



ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

Thomaz Santos Neres

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Sergipe no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:

Prof. Dr. Emerson Luis de Santa Helena

Coorientador:

Prof. Dr. Edvaldo Alves de Souza Junior

São Cristóvão/SE

Agosto/2022

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

N444e Neres, Thomaz Santos
Estudo da vibração de placas através dos padrões estacionários de Chladni / Thomaz Santos Neres ; orientador Emerson Luis de Santa Helena. -- São Cristóvão, 2022.
159 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) – Universidade Federal de Sergipe, 2022.

1. Física – Estudo e ensino. 2. Simulação (Computadores). 3. Ondas estacionárias. I. Santa Helena, Emerson Luis de orient. II. Título.

CDU 534:37

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE FÍSICA - PPGPF**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES
ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI**

THOMAZ SANTOS NERES

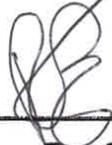
Banca:



Prof. Dr. EMERSON LUIS DE SANTA HELENA
(Universidade Federal de Sergipe - UFS - Presidente)



Prof. Dr. GÜNTHER JOHANNES LEWCZUK GERHARDT
(Universidade de Caxias do Sul - UCS)



Prof. Dr. PETRUCIO BARROZO DA SILVA
(Universidade Federal de Sergipe - UFS)

Dedicado a minha família e àqueles que sempre torcem por mim e me incentivam a buscar novos objetivos.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) da Universidade Federal de Sergipe que contribuíram para o meu aperfeiçoamento como professor.

Agradeço aos professores Dr. Emerson Luis e Dr. Edvaldo Alves pela orientação, pelas relevantes discussões, e pelas grandes ideias e sugestões que ajudaram na construção deste trabalho.

Aos meus colegas do mestrado, em especial a Natcheila, Jack e Silvio pelas trocas de conhecimento que me auxiliaram ao longo do programa de pós-graduação.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta colaboraram para a construção deste trabalho, em especial ao meu amigo Genilson que não mediu esforços para me dar suporte na construção do produto nos momentos que precisei.

A todos os meus alunos e a equipe gestora do Colégio Estadual José Amaral Lemos pela participação e contribuição na aplicação do produto educacional.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Física (SBF).

Por último, mas não menos importante, agradeço a minha família por sempre me apoiar em meus objetivos e, a minha noiva Ariany pelo incentivo e pela paciência durante a concretização desta dissertação.

Resumo

ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

Thomaz Santos Neres

Orientador:

Prof. Dr. Emerson Luis de Santa Helena

Coorientador:

Prof. Dr. Edvaldo Alves de Souza Junior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Sergipe no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A física ondulatória descreve sistemas físicos nos quais atua uma força restauradora que é responsável pelo movimento oscilatório do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Essas oscilações se manifestam em diferentes tipos de ondas e se propagam com velocidades associadas às distintas características do meio de propagação. A equação de onda mostra como a deformação do meio ocorre à medida que o tempo passa. No estudo da Física ondulatória, o livro didático dá mais destaque às ondas unidimensionais. Neste trabalho, é apresentado o estudo de ondas estacionárias bidimensionais numa proposta de resolução do problema investigativo da vibração de placas de Chladni dentro das perspectivas da metodologia de ensino por investigação em conjunto com a Teoria Sociocultural de Vygotsky. Foi desenvolvido um aparato experimental de baixo custo para gerar os padrões de onda estacionárias. Além disso, foi utilizado o GeoGebra para a criação de uma interface gráfica matemática interativa de construção destes padrões de Chladni a partir das soluções da equação de onda em placas quadradas. Várias Figuras de Chladni foram criadas experimentalmente a partir de grãos depositados sobre diferentes placas metálicas sujeitas à vibração. Foi observado graficamente, utilizando-se placas quadradas de diferentes tamanhos com extremidades livres, a relação de proporção entre a frequência de ressonância dos padrões de onda estacionária com o inverso do quadrado do lado. A partir da comparação dos resultados experimentais e os obtidos pela modelagem computacional, todos os grupos conseguiram explicar a formação das Figuras de Chladni.

Palavras-chave: Figuras de Chladni. Ensino de Física. Ensino por Investigação. Experimentação. Modelagem Computacional. Ondas Estacionárias.

Abstract

ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

Thomaz Santos Neres

Orientador:

Prof. Dr. Emerson Luis de Santa Helena

Coorientador:

Prof. Dr. Edvaldo Alves de Souza Junior

Master's Dissertation presented to the Graduate Program of the Federal University of Sergipe in the Professional Master's Degree in Physics Teaching, as part of the necessary requirements to obtain the title of Master in Physics Teaching.

In physical systems out of equilibrium, oscillations occur when a restoring force acts on them. These oscillations create different types of waves that propagate with speeds governed by the characteristics of the propagation medium. The wave equation shows how the deformation of the medium occurs as time goes by. In the study of wave physics, the textbook emphasizes one-dimensional waves. In this work, the study of two-dimensional standing waves is presented in a proposal to solve the investigative problem of the vibration of Chladni plates within the perspectives of the teaching methodology by investigation in conjunction with Vygotsky's Sociocultural Theory. A low-cost experimental apparatus was developed to generate the standing wave patterns. In addition, GeoGebra was used to create an interactive mathematical graphical interface to build these Chladni patterns from the solutions of the wave equation on square plates. Several Chladni figures were experimentally created through grains deposited on metal plates subjected to vibration. It was graphically observed at the resonance on square plates with free ends, the proportional relationship between the frequency of the standing wave patterns on a plate versus inverse square of side. From the comparison of experimental results and those obtained by computer modeling, all groups were able to explain the formation of Chladni Figures.

Keywords: Chladni Figures. Physics Teaching. Investigative Teaching. Experimentation. Computational Modeling. Standing Waves.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino	18
Figura 2 – Visão cíclica do trabalho de investigação	20
Figura 3 – Grau de abertura de uma investigação	23
Figura 4 – Direções de vibração do meio	26
Figura 5 – Onda Senoidal	27
Figura 6 – Reflexão de um Pulso	29
Figura 7 – Corda de comprimento L fixa nas extremidades	29
Figura 8 – Modos normais de vibração de uma corda	30
Figura 9 – Gráfico de amplitude em função da frequência propulsora	31
Figura 10 – Elemento de uma corda de comprimento Δx	32
Figura 11 – Limiar da audição humana	34
Figura 12 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada	37
Figura 13 – placa de lados L_x e L_y no plano XY	38
Figura 14 – Terceiro modo	38
Figura 15 – Modos de vibração independentes	40
Figura 16 – Modo X, (2,0) - (0,2), e do modo anel, (2,0) + (0,2)	41
Figura 17 – Combinação dos modos (2,0) e (0,2)	41
Figura 18 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre	42
Figura 19 – Aparelhos utilizados em trabalhos acadêmicos na área de ensino	43
Figura 20 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante	46
Figura 21 – Amplificadores de áudio.	46
Figura 22 – Conexão do amplificador ao alto-falante	47
Figura 23 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira	47
Figura 24 – Placas Metálicas	48
Figura 25 – Esquema de encaixe da placa metálica	48
Figura 26 – Areia e farinha utilizadas no experimento	49
Figura 27 – Protetor Auricular	49
Figura 28 – Imagem da tela inicial do Aplicativo <i>Gerador de Frequência</i>	50
Figura 29 – Interface da modelagem no GeoGebra	51
Figura 30 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D	51
Figura 31 – Área de programação para um objeto no GeoGebra	52
Figura 32 – Área de programação do botão iniciar/pausar	52
Figura 33 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância	53
Figura 34 – Desenhos registrados pelos alunos a partir do GeoGebra	61
Figura 35 – Figuras de Chladni desenhadas na atividade experimental	62
Figura 36 – Figuras de Chladni encontradas na atividade experimental	63

