



---

Universidade Federal de Sergipe  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT

---

# Estabilidade paramétrica com aplicações em problemas de osciladores paramétricos

por

**Tiago de Jesus Cruz da Silva**

Mestrado Acadêmico em Matemática - São Cristóvão - SE

**Orientador: Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo**

Fevereiro de 2023

Tiago de Jesus Cruz da Silva

Estabilidade paramétrica com aplicações  
em problemas de osciladores  
paramétricos

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática da Univer-  
sidade Federal de Sergipe, para a obtenção  
de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gerson Cruz Araujo

**São Cristóvão**  
**2023**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Silva, Tiago de Jesus Cruz da  
S586e Estabilidade paramétrica com aplicações em problemas de osciladores paramétricos / Tiago de Jesus Cruz da Silva ; orientador Gerson Cruz Araujo. - São Cristóvão, 2023.  
169 f.: il.

Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Espaços simpléticos. 3. Estabilidade paramétrica. 4. Osciladores paramétricos. I. Araujo, Gerson Cruz, orient. II. Título.

CDU 517.9



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

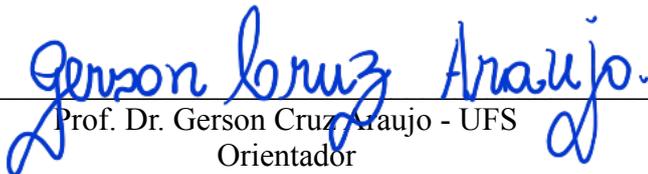
*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

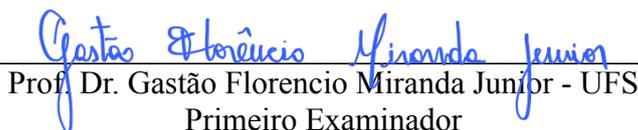
## **Estabilidade paramétrica com aplicações em problemas de osciladores paramétricos**

*por*

*Tiago de Jesus Cruz da Silva*

Aprovada pela banca examinadora:

  
Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo - UFS  
Orientador

  
Prof. Dr. Gastão Florencio Miranda Junior - UFS  
Primeiro Examinador

  
Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho - UFPE  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de Fevereiro de 2023

# Dedicatória

---

*Dedico a Deus, digno de toda honra toda glória e todo louvor, a minha família, meus amigos e a minha namorada por todo apoio e incentivo.*

# Agradecimentos

---

- Agradeço a Deus, sem Ele eu não seria nada, um Deus que cuida, ama, e guarda e nos Salva. Graça, um favor não merecido, muito obrigado Deus.
- A minha família, minha namorada, meus amigos, irmãos em Cristo, sem eles eu não conseguiria.
- A todos os meus amigos e colegas do mestrado que estiveram me acompanhando nessa caminhada, a saber, Natiele, Carol, Jerfeson, Natan, Gerônimo, etc...
- Ao meu Professor e Orientador Gerson Cruz, uma pessoa excelente, que teve muita sabedoria, bondade e paciência comigo.
- Aos meus Professores do mestrado, aprendi bastante com eles, são Professores de excelência.
- Aos professores Gastão Florêncio e Cezar Castilho, por participarem da banca examinadora.

# Resumo

---

Neste trabalho, iremos apresentar inicialmente sobre a teoria da estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos Lineares, isto é, sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade. Serão enunciadas definições, resultados gerais e alguns exemplos clássicos sobre sistemas Hamiltonianos, espaços vetoriais simpléticos e estabilidade de pontos de equilíbrios dos sistemas Hamiltonianos Lineares periódicos. Posteriormente, faremos uma análise acerca da estabilidade paramétrica de Sistemas Hamiltonianos Lineares, seguiremos com o conceito de ressonâncias paramétricas e, finalmente, utilizando do método de Deprit Hori, construiremos as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros para a equação de Mathieu

**Palavras Chaves:** Estabilidade paramétrica; Sistemas Hamiltonianos lineares; Método de Deprit Hori; Regiões de estabilidade e instabilidade, Osciladores paramétricos.

# Abstract

---

In this work, we will initially present the theory of parametric stability in Linear Hamiltonian systems, that is, Hamiltonian systems with one degree of freedom. Definitions, general results and some classic examples on Hamiltonian systems, symplectic vector spaces and equilibrium point stability of periodic Linear Hamiltonian systems will be enunciated. Later, we will make an analysis about the parametric stability of Hamiltonian Linear Systems, we will continue with the concept of parametric resonances and, finally, using the Deprit Hori method, we will construct the curves that delimit the regions of stability and instability in the plane of the parameters for the equation by Mathieu.

**Key words:** Parametric stability, Differential equations, Linear Hamiltonian systems, loaded pendulum with oscillating suspension, regions of stability and instability

# Lista de Figuras

4.1	Coordenadas elípticas $\xi, \eta$ . Figura retirada da referência [3] . . . . .	55
4.2	curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto $(\frac{1}{4}, 0)$ no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	65
4.3	curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto $(1, 0)$ no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	65
4.4	curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto $(\frac{9}{4}, 0)$ no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	65
4.5	curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto $(4, 0)$ no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	65
4.6	curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto $(\frac{25}{4}, 0)$ no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	66
4.7	curvas de estabilidade/instabilidade nos casos ressonantes no plano dos parâmetros $\alpha - \beta$ .	66
5.1	Pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante. retirado da referência [10] . . . . .	69
5.2	Representação das bases $\beta$ e $\beta'$ com o mesmo ponto de origem . . . . .	70
5.3	Pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante (modificada). retirado da referência [10] . . . . .	71
5.4	superfícies de estabilidade/instabilidade para $N = 1$ no espaço dos parâmetros $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto $P_1$ . . . . .	83
5.5	superfícies de estabilidade/instabilidade para $N = 2$ no espaço dos parâmetros $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto $P_1$ . . . . .	84
5.6	superfícies de estabilidade/instabilidade quando $N = 1$ e $N = 2$ no espaço dos parâmetros $(\alpha, q, \epsilon)$ . . . . .	84
5.7	curvas de estabilidade/instabilidade quando $N = 1$ e $N = 2$ no plano dos parâmetros $(\alpha, \epsilon)$ , quando $q = -1$ . . . . .	84
5.8	superfícies de estabilidade/instabilidade quando $n = 1$ e $n = 2$ no espaço dos parâmetros $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto $P_1 = (\pi, 0)$ . . . . .	86

5.9	curvas de estabilidade/instabilidade quando $n = 1$ e $n = 2$ no plano dos parâmetros $(\alpha, \epsilon)$ , quando $q = -1$ no ponto $P_2 = (\pi, 0)$ . . . . .	86
5.10	Pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante e duas retas verticais carregadas . . . . .	88
5.11	Superfície fronteira para $P_1$ quando $N = 1$ ; Seção planar quando $\mu = -\frac{1}{2}$	93
5.12	Superfícies fronteira para $P_1$ quando $N = 1$ e $N = 2$ ; Seção planar quando $\mu = -\frac{1}{2}$ . . . . .	94
5.13	Seção Planar para $\mu = -\frac{1}{2}$ ; Ampliação do caso $N = 3$ . . . . .	94
5.14	Seção Planar das regiões para $\mu = 20$ . . . . .	95
6.1	Referencial ortogonal. Figura retirada da referência [34] . . . . .	109
6.2	Referencial ortogonal. Figura retirada da referência [34] . . . . .	111
6.3	Pêndulo com ponto de suspensão oscilante. . . . .	113
6.4	Representação das bases $\beta$ e $\beta'$ com o mesmo ponto de origem . . . . .	114
6.5	Pêndulos simples acoplados em repouso. Retirado de [44]. . . . .	118
6.6	Pêndulos simples acoplados com pequeno deslocamento. Retirado de [44].	118
6.7	Ilustração de ponto estável no sentido de Lyapunov. Figura retirada e modificada da referência [48] . . . . .	143
6.8	Ilustração de ponto assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Figura retirada e modificada da referência [48] . . . . .	143

# Sumário

<b>Dedicatória</b>	<b>5</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1 Estabilidade paramétrica na teoria de sistemas Hamiltonianos</b>	<b>16</b>
1.1 Noções elementares de estabilidade forte e estabilidade paramétrica para sistemas Hamiltonianos . . . . .	17
1.2 Ressonâncias de Krein . . . . .	20
1.3 Visão geral para construção de curvas fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade de sistemas Hamiltonianos com pequeno parâmetro.	23
<b>2 Estabilidade e forma normal de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes e periódicos</b>	<b>26</b>
2.1 Premissas do processo de linearização de sistemas Hamiltonianos não lineares . . . . .	26
2.2 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes. . . . .	27
2.3 Normalização de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes . . . . .	29

2.4	Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos . . . . .	34
2.5	Normalização de um sistema Hamiltoniano linear periódico . . . . .	36
2.6	Estabilidade e forma normal de sistema Hamiltoniano linear periódico com um grau de liberdade . . . . .	38
2.6.1	Estabilidade . . . . .	38
2.6.2	Normalização . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Método de Deprit-Hori</b>	<b>44</b>
3.1	Algoritmo do Método de Depri-Hori . . . . .	44
3.2	Construção da fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade pelo método de Deprit-Hori em sistemas com um grau de liberdade. . . . .	47
<b>4</b>	<b>Equação de Mathieu</b>	<b>54</b>
4.1	Formulação Matemática da Equação de Mathieu . . . . .	54
4.2	Regiões de estabilidade e instabilidade . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Estabilidade Paramétrica de Osciladores paramétricos</b>	<b>67</b>
5.1	Estabilidade Paramétrica de um Pêndulo Carregado com o ponto de suspensão oscilante . . . . .	67
5.2	Formulação do Problema . . . . .	68
5.3	A função Hamiltoniana do sistema . . . . .	74
5.4	Natureza dos pontos de equilíbrios . . . . .	74
5.5	Estabilidade paramétrica. . . . .	76
5.6	Resultado principal: Superfícies limites de regiões de estabilidade / ins- tabilidade. . . . .	81
5.6.1	Estabilidade no ponto de equilíbrio $P_1$ . . . . .	81
5.6.2	Superfícies que delimitam as regiões de estabilidade para res- sonância de Krein do tipo $2\omega = 2$ . . . . .	83
5.6.3	Estabilidade paramétrica no ponto de equilíbrio $P_2$ . . . . .	84

<i>SUMÁRIO</i>	13
5.7 Estabilidade paramétrica de um pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante entre duas retas verticais carregadas . . . . .	86
5.7.1 Formulação do Problema . . . . .	87
5.7.2 Formulação Hamiltoniana . . . . .	89
5.7.3 Estabilidade Paramétrica . . . . .	90
5.7.4 Superfícies fronteira das regiões de estabilidade/instabilidade . .	91
<b>Bibliografia</b>	<b>100</b>
<b>6 Apêndice</b>	<b>101</b>
6.1 Resultados Gerais . . . . .	101
6.2 Sistemas Hamiltonianos . . . . .	101
6.2.1 Colchete de Poisson . . . . .	103
6.2.2 Sistemas Hamiltonianos lineares . . . . .	105
6.3 Espaços Vetoriais Simpléticos . . . . .	121
6.3.1 Matrizes Simpléticas . . . . .	130
6.3.2 Funções Geradoras . . . . .	136
6.4 Teoria da estabilidade de soluções . . . . .	142
6.4.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov . . . . .	142
6.4.2 Estabilidade de Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes .	148
6.4.3 Estabilidade de Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos . .	152

# Introdução

---

Este trabalho se propõe a explorar a estabilidade de sistemas Hamiltonianos, os quais são amplamente utilizados para explicar fenômenos naturais nas ciências naturais, especialmente na física clássica, mecânica celeste, sistemas dinâmicos aplicados e áreas relacionadas. Através de técnicas e métodos matemáticos, podemos abordar problemas complexos com maior sistemática e classificá-los em categorias já estudadas.

Muitos fenômenos naturais são descritos por sistemas de equações diferenciais, como sistemas massa-mola, pêndulos com diferentes configurações, sistemas caóticos, entre outros. A formulação Hamiltoniana, baseada no trabalho de Hamilton no século XIX, oferece uma estrutura matemática fundamental para modelar sistemas mecânicos conservativos, simplificando o estudo de problemas complexos.

O capítulo 1 abordará os conceitos teóricos relacionados à estabilidade de sistemas Hamiltonianos, incluindo definições e propriedades de sistemas Hamiltonianos lineares, espaços vetoriais simpléticos, transformações de coordenadas que preservam a estrutura Hamiltoniana e resultados sobre estabilidade no sentido de Lyapunov.

No capítulo 2, exploraremos o estudo da estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares e apresentaremos um algoritmo para obter a forma normal desses sistemas com coeficientes constantes ou periódicos. Linearizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio é um passo essencial para o estudo da estabilidade. No entanto, a forma quadrática das funções Hamiltonianas nem sempre é fácil de analisar e calcular. Portanto, o algoritmo de normalização busca obter um sistema Hamiltoniano linear equivalente com uma função Hamiltoniana mais simples e prática.

No capítulo 3, apresentaremos o método de Deprit-Hori para sistemas Hamiltonianos lineares, focando em funções Hamiltonianas quadráticas. Esse método permite determinar uma função geradora periódica e, em seguida, obter uma transformação

canônica linear periódica de coordenadas que converte a função Hamiltoniana dependente do tempo em uma função Hamiltoniana autônoma. Essa formulação autônoma facilita a construção das curvas e/ou superfícies que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade do sistema.

No capítulo 4, abordaremos o problema de Mathieu, uma equação que tem aplicações em diversos campos das ciências naturais. Utilizando o método de Deprit-Hori, investigaremos a estabilidade e construiremos as curvas que separam as regiões de estabilidade e instabilidade relacionadas a essa equação.

No capítulo 5, formularemos o problema do pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante, encontraremos a estabilidade linear do sistema Hamiltoniano e definiremos os intervalos de estabilidade no caso autônomo. Exploraremos as ressonâncias paramétricas e, com o auxílio do método de Deprit-Hori, transformaremos a função Hamiltoniana periódica em uma função Hamiltoniana autônoma. Por fim, construiremos as superfícies que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros.

Essa dissertação visa fornecer uma análise aprofundada sobre a estabilidade de sistemas Hamiltonianos, utilizando conceitos e técnicas matemáticas avançadas. Com a compreensão desses aspectos, poderemos entender melhor os fenômenos naturais modelados por esses sistemas e contribuir para o conhecimento científico nessas áreas de estudo.

# Capítulo 1

## Estabilidade paramétrica na teoria de sistemas Hamiltonianos

A estabilidade linear dos pontos de equilíbrio em sistemas Hamiltonianos é amplamente aplicável em diversas áreas científicas. Isso é especialmente relevante para sistemas com muitas variáveis ou parâmetros. Reforçar a estabilidade exige que não apenas um sistema específico de equações diferenciais lineares seja estável, mas também os sistemas próximos. Isso é crucial porque experimentos e observações nunca são perfeitamente precisos ao descrever um fenômeno real. Portanto, quando o sistema é estável de forma mais abrangente, temos consequências robustas para as equações que descrevem o fenômeno em estudo.

Em problemas mecânicos, a função Hamiltoniana pode depender de parâmetros como massas, excentricidade de órbitas, período, comprimento de pêndulo e força de mola, entre outros.

Neste capítulo, abordaremos preliminarmente os conceitos de estabilidade forte e estabilidade paramétrica, destacando suas definições. Simplificadamente, discutiremos as ressonâncias paramétricas de Krein e o teorema de estabilidade paramétrica, conhecido como teorema de Krein-Kel'fand-Lindskii. Por fim, apresentaremos a construção resumida das curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade em sistemas Hamiltonianos.

Gostaríamos de salientar que toda a teoria apresentada neste capítulo é baseada nas referências bibliográficas mencionadas: [12], [50] e [51].

## 1.1 Noções elementares de estabilidade forte e estabilidade paramétrica para sistemas Hamiltonianos

Nesta seção, temos o intuito de introduzir o conceito de estabilidade paramétrica aplicado a sistemas Hamiltonianos lineares. Para isso, começaremos definindo e apresentando resultados relacionados a sistemas Hamiltonianos lineares fortemente estáveis, já que o conceito de estabilidade paramétrica é derivado da estabilidade forte.

Lembremos inicialmente que na seção 6.4.1 estabelecemos que um sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}$  é estável se a origem é um equilíbrio estável do sistema. Consideremos  $A(t)$  uma matriz de ordem  $2n$  contínua,  $\tau$ -periódica e o seguinte sistema linear,

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}. \quad (1.1)$$

Antes de definirmos estabilidade forte, é preciso falarmos de distância de uma matriz, e para isto denotamos o espaço  $\mathcal{A}$  formado pelas matrizes  $A(t)$ ,  $2n \times 2n$ , contínuas e  $\tau$ -periódicas com a seguinte norma,

$$\|A\| = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |A(t)|. \quad (1.2)$$

Como  $\mathcal{A}$  tem dimensão finita o espaço  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach. Além disso, pelo fato de  $A(t)$  ser  $\tau$ -periódica, é suficiente a considerarmos em  $[0, \tau]$ .

Agora podemos definir estabilidade forte.

**Definição 1.1.1.** Dizemos que o sistema (1.1) é fortemente estável se ele é estável e se existe  $\varepsilon > 0$  tal que qualquer outro sistema da mesma natureza,  $\dot{\mathbf{z}} = \widehat{A}(t)\mathbf{z}$ , é estável para todo  $\widehat{A}(t) \in B_\varepsilon(A(t))$ , ou seja

$$\|A - \widehat{A}\| = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |(A - \widehat{A})(t)| < \varepsilon.$$

**Observação 1.1.2.** Quando dizemos sistemas de mesma natureza queremos dizer que:

- Se a matriz do sistema (1.1) for constante, exigimos que a matriz  $\widehat{A}$  do sistema próximo também seja constante.
- Se a matriz do sistema (1.1) é Hamiltoniana, os sistemas próximos devem ser Hamiltonianos.

A seguir um resultado referente a matrizes Hamiltoniana com coeficientes constantes

**Proposição 1.1.3.** Seja  $A$  uma matriz Hamiltoniana linear com coeficientes constantes. Se a função Hamiltoniana do sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$  for definida positiva (ou definida negativa), então o sistema Hamiltoniano linear associado é fortemente estável.

**Demonstração:** Seja  $S = JA$  uma matriz simétrica quadrada de ordem  $2n$  definida pela função hamiltoniana  $H(\mathbf{z})$ . Segue que  $S$  é definida (positiva ou negativa), e conseqüentemente qualquer matriz simétrica  $\widehat{S}$  próxima de  $S$  é definida (positiva ou negativa).<sup>1</sup> Feito estas considerações, podemos garantir que a função hamiltoniana  $\widehat{H}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\widehat{S}\mathbf{z}$  é um integral primeira definida positiva (ou definida negativa) do sistema linear autônomo  $\dot{\mathbf{z}} = \widehat{A}\mathbf{z}$ ,  $\widehat{A} = J\widehat{S}$  que é estável pelo corolário 6.4.11, e portanto,  $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$  é fortemente estável.

Para continuarmos com os resultados a respeito de estabilidade fortemente estável, vamos relembrar alguns fatos obtidos a partir da teoria de Floquet na Seção 6.4.3.

Vimos que a matriz fundamental do sistema (1.1),  $Z(t)$ , pode ser escrita na forma  $Z(t) = Q(t)e^{tB}$ , onde  $Q(t)$  é  $\tau$ -periódica e  $B$  é uma matriz constante. Lembremos que a matriz fundamental é uma matriz solução de (1.1) na qual  $\det Z(t) \neq 0$ <sup>2</sup>. Outro fato, é que podemos transferir o estudo da estabilidade de sistemas periódicos  $\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}$  para o sistema constante  $\dot{\zeta} = B\zeta$  mediante à seguinte mudança de variáveis  $Z(t) = Q(t)\zeta(t)$ . De fato, como  $Q(t)$  é  $\tau$ -periódica, então  $Q(t)$  é limitada para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, como  $Z(t) = Q(t)e^{tB}$  podemos expressar  $Q(t)^{-1} = Z(t)^{-1}e^{tB}$  que também é limitada por ser periódica. Para ver este último fato, usamos que para toda matriz fundamental, existe uma matriz constante e inversível,  $C$ , tal que  $Z(t + \tau) = Z(t)C$ , na verdade,  $C = e^B$  denominada *matriz de monodromia*, como foi dito na seção anterior.

Lembremos que, os autovalores,  $\rho$ , da matriz de monodromia  $C$  são denominados multiplicadores característicos de (1.1), ou simplesmente multiplicadores, e os autovalores de  $B$  são denominados expoentes característicos de (1.1). Note que se  $\lambda$  é um expoente característico de (1.1), então  $\rho = e^{\lambda\tau}$ .

No caso do sistema (1.1) ser Hamiltoniano, temos uma propriedade adicional para os autovalores a saber, que é o fato de serem recíprocos, isto é, para todo multiplicador característico, o conjugado inverso também o é.

Seja  $\lambda = i\beta$ , o expoente característico,  $\rho = e^{\tau\lambda}$  o multiplicador correspondente. Um autovetor  $\mathbf{v}$  de  $B$  para  $\lambda$  é também um autovetor de  $Z(t)$  para  $\rho$  (para maiores informações ver [12] e [50]). Dizemos que  $\rho$  é um multiplicador de *primeira espécie* ou de

---

<sup>1</sup>Com efeito,

$$\langle z, \widehat{S}z \rangle = \langle z, Sz \rangle + \langle z, (S - \widehat{S})z \rangle \quad \text{e} \quad \langle z, Sz \rangle \geq \delta > 0 \quad \text{para todo} \quad \|z\| = 1.$$

Pelo fato de,

$$-\|\widehat{S} - S\|\|z\|^2 \leq \langle z, (S - \widehat{S})z \rangle \leq \|\widehat{S} - S\|\|z\|^2,$$

temos que, para todo valor de  $z$ , com  $\|z\| = 1$ . Naturalmente,

$\langle z, \widehat{S}z \rangle \geq \delta - \|\widehat{S} - S\| > 0$ , desde que,  $\|\widehat{S} - S\| < \delta$ , ou seja,  $\widehat{S}$  é definida positiva.

<sup>2</sup>aqui basta que seja para algum  $t_0$ , pelos seguintes fatos: 1) os vetores  $Z_j(t)$  da matriz fundamental são linearmente independentes se, e somente se,  $\det Z(t) \neq 0$ ; 2) se  $\{Z_1(t_0), \dots, Z_n(t_0)\}$  é linearmente independente para algum  $t_0$ , então é linearmente independente para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*segunda espécie* se o produto simplético  $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \langle \mathbf{r}, J\mathbf{s} \rangle$  é positivo ou negativo, respectivamente, qualquer que seja o autovetor  $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$  de  $\rho$ . Dizemos que o multiplicador  $\rho$  é definido se ele é de *primeira* ou de *segunda espécie*. Dizemos que o multiplicador  $\rho$  é indefinido se ele não for de nenhuma espécie sugerida acima. Neste caso, existem autovetores de  $\rho$  dando produtos simpléticos de sinais contrários.

Abaixo enunciaremos o principal resultado deste capítulo que caracteriza a estabilidade forte do sistema Hamiltoniano (1.1) através dos seus multiplicadores característicos.

**Teorema 1.1.4.** (*Krein-Gelfand-Lidskii*) *O sistema Hamiltoniano real linear e periódico como (1.1) é fortemente estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores estão no círculo unitário e todos eles são definidos.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista em, [50], [12] e [39].

Partindo para o estudo da estabilidade paramétrica, considere  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$  um conjunto de parâmetros e seja  $A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  de maneira que,  $\varrho \mapsto A(t, \varrho)$ , uma família de matrizes, cujo sistema associado a cada elemento da família,  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho)\mathbf{z}$ , é um sistema Hamiltoniano linear  $\tau$ -periódico parametrizado por  $\varrho \in \mathcal{P}$ .

**Definição 1.1.5.** *Seja  $A(t, \varrho) \in \mathcal{A}$ , onde o parâmetro  $\varrho$  varia no conjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$ . Dizemos que o sistema linear  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho^*)\mathbf{z}$ , é parametricamente estável se ele é estável e se existe  $\delta > 0$ , tal que para qualquer  $\varrho \in B_\delta(\varrho^*) \cap \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$  o sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho)\mathbf{z}$  é estável.*

**Observação 1.1.6.** *Se o sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho^*)\mathbf{z}$  é fortemente estável, então ele é parametricamente estável. De fato, como  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho^*)\mathbf{z}$  é fortemente estável, existe uma vizinhança  $W$  de  $A(t, \varrho^*)$  tal que  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho)\mathbf{z}$  é estável para qualquer  $A(t, \varrho) \in W$ . Por continuidade, consideremos  $\delta > 0$  tal que  $A(t, \varrho) \in W$  para  $\varrho \in B_\delta(\varrho^*)$ . Então,  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho)\mathbf{z}$  é estável para qualquer  $\varrho \in B_\delta(\varrho^*)$ , logo  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \varrho^*)\mathbf{z}$  é parametricamente estável. Veremos mais a frente que nem todo sistema parametricamente estável é fortemente estável.*

Conforme observamos anteriormente através da observação (1.1.6), podemos afirmar que todo sistema fortemente estável, que depende de um parâmetro, é também parametricamente estável. Para aprofundarmos essa discussão, começaremos por apresentar a versão do teorema 1.1.4 aplicado a sistemas Hamiltonianos lineares  $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ , onde a matriz  $A$  é constante. Em seguida, derivaremos condições que tornam um sistema parametricamente estável, mas não fortemente estável. Por fim, ilustraremos um exemplo concreto de um sistema que é parametricamente estável, mas não fortemente estável.

**Corolário 1.1.7.** *Seja  $\dot{z} = Az$  um sistema Hamiltoniano linear estável com a matriz constante real  $A$ . Então, tal sistema é fortemente estável se, e somente se  $0$  não é um autovalor de  $A$  e cada  $H_j$  em (1.7) é definido positivo ou definido negativo.*

Dessa forma, com base no teorema 2.2.2 obtemos duas condições para um sistema Hamiltoniano linear  $\dot{z} = A(\varrho^*)z$ , onde a matriz  $A$  depende de um parâmetro  $A = A(\varrho)$  e tal que para  $\varrho = \varrho^*$ , não ser é fortemente estável, mas ser parametricamente estável:

- 1)  $A(\varrho^*)$  é diagonal, todos os seus autovalores são imaginários puros e a função Hamiltoniana correspondente tem sinal indefinido.
- 2)  $A(\varrho^*)$  é diagonal, tem zero como autovalor e todos os outros autovalores são imaginários puros.

**Exemplo 1.1.8.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varrho y_1 \\ \dot{x}_2 = -\varrho y_2 \\ \dot{y}_1 = -\varrho x_1 \\ \dot{y}_2 = \varrho x_2 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema  $\dot{z} = Az$ , onde  $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ , e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \\ -\varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a função Hamiltoniana correspondente é

$$H = \frac{1}{2}\varrho(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}\varrho(x_2^2 + y_2^2).$$

O sistema não é fortemente estável, pois  $H$  não possui sinal definido.  $A$  tem como autovalores  $\lambda_1 = i\varrho$ ,  $\lambda_2 = i\varrho$ ,  $\lambda_3 = -i\varrho$  e  $\lambda_4 = -i\varrho$  e seus autovetores associados são, respectivamente,  $v_1 = (0, i, 0, 1)$ ,  $v_2 = (-i, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, -i, 0, 1)$  e  $v_4 = (i, 0, 1, 0)$ , que formam uma base e assim  $A$  é diagonalizável.

## 1.2 Ressonâncias de Krein

Nesta seção, vamos iniciar nosso estudo sobre a estabilidade paramétrica de sistemas Hamiltonianos lineares. Essa área de pesquisa desempenha um papel crucial na compreensão dos comportamentos dinâmicos de sistemas físicos e naturais que podem ser modelados por meio de equações diferenciais. Os sistemas Hamiltonianos lineares são

de especial interesse, pois permitem análises matemáticas mais precisas e abordagens mais sistemáticas.

O conceito de estabilidade paramétrica envolve a análise de como a estabilidade de um sistema evolui à medida que um ou mais parâmetros variam. A variação dos parâmetros pode afetar significativamente o comportamento dinâmico do sistema, e é importante determinar as condições sob as quais o sistema permanece estável ou se torna instável.

A estabilidade paramétrica é relevante em diversas áreas das ciências naturais, como física, engenharia, biologia, entre outras. Ela permite a análise de sistemas complexos com múltiplas variáveis e parâmetros, oferecendo insights valiosos sobre a dinâmica de sistemas reais.

Ao longo desta seção, abordaremos os conceitos fundamentais da estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos lineares. Exploraremos as definições e propriedades dos sistemas Hamiltonianos, compreendendo a natureza das mudanças nos comportamentos do sistema quando os parâmetros são variados. Para fundamentar nossos estudos, recorreremos a referências como [12], que oferece uma base teórica sólida e abrangente sobre o assunto.

Através da análise das curvas e margens de estabilidade paramétrica, seremos capazes de identificar as regiões do espaço de parâmetros em que o sistema é estável e instável. Essa informação é crucial para projetar e controlar sistemas complexos, possibilitando a previsão de comportamentos dinâmicos em diversas situações.

Portanto, o estudo da estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos lineares é de grande importância para a compreensão da dinâmica de sistemas físicos e naturais, além de fornecer ferramentas valiosas para a análise, projeto e controle de sistemas em diversas áreas do conhecimento científico.

Em problemas específicos de mecânica nos deparamos com a função Hamiltoniana real  $\tau$ -periódica  $\widehat{H} = \widehat{H}(\mathbf{x}, t, \mu, \epsilon)$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $\widehat{H}$  depende de dois parâmetros escalares  $\mu$  e  $\epsilon$ , sendo o último um parâmetro pequeno. Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano que tem como função Hamiltoniana  $\widehat{H}$ , para quaisquer valores dos parâmetros  $\mu$  e  $\epsilon$ . Vamos investigar os casos em que  $\widehat{H}$  depende do tempo, pois, é o caso que será abordado nos dois últimos capítulos deste trabalho. O estudo do caso autônomo foi apresentado no capítulo 5 da referência [12]. Podemos portanto, ter que analisar a estabilidade do sistema linearizado sobre os equilíbrios encontrados.

Considere a translação  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ , tendo  $\mathbf{z} = 0$  ponto de equilíbrio. Então o sistema Hamiltoniano,

$$\dot{\mathbf{x}} = JD^2\widehat{H}(\mathbf{x}^*, t, \mu, \epsilon) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^2),$$

linearizado em uma vizinhança de  $\mathbf{x}^*$  fornece o sistema Hamiltoniano linear real e  $\tau$ -periódico,

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}, \quad (1.3)$$

onde,  $A(t, \mu, \epsilon) = JD^2\widehat{H}(\mathbf{x}^*, t, \mu, \epsilon)$ . Geralmente obter a estabilidade do sistema não perturbado ( $\epsilon = 0$ ) tem menor grau de dificuldade. Assim, vamos supor que o sistema não perturbado  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, 0)\mathbf{z}$  é estável para  $\mu$  em um intervalo  $I$ . Surge a questão da estabilidade do sistema perturbado (1.3) para  $\epsilon$  pequeno.

Pois bem, se para algum  $\mu^*$ , o sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu^*, 0)\mathbf{z}, \quad (1.4)$$

é fortemente estável, então, pela observação 1.1.6, ele é parametricamente estável e além disso, para qualquer  $(\mu, \epsilon)$  em uma pequena vizinhança de  $(\mu^*, 0)$  o sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}$  é estável. Portanto, a questão acima é interessante apenas se o sistema (1.4) não for fortemente estável.

Como o sistema não perturbado (1.4) é estável, então pelo teorema 6.4.30 os multiplicadores  $\rho_1(\mu^*), \dots, \rho_{2n}(\mu^*)$  estão todos na circunferência unitária. Se todos multiplicadores são simples, isto é, têm multiplicidade igual a um, então para  $\mu$  próximo a  $\mu^*$  e  $\epsilon$  pequeno, o sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}$ , têm multiplicadores simples e todos estão no círculo unitário, ou seja, esse sistema é estável para  $(\mu, \epsilon)$  em uma pequena vizinhança de  $(\mu^*, 0)$ .

Então, para continuarmos a investigação, podemos assumir que existe pelo menos um multiplicador múltiplo, digamos  $\rho_k = \rho_k(\mu^*)$  entre  $\rho_1(\mu^*), \dots, \rho_{2n}(\mu^*)$ . Seja  $\lambda_k = i\omega_k$ ,  $\omega_k \geq 0$  (as quantidades  $\omega_k$  são ditas as frequências), um expoente característico de  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu^*, 0)\mathbf{z}$ , e  $\rho_k = e^{\tau\lambda_k}$  o multiplicador múltiplo correspondente a  $\lambda_k$ , pelo fato do sistema Hamiltoniano ser recíproco se  $\rho_l$  é multiplicador múltiplo temos que  $\frac{1}{\rho_l}$  também é com a mesma multiplicidade, segue que  $\rho_k = \rho_l = e^{\tau\omega_k}$  ou  $\rho_k = \frac{1}{\rho_l} = e^{-\tau\omega_k}$ , para algum  $l$ . Isto é,  $e^{\tau\omega_k} = e^{\mp\tau\omega_l}$ , ou seja,  $e^{\tau\omega_k \pm \tau\omega_l} = 1$ . Isto equivale a igualdade vetorial  $\cos[(\tau\omega_k \pm \tau\omega_l)] + i\text{sen}[(\tau\omega_k \pm \tau\omega_l)] = (1, 0)$ . Portanto, a existência de multiplicador múltiplo ocorre quando

$$\omega_k \pm \omega_l = N\frac{\pi}{\tau}, \quad \text{com } N \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Esta relação é denominada de *ressonâncias de Krein* e possui a seguinte classificação quanto a seu tipo:

- (i) ressonância básica: se  $2\omega_k = N$ , isto é, se  $k = l$ ;
- (ii) ressonância combinada se  $k \neq l$ .

Uma ressonância é simples se houver apenas ua de seu tipo entre as relações de ressonância (1.5), caso contrário, dizemos que é uma ressonância múltipla. Quando

o sistema  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu^*, 0)\mathbf{z}$ , tem um multiplicador múltiplo para algum valor  $\mu^*$ , dizemos que este é o valor de ressonância paramétrica. Vamos assumir que os valores de ressonância paramétrica são isolados no intervalo  $I$ .

Assumindo que  $\mu^*$  é um valor de ressonância paramétrica. Em decorrência do teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, o sistema não perturbado  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, 0)\mathbf{z}$  para este valor de ressonância, ainda pode ser fortemente estável. No caso em que seja parametricamente estável, temos que para  $(\mu, \epsilon)$  na vizinhança de  $(\mu^*, 0)$  o sistema perturbado  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}$ , é estável, para  $\epsilon$  pequeno.

Agora, assumimos que o sistema não perturbado não é fortemente estável. Isto é, na vizinhança deste sistema, existem sistemas estáveis e instáveis. Além disso, na família de sistemas paramétricos  $\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}$ , podemos ter parâmetros que fornecem sistemas estáveis e parâmetros que fornecem sistemas instáveis.

Existe uma teoria de estabilidade que nos permite definir, no espaço dos parâmetros, margens que separam regiões estáveis e instáveis para uma família de sistemas. Essas margens são representadas por curvas contínuas quando o sistema depende de dois parâmetros e por superfícies quando depende de três parâmetros.

A seguir, abordaremos os procedimentos para determinar a divisão das regiões de estabilidade e instabilidade, utilizando como ponto de partida as ressonâncias de Krein. Esse enfoque nos permitirá compreender de forma mais detalhada como essas divisões são estabelecidas.

### 1.3 Visão geral para construção de curvas fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade de sistemas Hamiltonianos com pequeno parâmetro.

Nesta seção temos por objetivo, descrever brevemente sobre as curvas contínuas no plano de parâmetros  $(\mu, \epsilon)$ , que originam de pontos que há ressonâncias paramétricas. Utilizaremos como texto base o livro [12].

Seja  $S = D^2\hat{H}(\mathbf{x}^*, t, \mu, \epsilon) = JA(t, \mu, \epsilon)$ . Então, a forma quadrática,

$$H(\mathbf{z}, t, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z},$$

é a função Hamiltoniana associada ao sistema linear,

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu, \epsilon)\mathbf{z}. \tag{1.6}$$

Ao expandirmos a função Hamiltoniana em série de potência de  $\epsilon$  obtemos,

$$H(\mathbf{z}, t, \mu, \epsilon) = H_0(\mathbf{z}, \mu) + \epsilon H_1(\mathbf{z}, t, \mu) + \epsilon^2 H_2(\mathbf{z}, t, \mu) + \dots, \tag{1.7}$$

Onde  $H_0, H_1, H_2, \dots$  são formas quadráticas na variável  $\mathbf{z}$ , além disso, os coeficientes da forma  $H_0$  são constantes e os das formas  $H_1, H_2, \dots$  são contínuos em  $t$  com o período comum  $\tau$ . Tomaremos  $\lambda_j = i\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  com  $\omega_j = \omega_j(\mu) \geq 0$ , para  $\mu \in I$ .

Seja  $\mu_0 \in I$  um dos valores onde há ressonância de Krein. Como assumimos que esses valores são isolados, as frequências  $\omega_1(\mu), \dots, \omega_n(\mu)$  são distintas para  $\mu \neq \mu_0$  em uma vizinhança de  $\mu_0$ . Portanto, para cada um desses valores de  $\mu$  podemos encontrar uma aplicação linear simplética  $\mathbf{z} = N\mathbf{y}$ , para a qual vimos a construção no capítulo anterior, dependendo continuamente de  $\mu$ , que transforma  $H_0(\mathbf{z}, \mu)$  em sua forma normal, isto é, em uma soma algébrica de osciladores harmônicos,

$$H_0(\mathbf{y}, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_j (\mathbf{y}_j^2 + \mathbf{y}_{n+j}^2), \quad (1.8)$$

onde  $\sigma_j$  são dados por  $\sigma_j = \delta_j \omega_j(\mu)$ , com  $\omega_j(\mu) > 0$  e os  $\delta_j = \pm 1$  são completamente determinados no processo de construção da matriz  $N$  e assim, a função Hamiltoniana em (1.7) é levada na função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_j (\mathbf{y}_j^2 + \mathbf{y}_{n+j}^2) + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \dots, \quad (1.9)$$

onde, agora  $H_1, H_2, \dots$  são formas quadráticas na variável  $\mathbf{y}$  ainda com coeficientes contínuos e  $\tau$ -periódicos em  $t$ .

No entanto, em  $\mu = \mu_0$  para algumas ressonâncias de Krein, a forma normal de  $H_0(\mathbf{z}, \mu)$  não pode ser escrita desta maneira. No livro de Hildeberto, referência [12], é mostrado usando a teoria de normalização linear como encontrar a forma normal de  $H_0(\mathbf{z}, \mu)$  para cada tipo de ressonância de Kerin. A forma normal ainda será transformada em uma forma conveniente adequada para usar o método Deprit-Hori, que falaremos a seguir.

O objetivo é empregar esse método, válido especificamente para Hamiltonianos quadráticos, a fim de encontrar uma função geradora  $\tau$ -periódica. Essa função geradora será utilizada para realizar uma transformação canônica linear  $\tau$ -periódica nas coordenadas, convertendo a função Hamiltoniana dependente do tempo em uma função Hamiltoniana autônoma. A estabilidade da origem para o sistema Hamiltoniano  $\tau$ -periódico linear inicial é equivalente à estabilidade da origem para o sistema Hamiltoniano autônomo.

Ao impormos a condição de estabilidade a esse sistema e desenvolvermos a teoria para encontrar as curvas mencionadas no espaço de parâmetros, seremos capazes de obter as expressões dessas curvas. Esse processo permitirá determinar as margens que delimitam as regiões estáveis e instáveis no espaço de parâmetros, o que possibilitará uma análise detalhada das propriedades de estabilidade do sistema Hamiltoniano

autônomo resultante. Em suma, ao encontrar essas curvas, poderemos visualizar e compreender claramente a região onde o sistema é estável e a região onde é instável, o que é crucial para o estudo do comportamento dinâmico do sistema em questão.

Procuraremos essas curvas como curvas que emanam do ponto  $(\mu_0, 0)$ , esperando encontrá-las no plano de parâmetros que delimita os conjuntos de sistemas estáveis e os conjuntos de sistemas instáveis. Procuraremos essas curvas na forma de uma expansão em série

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \dots$$

e procuramos encontrar os coeficientes  $\mu_1, \mu_2, \dots$ .

## Capítulo 2

# Estabilidade e forma normal de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes e periódicos

Durante este capítulo, vamos apresentar resultados referentes a estabilidade de sistemas Hamiltonianos com coeficientes constantes e periódicos, tomando como base o estudo apresentado no capítulo anterior. Ao mesmo tempo, iremos expor algoritmos para obtenção da forma normal dos mesmos sistemas, forma esta, que nos fornece uma função Hamiltoniana de melhor compreensão referente a dinâmica do sistema associado.

Como principais referências adotamos [39], [9], [12]. Outras referências relevantes foram [33], [40], [48], [49].

### 2.1 Premissas do processo de linearização de sistemas Hamiltonianos não lineares

Dado um sistema Hamiltoniano,

$$\dot{z} = J \nabla H(z), \quad (2.1)$$

e um equilíbrio  $z_0$  desse sistema, na busca de responder perguntas acerca da dinâmica deste sistema é bastante comum, primeiramente, tentarmos entender como o sistema se comporta próximo de um ponto de equilíbrio. Dessa maneira, linearizamos o sistema em torno do equilíbrio e obtemos,

$$\dot{z} = J D^2 H(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^2). \quad (2.2)$$

Dizemos que o sistema (2.2) é um *sistema perturbado* ou *não linear*. Já o sistema linear associado

$$\dot{z} = J D^2 H(z_0)(z - z_0), \quad (2.3)$$

é denominado *sistema não perturbado*. Observe que o sistema em (2.3) é um sistema Hamiltoniano linear e vimos na seção 6.2.2 que a função Hamiltoniano associada é da forma  $H = \frac{1}{2} z^T D^2 H(z_0) z$ . Se  $H$  for uma forma quadrática positiva ou negativa definida, a estabilidade desse sistema associado foi comentada na observação 6.4.11 na Seção 6.4.1. O sistema será estável uma vez que  $H$  será uma integral primeira definida positiva ou negativa.

Em certos casos, mesmo após a linearização do sistema, a função Hamiltoniana associada pode não apresentar uma lei facilmente interpretável em relação ao seu comportamento. Por esse motivo, o estudo da dinâmica nas proximidades do equilíbrio é convenientemente realizado por meio da forma normal do sistema Hamiltoniano. Essa forma normal, obtida por meio de uma mudança de coordenadas, nos fornece um sistema Hamiltoniano equivalente no qual a função Hamiltoniana possui uma lei mais simples de ser analisada. Nos capítulos presentes e seguintes, descrevemos o processo de normalização linear com o objetivo de determinar a estabilidade linear de um sistema Hamiltoniano, mais especificamente, a estabilidade paramétrica desse sistema.

## 2.2 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares com coeficientes constantes.

Considere o seguinte sistema Hamiltoniano linear

$$\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$  e a matriz  $S$  é real simétrica com coeficientes reais e de ordem  $2n$ .

A equação característica de (2.4) é dada por

$$p(\lambda) = \det(JS - \lambda I_{2n}) = 0. \quad (2.5)$$

Pela proposição 6.2.10 da Seção 1.1.1, temos que o polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par. Consequentemente, se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , temos que  $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$  também são.

Desta forma, se  $\lambda$  é raiz de (2.5) com parte real negativa (ou positiva), então  $-\lambda$  também é raiz, e com parte real positiva (negativa). Assim, usando o teorema (6.4.16) concluímos que o sistema (2.4) é instável.

Daí, concluímos que uma condição necessária para o sistema (2.4) ser estável é que as raízes da equação característica sejam números imaginários puros. A condição de suficiência é garantida quando a matriz  $JS$  é redutível a uma forma diagonal.

**Observação 2.2.1.** *Quando a função Hamiltoniana  $H$  do sistema (2.4) é definida positiva (ou negativa) temos pelo corolário 6.4.9 as condições para a estabilidade do sistema (2.4).*

Com as informações obtidas, temos o teorema em seguida, que nos fornece uma caracterização da estabilidade de um sistema Hamiltoniano.

**Teorema 2.2.2.** *Seja o sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , onde  $A$  é uma matriz Hamiltoniana constante. As condições da solução de equilíbrio nula advém da equação característica de  $A$ , isto é,*

- (a) *se  $A$  é uma matriz não singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se todos os autovalores são imaginários puros e a matriz  $A$  for diagonalizável. É instável nos demais casos.*
- (b) *se  $A$  é uma matriz singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se os autovalores não nulos são imaginários puros e o bloco de Jordan associado a cada autovalor é diagonal, ou seja, a matriz  $A$  for diagonalizável. É instável nos demais casos.*

Vimos na observação 2.2.1 anterior que o fato da função Hamiltoniana  $H$  ser definida positiva (ou negativa) nos garante a estabilidade do sistema. No entanto, no exemplo a seguir, veremos que é possível o sistema ser estável mas a função Hamiltoniana não ter sinal definido.

**Exemplo 2.2.3.** *Considere o sistema linear*

$$\frac{dx_k}{dt} = (-1)^{k+1}\omega_k x_{2+k}, \quad \frac{dx_{2+k}}{dt} = (-1)^k \omega_k x_k, \quad (\omega_k > 0, \quad k = 1, 2). \quad (2.6)$$

*Equivalentemente na forma matricial, temos*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{JS} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

donde

$$S = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}.$$

A equação característica do sistema (2.6) tem dois pares de raízes imaginárias puras. De fato,

$$p(\lambda) = \det(JS - \lambda I) = 0 \implies \lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0,$$

cujas raízes são  $\pm i\omega_1$  e  $\pm i\omega_2$ . Apesar delas serem imaginárias puras temos que a função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}x^T Sx = \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + x_3^2) - \frac{1}{2}\omega_2(x_2^2 + x_4^2)$$

não possui sinal definido. Em outras palavras, existem inúmeros casos no qual a função  $H$  não tem sinal definido e o sistema é estável.

