \quad (\text{E.4})$$

sendo $\{\Phi^e\}$ a parte elástica, $\{\Phi^d\}$ e $\{\gamma^d\}$ as parcelas de dano, que consideram a fissuração do concreto devido à flexão e cisalhamento, respectivamente, e $\{\Phi^p\}$ e $\{\gamma^p\}$ as parcelas plásticas, que consideram o escoamento das armaduras longitudinal e transversal, respectivamente.

Utilizando o conceito de tensão efetiva, a equação (E.4) pode ser reescrita como:

$$\{\Phi - \Phi^p - \gamma^p\} = [\mathbf{F}(d_i, d_j, d_s)]\{\mathbf{M}\} \quad (\text{E.5})$$

em que a matriz de flexibilidade danificada $[\mathbf{F}(d_i, d_j, d_s)]$ é dada por:

$$[\mathbf{F}(d_i, d_j, d_s)] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI(1-d_i)} + \frac{L}{LGA(1-d_s)} & -\frac{L}{6EI} + \frac{L}{LGA(1-d_s)} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} + \frac{L}{LGA(1-d_s)} & \frac{L}{3EI(1-d_j)} + \frac{L}{LGA(1-d_s)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Os momentos de condução do dano devido a flexão (G_i e G_j) e cisalhamento (G_s) são dados por:

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{\partial W}{\partial d_i} = \frac{LM_i^2}{6EI(1-d_i)^2} \\ G_j &= \frac{\partial W}{\partial d_j} = \frac{LM_j^2}{6EI(1-d_j)^2} \\ G_s &= \frac{\partial W}{\partial d_s} = \frac{(M_i + M_j)^2}{2LGA(1-d_s)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

sendo W a energia de deformação do elemento finito, dada por:

$$W = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}^T \{\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^p - \mathbf{\Upsilon}^p\} = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}^T [\mathbf{F}(d_i, d_j, d_s)] \{\mathbf{M}\} \quad (\text{E.8})$$

As leis de evolução do dano são dadas pelo critério de Griffith, expresso por:

$$\begin{cases} \Delta d_i = 0 \text{ se } G_i < R_i \\ G_i = R_i \text{ se } \Delta d_i > 0 \\ \Delta d_j = 0 \text{ se } G_j < R_j \\ G_j = R_j \text{ se } \Delta d_j > 0 \\ \Delta d_s = 0 \text{ se } G_s < R_s \\ G_s = R_s \text{ se } \Delta d_s > 0 \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

em que R_i , R_j e R_s são as funções de resistência à fissuração, dadas por:

$$\begin{aligned} R_i &= R_{i0} + q_i \frac{\ln(1-d_i)}{1-d_i} \\ R_j &= R_{j0} + q_j \frac{\ln(1-d_j)}{1-d_j} \\ R_s &= R_{s0} + q_s \frac{\ln(1-d_s)}{1-d_s} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

sendo R_{i0} , R_{j0} , R_{s0} , q_i , q_j , e q_s parâmetros do modelo que podem ser determinados a partir da teoria do concreto armado (PERDOMO et al., 2013).

As leis de evolução plástica são dadas por:

$$\begin{cases}
\Delta\phi_i^p = 0 \text{ se } f_i < 0 \\
f_i = 0 \text{ se } \Delta\phi_i^p > 0 \\
\Delta\phi_j^p = 0 \text{ se } f_j < 0 \\
f_j = 0 \text{ se } \Delta\phi_j^p > 0 \\
\Delta\gamma_i^p = 0 \text{ se } f_s < 0 \\
f_s = 0 \text{ se } \Delta\gamma_i^p > 0
\end{cases} \quad (\text{E.11})$$

em que f_i , f_j e f_s são as funções de escoamento, dadas por:

$$\begin{aligned}
f_i &= \left| \frac{m_i}{1-d_i} - c_i \phi_i^p \right| - k_{i0} \\
f_j &= \left| \frac{m_j}{1-d_j} - c_j \phi_j^p \right| - k_{j0} \\
f_s &= \left| \frac{m_s}{1-d_s} - c_s \phi_s^p \right| - k_{s0}
\end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

sendo k_{i0} , k_{j0} , k_{s0} , c_i , c_j , e c_s parâmetros do modelo que podem ser determinados a partir da teoria do concreto armado (PERDOMO et al., 2013).

A partir das simulações realizadas com este elemento finito, é possível discutir alguns resultados, principalmente relacionadas aos valores observados nos mapas de dano, valores das forças cortantes na base da estrutura, deslocamento relativo entre pavimentos e relação entre o período natural de vibração da estrutura e do sismo analisado.

Em suma, quando submetidos aos acelerogramas de sismos com magnitudes a partir de 5,0ML, todos os pórticos apresentaram comportamento estrutural inadequado, com valores de dano muito altos, além de problemas com altos valores de força cortante na base. Todos os pórticos apresentaram deslocamentos relativos que excediam limites normativos internacionais, mesmo quando sujeitos aos sismos de menor magnitude. As análises da relação entre o período natural de vibração da estrutura e do sismo analisado foram utilizadas para justificar que alguns pórticos, mesmo sujeitos a sismos de menores magnitudes, apresentaram altos valores de danificação devido à proximidade entre os valores de período natural de vibração. Mapas de dano, tabelas com valores das forças cortante basais e figuras ilustrativas dos deslocamentos relativos, além de discussões mais aprofundadas são apresentadas em Teles et al. (2021).

REFERÊNCIAS

PERDOMO, M. E.; PICÓN, R.; MARANTE, M. E.; HILD, F.; ROUX, S.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, v. 46, p. 407–416, 2013.

TELES, D. V. da C.; CUNHA, R. N.; AMORIM, D. L. N. de F.; PICÓN, R.; LÓPEZ, J. F. Parametric study of dynamic behaviour of RC dual system design with the Brazilian Standard Code using the lumped damage model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 43, n. 5, p. 246, 2021.

UZCÁTEGUI, M. Y. **Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la WEB**. 2012. - Universidad de Los Andes, Mérida, 2012.