Figura 37 – Questão 4 da Atividade Experimental com as Figuras de Chladni . . .	64
Figura 38 – Gráficos de $f' \times f$ obtidos pelos alunos	65
Figura 39 – Figuras registradas pelos alunos através da modelagem e do experimento	67
Figura 40 – Comparações de modos: modelagem x experimento	81
Figura 41 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	83
Figura 42 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro	84
Figura 43 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$	85
Figura 44 – Figura $f_B \times f_A$	85
Figura 45 – Figuras de Chladni na placa de aço $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	86

Lista de quadros

Quadro 1 – Tipologia de Investigações.	22
Quadro 2 – Distribuição das Aulas.	44
Quadro 3 – Materiais utilizados.	45
Quadro 4 – Respostas dos grupos na Questão 5 da atividade computacional	60
Quadro 5 – Respostas dos grupos na Questão 7 da atividade computacional	61
Quadro 6 – Respostas dos grupos na Questão 9 da atividade computacional	62
Quadro 7 – Respostas dos grupos na Questão 2 da atividade experimental	63
Quadro 8 – Respostas dos grupos na Questão 3 da atividade experimental	64
Quadro 9 – Respostas dos grupos na Questão 5 da atividade experimental	64
Quadro 10 – Respostas dos grupos na Questão 6 da atividade experimental	65
Quadro 11 – Respostas dos grupos na Questão 7 da atividade experimental	66
Quadro 12 – Questão 1 da Atividade Experimental e Computacional	67
Quadro 13 – Questão 2 da Atividade Experimental e Computacional	68
Quadro 14 – Teste diagnóstico - Questão I	69
Quadro 15 – Teste diagnóstico - Questão II	69
Quadro 16 – Teste diagnóstico-Questão III	70
Quadro 17 – Teste de aprendizagem - Questão IV	70
Quadro 18 – Teste de aprendizagem - Questão V	71
Quadro 19 – Teste de aprendizagem - Questão VI	72
Quadro 20 – Teste de aprendizagem - Questão VII	72
Quadro 21 – Teste de aprendizagem - Questão VIII	73
Quadro 22 – Teste de aprendizagem - Questão IX	73
Quadro 23 – Teste de aprendizagem - Questão X	74

Lista de tabelas

Tabela 1 – Intervalos ν_n/ν_1 entre dó e as demais notas na escala maior natural . . .	33
Tabela 2 – Níveis sonoros de alguns sons típicos	35
Tabela 3 – Coeficientes da Equação 2.25 para a placa de extremidades livres . . .	37
Tabela 4 – Frequências de ressonância nas placas de ferro	83
Tabela 5 – Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões	85

Lista de abreviaturas e siglas

SBF: Sociedade Brasileira de Física

MNPEF: Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

UFS: Universidade Federal de Sergipe

SEI: Sequência de Ensino Investigativo

ZDP: Zona de Desenvolvimento Proximal

2D: Duas dimensões

3D: Três dimensões

PVC: Policloreto de vinila

a.C.: Antes de Cristo

d.C.: Depois de Cristo

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Breve Histórico das Ondas Mecânicas	15
1.2	Justificativa	17
1.3	Objetivo	18
1.3.1	Objetivo Geral	18
1.3.2	Objetivos Específicos	19
2	REVISÃO DA LITERATURA	20
2.1	Referencial Teórico Pedagógico	20
2.1.1	Ensino por Investigação	20
2.1.2	Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa	23
2.1.3	Teoria Sociocultural de Vygotsky	24
2.1.3.1	Instrumentos e Signos	24
2.2	Revisão de Física	26
2.2.1	Estudo de Ondas	26
2.2.2	Ondas Progressivas	27
2.2.3	Superposição de Ondas	27
2.2.4	Ondas Estacionárias	28
2.2.5	Ressonância	29
2.2.6	Oscilações Forçadas	30
2.2.7	Equação de Onda Unidimensional	31
2.2.8	Ondas Sonoras	33
2.2.8.1	Altura	33
2.2.8.2	Intensidade	33
2.2.9	Vibração de uma Placa Retangular	35
3	METODOLOGIA	43
3.1	Contextualização da Escola	44
3.2	Estrutura das Aulas	44
3.3	Material Elaborado	45
3.3.1	Materiais e Confecção do Experimento de Chladni	45
3.3.2	Aplicação Computacional para Figuras de Chladni	50
3.3.3	Material para Construção de Gráfico	53
3.3.4	Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional	53
3.3.5	Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni	54
3.3.6	Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni	56

4	RELATO DA APLICAÇÃO E RESULTADOS	57
4.1	Relato dos encontros	57
4.1.1	Primeiro Encontro	57
4.1.2	Segundo Encontro	58
4.1.3	Terceiro Encontro	59
4.2	Resultados e Discussão	60
4.2.1	Atividade com Modelagem Computacional	60
4.2.2	Atividade Experimental com as Figuras de Chladni	62
4.2.3	Atividade Experimental e Modelagem Computacional	67
4.2.4	Pré-teste e Pós-teste	68
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A – RESULTADOS ESPERADOS	81
A.1	Modelagem Computacional das Figuras de Chladni	81
A.2	Experimento das Figuras de Chladni	82
A.2.0.1	Experimento com Placas de Ferro	82
A.2.0.2	Experimento com Placas de Alumínio	84
	APÊNDICE B – MATERIAL COM ROTEIRO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM COMPUTACIONAL	87
	APÊNDICE C – MATERIAL COM ROTEIRO DA ATIVIDADE EX- PERIMENTAL	89
	APÊNDICE D – MATERIAL COM ROTEIRO DA ATIVIDADE EX- PERIMENTAL E COMPUTACIONAL	92
	APÊNDICE E – MATERIAL COM PRÉ-TESTE	93
	APÊNDICE F – MATERIAL COM PÓS-TESTE	95
	APÊNDICE G – MATERIAL DA AULA 1	97
	APÊNDICE H – PRODUTO EDUCACIONAL	105

1 Introdução

A todo instante, estamos interpretando as interferências de várias ondas sonoras que chegam aos nossos ouvidos. A música é um excelente exemplo disso e pode servir como tema motivador na escola (GRILLO; BAPTISTA; BRANDÃO, 2013). Muitos alunos têm dificuldades em interpretar formulações matemáticas de fenômenos ondulatórios isoladas de uma demonstração, de um experimento. Em geral, os livros abordam interpretações de ondas unidimensionais. Porém, seria de suma importância que os alunos compreendessem que essa mesma física é aplicada em ondas estacionárias bidimensionais viajando em sólidos de diversas características. Este fenômeno foi amplamente investigado por Chladni (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018). Contudo, existe todo um contexto e evolução histórica que antecedeu o estudo de Chladni. O desenvolvimento dessa Ciência também deve ser lembrada e discutida na escola. Para isso, é necessário refletir sobre o problema estudado. Então por isso a importância de pesquisar, fazer levantamentos, localizar documentos e procurar novas fontes (MARTINS, 2005).