### 2.3 Normalização de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes

Em muitos problemas matemáticos e físicos que envolvem a resolução de um sistema Hamiltoniano linear, como no caso da construção de soluções aproximadas de um sistema Hamiltoniano não linear, onde as soluções do sistema linear associado são tomadas como primeira aproximação, é conveniente escolher coordenadas nas quais as soluções do problema linear assumam a forma mais simples. Essa forma mais simples é conhecida como forma normal. Neste contexto, abordaremos o caso em que o sistema é estável, ou seja, todas as raízes da equação característica são puramente imaginárias. Isso nos permitirá obter informações sobre as soluções de maneira mais fácil e direta. Suponha que as raízes da equação característica do sistema  $\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}$  são imaginárias puras da forma

$$\lambda_k = i\omega_k, \quad \lambda_{n+k} = -i\omega_k \quad (\omega_k > 0, k = 1, \dots, n).$$

Vamos obter uma transformação canônica real, linear,  $x_j \mapsto y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ) que leva o sistema (2.4) em sua forma normal. Neste caso, por forma normal do sistema de equações (2.4) designamos o sistema de equações diferenciais cuja função Hamiltoniana  $H$  é igual a soma algébrica das funções Hamiltonianas de  $n$  osciladores lineares desacoplados

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \delta_k \omega_k (y_k^2 + y_{n+k}^2), \quad (2.7)$$

com  $\delta_k = \pm 1$ . Os valores concretos de  $\delta_k$  aparecem no processo de construção da transformação da forma normal  $x_j \mapsto y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ). Ou seja, mostraremos a existência de uma matriz de normalização  $N$  que transforma a função Hamiltoniana do sistema (2.4), através da transformação  $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ , na função Hamiltoniana (2.7). Para isso, utilizaremos o algoritmo descrito no livro do Markeev [39]. Tal algoritmo,

é interessante porque quando aplicado a um problema concreto, depende apenas da obtenção dos autovalores da matriz  $JS$ .

Levando-se em consideração (2.7), encontramos que a forma normal do sistema linear se escreve na forma do seguinte sistema Hamiltoniano de equações:

$$\dot{\mathbf{y}} = JS^*\mathbf{y}, \quad (2.8)$$

onde  $S^*$  é uma matriz diagonal real, cujos elementos da diagonal são determinados pelas igualdades

$$h_{k,k}^* = h_{n+k,n+k}^* = \delta_k \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

A mudança das variáveis  $\mathbf{x}$  para as variáveis  $\mathbf{y}$  é dada por meio da matriz  $N$ , na forma da equação  $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ . Note que

$$NJS^*\mathbf{y} = N\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x} = JSN\mathbf{y},$$

e portanto, a matriz  $N$  satisfaz a seguinte equação matricial,

$$NJS^* = JSN. \quad (2.9)$$

Além disso, para que a transformação  $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$  seja canônica, a matriz  $N$  deve ser simplética, isto é, ela deve satisfazer a equação matricial

$$N^T J N = J. \quad (2.10)$$

A solução da equação matricial (2.9) não é única. Para obter a transformação normalizadora é necessário escolher, dentro do conjunto infinito de soluções da equação (2.9) uma que seja real e satisfaça a condição de ser simplética. Ou seja, desejamos encontrar  $N$  que seja solução do sistema

$$\begin{cases} NJS^* = JSN \\ N^T J N = J. \end{cases}$$

A solução  $N$  da equação (2.9) será procurada na forma do produto de duas matrizes  $N = N_1 N_2$ , onde a matriz  $N_2$  é invertível e dada por

$$N_2 = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Substituindo  $N = N_1 N_2$  na equação (2.9), temos,

$$\begin{aligned} N_1 N_2 JS^* &= JSN_1 N_2, \\ N_1 N_2 JS^* N_2^{-1} &= JSN_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$N_1 G = JSN_1,$$

onde  $G = N_2 JS^* N_2^{-1}$  é a forma diagonal da matriz  $JS$  e suas entradas na diagonal satisfazem as igualdades  $g_{kk} = -g_{n+k, n+k} = i\delta_k \omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Deste modo, é necessário encontrar uma matriz  $N_1$  que leve a matriz  $JS$  à forma diagonal.

A matriz  $N_1$  será tal que suas colunas serão os autovetores da matriz  $JS$ , usaremos a seguinte notação

$$N_1 = \text{col} \left( e_1, \dots, e_m, \dots, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}, \dots \right)_{2n},$$

onde o autovetor  $e_m$  é correspondente ao autovalor  $\lambda_m = i\delta_m \omega_m$  e o autovetor  $e_{n+m}$  é correspondente ao autovalor  $\lambda_{n+m} = -i\delta_m \omega_m$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ). Denotaremos  $c_k^* = r_k^* + is_k^*$  um autovetor qualquer da matriz  $JS$  correspondente ao autovalor  $i\omega_k$ , ou seja,  $JS(r_k^* + is_k^*) = i\omega_k(r_k^* + is_k^*)$ . Deste fato, segue que suas partes reais e imaginárias satisfazem o sistema de equações

$$JSr_k^* = -\omega_k s_k^* \quad , \quad JSs_k^* = \omega_k r_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.11)$$

Os autovetores  $e_m$  e  $e_{n+m}$  são tomados da seguinte forma

$$e_m = c_m(\delta_m r_m^* + is_m^*) \quad , \quad e_{n+m} = c_m(\delta_m r_m^* - is_m^*), \quad (2.12)$$

onde  $c_m \in \mathbb{R}$ . As constantes  $c_m$  serão escolhidas com a finalidade de garantir que a matriz  $N$  seja real, e elas serão obtidas a partir da condição de  $N$  ser uma matriz ( $N^T J N = J$ ).

Substituindo  $N = N_1 N_2$  na condição  $N^T J N = J$ , temos

$$N_2^T N_1^T J N_1 N_2 = J, \text{ portanto,}$$

$$N_2^T F N_2 = J, \quad (2.13)$$

onde  $F = N_1^T J N_1$ . A entrada  $f_{kl}$  desta matriz é dado pelo produto interno

$$f_{kl} = \langle e_k, J e_l \rangle. \quad (2.14)$$

Mas, como  $\langle a, J b \rangle = -\langle J a, b \rangle$ , para todo vetor  $a$  e  $b$ , segue que  $F$  é anti-simétrica.

Vamos provar ainda que se  $|k - l| \neq n$ , então  $f_{kl} = 0$ . De fato, como  $S^T = S$  e  $J^T = -J$ , temos que,

$$\begin{aligned} \lambda_l f_{kl} &= \lambda_l \langle e_k, J e_l \rangle = \langle e_k, J(\lambda_l e_l) \rangle = \langle e_k, J(JS e_l) \rangle = \langle -S e_k, e_l \rangle \\ &= \langle J(JS e_k), e_l \rangle = \langle J(\lambda_k e_k), e_l \rangle = \lambda_k \langle J e_k, e_l \rangle = -\lambda_k \langle e_k, J e_l \rangle = -\lambda_k f_{kl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\lambda_k + \lambda_l) f_{kl} = 0, \quad (2.15)$$

onde  $\lambda_k + \lambda_l = 0$  somente se  $|l - k| = n$ , por causa do ordenamento dos autovalores tomados da definição da matriz  $N_1$ , logo segue que  $f_{kl} = 0$ , se  $|l - k| \neq n$ . Assim, a matriz  $F$  terá a seguinte estrutura

$$F = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $D$  é uma matriz diagonal de ordem  $n$  com elementos  $d_{kk} = \langle e_k, J e_{n+k} \rangle$ . Nenhum dos elementos  $d_{kk}$  é igual a zero, caso contrário, o determinante da matriz  $F$  seria nulo. Perceba que,

$$\det F = \det N_1^T \cdot \det J \cdot \det N_1 = (\det N_1)^2 \neq 0,$$

pois  $N_1$  é composta de autovetores correspondentes aos autovalores da matriz  $JS$ , que são distintos.

Levando em consideração as expressões de  $e_k$  e  $e_{n+k}$  em (2.12), temos que,

$$d_{kk} = -2ic_k^2 \delta_k \langle r_k^*, J s_k^* \rangle \quad , \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.16)$$

Por (2.13), vimos que  $N$  é simplética se  $N_2^T F N_2 = J$ , isto é

$$\begin{pmatrix} iI_n & -iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

daí,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2iD \\ -2iD & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

usando a definição de igualdade de matrizes, temos

$$2id_{kk} = 1.$$

Desta forma, por (2.16),

$$4c_k^2 \delta_k \langle r_k^*, J s_k^* \rangle = 1. \quad (2.17)$$

A partir desta última equação obtemos por um lado, a condição para normalizar os autovetores e, por outro, a condição para escolha do sinal de  $\delta_k$ , ou seja,

$$\delta_k = \text{sign} \langle r_k^*, J s_k^* \rangle \quad , \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.18)$$

Para que a quantidade  $c_k$  seja real, é tomado  $c_k = \frac{\kappa_k}{2}$ , no qual,

$$\kappa_k = \frac{1}{\sqrt{|\langle r_k^*, J s_k^* \rangle|}} \quad , \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.19)$$

Temos que a matriz  $N$  da transformação normalizadora não-singular é real, sua  $k$ -ésima coluna sendo os vetores  $-\kappa_k s_k^*$  e sua  $(n+k)$ -ésima coluna, o vetor  $\delta_k \kappa_k r_k^*$

$$N = \text{col} \left( -\kappa_1 s_1^*, \dots, -\kappa_n s_n^*, \delta_1 \kappa_1 r_1^*, \dots, \delta_n \kappa_n r_n^* \right).$$

Vejamos agora como normalizar um sistema Hamiltoniano linear com um grau de liberdade através do processo descrito acima.

**Exemplo 2.3.1.** Considere um sistema Hamiltoniano linear  $\dot{\mathbf{x}} = JS\mathbf{x}$  com um grau de liberdade, cuja função Hamiltoniana é escrita como

$$H = h_{20}x_1^2 + h_{11}x_1x_2 + h_{02}x_2^2. \quad (2.20)$$

Pelo fato de  $H = \frac{1}{2}z^T S z$ , temos,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2h_{20} & h_{11} \\ h_{11} & 2h_{02} \end{pmatrix}, \quad JS = \begin{pmatrix} h_{11} & 2h_{02} \\ -2h_{20} & -h_{11} \end{pmatrix}.$$

Observamos que, para o processo de normalização, é necessário obter os autovalores da matriz  $JS$  e seus respectivos autovetores correspondentes. Com essas informações em mãos, podemos construir a matriz normalizadora  $N$ . Os autovalores podem ser calculados utilizando a seguinte equação:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda & 2h_{02} \\ -2h_{20} & -h_{11} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

otemos

$$\lambda = \pm i\sqrt{4h_{02}h_{20} - h_{11}^2} = \pm i\sqrt{\Delta} = \pm i\omega,$$

onde  $\Delta = 4h_{02}h_{20} - h_{11}^2$  e  $\omega = \sqrt{\Delta}$  é a frequência das oscilações. Suponhamos que se verificam as desigualdades  $h_{02}h_{20} > 0$  e  $\Delta > 0$ .

Usando as equações  $JSr^* = -\omega s^*$  e  $JSs^* = \omega r^*$  para encontrar a parte real e imaginária do autovetor  $e^* = r^* + is^*$  correspondente ao autovalor  $i\omega$  da matriz  $JS$  obtemos, respectivamente, que

$$r^* = \begin{pmatrix} -2h_{02} \\ h_{11} \end{pmatrix} \quad e \quad s^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

Temos ainda, através das equações (2.18) e (2.19), que:

$$\begin{aligned} \delta &= \text{sign}\langle r^*, Js^* \rangle = \text{sign}(2\omega h_{02}) = \text{sign}(h_{02}) \\ \kappa &= \frac{1}{\sqrt{|\langle r^*, Js^* \rangle|}} = \frac{1}{\sqrt{|2\omega h_{02}|}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} \end{aligned}$$

e assim, a matriz  $N$  da transformação normalizante é dada por

$$N = \begin{pmatrix} -\kappa s^* & \delta \kappa r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\delta h_{02}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} \\ \frac{\omega}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} & \frac{\delta h_{11}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{2|h_{02}|}{\omega}} \\ \sqrt{\frac{\omega}{2|h_{02}|}} & \frac{h_{11}}{h_{02}} \sqrt{\frac{|h_{02}|}{2\omega}} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a transformação  $\mathbf{x} = N\mathbf{y}$ , é dada por,

$$x_1 = \frac{-2\delta h_{02}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_2, \quad x_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_1 + \frac{\delta h_{11}}{\sqrt{2\omega|h_{02}|}}y_2$$

e, portanto obtemos a função Hamiltoniana normalizada

$$H = \frac{1}{2}\delta\omega(y_1^2 + y_2^2). \quad (2.21)$$

## 2.4 Estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos

Estudaremos agora a teoria dos sistemas Hamiltonianos lineares periódicos, usando assim o teorema de Floquet e forneceremos, alguns resultados a respeito da estabilidade desse tipo de sistema. Começaremos por exibir alguns dos principais resultados relacionados a representação de Floquet.

Considere o sistema Hamiltoniano linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = JS(t)\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

$\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ , onde  $S(t)$  é contínua, real, simétrica e  $2\pi$ -periódica em  $t$ .

Para tratarmos do problema de estabilidade para sistemas lineares com coeficientes periódicos, é necessário algumas definições e resultados apresentados a seguir.

**Definição 2.4.1.** *A equação*

$$f(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \dots + a_{m-1}z + a_m = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (2.23)$$

é chamada *recíproca* se os seus coeficientes que são equidistantes dos extremos são iguais, isto é,  $a_k = a_{m-k}$ .

**Observação 2.4.2.** *A identidade*

$$f(z) = z^m f\left(\frac{1}{z}\right), \quad (z \neq 0), \quad (2.24)$$

é verdadeira para equações recíprocas. De fato, usando o fato de  $a_k = a_{m-k}$ , temos

$$\begin{aligned} z^m f\left(\frac{1}{z}\right) &= z^m \left( a_0 \left(\frac{1}{z}\right)^m + a_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{m-1} + \dots + a_{m-1} \left(\frac{1}{z}\right) + a_m \right) \\ &= a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m \\ &= a_m + a_{m-1} z + \dots + a_1 z^{m-1} + a_0 z^m \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se esta identidade é verdadeira segue que a equação (2.23) é recíproca.

$$\begin{aligned} z^m f\left(\frac{1}{z}\right) &= f(z) \\ a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m &= a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m, \end{aligned}$$

donde  $a_k = a_{m-k}$ . Podemos acrescentar ainda, por (2.24), que se  $z$  é raiz, então  $\frac{1}{z}$  também o é.

Se uma equação recíproca tem grau ímpar, então segue de (2.24) que  $z = -1$  é uma raiz. De fato,

$$f(-1) = (-1)^m f(-1) = -f(-1),$$

daí,  $f(-1) = 0$ . Temos ainda que se a equação tem raiz  $z_k \neq \pm 1$ , então  $z_l = \frac{1}{z_k}$  também será raiz e com a mesma multiplicidade.

**Teorema 2.4.3.** *Considere o sistema Hamiltoniano linear  $\dot{\mathbf{x}} = JS(t)\mathbf{x}$ . Se a matriz  $S(t)$  é  $2\pi$ -periódica em  $t$ , então a equação característica*

$$f(\rho) = \det(X(2\pi) - \rho I_{2n}) = 0 \quad (2.25)$$

*é recíproca.*

**Demonstração:** Primeiramente mostraremos que a  $X(t)$  é simplética. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^T J X) &= \left(\frac{d}{dt} X^T\right) J X + X^T J \left(\frac{d}{dt} X\right) = X^T S^T J^T J X + X^T J J S X \\ &= X^T S(-J^2)X + X^T J^2 S X = X^T S X - X^T S X = 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $X^T J X = D$ , onde  $D$  é uma matriz constante. Como  $X^T(0)JX(0) = J$ , temos que  $D = J$  para todo  $t$ . Portanto, a matriz fundamental  $X(t)$  é simplética, pois satisfaz a identidade  $X^T J X = J$ .

Em segundo lugar, observa-se do teorema (6.4.21) que  $\det X(2\pi) = 1$ .

Por fim, mostraremos que a equação (2.25) é recíproca, haja vista que,

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \det(X - \rho I_{2n}) = \det[X(I_{2n} - \rho X^{-1})] = \det[X(I_{2n} - \rho J^{-1} X^T J)] \\ &= \det(I_{2n} - \rho J^{-1} X^T J) = \det J^{-1}(I_{2n} - \rho X^T)J = \det(I_{2n} - \rho X^T) \\ &= \det(I_{2n} - \rho X^T)^T = \det(I_{2n} - \rho X) = \det\left(\rho\left(\frac{1}{\rho} I_{2n} - X\right)\right) \\ &= \det \rho I_{2n} \cdot \det\left(\frac{1}{\rho} I_{2n} - X\right) = \rho^{2n} f\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

■

**Observação 2.4.4.** *Vamos recordar o Teorema 2.2.2, no qual estabelecemos que se  $B$  é uma matriz não singular, então o sistema (2.22) é estável somente se todos os autovalores forem puramente imaginários e a matriz  $B$  for diagonalizável. Dessa forma, podemos caracterizar a estabilidade do sistema (2.22) com base nos multiplicadores característicos da seguinte maneira:*

- *O sistema Hamiltoniano linear (6.75) é estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores característicos estiverem no círculo unitário, ou seja,  $|\rho| = 1$ , e a matriz  $X(2\pi)$  for reduzível à forma diagonal.*
- *De acordo com o Teorema 2.4.3 e os resultados apresentados em relação a equações recíprocas, temos que os multiplicadores característicos  $\rho_j$  e  $\frac{1}{\rho_j}$  possuem a mesma multiplicidade. Se a equação característica (2.25) tiver a raiz  $\rho = 1$  ou  $\rho = -1$ , então essas raízes possuem multiplicidade par.*

## 2.5 Normalização de um sistema Hamiltoniano linear periódico

Considere o sistema Hamiltoniano linear periódico (2.22) com  $n$  graus de liberdade. De acordo com o corolário 6.4.23 do teorema de Floquet existe uma mudança de variáveis  $x = Y(t)y$  que transforma o sistema periódico em um sistema com coeficientes constantes. Mas tal matriz  $Y(t)$  não é definida de forma única. Seguindo [39], descreveremos o algoritmo que constrói a matriz  $Y(t)$  de forma que seja real, simplética e  $2\pi$ -periódica em  $t$  e que reduza o sistema (2.22) à sua forma normal. Assumiremos ainda que os expoentes característicos do sistema (2.22) são imaginários puros,  $\chi_k = \pm i\lambda_k$ , e que os multiplicadores característicos  $\rho_k = e^{i2\pi\lambda_k}$  e  $\rho_{n+k} = e^{-i2\pi\lambda_k}$  são todos distintos ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Da mesma forma que na seção 2.3 queremos obter um sistema que possui a função Hamiltoniana da forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \delta_k \lambda_k (y_k^2 + y_{n+k}^2), \quad (2.26)$$

onde  $\delta_k = \pm 1$ . Seus valores concretos serão determinados na construção da matriz  $x_j \mapsto y_j$  para  $j = 1, \dots, 2n$ .

De maneira parecida com o caso constante, tomaremos a transformação normalizante como sendo,

$$x = Ny. \quad (2.27)$$

Aqui, escrevendo  $N$  como o produto de duas mudanças de variáveis

$$x = N_1 z, \quad \text{com } N_1 = X(t)Ae^{-Bt} \text{ e}, \quad (2.28)$$

$$z = N_2 y, \quad (2.29)$$

onde,  $X(t)$  é uma matriz fundamental do sistema (2.22),  $A$  é uma matriz constante que será obtida mais a frente,  $B$  é uma matriz diagonal cujas entradas diagonais são definidas pelas igualdades  $b_{kk} = -b_{n+k, n+k} = i\delta_k \lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) e  $N_2$  é a matriz,

$$N_2 = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}.$$

A substituição (2.28) leva o sistema (2.22) para a forma diagonal

$$\dot{z} = Bz. \quad (2.30)$$

Com efeito, fazendo a substituição obtemos

$$\frac{d}{dt}(N_1 z) = JS(t)N_1 z.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade, substituindo  $N_1$ , usando o fato de  $A$  ser constante e  $\dot{X}(t) = JS(t)X(t)$ , segue que

$$X(t)Ae^{-Bt}\dot{z} = X(t)ABe^{-Bt}z.$$

Assim, multiplicando pelas inversas e usando  $Be^{-Bt} = e^{-Bt}B$ , obtemos o resultado esperado.

Logo após a substituição (2.29) o sistema (2.30) assume a forma normal com função Hamiltoniana (2.26). Podemos escolher a matriz  $A$  de maneira que a transformação (2.27) seja real, simplética e  $2\pi$ -periódica em  $t$ . Para escolher  $A$ , observe inicialmente que a transformação  $z = N_2y$  é  $2i$ -simplética. De fato,

$$\begin{pmatrix} iI_n & -iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

$$N_2^T J N_2 = 2iJ.$$

Desta forma, para que a transformação (2.27) seja simplética é necessário e suficiente que a matriz  $A$  seja  $\frac{1}{2i}$ -simplética. Pois, como  $N = N_1N_2$  e  $N_2$  é  $2i$ -simplética, segue que  $N_1$  precisa ser  $\frac{1}{2i}$ -simplética. Pelo teorema 6.3.27 a matriz  $X(t)$  é simplética e da forma que a matriz diagonal  $B$  foi definida, segue por (6.2.12) que  $B$  é Hamiltoniana e conseqüentemente usando o corolário (6.3.28) obtemos que  $e^{-Bt}$  também é simplética. Então,  $N_2$  é simplética apenas se  $A$  for  $\frac{1}{2}$ -simplética. Ou seja, a matriz  $A$  deve satisfazer a equação

$$A^T J A = \frac{1}{2i} J. \quad (2.31)$$

Além disso, como estamos procurando uma transformação  $2\pi$ -periódica, temos

$$X(2\pi)Ae^{-2\pi B}N_2 = X(0)Ae^{-0B}N_2 = X(0)AI_{2n}N_2,$$

donde segue que

$$A^{-1}X(2\pi)A = e^{2\pi B}, \quad (2.32)$$

com  $e^{2\pi B} = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}, \dots, \rho_{2n})$ , (lembre que  $B$  é uma matriz diagonal). Note-se que a matriz  $A$  leva a matriz  $X(2\pi)$  à forma diagonal, onde a  $m$ -ésima coluna da matriz  $e^{2\pi B}$  é o autovetor  $e_m$  correspondente ao multiplicador característico  $\rho_m = e^{i2\pi\delta_m\lambda_m}$  e na  $(n+m)$ -ésima coluna é o autovetor  $e_{n+m}$ , correspondendo ao multiplicador característico  $\rho_{n+m} = e^{-i2\pi\delta_m\lambda_m}$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ).

Se  $\bar{r}_k^*, \bar{s}_k^*$  são as partes reais e imaginárias de  $e_k^* = \bar{r}_k^* + i\bar{s}_k^*$ , um autovetor da matriz  $X(2\pi)$  relacionado ao multiplicador  $e^{i2\pi\delta_k\lambda_k}$ , então pode-se calcular os vetores  $e_m$  e  $e_{n+m}$  da mesma maneira como foi calculado no caso constante, ou seja,

$$e_m = c_m(\delta_m\bar{r}_m^* + i\bar{s}_m^*), \quad e_{n+m} = c_m(\delta_m\bar{r}_m^* - i\bar{s}_m^*),$$

onde  $c_m$  são coeficientes reais a serem encontrados. Tal escolha da matriz  $A$  garante que a transformação (2.27) seja real.

Para encontrar os coeficientes  $c_m$  e os valores de  $\delta_m$ , substitui-se a matriz  $A$  a ser construída da maneira descrita acima na equação matricial (2.31), a qual é equivalente as  $n$  igualdades escalares  $4c_k^2\delta_k\langle r_k^*, Js_k^* \rangle = 1$  da seção 2.3 deste capítulo. Daí, temos ainda que as quantidades  $c_k = \frac{\kappa_k}{2}$ ,  $\delta_k$  e  $\kappa_k$  são dadas pelas fórmulas mencionadas no processo de normalização descrito anteriormente.

Assim, encontramos a matriz  $A$  e  $\delta_k$  na forma normal da função Hamiltoniana (2.26), onde a matriz de normalização  $N$  tem a forma,

$$N = N_1 N_2 = X(t) A e^{-Bt} N_2,$$

e após algumas transformações esta pode ser representada como o produto de três matrizes

$$N = X(t) P Q(t). \quad (2.33)$$

A matriz  $P$  denota uma matriz constante na qual a  $k$ -ésima coluna é o vetor  $-\kappa_k s_k^*$  e a  $(n+k)$ -ésima coluna é o vetor  $\delta_k \kappa_k r_k^*$ . A matriz  $Q(t)$  tem a forma,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & -D_2(t) \\ D_2(t) & D_1(t) \end{pmatrix},$$

onde

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos \lambda_n t \end{pmatrix} \text{ e } D_2(t) = \begin{pmatrix} \delta_1 \text{ sen } \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \text{ sen } \lambda_n t \end{pmatrix}.$$

Com isto, construímos através de formas normais funções Hamiltonianas mais simples.

## 2.6 Estabilidade e forma normal de sistema Hamiltoniano linear periódico com um grau de liberdade

Nesta seção, vamos investigar como obter a normalização do sistema (2.22) no caso de um grau de liberdade e, em seguida, discutir os resultados relacionados à estabilidade. Para isso, faremos uso da Observação 6.4.28 e do algoritmo de normalização apresentado na seção anterior.

### 2.6.1 Estabilidade

Seja  $X(t)$  a matriz fundamental do sistema (2.22), satisfazendo a condição inicial  $X(0) = I$ ,

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0. \quad (2.34)$$

Como a matriz  $X(t)$  é simplética, então  $\det X(t) = 1$  para todo  $t$ . Sendo assim, para  $t = 2\pi$  temos

$$x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) = 1. \quad (2.35)$$

Pelo teorema 2.4.3 a equação característica da matriz  $X(2\pi)$  é dada por

$$f(\rho) = \det(X(2\pi) - \rho I_2) = 0$$

que é o mesmo que

$$\rho^2 - (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))\rho + (x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0.$$

Dessa forma, usando 2.35 a equação característica de  $X(2\pi)$  se reduz a

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad (2.36)$$

onde

$$2a = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi). \quad (2.37)$$

Observe que os multiplicadores característicos que são as raízes da equação (2.36) são dadas por

$$\rho_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \quad (2.38)$$

Portanto temos quatro possíveis casos,

**i) Caso  $|a| > 1$ .** Neste caso, os multiplicadores característicos (2.38) são reais e o módulo de um deles é maior do que 1. Assim, pela observação 6.4.28 o sistema (2.22) é instável.

**ii) Caso  $|a| < 1$ .** Temos que as raízes da equação (2.36) que são os multiplicadores característicos, são números complexos conjugados distintos, onde  $|\rho| = 1$ . Além disso, usando a relação entre os expoentes característicos e os multiplicadores temos

$$\begin{aligned} \rho_1 &= e^{i2\pi\lambda} = \cos(2\pi\lambda) + i \operatorname{sen}(2\pi\lambda), \\ \rho_2 &= e^{-i2\pi\lambda} = \cos(2\pi\lambda) - i \operatorname{sen}(2\pi\lambda), \end{aligned}$$

onde  $\pm i\lambda$  é a parte imaginária do expoente característico. Nota-se que  $\lambda$  e o coeficiente  $a$  são ligados pela relação

$$\cos(2\pi\lambda) = a. \quad (2.39)$$

Neste caso, como as raízes  $\rho_{1,2}$  são distintas, temos que  $2\lambda$  não é um inteiro, pois caso contrário,  $\operatorname{sen}(2\pi\lambda) = 0$  e teríamos  $\rho_{1,2} = \cos(2\pi\lambda)$ . Logo, no sistema não há ressonância básica e nem combinada,

$$2\lambda \neq N, \quad \lambda \neq N, \quad \text{onde } N \text{ é um inteiro.}$$

Com relação aos dois casos em que  $a = \pm 1$ , ocorrem ressonâncias. A condição  $|a| = 1$  define os limites das regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros do problema mecânico em consideração. Os expoentes característicos  $\pm i\lambda$  também satisfazem a relação  $\cos(2\pi\lambda) = a$ . É importante observar que se  $|a| = 1$ , então  $|\rho_i| = 1$ , e de acordo com a Observação 6.4.28, o sistema será estável se a matriz  $X(2\pi)$  for diagonalizável.

iii) Caso  $a = 1$ : Usando a equação  $\cos(2\pi\lambda) = a = 1$ , deduzimos que a frequência  $\lambda = N$ , onde  $N$  é um número inteiro. Isso significa que temos uma ressonância básica simples. Nesse caso,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ . A questão da estabilidade, nesse caso, está relacionada ao fato de a matriz  $X(2\pi)$  ser reduzível à forma diagonal ou não. Em outras palavras, se os divisores elementares para essas raízes forem simples (ou seja, a matriz  $X(2\pi)$  for diagonalizável), então o sistema linear é estável. Se os divisores elementares não forem simples (ou seja, a matriz  $X(2\pi)$  não for diagonalizável), então o sistema linear (2.22) é instável.

iv) Caso  $a = -1$ : Nesse caso,  $\cos(2\pi\lambda) = a = -1$ , ou seja,  $2\lambda = 2N + 1$ , onde  $N$  é um número inteiro. A equação característica (2.36) possui uma raiz dupla  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ . Novamente, o sistema (2.22) é estável se a matriz  $X(2\pi)$  for reduzível à forma diagonal e instável caso contrário.

Nos três últimos casos, caracterizados pela condição  $|a| \leq 1$ , a solução precisa do problema de estabilidade requer a análise das equações não lineares do problema perturbado.

**Observação 2.6.1.** *Ao realizar cálculos em um problema específico de mecânica ou física, pode ser conveniente levar em consideração as seguintes observações sobre os valores numéricos das entradas da matriz  $X(2\pi)$ .*

*Na região de estabilidade do sistema linear, onde  $|a| < 1$ , podemos observar que o produto  $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)$  é sempre diferente de zero. Isso ocorre porque a condição  $|a| < 1$  e a equação (2.35) são incompatíveis.*

*Se  $x_{12}(2\pi) = x_{21}(2\pi) = 0$ , então pela equação (2.35),  $x_{11}x_{22} = 1$ , daí a matriz  $X(2\pi)$  tem as formas diagonais:*

*Para  $a = 1$*

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Para  $a = -1$*

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se para  $|a| = 1$  a matriz  $X(2\pi)$  não ter forma diagonal, nem ser redutível a uma, então  $x_{12}(2\pi)$  e  $x_{21}(2\pi)$  não podem ser ambas zero. Logo, Temos três casos,

a)  $x_{12}(2\pi) \neq 0, x_{21}(2\pi) = 0$ ;

b)  $x_{12}(2\pi) = 0, x_{21}(2\pi) \neq 0$ ;

c)  $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) < 0$ .

Os dois primeiros casos seguem do fato da matriz  $X(2\pi)$  não ser redutível à forma diagonal. Para verificarmos o terceiro caso, façamos

$$\rho^2 - (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))\rho + (x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0,$$

consequentemente,

$$\Delta = (x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x_{11}(2\pi)x_{22}(2\pi) - x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)) = 0,$$

donde segue que

$$(x_{11}(2\pi) - x_{22}(2\pi))^2 = -4x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi),$$

equação esta que é equivalente a c), como queríamos concluir.

Vejamos um exemplo do caso c) abordado anteriormente.

**Exemplo 2.6.2.** Consideremos um sistema com função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4\pi}[(2 \cos(t) + \sin(t))x_1 + (\cos(t) - 2 \sin(t))x_2]^2.$$

A matriz fundamental é dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{t}{\pi}(\cos(t) - 2 \sin(t)) & \sin(t) + \frac{t}{2\pi}(\cos(t) - 2 \sin(t)) \\ -\sin(t) - \frac{t}{\pi}(2 \cos(t) + \sin(t)) & \cos(t) - \frac{t}{2\pi}(2 \cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,  $f(\rho) = \det(X(2\pi - \rho I_2)) = 0$  é equivalente a  $\rho^2 - 2\rho + 1 = 0$ . Assim,  $a = 1, \rho_1 = \rho_2 = 1$  e como o posto da matriz  $X(2\pi) - I$  é igual a um, a matriz  $X(2\pi)$  não pode ser diagonalizável.

## 2.6.2 Normalização

Vamos construir a transformação que normaliza o sistema (2.22) no caso que o sistema tem um grau de liberdade ( $n = 1$ ). A construção desta transformação depende de três casos,  $|a| < 1, a = 1$  e  $a = -1$ , estes casos descritos são descritos no livro do Markeev [39].

Consideremos o caso em que  $|a| < 1$ . Vamos calcular o autovetor  $v$  da matriz  $X(2\pi)$  associado ao multiplicador característico  $\rho_1 = e^{i2\pi\lambda} = \cos(2\pi\lambda) + i \sin(2\pi\lambda)$ . Para isso, façamos:

$$\begin{pmatrix} x_{11}(2\pi) - \rho_1 & x_{12}(2\pi) \\ x_{21}(2\pi) & x_{22}(2\pi) - \rho_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i \sin(2\pi\lambda))v_1 + x_{12}(2\pi)v_2 = 0 \\ x_{21}(2\pi)v_1 + (x_{22}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i \sin(2\pi\lambda))v_2 = 0 \end{cases}.$$

Donde obtemos,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{12}(2\pi) \\ x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) - i \sin(2\pi\lambda) \end{pmatrix} = r + is,$$

com

$$r = \begin{pmatrix} -x_{12}(2\pi) \\ x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2\pi\lambda) \end{pmatrix}.$$

Dentro da região de estabilidade do sistema, onde  $|a| < 1$ , a transformação normalizadora pode ser obtida por meio do algoritmo descrito anteriormente. Para facilitar a compreensão, utilizaremos a seguinte notação:

$$\nu = \langle r, Js \rangle = x_{12}(2\pi) \sin(2\pi\lambda), \quad \delta = \text{sign } \nu, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{|\nu|}}. \quad (2.40)$$

Vimos que, a matriz da transformação normalizadora  $N$  é real, simplética,  $2\pi$ -periódica em  $t$  e pode ser escrita da forma  $N = X(t)PQ(t)$ , em que

$$P = \begin{pmatrix} -\kappa s & \delta \kappa r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \kappa x_{12}(2\pi) \\ \kappa \sin(2\pi\lambda) & \delta \kappa (x_{11}(2\pi) - \cos(2\pi\lambda)) \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

e

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\delta \sin(\lambda t) \\ \delta \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

O sistema normalizado terá a função Hamiltoniana da forma

$$H = \frac{1}{2} \delta \lambda (y_1^2 + y_2^2). \quad (2.43)$$

Para a normalização no limite da região de estabilidade  $|a| = 1$  consideraremos que a matriz fundamental  $X(t)$  avaliada em  $2\pi$  não é diagonalizável.

No caso  $a = 1$ , ocorre ressonância de primeira ordem. Como no caso anterior a matriz normalizadora  $N$  pode ser escrita como o produto de três matrizes

$$N = X(t)PQ(t),$$

onde neste caso,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número  $\delta$  e a matriz  $P$  são definidos por:

Se  $x_{12}(2\pi) \neq 0$ , então

$$\delta = \text{sign}(x_{12}(2\pi)), \quad P = \begin{pmatrix} \kappa_{12} & 0 \\ \delta \frac{x_{11}(2\pi)-1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \frac{1}{\kappa_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

e se  $x_{21}(2\pi) \neq 0$ , então

$$\delta = -\text{sign}(x_{21}(2\pi)), \quad P = \begin{pmatrix} \delta \frac{x_{11}(2\pi)-1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \frac{1}{\kappa_{12}} \\ -\kappa_{21} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Em ambos os casos acima,  $\kappa_{ij} = \sqrt{\frac{|x_{ij}(2\pi)|}{2\pi}}$ . Logo, o sistema (2.22) normalizado é dado pela função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\delta y_2^2, \quad \text{onde } \delta = \pm 1. \quad (2.46)$$

No caso  $a = -1$ , ocorre ressonância de segunda ordem, aqui o período da matriz de normalização é  $4\pi$  e não de  $2\pi$  como nos casos anteriores. A matriz  $N$  novamente é dada por  $N = X(t)PQ(t)$ , sendo necessário na definição do  $\delta$  e da matriz  $P$  mudar nas fórmulas a quantidade  $2\pi$  para  $4\pi$ . Os cálculos podem ser simplificados se notarmos que  $X(4\pi) = X^2(2\pi)$ . O número  $\delta$  e a matriz  $P$  são definidos por:

Se  $x_{12}(2\pi) \neq 0$ , então

$$\delta = -\text{sign}x_{12}(2\pi), \quad P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|x_{12}(2\pi)|}{2\pi}} & 0 \\ -\delta \frac{x_{22}(2\pi)+1}{\sqrt{2\pi|x_{12}(2\pi)|}} & \sqrt{\frac{2\pi}{|x_{12}(2\pi)|}} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

e se  $x_{21}(2\pi) \neq 0$ , então

$$\delta = \text{sign}x_{21}(2\pi), \quad P = \begin{pmatrix} -\delta \frac{x_{11}(2\pi)+1}{\sqrt{2\pi|x_{21}(2\pi)|}} & \sqrt{\frac{2\pi}{|x_{21}(2\pi)|}} \\ -\sqrt{\frac{|x_{21}(2\pi)|}{2\pi}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

e assim, o sistema (2.22) normalizado corresponde a função Hamiltoniana (2.46).

## Capítulo 3

# Método de Deprit-Hori

A teoria da perturbação, baseada no uso de colchetes de Poisson, apresentou vantagens em relação ao método convencional proposto por Hori em 1966 e Deprit em 1969. O método Deprit-Hori desempenha um papel significativo no contexto restrito de funções Hamiltonianas quadráticas, com o objetivo de encontrar uma função geradora  $\tau$ -periódica que conduza a uma transformação canônica linear  $\tau$ -periódica das coordenadas, transformando assim a função Hamiltoniana dependente do tempo em uma função Hamiltoniana autônoma. Para obter informações mais detalhadas sobre esta teoria, sugerimos consultar as referências [12], [39], [50] e [51].

A partir de agora, exploraremos o método Deprit-Hori para sistemas Hamiltonianos lineares, com o propósito de descrever a construção das curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade.

### 3.1 Algoritmo do Método de Depri-Hori

Consideremos o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.1)$$

com Hamiltoniano analítico em  $\epsilon$  de modo que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{X}^T = (X_1, \dots, X_n)$  são os vetores de posição e momento, respectivamente, e  $\epsilon$  é um parâmetro pequeno ( $0 < \epsilon \ll 1$ ).

Vamos agora construir a transformação canônica  $\mathbf{x}, \mathbf{X} \xrightarrow{D} \mathbf{y}, \mathbf{Y}$  que leva a função Hamiltoniana (3.2) na função Hamiltoniana normalizado

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} K_m(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \quad (3.3)$$

O método é baseado no uso da série de Lie e da transformação de Lie. A transformação canônica  $D$  surge como a solução  $\phi$  do sistema auxiliar de equações diferenciais dado abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\eta} &= \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta)}{\partial \mathbf{X}} & , & & \frac{d\mathbf{X}}{d\eta} &= -\frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{dt}{d\eta} &= 0 & , & & \frac{dR}{d\eta} &= \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \eta)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O sistema (3.4) está sujeito às condições iniciais (para  $\eta = 0$ )

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad t = t, \quad R = 0,$$

onde  $R = K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t; \epsilon) - H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t; \epsilon)$  é a função resto,  $\eta$  é um parâmetro pequeno variável ( $0 \leq \eta \leq \epsilon$ ) e  $W$  é a função geradora da transformação  $\phi$  dada por

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} W_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t). \quad (3.5)$$

A transformação  $\phi$  obtida por esse processo é uma transformação simplética próxima da identidade. O novo Hamiltoniano  $K$  as vezes é dito transformada de Lie de  $H$ .

Vamos expor a técnica usada para construir a função geradora (3.5) e consequentemente a função Hamiltoniana transformado (3.3). Usaremos as seguintes relações de recorrência encontradas no livro do Markeev [39]

$$K_0 = H_0, \quad (3.6)$$

$$K_m = H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^j K_{j,m-j}) - \frac{DW_m}{Dt}, \quad (3.7)$$

onde

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t} - L_m H_0, \quad (3.8)$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i}, \quad (3.9)$$

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}. \quad (3.10)$$

Ao se resolver as equações em (3.7) para encontrar, recursivamente,  $K_m$  e  $W_m$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) supõem-se que  $K_m$  é autônoma e  $W_m$   $\tau$ -periódica em  $t$ .

A notação  $L_i f$  usada acima é para o colchete de Poisson entre  $f$  e  $W_i$  isto é,

$$L_i f = \{f, W_i\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{Y}_i} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}_i} \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{y}_i} \right). \quad (3.11)$$

A partir das relações (3.6-3.11) , teremos as seguintes equações de aproximação:

Para  $m = 0$ ,

$$K_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t) = H_0(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, t). \quad (3.12)$$

Para  $m = 1$ , usaremos a equação (3.7), para obter os termos de primeiro grau com relação a  $\epsilon$ , obtendo

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 + \sum_{j=1}^{1-1} (C_{1-1}^{j-1} L_j H_{1-j} + C_{1-1}^j K_{j,1-j}) - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 + \sum_{j=1}^0 (C_0^{j-1} L_j H_{1-j} + C_0^j K_{j,1-j}) - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Impondo a função  $K_1$  os requisitos advindo do problema considerado, de (3.13) pode-se calcular  $W_1$ .

No caso em que  $m = 2$ , para obter os termos de ordem dois primeiramente encontraremos  $K_{1,1} = L_1 K_1$ . Analogamente para  $m = 1$  podemos obter  $W_2$  a partir da equação (3.7) que nos fornece a igualdade:

$$\begin{aligned} K_2 &= H_2 + \sum_{j=1}^{2-1} (C_{2-1}^{j-1} L_j H_{2-j} + C_{2-1}^j K_{j,2-j}) - \frac{DW_2}{Dt} \\ &= H_2 + \sum_{j=1}^1 (C_1^{j-1} L_j H_{2-j} + C_1^j K_{j,2-j}) - \frac{DW_2}{Dt} \\ &= H_2 + C_1^0 L_1 H_1 + C_1^1 K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt} \\ &= H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para  $m = 3$ , inicialmente devemos determinar as funções  $K_{1,2} = L_1 K_2$  e  $K_{2,1} = L_2 K_1 - L_1 K_{1,1}$ , e assim podemos obter as funções  $K_3$  e  $W_3$  pela equação,

$$\begin{aligned} K_3 &= H_3 + \sum_{j=1}^2 (C_2^{j-1} L_j H_{3-j} + C_2^j K_{j,3-j}) - \frac{DW_3}{Dt} \\ &= H_3 + C_2^0 L_1 H_2 + C_2^1 K_{1,2} + C_2^1 L_2 H_1 + C_2^2 K_{2,1} - \frac{DW_3}{Dt} \\ &= H_3 + L_1 H_2 + 2K_{1,2} + 2L_2 H_1 + K_{2,1} - \frac{DW_3}{Dt}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

O procedimento para construir as expansões (3.5) e (3.3) (para  $\eta = \epsilon$ ) pode ser continuado. Vamos escrever as relações explícitas necessárias para obter essas expansões até o quinto grau em  $\epsilon$ .

Para  $m = 4$ ,

$$K_4 = H_4 + L_1 H_3 + 3K_{1,3} + 3L_2 H_2 + 3K_{2,2} + 3L_3 H_1 + K_{3,1} - \frac{DW_4}{Dt}, \quad (3.16)$$

onde

$$K_{1,3} = L_1 K_3,$$

$$K_{2,2} = L_2 K_2 - L_1 K_{1,2},$$

$$K_{3,1} = L_3 K_1 - L_1 K_{2,1} - 2L_2 K_{1,1}.$$

Para  $m = 5$ ,

$$\begin{aligned} K_5 &= H_5 + L_1 H_4 + 4K_{1,4} + 4L_2 H_3 + 6K_{2,3} + 6L_3 H_2 + 4K_{3,2} \\ &+ 4L_4 H_1 + K_{4,1} - \frac{DW_5}{Dt}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$K_{1,4} = L_1 K_4,$$

$$K_{2,3} = L_2 K_3 - L_1 K_{1,3},$$

$$K_{3,2} = L_3 K_2 - L_1 K_{2,2} - 2L_2 K_{1,2},$$

$$K_{4,1} = L_4 K_1 - L_1 K_{3,1} - 3L_2 K_{2,1} - 3L_3 K_{1,1}.$$

Seguindo esse processo construtivo e iterativo, podemos estabelecer relações para qualquer  $m$ , ou seja, podemos obter  $K_m$  e  $W_m$  para todos os valores de  $m$ .

Na referência de Markeev [39], também encontramos as expressões para as transformações canônicas  $D$ , no início desta seção, em forma de séries de  $\epsilon$ . Essas séries têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{y} + \epsilon \frac{DW_1}{DY} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left[ \frac{DW_2}{DY} + \left\langle \frac{DW_1}{DY}, W_1 \right\rangle \right] + \dots \\ \mathbf{X} &= \mathbf{Y} + \epsilon \frac{DW_1}{DY} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left[ \frac{DW_2}{Dy} + \left\langle \frac{DW_1}{Dy}, W_1 \right\rangle \right] + \dots \end{aligned}$$

### 3.2 Construção da fronteira das regiões de estabilidade e instabilidade pelo método de Deprit-Hori em sistemas com um grau de liberdade.

Suponha um sistema Hamiltoniano linear com um grau de liberdade que depende de um ou mais parâmetros, e seja tal que as raízes da equação característica possuam módulo

maior do que um. Além disso, suponha que a função Hamiltoniana seja contínua,  $2\pi$ -periódica em  $t$ , analítica em relação ao pequeno parâmetro  $\epsilon$ , e que, para  $\epsilon = 0$ , descreva uma frequência  $\omega$ . Em outras palavras, estamos assumindo que a função Hamiltoniana tem a seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2}\omega(q^2 + p^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m, \quad H_m = \sum_{\nu+\mu=2} h_{\nu\mu}^{(m)}(t, a) q^\nu p^\mu, \quad (3.18)$$

onde  $\omega = \omega(a)$  e os  $H_m = H_m(q, p, t, a)$ , ou seja,  $\omega$  e  $H$  dependem de um parâmetro  $a$ . Suponhamos ainda que para  $a = a_0$  a frequência do sistema não perturbado (para  $\epsilon = 0$ ) é igual a um inteiro ou um meio inteiro e satisfaça a relação de ressonância  $2\omega = N \neq 0$  (abordaremos o caso em que  $\omega = 0$  mais a frente), onde  $N$  é um inteiro.

A fim de construir a equação da curva fronteira da região de estabilidade/ instabilidade no plano dos parâmetros  $a, \epsilon$ , escreveremos o parâmetro  $a$  como uma série de potência em  $\epsilon$

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \epsilon^3 a_3 + \dots \quad (3.19)$$

Tais curvas emanarão do ponto  $a = a_0$  no eixo  $\epsilon = 0$ . O valor  $a_0$ , como falamos acima, é tal que  $2\omega(a_0) = N$ .

Ao substituirmos a expressão (3.19) na função Hamiltoniana (3.18) e em seguida aplicarmos a rotação de um ângulo  $\omega$  (se necessário for) dada pela transformação

$$q = \cos(\omega t)x + \sin(\omega t)X, \quad p = -\sin(\omega t)x + \cos(\omega t)X, \quad (3.20)$$

E, dessa maneira, estamos prontos para iniciar o processo de Deprit-Hori. Vale ressaltar que essa rotação pode afetar a periodicidade do Hamiltoniano. Nesse caso, a função Hamiltoniana será periódica somente se a frequência  $\omega(a_0)$  satisfizer uma relação de ressonância, como por exemplo,  $2\omega(a_0) = N$ . A rotação é aplicada antes de iniciar o processo de Deprit-Hori com o objetivo de simplificar ainda mais o Hamiltoniano  $H_0$ .

Aplicando a rotação (3.20), usando a Proposição 6.3.36 e o Exemplo 6.3.40, o novo Hamiltoniano terá  $H_0 = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} H(x, X, t, a, \epsilon) &= H(q, p, t, a, \epsilon) + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &= \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x, X, t, a) - \frac{\omega}{2}(x^2 + X^2) \\ &= \frac{\omega}{2}((\cos(\omega t)x + \sin(\omega t)X)^2 + (-\sin(\omega t)x + \cos(\omega t)X)^2) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x, X, t, a) - \frac{\omega}{2}(x^2 + X^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$H(x, X, t, a, \epsilon) = \epsilon H_1(x, X, t, a) + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2(x, X, t, a) + \frac{\epsilon^3}{3!} H_3(x, X, t, a) \cdots$$

Pelo fato de  $H_0 = 0$  a expressão (3.8) torna-se mais simples, assumindo a forma

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t}.$$

Utilizando as equações de aproximação descritas anteriormente, obtemos

$$K_0 \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 - \frac{\partial W_1}{\partial t} + L_1 H_0 \\ &= H_1 - \frac{\partial W_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dividindo por  $2\pi$  ambos os lados da última equação e integrando de  $0$  à  $2\pi$ , temos

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(y, Y, t) dt \quad , \quad W_1 = \int (H_1 - K_1) dt. \quad (3.21)$$

Na aproximação de segunda ordem, teremos

$$K_2 = H_2 + L_1 H_1 + K_{1,1} - \frac{DW_2}{Dt}, \quad K_{1,1} = L_1 K_1,$$

e novamente de acordo com as hipóteses sobre as funções  $K$  e  $W$  ( $K$  autônoma e  $W$   $2\pi$ -periódica), lembrando ainda que as funções  $H_m$  também são  $2\pi$ -periódicas em  $t$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), obtemos

$$K_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H_2 + L_1 H_1 + L_1 K_1) dt, \quad W_2 = \int (H_2 + L_1 H_1 + L_1 K_1 - K_2) dt,$$

Seguindo com esse processo para  $m \rightarrow \infty$  obtemos o Hamiltoniano transformado da forma

$$K = K_0 + \epsilon K_1 + \dots = k_{20} y^2 + k_{11} yY + k_{02} Y^2, \quad (3.22)$$

onde  $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} k_{ij}^{(m)}$ ,  $k_{ij}^{(m)}$  é constante e depende dos coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

Do Hamiltoniano (3.22) segue que

$$JK = \begin{pmatrix} k_{11} & 2k_{02} \\ -2k_{20} & -k_{11} \end{pmatrix},$$

e a equação característica é dada por

$$\det(JK - \lambda I) = 0 \text{ ou equivalente,}$$

$$\lambda^2 - (k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}) = 0, \text{ donde obtemos}$$

$$\lambda^2 = k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}.$$

Desta forma, como temos instabilidade para raízes com parte real positiva, temos que a região de estabilidade é definida pela inequação

$$k_{11}^2 \leq 4k_{20}k_{02},$$

e sendo assim, concluímos que a fronteira da região de estabilidade/instabilidade é dada pela equação

$$k_{11}^2 = 4k_{20}k_{02}. \quad (3.23)$$

Como

$$k_{ij} = \epsilon k_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2!} \epsilon^2 k_{ij}^{(2)} + \frac{1}{3!} \epsilon^3 k_{ij}^{(3)} + \dots,$$

teremos a partir da equação (3.23) que

$$\begin{aligned} \epsilon^2 k_{11}^{(1)2} + \frac{1}{2!} \epsilon^3 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} + \frac{1}{3!} \epsilon^4 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(3)} + \dots + \frac{1}{2!} \epsilon^3 k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} + \frac{1}{2!2!} \epsilon^4 k_{11}^{(2)2} + \dots = 4\epsilon^2 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)} + \\ \frac{4}{2!} \epsilon^3 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + \frac{4}{3!} \epsilon^4 k_{20}^{(1)} k_{02}^{(3)} + \dots + \frac{4}{2!} \epsilon^3 k_{02}^{(1)} k_{20}^{(2)} + \frac{4}{2!2!} \epsilon^4 k_{20}^{(2)} k_{02}^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de mesmo grau em  $\epsilon$  na mesma equação acima, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} k_{11}^{(1)2} &= 4k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)}, \\ k_{11}^{(1)} k_{11}^{(2)} &= 2(k_{20}^{(1)} k_{02}^{(2)} + k_{20}^{(2)} k_{02}^{(1)}), \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

e é através dessas sucessivas igualdades que calculamos os coeficientes  $a_1, a_2, \dots$  da expansão (3.19) das curvas de fronteira da região de estabilidade/instabilidade.

De (3.21) obtemos

$$K_1 = k_{20}^{(1)} y^2 + k_{11}^{(1)} yY + k_{02}^{(1)} Y^2,$$

onde os coeficientes  $k_{ij}$  são da forma  $u_{ij}a_1 + v_{ij}$ . Sendo assim, deduzimos da primeira equação da sequência acima que existem dois valores para  $a_1$ , ou seja, a equação para  $a_1$  é quadrática. De fato,

$$k_{11}^{(1)2} = 4k_{20}^{(1)} k_{02}^{(1)}$$

$$(u_{11}a_1 + v_{11})^2 = 4(u_{20}a_1 + v_{20})(u_{02}a_1 + v_{02})$$

$$(u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02})a_1^2 + (2u_{11}v_{11} - 4u_{20}v_{02} - 4v_{20}u_{02})a_1 + (v_{11}^2 - 4v_{02}v_{20}) = 0.$$

Assim a última equação assume a forma,

$$Aa_1^2 + Ba_1 + C = 0,$$

onde  $A = u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02}$ ,  $B = 2u_{11}v_{11} - 4u_{20}v_{02} - 4v_{20}u_{02}$  e  $C = v_{11}^2 - 4v_{02}v_{20}$ .

Portanto, uma vez que cada  $H_k$  depende linearmente de  $a_k$ , para cada valor encontrado de  $a_1$ , podemos determinar de forma única os coeficientes  $a_2, a_3$ , etc. Dessa maneira, podemos concluir que existem duas curvas que delimitam as regiões de estabilidade/instabilidade que partem do ponto  $(a_0, 0)$  no plano dos parâmetros  $a\epsilon$ .

Agora vamos considerar um caso particular em que a frequência de oscilação do sistema não perturbado ( $\epsilon = 0$ ) se torna zero ( $\omega = 0$ ) para certos valores do parâmetro  $a$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que o Hamiltoniano do sistema não perturbado,  $H_0$ , possui a seguinte forma:

$$H_0 = \frac{1}{2}(X^2 + \omega^2(a)x^2),$$

e além disso,  $\omega(a_0) = 0$  e  $\frac{d\omega^2}{da} \neq 0$  para  $a = a_0$ .

O limite da região de instabilidade, que emanam de um ponto  $a = a_0$  o eixo  $\epsilon = 0$  será da forma (3.19). Em seguida, para o limite ser determinado precisamos considerar a seguinte expressão

$$\omega^2 = \epsilon \frac{d\omega^2}{da} a_1 + \epsilon^2 \left( \frac{d\omega^2}{da} a_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega^2}{da^2} a_1^2 \right) + \dots \quad (3.24)$$

Substituindo as expressões (3.19), (3.24) na função Hamiltoniana estudado e o expandindo como uma série de potência em  $\epsilon$ , obtemos

$$H = \frac{1}{2}X^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(x, X, t), \quad (3.25)$$

onde  $H_m$  é uma forma quadrática com coeficientes  $2\pi$ -periódicos em  $t$  e depende de  $a_i$  ( $i \leq m$ ). Por outro lado, em relação ao termo  $a_m$  a dependência de  $H_m$  é linear. Procuraremos a função geradora  $W$  de período igual a  $2\pi$  tal que o Hamiltoniano transformado (3.3) não dependa do tempo  $t$ .

Dessa forma para  $\epsilon = 0$  temos

$$K_0 = \frac{1}{2}Y^2. \quad (3.26)$$

Para a primeira aproximação temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} K_1 &= H_1 - \frac{DW_1}{Dt} \\ &= H_1 - Y \frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial W_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Estamos considerando aqui a seguinte rotação para  $H_1$ .

$$H_1 = h_{20}^{(1)} y^2 + h_{11}^{(1)} yY + h_{02}^{(1)}$$

e análogas notações para  $K_1$  e  $W_1$ . Então, comparando os coeficientes de (3.27), usando igualdade de polinômios, obtemos as relações

$$k_{20}^{(1)} = h_{20}^{(1)} - \frac{dw_{20}^{(1)}}{dt}, \quad (3.28)$$

$$k_{11}^{(1)} = h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)} - \frac{dw_{11}^{(1)}}{dt}, \quad (3.29)$$

$$k_{02}^{(1)} = h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)} - \frac{dw_{02}^{(1)}}{dt}. \quad (3.30)$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{20}^{(1)} dt, & w_{20}^{(1)} &= \int (h_{20}^{(1)} - k_{20}^{(1)}) dt \\ k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)}) dt, & w_{11}^{(1)} &= \int (h_{11}^{(1)} - 2w_{20}^{(1)} - k_{11}^{(1)}) dt \\ k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)}) dt, & w_{20}^{(1)} &= \int (h_{20}^{(1)} - w_{11}^{(1)} - k_{02}^{(1)}) dt. \end{aligned}$$

Analogamente obtemos as demais aproximações e no infinito o Hamiltoniano transformado tem a forma

$$K = k_{20}y^2 + k_{11}yY + \frac{1}{2}(1 + 2k_{02})Y^2, \quad (3.31)$$

onde  $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} k_{ij}^{(m)}$ , com  $k_{ij}^{(m)}$  constante. Portanto o limite da região de estabilidade/instabilidade neste caso é definido pela condição

$$k_{11}^2 = 2k_{20}(1 + 2k_{02}). \quad (3.32)$$

**Observação 3.2.1.** *Se  $H_0$  não depende do tempo, os números  $\pm i\omega_k$  são os autovalores de  $JD^2H_0$ . Caso  $H_0$  dependa do tempo, então os  $\pm i\omega_k$  são os expoentes característicos do sistema em questão.*

Em geral, considere  $\epsilon > 0$ , os autovalores  $\pm i\omega_k$  não necessariamente distintos, ou seja, multiplicadores com módulo 1 e que não há multiplicadores múltiplos

$$\omega_k \pm \omega_l \neq N. \quad (3.33)$$

Logo, pela continuidade dos multiplicadores característicos em relação a  $\epsilon$ , segue que a condição dada por (3.33) também valerá para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Além disso, para  $0 < \epsilon \ll 1$  esses multiplicadores,  $\rho_j = e^{2\pi i\omega_j}$ , não podem ter módulo maior que 1.

Se para  $\epsilon = 0$  existe ressonância,  $\omega_k \pm \omega_l = N$ , então para  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeno pode ocorrer dos multiplicadores terem módulo maior do que 1 ou não, ou seja, pode ocorrer estabilidade ou instabilidade.

O Teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii vem nos dá condições necessárias e suficientes para a o conceito de estabilidade.

Podemos resumir o critério da estabilidade do Krein-Gel'fand-Lidskii da seguinte forma. Se pelo menos uma das relações (3.33) não é satisfeita, então sempre é possível selecionar  $H_1, H_2, \dots$  do Hamiltoniano de tal maneira que o sistema linear correspondente é instável para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Caso a soma das quantidades  $\omega_k$  e  $\omega_l$  distintas não é um inteiro, então para  $\epsilon$  suficientemente pequeno o sistema Hamiltoniano linear é estável para qualquer escolha de  $H_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

## Capítulo 4

# Equação de Mathieu

As equações de Mathieu foram originalmente introduzidas por Émile Léonard Mathieu (1835-1890) durante seu estudo das oscilações em vigas elípticas vibrantes. Essas equações possuem diversas aplicações em campos das ciências físicas, incluindo óptica, mecânica celeste, mecânica quântica e relatividade geral. Elas surgem frequentemente em problemas envolvendo movimento periódico, bem como na análise de problemas de valor de contorno de equações diferenciais parciais com simetria elíptica.

Neste capítulo, começaremos por utilizar a seção 13.6 do livro de referência de Arfken [3] para apresentar uma formulação matemática do problema proposto por Mathieu. Em seguida, com base na referência de Markeev [39], abordaremos a aplicação do método de Deprit-Hori com o objetivo de construir as curvas fronteira que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade relacionadas à equação de Mathieu.

### 4.1 Formulação Matemática da Equação de Mathieu

Quando nos deparamos com equações diferenciais parciais, como as equações de Laplace, Poisson e a equação da onda, que são resolvidas com condições de contorno cilíndricas ou esféricas, utilizamos o método de separação de variáveis em coordenadas polares. Nesse método, buscamos soluções radiais e soluções angulares para os problemas associados às equações diferenciais parciais. Quando a condição de contorno assume uma forma elíptica em problemas cilíndricos, surgem as chamadas funções cilíndricas elípticas. Essas funções englobam tanto as soluções angulares quanto as soluções radiais para os problemas, sendo assim denominadas funções cilíndricas elípticas.

Consideremos as coordenadas cilíndricas elípticas  $\xi, \eta, z$ , que são adequadas para condições de contorno elípticas. As relações entre essas coordenadas e as coordenadas

retangulares são dadas por:

$$\begin{cases} x = c \cosh \xi \cos \eta \\ y = c \sinh \xi \sin \eta \\ z = z \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $0 \leq \xi < \infty$  e  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ , em que o parâmetro  $2c > 0$  é a distância entre os focos das elipses confocais descritas por essas coordenadas. (Ver figura 4.1).

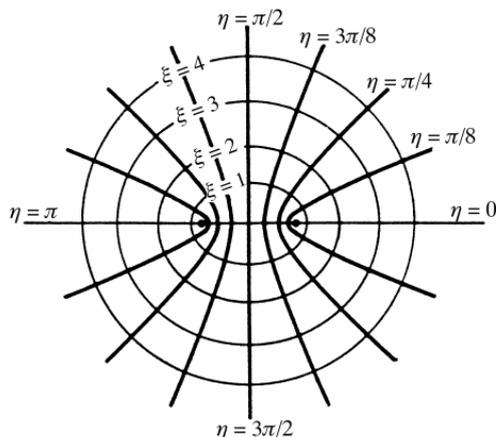


Figura 4.1: Coordenadas elípticas  $\xi, \eta$ . Figura retirada da referência [3]

Queremos mostrar que no limite  $c \rightarrow 0$  os focos das elipses se acumulam como o centro de círculos. Trabalhamos principalmente com coordenada  $z$  constante, digamos,  $z = 0$ . De fato, para a variável radial fixa  $\xi$  constante podemos eliminar a variável angular  $\eta$ , elevando ao quadrado a primeira equação em (4.1) e depois dividindo por  $(c \cosh \xi)^2$  e desta forma obtemos a equação,

$$\frac{x^2}{(c \cosh \xi)^2} = (\cos \eta)^2. \quad (4.2)$$

De forma análoga, a partir da segunda equação em (4.1) obtemos,

$$\frac{y^2}{(c \sinh \xi)^2} = (\sin \eta)^2. \quad (4.3)$$

E assim,

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad (4.4)$$

descreve elipses confocais centradas na origem do plano  $xy$  com semi-eixos maiores e menores

$$a = c \cosh \xi, \quad b = c \sinh \xi, \quad (4.5)$$

respectivamente. Uma vez que,

$$\frac{b}{a} = \tanh \xi = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \xi}} \equiv \sqrt{1 - e^2}, \quad (4.6)$$

a excentricidade  $e = \frac{1}{\cosh \xi}$  da elipse ( $0 \leq e \leq 1$ ), e a distância entre os focos  $2ae = 2c$  da uma interpretação geométrica da coordenada radial  $\xi$  e do parâmetro  $c$ . A medida que  $\xi \rightarrow \infty$  e  $e \rightarrow 0$  as elipses se tornam círculos, como podemos ver na figura 4.1. Conforme  $\xi \rightarrow 0$ , a elipse se torna mais alongada, até que, em  $\xi = 0$ , ela se reduz ao segmento de reta entre os focos.

Quando  $\eta$  é uma constante, eliminamos  $\xi$  para encontrar hipérbolas confocais

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1, \quad (4.7)$$

que também estão representadas na figura 4.1.

O estudo do tambor elíptico é um caso em que as funções de Mathieu aparecem naturalmente, como veremos nas discussões que seguem. Consideremos vibrações da camada do tambor elíptico com deslocamento vertical  $z = z(x, y, t)$ , governado pela equação da onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (4.8)$$

onde,

$$z = W(x, y) \exp^{i\omega t}, \quad (4.9)$$

representa o deslocamento do ponto  $(x, y)$  em um instante  $t$ ,  $W(x, y)$  descreve os modos de vibrações e  $\omega$  a frequência dos modos. Além disso, a velocidade ao quadrado  $v^2 = T/\rho$  com a tensão  $T$  e a densidade de massa  $\rho$  são consideradas constantes.

Nosso objetivo a partir deste momento é resolver a equação (4.8). Para isto, vamos derivar a equação (4.9) duas vezes em relação à  $x$ ,  $y$  e  $t$ , respectivamente, obtendo as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \exp^{i\omega t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \exp^{i\omega t} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\omega^2 \exp^{i\omega t} W. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ao substituímos as equações de (4.10), em (4.8) e como  $\iota^2 = -1$ , obtemos

$$\exp^{i\omega t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \exp^{i\omega t} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \exp^{i\omega t} W. \quad (4.11)$$

Dividindo ambos os lados de (4.11) por  $\exp^{i\omega t}$ , encontramos a equação,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\chi^2 W, \quad \text{onde } \chi = \frac{\omega}{v}, \quad (4.12)$$

Essa equação é conhecida como a equação de Helmholtz<sup>1</sup>.

Para realizar a transformação da equação (4.12) para coordenadas elípticas, é necessário calcular o laplaciano utilizando as coordenadas generalizadas. Com esse objetivo, calculamos as derivadas parciais de  $W$  em relação a  $\xi$  e  $\eta$ , resultando em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \xi} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}. \end{cases}\tag{4.14}$$

Substituindo as equações de (4.1) na equações em (4.14) temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (c \sinh \xi \cos \eta)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} (c \cosh \xi \cos \eta) \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} (c \cosh \xi \sin \eta)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} (c \sinh \xi \sin \eta), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (c \cosh \xi \sin \eta)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} (-c \cosh \xi \cos \eta) \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} (c \sinh \xi \cos \eta)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} (-c \sinh \xi \sin \eta).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Somando as equações apresentadas em (4.15),

$$\begin{aligned}\nabla^2 W(\xi, \eta) &= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (c \sinh \xi \cos \eta)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (c \cosh \xi \sin \eta)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} (c \cosh \xi \sin \eta)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} (c \sinh \xi \cos \eta)^2 \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} [(c \sinh \xi \cos \eta)^2 + (c \cosh \xi \sin \eta)^2] + \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} [(c \cosh \xi \sin \eta)^2 + (c \sinh \xi \cos \eta)^2] \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} [c^2 \sinh^2 \xi + c^2 \sin^2 \eta] + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} [c^2 \sin^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi] \\ &= (c^2 \sin^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ &= (c^2 \sin^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi) \nabla^2 W(x, y).\end{aligned}$$

<sup>1</sup>A equação de Helmholtz é uma EDP que modela fenômenos de propagação e dispersão de ondas harmônicas temporais, como ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

Logo,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = (c^2 \sin^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (4.16)$$

Pela equação de Helmholtz (4.12), juntamente com a equação (4.16), tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} &= -c^2 \chi^2 (\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi) W, \text{ ou melhor,} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + c^2 \chi^2 (\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi) W &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Utilizando certas relações trigonométricas e relações de funções hiperbólicas, a equação (4.17) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + c^2 \chi^2 \left[ \left( \frac{1 - \cos 2\eta}{2} \right) + \left( \frac{\cosh 2\xi - 1}{2} \right) \right] W &= 0, \text{ ou equivalentemente,} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{c^2 \chi^2}{2} [\cosh 2\xi - \cos 2\eta] W &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilizando o método de separação de variáveis  $W(\xi, \eta) = R(\xi)\Phi(\eta)$  a equação acima assume a forma,

$$\Phi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + R \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{c^2 \chi^2}{2} [\cosh 2\xi - \cos 2\eta] R(\xi)\Phi(\eta) = 0, \quad (4.19)$$

Divida ambos os lados de (4.19) por  $R(\xi)\Phi(\eta)$ , obtemos

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{c^2 \chi^2}{2} [\cosh 2\xi - \cos 2\eta] = 0,$$

tomando,  $u = \frac{c^2 \chi^2}{4}$  teremos,

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + 2u \cosh 2\xi = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + 2u \cos 2\eta. \quad (4.20)$$

Para satisfazer (4.20), as equações devem se igual a uma constante, denominada, *constante de separação*. Logo

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + 2u \cosh 2\xi = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + 2u \cos 2\eta = \alpha,$$

onde,  $\alpha$  é uma *constante de separação*.

Temos finalmente as seguintes equações, decorrente dessa separação de variáveis

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + 2u \cosh 2\xi = \alpha, \quad (4.21)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + 2u \cos 2\eta = \alpha. \quad (4.22)$$

Multiplique (4.21) por  $R$  e colocando-o em evidência, e a equação (4.22) multiplicada por  $-\Phi$ . Dessa maneira, chegamos as equações,

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + [-\alpha + 2u \cosh 2\xi]R = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + [\alpha - 2u \cos 2\eta]\Phi = 0 \quad (4.24)$$

As equações (4.23) e (4.24) são conhecidas como *equação radial* e *equação angular* de Mathieu, respectivamente. Fazendo a substituição de variável  $\xi = \imath\eta$ , a equação (4.23) fica no mesmo formato da equação ordinária de Mathieu dada pela (4.24).

## 4.2 Regiões de estabilidade e instabilidade

A partir da equação (4.24), fazemos as devidas substituições,  $q = 4\Phi$ ,  $t = 2\eta$  e  $\beta = -2u$ , e então obtemos a equação de Mathieu apresentada em [39], uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes periódicos na forma:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + (\alpha + \beta \cos(t))q = 0, \quad (4.25)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. A expressão (4.25) será a base de nossos estudos adiante.

Note que a equação diferencial (4.25) pode ser escrita como um sistema de duas equações de primeira ordem. De fato, considere  $z = (q, p)$  tal que,

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = q'' = -(\alpha + \beta \cos(t))q, \end{cases}$$

e assim, obtemos o seguinte sistema Hamiltoniano linear,

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \cos(t)) & 0 \end{pmatrix}}_{JS} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

onde,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é naturalmente uma matriz simplética, cuja função Hamiltoniana é da forma,

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta \cos(t))q^2. \quad (4.27)$$

Consideremos  $\alpha$  um parâmetro descrito pela expressão,

$$\alpha = \alpha_0 + \beta\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + \beta^3\alpha_3 + O(\beta^4), \quad (4.28)$$

onde os  $\alpha_j$ , com  $j \geq 0$  são coeficientes a determinar. Substituindo (4.28) na função Hamiltoniana (4.27), temos,

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + \beta^3\alpha_3 + O(\beta^4) + \beta \cos t)q^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 q^2}_{H_0} + \underbrace{\frac{\beta}{1!} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \cos t)q^2}_{H_1} + \underbrace{\frac{\beta^2}{2!} \alpha_2 q^2}_{H_2} + \underbrace{\frac{\beta^3}{3!} 3\alpha_3 q^2}_{H_3} \\ &\quad + O(\beta^4). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Realizaremos a normalização do  $H_0$ , com base no algoritmo apresentado na seção 2.5 do Capítulo 2. Com este intuito, vamos obter os autovetores da matriz  $J\hat{S}$  associados ao  $H_0$  (parte não perturbada do Hamiltoniano 4.29) e da matriz de normalização  $N$ . Sabemos que,

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 q^2,$$

consequentemente,

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação característica  $\det(J\hat{S} - \lambda I) = 0$  é equivalente a

$$\lambda^2 + \alpha_0 = 0.$$

Portanto,  $\lambda = \pm im$ , onde  $m = \sqrt{\alpha_0} > 0$ . Calculando o autovetor associado ao autovalor  $\lambda = im$ , teremos

$$J\hat{S}v = imv,$$

daí,

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ im \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

Mas iremos usar a caracterização de autovetores de um grau de liberdade, vista no exemplo (2.3.1) e assim o autovetor será dado por,

$$v^* = r^* + is^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -m \end{pmatrix}.$$

Ambos satisfazem  $JSr^* = -ms^*$  e  $JSs^* = mr^*$ , onde  $r^*$  e  $s^*$  são a parte real e imaginária, respectivamente, do autovetor  $v^*$ . Tendo como base ainda o exemplo citado, temos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}\delta &= \text{sign}\langle r^*, Js^* \rangle = \text{sign}\sqrt{\alpha_0} = 1; \\ \kappa &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\alpha_0}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}; \\ -\kappa s^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\sqrt{\alpha_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix}; \\ \delta \kappa r^* &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\alpha_0}}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, a matriz  $N$  de normalização, é dada por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix},$$

e a transformação canônica será dada pela seguinte mudança de variáveis

$$q = -\frac{1}{\sqrt{m}}p_*, \quad p = \sqrt{m}q_*.$$

Realizando esta mudança na função Hamiltoniana (4.29), teremos,

$$\begin{aligned}H(q_*, p_*, t, \beta) &= \underbrace{\frac{1}{2}m(q_*^2 + p_*^2)}_{H_0^*} + \frac{\beta}{1!} \underbrace{\frac{1}{2m}(\alpha_1 + \cos t)p_*^2}_{H_1^*} + \frac{\beta^2}{2!} \underbrace{\frac{1}{m}\alpha_2 p_*^2}_{H_2^*} \\ &\quad + \frac{\beta^3}{3!} \underbrace{\frac{3}{m}\alpha_3 p_*^2}_{H_3^*} + O(\beta^4).\end{aligned}$$

Como  $m = \sqrt{\alpha_0}$ , então abordaremos o seguinte caso:

$$2m(\alpha_0) = 2\sqrt{\alpha_0} = n, \text{ isto é, } \alpha_0 = \frac{n^2}{4}, \text{ com } n = 1, 2, \dots$$

Desta forma, se  $n$  é um número par, segue que a transformação simplética (4.30) terá período igual a  $2\pi$ . Caso  $n$  ímpar, a transformação (4.30) será  $4\pi$ -periódica em  $t$ .

Introduzindo a mudança da forma,

$$\begin{aligned}q_* &= \cos(mt)x + \text{sen}(mt)X \\ p_* &= -\text{sen}(mt)x + \cos(mt)X,\end{aligned}\tag{4.30}$$

iremos, através da Proposição(6.3.36) e considerando o exemplo 6.3.40 com  $\omega = m$ , obter uma nova função Hamiltoniana em que o termo  $\frac{1}{2}m(x^2 + X^2)$  é eliminado, agora

nas variáveis  $x$ ,  $X$ , e função Hamiltoniana (4.30) assume a forma

$$\begin{aligned}
H(x, X, t, \beta) &= \beta \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) (\text{sen}^2(mt)x^2 \\
&\quad - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \frac{k! \alpha_k}{2m} (\text{sen}^2(mt)x^2 - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)xX \\
&\quad + \cos^2(mt)X^2),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
H'_0 &= 0 \\
H'_1 &= \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) (\text{sen}^2(mt)x^2 - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2) \\
H'_2 &= \frac{\alpha_2}{m} (\text{sen}^2(mt)x^2 - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2) \\
H'_3 &= \frac{3\alpha_3}{m} (\text{sen}^2(mt)x^2 - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)xX + \cos^2(mt)X^2) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

A seguir, aplicaremos o método de Deprit-Hori com o objetivo de encontrar a função Hamiltoniana normalizada, conforme apresentada em (3.3), e, assim, construir as curvas que delimitam as regiões de estabilidade paramétrica. É importante destacar que, neste capítulo, utilizamos o software Mathematica (ver apêndice) para realizar os cálculos apresentados aqui. Vamos considerar a expansão de  $\alpha$  na forma

$$\alpha = \frac{n^2}{4} + \alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta^2 + \alpha_3 \beta^3 + \alpha_4 \beta^4 + \alpha_5 \beta^5 + \alpha_6 \beta^6 + O(\beta^7), \tag{4.32}$$

e  $K$  a função Hamiltoniano independente do tempo. A função  $W$  será procurada de modo a ser  $2\pi$ -periódica em  $t$  no caso de  $n$  ser par e  $4\pi$ -periódica para  $n$  ímpar.

Para  $n = 1$  ( $\omega = \frac{1}{2}$ ), veremos que  $\alpha_0 = \frac{1}{4}$  e então, construiremos as curvas que emanam do ponto  $(\frac{1}{4}, 0)$  no plano  $\alpha$ ,  $\beta$ . Primeiramente, calculemos os  $K_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) conforme o método de Deprit-Hori, obtemos

$$\begin{aligned}
K_0 &= 0, \\
K_1 &= \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) (\text{sen}^2(mt)y^2 - 2 \text{sen}(mt) \cos(mt)yY + \cos^2(mt)Y^2) \\
&\quad - \frac{\partial W_1}{\partial t},
\end{aligned}$$

Considerando  $K_1 = k_{20}^{(1)}y^2 + k_{11}^{(1)}yY + k_{02}^{(1)}Y^2$ , temos,

$$\begin{aligned}
k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \text{sen}^2(mt) - \frac{dw_{20}^{(1)}}{dt}; \\
k_{11}^{(1)} &= -\frac{1}{m} (\alpha_1 + \cos(t)) \text{sen}(mt) \cos(mt) - \frac{dw_{11}^{(1)}}{dt}; \\
k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \cos^2(mt) - \frac{dw_{02}^{(1)}}{dt},
\end{aligned}$$

dividindo por  $4\pi$  e integrando ambos os lados de  $0$  à  $4\pi$ , temos,

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \operatorname{sen}^2(mt) dt = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4}; \\ k_{11}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} -\frac{1}{m} (\alpha_1 + \cos(t)) \operatorname{sen}(mt) \cos(mt) dt = 0; \\ k_{02}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \cos^2(mt) dt = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

temos ainda que,

$$\begin{aligned} w_{20}^{(1)} &= \int \left( \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \operatorname{sen}^2(mt) - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4} \right) dt; \\ w_{11}^{(1)} &= \int -\frac{1}{m} (\alpha_1 + \cos(t)) \operatorname{sen}(mt) \cos(mt) dt; \\ w_{02}^{(1)} &= \int \left( \frac{1}{2m} (\alpha_1 + \cos(t)) \cos^2(mt) - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4} \right) dt, \end{aligned}$$

e assim por diante até determinar o  $K_5$ .

Após encontrarmos as aproximações, escrevemos,

$$K = K_0 + \frac{\beta}{1!} K_1 + \frac{\beta^2}{2!} K_2 + \frac{\beta^3}{3!} K_3 + \frac{\beta^4}{4!} K_4 + \frac{\beta^5}{5!} K_5, \quad (4.33)$$

e em seguida o reescrevemos da forma,

$$K = k_{20}y^2 + k_{11}yY + k_{02}Y^2.$$

Usando a condição de fronteira (3.23) e igualando os coeficientes até a sexta potência de  $\beta$ , obtemos as seguintes equações,

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 - \frac{1}{4} &= 0; \\ 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_1 - 2\alpha_1^3 &= 0; \\ 5\alpha_1^4 + 2\alpha_3\alpha_1 - \frac{5}{2}\alpha_1^2 + \frac{15}{64} - 6\alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{3}{4}\alpha_2 &= 0; \\ -5\alpha_1\alpha_2 - 14\alpha_1^5 - \frac{245}{192}\alpha_1 + 2\alpha_2\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_3 + \frac{35}{4}\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_4 + 20\alpha_2\alpha_1^3 - 6\alpha_1\alpha_2^2 - 6\alpha_1^2\alpha_3 &= 0; \\ \frac{3871}{576}\alpha_1^2 - 12\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_5 + 20\alpha_1^3\alpha_3 - 70\alpha_1^4\alpha_2 - 6\alpha_1^2\alpha_4 - \frac{63}{2}\alpha_1^4 + 2\alpha_2\alpha_4 - \frac{5}{2}\alpha_2^2 - \frac{245}{192}\alpha_2 + \alpha_3^2 + 42\alpha_1^6 + 30\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_2^3 - \frac{2933}{9216} + \frac{3}{4}\alpha_4 + \frac{105}{4}\alpha_2\alpha_1^2 - 5\alpha_3\alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações de maneira recursiva começando da primeira, teremos os coeficientes,

$$\alpha_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_3 = \mp \frac{1}{32}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{384}, \quad \alpha_5 = \pm \frac{11}{4608}.$$

Portanto, neste caso as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade para  $\beta > 0$  suficientemente pequeno são

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 + \frac{11}{4608}\beta^5 + \frac{49}{36864}\beta^6 - \frac{55}{294912}\beta^7,$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 - \frac{11}{4608}\beta^5 + \frac{49}{36864}\beta^6 + \frac{55}{294912}\beta^7,$$

ilustrado na figura 4.2.

Para  $n = 2$  ( $\omega = 1$ ), temos  $\alpha_0 = 1$ , e assim, construiremos as curvas que partem do ponto  $(1, 0)$ . De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, lembrando apenas que neste caso  $W$  é  $2\pi$ -periódica em relação a  $t$ , chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\alpha_1^2 &= 0; \\ -\frac{1}{12}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{8}\alpha_1^3 &= 0; \\ -\frac{3}{8}\alpha_2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_3 + \frac{25}{144}\alpha_1^2 + \frac{5}{64}\alpha_1^4 - \frac{5}{576} - \frac{1}{12}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_2^2 &= 0; \\ -\frac{7}{128}\alpha_1^5 + \frac{25}{72}\alpha_1\alpha_2 + \frac{35}{2304}\alpha_1 - \frac{245}{864}\alpha_1^3 + \frac{5}{16}\alpha_1^3\alpha_2 - \frac{1}{12}\alpha_3 - \frac{3}{8}\alpha_1\alpha_2^2 - \frac{3}{8}\alpha_3\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_4\alpha_1 &= 0; \\ \frac{35}{2304}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{12}\alpha_4 + \frac{25}{72}\alpha_1\alpha_3 - \frac{245}{288}\alpha_2\alpha_1^2 - \frac{35}{13824}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_4 - \frac{3}{8}\alpha_1^2\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_5 + \frac{5}{16}\alpha_1^3\alpha_3 - \frac{32}{128}\alpha_1^4\alpha_2 + \frac{15}{32}\alpha_1^2\alpha_2^2 + \frac{8785}{20736}\alpha_1^4 + \frac{7}{41472} + \frac{25}{144}\alpha_2^2 + \frac{21}{512}\alpha_1^6 + \frac{1}{4}\alpha_3^2 - \frac{1}{8}\alpha_2^3 &= 0, \end{aligned}$$

no qual segue,

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{1}{12} \text{ ou } \frac{5}{12}, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{5}{3456} \text{ ou } -\frac{763}{3456}.$$

Portanto, temos as curvas

$$\alpha_{21} = 1 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{3456}\beta^4, \alpha_{22} = 1 + \frac{5}{12}\beta^2 - \frac{763}{3456}\beta^4.$$

Portanto, é possível construir as curvas das regiões de estabilidade e instabilidade da equação (4.25) para  $\beta \geq 0$ . Abaixo consta as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros  $\alpha\beta$ . Respectivamente estão representados as figuras 4.3, 4.4, 4.5, conforme as ressonâncias estudadas.

$$\begin{aligned} \gamma_c^{(0)} : \alpha &= -\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{7}{32}\beta^4 - \frac{29}{144}\beta^6, \\ \gamma_c^{(1)} : \alpha &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 - \frac{11}{4608}\beta^5 + \frac{49}{36864}\beta^6 - \frac{55}{294912}\beta^7, \\ \gamma_s^{(1)} : \alpha &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3 - \frac{1}{384}\beta^4 + \frac{11}{4608}\beta^5 + \frac{49}{36864}\beta^6 + \frac{55}{294912}\beta^7, \\ \gamma_s^{(2)} : \alpha &= 1 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{3456}\beta^4 + \frac{289}{4976640}\beta^6, \\ \gamma_c^{(2)} : \alpha &= 1 + \frac{5}{12}\beta^2 - \frac{763}{3456}\beta^4 + \frac{1002401}{4976640}\beta^6, \\ \gamma_c^{(3)} : \alpha &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{32}\beta^3 + \frac{13}{5120}\beta^4 + \frac{5}{2408}\beta^5 - \frac{1961}{1474560}\beta^6 + \frac{609}{3276800}\beta^7, \\ \gamma_s^{(3)} : \alpha &= \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\beta^2 + \frac{1}{32}\beta^3 + \frac{13}{5120}\beta^4 - \frac{5}{2408}\beta^5 - \frac{1961}{1474560}\beta^6 - \frac{609}{3276800}\beta^7, \\ \gamma_s^{(4)} : \alpha &= 4 + \frac{1}{30}\beta^2 - \frac{317}{216000}\beta^4 + \frac{10049}{170100000}\beta^6, \\ \gamma_c^{(4)} : \alpha &= 4 + \frac{1}{30}\beta^2 + \frac{433}{216000}\beta^4 - \frac{5701}{170100000}\beta^6, \\ \gamma_c^{(5)} : \alpha &= \frac{25}{4} + \frac{1}{48}\beta^2 + \frac{11}{193536}\beta^4 - \frac{1}{18432}\beta^5 + \frac{37}{55738368}\beta^6 + \frac{7}{10616832}\beta^7, \\ \gamma_s^{(5)} : \alpha &= \frac{25}{4} + \frac{1}{48} + \frac{11}{193536}\beta^4 + \frac{1}{18432}\beta^5 + \frac{37}{55738368}\beta^6 - \frac{7}{10616832}\beta^7. \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo procedimento, é possível calcular os coeficientes da curva (4.32) com ordens cada vez mais altas. Na referência [39], os coeficientes foram obtidos até a ordem sete. Durante nossos estudos, constatamos que os coeficientes encontrados coincidem com aqueles obtidos em [39].

A região de estabilidade será denotada por  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . As fronteiras da região curvilíneas  $g_{2m-1}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) são denotadas por  $\gamma_c^{2m-2}$  e  $\gamma_c^{2m-1}$ , e as fronteiras da região  $g_{2m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) são dadas por  $\gamma_s^{2m-1}$  e  $\gamma_s^{2m}$ . As curvas  $\gamma_c^k$  e  $\gamma_s^k$  interceptam o eixo  $\beta = 0$  no ponto  $\alpha = \frac{k^2}{4}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), a partir do qual para  $\beta$  pequeno originam uma região de ressonância paramétrica. Nas curvas  $\gamma_c^{2k}$ ,  $\gamma_s^{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ocorre ressonância de primeira ordem e nas curvas  $\gamma_c^{2k-1}$ ,  $\gamma_s^{2k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ocorre ressonância de segunda ordem.

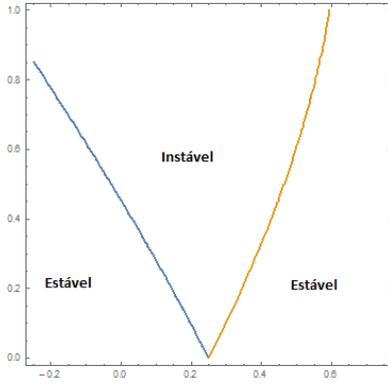


Figura 4.2: curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto  $(\frac{1}{4}, 0)$  no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

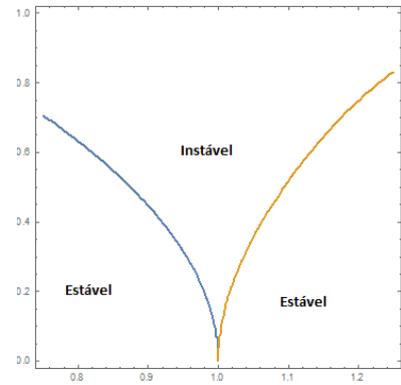


Figura 4.3: curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto  $(1, 0)$  no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

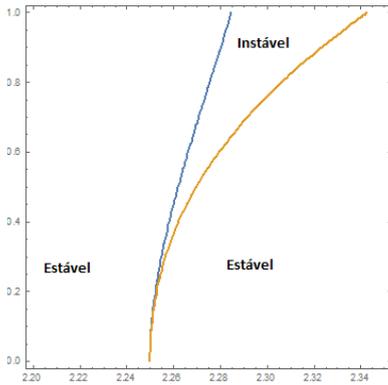


Figura 4.4: curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto  $(\frac{9}{4}, 0)$  no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

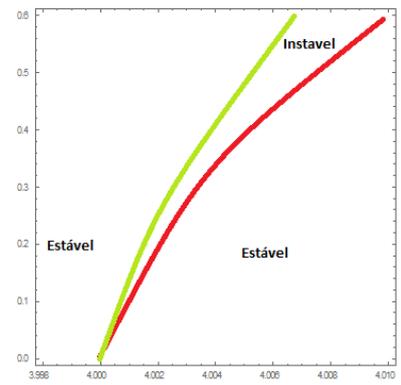


Figura 4.5: curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto  $(4, 0)$  no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

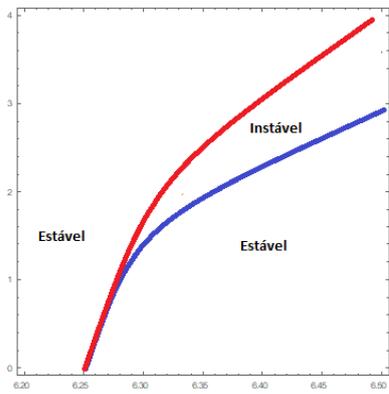


Figura 4.6: curvas de estabilidade/instabilidade que emana do ponto  $(\frac{25}{4}, 0)$  no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

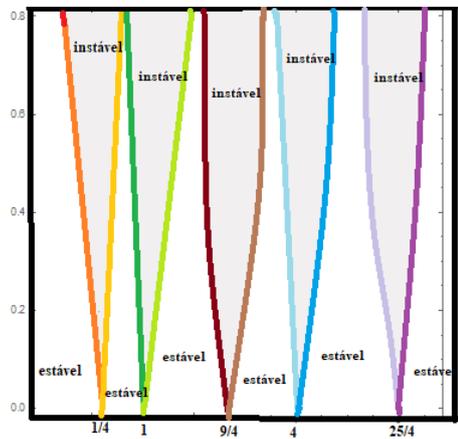


Figura 4.7: curvas de estabilidade/instabilidade nos casos ressonantes no plano dos parâmetros  $\alpha - \beta$ .

## Capítulo 5

# Estabilidade Paramétrica de Osciladores paramétricos

*Este último capítulo destina-se a aplicar a teoria de estabilidade paramétrica desenvolvida nos últimos quatro capítulos, para dois fenômenos de osciladores paramétricos. A primeira seção baseia-se no artigo [10], desenvolvido pelos pesquisadores Cabral, H.E. e Carvalho, A.C.. A última seção, podemos de certo modo afirmar que é uma variação do artigo [10], uma modelagem de um sistema mecânico com um ponto de suspensão oscilante com o bulbo carregado eletricamente, situado entre duas linhas verticais, com distribuição elétrica uniforme, equidistantes do ponto de suspensão.*

### 5.1 Estabilidade Paramétrica de um Pêndulo Carregado com o ponto de suspensão oscilante

*A priori*, permita-nos informar que esta seção está baseada no artigo [10].

Neste seção, investigamos os aspectos da teoria de estabilidade paramétrica no problema do pêndulo com ponto de suspensão variando através de uma lei harmônica, onde o bulbo possui uma carga elétrica  $q$ , e abaixo uma linha horizontal eletrizada com distribuição uniforme de cargas com intensidade positiva.

Na seção 5.2 faremos toda a formulação matemática do problema, exibindo a equação do movimento do problema abordado. Vale salientar que, quando  $q = 0$ , reduz-se a equação de Mathieu. A função hamiltoniana do problema é encontrada na seção (5.11). O sistema hamiltoniano tem dois pontos de equilíbrios,  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$ . Esses pontos de equilíbrios significam que o bulbo do pêndulo possui uma lei harmônica com oscilação vertical do ponto de suspensão  $S$ . O o ponto  $P_1$  corresponde à posição

de equilíbrio com posição angular  $\theta = 0$  do pêndulo clássico e o segundo para a posição de equilíbrio com posição angular  $\theta = \pi$ . Apresentamos o sistema Hamiltoniano linearizado em uma vizinhança dos dois tipos de equilíbrio estáveis do sistema, dependendo da posição do equilíbrio e do valor da carga  $q$ , estudando a estabilidade paramétrica e encontrando as ressonâncias de Krein. Posteriormente, construímos as superfícies limites das regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros, analisando-os para os valores das duas ressonâncias de Krein simples. Calculamos os coeficientes de suas parametrizações até a quarta ordem de  $\epsilon$  como funções do parâmetro  $q$ . Expomos casos especiais, quando o plano  $q = \text{constante}$ , no qual obtemos as curvas de contorno neste plano das regiões de estabilidade e instabilidade. No particular, quando fazemos a interseção dessas superfícies com o plano  $q = 0$ , obtemos as curvas fronteiras da equação de Mathieu com nossos coeficientes concordando com os apresentados em no capítulo anterior para esta equação.