No estudo de ondas há vários conceitos abrangentes como ressonância, condições de contorno, características do meio de propagação, velocidade, tipos de ondas, etc. A mecânica ondulatória está presente no nosso cotidiano de maneira explícita. É uma ótima oportunidade para ser trabalhada no ensino de física.

1.1 Breve Histórico das Ondas Mecânicas

O som, dado seu atributo de permitir a transmissão de informação, desempenha um papel fundamental na sobrevivência e evolução das espécies. Particularmente, a raça humana foi além de criar sinais sonoros para a preservação da existência, e aprendeu a criar e dominar fontes sonoras para desenvolver a comunicação e cultura. Toques de trombetas, rufar dos tambores, gritos para incitar soldados à luta são exemplos do uso do som em tempos antigos que demonstram a importância do som para a civilização. Desde 4000 a.C., o estudo do som se relacionava com as manifestações da arte dos povos hindu, egípcios, chineses e japoneses (RODRIGUES, 2020).

A criação de instrumentos musicais e o desenvolvimento da musicalidade é narrado desde os tempos antigos (GRILLO; PEREZ, 2016), fazendo com que a harmonia e o padrão dos sons despertassem interesse e curiosidade de estudiosos. Um destaque importante, durante este período, foi Pitágoras (569-500 a.C.) com a investigação da vibração de alguns corpos. Ele estabeleceu uma relação de proporção inversa entre a frequência de um som e o comprimento de uma corda tensionada, estabelecendo assim os conceitos de

intervalos musicais¹ e escala harmônica. Em seus experimentos, Pitágoras utilizou um instrumento de apenas uma corda, chamado de monocórdio. Já Ptolomeu, que viveu entre 90 d.C. e 168 d.C., buscou encontrar relações entre a linguagem musical e as equações matemáticas através de sua obra “Teoria do Som”. Aristóteles (384-322 a.C.) também chegou a se dedicar ao estudo do som. Inclusive, escreveu uma coletânea de arquivos sobre a propagação de ondas sonoras no ar (RODRIGUES, 2020).

Durante o Renascimento, o pai de Galileu Galilei, Vincenzo Galilei, músico, professor e teórico musical, não conseguiu encaixar um número inteiro à escala pitagórica. A partir disto, iniciou-se o estudo sobre os intervalos musicais que culminou, a partir de Bach, na escala temperada². O estudo da acústica teve como origem a relação do som com a música. Ainda não se tinha a noção da propagação de ondas sonoras. Somente na segunda metade do século XVII, Idade Moderna, com o advento da Revolução Científica, a acústica musical passou a ser bastante estudada por grandes nomes como Galileu Galilei, René Descartes, Christian Huygens e Joseph Saveur (GRILLO; PEREZ, 2016).

Galileu Galilei (1564-1642) verificou a vibração de uma corda provocada pela excitação de outra corda próxima com as mesmas características físicas. Fenômeno nomeado de ressonância (RODRIGUES, 2020). Athanasius Kircher (1601-1680), através de um aparelho a vácuo construído pelo físico e matemático romano Evangelista Torricelli (1608-1647), conseguiu demonstrar que o som não se propaga no vácuo (RODRIGUES, 2020).

Isaac Newton (1643–1727) se dedicou ao estudo da acústica através da teoria e cálculos. Ele não se interessou em uma teoria fenomenológica para o problema em questão. A partir da sua investigação, Newton encontrou o valor de aproximadamente 276 m/s para a velocidade do som no ar. Porém, décadas após a morte de Newton, o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que Newton não havia considerado a variação de temperatura do meio onde o som se propagaria. Desta forma, demonstrou que a velocidade de propagação do som depende das condições de temperatura do meio material (RODRIGUES, 2020).

A palavra acústica surgiu da palavra grega *akouein*, com o sentido de ouvir. Porém, o sentido da palavra como ciência que estuda o som surgiu no século XVIII com o francês Joseph Sauveur. Ele introduziu o conceito físico de harmônico, de nodos e de ventres, caracterizando as ondas estacionárias nas cordas (HENRIQUE, 2002). A acústica está diretamente ligada a música. Esta é gerada a partir da vibração de instrumentos sonoros que criam as ondas mecânicas que se propagam através do ar até o nosso sistema auditivo. Dentre muitos fenômenos acústicos descobertos, um fenômeno muito utilizado como

¹ Diferença de altura entre duas notas.

² Escala em que os doze semitons que compõem uma mesma oitava estão distribuídos igualmente. Exemplo: a distância do *Dó* para o *Dó#* (meio tom acima do *Dó*) é a mesma do *Dó#* para o *Ré* (meio tom acima do *Dó#*).

indicador de qualidade na fabricação de instrumentos musicais se destaca: os Padrões de Chladni (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018).

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827) é conhecido, por muitos, como o “pai da acústica” por várias contribuições importantes a este campo numa época em que os olhos estavam voltados para o estudo da termodinâmica e do eletromagnetismo. Até o momento em que Chladni iniciou os estudos na área da acústica, somente as vibrações em instrumentos de cordas e de sopro haviam sido estudadas. Ele iniciou a exploração das vibrações em placas. Para perturbar o sólido, utilizou inicialmente um arco de violino. A partir disto, padrões bidimensionais de ondas estacionárias eram formados. Chladni conseguiu “dar luz” ao som, utilizando areias finas que eram deslocadas para as regiões nodais da superfície (SANTOS et al., 2018). Além disso, fez importantes descobertas sobre vibrações em cordas e barras, inclusive, demonstrando a existência de ondas longitudinais nas barras (HENRIQUE, 2002).

Embora o físico e músico Chladni tenha se destacado de forma significativa, tanto na análise fenomenológica como no desenvolvimento das soluções matemáticas, é importante destacar que muitos outros cientistas contribuíram para a área da acústica: Thomas Young, Félix Savart, Jean-Daniel Colladon, Michael Faraday, Charles Wheatstone, Jules Antonie Lissajous, R. Mayer, Daniel Beroulli, D’Alembert, Leonhard Euler, Lagrange, Poisson, G. Ohm, Kirchhoff, Riemann, entre outros (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018).

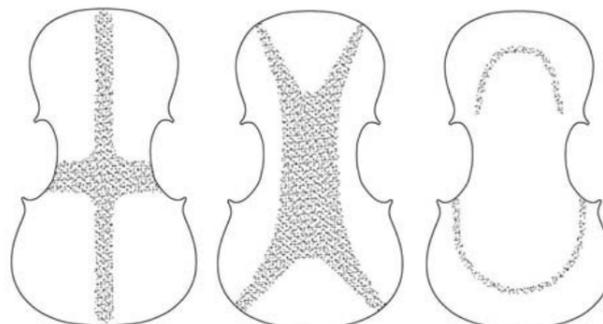
O século VIII ficou marcado pelo desenvolvimento da acústica teórica através das formulações matemáticas de: Euler, *A New Theory of Music* (1739); D’Alembert, *The Elements of Music, Theoretical and Practical* (1752); Bernoulli, *On Sound and the Tones of Organ Pipes* (1762); Lagrange, *The Nature and Properties of Sound* (1759); Poisson, *The Movements of Elastic Fluids in Cylindrical Tubes* (1817), dentre outros (HENRIQUE, 2002). Brook Taylor (1685-1731) deduziu a fórmula para calcular a frequência fundamental de uma corda a partir da Segunda Lei de Newton, $f = v/2L$ (HENRIQUE, 2002). Rayleigh (1842-1919) também contribuiu com o estudo da acústica com a obra “*Theory of Sound*”. Ele estabeleceu a base matemática da teoria das vibrações em placas, barras e cordas (HENRIQUE, 2002).

1.2 Justificativa

As Figuras de Chladni, como são conhecidos os padrões de ondas estacionárias ou de frequências ressonantes em superfícies bidimensionais como placas, chapas, membranas, e tampões, têm relevante aplicação no campo da música na determinação da qualidade de instrumentos musicais feitos de madeira como o violino e violão (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018). O tipo de madeira, bem como as dimensões utilizadas em cada parte do instrumento influem na qualidade do som ressoado através da caixa acústica. Além do

mais, através de areia polvilhada na superfície do material perturbado, é possível enxergar as regiões equivalentes aos nodos do caso unidimensional de uma corda vibrando como se pode ver na figura seguinte.

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino



Fonte: (DONOSO et al., 2008)

Essas três configurações de linhas nodais foram obtidas pelo Método Chladni e são chamadas de modos de vibração 1, 2 e 5 com frequências correspondentes a (112 ± 12) Hz, (171 ± 20) Hz, (369 ± 36) Hz respectivamente. Esses mesmos modos podem ser observados numa placa retangular ou quadrada (Figuras 17 e 18) correspondentes às menores frequências de vibração associadas aos modos $(1, 1)$, $(2, 0) - (0, 2)$, e $(2, 0) + (0, 2)$, respectivamente. Essa sequência de modos de vibração é necessária para que a madeira se comporte harmonicamente em violinos de boa qualidade onde é característico que os modos 2 e 5 se encontrem separados por uma oitava, ou seja, numa razão 1:2 na frequência. Neste caso, a relação 171:369 se aproxima de uma oitava (DONOSO et al., 2008).

O Método Chladni é um tema que também pode ser utilizado em processos de funcionamento e de fabricação de outros instrumentos musicais de percussão e de cordas. Além do mais, os comportamentos vibracionais de diversos materiais podem ser estudados a partir da análise modal de uma placa metálica flexível acoplada a uma cavidade acústica com a finalidade de encontrar soluções inovadoras, através do estudo dos níveis de ruído em sistemas como cabines veiculares, alto-falantes, motores de combustão (LIMA, 2017).

1.3 Objetivo

1.3.1 Objetivo Geral

Este trabalho apresenta uma proposta de estudo da vibração de placas dentro das perspectivas do ensino por investigação, através do estudo das Figuras de Chladni, utilizando um aparato experimental controlado via smartphone e um prévio ambiente de modelagem computacional que possa servir como material potencialmente significativo.

1.3.2 Objetivos Específicos

Considerando o desenvolvimento do trabalho e o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Criar um experimento de laboratório de baixo custo e de fácil montagem para a criação das Figuras de Chladni;
- Criar um aplicativo de interface gráfica matemática para a visualização e análise dos padrões de Chladni;
- Aplicar a metodologia ensino por investigação no estudo das vibrações em placas de Chladni.

2 Revisão da Literatura

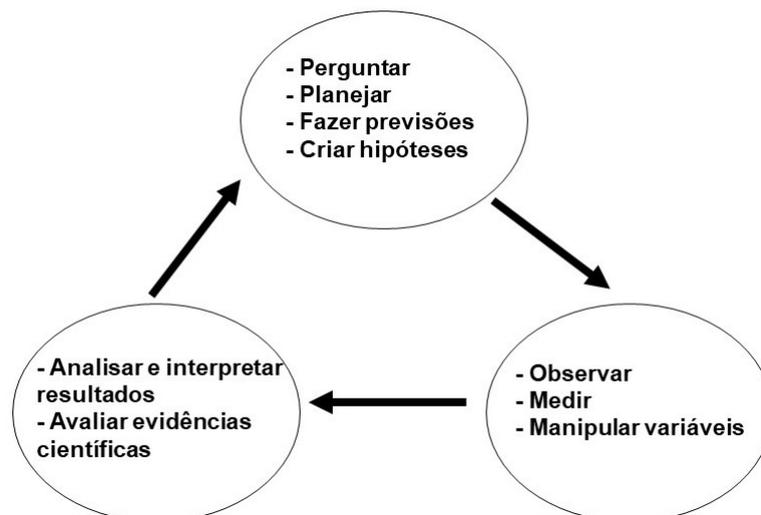
2.1 Referencial Teórico Pedagógico

2.1.1 Ensino por Investigação

O ensino por investigação teve início no século XIX e foi influenciado pelo filósofo e pedagogo americano John Dewey que denominou esse ensino de *inquiry* (LIMA; PEREIRA; LIMA, 2021). Esta é uma metodologia de ensino em que se estabelecem possibilidades do desenvolvimento de habilidades cognitivas dos alunos, além de favorecer a cooperação e o desenvolvimento do raciocínio lógico (ZÔMPERO; LABURÚ, 2011).

Diferentemente de uma aula expositiva em que o professor está à frente da maior parte de todo o processo didático, no ensino por investigação, um problema é proposto para que os alunos possam resolvê-lo de maneira ativa, construindo caminhos para o próprio conhecimento. O problema deve ser bem planejado, algo que desperte o interesse dos alunos de querer resolvê-lo de maneira cooperativa com seus colegas, através de argumentações e ações manipulativas, possibilitando o uso de seus conhecimentos prévios (CARVALHO et al., 2013). O processo didático investigativo não tem ponto final. Ele é cíclico (Figura 2), levando à atividade inicial, instigando a novas perguntas.

Figura 2 – Visão cíclica do trabalho de investigação



Fonte: (WELLINGTON, 2002)

De acordo com Carvalho et al. (2013), existem vários tipos de problemas para se iniciar uma SEI (Sequência de Ensino Investigativo), como através de uma atividade de problema experimental, demonstração investigativa, problema não experimental. Porém,

o mais comum é o problema experimental. Assim sendo, a metodologia de ensino por investigação se divide nas seguintes etapas (CARVALHO et al., 2013):

- **Etapa 1:** *Distribuição do material e proposição do problema pelo professor.*
É importante que o professor verifique se os alunos realmente entenderam a proposta de resolução do problema;
- **Etapa 2:** *Resolução do problema pelos alunos.*
Nesta etapa, os alunos trabalham em cooperação através de ações manipulativas e testes de hipóteses;
- **Etapa 3:** *Sistematização dos conhecimentos elaborados nos grupos.*
Nesta etapa ocorre a passagem da ação manipulativa para a ação intelectual. Ao verificar que os grupos resolveram o problema, o professor deve instigar os alunos a tomarem consciência de como conseguiram resolver o problema, do porquê que deu certo;
- **Etapa 4:** *Escrever e desenhar.*
Esta etapa é individual. Os alunos devem escrever e desenhar sobre o que aprenderam na aula.