## 5.2 Formulação do Problema

Consideremos um pêndulo com uma haste inflexível de massa desprezível e comprimento  $l$ , cujo o ponto de suspensão  $S$  está sujeito a oscilações verticais dada pela lei harmônica  $\rho(t) = A \cos(\omega t)$ , onde  $A$  é a amplitude e  $\omega$  a frequência. O bulbo do pêndulo possui massa pontual  $m$  eletricamente carregada. Abaixo do pêndulo, há um fio horizontal reto de comprimento infinito, com uma distribuição homogênea de carga elétrica positiva. O fio está a uma distância  $d$  do ponto fixo  $O$  no eixo vertical ao longo do qual oscila o ponto de suspensão do pêndulo, com  $d > l$ . Como pode ser visto na figura 5.1. Se a carga  $q > 0$ , a projeção vertical da força elétrica no bulbo, sempre aponta para cima, enquanto, se for negativa  $q < 0$ , ela sempre aponta para baixo, baseando-se no conceito de força eletrostática.

Fixemos um sistema de coordenadas fixo  $Oxy$ , com a origem na linha vertical que contém o ponto de suspensão, o eixo  $Ox$  direcionado verticalmente para baixo e o eixo  $Oy$  orientado horizontalmente para a direita. Seja  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  o vetor de posição da massa  $m$  colocada no ponto  $P$ . Para o sistema inercial de coordenadas, consideremos a base ortonormal  $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , fixa no ponto  $O$ , no qual, o primeiro vetor é direcionado para baixo e o segundo para direita. Sejam  $\theta = \theta(t)$  o ângulo que a haste faz com o vetor  $\mathbf{e}$  e  $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_1$  o vetor de posição do ponto de suspensão. Insere-se um sistema de coordenadas móvel, tendo como base ortonormal  $\beta' = \{\mathbf{e}, \mathbf{e}^\perp\}$ , onde  $\mathbf{e}$  é o vetor unitário na direção do vetor  $\mathbf{SP}$  e  $\mathbf{e}^\perp$  é o vetor unitário perpendicular a  $\mathbf{e}$  e direcionado no sentido do crescimento de  $\theta$  (ver figura 5.1).

Neste primeiro momento, desejamos encontrar a formulação matemática da equação do movimento do pêndulo, em seguida, veremos que a equação pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano e vamos obter a função Hamiltoniana associada.

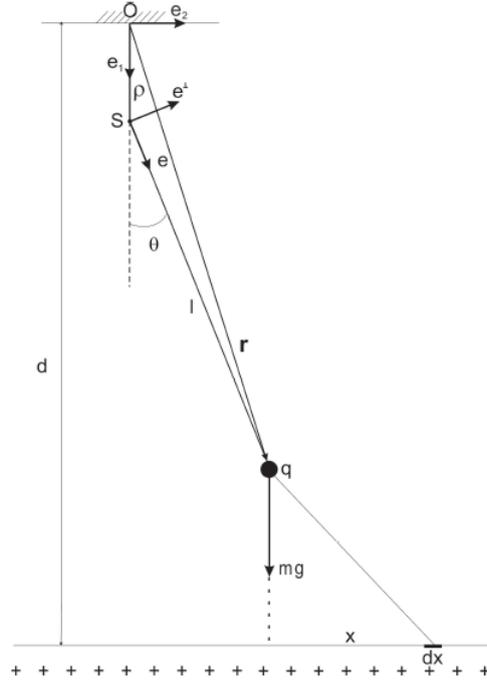


Figura 5.1: Pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante. retirado da referencia [10]

Podemos extrair as seguintes relações entre as bases  $\beta$  e  $\beta'$  (ver figura 5.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \cos\theta\mathbf{e}_1 + \text{sen}\theta\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}^\perp &= -\text{sen}\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

e,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos\theta\mathbf{e} - \text{sen}\theta\mathbf{e}^\perp \\ \mathbf{e}_2 &= \text{sen}\theta\mathbf{e} + \cos\theta\mathbf{e}^\perp. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Derivando as equações em (5.1) com relação ao tempo (lembre-se que  $\theta = \theta(t)$ ) temos,

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\theta}\mathbf{e}^\perp \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{e}}^\perp = -\dot{\theta}\mathbf{e}. \quad (5.3)$$

Por sua vez, pela soma de vetores, o vetor posição  $\mathbf{r}$  do bulbo no instante  $t$  é descrito por,

$$\mathbf{r} = l\mathbf{e} + \boldsymbol{\rho} = l\mathbf{e} + \rho\mathbf{e}_1.$$

Pelo fato de  $\dot{\mathbf{e}}_i = 0$ , para  $i = 1, 2$ , temos que,  $\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\mathbf{e}} + \dot{\rho}\mathbf{e}_1$ , usando (5.3), obtemos  $\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\theta}\mathbf{e}^\perp + \dot{\rho}\mathbf{e}_1$ . Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= l(\ddot{\theta}\mathbf{e}^\perp + \dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}^\perp) + (\ddot{\rho}\mathbf{e}_1) \\ &= (\ddot{\rho}\cos\theta - l(\dot{\theta})^2)\mathbf{e} + (l\ddot{\theta} - \ddot{\rho} \cdot \text{sen}\theta)\mathbf{e}^\perp. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Vamos trabalhar com um sistema ideal, isto é, desconsideraremos os efeitos magnéticos e a resistência do ar, ou seja, tomaremos a força magnética como zero. Desta forma,

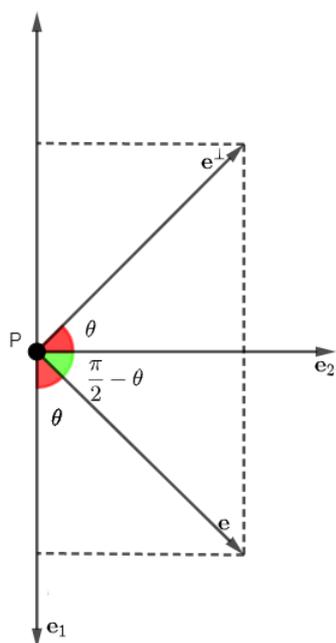


Figura 5.2: Representação das bases  $\beta$  e  $\beta'$  com o mesmo ponto de origem

temos que a força total atuando sobre o bulbo é dada pela equação,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_g + \mathbf{T},$$

onde  $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}$  é o vetor força de tração,  $\mathbf{F}_c$  a Força de Coulomb e  $\mathbf{F}_g$  é a força gravitacional dada pela equação  $\mathbf{F}_g = mg\mathbf{e}_1 = mg(\cos\theta \cdot \mathbf{e} - \sin\theta \cdot \mathbf{e}^\perp)$ .

Para obter a expressão da força de Coulomb, definamos  $x$  como a distância entre a projeção do bulbo sobre fio até o incremento  $dx$  (ver figura 5.1).

Notemos que o vetor  $\overrightarrow{\mathbf{P}d\mathbf{x}}$  na base  $\beta$  é definido pela expressão (ver figura 5.3),

$$\overrightarrow{\mathbf{P}d\mathbf{x}} = (d - \rho - l \cos\theta)\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2.$$

Para calcularmos a força de Coulomb entre o bulbo e o fio, precisamos obter a intensidade da carga no fio, no ponto de projeção sobre a distribuição uniforme. Sabendo que estamos trabalhando com uma distribuição contínua de carga no fio, segue que a densidade linear da carga é  $\sigma = \frac{dQ}{dx}$ . Pela teoria eletromagnética, a força  $\mathbf{F}_c$  no bulbo devido à distribuição uniforme da carga é dada pela integral imprópria,

$$\mathbf{F}_c = -k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\sigma}{[x^2 + (d - \rho - l \cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} [x\mathbf{e}_2 + (d - \rho - l \cos\theta)\mathbf{e}_1] dx. \quad (5.5)$$

Em (5.5), denote por  $A = [x^2 + (d - \rho - l \cos\theta)^2]$ ,  $y = (d - \rho - l \cos\theta)$  e  $\alpha = kq\sigma$ . E como o integrando em (5.5) é contínuo, também é integrável. Usando as propriedades



Como  $\text{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , segue que

$$\int \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Assim, pelo Torma fundamental do Cálculo em cada entrada do vetor,

$$\begin{aligned} \int_a^0 \frac{[x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_1]dx}{A^{\frac{3}{2}}} &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{x^2 + (d - \rho - l \cos \theta)^2}} \right]_a^0 \mathbf{e}_2 + \left[ \frac{xy}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_a^0 \mathbf{e}_1 \\ &= \left[ -\frac{1}{|y|} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] \mathbf{e}_2 + \underbrace{\left[ -\frac{a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \right]}_{(i)} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Dividindo o numerador e o denominador de (i) por  $\sqrt{a^2} = |a| = -a$  temos que  $-\frac{a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1 + y^2/a^2}}$ . E utilizando o fato de  $y$  ser maior que zero, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{[x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_1]dx}{A^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{1}{y\sqrt{1 + y^2/a^2}} \right) \mathbf{e}_1 \right] \\ &= -\frac{1}{y} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{y} \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{[x\mathbf{e}_2 + (d - \rho - l \cos \theta)\mathbf{e}_1]dx}{A^{\frac{3}{2}}} &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_0^b \mathbf{e}_2 + \left[ \frac{xy}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_0^b \mathbf{e}_1 \\ &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{b^2 + y^2}} + \frac{1}{y} \right] \mathbf{e}_2 + \frac{1}{y\sqrt{1 + y^2/b^2}} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{[x\mathbf{e}_2 + (d - \rho - l \cos \theta)\mathbf{e}_1]dx}{A^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{y} \mathbf{e}_1. \quad (5.7)$$

Finalmente, de (5.6) e (5.7) conclui-se que,

$$\mathbf{F}_c = -\frac{2kq\sigma}{d - \rho - l \cos \theta} \mathbf{e}_1.$$

No que segue, vamos considerar a constante de proporcionalidade de Coulomb  $k$  igual a um.

Assim, a força total é dada pela equação,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_g + \mathbf{T} = mg(\cos \theta \mathbf{e} - \text{sen}\theta \mathbf{e}^\perp) + \frac{2q\sigma}{d - \rho - l \cos \theta} (\cos \theta \mathbf{e} - \text{sen}\theta \mathbf{e}^\perp) - T \mathbf{e}.$$

Por outro lado, pela segunda lei da mecânica  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ , onde  $\ddot{\mathbf{r}}$  é apresentado em (5.4). A primeira componente  $\mathbf{e}$  determina a intensidade da tração, já comparando os componentes do vetor  $\mathbf{e}^\perp$  que define a dinâmica do fenômeno, obtemos a equação do movimento do pêndulo com carga  $q$ ,

$$m(l\ddot{\theta} - \ddot{\rho} \sin\theta) = -\left(mg - \frac{2q\sigma}{d - \rho - l \cos\theta}\right) \sin\theta.$$

Lembremos que, a lei harmônico do ponto de suspensão é dado por  $\rho(t) = a \cos(\omega t)$  onde  $a$  é a amplitude e  $\omega$  a frequência. Façamos  $\tau = \omega t$  e denotemos por  $'$  as derivadas com relação a  $\tau$ , daí temos que  $\frac{d\tau}{dt} = \omega$ . Destes fatos, segue que,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \theta' \omega, \quad \text{ou melhor,} \quad \ddot{\theta} = \omega^2 \theta''(\tau).$$

Assim como,  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \rho' \omega$ , segue que,  $\ddot{\rho} = \omega^2 \rho''(\tau) = -\omega^2 a \cos\tau$ . Desta forma, a equação do movimento do pêndulo carregado com o ponto de suspensão oscilante é dada por,

$$ml\omega^2 \theta'' + m\omega^2 a \cos\tau \sin\theta = -\left(mg - \frac{2q\sigma}{d - a \cos\tau - l \cos\theta}\right) \sin\theta, \quad (5.8)$$

mais precisamente, dividindo a equação (5.8) por  $ml\omega^2$  temos,

$$\theta'' + \frac{a}{l} \cos\tau \sin\theta + \frac{g}{l\omega^2} \sin\theta + \frac{2q\sigma}{ml\omega^2(d - a \cos\tau - l \cos\theta)} \sin\theta = 0, \quad (5.9)$$

e considerando  $\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$ ,  $e = \frac{a}{l}$ ,  $d = 2l$  e  $2\sigma = mgl$  em (5.9), escreve-se,

$$\theta'' + e \cos\tau \sin\theta + \alpha \sin\theta + \frac{q\alpha}{2 - e \cos\tau - \cos\theta} \sin\theta = 0. \quad (5.10)$$

Quando  $q = 0$ , esta equação descreve o movimento de um pêndulo sob uma oscilação vertical do ponto de suspensão como propomos no exemplo 6.2.16 conforme Capítulo 1.

**Observação 5.2.1.** *Os valores  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  fornecem pontos de equilíbrios para a dinâmica, para quaisquer valores de tempo e parâmetros. Esses equilíbrios são no sentido da variação de  $\theta$ . De fato, para esses valores de  $\theta$ , o bulbo do pêndulo se move harmonicamente na vertical para cima e para baixo entre dois limites  $l - a$  e  $l + a$ .*

Posteriormente, exibiremos a equação do movimento com a formulação Hamiltoniana, e veremos as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (5.10) encontrados.

### 5.3 A função Hamiltoniana do sistema

Para obter o sistema Hamiltoniano, façamos  $\theta = u$  e  $\theta' = v$ , daí (5.10) é descrita,

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -e \cos \tau \cdot \sin u - \alpha \sin u - \frac{q\alpha}{2 - e \cos \tau - \cos u} \operatorname{senu} \end{cases} \quad (5.11)$$

Como o sistema Hamiltoniano é escrito na forma  $\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z})$ , admita,

$$\begin{cases} H_v = v \\ H_u = e \cos \tau \cdot \sin u + \alpha \sin u + \frac{q\alpha}{2 - e \cos \tau - \cos u} \operatorname{senu} \end{cases} \quad .$$

Podemos encontrar a função Hamiltoniana associada ao sistema, para isto, integramos  $H_u$  com relação a  $u$  (usamos a substituição  $s = 2 - e \cos \tau - \cos x$ ),

$$H(u, v) = -e \cos \tau \cdot \cos u - \alpha \cos u - q\alpha \log(2 - e \cos \tau - \cos u) + \xi(v).$$

Derivando  $H(u, v)$  com relação a  $v$ ,  $H_v = \xi'(v) = v$  e com isso,  $\xi(v) = \frac{v^2}{2}$ . Consequentemente, a função Hamiltoniana do sistema é da forma:

$$H(u, v, \tau, e) = \frac{v^2}{2} - e \cos \tau \cdot \cos u - \alpha \cos u - q\alpha \log(2 - e \cos \tau - \cos u). \quad (5.12)$$

Para obter os pontos de equilíbrio do sistema (5.11), façamos,

$$\nabla H(z, \tau, e) = 0,$$

onde  $z = (u, v)$  e para quaisquer  $\tau$  e  $e$ . Notemos que, os pontos de equilíbrio são da forma  $z_0 = (k\pi, 0)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Faremos uma análise em torno dos pontos de equilíbrio  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$  do espaço de fase definido no plano  $uv$ , e eles correspondem ao movimento vertical do pêndulo para cima e para baixo entre os limites  $l - a$  e  $l + a$ , como mencionamos anteriormente.

Durante a próxima seção iremos investigar a estabilidade linear dos pontos sugeridos  $P_1$  e  $P_2$ , ou seja, vamos analisar a estabilidade dos equilíbrios no caso não perturbado  $e = 0$  (amplitude nula). Quando  $e = 0$  o sistema definido por (5.11) descreve o movimento do pêndulo carregado com ponto de suspensão fixo.

### 5.4 Natureza dos pontos de equilíbrios

Almejamos estudar o caso particular quando  $e = 0$ , neste caso o sistema será autônomo. Objetivamos avaliar a natureza dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  encontrados, com respeito a estabilidade.

Consideremos a função Hamiltoniana associada ao sistema Hamiltoniano autônomo, ou seja,

$$H(u, v, \alpha, q) = \frac{1}{2}v^2 - \alpha \cos u - \alpha q \log(2 - \cos u), \quad (5.13)$$

com sistema Hamiltoniano,

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\alpha \sin u - \frac{q\alpha}{2 - \cos u} \operatorname{senu} \end{cases}. \quad (5.14)$$

Temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.4.1.** *Consideremos o sistema Hamiltoniano (5.14), afirmamos que:*

- (i) *Se  $q < 1$ , então  $P_1$  é um equilíbrio estável;*
- (ii) *Se  $q > 3$ , então  $P_2$  é um equilíbrio estável;*

**Demonstração:** Vamos averiguar o item (i). Inicialmente linearizamos o sistema 5.14 em torno do ponto  $P_1$ . Pois bem, a hessiana obtida do sistema 5.14 é dada por:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha(1-q) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo o sistema Hamiltoniano linearizado é da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= JG(\mathbf{z} - P_1) + \mathcal{O}(|\mathbf{z} - P_1|^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(1-q) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(1-q) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A equação característica de  $JG$ ,

$$p(\lambda) = \det(JG - \lambda I) = 0$$

é equivalente a,

$$\lambda^2 + \alpha(1-q) = 0.$$

E como foi apresentado no Teorema 2.2.2, a estabilidade de pontos de equilíbrios de um sistema Hamiltoniano autônomo ocorre se todos os autovalores são imaginários puros e  $JG$  é diagonalizável, então  $P_1$  é estável se  $1 - q > 0$ . Portanto,  $q < 1$  é a região de estabilidade do ponto de equilíbrio  $P_1$ .

Por sua vez, linearizamos o sistema 5.14 em torno de  $P_2 = (\pi, 0)$ . Obtemos a Hessiana,

$$G = \begin{pmatrix} \alpha \left( \frac{q}{3} - 1 \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e o sistema Hamiltoniano linearizado é dado por,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= JG(\mathbf{z} - P_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{z} - P_2|^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\frac{q}{3} - 1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(\frac{q}{3} - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O polinômio característico de  $JG$ ,

$$p(\lambda) = \det(JG - \lambda I) = 0$$

é equivalente a,

$$\lambda^2 + \alpha(\frac{q}{3} - 1) = 0.$$

E pelo Teorema 2.2.2,  $P_2$  é estável se  $\frac{q}{3} - 1 > 0$ . Portanto,  $q > 3$  é a região de estabilidade do ponto de equilíbrio  $P_1$ .

**Observação 5.4.2.** *Realizando a comparação com o pêndulo usual,  $q = 0$ , o ponto de equilíbrio  $P_1$  que é estável no pêndulo usual, torna-se instável quando a carga é maior que 1. Enquanto, no ponto de equilíbrio  $P_2$  que é instável para o pêndulo usual, torna-se estável quando a carga é maior que 3.*

**Observação 5.4.3.** *Para auxiliar as várias transformações de coordenadas que serão feitas para obter a função Hamiltoniana periódica (5.25) conveniente para utilizar o método de deprit-Hori para obter a função Hamiltoniana autônoma para elaborar as superfícies fronteiras das regiões de estabilidade, é conveniente seguir o seguinte fluxograma,*

$$(\theta, \theta') \mapsto (u, v) \mapsto (\xi, \eta) \mapsto (x, y) \mapsto (X, Y).$$

## 5.5 Estabilidade paramétrica.

O caso extremamente complexo, ocorre quando  $e \neq 0$ , com o sistema Hamiltoniano periódico. Para fazer a análise da estabilidade para valores suficientemente pequenos de  $e$ , vamos utilizar a teoria de estabilidade paramétrica vista no Capítulo 1.

Vamos analisar a estabilidade paramétrica do sistema linearizado em torno de cada um dos pontos de equilíbrios estáveis do sistema não perturbado. Admitimos  $P_1 = (0, 0)$  para qualquer  $q < 1$ ,  $P_2 = (\pi, 0)$  para  $q > 3$ .

Vamos obter a função Hamiltoniana linearizada para  $e$  qualquer. Nos dois casos a diferença está apenas na termo  $\frac{\partial^2 H(P_j)}{\partial u^2}$ .

Para  $P_1$ , temos  $A = \frac{\partial^2 H(P_1)}{\partial u^2} = e \cos \tau + \alpha + \frac{q\alpha}{1 - e \cos \tau}$ , assim antes das substituições de variáveis obtemos  $H(u, v, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}(Au^2 + v^2)$ . Vamos reescrever  $A$  de uma maneira mais conveniente, para facilitar a compreensão do Hamiltoniano após a mudança de coordenadas feita a seguir,

$$\begin{aligned} A &= e \cos \tau + \alpha + \frac{q\alpha}{1 - e \cos \tau} \\ &= e \cos \tau + \alpha + \frac{q\alpha + (eq\alpha \cos \tau - eq\alpha \cos \tau)}{1 - e \cos \tau} \\ &= e \cos \tau + \alpha + \frac{q\alpha(1 - e \cos \tau) + eq\alpha \cos \tau}{1 - e \cos \tau} \\ &= e \cos \tau + \alpha(1 - q) + \frac{eq\alpha \cos \tau}{1 - e \cos \tau}. \end{aligned}$$

Considerando  $\xi = u - u_0$  e  $\eta = v$ , com  $u_0 = 0$  para  $P_1$  e  $u_0 = \pi$  para  $P_2$ , obtemos,

$$H(\xi, \eta, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}\alpha(1 - q)\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\left(e \cos \tau + e \frac{\alpha q \cos \tau}{1 - e \cos \tau}\right)\xi^2. \quad (5.15)$$

Para  $P_1$ , temos  $A = \frac{\partial^2 H(P_1)}{\partial \xi^2} = e \cos \tau + \alpha - \frac{q\alpha}{1 - e \cos \tau}$ , reescrevendo  $A$  de maneira parecida como anteriormente, obtemos  $A = e \cos \tau + \alpha(1 - q) - \frac{eq\alpha \cos \tau}{1 - e \cos \tau}$ . Daí,

$$H(\xi, \eta, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}\alpha(1 - q)\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\left(e \cos \tau - e \frac{\alpha q \cos \tau}{1 - e \cos \tau}\right)\xi^2. \quad (5.16)$$

Para  $P_2$ , temos  $A = \frac{\partial^2 H(P_2)}{\partial \xi^2} = -e \cos \tau - \alpha + \frac{q\alpha}{3 - e \cos \tau}$ , reescrevendo  $A$  de maneira conveniente,

$$A = -e \cos \tau + \alpha\left(\frac{q}{3} - 1\right) + \frac{eq\alpha \cos \tau}{3(3 - e \cos \tau)}.$$

Daí,

$$H(\xi, \eta, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{q}{3} - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\left(-e \cos \tau + e \frac{\alpha q \cos \tau}{3(3 - e \cos \tau)}\right)\xi^2. \quad (5.17)$$

Conforme o algoritmo descrito no capítulo referente a normalização de um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade, através da matriz normalizadora  $N$ , faremos a mudança de variáveis  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$  através da transformação simplética exibida a seguir

**Afirmção 5.5.1.** *A transformação de coordenadas*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega}}x, \quad \eta = \sqrt{\omega}y,$$

é simplética, com  $\omega^2 = \alpha(1 - q)$  ou  $\omega^2 = \alpha\left(\frac{q}{3} - 1\right)$ .

**Demonstração:** De fato, para verificar tal fato é suficiente mostrar que a matriz Jacobiana (6.45) da transformação é não singular e uma matriz simplética. Assim,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Temos que  $\det \mathcal{M} = 1$ , logo  $\mathcal{M}$  é não singular. E também satisfaz a relação  $\mathcal{M}^T J \mathcal{M} = J$ . ■

**Observação 5.5.2.** *Salientemos que a mesma transformação na afirmação 5.5.1 com  $\omega^2 = \alpha(1 - q)$  ou  $\omega^2 = \alpha(\frac{q}{3} - 1)$  também é simplética. E os procedimentos a seguir são análogos para os outros pontos de equilíbrios.*

Tal transformação conduz a função Hamiltoniana exibida em (5.15) na função Hamiltoniana com as novas variáveis  $(x, y)$ ,

$$H(x, y, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + e \left( 1 + \frac{\alpha q}{1 - e \cos \tau} \right) \frac{\cos \tau}{2\omega} x^2. \quad (5.19)$$

Sendo a função Hamiltoniana (5.19) analítica com relação ao parâmetro  $e$ , expandindo-a em torno  $e = 0$  obtemos

$$H(x, y, \tau, q, \alpha, e) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + eH_1 + e^2H_2 + e^3H_3 + \dots, \quad (5.20)$$

onde,

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2), \quad H_1 = \frac{1 + \alpha q}{2\omega} \cos \tau x^2 \quad \text{e} \quad H_j = \frac{\alpha q}{2\omega} \cos^j \tau x^2, j \geq 2. \quad (5.21)$$

Posteriormente, para construir as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros  $(\alpha, q, e)$  inserimos na função Hamiltoniana (5.20) a expressão:

$$\alpha(q, e) = \alpha_0(q) + e\alpha_1(q) + e^2\alpha_2(q) + e^3\alpha_3(q) + \mathcal{O}(e^4), \quad (5.22)$$

com  $\alpha_0(q) = \frac{N^2}{4(1 - q)}$ , onde a função  $\alpha$  representará a superfície emanando do ponto  $(q_0, \alpha_0, 0)$ . Reorganizando em potências de  $e$  encontramos o novo Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}(x, y, \tau, q, \alpha, e) = \mathcal{H}_0 + e\mathcal{H}_1 + \frac{e^2}{2!}\mathcal{H}_2 + \frac{e^3}{3!}\mathcal{H}_3 + \dots + \frac{e^k}{k!}\mathcal{H}_k + \mathcal{O}(e^{k+1}), \quad (5.23)$$

neste processo, convenientemente definimos,

$$\sqrt{\alpha} = \sum_{j \geq 0} b_j e^j, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sum_{j \geq 0} c_j e^j, \quad (5.24)$$

Substituindo os valores impostos em (5.24) nas formas quadráticas em (5.21) tem-se

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(b_0 + b_1e + b_2e^2 + \sum_{m \geq 3} b^m e^m\right)\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) \\
&= \frac{1}{2}b_0\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}b_1\sqrt{1-q}e(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}b_2\sqrt{1-q}e^2(x^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{1-q}\sum_{m \geq 3} b^m e^m(x^2 + y^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1 + \alpha q}{2\omega} \cos \tau x^2 = \frac{1}{2\omega} \cos \tau x^2 + \frac{\alpha q}{2\omega} \cos \tau x^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-q}}\left(c_0 + c_1e + \sum_{m \geq 2} c^m e^m\right) \cos \tau x^2 + \frac{q}{2\sqrt{1-q}}\left(b_0 + b_1e + \sum_{m \geq 2} b^m e^m\right) \cos \tau x^2 \\
&= \frac{1}{2}b_0\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}b_1\sqrt{1-q}e(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}b_2\sqrt{1-q}e^2(x^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{1-q}\sum_{m \geq 3} b^m e^m(x^2 + y^2), \dots
\end{aligned}$$

$$H_j = \frac{\alpha q}{2\omega} \cos^j \tau x^2 = \frac{\sqrt{\alpha}q}{2} \cos^j \tau x^2 = \frac{q}{2}\left(b_0 + b_1e + b_2e^2 + \sum_{m \geq 3} b^m e^m\right) \cos^j \tau x^2,$$

com  $j \geq 2$ .

Deste modo, mais uma vez, reorganizando com relação as potências de  $e$  nos fornece as seguintes expressões para os polinômios homogêneos  $\mathcal{H}_j$  da função Hamiltoniana (5.23),

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_0(1-q)}(x^2 + y^2); \\
\mathcal{H}_1 &= \frac{b_1}{2}\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2\sqrt{1-q}}[c_0 \cos \tau + b_0q \cos \tau]x^2; \\
\mathcal{H}_2 &= \frac{b_2}{2}\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2\sqrt{1-q}}[c_1 \cos \tau + b_1q \cos \tau + b_0q \cos^2 \tau]x^2; \\
&\vdots \\
\mathcal{H}_n &= \frac{b_n}{2}\sqrt{1-q}(x^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{1-q}}[c_{n-1} \cos \tau + b_{n-1}q \cos \tau + \dots + b_0q \cos^n \tau]x^2.
\end{aligned}$$

A frequência do sistema linear não perturbado obtido a partir de (5.23) depende dos parâmetros  $q, \alpha$  e é dado por  $\omega_0 = \sqrt{\alpha_0(1-q)}$ . Se  $2\omega_0$  não é inteiro então pelo Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii (1.1.4), diz que o sistema linear não perturbado é parametricamente estável, ou seja, o sistema (5.20) é estável para valores pequenos de  $e$ . O Teorema também diz que se  $2\omega(q_0, \alpha_0) = N$ , um inteiro, o sistema linear não

perturbado não é parametricamente estável, então em qualquer vizinhança do sistema não perturbado existe um sistema instável, isto é, para pequenos valores de  $e \neq 0$ , podemos encontrar sistemas estáveis e instáveis. Por isso, faz-se necessário construir contornos que possam dividir as regiões de estabilidade e instabilidade. Então, neste caso, no espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, e)$  para o ponto  $(q_0, \alpha_0, 0)$ , com  $e \geq 0$ , o sistema (5.23) pode ou não ser estável para pequenos valores de  $e$ . A equação  $2\omega(q, \alpha) = N$  define uma curva, no plano  $e = 0$  surgindo do ponto  $(q_0, \alpha_0, 0)$ . Portanto, precisamos construir superfícies no espaço de parâmetros que separam as regiões de estabilidade e instabilidade, que emanam do ponto  $(q_0, \alpha_0, 0)$ . Essas superfícies interceptam o plano  $e = 0$  ao longo da curva  $2\omega(q, \alpha) = N$ . Salientando que, essas superfícies tem como expressão geral 5.22, isto é, uma série de potências de  $e$  com coeficientes dependendo de  $q$ .

Para estabelecermos a construção destas superfícies, seguiremos o processo de normalização do Hamiltoniano (5.23) pelo método de Deprit-Hori visto no capítulo 3. Inicialmente, é conveniente eliminar o termo  $\mathcal{H}_0$ , para isto, faremos uma rotação de ângulo  $\omega_0\tau$ , onde  $\omega_0 = \sqrt{\alpha_0(1-q)}$ , na qual,

$$x = \cos \omega_0\tau X + \sin \omega_0\tau Y, \quad y = -\sin \omega_0\tau X + \cos \omega_0\tau Y.$$

Essa rotação é uma transformação simplética dependente do tempo conforme vimos no exemplo 6.3.40, cuja função geradora tem a derivada em relação a  $\tau$  dado por  $W_\tau = -\frac{1}{2}\omega_0(X^2 + Y^2)$ , que elimina o termo  $\mathcal{H}_0$ .

Como  $\omega_0 = \frac{N}{2}$ , após esta rotação a função Hamiltoniana torna-se,

$$H(X, Y, q, \alpha, e, \tau) = eH_1 + e^2H_2 + e^3H_3 + \dots, \quad (5.25)$$

onde,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{b_1}{2}\sqrt{1-q}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2\sqrt{1+q}}[c_0 \cos \tau + b_0q \cos \tau]R^2 \\ H_2 &= \frac{b_2}{2}\sqrt{1-q}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2\sqrt{1+q}}[c_1 \cos \tau + b_1q \cos \tau + b_0q \cos^2 \tau]R^2 \\ &\vdots \\ H_n &= \frac{b_n}{2}\sqrt{1-q}(X^2 + Y^2) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{1-q}}[c_{n-1} \cos \tau + b_{n-1}q \cos \tau + \dots + b_0q \cos^n \tau]R^2, \end{aligned}$$

com  $R = \cos\left(\frac{N\tau}{2}\right)X + \sin\left(\frac{N\tau}{2}\right)Y$ .

Vejamos na próxima seção a essência da construção de superfícies fronteiras que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, e)$ .

## 5.6 Resultado principal: Superfícies limites de regiões de estabilidade / instabilidade.

Nesta seção, iremos descrever o procedimento de construção das superfícies fronteira de estabilidade e instabilidade, conforme realizado na elaboração das curvas limite de estabilidade e instabilidade no problema da equação de Mathieu, abordado no capítulo (4.2). Para isso, vamos realizar a transformação da função Hamiltoniana dependente do tempo (5.25) em uma função Hamiltoniana autônoma, que será denotada por  $K$ . O método de Deprit-Hori, discutido anteriormente, será utilizado para alcançar esse objetivo. Para obter informações mais detalhadas sobre o processo de Deprit-Hori, consulte as referências [12], [39].

Aplicando o método de Deprit-Hori visto no capítulo 4, obtemos um Hamiltoniano autônomo em novas variáveis simpléticas  $p, P$

$$K(p, P) = k_{20}(q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, e)p^2 + k_{11}(q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, e)pP + k_{02}(q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, e)P^2,$$

onde  $k_{ij} = \sum \frac{e^m}{m!} k_{ij}^{(m)}$ , com  $i, j = 0, 1, 2$ .

Em nosso caso específico  $k_{11} = 0$ , então a equação característica torna-se

$$\lambda^2 + 4k_{20}k_{02} = 0.$$

Então, a região de estabilidade é determinada pela inequação  $k_{20}k_{02} > 0$ , e a fronteira que dividem as regiões de estabilidade e instabilidade pelas equações abaixo

$$k_{20} = k_{20}^{(1)}e + \frac{1}{2}k_{20}^{(2)}e^2 + \sum_{m \geq 3} \frac{e^m}{m!} k_{ij}^{(m)} = 0, \quad (5.26)$$

ou,

$$k_{02} = k_{02}^{(1)}e + \frac{1}{2}k_{02}^{(2)}e^2 + \sum_{m \geq 3} \frac{e^m}{m!} k_{ij}^{(m)} = 0, \quad (5.27)$$

estamos nas superfícies fronteira que dividem os setores de estabilidade e instabilidade do sistema que representa o problema abordado. Definindo iguais a zero os coeficientes de cada potência de  $e$  na expansão de  $k_{20}$  e  $k_{02}$ , encontramos duas superfícies no espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, e)$  emanando da curva  $\alpha = \frac{N^2}{4(1-q)}$  no plano  $e = 0$ .

### 5.6.1 Estabilidade no ponto de equilíbrio $P_1$

Nesta subseção exibiremos as superfícies que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade, emanando de retas no plano  $q\alpha$ , que possuem ressonâncias de Krein, estabelecendo para valores pequenos de  $e$ , quais setores no espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, e)$  o sistema Hamiltoniano original do problema aqui estudado, com ponto de equilíbrio  $P_1$  será estável ou instável.

## Superfícies que delimitam as regiões de estabilidade para ressonância de Krein do tipo $2\omega = 1$

Neste caso, para  $N = 1$ , encontramos pelo processo de Deprit Hori, os seguintes coeficientes para (5.26) e (5.27)

$$k_{20} = \frac{1}{16(1-q)} \left( 4 - 5q + 8a_1(1-q)^2 \right) e + \left[ a_2(1-q) - a_1^2(1-q)^2 - \frac{a_1}{4}(4-3q) - \frac{1}{128} \left( \frac{4-3q}{1-q} \right)^2 \right] e^2 + \dots$$

e,

$$k_{02} = \frac{1}{16(1-q)} \left( -4 + 5q + 8a_1(1+q)^2 \right) e + \left[ a_2(1-q) - a_1^2(1-q)^2 + \frac{a_1}{4}(4-3q) - \frac{1}{128} \left( \frac{4-3q}{1-q} \right)^2 \right] e^2 + \dots$$

Definindo iguais a zero os coeficientes na expansão em série de  $k_{20}$  obtemos as superfícies  $S_-$ ,  $S_+$  no espaço de parâmetros  $(q, \alpha, e)$  emanando da curva  $\alpha = \frac{1}{4(1-q)}$  quando  $e = 0$ . Sua parametrização é dada pela equação

$$\alpha^\mp = \frac{1}{4(1-q)} \pm a_1 e \pm a_2 e^2 + \pm a_3 \mp a_2 e^4 + \mathcal{O}(e^5),$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5q-4}{8(1-q)^2} \\ a_2 &= \frac{-16+24q-q^2}{128(1-q)^3} \\ a_3 &= \frac{64-880q+1756q^2-901q^3}{2048(1-q)^4} \\ a_4 &= \frac{-256-13056q+21792q^2+7152q^3-15297q^4}{98304(1-q)^5} \end{aligned}$$

A figura 5.4 mostra as superfícies que são limites comuns de regiões de estabilidade e instabilidade. Na figura, a superfície  $S^-$  é a folha à esquerda e  $S^+$  é a folha à direita. A região de instabilidade para  $P_1$  quando  $N = 1$  é a região entre as duas folhas  $S^-$  e  $S^+$ . Encontrando as superfícies limites para cada ressonância, temos as regiões de instabilidade entre as duas folhas determinadas para cada  $N = 1, 2, 3, \dots$ . As regiões de estabilidade são os componentes conectados abertos determinados pelo conjunto complementar das regiões de instabilidade. O espaço de parâmetros serão decompostas em sucessivas regiões de estabilidade / instabilidade com limites comuns.

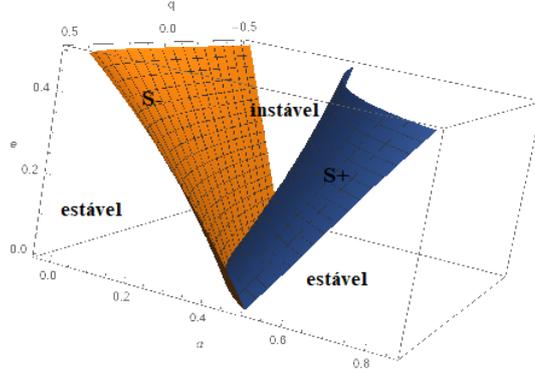


Figura 5.4: superfícies de estabilidade/instabilidade para  $N = 1$  no espaço dos parâmetros  $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto  $P_1$ .

### 5.6.2 Superfícies que delimitam as regiões de estabilidade para ressonância de Krein do tipo $2\omega = 2$

Analogamente ao caso exposto na seção anterior, para o caso com ressonância de Krein  $2\omega(q, \alpha_0) = 2$ , encontramos

$$k_{20} = \frac{1}{4}a_1(1-q)e - \left[ \frac{a_2}{2}(1-q) - \frac{a_1^2}{8}(1-q)^2 - \frac{11q^2 - 11q + 5}{24(1-q)^2} \right] e^2 + \dots$$

$$k_{02} = \frac{1}{4}a_1(1-q)e - \left[ \frac{a_2}{2}(1-q) - \frac{a_1^2}{8}(1-q)^2 - \frac{11q^2 - 11q + 5}{24(1-q)^2} + \frac{3q^2 - 3q + 1}{4(1-q)^2} \right] e^2 + \dots$$

Neste caso, as equações  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$  darão as superfícies,

$$\alpha^- = \frac{1}{1-q} - \frac{7q^2 - 7q + 1}{12(1-q)^3} e^2 + \frac{53q^4 + 950q^3 - 1557q^2 + 602q + 5}{3456(1-q)^5} e^4 + \mathcal{O}(e^5)$$

e,

$$\alpha^+ = \frac{1}{1-q} + \frac{5 + 11q + q^2}{12(1+q)^3} e^2 + \frac{723 + 5402q + 11541q^2 + 11894q^3 + 4555q^4}{3456(1+q)^5} e^4 + \mathcal{O}(e^5),$$

que está representado graficamente na figura 5.10.

**Observação 5.6.1.** *Prosseguindo com  $N = 3, 4, \dots$ , temos a sequência de superfícies limite das regiões de estabilidade e instabilidade, para os demais casos de ressonâncias paramétricas.*

Nas ilustrações a seguir, obtemos as superfícies fronteira quando  $N = 1$  e  $N = 2$  conforme figura 5.11. As regiões de estabilidade e instabilidade alternam com cada folha como um limite comum. Na figura 5.12 temos seções planares das regiões de estabilidade e instabilidade para o caso de carga  $q = -1$

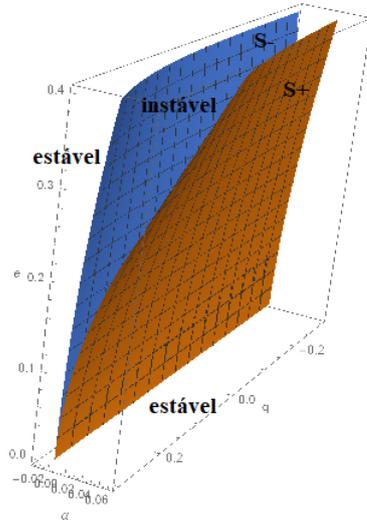


Figura 5.5: superfícies de estabilidade/instabilidade para  $N = 2$  no espaço dos parâmetros  $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto  $P_1$ .

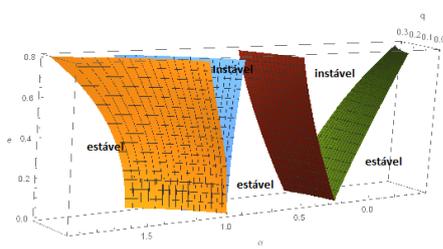


Figura 5.6: superfícies de estabilidade/instabilidade quando  $N = 1$  e  $N = 2$  no espaço dos parâmetros  $(\alpha, q, \epsilon)$ .

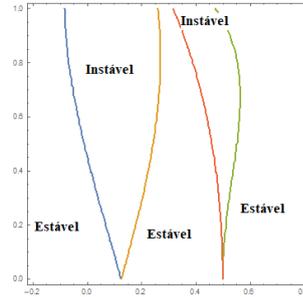


Figura 5.7: curvas de estabilidade/instabilidade quando  $N = 1$  e  $N = 2$  no plano dos parâmetros  $(\alpha, \epsilon)$ , quando  $q = -1$

### 5.6.3 Estabilidade paramétrica no ponto de equilíbrio $P_2$

Na seção anterior, fizemos a análise de estabilidade para a função Hamiltoniana em que descreve o movimento em torno do equilíbrio  $P_1$ . A seguir estabelecemos o limiar entre as regiões de estabilidade e instabilidade dos sistema Hamiltoniano não linear com ponto de equilíbrio  $P_2$  que é estável linearmente para  $q > 3$ , quando  $e = 0$ . Fazendo as expressões  $k_{2,0}$  e  $k_{02}$  iguais a zero, os coeficientes nas expansões em série com relação ao parâmetro  $e$ , obtemos superfícies no espaço de parâmetros  $(q, \alpha, e)$  emanando da curva  $\alpha = \frac{3N^2}{4(q-3)}$ , com  $N \geq 1$  e  $e = 0$ .

A análise realizada é a mesma que no caso do equilíbrio  $P_2$  e nas subseções mencionamos os resultados obtidos.

### Superfícies limites para ressonância $2\omega = 1$ no ponto $P_2$

Mais uma vez, pelo método de Deprit-Hori, obtemos

$$k_{20} = \left[ \frac{36 + 8a_1(q-3)^2 - 11q}{48(q-3)} \right] e + \left[ \frac{a_2}{3}(q-3) - \frac{a_1}{9}(q-3)^2 + \frac{a_1}{36} - \frac{1}{384(q-3)^2}(35q^2 - 248q + 432) \right] e^2 \dots,$$

$$k_{02} = \frac{-36 + 8a_1(q-3)^2 - 11q}{48(q-3)} e + \left[ \frac{a_2}{3}(q-3) - \frac{a_1}{9}(q-3)^2 + \frac{a_1}{36} - \frac{1}{384(q-3)^2}(35q^2 - 248q + 432) \right] e^2 \dots,$$

fazendo  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$ , conseguimos as funções de contorno,

$$\alpha = \frac{3}{4(q-3)} \pm a_1 e + a_2 e^2 \pm a_3 e^3 + a_4 e^4 + \mathcal{O}(e^5),$$

no qual,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{11q - 36}{8(q-3)^2} \\ a_2 &= \frac{-432 + 376q - 75q^2}{128(q-3)^3} \\ a_3 &= \pm \frac{5184 - 2832q + 28q^2 + 109q^3}{2048(q-3)^4} \\ a_4 &= \frac{-186624 - 214272q + 201248q^2 - 36464q^3 + 71q^4}{294912(q-3)^5} \end{aligned}$$

### Superfícies limites para a ressonância $2\omega = 2$ no $P_2$ .

Neste caso, encontramos as seguintes relações,

$$\begin{aligned} k_{20} &= \frac{1}{12} a_1 (q-3) e + \frac{-405 + 36a_2(q-3)^3 - 3a_1^2(q-3)^4 + 153q - 11q^2}{432(q-3)^2} e^2 + \dots \\ k_{02} &= \frac{1}{12} a_1 (q-3) e + \frac{81 + 36a_2(q-3)^3 - 3a_1^2(q-3)^4 - 45q + 7q^2}{432(q-3)^2} e^2 + \dots \end{aligned}$$

e as superfícies são

$$\alpha^- = \frac{3}{q-3} + \frac{11q^2 - 153q + 405}{36(q-3)^3} e^2 - \left[ \frac{23179q^4 - 384210q^3 + 2261277q^2 - 5632254q + 5006043}{93312(q-3)^5} \right] e^4 \dots,$$

$$\alpha^+ = \frac{3}{q-3} + \frac{7q^2 - 45q + 81}{36(q-3)^3} e^2 - \left[ \frac{139q^4 - 1170q^3 + 1053q^2 + 13122q - 32805}{93312(q-3)^5} \right] e^4 \dots,$$

onde,

As superfícies fronteiras para  $P_2$  quando  $N = 1$  e  $N = 2$  são mostradas na figura 5.14 e a seção definida pela curva 5.9 quando a carga elétrica no bulbo for  $q = -1$ .

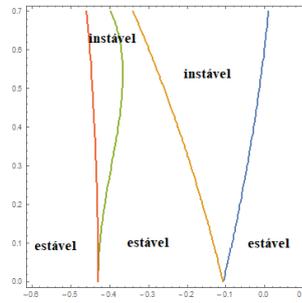
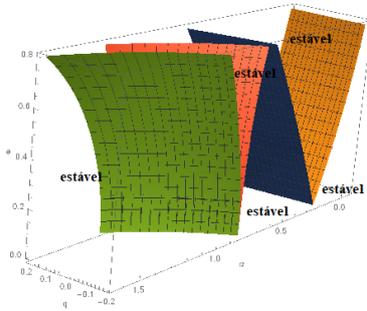


Figura 5.8: superfícies de estabilidade/instabilidade quando  $n = 1$  e  $n = 2$  no espaço dos parâmetros  $(\alpha, q, \epsilon)$ , no ponto  $P_1 = (\pi, 0)$ .