Como atividade complementar ao problema, é importante que se faça uma atividade de contextualização social, com a leitura e discussão de um texto, a fim de que os conceitos aprendidos anteriormente, através de uma linguagem mais informal, possam ser apresentados de uma maneira formal e acessível ao aluno. Como avaliação, esta deverá ser formativa e pautada no que o aluno aprendeu durante o processo de ensino-aprendizagem no que diz respeito às suas ações, valores, noções científicas, e conceitos fundamentais (CARVALHO et al., 2013).

Podemos destacar alguns produtos educacionais em que se utilizam a metodologia de ensino por investigação, como o trabalho publicado por Souza, Graciano e Fields (2018, p. 23) que contou com o *Software Gangorra Interativa* para trabalhar conceitos relacionados ao equilíbrio de uma gangorra. Segundo os autores, todas as etapas do ensino por investigação foram seguidas e os alunos compreenderam que o equilíbrio está relacionado ao centro de massa.

Scarpa e Campos (2018) descrevem uma *SEI* na disciplina de biologia, no ensino médio, a partir do tema transgênicos. O problema partiu da pergunta: o que são transgênicos? Para o desenvolvimento do trabalho, foram utilizados textos e imagens, seguindo as fases de: orientação, conceitualização, investigação, comunicação e conclusão, reflexão. Os estudantes desenvolveram habilidades de análise da linguagem científica, de comunicação dos seus resultados aos demais da turma, favorecendo um processo de

reflexão coletiva, o que despertou novos questionamentos sobre as questões éticas e sobre a clonagem de animais.

Júnior e Coelho (2020) aplicaram o ensino por investigação em uma turma do 2º ano do ensino médio de um curso de edificações no IFES, no qual o efeito fotoelétrico foi o tema da Física trabalhado. Foram utilizadas atividades como questão aberta, textos, simulação computacional, e demonstração investigativa. O resultado foi bastante satisfatório de forma que aprendizagens atitudinais e procedimentais foram alcançadas, além de os alunos terem conseguido estabelecer a relação entre o efeito fotoelétrico, material alvo, comprimento de onda e a energia da radiação.

A fim de servir como possível suporte ao professor na elaboração de atividades de investigação, Wellington (2002) sugere uma classificação chamada de tipologia de investigações (Quadro 1), baseada em perguntas do tipo qual, o quê, como.

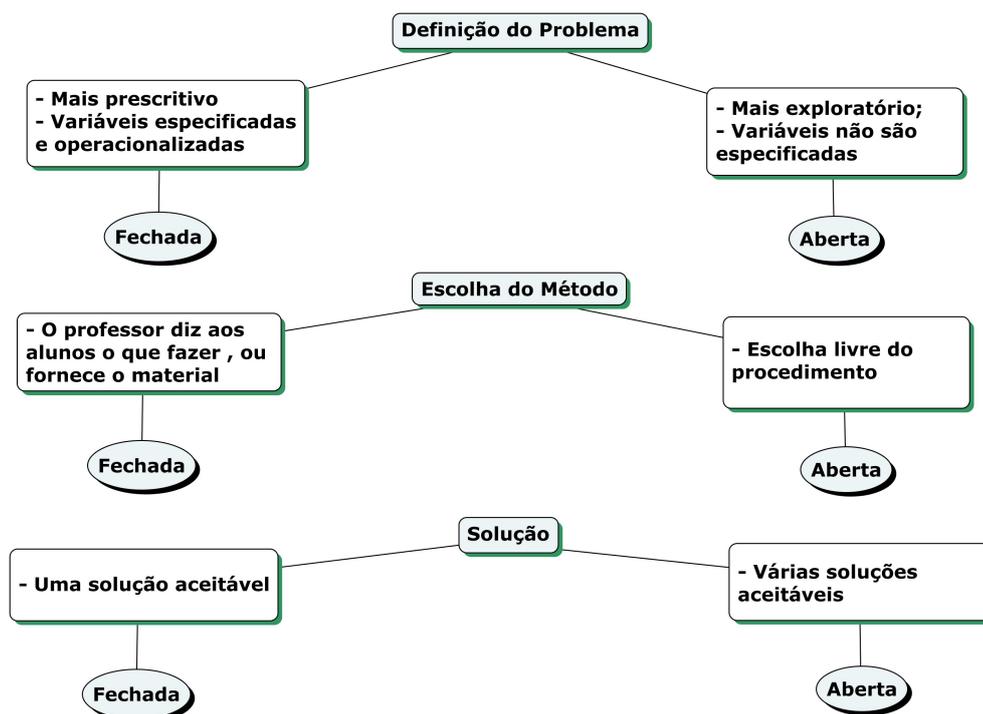
Quadro 1 – Tipologia de Investigações.

Investigações do tipo “qual?”	- Quais fatores afetam x? - Qual o desenho é melhor para...? - Para qual x é melhor...?
Investigações do tipo “o quê?”	- O que acontece se...? - Que relação existe entre x e y?
Investigações do tipo “como?”	- Como x diferentes afetam y? - Como x varia com y? - Como x afeta y?
Investigações gerais	- Um levantamento histórico por exemplo - Um projeto de longo prazo (geralmente envolve pesquisa e fontes como livros, mídia).
Atividade de resolução de problemas	- Projetar e construir - Resolver um problema prático - Simulações

Fonte: (WELLINGTON, 2002, p. 158)

Baptista (2010) destaca uma classificação das atividades (Figura 3) proposta por Monk (1995) quanto ao grau de abertura de uma investigação no âmbito educacional. Desta forma, o professor consegue melhor ter a noção das atividades que se deve criar para exigir do aluno níveis de habilidades em conformidade com os objetivos educacionais planejados para a implementação do problema através da SEI.

Figura 3 – Grau de abertura de uma investigação



Fonte: (MONK, 1995, p. 76)

2.1.2 Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa

Segundo Cochito (2004), o sucesso da dinâmica de um grupo cooperativo passará, no mínimo, pela distribuição de funções em cada grupo. Desta forma, cada aluno terá um papel fundamental no alcance do objetivo de resolver o problema investigativo. Dentre outras, podemos destacar as seguintes funções de grupos cooperativos (COCHITO, 2004, p. 87):

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entres os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.
- **Escriba:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

2.1.3 Teoria Sociocultural de Vygotsky

O ensino por investigação é caracterizado por extrair dos alunos interpretações, avaliações, previsões, hipóteses, observações, manipulações, questionamentos (WELLINGTON, 2002). Além do mais, é capaz de favorecer a cooperação entre os indivíduos (ZÔMPERO; LABURÚ, 2011). De acordo com isso, Vygotsky defende que a interação social é de fundamental importância para o desenvolvimento mental. O indivíduo não pode ser considerado isolado de seu contexto social. Diz ainda que é importante que a criança seja submetida a novas aprendizagens com a colaboração de um adulto a fim de que se atinja um nível de cognição que não aconteceria no caso de a criança se desenvolver de forma particular, sozinha (IVIC; VYGOTSKY, 2010). A comunicação e a argumentação são características essenciais no ensino por investigação que se fazem presentes em contexto de interação social.

Na sala de aula, os professores trabalham com vários alunos ao mesmo tempo. Esse ambiente de construção social é um dos meios encontrados pela sociedade para o desenvolvimento das mais elevadas funções mentais dos indivíduos (CARVALHO et al., 2013).

Dois tipos de desenvolvimento foram definidos por Vygotsky: o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial. O primeiro se refere às capacidades já consolidadas, às funções que a criança consegue realizar sem o auxílio de outro indivíduo. O segundo está relacionado ao que o indivíduo pode realizar com a ajuda do outro, ou de seus companheiros através de diálogos, colaboração, imitação. A distância cognitiva entre os desenvolvimentos potencial e real é conhecida como zona de desenvolvimento proximal (ZDP) (COELHO; PISONI, 2012). É na ZDP que a aprendizagem irá ocorrer através dos conhecimentos prévios que os alunos carregam, e que ainda não foram transformados em um aprendizado consolidado (CLEOPHAS, 2016).

Uma das ações que pode ser aplicada através do conceito de desenvolvimento proximal é o trabalho em grupo. Na resolução do problema, os alunos partem de diferentes níveis de cognição e de zonas de desenvolvimento real próximas. Eles são capazes de atingir o desenvolvimento potencial através das atividades cooperativas, orientações e discussões entre os próprios colegas, além das trocas de experiências e argumentações, facilitando o entendimento entre eles (CARVALHO et al., 2013). A partir disto, o papel do professor como mediador se faz necessário para ajudar a converter o desenvolvimento potencial momentâneo do aluno em desenvolvimento real bem consolidado.

2.1.3.1 Instrumentos e Signos

De acordo com Vygotsky, o desenvolvimento mental está intimamente ligado ao meio social. Essa conexão é mediada através da utilização de instrumentos e signos. Estes

são construções históricas, culturais e que fazem parte do agora. O signo é algo que tem significado como palavras, números, gestos, objetos, etc. Contudo, os significados dependem dos contextos sociais. O instrumento é algo que pode ser usado para fazer alguma coisa. Ele media a ação do indivíduo. O desenvolvimento cognitivo é a conversão das relações sociais em funções mentais através da internalização dos signos. Estes regulam a ação do indivíduo através da interação social (MOREIRA, 1999).

“[...] tudo aquilo que conseguimos realizar mentalmente, com o auxílio de signos, foi, em algum estágio do nosso desenvolvimento, realizado em colaboração com outros, através da interação social. Mesmo no caso do autodidata, que aprende algo por si próprio lendo um livro, por exemplo, a própria leitura e interpretação do texto são formas de ação mental que foram conduzidas com a ajuda de outros durante o seu processo de alfabetização”(PEREIRA; JUNIOR, 2014).

É importante que o aluno se aproprie dessas construções para que os conceitos primitivos sejam generalizados através da atualização dos signos e do uso de mais instrumentos a fim de que, através da interação com um livro didático, com o professor, com os colegas e com a sociedade em geral, os estágios cognitivos superiores sejam alcançados.

“instrumentos e signos são construções sócio-históricas e culturais; através da apropriação (internalização) destas construções, via interação social, o sujeito se desenvolve cognitivamente. Quanto mais o indivíduo vai utilizando signos, tanto mais vão se modificando, fundamentalmente, as operações psicológicas das quais ele é capaz. Da mesma forma, quanto mais instrumentos ele vai aprendendo a usar, tanto mais se amplia, de modo quase ilimitado, a gama de atividades nas quais pode aplicar suas novas funções psicológicas” (MOREIRA, 1999, p. 111).

As funções mentais superiores como a formação de conceitos, memória lógica se originam da interação entre pessoas. Isso pode ser estendido para o contexto escolar, tanto na aplicação de atividades em grupos, como na própria dinâmica de relação entre professor e aluno.

“Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos” (VYGOTSKY, 1991, p. 41).

Os conceitos se dividem em dois estágios diferentes: um estágio inferior, em que os conceitos espontâneos são dispostos através de descrições simples da realidade empírica, e outro estágio superior, em que se encontram os conceitos científicos, no qual o indivíduo não somente descreve, mas também explicam os fenômenos (VYGOTSKY, 2001). Desta forma, Vygotsky conclui:

“o desenvolvimento do conceito espontâneo da criança deve atingir um determinado nível para que a criança possa apreender o conceito científico e tomar consciência dele. Em seus conceitos espontâneos, a criança deve atingir aquele limiar além do qual se torna possível a tomada de consciência”(VYGOTSKY, 2001, p. XIII).

Desta forma, a experiência pedagógica de Vygotsky mostrou que o ensino direto de conceitos costuma ser ineficaz, trazendo uma assimilação vazia e não gerando uma evolução cognitiva (VYGOTSKY, 2001). De acordo com Vygotsky, a criança, antes de tomar consciência de um conhecimento científico, experimenta conceitos espontâneos (GASPAR; MONTEIRO, 2016). À medida que as funções mentais evoluem, cada vez mais elevadas ficam as generalizações dos conceitos, da memória lógica, da abstração.

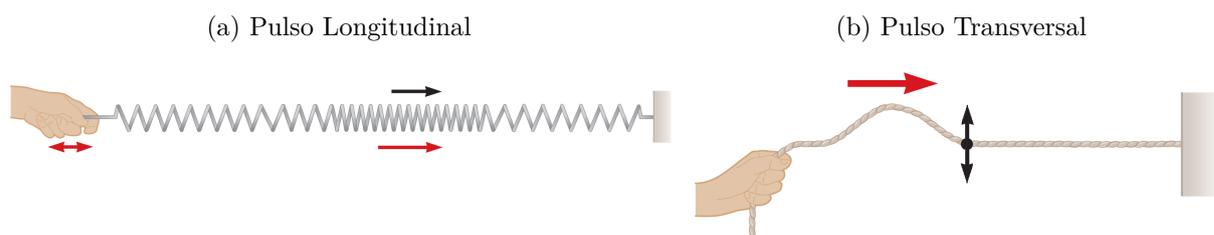
No ensino de Física, a introdução de um novo signo e a utilização de novos instrumentos na atividade psicológica proporcionam novas possibilidades de aprendizagem para o estudante. Desta forma, um experimento didático, uma simulação computacional, dentre outros instrumentos e signos de aprendizagem, propiciam aos estudantes uma forma alternativa de desenvolvimento cognitivo. Por exemplo, aprender a lidar com uma simulação ou com um experimento ajuda a perceber certos padrões de comportamento do sistema que poderiam não ser revelados a partir de uma simples equação (PEREIRA; JUNIOR, 2014).

2.2 Revisão de Física

2.2.1 Estudo de Ondas

Onda é uma perturbação que se propaga em um meio transportando somente energia. Podemos destacar dois tipos principais de ondas: mecânicas e eletromagnéticas. As ondas mecânicas são aquelas que necessitam de um meio material para se propagar, como a água, o ar ou uma placa metálica. Já as ondas eletromagnéticas não precisam de um meio material para existir. São exemplos desse tipo de onda a luz visível, a luz ultravioleta, as ondas de rádio, as micro-ondas, os raios X.

Figura 4 – Direções de vibração do meio



Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

Quanto à direção de vibração do meio de suporte, as ondas podem ser classificadas como ondas longitudinais, quando os elementos do meio de propagação se deslocam paralelos ao sentido de propagação, e as ondas transversais, quando os elementos do meio perturbado se movem perpendicularmente à direção de propagação (Figura 4). Como exemplos de ondas longitudinais temos as ondas sonoras no ar, as ondas em uma mola. As ondas eletromagnéticas e as ondas em uma corda são exemplos de ondas transversais.