Figura 5.9: curvas de estabilidade/instabilidade quando  $n = 1$  e  $n = 2$  no plano dos parâmetros  $(\alpha, \epsilon)$ , quando  $q = -1$  no ponto  $P_2 = (\pi, 0)$ .

**Observação 5.6.2.** *Em suma, neste capítulo, encontramos as superfícies no espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, e)$  que separam as regiões de estabilidade das regiões de instabilidade, para os dois primeiros valores ressonantes, encontrando os coeficientes de suas parametrizações em função do parâmetro  $q$ . Fazendo uma seção por qualquer plano  $q = \text{constante}$ , obtemos as curvas neste plano das regiões de estabilidade e instabilidade. Em particular, quando fazemos a interseção dessas superfícies com o plano  $q = 0$ , e podemos descrever as curvas de estabilidade da equação de Mathieu com nossos coeficientes coincidindo com os apresentados no capítulo 5.*

## 5.7 Estabilidade paramétrica de um pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante entre duas retas verticais carregadas

Nesta última seção, tratamos o caso cujo ponto de suspensão,  $O$ , oscila verticalmente de forma harmônica, o bulbo possui um carga elétrica  $q$  e, além disso, está situado

entre duas retas verticais eletricamente carregadas. As retas possuem uma distribuição uniforme de cargas positivas e são equidistantes do ponto de suspensão do pêndulo, ver Fig. 5.10. O problema possui três parâmetros,  $\varepsilon$ , pequeno parâmetro associado à amplitude da oscilação e o comprimento do pêndulo,  $\alpha$ , parâmetro associado ao comprimento do pêndulo e à frequência da oscilação e, por fim,  $\mu$ , parâmetro relacionado ao comprimento do pêndulo e às cargas do bulbo e das retas verticais. Quando  $\varepsilon = 0$ , temos um pêndulo carregado entre duas retas verticais carregadas, mas com ponto de suspensão fixo. No caso de  $\mu = 0$ , temos a dinâmica de um pêndulo com ponto de suspensão oscilando harmonicamente na direção vertical.

O problema tratado aqui é descrito na formulação Hamiltoniano por (5.30) e possui dois pontos de equilíbrios,  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$ , ambos na vertical que passa pelo ponto de suspensão  $O$ . A variação do parâmetro  $\mu$  pode influenciar na estabilidade desses equilíbrios. Posteriormente, normalizamos, conforme visto no capítulo 3 o hamiltoniano linearizado nos equilíbrios, restritos às regiões no espaço do parâmetros  $\mu, \alpha$  para os quais são linearmente estáveis. Com o auxílio do método desenvolvido por Deprit- Hori, descrito no capítulo 4, construiremos as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ . Calculamos os coeficientes de suas parametrizações até a quinta ordem como função do parâmetro  $\mu$ . Quando consideramos seções planares  $\mu = \text{constante}$  obtemos curvas fronteiras neste plano das regiões de estabilidade/instabilidade. No caso particular quando  $\mu = 0$  obtemos as curvas fronteiras da equação de Mathieu, com nossos coeficientes coincidindo com os apresentados em [6] e conforme desenvolvido no capítulo 5 deste texto.

Em suma, o pêndulo com ponto de suspensão oscilante tem devida atenção desde os artigos advindos das pesquisas de Kapitsa [20, 21]. Seu estudo foi feito a partir de diferentes perspectivas e continua a atrair o interesse de pesquisadores de todo o mundo, consulte as referências [14, 15, 16, 22, 23, 25, 28, 29, 30]. Neste trabalho consideramos além da oscilação do ponto de suspensão, acrescentamos o efeito na dinâmica proveniente das cargas eletrostáticas, situadas no bulbo e nas linhas verticais eletrizadas uniformemente.

### 5.7.1 Formulação do Problema

Consideremos um pêndulo de comprimento  $l$ , cujo ponto de suspensão,  $S$ , está submetido a uma oscilação harmônica ao longo da vertical. A lei de formação da oscilação harmônica é dada pela função  $\rho = a \cos \nu t$ ,  $a > 0$ . A massa,  $m$ , do bulbo está eletricamente carregada. Além disso, o pêndulo está entre duas retas verticais, as quais possuem a mesma distribuição homogênea de carga elétrica positiva, cuja densidade linear é constante. As duas retas são equidistantes do ponto de suspensão do pêndulo, com distância  $d$  do ponto de suspensão para cada uma das retas.



agindo no bulbo é  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T} + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_l$ . Como  $\mathbf{e}_1 = \cos \theta \mathbf{e} - \sin \theta \mathbf{e}^\perp$ , igualando as componentes  $\mathbf{e}^\perp$  na equação da segunda Lei de Newton,  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ , obtemos a equação do movimento do pêndulo

$$ml\ddot{\theta} - m\dot{\rho}\sin\theta + mg\sin\theta + 2k_0q\sigma \left( \frac{1}{d-l\sin\theta} - \frac{1}{d+l\sin\theta} \right) \cos\theta = 0$$

Sendo  $\rho = a \cos \nu t$  a lei harmônica da oscilação no ponto de suspensão do pêndulo, é conveniente usarmos  $\rho = \nu\tau$  como nova variável independente. Assim  $\ddot{\theta} = \nu^2\theta''$  e  $\dot{\rho} = \nu^2\rho'$ , onde a linha denota a derivada com respeito a  $\tau$ . Escolhendo  $d = 2l$ , fazendo  $\alpha = \frac{g}{l\nu^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{a}{l}$ ,  $\mu = \frac{q}{l\sigma}$  e tomando  $\sigma$  tal que  $\frac{4k_0\sigma^2}{ml\nu^2} = 1$ , a equação do movimento se torna

$$\theta'' + \alpha \sin\theta + \varepsilon \cos\tau \sin\theta + \frac{\mu}{7 + \cos 2\theta} \sin 2\theta = 0. \quad (5.28)$$

$$\theta'' + \alpha \sin\theta + \varepsilon \cos\tau \sin\theta + \frac{2\alpha q}{7 + \cos 2\theta} \sin 2\theta = 0 \quad (5.29)$$

Quando  $\mu = 0$ , esta equação descreve o movimento de um pêndulo cujo ponto de suspensão oscila harmonicamente na direção vertical, ver [6]. Os valores  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  nos dão pontos de equilíbrios para todos os valores dos parâmetros. Queremos estudar a estabilidade paramétrica desses equilíbrios usando a formulação Hamiltoniana.

### 5.7.2 Formulação Hamiltoniana

Fazendo  $x = \theta$  e  $y = \theta'$ , obtemos um sistema Hamiltoniano,

$$x' = H_y, \quad y' = -H_x$$

cuja função Hamiltoniana é

$$H(x, y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2}y^2 - \alpha \cos x - \varepsilon \cos \tau \cos x - \frac{\mu}{2} \log(7 + \cos 2x). \quad (5.30)$$

Os pontos  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$  são equilíbrios deste sistema para todos os valores dos parâmetros. Quando  $\varepsilon = 0$  temos um sistema autônomo com um grau de liberdade. Para ambos os equilíbrios temos  $H_{yy} = 1$  e  $H_{xy} = 0$ . Calculando  $H_{xx}$  nos equilíbrios  $P_1$  e  $P_2$ , obtemos, respectivamente

$$H_{xx} = \frac{\mu}{4} + \alpha \quad \text{e} \quad H_{xx} = \frac{\mu}{4} - \alpha.$$

Assim, concluímos que o equilíbrio  $P_1$  é estável quando  $\mu > -4\alpha$  e instável para  $\mu < -4\alpha$  enquanto o equilíbrio  $P_2$  é estável quando  $\mu > 4\alpha$  e instável para  $\mu < 4\alpha$ .

### 5.7.3 Estabilidade Paramétrica

Estamos interessados no estudo da estabilidade paramétrica do sistema linearizado de (5.30) no espaço dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ . Para este fim, usaremos o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, ver [27], o qual enunciamos a seguir.

**Teorema 5.7.1** (Krein-Gelfand-Lidskii). *Considere um sistema Hamiltoniano linear, cuja função Hamiltoniana é da forma*

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (x_k^2 + y_k^2) + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, \quad (5.31)$$

onde  $H_1, H_2, \dots$  são formas quadráticas nas variáveis  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  com coeficientes contínuos e  $2\pi$  periódicos em  $t$ . Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, o sistema linear com hamiltoniano (5.31) é estável se, e somente se, a quantidades  $\sigma_k$  não estão vinculadas pelas relações

$$\sigma_k + \sigma_l = N, \quad (5.32)$$

com  $k, l = 1, 2, \dots, n$  e  $N = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

O sistema definido por (5.30) é um sistema Hamiltoniano dependendo do tempo. Depende também dos parâmetros  $\mu, \alpha$  e  $\varepsilon$ . Vamos estudar a estabilidade do sistema linearizado em torno dos equilíbrios  $P_1 = (0, 0)$  quando  $\mu > -4\alpha$  e  $P_2 = (\pi, 0)$  quando  $\mu > 4\alpha$ .

Fazendo  $\xi = x - x_0$  e  $\eta = y$ , com  $x_0 = 0$  para  $P_1$  e  $x_0 = \pi$  para  $P_2$ , as funções Hamiltonianas linearizadas são dadas por

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \left[ \varepsilon \cos \tau + \alpha + \frac{\mu}{4} \right] \xi^2 \quad \text{para } P_1 \quad (5.33)$$

$$H(\xi, \eta, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \left[ \varepsilon \cos \tau + \alpha - \frac{\mu}{4} \right] \xi^2 \quad \text{para } P_2 \quad (5.34)$$

Aplicando a mudança de variáveis simpléticas  $\xi, \eta \rightarrow x, y$  dadas pelas fórmulas

$$\xi = \omega^{-1/4} x, \quad \eta = \omega^{1/4} y$$

nos Hamiltonianos (5.33) e (5.34) e expandindo em séries de potências de  $\varepsilon$ , obtemos

$$H(x, y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \frac{x^2 \cos \tau}{2\omega} \varepsilon, \quad (5.35)$$

onde  $\omega^2 = \frac{\mu}{4} + \alpha$  para  $P_1$  e  $\omega^2 = \frac{\mu}{4} - \alpha$  para  $P_2$ .

Note que o Hamiltoniano (5.35) está na forma (5.31), sendo que a frequência  $\omega$  do sistema linear não perturbado depende dos parâmetros  $\mu$  e  $\alpha$ . Do Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, se para algum número inteiro  $N$  acontece  $2\omega(\mu, \alpha) = N$ , o sistema linear não perturbado não é parametricamente estável. Analisando o sistema no espaço

dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ , a equação  $2\omega(\mu, \alpha) = N$  define uma curva no subespaço  $(\mu, \alpha, 0)$ . Assim, para qualquer ponto  $(\mu_0, \alpha_0, 0)$  sobre essa curva, se  $\varepsilon > 0$  então o ponto  $(\mu_0, \alpha_0, \varepsilon)$  pode ou não ser estável. Construiremos, portanto, superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ . Essas superfícies serão definidas como gráficos sobre o plano  $(\mu, 0, \varepsilon)$ , expressas como séries de potências em  $\varepsilon$  e seus coeficientes dependendo de  $\mu$ , ou seja,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \alpha_4\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (5.36)$$

onde  $\alpha_j = \alpha_j(\mu)$ ,  $j \geq 1$ , são funções de  $\mu$ ,  $\alpha_0 = (N^2 - \mu)/4$  para  $P_1$  e  $\alpha_0 = (\mu - N^2)/4$  para  $P_2$  são curvas no plano  $(\mu, \alpha, 0)$  dadas pela equação  $2\omega(\mu, \alpha) = N$ . Os coeficientes  $\alpha_j$ ,  $j \geq 1$ , serão pelo algoritmo de Deprit-Hori.

Posteriormente, substituindo (5.36) nos Hamiltonianos (5.33), (5.34) e fazendo a mudança simplética de variáveis dada por

$$\xi = \omega_0^{-1/4} \tilde{X}, \quad \eta = \omega_0^{1/4} \tilde{Y}$$

e

$$\tilde{X} = X \cos(\sqrt{\omega_0}\tau) + Y \sin(\sqrt{\omega_0}\tau), \quad \tilde{Y} = -X \sin(\sqrt{\omega_0}\tau) + Y \cos(\sqrt{\omega_0}\tau),$$

obtemos o novo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(X, Y, \tau, \mu, \alpha, \varepsilon) = \frac{(-1)^{i+1} S^2 \cos \tau}{N} \varepsilon + \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha_j S^2}{4N} \varepsilon^j, \quad (5.37)$$

onde  $i = 1$  para  $P_1$ ,  $i = 2$  para  $P_2$  e  $S = X \cos(N\tau/2) + Y \sin(N\tau/2)$ . A rotação acima elimina o termo  $\mathcal{H}_0$  do hamiltoniano, ver [10], reduzindo substancialmente os cálculos dos coeficientes das superfícies fronteiras.

#### 5.7.4 Superfícies fronteira das regiões de estabilidade/instabilidade

Nesta seção, aplicamos o método de Depri-Hori [1, 12, 17, 27] ao Hamiltoniano (5.37) para encontrarmos superfícies fronteiras que separam as regiões de estabilidade e instabilidade. O método nos permite transformar, via mudança de variáveis simpléticas  $X, Y \rightarrow p, P$ , funções Hamiltonianas da forma

$$H(X, Y, \nu, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m(X, Y, \nu), \quad (5.38)$$

em um Hamiltoniano autônomo da forma

$$K(p, P) = k_{02}p^2 + k_{11}pP + k_{20}P^2, \quad (5.39)$$

onde  $k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} k_{ij}^{(m)} \varepsilon^m$ , com  $k_{ij}^{(m)}$  dependendo de  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

Aplicando o método de Depri-Hori ao Hamiltoniano (5.37), obtemos um Hamiltoniano da forma (5.39), cujo termo  $k_{11}$  é identicamente zero, o que implica uma equação característica da forma  $\lambda^2 + 4k_{20}k_{02} = 0$ . Assim, a região de estabilidade é determinada pela desigualdade  $k_{20}k_{02} > 0$ , cuja fronteira é dada pela equação  $k_{20}k_{02} = 0$ , ou seja, quando

$$k_{20} = 0 \quad \text{ou} \quad k_{02} = 0.$$

Fazendo igual a zero os coeficientes de todas as potências de  $\varepsilon$  nas expressões  $k_{20}$  e  $k_{02}$  encontramos os coeficientes  $\alpha_j(\mu)$  em (5.36) e, portanto, as superfícies fronteiras no espaço dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$ . As superfícies emanam da curva  $\alpha_0 = (N^2 - \mu)/4$  para  $P_1$  e  $\alpha_0 = (\mu - N^2)/4$  para  $P_2$  definidas pela equação  $2\omega(\mu, \alpha) = N$ ,  $N \geq 1$ , no plano  $\varepsilon = 0$ .

### Superfícies para o Equilíbrio P1

Nesta subseção encontramos as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade para o equilíbrio  $P_1$ . Para cada ressonância da forma  $2\omega = N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ , aplicando o método de Depri-Hori ao Hamiltoniano (5.37), com  $\omega_0 = \frac{\mu}{4} + \alpha_0$ . Quando  $N = 1$ , encontramos os seguintes coeficientes da função hamiltoniana autônoma

### Superfícies fronteira de estabilidade para ressonância do tipo $2\omega = 1$ em $P_1$

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{2} \\ k_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{16}(3 + 12\alpha_1 + 8\alpha_1^2 - 8\alpha_2) \\ k_{20}^{(3)} &= -\frac{3}{64} + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{3\alpha_1^2}{2} + \alpha_1^3 - \frac{3\alpha_2}{4} - \alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} \end{aligned}$$

e

$$k_{02}^{(1)} - k_{20}^{(1)} = -\frac{1}{2}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{3\alpha_1}{8},$$

$$k_{02}^{(3)} - k_{20}^{(3)} = \frac{3}{32} - 3\alpha_1^2 + \frac{3\alpha_2}{2}.$$

Fazendo igual a zero os coeficientes em  $k_{20}$  e  $k_{02}$  obtemos duas superfícies no espaço dos parâmetros. Suas parametrizações são dadas, respectivamente, pela equações

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{4} \mp \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \pm \frac{1}{32}\varepsilon^3 - \frac{1}{384}\varepsilon^4 \mp \frac{11}{4608}\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

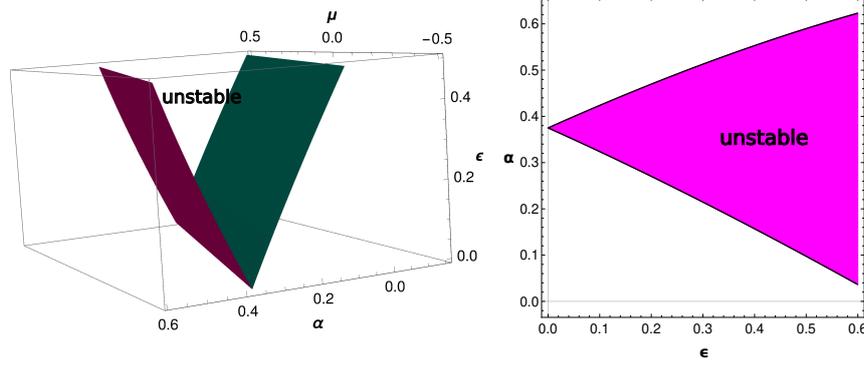


Figura 5.11: Superfície fronteira para  $P_1$  quando  $N = 1$ ; Seção planar quando  $\mu = -\frac{1}{2}$

As duas superfícies encontradas delimitam a região de instabilidade associada à ressonância  $2\omega = 1$  para o equilíbrio  $P_1$ . Na Fig. 5.11, à esquerda temos as superfícies delimitando a região de instabilidade enquanto à direita temos a seção planar dessa região no plano  $\mu = -\frac{1}{2}$ .

Na ressonância para  $N = 2$  as equações  $k_{20}$  e  $k_{02}$  são

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{4} \\ k_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{48}(5 + 9\alpha_1^2 + 12\alpha_2) \\ k_{20}^{(3)} &= \frac{1}{288}(70\alpha_1 + 45\alpha_1^3 - 108\alpha_1\alpha_2 + 72\alpha_3) \end{aligned}$$

e

$$k_{02}^{(1)} = k_{20}^{(1)}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{1}{8} + \frac{\alpha_1^2}{4}, \quad k_{02}^{(3)} - k_{20}^{(3)} = -\frac{\alpha_1}{48}(13 + 9\alpha_1^2 - 24\alpha_2).$$

Neste caso, as equações  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$  nos fornecem, respectivamente, as superfícies

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4 - \mu}{4} + \frac{5}{12}\varepsilon^2 - \frac{763}{3456}\varepsilon^4 + \frac{1002401}{4976640}\varepsilon^6 + \mathcal{O}(\varepsilon^7), \\ \alpha &= \frac{4 - \mu}{4} - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \frac{5}{3456}\varepsilon^4 - \frac{169249}{4976640}\varepsilon^6 + \mathcal{O}(\varepsilon^7). \end{aligned}$$

Na Fig. 5.12, a figura à esquerda nos mostra regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros associadas às ressonâncias  $2\omega = 1$  e  $2\omega = 2$  para o equilíbrio  $P_1$ . A figura à direita é uma seção planar dessas regiões no plano  $\mu = -\frac{1}{2}$ .

Quando  $N = 3$  obtemos

$$\begin{aligned} k_{20}^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{6} \\ k_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{864}(9 + 24\alpha_1 + 16\alpha_1^2 - 144\alpha_2) \\ k_{20}^{(3)} &= \frac{1}{15552}(-108 + 153\alpha_1 + 384\alpha_1^2 + 64\alpha_1^3 - 576\alpha_1\alpha_2 - 432\alpha_2 + 2592\alpha_3) \end{aligned}$$

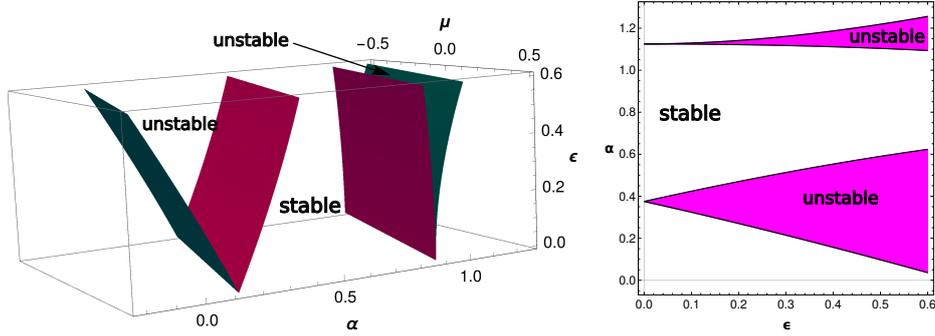


Figura 5.12: Superfícies fronteira para  $P_1$  quando  $N = 1$  e  $N = 2$ ; Seção planar quando  $\mu = -\frac{1}{2}$

e

$$k_{02}^{(1)} = k_{20}^{(1)}, \quad k_{02}^{(2)} - k_{20}^{(2)} = \frac{\alpha_1}{18}, \quad k_{02}^{(3)} - k_{20}^{(3)} = -\frac{1}{648}(9 + 32\alpha_1^2 - 36\alpha_2).$$

Fazendo  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$ , obtemos, respectivamente, as superfícies

$$\alpha = \frac{9 - \mu}{4} + \frac{1}{16}\varepsilon^2 \mp \frac{1}{32}\varepsilon^3 + \frac{13}{5120}\varepsilon^4 \pm \frac{5}{2048}\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

Continuando o processo para  $N = 4, 5, 6, \dots$  obtemos uma decomposição do espaço dos parâmetros  $(\mu, \alpha, \varepsilon)$  intercaladamente por regiões de estabilidade e regiões de instabilidade para o equilíbrio  $P_1$ . Na Fig. 5.13, a figura à esquerda nos mostra essa decomposição para  $N = 1, 2, 3$  no plano  $\mu = -\frac{1}{2}$ . A figura à direita é uma ampliação do caso  $N = 3$ .

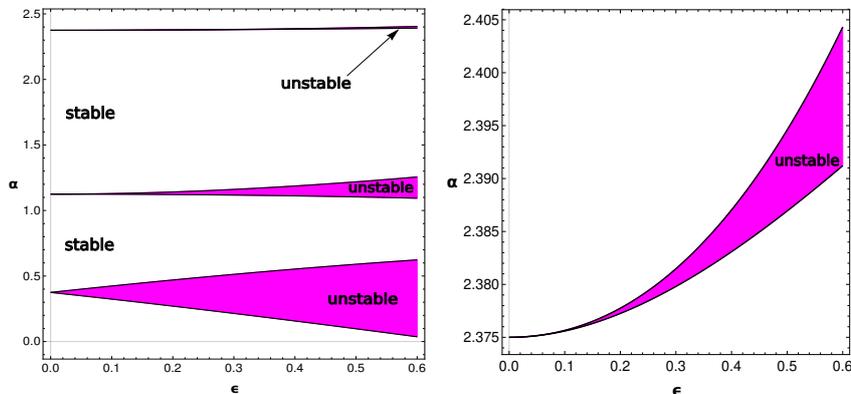


Figura 5.13: Seção Planar para  $\mu = -\frac{1}{2}$ ; Ampliação do caso  $N = 3$

## Superfícies para o Equilíbrio P2

No caso do equilíbrio  $P_2$  aplicamos o método de Deprit-Hori na função Hamiltoniana (5.37) para cada ressonância da forma  $2\omega = N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ , com  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{4} - \alpha_0$  e obtemos as seguintes superfícies.

Para  $N = 1$  as equações  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$  nos fornecem, respectivamente, as superfícies

$$\alpha = \frac{\mu - 1}{4} \mp \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \pm \frac{1}{32}\varepsilon^3 + \frac{1}{384}\varepsilon^4 \mp \frac{11}{4608}\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

Quando  $N = 2$ , as superfícies obtidas das equações  $k_{20} = 0$  e  $k_{02} = 0$  são, respectivamente

$$\alpha = \frac{\mu - 4}{4}$$

$$\alpha = \frac{\mu - 4}{4}.$$

Por fim, para  $N = 3$ , obtemos

$$\alpha = \frac{\mu - 9}{4} - \frac{1}{16}\varepsilon^2 \mp \frac{1}{32}\varepsilon^3 - \frac{13}{5120}\varepsilon^4 \pm \frac{5}{2048}\varepsilon^5 + \mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

Analogamente ao feito para  $P_1$ , continuando o processo para  $N = 4, 5, 6, \dots$  obtemos uma decomposição do espaço dos parâmetros  $(q, \alpha, \varepsilon)$  de regiões de estabilidade e regiões de instabilidade para o equilíbrio  $P_2$ . A Fig. 5.14 nos mostra essa decomposição para  $N = 1, 2, 3$  no plano  $\mu = 20$ .

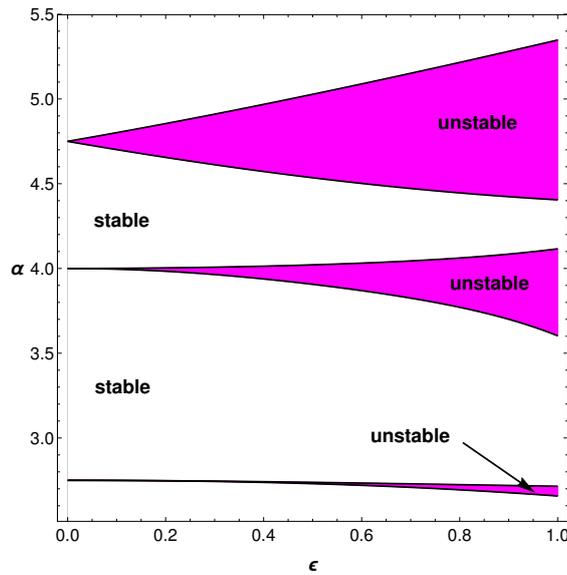


Figura 5.14: Seção Planar das regiões para  $\mu = 20$

**Observação 5.7.2.** *Enfim, estudamos nesta seção a formulação matemática da dinâmica que descreve um pêndulo matemático com ponto de suspensão oscilando verticalmente, de acordo com uma lei harmônica definida, tendo duas linhas verticais com distribuição uniforme de cargas elétricas, equidistantes do ponto de suspensão do pêndulo. A essência da pesquisa foi realizar a análise da estabilidade paramétrica deste fenômeno, nos dois casos que conseguimos determinar a estabilidade linear do problema, a saber, no ponto de equilíbrio  $P_1 = (0, 0)$  quando  $\mu > -4\alpha$  e no ponto  $P_2 = (\pi, 0)$  para valores da carga elétrica  $\mu > 4\alpha$ . Em seguida, após encontrarmos as ressonâncias paramétricas do problema, normalizarmos a parte quadrática da função Hamiltoniana e usarmos o método de Deprit-Hori, conseguimos encontrar as superfícies no espaço dos parâmetros que separam as regiões de estabilidade das regiões de instabilidade para pontos de equilíbrios determinados, no qual fizemos para o primeiros três valores ressonantes, determinando os coeficientes de suas parametrizações até a quinta ordem do parâmetro  $\varepsilon$  em função do parâmetro  $\mu$ . Para uma melhor compreensão, explicitamos algumas seções para valores do plano  $\mu = \text{constante}$ , e obtivemos as curvas fronteiras das regiões de estabilidade e instabilidade. Em particular, quando fizemos o intersecção dessas superfícies com o plano  $\mu = 0$ , obtivemos as curvas fronteiras da equação de Mathieu, com nossos coeficientes coincidindo com os apresentados em [6] para este equação clássica.*

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, G. C., CABRAL, H. E.: Parametric Stability in a  $P + 2$ -Body Problem. *J. Dyn Diff Equat.* **30**, 719-742 (2018).
- [2] ARAUJO, G. C., CABRAL, H. E.: Parametric Stability of a Charged Pendulum with an Oscillating Suspension Point. *Regular and Chaotic Dynamics*. Vol. 26, No 1, 39-60 (2021).
- [3] ARFKEN, George B., WEBER, Hans J. Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. Tradução de Arlete Simille Marques - Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [4] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [5] ARNOLD, V. I. Characteristic class appearing in the quantization condition. *Funkts. Anal. Primen.*, 1, n. 1, p.1-14, 1967.
- [6] BARDIN, B. S., MARKEEV, A. P.: The Stability of the Equilibrium of a Pendulum for Vertical Oscillations of the Point of Suspension. *J. App. Maths Mechs.* **59** (6), 879-886, (1995).
- [7] BRAUER, Fred. *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*. New York: W. A. Benjamin, 1969.
- [8] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle - Theorie et Applications*, Paris, 1987.
- [9] CABRAL, H.E., *Notas de aula: complementos ao livro do Markeev*.
- [10] CABRAL, H.E., Carvalho, A.C. *Parametric stability of a charged pendulum with oscillating suspension point*. *Journal of Differential Equations*, Volume 284, 2021, Pages 23-38, ISSN 0022-0396, <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.062>.
- [11] CABRAL, H.E., de A. AMORIM, T. *Subharmonic Solutions of a Pendulum Under Vertical Anharmonic Oscillations of the Point of Suspension*. *Regul. Chaot. Dyn.* **22**, 782-791 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1560354717070024>.

- [12] CABRAL, H. E., and DIAS BRANDÃO, L. F. M. Normal Forms for Hamiltonian Systems. Versão preliminar, 2020.
- [13] CANNAS, A. *Lectures on Symplectic Geometry*, Lect. Notes in Math. 1764, Springer Verlag, 2001.
- [14] Dadfar, M. B. and Geer, J. F., Power Series Solution to a Simple Pendulum with Oscillating Support, SIAM J. Appl. Math. , 1987, vol. 47, no. 4, pp. 737750.
- [15] FORMALSKII, A. M., Stabilization of an Inverted Pendulum with a Fixed or Movable Suspension Point, Dokl. Math. , 2006, vol. 73, no. 1, pp. 152156.
- [16] KALLU, K. D., NAWAZ, M. H., ABBAS, N., PRUNCU, C. I., and HASNAIN, C., Dynamic Response of an Inverted Pendulum System in Water under Parametric Excitations for Energy Harvesting: A Conceptual Approach, Energies , 2020, vol. 13, no. 19, Art. 5215, 15 pp.
- [17] KAMEL, A.: Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. Celest. Mech. **1**, 190-199 (1969).
- [18] KAPTIZA, P. L.: The dynamic stability of a pendulum for an oscillating point of suspension, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **21** (5), 588-598 (1951).
- [19] KAPTIZA, P. L.: A pendulum with a vibrating suspension. Uspekhi Fiz. Nauk. **44**(1), 7-20 (1951).
- [20] KAPTIZA, P. L., Pendulum with a Vibrating Suspension, Usp. Fiz. Nauk, 1951, vol. 44, pp. 720 (Russian). See also: Collected Papers of P. L. Kapitza: Vol. 2, D. ter Haar (Ed.), Oxford: Pergamon, 1965, pp. 726737.
- [21] KAPTIZA, P. L., The Dynamic Stability of a Pendulum for an Oscillating Point of Suspension, Zh. Èksp. Teor. Fiz. , 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588598 ( Russian ).
- [22] KHOLOSTOVA O. V., On motions of a pendulum with a vibrating suspension point, Teor. Mekh. , 2003, no. 24, pp. 157167 ( Russian ).
- [23] KHOLOSTOVA, O. V., On the Motions of a Double Pendulum with Vibrating Suspension Point, Mech. Solids , 2009, vol. 44, no. 2, pp. 184197; see also: Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela , 2009, no. 2, pp. 25-40.
- [24] KHOLOSTOVA, O. V. Some problems of the motion of a pendulum when there are horizontal vibrations of the point of suspension. J. Appl. Math Mechs. **59**, 553-561 (1995).
- [25] LEVI, M., Geometry of Kapitsa's Potentials, Nonlinearity , 1998, vol. 11, no. 5, pp. 13651368.

- [26] MADIGAN, C., *Pendulum with a Moving Pivot*, Truro, N.S.: Nova Scotia Agricultural College, 2007.
- [27] MARKEEV, A. P.: *Linear Hamiltonian Systems and Some Problems of Stability of the Satellite Center of Mass. Regular and Chaotics Dynamics*, Izhevsk (2009) **(in Russian)**.
- [28] MOROZOV, A. D., *The Problem of a Pendulum with an Oscillating Point of Suspension*, *J. Appl. Math. Mech.*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 563-570; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 590-598.
- [29] NEISHATADT, A. I. and Sheng, K., *Bifurcations of Phase Portraits of Pendulum with Vibrating Suspension Point*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 47, pp. 7180.
- [30] OVSEYEVICH, A. I., *The Stability of an Inverted Pendulum When There Are Rapid Random Oscillations of the Suspension Point*, *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 761-768; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 844-851.
- [31] SIEGEL, C. L., MOSER, J. K.: *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, New York (1971).
- [32] COSTA, S. da S. *Estabilidade de Sistemas Hamiltonianos via Índice de Morse*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Sergipe, 2013.
- [33] DOS SANTOS, F. *Formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- [34] PEDREIRA, Fabíola de O. *Formas Normais para Matrizes Hamiltonianas e Simpléticas*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2002.
- [35] DOS SANTOS, F. *Introdução à Álgebra Linear Simplética IV* Semana de Matemática. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia- Campos de Jequié.
- [36] KODAMA, Takeshi. *MECÂNICA - II*. Instituto de Física - UFRJ, 2004.
- [37] LANDAU, L., LIFCHITZ, E.. *Curso de física: mecânica*. [Mécanique (français)]. Tradução de José Severo de Camargo Pereira. São Paulo: Hemus, 2004.
- [38] MANDELSTAM, L., PAPALEXI, N. *Parametric excitation of electric oscillations*. *Technical Physics Journal*, v.4, n.1, 1934

- [39] MARKEEV, A.P. *Linear Hamiltonian Systems and some applications to the problem of stability of motion of satellites relative to the center of mass*, Moscou, 2009 (Tradução para o inglês Cabral, H.E.).
- [40] MEYER, Kenneth R., Glen R. Hall, Daniel Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 2009.
- [41] NAYFEH A.H.; MOOK D.T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley Classics Library Edition, New York. 1995
- [42] OLIVEIRA, Elisânia Santana de. *Formas Normais de Matrizes Hamiltonianas Degeneradas*. 2009.
- [43] RAND, Richard H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Ithaca NY, 2005. (Notas de aula).
- [44] ROQUE, ANTÔNIO. Notas de aulas - Física II - Ondas, Flidos e Termodinâmica - Aula 10. USP - São Paulo.
- [45] SOUZA, REGIVAN S. *Estabilidade paramétrica em sistemas Hamiltonianos com um grau e meio de liberdade*. Dissertação (Mestrado em Matemática), São Cristóvão - SE, 2015.
- [46] SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo:Editora Livraria da Física, 2011.
- [47] VIDAL, C. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, 2004. (Notas de curso).
- [48] VIDAL, C. *Una introducción a los sistemas Dinámicos Hamiltonianos*, Chile, 2017. (Notas de cursos).
- [49] VIDAL, C. *Transformações simpléticas, formas normais e sistemas Hamiltonianos*. Recife, 2001. (Notas de curso).
- [50] YAKUBOVICH, V. A., and STARZHINSKII, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*, vol. 1. Krieger Pub Co, 1975.
- [51] JESUS, Fernando Santos de. *Teoria da estabilidade paramétrica para sistemas Hamiltonianos com aplicação no problema do pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante*, São Cristóvão - SE, 2021.

# Capítulo 6

## Apêndice

### 6.1 Resultados Gerais

*Ao longo deste capítulo, iremos apresentar definições e resultados gerais da teoria para um estudo introdutório da estabilidade linear de sistemas Hamiltonianos. Abordaremos temas como espaços vetoriais simpléticos, transformações simpléticas e suas funções geradoras. Além disso, discutiremos algumas técnicas de equações diferenciais, abordando conceitos de estabilidade e instabilidade.*

Gostaríamos de enfatizar que todo este capítulo é baseado nas referências [9], [51], [12], [27], [40] e [48]. Mais precisamente, apresentamos observações e explicações dos conteúdos desenvolvidos nessas referências para fornecer uma compreensão introdutória da teoria de estabilidade de sistemas Hamiltonianos, que será abordada nas seções seguintes.

### 6.2 Sistemas Hamiltonianos

O sistema Hamiltoniano é um sistema com  $2n$  equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}} \end{cases}, \quad (6.1)$$

onde  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  é uma função escalar definida em um aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  denominada função Hamiltoniana do sistema. Os vetores  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  são chamadas de posição e momento, respectivamente, e  $t$  é o tempo. O número natural  $n$  é dito *grau de liberdade* do sistema. As variáveis  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  são ditas *variáveis conjugadas*. Quando a função Hamiltoniana depende do tempo, dizemos que o sistema Hamiltoniano tem  $n$  graus e meio de liberdade.

Podemos descrever o sistema Hamiltoniano de forma matricial, para isto, defina

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla_{\mathbf{z}}H = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

logo o sistema (6.1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z}, t), \quad (6.3)$$

onde  $J$  é denominada matriz padrão. Temos que  $J$  é uma matriz anti-simétrica  $J^T = -J$ , ortogonal  $J^{-1} = J^T$  e além disso,  $J^2 = -I$  e  $\det J = 1$ .

**Observação 6.2.1.** *De acordo com o Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias<sup>1</sup>, um dos resultados clássicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, para cada  $(\mathbf{z}_0, t_0)$  em  $\mathcal{O}$ , existe uma solução única  $\mathbf{z} = \varphi(t, \mathbf{z}_0, t_0)$  da equação (6.3) definida em uma vizinhança de  $t_0$  que satisfaz a condição inicial  $\varphi(t_0, \mathbf{z}_0, t_0) = \mathbf{z}_0$ .*

No caso especial em que a função Hamiltoniana  $H$  é independente do tempo, ou seja,  $H : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n}$  é um conjunto aberto, a equação diferencial (6.3) é chamada de autônoma, e o sistema Hamiltoniano é dito conservativo. Nesse caso, se  $\varphi$  é uma solução de (6.3), então para qualquer  $a$  em  $\mathbb{R}$ , a função  $\varphi^a : I+a \rightarrow \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  definida no intervalo  $I+a = s+a : s \in I$  por  $\varphi^a(t) = \varphi(t-a)$  também é uma solução de (6.3). Em outras palavras, as translações no tempo não alteram as soluções. Em particular, tomando  $a = t_0$  temos:

$$\varphi(t - t_0, \mathbf{z}_0, 0) = \varphi(t, \mathbf{z}_0, t_0).$$

Neste caso, também pode-se eliminar a dependência de  $t_0$  na solução, podendo-se escrever a solução como  $\varphi(t, \mathbf{z}_0)$  assim podemos dizer que as soluções são curvas parametrizadas em  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , e  $\mathcal{O}$  é denominado de espaço de fase.

**Definição 6.2.2.** *Uma integral primeira para (6.1) é uma função não constante  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é aberto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  que é constante ao longo das soluções de (6.1), ou seja,*

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t, \mathbf{z}_0)) = 0, \quad \forall t \in I,$$

onde  $\varphi(t, \mathbf{z})$  é a solução de (6.1) com condição inicial

$$\varphi(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0.$$

---

<sup>1</sup>O Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias estabelece que, para uma função contínua  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é localmente Lipschitziana em um conjunto aberto  $W$ , e dados  $(\mathbf{z}_0, t_0) \in U \times I$ , existe uma solução única  $\varphi(t)$  da equação  $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, t)$  definida em um intervalo maximal  $\omega_- < t < \omega_+$ , contendo  $t = t_0$ , com a condição inicial  $\varphi(t_0) = \mathbf{z}_0$  (ver mais detalhes em [48]).

**Proposição 6.2.3.** *Em um sistema Hamiltoniano autônomo a função  $H$  é uma integral primeira.*

**Demonstração:** Consideremos a função Hamiltoniana  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e seja  $\varphi(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  solução de (6.1). Definimos  $H$  a longo de  $\varphi$  por

$$H(\varphi(t)) = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Assim, para todo  $t$  temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt}H(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \\ &= H_{q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + H_{q_n} \cdot \dot{q}_n + H_{p_1} \cdot \dot{p}_1 + \dots + H_{p_n} \cdot \dot{p}_n \\ &= \langle H_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}, H_{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \langle -\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Assim, podemos observar que  $H(\varphi(t)) = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  é uma quantidade preservada ou uma constante de movimento. Em outras palavras,  $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$  para qualquer  $t$  no intervalo da solução, onde  $h$  é uma constante real. Nesse caso, dizemos que o sistema Hamiltoniano (6.1) é *conservativo*, e podemos afirmar que  $H$  representa a energia do sistema. Além disso, o conjunto definido por  $\sum_h = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}$ , para um valor arbitrário de  $h \in \mathbb{R}$ , é chamado de *superfície de energia*.

É importante notar que o fato de  $H$  ser uma integral primeira implica que as soluções estão contidas em alguma superfície de energia  $h$ . Em outras palavras, se  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  é uma solução de (6.1), então  $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$ , onde  $h$  pode ser negativo, zero ou positivo, dependendo da solução em questão. Portanto,  $\sum_h$  é um conjunto invariante, o que significa que se uma solução com uma determinada condição inicial está sobre  $\sum_h$ , então ela permanecerá em  $\sum_h$  para todo  $t$ .

### 6.2.1 Colchete de Poisson

Muitas das propriedades dos sistemas Hamiltonianos são formuladas em termos do operador Colchete de Poisson. O método de Deprit-Hori é um exemplo importante disso e desempenha um papel fundamental na compreensão do contexto desenvolvido nos capítulos posteriores. A seguir, apresentaremos a definição formal e algumas propriedades desse operador, que podem ser exploradas em maior detalhe em [48].

**Definição 6.2.4.** *Sejam  $F, G$  e  $H$  funções de classe  $C^\infty$  definidas no aberto  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definimos o colchete de Poisson de  $F$  e  $G$  por*

$$\{F, G\} : W \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $\{F, G\}$  leva o ponto  $(q, p, t)$  em

$$\{F, G\} = (\nabla F)^T J \nabla G = \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^T \frac{\partial G}{\partial p} - \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^T \frac{\partial G}{\partial q} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

**Observação 6.2.5.**

- $\{F, G\}$  é uma função  $C^\infty$  de  $W$  em  $\mathbb{R}$ , pois a sua lei é formada por derivadas parciais de funções  $C^\infty$ .
- Observa-se também que  $\{F, G\} = \langle F_q, G_p \rangle - \langle F_p, G_q \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno canônico sobre o espaço vetorial estudado.

**Proposição 6.2.6.** *Sejam  $F, G$  e  $H$  funções de classe  $C^\infty$  definidas no aberto  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . O operador Colchete de Poisson é uma forma bilinear antissimétrica que satisfaz a identidade de Jacobi*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

E além disso,  $\frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}$ .

**Teorema 6.2.7.** *Sejam  $F, G$  e  $H$  funções de classe  $C^\infty$  definidas no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  (independentes de  $t$ ), então*

- 1)  $F$  é uma integral primeira para (6.3) se, e só se  $\{F, H\} = 0$ ;
- 2) Se  $F$  e  $G$  são integrais primeiras, então  $\{F, H\}$  também é;
- 3)  $\{F, H\}$  é a taxa de variação de  $F$  com respeito ao tempo, ao longo das soluções de (6.3).

**Demonstração:** Para verificar 1) considere  $\varphi(t) = (q(t), p(t))$  solução de (6.3) e defina  $F$  ao longo da solução como,

$$F(t) = F(q(t), p(t)).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{\partial F^T}{\partial q} \dot{q}(t) + \frac{\partial F^T}{\partial p} \dot{p}(t) = \frac{\partial F^T}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F^T}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \{F, H\}.$$

Logo,  $F$  é integral primeira se, e só se  $\{F, H\} = 0$ .

Para o item 2), vamos mostrar que a definição da derivada  $\{F, H\}$  aplicada na solução do sistema (6.3) é nula para todo  $t$ . Com efeito, escreva inicialmente

$$F(t) = F(q(t), p(t)) \quad e \quad G(t) = G(q(t), p(t)).$$

Utilizando a definição da derivada do Colchete de Poisson apresentada na proposição 6.2.6, juntamente com o fato de que  $F$  e  $G$  são integrais primeiras de (6.3), e utilizando também o item 1) deste teorema, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ F(t), G(t) \right\} &= \left\{ \frac{\partial F(t)}{\partial t}, G(t) \right\} + \left\{ F(t), \frac{\partial G(t)}{\partial t} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\partial F^T(t)}{\partial q} \dot{q}(t) + \frac{\partial F^T(t)}{\partial p} \dot{p}(t), G(t) \right\} \\
&\quad + \left\{ F(t), \frac{\partial G^T(t)}{\partial q} \dot{q}(t) + \frac{\partial G^T(t)}{\partial p} \dot{p}(t) \right\} \\
&= \left\{ \frac{\partial F^T(t)}{\partial q} \frac{\partial H(t)}{\partial p} - \frac{\partial F^T(t)}{\partial p} \frac{\partial H(t)}{\partial q}, G(t) \right\} \\
&\quad + \left\{ F(t), \frac{\partial G^T(t)}{\partial q} \frac{\partial H(t)}{\partial p} - \frac{\partial G^T(t)}{\partial p} \frac{\partial H(t)}{\partial q} \right\} \\
&= \{ \{ F(t), H(t) \}, G(t) \} + \{ F(t), \{ G(t), H(t) \} \} = 0.
\end{aligned}$$

■

## 6.2.2 Sistemas Hamiltonianos lineares

Na literatura, é comum estudar fenômenos que podem ser formulados matematicamente como sistemas Hamiltonianos, sendo que muitos desses sistemas são não lineares e apresentam uma complexidade significativa em seu estudo. No entanto, em certos casos, busca-se encontrar uma formulação equivalente em que o sistema Hamiltoniano seja linear. Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados relevantes sobre sistemas Hamiltonianos lineares.

Dizemos que um sistema Hamiltoniano (6.3) é linear quando é possível escrevê-lo no modelo:

$$\dot{\mathbf{z}} = JS(t)\mathbf{z} = A(t)\mathbf{z}, \quad (6.4)$$

onde  $A(t) = JS(t)$  é chamada de matriz de coeficientes do sistema e  $S(t)$  é uma matriz simétrica para cada instante de tempo  $t$ . Nesse caso, a função Hamiltoniana assume uma forma quadrática dada por

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S(t) \mathbf{z}. \quad (6.5)$$

Analisemos que a função (6.5) é a função Hamiltoniana do sistema (6.4) para caso de dimensão  $2 \times 2$ . Em outras palavras, iremos mostrar que  $\dot{\mathbf{z}} = \nabla_{\mathbf{z}} H$ . Primeiramente, vamos denotar uma matriz simétrica  $S$  como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Assim, para  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ , o sistema (6.4) pode ser reescrito da forma,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bq + cp \\ -(aq + bp) \end{pmatrix}.$$

Por sua vez,

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$H = \frac{1}{2}(aq^2 + 2bpq + cp^2).$$

Consequentemente,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \end{pmatrix},$$

como queríamos verificar.

A seguir, apresentaremos a definição de matrizes Hamiltonianas e alguns resultados relevantes que são importantes para a compreensão de certos aspectos que serão abordados neste texto.

**Definição 6.2.8.** *Uma matriz  $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  é dita Hamiltoniana se satisfaz  $A^T J + JA = 0$ .*

Observe que a matriz  $A(t)$  do sistema (6.4) é Hamiltoniana. Pois,

$$JA(t) = J^2 S(t) = -S(t) = S(t)J^2 = S(t)^T J J = -(JS(t))^T J = -A(t)^T J.$$

Agora, vejamos alguns resultados que caracterizam matrizes Hamiltonianas.

**Teorema 6.2.9.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $A$  é Hamiltoniana;
2.  $A = JA^T J$ ;
3.  $A = JR$ , com  $R$  simétrica;
4.  $JA$  é simétrica.

**Demonstração:** Inicialmente, suponhamos que a matriz  $A$  seja Hamiltoniana. Lembremos que  $J^{-1} = -J$ . Então, usando a definição de Hamiltoniana

$$\begin{aligned} A^T J + J A &= 0 \\ J A &= -A^T J \\ A &= J^{-1}(-A^T J) \\ A &= J A^T J. \end{aligned}$$

Isto mostra que 1. implica 2.. Agora, consideremos  $A = J A^T J$ . Tome  $R = A^T J$ , notemos que  $R$  é simétrica, pois

$$R^T = J^T A = -J(J A^T J) = -J^2(A^T J) = A^T J = R.$$

Suponha  $A = J R$ , com  $R$  simétrica. Então,  $J A = J^2 R = -R$ . Daí, como  $-R$  é simétrica, segue que  $J A$  é simétrica. Por fim, se  $J A$  é simétrica então  $J A = (J A)^T = A^T J^T = -A^T J$ . Assim,  $A^T J + J A = 0$  e pela Definição (6.2.8)  $A$  é Hamiltoniana. ■

Uma consequência importante desse teorema é que, para um sistema Hamiltoniano linear, a matriz  $A(t)$  dos coeficientes é uma matriz Hamiltoniana. Isso significa que, se o sistema pode ser escrito na forma  $\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}$ , então a matriz  $A(t)$  satisfaz as propriedades da matriz Hamiltoniana, ou seja, é uma matriz anti-simétrica e não singular. Essa propriedade é essencial para a análise e estudo dos sistemas Hamiltonianos lineares, pois permite a utilização de propriedades específicas das matrizes Hamiltonianas na análise de estabilidade e comportamento dinâmico desses sistemas.

**Proposição 6.2.10.** *O polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana  $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  é uma função par.*

**Demonstração:** Considere o polinômio característico de  $A$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I), \tag{6.6}$$

Pelo teorema 6.2.9 temos que  $A = J S$ , onde  $S$  é uma matriz simétrica e pelas propriedades da matriz padrão  $J$ , segue

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(J S - \lambda I) = \det([J S - \lambda I]^T) = \det(S^T J^T - \lambda I) = \det(-S J - \lambda I) \\ &= \det(J^2 S J + \lambda J^2) = \det(J(J S + \lambda I)J) \\ &= \det J \cdot \det(J S + \lambda I) \cdot \det J = \det(J S + \lambda I) = p(-\lambda). \end{aligned}$$

■

Segue da proposição acima que o polinômio característico  $p(\lambda)$  dado em (6.6), contém apenas potências pares de  $\lambda$ . Portanto, se este tem uma raiz do tipo  $\lambda = a + ib$ ,

necessariamente,  $-\lambda = -a - ib$  também será raiz. Se  $\lambda = 0$  é um autovalor, este terá multiplicidade par. Por outro lado, desde que  $A$  é uma matriz com coeficientes reais, então  $\bar{\lambda}$  também será um autovalor de  $A$ . De fato,

$$p(\bar{\lambda}) = \det(A - \bar{\lambda}I) = \det(\bar{A} - \bar{\lambda}I) = 0.$$

Resumindo, se  $\lambda$  é um autovetor de  $A$  então  $-\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $-\bar{\lambda}$  também serão.

**Teorema 6.2.11.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes Hamiltonianas de mesma ordem. Então  $A^T$ ,  $\alpha A$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $A \pm B$  e  $[A, B] = AB - BA$  também são Hamiltonianas.*

**Demonstração:** Observe que, pelo fato de  $A$  ser Hamiltoniana, usando o teorema 6.2.9 podemos afirmar que  $A = JA^TJ$  e pelo fato de  $J^2 = -I$ ,

$$(A^T)^T J + JA^T = AJ + JA^T = (JA^T J)J + JA^T = -JA^T + JA^T = 0.$$

Assim,  $A^T$  é Hamiltoniana.

Por sua vez, para  $\alpha A$ , temos  $(\alpha A)^T J + J(\alpha A) = \alpha(A^T J + JA) = 0$ .

Note que  $(A + B)^T J + J(A + B) = A^T J + B^T J + JA + JB = 0$ , logo  $A + B$  é Hamiltoniana, e de maneira análoga mostra-se que  $A - B$  é Hamiltoniana.

Por fim, consideremos o caso de  $[A, B]$ . Como  $A$  e  $B$  é Hamiltoniana, temos que  $A = JR$  e  $B = JS$  com  $R$  e  $S$  simétricas. Então,

$$[A, B] = JRJS - JSJR = J(RJS - SJR).$$

Escrevendo  $P = (RJS - SJR)$  temos que  $P$  é simétrica. De fato,

$$P^T = S^T J^T R^T - R^T J^T S^T = -SJR + RJS = P.$$

Com isso, pelo teorema 6.2.9 concluímos que  $[A, B]$  é Hamiltoniana. ■

A seguir vamos caracterizar uma matriz Hamiltoniana quadrada de ordem 2.

**Proposição 6.2.12.** *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$$

*é Hamiltoniana se, e somente se,  $a^T + d = 0$  e  $b$  e  $c$  são simétricas.*

**Demonstração:** Escrevendo a matriz  $A$  em forma de blocos,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

temos

$$\begin{aligned}
 A^T J + J A = 0 &\iff \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a - d^T & b^T - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff c - c^T = 0, \quad b^T - b = 0 \text{ e } a^T + d = 0 \\
 &\iff c = c^T, \quad b = b^T \text{ e } a^T + d = 0.
 \end{aligned}$$

■

**Observação 6.2.13.** Quando  $n = 1$ , as condições se reduzem a dizer que o traço é nulo e  $b = c$ .

Existem eventos naturais clássicos que podem ser formulados como sistemas de equações diferenciais e escritos na forma de sistemas Hamiltonianos. Alguns exemplos incluem sistemas mecânicos, como o oscilador harmônico simples (que inclui o sistema massa-mola sem atrito e o pêndulo simples), osciladores não lineares e sistemas newtonianos. A seguir, veremos alguns exemplos clássicos da Mecânica Clássica e da Mecânica Celeste.

**Exemplo 6.2.14.** (*Coordenadas rotatórias*) Considere um sistema de coordenadas fixas  $(x, y)$  em um plano, e um sistema de coordenadas rotativas  $(\xi, \eta)$  que gira em relação ao sistema fixo com velocidade angular constante  $\omega$ . Vamos obter as equações de movimento de um sistema de partículas  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  de massas  $m_1, \dots, m_n$  que se movem no plano  $xy$  sob a influência das forças provenientes de um potencial  $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ .

Introduzimos um referencial ortogonal:

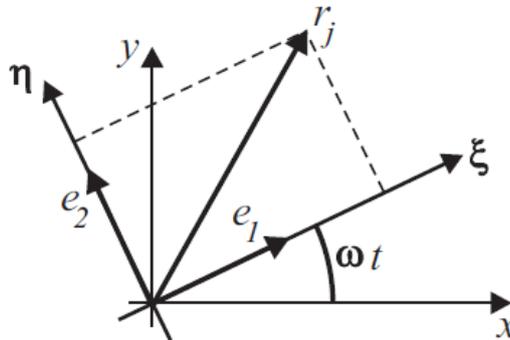


Figura 6.1: Referencial ortogonal. Figura retirada da referência [34]

$$e_1 = (\cos \omega t, \sin \omega t) \quad e_2 = (\sin \omega t, \cos \omega t),$$

e observemos que

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega \mathbf{e}_2 \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega \mathbf{e}_1.$$

Sejam  $\xi_j, \eta_j$  as coordenadas do vetor  $\mathbf{r}_j$  no sistema rotatório, isto é

$$\mathbf{r}_j = \xi_j \mathbf{e}_1 + \eta_j \mathbf{e}_2, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.7)$$

Derivando (6.7) com relação a  $t$ ,

$$\dot{\mathbf{r}}_j = (\dot{\xi}_j - \omega \eta_j) \mathbf{e}_1 + (\dot{\eta}_j - \omega \xi_j) \mathbf{e}_2, \quad (6.8)$$

assim como, derivando (6.8), obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = (\ddot{\xi}_j - 2\omega \dot{\eta}_j - \omega^2 \xi_j) \mathbf{e}_1 + (\ddot{\eta}_j + 2\omega \dot{\xi}_j - \omega^2 \eta_j) \mathbf{e}_2.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_j} U &= \langle \nabla_{\mathbf{r}_j} U \cdot \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{r}_j} U \cdot \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \\ &= \langle DU(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \xi_j} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle DU(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \eta_j} \rangle \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial \eta_j} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Assim, as equações do movimento

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = -\nabla_{\mathbf{r}_j} U, \quad (j = 1, \dots, n),$$

são escritas nas coordenadas rotatórias  $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ , sob a forma

$$\begin{cases} m_j(\ddot{\xi}_j - 2\omega \dot{\eta}_j - \omega^2 \xi_j) = -\frac{\partial U}{\partial \xi_j} \\ m_j(\ddot{\eta}_j + 2\omega \dot{\xi}_j - \omega^2 \eta_j) = -\frac{\partial U}{\partial \eta_j} \end{cases}, \quad (6.9)$$

com  $j = 1, \dots, n$ . Introduzindo as variáveis,

$$x_{2j-1} = \xi_j, \quad x_{2j} = \eta_j, \quad y_{2j-1} = m_j(\dot{\xi}_j - \omega \eta_j), \quad y_{2j} = m_j(\dot{\eta}_j + \omega \xi_j),$$

com  $j = 1, \dots, n$ . Consequentemente, o sistema (6.9) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_{2j-1} = \frac{1}{m_j} y_{2j-1} + \omega x_{2j} \\ \dot{x}_{2j} = \frac{1}{m_j} y_{2j} - \omega x_{2j-1} \\ \dot{y}_{2j-1} = m_j(\ddot{\xi}_j - \omega \dot{\eta}_j) = \omega m_j(\dot{\eta}_j + \omega \xi_j) - \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \omega y_{2j} - \frac{\partial U}{\partial x_{2j-1}} \\ \dot{y}_{2j} = m_j(\ddot{\eta}_j + \omega \dot{\xi}_j) = -\omega m_j(\dot{\xi}_j + \omega \eta_j) - \frac{\partial U}{\partial \eta_j} = -\omega y_{2j-1} - \frac{\partial U}{\partial x_{2j}}, \end{cases},$$

e concluímos que nas variáveis  $(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$  ele é um sistema Hamiltoniano com  $2n$  graus de liberdade

$$\dot{x}_l = H_{y_l}, \quad \dot{y}_l = -H_{x_l}, \quad (l = 1, \dots, 2n)$$

com função Hamiltoniana  $H = H(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})$  dada por:

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{(y_{2j-1}^2 + y_{2j}^2)}{2m_j} - \omega \sum_{j=1}^n (x_{2j-1}y_{2j} - x_{2j}y_{2j-1}) + U(x_1, \dots, x_{2n}).$$

O termo adicional  $-\omega \sum_{j=1}^n (x_{2j-1}y_{2j} - x_{2j}y_{2j-1})$  é chamado o termo de **Coriolis** e provêm do fato de usarmos um sistema rotatório de coordenadas.

**Exemplo 6.2.15.** (O Pêndulo Simples de Galileu). Este sistema mecânico em questão se trata de uma massa  $m$  fixada a extremidade de uma haste inextensível e imponderável, de comprimento  $l$ , possuindo uma outra extremidade articulada em um pino de modo que o objeto de massa  $m$  pode rotacionar em torno do pino um plano, sem atrito.

A força unitária que atua sobre a massa é  $F = P + T$ , sendo que  $P$  é a força-peso da massa, a saber,  $\|P\| = mg$ , e  $T$  é a tração da haste sobre a massa.

Vamos Introduzir os vetores unitários(Figura 1.2)

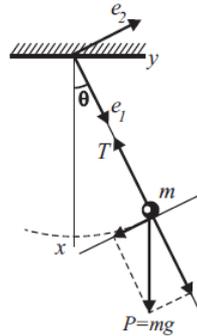


Figura 6.2: Referencial ortogonal. Figura retirada da referência [34]

Perceba que  $e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  ;  $e_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ ;

daí, podemos concluir resumidamente que:  $\dot{e}_1 = \dot{\theta}e_2$ , analogamente,  $\dot{e}_2 = -\dot{\theta}e_1$ .

Sendo  $r = le_1$  a posição da massa  $m$  no sistema  $XY$ , obtemos o fato de que  $\dot{r} = l\dot{\theta}e_2$  e  $\ddot{r} = -l\dot{\theta}^2e_1 + l\ddot{\theta}e_2$ .

Como, temos que:

$$F = (F \cdot e_1)e_1 + (F \cdot e_2)e_2 = mg \sin(\theta)e_2 + (mg \cos(\theta) - \|T\|)e_1,$$

usando a equação newtoniana do movimento

$$F = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot \ddot{r}$$

podemos decompor em

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - \|T\|$$

e

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta)$$

A equação acima a esquerda determina o valor de tensão aplicado na haste em cada instante, já a equação a direita define a dinâmica da massa  $m$ . A saber:

$$\|T\| = mg \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2$$

e

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

A energia potencial do sistema acima pode ser descrita pela seguinte equação:

$$U = \int_0^\theta \frac{g}{l} \sin(\alpha) d\alpha = \frac{g}{l}(1 - \cos(\theta))$$

Podemos analisar que, se supormos  $x = \theta$  e  $y = \dot{\theta}$ , temos a possibilidade de reescrevermos a equação acima na forma Hamiltoniana:

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x,$$

Onde, a função Hamiltoniana não-linear é dada por  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(\theta))$ .

Vamos explorar um exemplo significativo no âmbito do nosso estudo neste texto. Este exemplo se enquadra na classe conhecida como oscilações paramétricas, que ocorrem quando a ação de uma força externa sobre um oscilador harmônico resulta em uma variação temporal dos parâmetros do sistema. Para obter mais detalhes sobre a formulação de problemas nessa área, consulte [37]. Um exemplo prático disso é o pêndulo simples, no qual aplicamos uma força que periodicamente varia o comprimento, provocando oscilações paramétricas no sistema. Esse tipo de oscilação também pode ser observado em circuitos elétricos, estudados por Mandelstam e Papalexi em 1934, como mencionado em [38]. Ao contrário dos osciladores harmônicos, as equações de movimento dos sistemas paramétricos são compostas por equações diferenciais cujos coeficientes variam no tempo, geralmente de maneira periódica. Para mais detalhes, consulte [41].

**Exemplo 6.2.16.** (*Pêndulo com oscilações verticais do ponto de suspensão*)

Nosso objetivo inicial neste exemplo é formular o problema e derivar a equação que descreve o movimento de um pêndulo com oscilações verticais no ponto de suspensão, expressando-o como um sistema Hamiltoniano. Concluiremos o exemplo apresentando a função Hamiltoniana associada ao sistema.

Considere um pêndulo com uma haste rígida de massa desprezível e comprimento  $l$ , movendo-se em um plano vertical em torno de uma extremidade, com o ponto de suspensão sujeito a oscilações verticais descritas pela lei harmônica  $\rho(t) = A \cos(\omega t)$ , onde  $A$  representa a amplitude e  $\omega$  é a frequência. A figura 6.4 ilustra essa configuração.

Para análise, estabelecemos um sistema de coordenadas  $Oxy$ , com a origem localizada na linha vertical que passa pelo ponto de suspensão. O eixo  $Ox$  é orientado verticalmente para baixo e o eixo  $Oy$  aponta horizontalmente para a direita. Seja  $\mathbf{r} = OP$  o vetor de posição da massa  $m$  localizada no ponto  $P$ , a extremidade livre da haste do pêndulo.

Considerando um sistema de coordenadas inercial, fixamos uma base ortonormal  $\beta = \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  no ponto  $O$ , em que o primeiro vetor está direcionado para baixo e o segundo para a direita. Denotamos por  $\theta = \theta(t)$  o ângulo entre a haste e o vetor  $\mathbf{E}_1$ , e por  $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{E}_1$  o vetor de posição do ponto de suspensão.

Introduzimos um sistema de coordenadas móvel, que possui uma base ortonormal  $\beta' = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , como mostrado na figura 6.4.

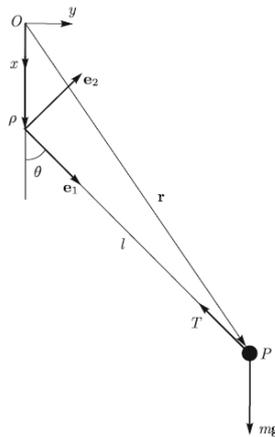


Figura 6.3: Pêndulo com ponto de suspensão oscilante.

Para obter a equação que modela o movimento do pêndulo notemos que, pela figura 6.4 podemos extrair as seguintes relações entre as bases  $\beta$  e  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \theta \mathbf{E}_1 + \sin \theta \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \theta \mathbf{E}_1 + \cos \theta \mathbf{E}_2, \end{aligned} \tag{6.10}$$

e,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \cos\theta\mathbf{e}_1 - \text{sen}\theta\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_2 &= \text{sen}\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Derivando as equações (6.10) com relação ao tempo (lembre-se que  $\theta = \theta(t)$ ), obtemos

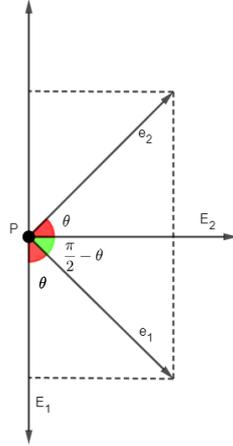


Figura 6.4: Representação das bases  $\beta$  e  $\beta'$  com o mesmo ponto de origem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \dot{\theta}\mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_1.\end{aligned}\quad (6.12)$$

Por sua vez, pela soma de vetores, o vetor posição  $\mathbf{r}$  do bulbo no instante  $t$  é descrito por,

$$\mathbf{r} = l\mathbf{e}_1 + \rho = l\mathbf{e}_1 + \rho\mathbf{E}_1.$$

Pelo fato de  $\dot{\mathbf{E}}_i = 0$ , ( $i = 1, 2$ ), temos que,  $\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\rho}\mathbf{E}_1$  e usando (6.12), obtemos  $\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\theta}\mathbf{e}_2 + \dot{\rho}\mathbf{E}_1$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= l(\ddot{\theta}\mathbf{e}_2 + \dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_2) + (\ddot{\rho}\mathbf{E}_1) \\ &= (\ddot{\rho}\cos\theta - l(\dot{\theta})^2)\mathbf{e}_1 + (l\ddot{\theta} - \ddot{\rho}\text{sen}\theta)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Desejamos saber a força total do sistema mecânico. Desconsiderando a resistência do ar, a força total presente no bulbo é a seguinte soma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T}\quad (6.13)$$

na qual,  $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_1$  é o vetor tração da haste. Já  $\mathbf{F}_g$  é a força gravitacional, que em coordenadas giratórias assume a forma

$$\mathbf{F}_g = mg\mathbf{E}_1 = mg(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \text{sen}\theta\mathbf{e}_2).$$

Por sua vez, pela lei da dinâmica de Newton  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ . Assim, por (6.13) temos a decomposição,

$$\begin{aligned}(\ddot{\rho}\cos\theta - l(\dot{\theta})^2) &= -mg\cos\theta - \|T\|, \\ (l\ddot{\theta} - \ddot{\rho}\text{sen}\theta) &= -mg\text{sen}\theta.\end{aligned}\quad (6.14)$$

A primeira equação em (6.14) determina a tensão na haste em cada instante, e a segunda,

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{l} - \frac{\ddot{\rho}}{l} \right) \text{sen}\theta = 0,$$

define a dinâmica da massa  $m$  que se encontra na extremidade da haste.

Lembremos que, o movimento harmônico do ponto de suspensão é dado por  $\rho(t) = A \cos(\omega t)$  onde  $A$  é a amplitude e  $\omega$  a frequência. Façamos  $\tau = \omega t$  e denotemos por  $'$  as derivadas com relação a  $\tau$ , daí temos que  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \omega$ . Destes fatos, segue que

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \theta' \omega, \quad \text{logo,} \quad \ddot{\theta} = \omega^2 \theta''(\tau).$$

Assim como,  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \rho' \omega$ , e portanto  $\ddot{\rho} = \omega^2 \rho''(\tau) = -\omega^2 A \cos \tau$ . Desta forma, a equação que modela o movimento do pêndulo com o ponto de suspensão oscilante é dada por

$$\theta'' + \left( \frac{g}{\omega^2 l} + \frac{A}{l} \cos \tau \right) \text{sen}\theta = 0. \quad (6.15)$$

Para obter o sistema Hamiltoniano associado a equação (6.15), façamos  $\theta' = y$ . Desta forma o sistema é dado por

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -\left( \frac{g}{\omega^2 l} + \frac{A}{l} \cos \tau \right) \text{sen}\theta \end{cases} \quad (6.16)$$

Vamos obter a função Hamiltoniana associado ao sistema (6.16), ou seja, uma função  $H$  tal que,

$$\begin{cases} \theta' = H_y \\ y' = -H_\theta \end{cases}.$$

Note que,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \left( \frac{g}{\omega^2 l} + \frac{A}{l} \cos \tau \right) \text{sen}\theta,$$

integrando com relação a  $\theta$  temos,

$$H(\theta, y) = -\left( \frac{g}{\omega^2 l} + \frac{A}{l} \cos \tau \right) \cos \theta + \xi(y).$$

Por outro lado,  $H_y = \xi'(y) = y$  e portanto,  $\xi(y) = \frac{y^2}{2} + c$ , tomando  $c = 0$ , temos que a função Hamiltoniana associada ao sistema (6.16) é dada por:

$$H(\theta, y) = -\left( \frac{g}{\omega^2 l} + \frac{A}{l} \cos \tau \right) \cos \theta + \frac{y^2}{2}.$$

**Exemplo 6.2.17.** (Problema dos  $N$ -corpos) Vamos considerar  $N$  corpos em movimento em um sistema de referência newtoniano tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ), em que a única força atuante entre eles é a força gravitacional. Denotaremos por  $q_i$  o vetor posição da  $i$ -ésima partícula, que possui massa  $m_i$ . Aplicando a segunda lei de Newton e a lei da

gravitação universal, podemos obter a seguinte equação de movimento para a  $i$ -ésima massa:

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (6.17)$$

onde  $U = U(q_1, \dots, q_N)$  é o potencial Newtoniano definido por,

$$U = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \quad (6.18)$$

e  $G$  é a constante gravitacional universal.

O sistema de equações diferenciais (6.17) define o problema de  $N$  corpos (formulação Newtoniana). Seja  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ . O sistema (6.17) escrito em sua forma vetorial é dado por:

$$M \ddot{\mathbf{q}} - \nabla U(\mathbf{q}) = 0, \quad (6.19)$$

com  $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N)$ . A formulação Hamiltoniana do problema é obtida introduzindo os vetores dos momentos lineares. Defina  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  por  $\mathbf{p} = M \dot{\mathbf{q}}$ , portanto  $p_i = m_i \dot{q}_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula. As equações do movimento dadas em (6.19) assumem a forma,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = H_p = M^{-1} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_q = -U_q \end{cases},$$

onde  $M^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_N}\right)$  e a função Hamiltoniana associado ao sistema acima tem a forma

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U.$$

**Exemplo 6.2.18.** (O problema de Kepler ou o problema de força central) Neste exemplo clássico, estudamos o movimento de uma partícula ou corpo celestial que é atraído por um centro de força. Especificamente, podemos aplicar esse princípio para analisar o movimento de um planeta (ou satélite) em torno do sol, considerando o sol como o centro atrator. Em resumo, a equação que descreve o problema de Kepler é a seguinte:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \quad (6.20)$$

em que  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  é o vetor posição do corpo de massa  $m$  em um sistema de coordenadas fixa,  $\mu$  é uma constante  $GM$ .

Se definirmos o movimento  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ , então a equação Newtoniana (6.20) pode ser escrita em sua forma Hamiltoniana

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = H_p = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_q = \frac{\mu \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \end{cases}, \quad (6.21)$$

onde  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}$ . A função  $H$  é chamada de função Hamiltoniana do problema de Kepler. A formulação Newtoniana (6.20) é um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem, enquanto (6.21) consiste em seis equações diferenciais de primeira ordem.

**Exemplo 6.2.19.** (*Oscilador forçado não linear*) Este problema consiste em estudar um sistema mola-massa, sem amortecimento e no qual uma força externa  $g(t)$  é aplicada. Assim, a equação do movimento é dada pela equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} + f(x) = g(t) \quad (6.22)$$

onde  $x$  é um escalar e  $f, g$  são funções diferenciáveis de uma variável escalar. O sistema se diz não linear, se a função  $f(x)$  não é linear e supomos que não existe atrito atuando. A equação (6.22) equivale ao sistema Hamiltoniano,

$$\begin{cases} \dot{x} = y = H_y \\ \dot{y} = g(t) - f(x) = -H_x \end{cases},$$

e a função Hamiltoniana associada é dada por:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + F(x) - xg(t),$$

onde  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ .

Muitos problemas podem ser modelados por este tipo de equação, a saber,

- (1) O oscilador harmônico:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ;
- (2) A equação do pêndulo simples:  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ ;
- (3) A equação de Duffing:  $\ddot{x} + \dot{x}\alpha x^3 = \cos(\omega t)$ .

Notemos que, no caso em que  $g$  é desprezado,  $g \equiv 0$ ,  $H$  é uma integral primeira, pois

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x),$$

não depende de  $t$ . Assim as soluções ficam nas curvas de nível de  $H$ .

**Exemplo 6.2.20.** (*Pêndulo com dois osciladores acoplados*) Na natureza, muitos sistemas não são isolados e interagem entre si. Um exemplo interessante é o comportamento de dois osciladores acoplados. Vamos considerar esse sistema e realizar uma mudança de variáveis para obter a formulação Hamiltoniana correspondente.

Imaginemos dois pêndulos simples idênticos, com massas  $m$  e bulbos  $A$  e  $B$ , conectados por uma mola. A distância natural da mola no estado de repouso é  $d$ , que é igual à distância de equilíbrio entre os bulbos dos pêndulos. Vejamos a representação 6.5.

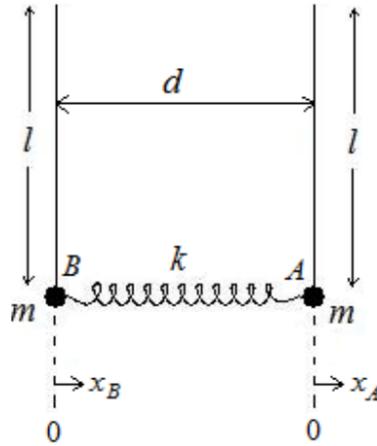


Figura 6.5: Pêndulos simples acoplados em repouso. Retirado de [44].

No pêndulo simples a frequência angular de oscilação é dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6.23)$$

Denotemos por  $x_A$  e  $x_B$  os deslocamentos dos dois bulbos de massa  $m$  em relação às suas respectivas posições de equilíbrio (ver figura 6.5). Suponhamos que  $l$  é o comprimento das hastes dos pêndulos,  $\theta_A$  e  $\theta_B$  respectivamente, os ângulos entre as hastes e as posições de equilíbrios, como podemos ver na figura 6.6.

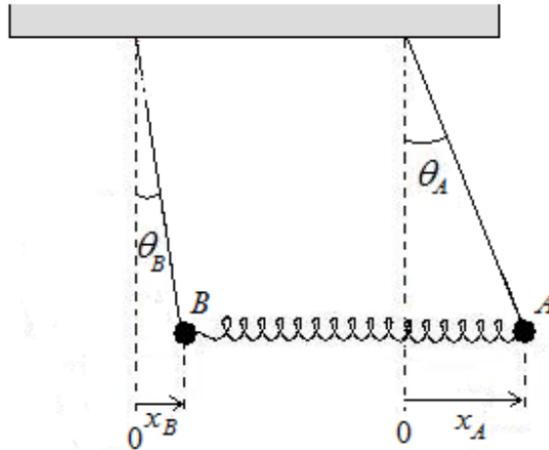


Figura 6.6: Pêndulos simples acoplados com pequeno deslocamento. Retirado de [44].

Observemos que, para um instante arbitrário, na qual a posição do bulbo A é  $x_A$  e a posição do bulbo B é  $x_B$ , o comprimento da mola é dado por  $d + (x_A - x_B)$ . Consequentemente, a deformação da mola é dada por  $(x_A - x_B)$ . No caso onde  $(x_A - x_B) > 0$ , como na figura 6.6, a mola está esticada e gera uma força  $-k(x_A - x_B)$  (para a esquerda) sobre o bulbo A e uma força de mesmo módulo e sentido contrário,

$k(x_A - x_B)$  (para a direita), sobre o bulbo  $B$ . No caso onde  $(x_A - x_B) < 0$ , a mola está comprimida e gera uma força  $-k(x_A - x_B) > 0$  (para a direita) sobre o bulbo  $A$  e uma força de mesmo módulo e sentido contrário,  $k(x_A - x_B) < 0$  (para a esquerda), sobre o bulbo  $B$ .

Notemos que nos dois casos a força realizada pela mola sobre o bulbo  $A$  é descrita pela lei de Hooke,

$$F_{MA} = -k(x_A - x_B), \quad (6.24)$$

e no bulbo  $B$ ,

$$F_{MB} = k(x_A - x_B). \quad (6.25)$$

Além das interações entre as massas e a mola, os bulbos dos pêndulos estão sujeitos a outras forças, como as tensões nas hastes e a força gravitacional. As componentes radiais das forças gravitacionais se equilibram com as tensões, no entanto, as componentes tangenciais dessas forças atuam como forças restauradoras nos bulbos, sempre tentando retorná-los à posição de equilíbrio. Essas forças restauradoras são expressas por:

$$\begin{aligned} F_{GA} &= -mg \operatorname{sen}\theta_A, \\ F_{GB} &= -mg \operatorname{sen}\theta_B. \end{aligned}$$

Podemos extrair da figura 6.6 as relações,  $\operatorname{sen}\theta_A = \frac{x_A}{l}$  e  $\operatorname{sen}\theta_B = \frac{x_B}{l}$ . Desta forma, obtemos,

$$\begin{aligned} F_{GA} &= -\frac{mg}{l}x_A, \\ F_{GB} &= -\frac{mg}{l}x_B. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a frequência angular apresentada em (6.23), segue que,

$$\begin{aligned} F_{GA} &= -m\omega_0^2 x_A, \\ F_{GB} &= -m\omega_0^2 x_B. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Desta forma, pela lei da dinâmica a força resultante é dada por,  $F = m\ddot{x}_A$  e  $F = m\ddot{x}_B$ . Utilizando (6.24), (6.25) e (6.26), podemos escrever as equações de movimento (sem amortecimento) como,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_A &= -m\omega_0^2 x_A - k(x_A - x_B), \\ m\ddot{x}_B &= -m\omega_0^2 x_B + k(x_A - x_B). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ao dividirmos ambos os lados das equações em (6.27) por  $m$  e denotando  $\omega_c^2 = \frac{k}{m}$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A &= -(\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A + \omega_c^2 x_B, \\ \ddot{x}_B &= -(\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B + \omega_c^2 x_A, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \ddot{x}_A + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B = 0 \\ \ddot{x}_B + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A = 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

O conjunto de equações diferenciais mostrado em (6.28) consiste em um sistema acoplado de duas equações diferenciais lineares de segunda ordem. A primeira equação descreve a aceleração de  $A$  e depende de  $x_B$ , enquanto a segunda equação descreve a aceleração de  $B$  e depende de  $x_A$ .

Isso significa que as duas equações não podem ser resolvidas de forma independente. No contexto físico, o movimento de  $A$  afeta o movimento de  $B$  e vice-versa.

Para facilitar a compreensão e a resolução desse sistema de equações diferenciais acopladas, iremos introduzir um novo sistema de coordenadas no qual as equações diferenciais serão desacopladas. Para isso, somamos as equações em (6.28), resultando em:

$$\ddot{x}_A + \ddot{x}_B + \omega_0^2(x_A + x_B) = 0. \quad (6.29)$$

Por outro lado, ao subtrairmos as equações de (6.28), obtemos,

$$\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)(x_A - x_B) = 0. \quad (6.30)$$

Escrevamos,

$$\begin{aligned} q_1 &= x_A + x_B, \\ q_2 &= x_A - x_B, \end{aligned} \quad (6.31)$$

realizando a substituição (6.31) em (6.29) e (6.30), temos,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Definindo  $\hat{\omega}^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2$ , na segunda equação em (6.32), chegamos as equações

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + \hat{\omega}^2 q_2 = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

As equações apresentadas em (6.33) correspondem a dois sistemas independentes de oscilações harmônicas simples, sendo que a primeira equação possui uma frequência angular de  $\omega_0$  e a segunda equação possui uma frequência angular de  $\hat{\omega}$ .

Podemos resolver essas equações de forma independente, o que nos leva a obter dois sistemas Hamiltonianos distintos. Para resolver a primeira equação, realizamos a substituição  $p_1 = \dot{q}_1$ , o que nos permite escrever o sistema Hamiltoniano correspondente da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 = H_{p_1} \\ \dot{p}_1 = -\omega_0^2 q_1 = -H_{q_1}, \end{cases} \quad (6.34)$$

cuja função Hamiltoniana é dado por,

$$H_1(q_1, p_1) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_0^2 q_1^2).$$

Analogamente, para a segunda equação em (6.33), tomando  $p_2 = \dot{q}_2$ , obtemos o sistema Hamiltoniano,

$$\begin{cases} \dot{q}_2 &= p_2 = H_{p_2} \\ \dot{p}_2 &= -\hat{\omega}^2 q_2 = -H_{q_2}, \end{cases} \quad (6.35)$$

com função Hamiltoniana,

$$H_2(q_2, p_2) = \frac{1}{2}(p_2^2 + \hat{\omega}^2 q_2^2).$$

O propósito da próxima seção é introduzir alguns conceitos fundamentais da geometria simplética, uma área da Geometria Diferencial que desempenha um papel importante no formalismo geométrico da mecânica Hamiltoniana. Um dos principais objetos de estudo na geometria simplética são as variedades simpléticas. No entanto, nesta seção, concentraremos nossa atenção nos espaços vetoriais simpléticos, pois os exemplos de sistemas Hamiltonianos que serão apresentados nos modelos de osciladores paramétricos são descritos nesse contexto específico.

Exploraremos os conceitos essenciais relacionados aos espaços vetoriais simpléticos, que nos proporcionarão uma base sólida para compreendermos as propriedades geométricas subjacentes aos sistemas Hamiltonianos. O objetivo da seção a seguir consiste em apresentar alguns conceitos básicos da geometria simplética, uma sub-área da Geometria Diferencial que surge no formalismo geométrico da mecânica Hamiltoniana. Os objetos de estudo da geometria simplética são as variedades simpléticas. Porém, na próxima seção daremos atenção aos espaços vetoriais simpléticos, pois os exemplos de sistemas Hamiltonianos que exibiremos nos modelos de osciladores paramétricos são descritos neste contexto.

### 6.3 Espaços Vetoriais Simpléticos

Antes de explorarmos a definição de um espaço vetorial simplético, vamos revisar alguns conceitos fundamentais, como o de forma bilinear, especialmente quando ela é alternada, ou seja, anti-simétrica, e quando é não-degenerada. Esses conceitos serão cruciais para a compreensão da estrutura de um espaço vetorial simplético. A seguir, apresentaremos as definições relevantes:

**Definição 6.3.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Uma forma bilinear sobre  $V$  é uma função*

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

e que satisfaz as seguintes propriedades :

$$\begin{aligned} i) \quad \omega(\lambda u + v, w) &= \lambda\omega(u, w) + \omega(v, w) \\ ii) \quad \omega(u, \lambda v + w) &= \lambda\omega(u, v) + \omega(u, w). \end{aligned}$$

para todo  $u, v, w \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Ou seja,  $\omega$  é linear com relação as duas entradas.

Na literatura, é dito que a forma  $\omega$  é alternada se  $\omega(u, u) = 0$ , para todo  $u$  em  $V$ . E dizemos que  $\omega$  é anti-simétrica se  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ , para todo  $u$  e  $v$  em  $V$ .

Dizer que uma forma bilinear é alternada equivale a dizer que esta é anti-simétrica, visto que  $\omega(u, u) = 0$  para todo  $u$  em  $V$  e do fato de  $V$  ser um espaço vetorial, temos que

$$0 = \omega(u + v, u + v) = \omega(u, u) + \omega(u, v) + \omega(v, u) + \omega(v, v),$$

portanto  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$  para todo  $u, v \in V$ . Se  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$  para todo  $u, v \in V$ , então  $\omega(u, u) = -\omega(u, u)$ , ou seja,  $\omega(u, u) = 0$ .

Dizemos que uma forma bilinear  $\omega$  é não-degenerada (ou não singular) se para cada  $u \neq 0$  em  $V$ , existe  $v$  em  $V$  tal que  $\omega(u, v) \neq 0$ .

Por fim, dizemos que uma forma bilinear  $\omega$  é simplética, quando  $\omega$  é anti-simétrica e não-degenerada.

**Definição 6.3.2.** Um espaço vetorial simplético é um par  $(V, \omega)$ , onde  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão finita e  $\omega$  é uma forma bilinear simplética.

**Exemplo 6.3.3.** A forma bilinear  $\omega_0$  sobre  $\mathbb{R}^{2n}$  definida por,

$$\omega_0(u, v) = u^T J v = \langle u, J v \rangle,$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}),$$

é uma forma bilinear simplética denominada forma simplética padrão. Denominamos o par  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  de "Espaço Simplético Padrão". É inviável fazer tais cálculos para demonstrar tal exemplo, mas verifica-se sem tanto esforço quando  $V = \mathbb{R}^2$  que

$$\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

é uma forma bilinear anti-simétrica. Para mostrar que é não degenerada, façamos

$$\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 0, \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

então  $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$ . Portanto, ao considerarmos  $v_1 = 0$  e  $v_2 \neq 0$ , obtemos que  $u_1 = 0$ . Procedendo de forma análoga obtemos que  $u_2 = 0$ .

Vamos explorar alguns resultados da álgebra linear para espaços vetoriais simpléticos.

**Lema 6.3.4.** *Seja  $V$  um espaço vetorial qualquer, denotamos  $V^*$  pelo espaço vetorial dual de  $V$ . Consideremos  $\omega$  não-degenerada, a aplicação*

$$\begin{aligned}\omega^* : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \omega(\cdot, v)\end{aligned}\tag{6.36}$$

é um isomorfismo e  $\omega(\cdot, v) = \omega^*(v)$ .

**Demonstração:** De fato, como  $\omega$  é bilinear, segue que  $\omega^*$  é linear. Agora considere  $u \in \ker(\omega^*)$ , ou seja,  $\omega^*(u) = \omega(\cdot, u) = 0$ , e assim, pelo fato de  $\omega$  ser não degenerado, temos que  $u = 0$  para qualquer  $u \in \ker(\omega^*)$ , logo  $\omega^*$  é injetiva. Além disso, pelo fato de  $\dim V = \dim V^*$  conclui-se que  $\omega^*$  é um isomorfismo. ■

Outro resultado importante tem relação com as matrizes que representam a aplicação  $\omega^*$  e a forma simplética  $\omega$ . Seja  $\omega$  uma forma simplética e considere a aplicação  $\omega^* : V \rightarrow V^*$  como abordado anteriormente, com  $\dim V = m$ . Seja  $(\omega_{ij})$  a matriz de  $\omega^*$  relativa a uma base  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de  $V$  cuja base dual  $\{v^1, \dots, v^m\} \subset V^*$ , onde  $v^i(v_j) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, ou seja,  $\delta_{ii} = 1$  e  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ). Desta forma, temos o funcional

$$\omega^*(v_j) = \omega(\cdot, v_j) = \sum_{k=1}^m \omega_{kj} v^k,$$

onde,

$$\omega^*(v_j)(v_i) = \omega(v_i, v_j) := \sum_{k=1}^m \omega_{kj} v^k(v_i) := \omega_{ij}.$$

Então concluímos que,

$$\omega_{ij} = \omega^*(v_j)(v_i) = \omega(v_i, v_j).$$

Recordemos da Álgebra Linear que quando tomamos a base canônica  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de  $V$ , podemos representar uma forma simplética  $\omega$  por uma matriz  $A = [A_{ij}]$ , onde  $A_{ij} = \omega(v_i, v_j)$ , de modo que  $\omega(u, v) = u^T A v$ . Assim,  $A = (\omega_{ij})$ , com  $1 \leq i, j \leq m$  é a matriz da forma bilinear  $\omega$  na base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Dessa forma, temos que a matriz de ambas aplicações são iguais quando considerada a mesma base.

**Proposição 6.3.5.** *Todo espaço simplético  $(V, \omega)$  de dimensão finita tem dimensão par.*

**Demonstração:** Pelo fato de  $\omega^*$  ser um isomorfismo segue que a matriz  $A$  é invertível, e como

$$A^T = (\omega_{ij})^T = \omega_{ji} = \omega(v_j, v_i) = -\omega(v_i, v_j) = -(\omega_{ij}) = -A,$$

resulta que  $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^m \det A$ , logo  $(-1)^m = 1$  e, consequentemente,  $m$  é par. ■

**Teorema 6.3.6.** *Seja  $\omega$  uma forma bilinear anti-simétrica e  $A$  sua matriz associada. Então,  $\omega$  é simplética se, e somente se,  $A$  é invertível.*

**Demonstração:** Se  $\omega$  é simplética, temos que  $\omega^*$  é um isomorfismo e consequentemente sua representação matricial é invertível que é a mesma representação matricial para  $\omega$ , relativo a base de  $V$ . Reciprocamente, como por hipótese  $\omega$  é anti-simétrica precisamos mostrar que  $\omega$  é não degenerada para encerrar a demonstração. Para isto, tome  $v \in V$  e suponha que

$$\omega(u, v) = 0, \forall u \in V,$$

isto é,  $u^T Av = 0, \forall u \in V$ , assim,  $Av = 0, \forall v \in V$ . Como  $A$  por hipótese é invertível, o  $\ker A = \{\vec{0}\}$ , logo  $v = \vec{0}$ . Portanto,  $\omega$  é não-singular. ■

O teorema acima nos permite obter formas simpléticas a partir de matrizes anti-simétricas invertíveis.

**Exemplo 6.3.7.** *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente,  $A^T = -A$  e pelo fato de  $\det A = 4 \neq 0$  segue que  $A$  é uma matriz invertível, consequentemente a forma bilinear  $\omega : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  associada a esta matriz é uma forma simplética. Assim, para  $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  e  $v = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ , temos que

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= u^T Av \\ &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \\ &= a_1(2b_3 - b_4) + a_2b_4 - 2a_3b_1 + a_4(b_1 - b_2), \end{aligned}$$

é uma forma simplética.

**Definição 6.3.8.** *Sejam  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético e  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Dizemos que  $B$  é uma base simplética para  $V$  se valem as seguintes relações*

$$\omega(u_i, u_j) = 0, \quad \omega(u_i, v_j) = \delta_{ij} \quad e \quad \omega(v_i, v_j) = 0. \quad (6.37)$$

Assim, a forma  $\omega$  numa base simplética é representada pela matriz  $J = (J_{ij})$  que é a matriz simplética padrão definida em (6.2).

**Exemplo 6.3.9.** Consideremos o espaço vetorial  $V = \mathbb{F}^{2n}$  com sua base canônica  $\beta = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ . Afirmamos que  $\beta$  é uma base simplética para  $(\mathbb{F}^{2n}, \omega_0)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= (e_i)^T J e_j \\ &= (0 \dots 1 \dots 0 \dots 0) \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 \\ -1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = J_{ij}. \end{aligned}$$

Nos próximos trechos, exploraremos alguns resultados preliminares relacionados a espaços vetoriais de natureza geral. Nosso objetivo será mostrar que, em todo espaço vetorial simplético, é possível encontrar uma base simplética.

**Definição 6.3.10.** Seja  $W$  subespaço vetorial de  $V$ . O anulador de  $W$  (denotado por  $W^\circ$ ) é dado por

$$W^\circ = \{f \in V^* / f(w) = 0, \forall w \in W\}.$$

**Lema 6.3.11.**  $W^\circ$  é subespaço vetorial  $V^*$  e

$$\dim V = \dim W^\circ + \dim W. \quad (6.38)$$

**Demonstração:** De fato, seja  $k$  a dimensão de  $W$  e  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  uma base de  $W$ . Tomemos vetores  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$  em  $V$  tais que  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  seja uma base de  $V$ . Seja  $\{f_1, \dots, f_n\}$  a base de  $V^*$  que é a dual desta base de  $V$ . Afirmamos que  $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$  é uma base do anulador  $W^\circ$ .

Desta forma,  $f_i \in W^\circ$  para  $i \geq k+1$ , visto que

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij},$$

assim  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \geq k+1$  e  $j \leq k$ , disto decorre que, para  $i \leq k+1$ ,  $f_i(\alpha) = 0$  sempre que  $\alpha$  seja uma combinação linear de  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Ou seja,  $f_i(\alpha) = 0, \forall \alpha \in W$ . Os funcionais  $f_{k+1}, \dots, f_n$  são independentes por fazerem parte da base de  $V$ , assim resta-nos mostrar que eles geram  $W^\circ$ . Suponhamos que  $f$  esteja em  $V^*$ . Ora,

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i.$$

de modo que, se  $f$  está em  $W^\circ$ , temos  $f(\alpha_i) = 0$  para  $i \leq k$ , daí

$$f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i.$$

Mostramos assim que se  $\dim W = k$  e  $\dim V = n$  então

$$\dim W^\circ = n - k.$$

■

De maneira análoga, define-se o anulador de um subespaço  $X$  de  $V^*$  por

$$X^\circ = \{v \in V / f(v) = 0, \forall f \in X\}.$$

Se verifica, assim como em (6.38), que  $\dim V = \dim X + \dim X^\circ$ . Além disso, temos que  $W^{\circ\circ} = W$ .