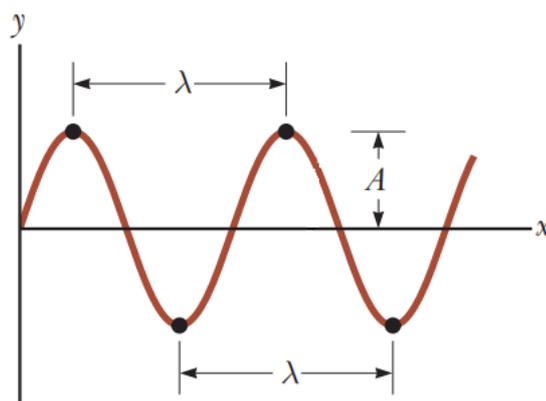
2.2.2 Ondas Progressivas

Vamos considerar um modelo mais simples de onda progressiva, a onda senoidal, que descreve bem o movimento harmônico simples de uma corda em oscilação. A função que descreve uma onda se movimentando no sentido positivo de x com velocidade v em algum instante posterior t é:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (2.1)$$

onde ϕ é a constante de fase que pode ser determinada a partir das condições iniciais, k é o número de onda, e ω é a frequência angular da onda. Na Figura 5 temos a representação instantânea de uma onda senoidal com as suas principais características. O comprimento de onda λ é a distância entre duas cristas ou entre dois vales adjacentes. O ponto mais baixo de um elemento da onda na direção y é chamado de vale. O ponto mais elevado é chamado de crista. A posição máxima de um elemento do meio de propagação em relação à posição de equilíbrio da onda é chamada amplitude A .

Figura 5 – Onda Senoidal



Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

2.2.3 Superposição de Ondas

Em nosso cotidiano, frequentemente acontece de duas ou mais ondas passarem simultaneamente pela mesma região como quando, ao escutarmos uma música, as ondas sonoras dos vários instrumentos musicais chegam simultaneamente aos nossos ouvidos.

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente numa mesma corda esticada com deslocamentos individuais $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$. O deslocamento da corda quando as ondas se propagam é a combinação linear dos deslocamentos individuais:

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (2.2)$$

Desta forma, pelo princípio da superposição, quando vários efeitos ocorrem simultaneamente, o efeito total é a soma dos efeitos individuais.

De acordo com o princípio da superposição, a forma da onda resultante dependerá dos deslocamentos individuais das ondas. Se duas ondas que interagem estão em fase (os picos e os vales de uma estão alinhados com os da outra), a amplitude da onda resultante será máxima, chamada de interferência construtiva. Porém, se as duas ondas estão totalmente defasadas (os picos de uma onda estão alinhados com os vales da outra), elas se cancelam mutuamente e o deslocamento será zero (a corda permanece parada), ocorrendo uma interferência destrutiva.

2.2.4 Ondas Estacionárias

Vamos considerar duas ondas senoidais transversais que se propagam em uma corda com a mesma amplitude, frequência e comprimento de onda, mas se propagando em direções opostas no mesmo meio: $y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ e $y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$, onde y_1 representa uma onda se propagando na direção positiva de x e y_2 representa outra onda se propagando na direção negativa de x .

Somando as duas funções senoidais e utilizando a identidade trigonométrica $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ chegamos à seguinte expressão:

$$y(x, t) = 2A \sin kx \cos \omega t \quad (2.3)$$

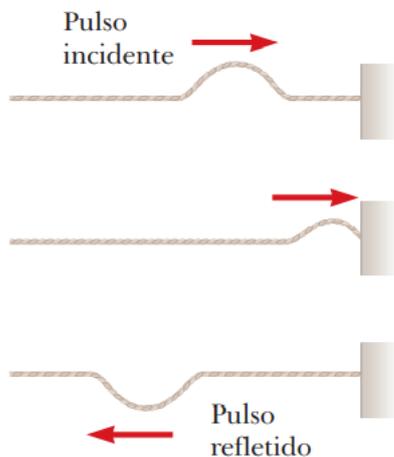
A Equação 2.3 representa a função de onda de uma onda estacionária. Ou seja, é resultado da superposição de duas ondas idênticas se propagando em direções contrárias. Os pontos de amplitude zero são chamados de nodos. Já os pontos de amplitude máxima são chamados de antinodos que estão localizados em posições onde a coordenada x satisfaz a condição $\sin kx = \pm 1$.

Um caso específico de onda estacionária é a situação de uma onda se propagando em uma corda homogênea esticada que está rigidamente presa por uma das extremidades (Figura 6a). Neste caso, quando um pulso atinge uma das extremidades, ocorre a reflexão do mesmo, mas invertido, mantendo a forma inicial. Entretanto, se uma das extremidades está livre para oscilar, o pulso refletido não é invertido (Figura 6b).

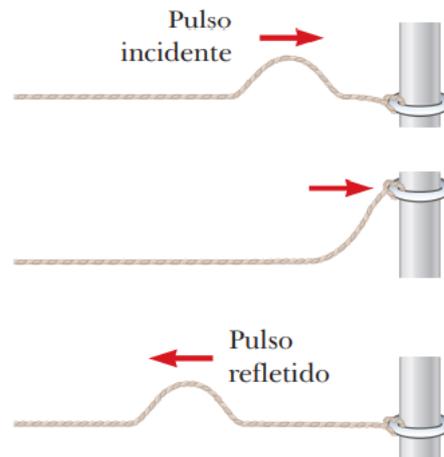
Na Seção 2.2.9, veremos que esses dois efeitos de reflexão podem ser comparados com o caso de uma placa metálica vibrando com suas extremidades livres, em que dois

Figura 6 – Reflexão de um Pulso

(a) Reflexão de um pulso se movendo na extremidade fixa de uma corda



(b) Reflexão de um pulso se movendo na extremidade livre de uma corda

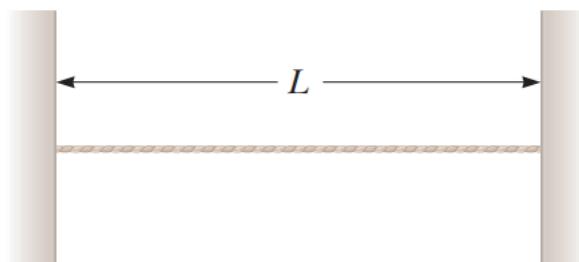


Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

efeitos podem ocorrer: a onda ser refletida com fase inversa ou com mesma fase a partir das bordas, gerando figuras diferentes para modos de vibração iguais (Figura 16).

2.2.5 Ressonância

Em nosso cotidiano, observamos o fenômeno da ressonância mesmo que muitos não tenham consciência que esteja ocorrendo. Tomemos o exemplo de uma corda esticada, presa nas duas extremidades (Figura 7) como uma corda de violão. Ao perturbá-la produzindo uma onda senoidal, ondas transversais se propagam pela corda e são refletidas das extremidades fixas. Dessa forma, temos várias ondas superpostas que interferem entre si. Para certas frequências, a interferência produz uma onda estacionária (modo normal de vibração) com nós e antinós. Esta é gerada apenas quando a corda ressoa em frequência igual a uma das frequências naturais da corda, conhecidas como frequências de ressonância. Se a onda for forçada a vibrar em uma frequência que não é nenhuma das frequências naturais, as oscilações não exibirão um padrão estável.