**Definição 6.3.12.** *Sejam  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético e  $E$  um subespaço vetorial de  $V$ . O complemento ortogonal simplético de  $E$  é definido por*

$$E^\omega = \{u \in V; \omega(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in E\}.$$

**Definição 6.3.13.** *Dois vetores  $u, v \in V$  são ditos ortogonais em relação à forma simplética  $\omega$  se  $\omega(u, v) = 0$ .*

**Lema 6.3.14.** *O conjunto  $E^\omega$  é subespaço vetorial de  $V$ , onde  $E^\omega = (\omega^*)^{-1}(E^\circ)$ ,  $\dim E + \dim E^\omega = \dim V$  e  $(\omega^*)^{-1}(E^\circ)$  é a pré-imagem de  $E^\circ$  por meio de  $\omega^*$ .*

**Demonstração:** Consideremos a aplicação linear  $T : V \rightarrow E^*$  dada por  $T(u) = \omega(u, \cdot)|_E$ . Como  $E^\omega = \ker(T)$ , temos que  $E^\omega$  é subespaço vetorial de  $V$ . Observe que

$$\begin{aligned} E^\omega &= \{v \in V / \omega(v, u) = 0, \forall u \in E\} \\ &= \{v \in V / \omega^*(v)u = 0, \forall u \in E\} \\ &= \{v \in V / \omega^*(v) \in E^\circ\} = (\omega^*)^{-1}(E^\circ). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\dim E + \dim E^\circ = \dim V,$$

e como  $\omega^*$  é isomorfismo, temos  $\dim E^\circ = \dim[(\omega^*)^{-1}(E^\circ)]$ , assim  $\dim E^\circ = \dim E^\omega$ . E portanto,

$$\dim E + \dim E^\omega = \dim V.$$

■

**Definição 6.3.15.** *Sejam  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético e  $E$  um subespaço vetorial de  $V$ .  $E$  é dito um subespaço vetorial simplético de  $V$  se  $E \cap E^\omega = \{\vec{0}\}$ .*

A seguir vamos dar uma caracterização de subespaço vetorial simplético.

**Proposição 6.3.16.** *O conjunto  $E$  é um subespaço vetorial simplético de  $V$  se, e somente se,  $\omega|_E$  é não degenerada.*

**Observação 6.3.17.** *Se  $E$  é subespaço vetorial simplético de  $V$ , então  $V = E \oplus E^\omega$ .*

**Teorema 6.3.18.** *Todo espaço vetorial simplético admite uma base simplética.*

**Demonstração:** Seja  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético de dimensão  $2n$ . Tome  $v_1 \in V$ , com  $v_1 \neq 0$ . Como  $\omega$  é não degenerada, existe  $\tilde{v}_{n+1} \in V$ , com  $\tilde{v}_{n+1} \neq 0$ , tal que  $\omega(v_1, \tilde{v}_{n+1}) \neq 0$ . Tomando

$$v_{n+1} = \frac{1}{\omega(v_1, \tilde{v}_{n+1})} \tilde{v}_{n+1},$$

temos  $\omega(v_1, v_{n+1}) = 1$ . Seja  $E_1 = [v_1, v_{n+1}]$  o espaço gerado por esses vetores. Desde que  $\omega|_{E_1}$  é não degenerada, segue que  $E_1$  é simplético. Assim,  $E_1 \cap E_1^\omega = \{0\}$ . Como  $\dim E_1 + \dim E_1^\omega = \dim V$ , segue que  $V = E_1 \oplus E_1^\omega$ . Portanto,  $\dim E_1^\omega = 2n - 2$ . Agora, se  $u \in E_1^\omega$  e  $\omega(u, v) = 0$ , para todo  $v \in E_1^\omega$ , então, como  $\omega(v, v_1) = \omega(v, v_{n+1}) = 0$ , se segue que  $\omega(u, x) = 0$ , para todo  $x \in V$ , logo,  $u = 0$ . Isto mostra que  $\omega|_{E_1^\omega}$  é não degenerada e, portanto,  $E_1^\omega$  é um espaço simplético. Assim,  $E_1^\omega$  é um espaço vetorial simplético de dimensão  $2n - 2$ . Podemos repetir a construção até obtermos uma decomposição

$$V = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n,$$

onde cada  $E_i$  é gerado por  $v_i, v_{n+i}$  tal que  $\omega(v_i, v_{n+i}) = 1$ . Portanto, segue por (6.37) que  $v_1, \dots, v_{2n}$  é uma base simplética de  $V$ . ■

**Definição 6.3.19.** *Sejam  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  espaços vetoriais simpléticos. Um isomorfismo simplético ou symplectomorfismo é um isomorfismo linear*

$$T : V_1 \longrightarrow V_2$$

tal que

$$\omega_2(T(u), T(v)) = \omega_1(u, v),$$

para todo  $u, v \in V_1$ . Ou seja,  $T$  preserva as formas simpléticas.

**Teorema 6.3.20.** *Todo espaço vetorial simplético de dimensão  $2n$  é symplectomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , onde  $\omega_0$  é a forma simplética padrão.*

**Demonstração:** Seja  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético e  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$  uma base simplética de  $V$ . Dado  $v \in V$ , existe  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$  não nulo tal que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{2n} v_{2n}$ . A função

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ v &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}) \end{aligned}$$

é symplectomorfismo. Com efeito, se  $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{2n} v_{2n}$ ,

$$\begin{aligned}\omega(v, u) &= \omega\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j v_j\right) = \sum \alpha_i \beta_j \omega(v_i, v_j) = \sum \alpha_i \beta_j J_{ij} \\ &= \alpha^T J \beta = \omega_0(\alpha, \beta) = \omega_0(T(v), T(u)).\end{aligned}$$

■

Segue do teorema acima o seguinte resultado:

**Corolário 6.3.21.** *Dois espaços vetoriais simpléticos de mesma dimensão são symplectomorfos.*

**Exemplo 6.3.22.** *(Gradiente simplético) Consideremos o espaço de fase  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$  e  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Esta função define um campo de vetores Hamiltoniano  $\mathcal{X}_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por,*

$$\mathcal{X}_H(x, y) = \left( \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \right). \quad (6.39)$$

Sabemos que a aplicação linear  $dH : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a diferencial de  $H$ , pode ser representada por:

$$dH(\cdot) = \langle \nabla H, \cdot \rangle,$$

ou seja,  $dH(v) = \langle \nabla H, v \rangle, \forall v \in \mathbb{R}^2$ .

Podemos reescrever (6.39) de maneira matricial,

$$\mathcal{X}_H = -J \nabla H, \quad (6.40)$$

onde  $J$  é a matriz padrão de ordem 2. Como  $J^{-1} = -J$ , temos que  $\nabla H = J \mathcal{X}_H$ .

Podemos também escrever as equações do sistema 6.1 como:

$$\dot{\alpha}(t) = \mathcal{X}_H(\alpha(t)), \quad (6.41)$$

onde  $\alpha(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$ , para cada  $t$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \left( \frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))}{\partial y}, -\frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))}{\partial x} \right) \\ &= \mathcal{X}_H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathcal{X}_H(\alpha(t)).\end{aligned}$$

Desta forma, as soluções do sistema 6.1 são dadas por curvas integrais do campo de vetores  $\mathcal{X}_H$  (curvas que satisfazem a equação 6.41). É importante observar que as curvas integrais de  $\mathcal{X}_H$  estão contidas nas superfícies de energia da função Hamiltoniana  $H$ .

Para escrever a equação 6.41 de modo "geométrico", definamos a forma bilinear

$$\begin{aligned}\omega_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \omega_0(u, v) = -u^T Jv.\end{aligned}$$

Observamos que  $\omega_0$  é antissimétrica, pois,

$$\begin{aligned}\omega_0(u, v) &= -u^T Jv = (-u^T Jv)^T \\ &= -[v^T J^T (u^T)^T] = -[v^T (-J)u] = -[-v^T Ju] \\ &= -\omega_0(v, u),\end{aligned}$$

para todo  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{R}^2$ . E além disso,  $\omega_0$  é não degenerada. Visto que, se  $\omega_0(u, v) = 0$  para todo  $u$  em  $\mathbb{R}^2$  então  $v = (0, 0)$ . Com efeito, considere  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , como a forma bilinear é nula para qualquer  $u \in \mathbb{R}^2$ , consideremos  $u = (1, 0)$ , então

$$\begin{aligned}\omega_0(u, v) &= -u^T Jv = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

consequentemente,  $\omega_0(u, v) = -y = 0$ , ou seja,  $y = 0$ . De maneira análoga, tomando  $u = (0, 1)$  obtemos  $x = 0$ . Portanto,  $v$  é o vetor nulo.

Desta forma,  $\mathcal{X}_H$  pode ser interpretado geometricamente como o gradiente de  $H$  com respeito a  $\omega_0$ , isto é,  $\mathcal{X}_H$  é o único campo que verifica a equação

$$\omega_0(\mathcal{X}_H, v) = dH(v), \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Com efeito, sabendo que  $J^2 = -I$  e  $J^T = -J$ , temos:

$$\begin{aligned}\omega_0(\mathcal{X}_H, v) &= -\mathcal{X}_H^T Jv = -(-J\nabla H)^T Jv \\ &= [(\nabla H)^T J^T] Jv = [(\nabla H)^T (-J)] Jv \\ &= (\nabla H)^T (-J^2)v = (\nabla H)^T (I)v \\ &= (\nabla H)^T v = \langle \nabla H, v \rangle = dH.\end{aligned}$$

Para mostrar a unicidade, notemos que o campo Hamiltoniano  $\mathcal{X}_H$  encontra-se no núcleo da aplicação linear  $dH$ , pois,  $\text{Ker}(dH) = \{v \in \mathbb{R}^2 / dH(v) = 0\}$ . Então,

$$dH(\mathcal{X}_H) = \langle \nabla H, \mathcal{X}_H \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\rangle = 0.$$

Assim, se existir outro campo  $Y$ , de maneira que,

$$\omega_0(Y, v) = dH(v), \forall v \in \mathbb{R}^2,$$

então, para qualquer  $v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\omega_0(\mathcal{X}_H - Y, v) = \omega_0(\mathcal{X}_H, v) - \omega_0(Y, v) = dH(v) - dH(v) = 0.$$

E pelo fato de  $\omega_0$  ser não degenerada, segue que  $\mathcal{X}_H \equiv Y$ .

### 6.3.1 Matrizes Simpléticas

Vamos inicialmente abordar o caso de matrizes  $2 \times 2$  e depois a ideia será generalizada.

Estamos interessados em matrizes  $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{F})$  que satisfaça a seguinte relação

$$T^T J T = \mu J \quad (6.42)$$

com  $\mu \neq 0$ . Realizando a multiplicação das matrizes obtemos que

$$T^T J T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \\ -\alpha\delta + \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,  $T$  satisfaz (6.42) se, e só se o seu determinante  $\alpha\delta - \beta\gamma = \mu$ .

Generalizando tais conceitos,

**Definição 6.3.23.** *Uma matriz quadrada,  $T$ , de ordem  $2n$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$ , é dita simplética com multiplicador  $\mu$  se satisfaz (6.42) com  $\mu \neq 0$ . Se  $\mu = 1$ , dizemos simplesmente que  $T$  é simplética.*

O conjunto de todas as matrizes simpléticas de ordem  $2n$  sobre o corpo  $\mathbb{F}$  é denotado por  $Sp(n, \mathbb{F})$ .

Abordemos algumas propriedades das matrizes  $\mu$ -simpléticas.

**Teorema 6.3.24.** *Se  $T$  é  $\mu$ -simplética, então  $T$  é não singular e  $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^t J$ . Se  $T$  e  $R$  são  $\mu$  e  $\nu$  simpléticas, respectivamente, então  $T^T$ ,  $T^{-1}$  e  $TR$  são simpléticas com multiplicador  $\mu$ ,  $\mu^{-1}$  e  $\mu\nu$ , respectivamente.*

**Lema 6.3.25.** *Se  $T$  é uma matriz simplética então  $\det T^2 = 1$ .*

Com efeito, usaremos que  $\det T^T = \det T$  e  $\det J = 1$ , suponhamos  $T$  simplética, então por (6.42), temos que  $T^T J T = J$ , consequentemente,

$$1 = \det J = \det(T^T J T) = \det T^T \det J \det T = \det T^T \det T,$$

portanto  $\det T^2 = 1$ .

Obtemos assim que  $\det T = \pm 1$ , mostraremos mais a frente que  $\det T = 1$ . Vamos agora a demonstração do teorema:

**Demonstração:** Suponha  $T$   $\mu$ -simplética, então

$$\det(T^T J T) = \det(\mu J),$$

consequentemente,  $(\det T)^2 = \mu^{2n} \det J = \mu^{2n}$  e como  $\mu \neq 0$  segue que  $T$  é não singular. Sabendo que  $T$  é não singular, da equação (6.42) segue que  $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^T J$ .

Observe que ao isolarmos  $T^T$  na expressão  $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^T J$ , temos que

$$T^T = -\mu J^{-1} T^{-1} J^{-1} = -\mu J T^{-1} J.$$

Agora, para mostrar que  $T^T$  é  $\mu$ -simplética façamos,

$$\begin{aligned} (T^T)^T J T^T &= T J T^T \\ &= T J (-\mu J T^{-1} J) \\ &= -\mu T J^2 T^{-1} J \\ &= \mu J. \end{aligned}$$

Por sua vez, para mostrarmos que  $T^{-1}$  é  $\mu^{-1}$ -simplética, observe que,

$$\begin{aligned} (T^{-1})^T J T^{-1} &= (T^{-1})^T J (-\mu^{-1} J T^T J) \\ &= (T^T)^{-1} J (-\mu^{-1} J T^T J) \\ &= \mu^{-1} J. \end{aligned}$$

Agora, usando as hipótese do teorema temos que  $TR$  é  $\mu\nu$ -simpléticas. Com efeito,

$$\begin{aligned} (TR)^T J (TR) &= R^T T^T J T R \\ &= (-\nu J R^{-1} J) (-\mu J T^{-1} J) J T R \\ &= \nu \mu J. \end{aligned}$$

■

**Observação 6.3.26.** Fazendo agora um estudo análogo ao que fizemos para o caso de matrizes  $2 \times 2$ , consideremos uma matriz  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$ , escrita na forma de blocos, onde cada bloco tem ordem  $n$ . Teremos que,

$$T^T J T = \begin{pmatrix} a^T c - c^T a & a^T d - c^T b \\ b^T c - d^T a & b^T d - d^T b \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,  $T$  é  $\mu$ -simplética se, e somente se,

$$\begin{cases} a^T c = c^T a \\ b^T d = d^T b \\ a^T d - c^T b = \mu I \\ b^T c - d^T a = -\mu I \end{cases}.$$

com,  $a, b, c$  e  $d \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ ,  $a^T c$  e  $b^T d$  são simétricas e  $a^T d - c^T b = \mu I$ , visto que a terceira equação do sistema é equivalente a quarta. De fato, como  $a^T d - c^T b = \mu I$ , ao tomarmos a transposta em ambos os lados da equação, obtemos  $(a^T d - c^T b)^T = (\mu I)^T$ , ou seja,  $d^T a - b^T c = \mu I$  e assim  $b^T c - d^T a = -\mu I$ .

Consideremos o sistema Hamiltoniano linear dado por

$$\dot{z} = J\nabla_z H(t, z) = JS(t)z = A(t)z \quad (6.43)$$

isto é, com  $A(t)$  uma matriz Hamiltoniana. Assim, considerando a mudança de coordenadas induzida pela matriz  $\mu$ -simplética  $T$ , da forma  $\gamma = Tz$ , temos que

$$\dot{\gamma} = T\dot{z} = T(A(t)z) = TA(t)T^{-1}\gamma.$$

Observe que a matriz  $B(t) = TA(t)T^{-1}$  também é Hamiltoniana. Com efeito, por (6.42) obtemos que  $JT = \mu(T^T)^{-1}J$  e  $T^T J = \mu JT^{-1}$ , daí,

$$\begin{aligned} B^T J + JB &= [(T^{-1})^T A^T T^T]J + J[TA T^{-1}] \\ &= (T^{-1})^T A^T (\mu JT^{-1}) + (\mu(T^T)^{-1}J)AT^{-1} \\ &= \mu(T^{-1})^T (A^T J + JA)T^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, demonstramos que uma transformação de coordenadas resultante de uma matriz  $\mu$ -simplética mapeia sistemas Hamiltonianos lineares em outros sistemas Hamiltonianos lineares. Além disso, podemos determinar a função Hamiltoniana correspondente ao sistema (6.43) através da seguinte expressão:

$$H(t, z) = \frac{1}{2}z^T S(t)z,$$

onde  $A(t) = JS(t) \Leftrightarrow S(t) = -JA(t)$ . Dessa forma, a função Hamiltoniana associada ao sistema  $\dot{\gamma} = B(t)\gamma$ , é dada por

$$H(t, \gamma) = \frac{1}{2}\gamma^T R(t)\gamma,$$

onde  $B(t) = JR(t) \Leftrightarrow R(t) = -JB(t)$ , pelo fato de  $T^{-1} = -\mu JT^T J$  segue que

$$R(t) = -JTA(t)T^{-1} = -\mu^{-1}JTA(t)JT^T J.$$

O resultado a seguir caracteriza a matriz fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.

**Teorema 6.3.27.** *A matriz solução fundamental  $Z(t, t_0)$  do sistema Hamiltoniano linear (6.43) é simplética, para todos  $t, t_0 \in I$ . Reciprocamente, se  $Z(t, t_0)$  é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então  $Z$  é uma matriz solução fundamental de um sistema Hamiltoniano linear.*

**Demonstração:** Seja  $Z(t, t_0)$  matriz solução fundamental do sistema (6.43), tal que  $Z(t_0, t_0) = I$ . Fazendo  $U(t) = Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0)$ , temos que  $U(t_0) = J$ . Derivando  $U(t)$

obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{U}(t) &= \dot{Z}^T J Z + Z^T J \dot{Z} \\
&= (A(t)Z)^T J Z + Z^T J A(t)Z \\
&= Z^T A^T J Z + Z^T J A Z \\
&= Z^T (A^T J + J A) Z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,  $U(t)$  é constante, e como  $U(t_0) = J$ , segue que  $U(t) = J$ ,  $\forall t, t_0 \in I$ , ou seja,  $Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0) = J$ , assim  $Z(t, t_0)$  é simplética  $\forall t, t_0 \in I$ .

Reciprocamente, suponha que  $Z(t, t_0)$  é tal que  $Z^T J Z = J$ ,  $\forall t \in I$ . Então,  $\dot{Z}^T J Z + Z^T J \dot{Z} = 0$ . Notemos que,

$$(Z^{-1})^T \dot{Z}^T J Z + J \dot{Z} = 0,$$

daí,

$$(\dot{Z} Z^{-1})^T J Z + J \dot{Z} = 0,$$

e conseqüentemente,

$$(\dot{Z} Z^{-1})^T J + J \dot{Z} Z^{-1} = 0.$$

Com isso, temos que  $A = \dot{Z} Z^{-1}$  é Hamiltoniana. Além disso,  $\dot{Z} = \dot{Z} Z^{-1} Z$ , ou seja,  $\dot{Z} = AZ$ . ■

**Corolário 6.3.28.** *A matriz constante  $A$  é Hamiltoniana se, e somente se,  $e^{tA}$  é simplética para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $\varphi(t, z) = e^{tA}z$  é o fluxo do sistema linear  $\dot{z} = Az$ . Como  $\varphi(t, e_j)$  é a  $j$ -ésima coluna de  $e^{tA}$ ,  $e^{tA} = \text{col}[\varphi(t, e_1), \dots, \varphi(t, e_n)]$  é uma matriz fundamental do sistema  $\dot{z} = Az$ , logo, ela é simplética se, e somente se,  $A$  é Hamiltoniana. ■

**Proposição 6.3.29.** *Seja  $T$  uma matriz simplética. Se  $\lambda$  é um autovalor (não nulo) de  $T$ , então  $\lambda^{-1}$  é também autovalor de  $T$ , com mesma multiplicidade.*

**Demonstração:** Como  $T$  é simplética temos que  $T^T = -JT^{-1}J$ . Seja  $p(\lambda)$  polinômio

característico de  $T$ , assim

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(T - \lambda I) \\
&= \det(T - \lambda I)^T \\
&= \det(T^T - \lambda I) \\
&= \det(-JT^{-1}J + \lambda J^2) \\
&= \det(J)\det(-T^{-1} + \lambda I)\det(J) \\
&= \det(-T^{-1} + \lambda T^{-1}T) \\
&= \det(\lambda T^{-1})\det\left(T - \frac{1}{\lambda}I\right) \\
&= \pm\lambda^{2n}\det\left(T - \frac{1}{\lambda}I\right) \\
&= \pm\lambda^{2n}p\left(\frac{1}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Logo,  $p(\lambda) = 0$  se, e somente se  $p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ , donde segue o resultado.  $\blacksquare$

**Proposição 6.3.30.** *O determinante de uma matriz simplética é 1.*

**Demonstração:** Os autovalores de uma matriz simplética  $T$  são não nulos, uma vez que  $(\det T)^2 = 1$ . Assim, se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são autovalores então  $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$  são os demais autovalores. Logo,

$$\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_k \lambda_1^{-1} \cdots \lambda_k^{-1} = 1. \quad \blacksquare$$

Fazendo as devidas substituições e usando (6.1), chegamos as expressões:

$$\begin{cases} H_y = \mathbf{x}_u \mathcal{H}_v - \mathbf{x}_v \mathcal{H}_u \\ -H_x = \mathbf{y}_u \mathcal{H}_v - \mathbf{y}_v \mathcal{H}_u \end{cases}. \quad (6.44)$$

O sistema (6.44), pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_u & \mathbf{y}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_u & \mathbf{y}_v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix},$$

isto é,  $J\nabla H = \mathcal{M}J\mathcal{M}^T\nabla H$ , onde,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_u & \mathbf{y}_v \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

é a matriz Jacobiana da transformação simplética que é não singular e  $J$  é a matriz simplética padrão de ordem  $2n$ .

Portanto, se a mudança de variáveis preserva a forma Hamiltoniana  $H$ , então a matriz  $\mathcal{M}$  satisfaz a equação

$$\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = J. \quad (6.46)$$

**Proposição 6.3.31.** *Se a matriz Jacobiana (6.45) satisfaz a equação (6.46), então a mudança de variáveis leva o sistema (6.1) para o sistema, onde  $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .*

**Demonstração:** De fato, inicialmente temos a equivalência seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}.$$

É equivalente a equação:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\mathbf{u}} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{bmatrix} H_{\mathbf{x}} \\ H_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}.$$

Aliado a estes fatos, por (6.46),  $\mathcal{M}^{-1} = J\mathcal{M}^T J^{-1}$ , assim temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} &= \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = (J\mathcal{M}^T J^{-1})J \begin{bmatrix} H_{\mathbf{x}} \\ H_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = J\mathcal{M}^T \begin{bmatrix} H_{\mathbf{x}} \\ H_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\mathbf{u}} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\mathbf{u}} \\ -\mathcal{H}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.47)$$

o que prova a proposição. ■

É importante observar que a matriz Jacobiana da transformação é uma matriz simplética. Portanto, se a matriz Jacobiana  $\mathcal{M}$  é  $\mu$ -simplética, a transformação continua a mapear o sistema Hamiltoniano (6.1) porém, agora a função Hamiltoniana modificada é definida da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\mu} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

pois, temos que,  $\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{\mu} J\mathcal{M}^T J^{-1}$ , haja vista que  $\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = \mu J$ . Pela cadeia de cálculos (6.47) obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\mathbf{u}} \\ -\mathcal{H}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix}.$$

Para contornar este fato faz-se necessário multiplicar os lados direitos das equações por  $\frac{1}{\mu}$ , e assim verifica-se a afirmação.

Desta forma, definimos a mudança de variáveis como uma *mudança canônica de variáveis* ou *transformação simplética*, chamaremos também de *transformação canônica*, se sua matriz Jacobiana for simplética. Se  $\mu \neq 1$ , chamamos de *transformação canônica com multiplicidade  $\mu$*  ou *transformação  $\mu$ -simplética*. Formalmente temos a seguinte definição:

**Definição 6.3.32. (Transformação simplética)** *Dizemos que uma transformação de coordenadas  $E : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}(\mathbb{C}^{2n})$  onde  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  (ou subconjunto de  $\mathbb{C}^2$ ) é*

simplética ou uma transformação canônica onde para  $t \in I$  fixo,  $E$  é um difeomorfismo e satisfaz

$$[D_z E(\mathbf{z}, t)]^T J [D_z E(\mathbf{z}, t)] = J \quad (6.48)$$

onde  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

**Exemplo 6.3.33.** Consideremos  $\mathbb{R}^{2n}$  de coordenadas  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e seja a transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\longmapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) := (\alpha \mathbf{q}, \beta \mathbf{p}) \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes não nulas. Logo,

$$M := \left( \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} \right) = \begin{bmatrix} \alpha I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \beta I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

Deste modo,  $M^T J M = \alpha \beta J$ , ou seja, a transformação é  $\alpha \beta$ -simplética.

Faremos uso no método de Deprit-Hori, cuja demonstração pode ser encontrada em [36].

**Observação 6.3.34.** Consideremos a transformação canônica

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}, \quad (6.49)$$

as funções escalares  $F$  e  $G$ , de maneira que

$$F(q, p) = F(Q(q, p), P(q, p)),$$

$$G(q, p) = G(Q(q, p), P(q, p)).$$

Então o colchete de Poisson é invariante por mudança de coordenadas, isto é,

$$\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

### 6.3.2 Funções Geradoras

Dada uma função escalar com determinadas restrições, podemos obter uma aplicação simplética. Uma função com tais propriedades é chamada de *função geradora*. Para este intuito, vamos considerar uma função  $W(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  de classe  $C^2$  tendo Hessiana diferente de zero, ou seja  $\det[W_{x_i v_i}] \neq 0$ , e definimos  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  pelas equações:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} = W_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{cases} \quad (6.50)$$

Como a Hessiana é diferente de zero, podemos usar o Teorema da Função Implícita para resolver  $\mathbf{u} = W_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  localmente e obter  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Inserindo isto na primeira equação de (6.50), obtemos,

$$\mathbf{y} = W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = W_{\mathbf{x}}(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

**Proposição 6.3.35.** *A transformação*

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{y} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{cases} \quad (6.51)$$

*definida no parágrafo anterior é uma transformação simplética.*

**Demonstração:** Vimos anteriormente que uma transformação é simplética quando a matriz Jacobiana é simplética. Assim, vamos calcular a matriz Jacobiana de (6.51). Inicialmente, derivando as equações de (6.50) com respeito a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  temos

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\mathbf{u}} = W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{v}} = W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}} + W_{\mathbf{xv}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} = W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} = W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}} + W_{\mathbf{vv}} \end{cases}, \quad (6.52)$$

e vemos que a matriz jacobiana da transformação (6.51) tem a forma,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} W_{\mathbf{vx}}^{-1} & -W_{\mathbf{vx}}^{-1}W_{\mathbf{vv}} \\ W_{\mathbf{xx}}W_{\mathbf{vx}}^{-1} & W_{\mathbf{xv}} - W_{\mathbf{xx}}W_{\mathbf{vx}}^{-1}W_{\mathbf{vv}} \end{bmatrix}.$$

Sabendo que  $W$  é  $C^2$ , pelo Teorema de Schwartz, obtemos o fato das matrizes  $W_{\mathbf{xx}}$ ,  $W_{\mathbf{vx}}$ ,  $W_{\mathbf{xv}}$  e  $W_{\mathbf{vv}}$  serem simétricas, assim, verifica-se que as condições na observação 6.3.26 são satisfeitas. De fato, como

$$\begin{aligned} * \mathbf{x}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{y}_{\mathbf{u}} &= (W_{\mathbf{vx}}^{-1})^T W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} = W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} = \mathbf{y}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{x}_{\mathbf{u}}; \\ * \mathbf{x}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{y}_{\mathbf{v}} &= (-W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{vv}})^T (W_{\mathbf{xv}} - W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{vv}}) \\ &= -W_{\mathbf{vv}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{xv}} + W_{\mathbf{vv}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{vv}} = \mathbf{y}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{x}_{\mathbf{v}}; \\ * \mathbf{x}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{y}_{\mathbf{v}} - \mathbf{y}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{x}_{\mathbf{v}} &= W_{\mathbf{vx}}^{-1} (W_{\mathbf{xv}} - W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{vv}}) + (W_{\mathbf{xx}} W_{\mathbf{vx}}^{-1})^T W_{\mathbf{vx}}^{-1} W_{\mathbf{vv}} \\ &= I + 0, \end{aligned}$$

segue que  $\mathcal{M}$  é simplética. ■

Suponhamos agora que tenhamos uma transformação simplética dependente do tempo, ou seja:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{y} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \end{cases}$$

as funções  $\phi$  e  $\psi$  sob transformações simpléticas dependem também do tempo  $t$ . Agora temos,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_u \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{x}_v \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{x}_t \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_u \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{y}_v \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{y}_t. \quad (6.53)$$

Também podemos considerar a função Hamiltoniana dependente do tempo. Agora modificamos a definição de  $\mathcal{H}$  adicionando um termo extra,

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t). \quad (6.54)$$

Então, temos que adicionar  $R_u$  à primeira equação e  $R_v$  à segunda equação, obtendo assim

$$\mathcal{H}_u = \mathbf{x}_u^T H_x + \mathbf{y}_u^T H_y + R_u, \quad \mathcal{H}_v = \mathbf{x}_v^T H_x + \mathbf{y}_v^T H_y + R_v. \quad (6.55)$$

Como fizemos no sistema autônomo, façamos as seguintes substituições, trocaremos  $\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{u}}$  e  $\dot{\mathbf{v}}$  por  $H_y, -H_x, \mathcal{H}_v$  e  $-\mathcal{H}_u$  respectivamente. Em seguida, usando (6.55) nas equações obtidas temos

$$\begin{aligned} H_y &= (\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v^T - \mathbf{x}_v \mathbf{x}_u^T) H_x + (\mathbf{x}_u \mathbf{y}_v^T - \mathbf{x}_v \mathbf{y}_u^T) H_y + \mathbf{x}_u R_v - \mathbf{x}_v R_u + \mathbf{x}_t, \\ -H_x &= (\mathbf{y}_u \mathbf{x}_v^T - \mathbf{y}_v \mathbf{x}_u^T) H_x + (\mathbf{y}_u \mathbf{y}_v^T - \mathbf{y}_v \mathbf{y}_u^T) H_y + \mathbf{y}_u R_v - \mathbf{y}_v R_u + \mathbf{y}_t. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Sabemos pelo teorema 6.3.24 que a matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T & \mathbf{y}_u^T \\ \mathbf{x}_v^T & \mathbf{y}_v^T \end{bmatrix}$  é simplética. Assim, pela observação 6.3.26, que nos fornece uma caracterização a respeito das entradas de uma matriz simplética, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v^T - \mathbf{x}_v \mathbf{x}_u^T &= 0, & \mathbf{x}_u \mathbf{y}_v^T - \mathbf{x}_v \mathbf{y}_u^T &= I, \\ \mathbf{y}_u \mathbf{x}_v^T - \mathbf{y}_v \mathbf{x}_u^T &= -I, & \mathbf{y}_u \mathbf{y}_v^T - \mathbf{y}_v \mathbf{y}_u^T &= 0, \end{aligned}$$

e usando tais relações nas equações em (6.56) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v R_u - \mathbf{x}_u R_v &= \mathbf{x}_t, \\ \mathbf{y}_v R_u - \mathbf{y}_u R_v &= \mathbf{y}_t, \end{aligned}$$

ou na forma matricial  $-\mathcal{M}J\nabla R = \mathbf{z}_t$ . Do fato de  $\mathcal{M}$  ser uma matriz simplética ( $\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = J$ ), obtemos

$$\nabla R = \mathcal{M}^T J \mathbf{z}_t. \quad (6.57)$$

(Para verificar, substitua este fato na forma matricial). Ou seja,

$$\begin{bmatrix} R_u^T \\ R_v^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_u^T \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_v^T \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_v^T \mathbf{x}_t \end{bmatrix}.$$

O campo vetorial  $\mathcal{M}^T J \mathbf{z}_t(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  tem uma matriz Jacobiana simétrica. Portanto, localmente ou globalmente em um domínio aberto a função  $R$  existe. E é chamada de *função restante*.

**Proposição 6.3.36.** *Se a transformação é gerada por  $W(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , então a função restante é a derivada com relação ao tempo da função geradora*

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = W_t(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}, t). \quad (6.58)$$

**Demonstração:** Diferenciando as equações  $\mathbf{y} = W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  e  $\mathbf{u} = W_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  com respeito a  $t$ , então temos

$$\dot{\mathbf{y}} = W_{\mathbf{xx}}\dot{\mathbf{x}} + W_{\mathbf{xv}}\dot{\mathbf{v}} + W_{\mathbf{x}t}, \quad \dot{\mathbf{u}} = W_{\mathbf{vx}}\dot{\mathbf{x}} + W_{\mathbf{vv}}\dot{\mathbf{v}} + W_{\mathbf{v}t}.$$

Substituindo as equações de (6.53) nas relações obtidas acima e reorganizando, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_{\mathbf{u}} - W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{y}_{\mathbf{v}} - W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}} - W_{\mathbf{xv}})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{y}_t - W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_t &= W_{\mathbf{x}t}, \\ (I - W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}})\dot{\mathbf{u}} - (W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}} + W_{\mathbf{vv}})\dot{\mathbf{v}} - W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_t &= W_{\mathbf{v}t}. \end{aligned}$$

Por (6.51) vemos que os coeficientes de  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\dot{\mathbf{v}}$  desaparecem, de modo que as equações acima se reduzem a

$$\mathbf{y}_t - W_{\mathbf{xx}}\mathbf{x}_t = W_{\mathbf{x}t}, \quad -W_{\mathbf{vx}}\mathbf{x}_t = W_{\mathbf{v}t}. \quad (6.59)$$

Por outro lado as derivadas parciais da função  $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = W_t(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}, t)$  com respeito a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dadas respectivamente por

$$\beta_{\mathbf{u}} = \mathbf{x}_{\mathbf{u}}^t W_{t\mathbf{x}}, \quad \beta_{\mathbf{v}} = \mathbf{x}_{\mathbf{v}}^t W_{t\mathbf{x}} + W_{t\mathbf{v}}.$$

Assim, por (6.59) e (6.51) obtemos a seguinte expressão para o gradiente de  $\beta$

$$\nabla\beta = \mathcal{M}^T J\mathbf{z}_t.$$

Comparando isso com (6.57) temos que  $R = \beta + k$ , onde  $k$  é uma constante. E como a constante é irrelevante para a dinâmica, terminamos a prova.  $\blacksquare$

**Exemplo 6.3.37.** *Consideremos  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  com  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Seja  $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ . Calculando suas derivadas parciais temos*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

Note também que  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = 1$ , dessa forma  $S$  é uma função geradora de  $\varphi$ .

**Exemplo 6.3.38.** *Seja  $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = -\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}\|^2}{2}$ . Calculando suas derivadas parciais temos*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \eta_i - x_i, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_i} S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = x_i - \eta_i.$$

Assim, segue que  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) \right) = 1$ . Desta forma, podemos construir uma aplicação  $\varphi : (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ , simplética, da seguinte forma

$$\begin{cases} y_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = \eta_i - x_i \\ \xi_i &= \frac{\partial}{\partial \eta_i} S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_i - \eta_i. \end{cases}$$

Vamos determinar  $\varphi$  explicitamente, pela segunda equação do sistema obtemos  $x_i = \xi_i + \eta_i$  e substituindo o valor de  $x_i$  na primeira equação obtemos a expressão de  $y_i$ , conseqüentemente, temos que

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}).$$

**Exemplo 6.3.39.** Considere a função Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + V(x_1, x_2),$$

e suponha que a forma do potencial  $V$  sugera uma mudança para coordenadas polares, por exemplo, se  $V(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$ . Vamos obter a função Hamiltoniana associada ao sistema após a transformação canônica. Para isso, vamos completar a transformação

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

para uma transformação simplética de  $\mathbb{R}^4$ .

Considerando a função geradora

$$S(r, \theta, y_1, y_2) = y_1 r \cos \theta + y_2 r \sin \theta,$$

observe que  $x_1 = S_{y_1} = r \cos \theta$ ,  $x_2 = S_{y_2} = r \sin \theta$ , e em conformidade com a transformação dada, consideremos  $R, \Theta$  como os momentos conjugados de  $r, \theta$  respectivamente. Assim

$$R = S_r = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta, \quad \Theta = S_\theta = -y_1 r \sin \theta + y_2 r \cos \theta,$$

donde

$$\begin{cases} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ y_1 &= R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta \\ y_2 &= R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta, \end{cases}$$

é a transformação canônica gerada por  $S$  e a nova função Hamiltoniana fica escrita na forma

$$\mathcal{H}(r, \theta, R, \Theta) = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + V(r, \theta).$$

**Exemplo 6.3.40.** (Função geradora dada pela aplicação rotação) Neste exemplo descreveremos alguns passos do processo de obtenção da função geradora da rotação, maiores detalhes veja [9]. Em várias ocasiões é importante conhecer a função geradora da transformação simplética dada por uma rotação

$$\begin{cases} x = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t \\ y = -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t. \end{cases} \quad (6.60)$$

Seja  $W(x, \eta, t)$  a função geradora dessa transformação. Então,

$$y = W_x \quad e \quad \xi = W_\eta.$$

Segue que

$$W_x = -\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t = \frac{x - \eta \sin \omega t}{\cos \omega t} \sin \omega t + \eta \cos \omega t = -\frac{x \sin \omega t}{\cos \omega t} + \frac{\eta}{\cos \omega t},$$

e integrando a última equação com respeito a  $x$ , temos

$$W(x, \eta, t) = -\frac{1}{2}x^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + \frac{\eta x}{\cos \omega t} + g(\eta).$$

Como

$$W_\eta = \frac{x}{\cos \omega t} + g'(\eta) = \xi = \frac{x - \eta \sin \omega t}{\cos \omega t},$$

segue que

$$g'(\eta) = -\frac{\eta \sin \omega t}{\cos \omega t} \quad e \quad g(\eta) = -\frac{1}{2}\eta^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}.$$

Portanto, a função geradora é

$$\begin{aligned} W(x, \eta, t) &= -\frac{1}{2}x^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + \frac{\eta x}{\cos \omega t} - \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + \eta^2) \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + \frac{\eta x}{\cos \omega t}. \end{aligned}$$

Agora calculando  $W_t$ , obtemos

$$W_t = -\frac{\omega}{2}(x^2 + \eta^2) \frac{1}{\cos^2 \omega t} + \frac{\omega x \eta \sin \omega t}{\cos^2 \omega t}$$

e usando a expressão de  $x$  encontramos

$$W_t = -\frac{\omega}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Usaremos com frequência a transformação simplética (6.3.40) nos próximos Capítulos, pois quando nos depararmos com uma função Hamiltoniana da forma

$$H(q, p, t; \varepsilon) = H_0(q, p) + \varepsilon H_1(q, p, t) + \varepsilon^2 H_2(q, p, t) + \dots,$$

onde  $H_0 = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2)$ , por meio de uma rotação pelo ângulo  $\omega t$ , podemos anular o termo independente de  $\varepsilon$ , visto que, pela teoria estudada nesta seção para obter a nova função Hamiltoniana devemos adicionar  $W_t$  na antiga função.

## 6.4 Teoria da estabilidade de soluções

*Está claro que, na maioria dos casos, é impraticável obter soluções explícitas para sistemas de equações diferenciais ordinárias. Portanto, recorreremos à análise qualitativa das soluções, o que nos permite ter uma compreensão do comportamento geral das mesmas. Um aspecto crucial nessa análise é o estudo da estabilidade das soluções. Com esse propósito em mente, neste capítulo, vamos explorar resultados clássicos da teoria de estabilidade de soluções em sistemas de equações diferenciais ordinárias.*

### 6.4.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Nesta seção, vamos começar com a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov e, em seguida, abordaremos o segundo método de Lyapunov, também conhecido como método direto, aplicado a sistemas autônomos. Esse método nos permite inferir a estabilidade de um ponto de equilíbrio em um sistema de equações diferenciais ordinárias por meio de uma função auxiliar adequada, denominada "função de Lyapunov".

Considere a equação diferencial ordinária

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad (6.61)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Seja  $a > 0$  real e suponhamos que  $U$  contém a vizinhança  $\Omega_a = B_a(\mathbf{x}_0) \times [t_0, +\infty)$ .

Verifica-se que  $\varphi(t) \equiv \mathbf{x}_0$  é uma solução da equação (6.61) se, somente se  $f(\mathbf{x}_0, t) = 0$  para todo  $t$ . Daí, dizemos que o ponto  $\mathbf{x}_0 \in U$  é um equilíbrio ou ainda ponto de equilíbrio de (6.61).

Quanto a teoria de EDO, temos que cada solução  $\varphi = \varphi(t)$  de (6.61) em  $U$  depende de  $f$  e das condições iniciais  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Assim, pequenas mudanças ou perturbações, em  $\mathbf{x}_0$  produzem pequenas mudanças em  $\varphi(t)$  e no intervalo ao redor de  $t_0$ . Uma questão que surge normalmente é esta: Cada solução  $\bar{\varphi}$  que inicia-se próximo do ponto inicial de  $\varphi$ , ou seja,  $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$  está próximo de  $\mathbf{x}_0$ , permanece próxima da solução  $\varphi = \varphi(t)$  para todo tempo, ou existem soluções que eventualmente desviam-se de  $\varphi(t)$  não importando quão próxima elas estivessem de  $\mathbf{x}_0$ .

Analisemos algumas definições e resultados:

**Definição 6.4.1.** (*Estabilidade segundo Lyapunov*) Seja  $\bar{\varphi}(t)$  uma solução de equilíbrio de (6.61) de maneira que  $\bar{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Dizemos que  $\bar{\varphi}(t)$  é:

1. *Estável em  $t = t_0$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que, para qualquer ponto  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ , a solução  $\varphi(t)$  que tem como ponto inicial  $\mathbf{x}$ , ou seja,*

$\varphi(t_0) = \mathbf{x}$ , está definida para todo  $t \geq t_0$  e satisfaz a desigualdade

$$\|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\| \leq \varepsilon,$$

para todo  $t \geq t_0$  (ver figura 6.7);

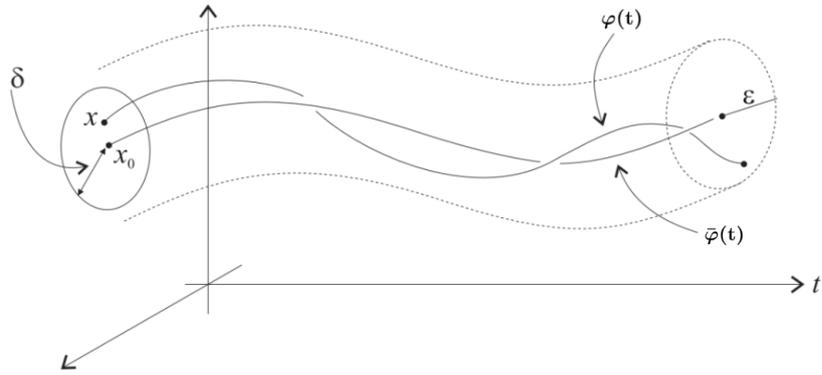


Figura 6.7: Ilustração de ponto estável no sentido de Lyapunov. Figura retirada e modificada da referência [48]

2. *Assintoticamente estável, se ela é estável e além disso, existe um número positivo  $\delta_1 < \delta$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\| = 0$  (ver figura 6.8);*

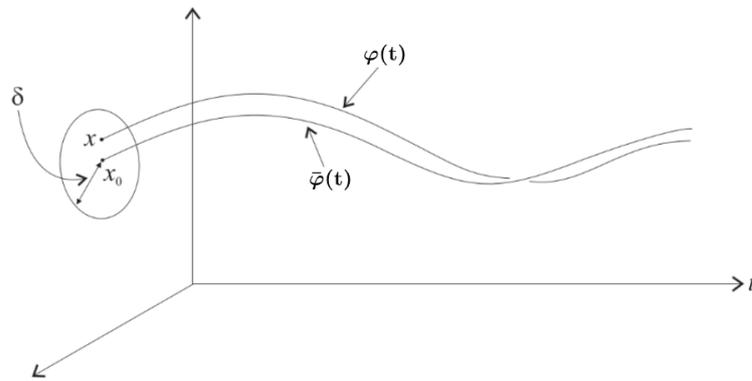


Figura 6.8: Ilustração de ponto assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Figura retirada e modificada da referência [48]

3. *Instável, quando não é estável, isto é, se existe um número  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo número positivo  $\delta < \varepsilon$ , existe algum ponto  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$  posição inicial de uma solução  $\varphi(t)$  que ou não está definida para todo  $t \geq 0$  ou*

$$\|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\| \geq \varepsilon,$$

para algum  $t > 0$ .

Considere  $\varphi(t)$  uma solução de (6.61) e a mudança de coordenadas no tempo  $\bar{\varphi}(t) = \mathbf{z}(t) + \varphi(t)$ . Segue que  $\bar{\varphi}(t)$  é solução de (6.61) se, e somente se,  $\mathbf{z}(t) = \bar{\varphi}(t) - \varphi(t)$  é

uma solução de

$$\dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{z}, t) \quad (6.62)$$

onde  $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}(t) + \varphi(t), t)$ . A solução de equilíbrio da equação (6.62) corresponde a  $\mathbf{z}^* = 0$ . Assim, a menos de uma translação, podemos considerar a origem como o equilíbrio do sistema em questão.

**Observação 6.4.2.** Dizemos que um sistema linear de equações diferenciais ordinárias é estável no sentido de Lyapunov se a solução de equilíbrio nula for estável.

A partir deste ponto, abordaremos algumas considerações preliminares que serão úteis para a compreensão do método direto de Lyapunov.

**Definição 6.4.3.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ , aberto, com  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Uma função escalar  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dita:

- (i) Semi-definida positiva sobre  $U$  se é contínua sobre  $U$  e  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in U$ ;
- (ii) Definida positiva sobre  $U$  se é contínua sobre  $U$ ,  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  e  $V(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x} \in U - \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- (iii) Uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  é semi-definida negativa (definida negativa) sobre  $U$  se  $-V(\mathbf{x})$  é semi-definida positiva (definida positiva) sobre  $U$ .

**Exemplo 6.4.4.** (a) Considere  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ , a função  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  é definida positiva sobre  $\mathbb{R}^2$ , pois,  $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  e  $V(0, 0) = 0$ .

(b) Já a função  $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$  é semidefinida positiva sobre  $\mathbb{R}^2$ , pois  $V(x_1, x_2) = 0$  na reta  $x_2 = -x_1$  e  $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $(x_1, x_2) \neq (x_1, -x_1)$ .

(c) A função  $V(x_1, x_2) = -x_1^2$  é semidefinida negativa uma vez que  $V(x_1, x_2) \leq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Note que  $V(x_1, x_2) = 0, \forall (x_1, x_2) = (0, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 6.4.5.** Considere  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, de maneira que  $\mathbf{x}_0 = (0, 0) \in U$ . A função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, \quad (6.63)$$

é definida positiva sobre  $U$  se, e somente se,

$$a > 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0, \quad (6.64)$$

e é definida negativa sobre  $U$  se, e somente se

$$a < 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0. \quad (6.65)$$

**Demonstração:** Observemos inicialmente que,

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2) &= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\
 &= ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2 + cx_2^2 - \frac{b^2}{4a}x_2^2 \\
 &= \left(ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2\right) + x_2^2\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
 &= a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right).
 \end{aligned}$$

Assim, se  $V$  é definida positiva então  $V(0, 0) = 0$  e  $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$ , conseqüentemente,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U. \quad (6.66)$$

Pelo fato de  $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$  e  $x_2^2 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$ , temos que, a desigualdade (6.66) é satisfeita apenas se  $a > 0$  e  $4ac - b^2 > 0$ . Reciprocamente, se  $a > 0$  e  $4ac - b^2 > 0$  então  $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$  e  $V(0, 0) = 0$ . Logo  $V(x_1, x_2)$  é definida positiva em  $U$ .

Por outro lado, se  $V$  é definida negativa então  $V(0, 0) = 0$  e  $V(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$ , ou seja,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U. \quad (6.67)$$

Novamente, pelo fato de  $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$  e  $x_2^2 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$ , então para termos  $V(x_1, x_2) < 0$ , devemos ter  $a < 0$  e  $4ac - b^2 > 0$ . Reciprocamente, se  $a < 0$  e  $4ac - b^2 > 0$  então  $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in U$  e  $V(0, 0) = 0$ . Logo  $V(x_1, x_2)$  é definida negativa em  $U$ . ■

Agora, consideremos o sistema de EDO autônoma de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (6.68)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{0} \in U$  tal que  $f(\mathbf{0}) = 0$ , isto é,  $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$  é uma solução de equilíbrio. Denotaremos por  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  solução do sistema (6.68) com condição inicial  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ .

Seja  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e definida tal que  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$  também seja contínua. Notemos que a função  $V$  ao longo de uma solução de (6.68), isto é,  $V(\varphi(\mathbf{x}, t))$  depende da variável  $t$ , assim faz sentido falar em  $\frac{d}{dt}V(\varphi(\mathbf{x}, t))\Big|_{t=0}$ . Definimos  $\dot{V}$  por,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) := \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot f(\mathbf{x}). \quad (6.69)$$

Consequentemente, dada  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  solução de (6.68), temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\varphi(\mathbf{x}, t))\Big|_{t=0} &= \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x}, t)) \cdot \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dt} \right] \Big|_{t=0} = \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x}, t)) \cdot f(\varphi(\mathbf{x}, t)) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \dot{V}(\varphi(\mathbf{x}, t))\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

**Definição 6.4.6.** *Seja  $\mathbf{x}_0$  um equilíbrio de (6.68). Uma função  $V$  é dita de Lyapunov para  $\mathbf{x}_0$  se é definida positiva em uma vizinhança  $U$  de  $\mathbf{x}_0$  e  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x}$  em  $U$ .*

**Teorema 6.4.7.** *(O método direto de Lyapunov) Seja  $\mathbf{x}_0$  equilíbrio do sistema (6.68) e  $U$  vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ . Segue que,*

(i) *Se existir uma função de Lyapunov  $V$  para  $\mathbf{x}_0$ , então  $\mathbf{x}_0$  é estável;*

(ii) *Se existir uma função de Lyapunov  $V$  para  $\mathbf{x}_0$  de maneira que  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x}$  em  $U - \{\mathbf{x}_0\}$ , então  $\mathbf{x}_0$  é assintoticamente estável;*

(iii) *Seja  $V$  uma função escalar de classe  $C^1$  definida positiva em uma vizinhança  $U$  de  $\mathbf{x}_0$ , tal que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é definida positiva para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  em  $U$ , então  $\mathbf{x}_0$  é instável.*

**Demonstração:** Ver [47].

**Exemplo 6.4.8.** *Vamos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio nos sistemas a seguir.*

$$(i) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Observamos que em ambos os sistemas, o ponto  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio. Vamos analisar a estabilidade desse ponto de equilíbrio. Para ambos os sistemas, consideraremos a seguinte função:  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo a origem e  $V$  é definida por  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Para o sistema (i), note inicialmente que  $V$  satisfaz as condições do item (iii) do teorema anterior. Note que,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $\dot{V}(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \Omega - (0, 0)$  e  $\dot{V}(0, 0) = 0$ . Logo,  $\dot{V}$  é definida positiva e pelo teorema 6.4.7 o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é instável.

Já para o sistema (ii), vimos no Exemplo 6.4.4 que  $V$  é definida positiva, e observemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) \neq 0,\end{aligned}\tag{6.70}$$

onde  $\dot{V}(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \Omega - (0, 0)$  e  $\dot{V}(0, 0) = 0$ . Logo,  $\dot{V}$  é definida negativa, portanto, pelo teorema 6.4.7, o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

**Corolário 6.4.9.** *Se o sistema (6.68) possui uma integral primeira  $F$  definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da solução de equilíbrio e todas as soluções estão definidas para todo tempo, então a solução de equilíbrio é estável.*

**Demonstração:** Ao definirmos  $V(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$  segue que  $\dot{V} \equiv 0$ , conseqüentemente  $V$  é uma função de Lyapunov e assim pelo teorema 6.4.7 a solução de equilíbrio é estável. ■

**Teorema 6.4.10.** *(Dirichlet) Considere um sistema autônomo com função Hamiltoniana  $H = H(q, p)$ . Se  $z^*$  é um ponto de mínimo (ou máximo) local isolado de  $H$ , então o equilíbrio  $z^*$  é estável (no sentido Lyapunov).*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade podemos supor que  $z^* = 0$  e  $H(0) = 0$ . Sendo  $z^* = 0$  mínimo local isolado de  $H$ , segue que existe um número  $\delta > 0$  tal que

$$H(z) > H(z_0) = 0$$

sempre que  $\|z\| < \delta$ . Com isso temos que  $H$  é definida positiva em  $B(0, \delta)$ . Como  $\dot{H} \equiv 0$ , em particular,  $H(z) = 0$ , para todo  $z$  em  $B(0, \delta)$ . Logo,  $H|_{B(0, \delta)}$  é uma função de Lyapunov para  $z^* = 0$ . Portanto,  $z^*$  é estável.

Caso  $z^* = 0$  seja máximo local isolado de  $H$ , considerando a função  $V(z) = -H(z)$ , para  $z \in B(0, \delta)$ , donde segue o resultado. ■

**Observação 6.4.11.** *Vimos na seção 6.2.2 que trata de sistemas Hamiltonianos lineares que a função Hamiltoniana associada a um sistema Hamiltoniano linear autônomo é da forma:*

$$H(z) = \frac{1}{2}z^T S z,\tag{6.71}$$

Assim, a função Hamiltoniana é uma forma quadrática no espaço  $\mathbb{R}^{2n}$ . Além disso, demonstramos que  $H$  é uma integral primeira do sistema e, de acordo com o Corolário

6.4.9, se  $H$  for definida positiva (ou negativa), o ponto de equilíbrio é estável. No entanto, se  $H$  não for definida positiva (ou negativa), não podemos afirmar nada sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Agora, suponhamos que  $H$  seja uma função Hamiltoniana com  $n$  graus de liberdade, analítica em uma vizinhança da origem, e que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema correspondente. Expandindo  $H$  em uma série de Taylor em uma vizinhança da origem, obtemos o seguinte:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \cdots, \quad (6.72)$$

onde  $H_s$ ,  $s \geq 2$  é um polinômio homogêneo de grau  $s$  nas variáveis  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ . Se assumirmos que a parte quadrática é definida positiva (ou negativa) temos que  $H$  é uma integral primeira definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da origem, visto que podemos considerar  $H = H_2 + \mathcal{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , onde  $\frac{\mathcal{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\|(\mathbf{q}, \mathbf{p})\|}$  vai para zero quando  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  está próximo da origem. E, pelo corolário 6.4.9, segue que a origem é um equilíbrio estável para o sistema Hamiltoniano associado a  $H$ . Assim, podemos usar o corolário 6.4.9 para qualquer sistema Hamiltoniano autônomo que se encaixe nas condições exigidas.

## 6.4.2 Estabilidade de Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Nesta seção iremos trabalhar a estabilidade da solução de equilíbrio  $\mathbf{x}(t) = 0$ , de um sistema de equações diferenciais linear

$$\dot{x} = Ax, \quad (6.73)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas reais constantes.

A matriz  $A$  pode ser vista como um operador linear no  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto Ax$ , o qual pode ser estendido a um operador linear  $A_{\mathbb{C}}$  no espaço complexo  $\mathbb{C}^n$  definido por  $A_{\mathbb{C}}(x+iy) = Ax + iAy$ .

Alguns resultados serão importantes para a teoria de estabilidade estudada, veremos a seguir.

**Definição 6.4.12.** Dizemos que  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  conjuga as matrizes  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  se  $A = PBP^{-1}$ .

**Teorema 6.4.13.** Se  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  conjuga as matrizes  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , então  $P$  transforma as soluções de  $\dot{y} = By$  nas soluções de  $\dot{x} = Ax$ . Mais precisamente, se  $A = PBP^{-1}$ , então são equivalentes as afirmações:

(a)  $y(t)$  é solução de  $\dot{y} = By$ ;

(b)  $x(t) = Py(t)$  é solução de  $\dot{x} = Ax$ .

**Demonstração:** Seja  $x(t) = Py(t)$  com  $y(t)$  solução de  $\dot{y}(t) = By$ , logo

$$\dot{x}(t) = P\dot{y}(t) = PBy(t) = APy(t) = Ax(t).$$

Reciprocamente, se  $x(t) = Py(t)$  é solução de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , temos

$$\begin{aligned} A(Py(t)) &= PBy(t) = P\dot{y}(t) \\ \Rightarrow \dot{y}(t) &= P^{-1}APy(t) = P^{-1}PBy(t) = By(t). \end{aligned}$$

■

A partir deste resultado é possível afirmar que encontrar solução de  $\dot{x} = Ax$  é equivalente a obter soluções de  $\dot{y} = By$ , a menos de uma mudança de coordenadas.

**Teorema 6.4.14.** (*Forma Canônica de Jordan*). Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , então  $A$  pode ser conjugada a uma matriz real

$$\mathcal{J} = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

em que cada  $J_i$  é um bloco de Jordan real ou complexo. A matriz  $\mathcal{J}$  é única, a menos da ordem dos blocos da diagonal.

Uma cadeia de Jordan para a matriz  $A_{\mathbb{C}}$  com autovalor  $\lambda$  é uma sequência de vetores complexos  $z_1, z_2, \dots, z_k$  que satisfazem as seguintes relações:  $A_{\mathbb{C}}z_1 = \lambda z_1 + z_2$ ,  $A_{\mathbb{C}}z_2 = \lambda z_2 + z_3$ , e assim por diante até  $A_{\mathbb{C}}z_k = \lambda z_k$ . Nesse contexto, dizemos que  $z_k$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ , e  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  são vetores associados a  $\lambda$ . Cada autovalor de  $A$  determina um certo número de cadeias de Jordan associadas a ele. O Teorema da Decomposição de Jordan estabelece que o conjunto de todas as cadeias de Jordan forma uma base para o espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^n$ . Cada cadeia de Jordan associada a um autovalor  $\lambda$  gera um subespaço invariante sob a ação de  $A_{\mathbb{C}}$ . Em relação à base formada pelos vetores da cadeia, a matriz de  $A_{\mathbb{C}}$  tem  $\lambda$  na diagonal, o número 1 na subdiagonal (se a cadeia contiver mais de um vetor), e 0 nas demais entradas. Essa matriz é conhecida como uma matriz elementar de Jordan. As cadeias de Jordan que têm só um vetor geram um subespaço invariante por  $A_{\mathbb{C}}$  e formam uma base deste subespaço relativamente à qual a matriz de  $A_{\mathbb{C}}$  é diagonal.

Se  $\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2$  é uma decomposição invariante por  $A_{\mathbb{C}}$ , isto é,  $A_{\mathbb{C}}(E_1) \subset E_1$ ,  $A_{\mathbb{C}}(E_2) \subset E_2$ , e se  $z = z_1 + z_2$ , com  $z_j \in E_j$ , a equação  $\dot{z} = A_{\mathbb{C}}z$  é equivalente ao par de equações  $\dot{z}_1 = A_1z_1$ ,  $\dot{z}_2 = A_2z_2$ , onde  $A_j$  é a restrição de  $A_{\mathbb{C}}$  a  $E_j$ . Assim, as soluções  $z(t)$  da primeira equação correspondem a pares de soluções  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  das duas últimas. Por essa observação podemos reduzir o problema de se encontrar as soluções da equação  $\dot{x} = Ax$  ao da decomposição de Jordan de  $A_{\mathbb{C}}$  e a solução do problema nos dois casos seguintes:

- (a) Caso de um subespaço invariante por  $A_{\mathbb{C}}$  gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores que tem cadeia de Jordan com um único elemento.
- (b) Caso de um subespaço invariante por  $A_{\mathbb{C}}$  gerado por uma cadeia de Jordan de um autovalor que tem uma cadeia com mais de um elemento.

No primeiro caso, o sistema de equações em termos das coordenadas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  relativamente à base de autovalores  $z_1, \dots, z_k$ , se escreve na forma,

$$\dot{\gamma}_1 = \lambda_1 \gamma_1, \dots, \dot{\gamma}_k = \lambda_k \gamma_k,$$

e a solução com condição inicial  $z = \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_k z_k$  é dada por,

$$z(t) = e^{\lambda_1 t} \gamma_1 z_1 + \dots + e^{\lambda_k t} \gamma_k z_k.$$

No segundo caso, o sistema tem a forma,

$$\dot{\gamma}_1 = \lambda \gamma_1, \dot{\gamma}_2 = \lambda \gamma_2 + \gamma_1, \dots, \dot{\gamma}_k = \lambda \gamma_k + \gamma_{k-1},$$

e a solução com condição inicial  $z = \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_k z_k$  é dada por,

$$\begin{aligned} z(t) = & e^{\lambda t} \left[ \gamma_1 z_1 + (\gamma_1 t + \gamma_2) z_2 + \left( \gamma_1 \frac{t^2}{2!} + \gamma_2 t + \gamma_3 \right) z_3 + \dots + \right. \\ & \left. + \left( \gamma_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \gamma_{k-1} t + \gamma_k \right) z_k \right]. \end{aligned}$$

No caso diagonalizável, se o autovalor  $\lambda_j$  é real podemos tomar o autovetor  $z_j$  real e a solução de  $\dot{\gamma}_j = \lambda_j \gamma_j$  também será real. Se  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  é complexo então  $z_j = x_j + iy_j$  será um vetor complexo e as partes real e imaginária da solução  $\gamma_j e^{\lambda_j t} z_j$  formarão um par de soluções reais linearmente independentes contidas no subespaço gerado pelos vetores  $x_j, y_j$ . Se  $\gamma_j = \xi + i\eta$ , elas são dadas por,

$$e^{\alpha t} [(\xi_j \cos \beta t - \eta_j \sin \beta t)x_j + (\xi_j \sin \beta t + \eta_j \cos \beta t)y_j],$$

e

$$e^{\alpha t} [(\xi_j \sin \beta t - \eta_j \cos \beta t)x_j - (\xi_j \cos \beta t + \eta_j \sin \beta t)y_j].$$

No segundo caso, se o autovalor  $\lambda$  é real, a cadeia de Jordan  $z_1, \dots, z_k$  pode ser formada por vetores reais. Se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é complexo com cadeia de Jordan  $z_1, \dots, z_k$  então os vetores conjugados  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k$  formam uma cadeia de Jordan do autovalor conjugado  $\bar{\lambda}$  e a cada solução,

$$\begin{aligned} z(t) = & e^{\lambda t} \left[ \gamma_1 z_1 + (\gamma_1 t + \gamma_2) z_2 + \left( \gamma_1 \frac{t^2}{2!} + \gamma_2 t + \gamma_3 \right) z_3 + \dots + \right. \\ & \left. + \left( \gamma_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \gamma_{k-1} t + \gamma_k \right) z_k \right], \end{aligned}$$

corresponde outra solução,

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) = e^{\bar{\lambda}t} & \left[ \bar{\gamma}_1 z_1 + (\bar{\gamma}_1 t + \bar{\gamma}_2) \bar{z}_2 + \left( \bar{\gamma}_1 \frac{t^2}{2!} + \bar{\gamma}_2 t + \bar{\gamma}_3 \right) \bar{z}_3 + \cdots + \right. \\ & \left. + \left( \bar{\gamma}_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \bar{\gamma}_{k-1} t + \bar{\gamma}_k \right) \bar{z}_k \right]. \end{aligned}$$

A parte real,  $x(t) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  e a parte imaginária,  $y(t) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$  são soluções reais de  $\dot{x} = Ax$  contidas no subespaço gerado pelos vetores  $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ , onde  $z_j = x_j + iy_j$ .

A partir disso, temos demonstrado o seguinte teorema.

**Teorema 6.4.15.** (*Caracterização das soluções*). *As soluções da equação (6.73) onde  $A$  é uma matriz real  $n \times n$  com entradas constantes, são combinações lineares de funções do tipo  $t^m e^{\alpha t} \cos \beta t$  e  $t^m e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Mais especificamente, uma solução geral do sistema linear (6.73) é da forma,*

$$\sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{m_j-1} (\mathbf{A}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t + \mathbf{B}_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t), \quad (6.74)$$

onde  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  são os autovalores de  $A$ ,  $m_j$  é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovalor  $\lambda_j$  e  $\mathbf{A}_{lj}, \mathbf{B}_{lj}$  são vetores fixos do  $\mathbb{R}^n$  para  $j = 1, \dots, k$  e  $l = 1, \dots, m_j$ .

**Teorema 6.4.16.** *Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores da matriz  $A$  e suponha que  $J_\lambda$  é o bloco de Jordan (em  $\mathbb{C}$ ) associado a  $\lambda$ . Tem-se para a solução nula do sistema  $\dot{x} = Ax$  as seguintes afirmações:*

1.  *$A$  é uma matriz não singular:*

- (a) *Assintoticamente estável se, e somente se,  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$ ;*
- (b) *Estável, mas não assintoticamente estável se, e somente se,  $A$  tem pelo menos um par de autovalores imaginários puros e sempre que cada bloco de Jordan  $J_\lambda$  (em  $\mathbb{C}$ ) associado a cada autovalor imaginário puro  $\lambda$  é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*
- (c) *Instável nos demais casos.*

2.  *$A$  é uma matriz singular:*

- (a) *Assintoticamente estável se os autovalores não nulos tem parte real negativa e o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal;*
- (b) *Estável no caso em que  $A$  tem ao menos um par de autovalores imaginários puros, e cada bloco de Jordan  $J_\lambda$  (em  $\mathbb{C}$ ) associado a cada autovalor imaginário puro  $\lambda$  seja diagonal, o bloco de Jordan associado ao autovalor nulo é diagonal e o resto dos autovalores possui parte real negativa;*
- (c) *Instável nos demais casos.*

**Demonstração:** Ver na referência [47]. ■

### 6.4.3 Estabilidade de Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos

No nosso estudo anterior, tratamos de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e observamos que todas as soluções podem ser determinadas de forma precisa e expressas em termos de polinômios, senos, cossenos e exponenciais. No entanto, quando lidamos com equações lineares cujos coeficientes variam, a obtenção de soluções se torna mais complexa. Para facilitar a análise da estabilidade de sistemas com coeficientes periódicos, recorreremos ao Teorema de Floquet. Esse teorema nos permite transformar o sistema original em um sistema equivalente com coeficientes constantes para cada ponto no tempo, o que nos ajuda a obter informações sobre o sistema original.

Vamos considerar um sistema linear de equações diferenciais,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (6.75)$$

onde  $A(t) = A(t + 2\pi)$ , ou seja,  $A$  é  $2\pi$ -periódica, real e contínua em  $t$ .

A seguir apresentaremos algumas definições e resultados que nos ajudará na prova do Teorema de Floquet.

**Definição 6.4.17.** Dizemos que uma matriz  $C$  de ordem  $m \times m$  tem um logaritmo se existe uma matriz de mesma ordem  $B$  tal que  $C = e^B$ . Neste caso, dizemos que  $B$  é o logaritmo de  $C$  e escrevemos  $B = \log C$ .

**Lema 6.4.18.** Toda matriz  $C$  de ordem  $m \times m$  inversível, ou seja  $\det C \neq 0$ , possui logaritmo.

**Demonstração:** Para justificar a afirmação mostremos que toda matriz  $C$  na forma de Jordan tem um logaritmo, pois se  $C$  é a forma de Jordan de  $A$  e tem um logaritmo, digamos a matriz  $B$ , então temos que  $C = P^{-1}AP$ , onde  $P$  é uma matriz inversível, e  $e^B = C$ . Logo

$$e^B = P^{-1}AP \Rightarrow A = Pe^B P^{-1} = e^{PBP^{-1}},$$

ou seja,  $A$  possui logaritmo.

Suponhamos que  $C$  é uma matriz elementar de Jordan. Assim,  $C$  é diagonal em blocos, isto é,

$$C = \text{diag}[C_1, \dots, C_k],$$

onde cada  $C_j$  é uma matriz quadrada inversível, uma vez que  $D$  é inversível, e se existem matrizes  $B_1, \dots, B_k$  com  $e^{B_j} = C_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ , escrevendo  $B = \text{diag}[B_1, \dots, B_k]$  temos que

$$e^B = \text{diag}[e^{B_1}, \dots, e^{B_k}] = \text{diag}[C_1, \dots, C_k] = C.$$

Com isso é suficiente mostrar que cada bloco de  $C$  possui um logaritmo. Digamos que  $C_j$  tenha a forma  $C_j = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ , assim, a matriz  $B_j = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_m]$  onde  $\mu_j$  é uma das determinações do logaritmo de  $\lambda_j$ , satisfaz o desejado. Agora, se  $C_j$  tem a forma

$$C_j = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m},$$

então podemos reescrever  $C_j = \lambda I + N$ , onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

onde  $N$  é uma matriz nilpotente tal que  $N^m = 0$ . Dessa forma, escrevendo  $C_j = \lambda(I+R)$ , com  $R = N/\lambda$  considere a matriz  $B_j = \mu I + S$ , onde  $\mu$  é uma das determinações do logaritmo de  $\lambda$  e

$$S = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j}.$$

Observemos que  $S = \log(I + R)$ , pois substituindo  $R$  pela variável  $z$  na série.

$$\log(1 + z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j},$$

donde obtemos

$$\log(1 + R) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j} = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j} = S,$$

onde usamos o fato de  $R^j = 0$  para todo  $j \geq m$ . Portanto, como  $\mu I$  e  $S$  comutam, temos

$$e^{B_j} = e^{\mu I + S} = e^{\mu I} e^{\log(I+R)} = \lambda(I + R) = C_j.$$

■

**Lema 6.4.19.** *Considere  $X(t)$  e  $Y(t)$  tais que,  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  e  $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ , sendo  $X(t)$  matriz fundamental do sistema (6.75). Então existe uma única matriz constante  $C \in M_{n \times n}$  tal que para todo  $t$*

$$Y(t) = X(t)C,$$

para todo  $t$ .  $C$  é não singular se e somente se  $Y(t)$  é matriz fundamental.

**Demonstração:** Sabemos que  $X(t)$  é inversível, pois é matriz fundamental. Daí, derivando a expressão  $X^{-1}(t)X(t) = I$ , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ X^{-1}(t) \right] \cdot X(t) + X^{-1}(t) \dot{X}(t) &= I \\ \frac{d}{dt} \left[ X^{-1}(t) \right] \cdot X(t) + X^{-1}(t) A(t) X(t) &= I \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ X^{-1}(t) \right] &= -X^{-1}(t) A(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left[ X^{-1}(t) Y(t) \right] = -X^{-1}(t) A(t) Y(t) + X^{-1}(t) A(t) Y(t) = 0,$$

donde segue que  $X^{-1}(t)Y(t) = C$  e dessa forma  $Y(t) = X(t)C$ . ■

**Lema 6.4.20.** *Se  $X(t)$  é uma matriz fundamental do sistema (6.75), com  $X(0) = I$ , então*

$$X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi),$$

para todo  $t$ .

**Demonstração:** Sejam  $U(t) = X(t + 2\pi)$  e  $V(t) = X(t)X(2\pi)$ , como ambas são matrizes fundamental do sistema (6.75) temos que

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t) \text{ e } \dot{V}(t) = A(t)V(t),$$

e como  $U(0) = X(2\pi) = V(0)$ , segue do Teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias que  $U(t) = V(t)$ , para todo  $t$ . ■

**Teorema 6.4.21** (Liouville). *Se  $X(t)$  é uma matriz fundamental de (6.75) em  $I \subseteq \mathbb{R}$ , e se  $t_0 \in I$ , então*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{traço} A(s) ds}$$

para todo  $t \in I$ .

**Demonstração:** Ver demonstração em [7]. ■

**Teorema 6.4.22** (Floquet). *Seja  $X(t)$  uma matriz fundamental do sistema (6.75), com condição inicial  $X(0) = I_m$ , onde  $A(t)$  é  $2\pi$ -periódica. Então existem  $B$  e  $Y(t)$ , matrizes  $m \times m$ , sendo  $B$  matriz constante e  $Y(t)$   $2\pi$ -periódica tais que  $X(t) = Y(t)e^{tB}$ .*

**Demonstração:** Note que  $X(t + 2\pi)$  também é matriz fundamental de (6.75). De fato,

$$\dot{X}(t + 2\pi) = A(t + 2\pi)X(t + 2\pi) = A(t)X(t + 2\pi).$$

Além disso,  $\det X(t + 2\pi) \neq 0$  (pelo teorema (6.4.21) para  $t_0 = 0$ ),

$$\begin{aligned}\det X(t + 2\pi) &= \det X(0) \cdot e^{\int_0^t \text{traço}A(s)ds} \\ &= \det I \cdot e^{\int_0^t \text{traço}A(s)ds} \neq 0.\end{aligned}$$

Pelo lema anterior,  $X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi)$ , e pelo lema 6.4.19 existe matriz constante  $C$  invertível tal que  $X(t + 2\pi) = X(t)C$ . Assim, como  $C$  é inversível segue do lema 6.4.18 que existe  $B$  tal que

$$e^{2\pi B} = C = X(2\pi). \quad (6.76)$$

Defina  $Y(t) = X(t)e^{-tB}$ . Dessa forma,

$$Y(t)e^{tB} = X(t)e^{-tB}e^{tB} = X(t).$$

Resta mostrar que  $Y(t)$  é  $2\pi$ -periódica. De fato,

$$\begin{aligned}Y(t + 2\pi) &= X(t + 2\pi)e^{-(t+2\pi)B} = X(t)X(2\pi)e^{-2\pi B}e^{-tB} \\ &= X(t)X(2\pi)X^{-1}(2\pi)e^{-tB} = X(t)e^{-tB} = Y(t).\end{aligned}$$

■

**Corolário 6.4.23.** *Sejam  $X(t), A(t), B$  e  $Y(t)$  como no Teorema de Floquet. A mudança de variáveis  $x = Y(t)y$  transforma o sistema  $\dot{x} = A(t)x$ , com  $A(t)$   $2\pi$ -periódica em  $\dot{y} = By$  com coeficientes constantes, pois  $B$  é uma matriz constante.*

**Demonstração:** Substituindo  $x = Y(t)y$ , onde  $Y(t) = X(t)e^{-tB}$ , no sistema  $\dot{x} = A(t)x$  teremos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{Y}(t)y + Y(t)\dot{y} = (\dot{X}(t)e^{-tB} - X(t)Be^{-tB})y + X(t)e^{-tB}\dot{y} \\ &= A(t)X(t)e^{-tB}y - X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y} \\ &= A(t)Y(t)y - X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\dot{x} = A(t)x = A(t)Y(t)y,$$

donde obtemos

$$-X(t)e^{-tB}By + X(t)e^{-tB}\dot{y} = 0$$

e assim

$$\begin{aligned}X(t)e^{-tB}\dot{y} &= X(t)e^{-tB}By \\ \dot{y} &= By.\end{aligned}$$

■

**Observação 6.4.24.** A transformação  $x = Y(t)y$  transforma um sistema Hamiltoniano periódico em um sistema Hamiltoniano autônomo.

**Definição 6.4.25.** A matriz  $X(2\pi)$  é chamada de matriz de monodromia da equação (6.75).

**Definição 6.4.26.** Os autovalores  $\lambda_j$  de  $B$  são chamados expoentes característicos do sistema (6.75). Já os autovalores  $\rho_j$  de  $e^{2\pi B} = X(2\pi)$  são chamados multiplicadores característicos de  $A(t)$ , ou simplesmente multiplicadores.

**Observação 6.4.27.** Pela igualdade  $e^{2\pi B} = X(2\pi)$ , segue que  $\rho_j = e^{2\pi\lambda_j}$ , ou ainda,  $\lambda_j = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_j = \frac{1}{2\pi} [\ln |\rho_j| + i \arg(2\pi k)]$ , com  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Assim, fica claro que os valores dos expoentes característicos são definidos a partir dos valores dos multiplicadores e não são únicos.

**Observação 6.4.28.** Os expoentes característicos  $\lambda_j$ , são as raízes da equação característica do sistema  $\dot{y} = By$ , e assim os problemas de estabilidade dos sistemas,  $\dot{x} = A(t)x$  e  $\dot{y} = By$  são equivalentes, facilitando o estudo da estabilidade de soluções para o sistema periódico por termos agora um sistema autônomo equivalente. Dessa forma, pelos estudos desta seção e pelo teorema 6.4.16, o sistema  $\dot{x} = A(t)x$  é assintoticamente estável se e somente se  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ ,  $\forall j$ , ou seja  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \ln \rho_j\right) < 0$ ,  $\forall j$ , considerando  $\rho_j \neq 0$ , pelo estudo dos números complexos, temos que  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \ln \rho_j\right) < 0 \Leftrightarrow \ln |\rho_j| < 0 \Leftrightarrow |\rho_j| < 1$ . Já para o sistema ser estável todos os multiplicadores devem estar no disco unitário  $|\rho_j| \leq 1$ , além disso, no caso de alguns multiplicadores estarem no círculo  $|\rho| = 1$ , o bloco de Jordan associado a tais multiplicadores devem ser diagonais.

**Observação 6.4.29.** Os multiplicadores característicos não dependem da escolha de uma matriz de monodromia, isto é, de uma matriz fundamental.

De fato, se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são duas matrizes fundamentais, então para cada  $t$ , existe uma matriz não singular,  $D(t)$ , tal que  $Y(t) = X(t)D(t)$ . Como  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  e  $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} A(t)X(t)D(t) &= A(t)Y(t) = \dot{Y}(t) = \dot{X}(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t) \\ &= A(t)X(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t), \end{aligned}$$

o que implica em  $X(t)\dot{D}(t) = 0$ . Como  $X(t)$  é inversível, temos que  $\dot{D}(t) = 0$  para todo  $t$ , ou seja,  $D$  é uma matriz constante. Assim,

$$X(t)X(2\pi)D = X(t+2\pi)D = Y(t+2\pi) = Y(t)Y(2\pi) = X(t)DY(2\pi)$$

de onde segue que as matrizes  $X(2\pi)$  e  $Y(2\pi)$  são semelhantes, ou seja,  $X(2\pi) = DY(2\pi)D^{-1}$ . Assim, temos o desejado, pois matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Com base nos resultados acima podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 6.4.30.** *A solução nula do sistema (6.75) é:*

- *Assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real negativa.*
- *Estável se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real menor ou igual a zero, enquanto os expoentes característicos com parte real nula possuem bloco de Jordan (sobre  $\mathbb{C}$ ) diagonal.*
- *Instável, se e somente se, existe algum expoente característico com parte real positiva ou algum expoente característico não nulo com bloco de Jordan não diagonal.*

Assim, concluímos que o sistema (6.75) é estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores tiverem módulo menor ou igual a um, no caso de  $|\rho| = 1$ , a matriz  $X(2\pi)$  deve ser redutível a forma diagonal.

## Programa de Construção das curvas da Equação de Mathieu

```

maxdeg = 7;
(*Entrada- Hamiltoniano expandido normalizado e rotacionado*)
μ = μ0 + ε * μ1 + ε^2 * μ2 + ε^3 * μ3 + ε^4 * μ4 +
    ε^5 * μ5 + ε^6 * μ6 + ε^7 * μ7 + ε^8 * μ8 + ε^9 * μ9 + ε^10 * μ10;
H = Series[(1/2) * (μ + ε * Cos[t]) * x^2 + (1/2) * y^2, {ε, 0, maxdeg}];
ops = H /. ε -> 0 // Factor // FullSimplify;
(*Normalização da parte linear*)
x = -1 / Sqrt[Sqrt[μ0]] * η;
y = Sqrt[Sqrt[μ0]] * ξ;
(*Rotação*)
ξ = x1 * Cos[t * Sqrt[μ0]] + y1 * Sin[t * Sqrt[μ0]];
η = -x1 * Sin[t * Sqrt[μ0]] + y1 * Cos[t * Sqrt[μ0]];
(*Hamiltoniano normalizado e rotacionado*)
HNR = H - (1/2) * Sqrt[μ0] * (x1^2 + y1^2);
(*Valor de μ0*)
μ0 = 1/4;
(*Coeficiente do Hamiltoniano*)
Hdd[q_] := (q!) * TrigReduce[Coefficient[HNR, ε, q]];

```

```

(*Definindo W[p] e KK[p] como polinômio
homogêneo de grau 2/ sistema com 1 grau de liberdade*)
For[p = 1, p < maxdeg + 1, p++,
|para cada
  For[l = 0, l ≤ 2, l++,
|para cada
  For[j = 0, j ≤ 2, j++, If[l + j ≠ 2,
|para cada |se
  {w[p][l][j] = 0, h[p][l][j] = 0, k[p][l][j] = 0}]]]]
For[r = 1, r < maxdeg + 1, r++,
|para cada
  W[r_] := Sum[w[r][i][j] * x1^i * y1^j, {i, 0, 2}, {j, 0, 2}];
|soma
  KK[r_] := Sum[k[r][i][j] * x1^i * y1^j, {i, 0, 2}, {j, 0, 2}]]
|soma

(*Colchete de Poisson*)
Poisson[f_, g_] := D[f, x1] * D[g, y1] - D[f, y1] * D[g, x1]
|derivada |derivada |derivada |derivada

(*Triangulo de Lie*)
Ka[1][1] = Poisson[KK[1], W[1]];
For[m = 1, m ≤ maxdeg, m++,
|para cada
  F[m] = Hdd[m] + Sum[Binomial[m - 1, j - 1] * Poisson[Hdd[m - j], W[j]] +
|s... |número binomial
  Binomial[m - 1, j] * Ka[j][m - j], {j, 1, m - 1}] + Poisson[Hdd[0], W[m]];
|número binomial
  For[i = 1, i ≤ maxdeg, i++,
|para cada
  Ka[i][m] = Poisson[KK[m], W[i]] -
  Sum[Binomial[i - 1, s - 1] * Poisson[Ka[i - s][m], W[s]], {s, 1, i - 1}]]
|número binomial

```

```

(*Processo de normalização de Deprit-Hori*)
For[i = 1, i ≤ maxdeg, i++,
  para cada
    F[i] = TrigReduce[F[i]];
    KK[i];
    temp = TrigReduce[F[i] - KK[i]];
    k[i][2][0] =
      1 / (4 * Pi) * Integrate[Coefficient[F[i], x1^2 * y1^0], {t, 0, 4 * Pi}];
    w[i][2][0] = Integrate[Coefficient[temp, x1^2 * y1^0], t];
    k[i][1][1] =
      1 / (4 * Pi) * Integrate[Coefficient[F[i], x1^1 * y1^1], {t, 0, 4 * Pi}];
    w[i][1][1] = Integrate[Coefficient[temp, x1^1 * y1^1], t];
    k[i][0][2] =
      1 / (4 * Pi) * Integrate[Coefficient[F[i], x1^0 * y1^2], {t, 0, 4 * Pi}];
    w[i][0][2] = Integrate[Coefficient[temp, x1^0 * y1^2], t];
  ]
Ka[c1_, c2_] :=
  Coefficient[Hdd[0] + Sum[(KK[i] / (i!)) * e^i, {i, 1, maxdeg}], x1^c1 * y1^c2];
G = {{2 * Ka[2, 0], Ka[1, 1]}, {Ka[1, 1], 2 * Ka[0, 2]}};
J = {{0, 1}, {-1, 0}};
JG = J.G;
P = CharacteristicPolynomial[JG, λ];
Δ = 4 * Ka[2, 0] * Ka[0, 2];
Ka[1, 1];

Collect[4 * Ka[2, 0] * Ka[0, 2], e];

```

```
Ce2 := Coefficient[Δ, ε, 2];
```

```
[coeficiente
```

```
Coefficient[Δ, ε, 2]
```

```
[coeficiente
```

```
Solve[Ce2 == 0, μ1]
```

```
[resolve
```

$$4 \left( -\frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2} \right) \left( \frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2} \right)$$

$$\left\{ \left\{ \mu_1 \rightarrow -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ \mu_1 \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

```
Ce3 := Coefficient[Δ, ε, 3];
```

```
[coeficiente
```

```
Coefficient[Δ, ε, 3]
```

```
[coeficiente
```

```
μ1 = 1/2;
```

```
Solve[Ce3 == 0, μ2]
```

```
[resolve
```

$$4 \left( \left( -\frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2} \right) \left( -\frac{3}{16} - \frac{3\mu_1}{4} - \frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2} \right) \left( -\frac{3}{16} + \frac{3\mu_1}{4} - \frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2}{2} \right) \right)$$

$$\left\{ \left\{ \mu_2 \rightarrow -\frac{1}{8} \right\} \right\}$$

```
Ce4 := Coefficient[Δ, ε, 4];
```

```
[coeficiente
```

```
Coefficient[Δ, ε, 4]
```

```
[coeficiente
```

```
μ2 = -1/8;
```

```
Solve[Ce4 == 0, μ3]
```

```
[resolve
```

$$4 \left( -\frac{5}{256} - \frac{3\mu_2}{16} + \frac{\mu_2^2}{4} + \frac{\mu_3}{4} \right)$$

$$\left\{ \left\{ \mu_3 \rightarrow -\frac{1}{32} \right\} \right\}$$

```
Ce5 := Coefficient[Δ, ε, 5];
```

```
[coeficiente
```

```
Coefficient[Δ, ε, 5]
```

```
[coeficiente
```

```
μ3 = -1/32;
```

```
Solve[Ce5 == 0, μ4]
```

```
[resolve
```

$$4 \left( -\frac{11}{1536} - \frac{\mu_3}{4} + \frac{\mu_4}{4} \right)$$

$$\left\{ \left\{ \mu_4 \rightarrow -\frac{1}{384} \right\} \right\}$$

```
Ce6 := Coefficient[Δ, ε, 6];
```

```
[coeficiente  
Coefficient[Δ, ε, 6]
```

$$\mu_4 = -\frac{1}{384};$$

```
Solve[Ce6 == 0, μ5]
```

```
[resolve
```

$$4 \left( -\frac{23}{18432} - \frac{\mu_4}{4} + \frac{\mu_5}{4} \right)$$

$$\left\{ \left\{ \mu_5 \rightarrow \frac{11}{4608} \right\} \right\}$$

```
Ce7 := Coefficient[Δ, ε, 7];
```

```
[coeficiente
```

$$\mu_5 = \frac{11}{4608};$$

```
Solve[Ce7 == 0, μ6]
```

```
[resolve
```

$$\left\{ \left\{ \mu_6 \rightarrow \frac{49}{36864} \right\} \right\}$$

```
Ce8 := Coefficient[Δ, ε, 8];
```

```
[coeficiente
```

$$\mu_6 = \frac{49}{36864};$$

```
Solve[Ce8 == 0, μ7]
```

```
[resolve
```

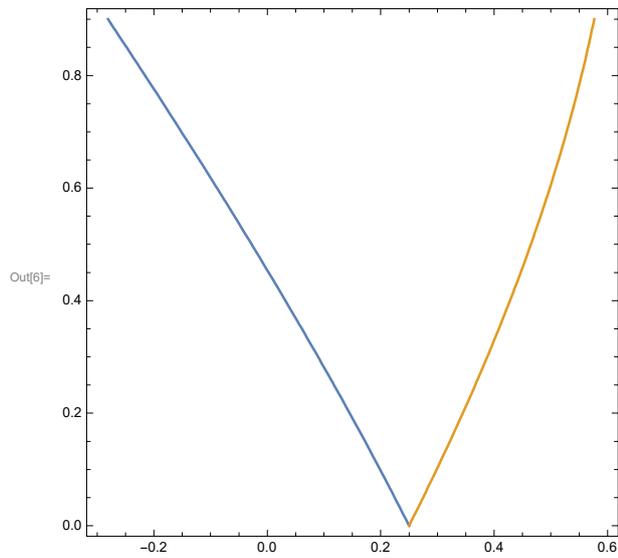
$$\left\{ \left\{ \mu_7 \rightarrow \frac{55}{294912} \right\} \right\}$$

```

In[9]:= ContourPlot[{\mu == -\frac{1}{2} * \epsilon^2 + \frac{7}{32} * \epsilon^4 - \frac{29}{144} * \epsilon^6, \mu == 1/4 - 1/2 * \epsilon - \frac{1}{8} * \epsilon^2 +
gráfico de contornos
\frac{1}{32} * \epsilon^3 - \frac{1}{384} * \epsilon^4 - \frac{11}{4608} * \epsilon^5 + \frac{49}{36864} * \epsilon^6 - \frac{55}{294912} * \epsilon^7,
\mu == 1/4 + \frac{1}{2} * \epsilon - \frac{1}{8} * \epsilon^2 - \frac{1}{32} * \epsilon^3 - \frac{1}{384} * \epsilon^4 + \frac{11}{4608} * \epsilon^5 + \frac{49}{36864} * \epsilon^6 +
\frac{55}{294912} * \epsilon^7, \mu == 1 - \frac{1}{2} * \epsilon^2 + \frac{5}{3456} * \epsilon^4 - \frac{289}{4976640} * \epsilon^6,
\mu == 1 + \frac{5}{12} * \epsilon^2 - \frac{763}{3456} * \epsilon^4 + \frac{1002401}{4976640} * \epsilon^6, \mu == 9/4 + \frac{1}{16} * \epsilon^2 -
\frac{1}{32} * \epsilon^3 + \frac{13}{5120} * \epsilon^4 + \frac{5}{2408} * \epsilon^5 - \frac{1961}{1474560} * \epsilon^6 + \frac{609}{3276800} * \epsilon^7,
\mu == 9/4 + \frac{1}{16} * \epsilon^2 + \frac{1}{32} * \epsilon^3 + \frac{13}{5120} * \epsilon^4 - \frac{5}{2408} * \epsilon^5 - \frac{1961}{1474560} * \epsilon^6 -
\frac{609}{3276800} * \epsilon^7, \mu == 4 + \frac{1}{30} * \epsilon^2 - \frac{317}{216000} * \epsilon^4 + \frac{10049}{170100000} * \epsilon^6,
\mu == 4 + \frac{1}{30} * \epsilon^2 + \frac{433}{216000} * \epsilon^4 - \frac{10049}{170100000} * \epsilon^6, \mu == 25/4 + \frac{1}{48} * \epsilon^2 +
\frac{11}{193536} * \epsilon^4 - \frac{1}{18432} * \epsilon^5 + \frac{37}{55738368} * \epsilon^6 + \frac{7}{10616832} * \epsilon^7,
\mu == 25/4 + \frac{1}{48} * \epsilon^2 + \frac{11}{193536} * \epsilon^4 + \frac{1}{18432} * \epsilon^5 + \frac{37}{55738368} * \epsilon^6 -
\frac{7}{10616832} * \epsilon^7}, {\mu, -1, 6.7}, {\epsilon, 0, 0.8}];

```

```
In[8]:= ContourPlot[
  gráfico de contornos
  { $\mu = 1/4 - 1/2 * \epsilon - \frac{1}{8} * \epsilon^2 + \frac{1}{32} * \epsilon^3 - \frac{1}{384} * \epsilon^4 - \frac{11}{4608} * \epsilon^5 + \frac{49}{36864} * \epsilon^6 -$ 
 $\frac{55}{294912} * \epsilon^7$ ,  $\mu = 1/4 + \frac{1}{2} * \epsilon - \frac{1}{8} * \epsilon^2 - \frac{1}{32} * \epsilon^3 - \frac{1}{384} * \epsilon^4 +$ 
 $\frac{11}{4608} * \epsilon^5 + \frac{49}{36864} * \epsilon^6 + \frac{55}{294912} * \epsilon^7$ }, { $\mu$ , -0.3, 0.6}, { $\epsilon$ , 0, 0.9}]
```



```
In[8]:= ContourPlot[{\mu == 1 - \frac{1}{2} * \epsilon^2 + \frac{5}{3456} * \epsilon^4 - \frac{289}{4976640} * \epsilon^6,
  gráfico de contornos
  \mu == 1 + \frac{5}{12} * \epsilon^2 - \frac{763}{3456} * \epsilon^4 + \frac{1002401}{4976640} * \epsilon^6}, {\mu, 0.8, 1.2}, {\epsilon, 0, 0.9}]
```