Figura 7 – Corda de comprimento L fixa nas extremidades

Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

Na Figura 8a é apresentada uma corda de comprimento L . Levando em conta que na ressonância apenas números inteiros de comprimentos de onda podem ser formados na corda, então é lógico pensar que a frequência natural mais baixa pode ser formada de modo que $L = \lambda/2$. Essa configuração nos diz que, para que se forme um padrão estacionário, as ondas na corda devem se propagar com comprimento de onda $\lambda = 2L$. Na figura 8b, observamos três nós e dois antinós. Neste caso, o comprimento da corda é igual ao comprimento de onda $L = 2 \cdot \lambda/2$. Para uma terceira configuração (Figura 8c), mais meio comprimento de onda adicional é acomodado no comprimento L , $L = 3 \cdot \lambda/2$. De modo geral, para um harmônico n , teremos $L = n \cdot \lambda/2$. Desta forma, uma onda estacionária pode se formar na corda de comprimento L quando a seguinte condição é satisfeita para o comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

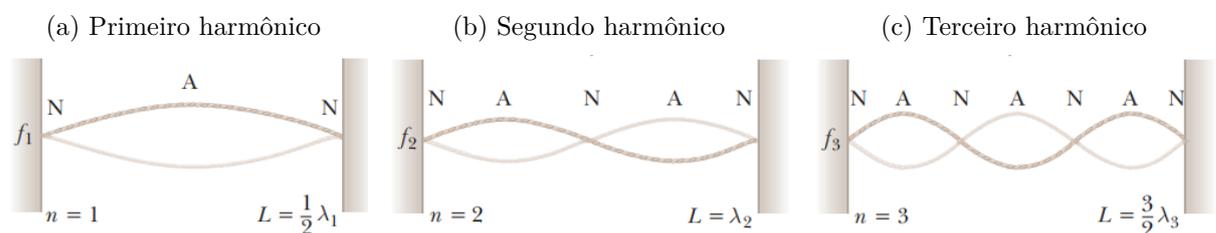
Como $f = v/\lambda$, as frequências de ressonância podem ser calculadas por:

$$f = n \frac{v}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

onde $v = \sqrt{T/\mu}$ é a velocidade de propagação das ondas progressivas na corda que depende da tensão T na corda e da densidade de massa linear μ .

A Equação 2.5 mostra que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da menor frequência de ressonância, $f = v/2L$, que corresponde a $n = 1$. Esse modo de oscilação de menor frequência é chamado de modo fundamental ou primeiro harmônico. O segundo harmônico é o modo de oscilação $n = 2$, o terceiro harmônico é o modo com $n = 3$, e assim por diante.

Figura 8 – Modos normais de vibração de uma corda



Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

2.2.6 Oscilações Forçadas

A energia mecânica de um oscilador amortecido diminui com o tempo como resultado de uma força resistiva. Essa diminuição pode ser compensada aplicando uma força externa periódica sobre o sistema. Podemos tomar como exemplo o caso em que

alguém empurra periodicamente um balanço em que uma criança se diverte, executando oscilações forçadas. Uma representação desse tipo de oscilação é do tipo $F(t) = F_0 \sin \omega t$, onde F_0 é a constante e ω é a frequência angular da força propulsora. Aplicando a Segunda Lei de Newton nessa equação e considerando que, após um período de tempo, a condição de estado estável foi alcançada, na qual as oscilações continuam com amplitude constante, chegamos à seguinte solução para o deslocamento $x(t)$:

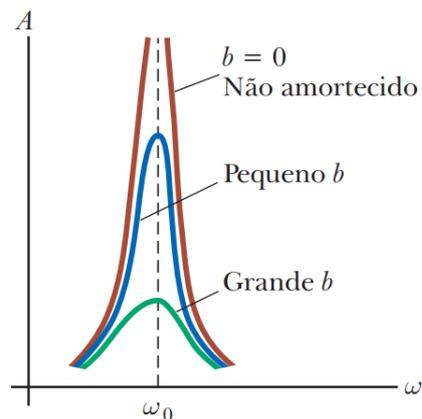
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.6)$$

onde:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (2.7)$$

e b é chamado de coeficiente de amortecimento.

Figura 9 – Gráfico de amplitude em função da frequência propulsora

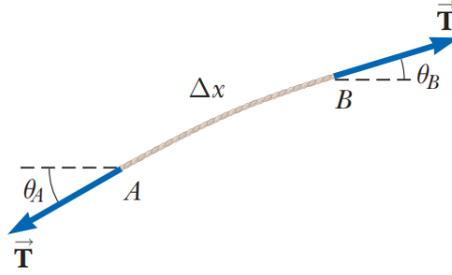


Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

A partir da Equação 2.7 e da Figura 9, é fácil ver que a amplitude aumenta com o amortecimento tendendo a zero ($b \rightarrow 0$), desta forma, aproximando-se de um sistema não amortecido. Além do mais, podemos observar que, na ausência de uma força amortecedora ($b = 0$), a amplitude de estado estacionário da curva de ressonância tende a infinito ($A \rightarrow \infty$) conforme a frequência da força propulsora (ω) se aproxima da frequência natural do oscilador (ω_0). Esta situação é conhecida como ressonância.

2.2.7 Equação de Onda Unidimensional

Quando uma onda transversal atravessa um elemento de corda esticada, este se moverá perpendicularmente à direção de propagação da onda. Desta forma, aplicando a Segunda Lei de Newton ao movimento desse elemento, podemos chegar à equação de onda unidimensional.

Figura 10 – Elemento de uma corda de comprimento Δx 

Fonte: (SERWAY; JEWETT, 2011)

Suponhamos que, enquanto a onda se propaga, a corda esteja sob uma tensão T (Figura 10). Consideremos ainda que o elemento da corda tem comprimento Δx e se movimenta verticalmente de modo que suas extremidades se desloquem de pequenos ângulos θ_A e θ_B com o eixo x . Temos então a força resultante na direção vertical:

$$\sum F_y = T \sin \theta_B - T \sin \theta_A = T(\sin \theta_B - \sin \theta_A) \quad (2.8)$$

Como os ângulos são muito pequenos, podemos aproximar $\sin \theta \approx \tan \theta$. A Equação 2.8 fica:

$$\sum F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A) \quad (2.9)$$

Sabemos que a inclinação de um elemento infinitesimal, em um instante de tempo, é justamente a tangente do ângulo de inclinação dada por $\partial y / \partial x$. Logo, a Equação 2.9 pode ser reescrita como:

$$\sum F_y \approx T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \quad (2.10)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o elemento da corda de massa $m = \mu \Delta x$, onde μ é a densidade linear, temos:

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (2.11)$$

Substituindo a Equação 2.10 em 2.11,

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &= T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \\ \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Considerando o limite para $\Delta x \rightarrow 0$ e que a diferença $(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A$ das inclinações é muito pequena, teremos então:

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

Temos então a equação diferencial de onda

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

onde $v^2 = \frac{T}{\mu}$. Sendo v a velocidade da onda transversal na corda.

2.2.8 Ondas Sonoras

As ondas sonoras, por natureza, são classificadas como ondas longitudinais, pois a pressão do ar varia periodicamente na direção de propagação da onda. Além disso, elas necessitam de um meio material para se propagar. Alguns sons são chamados de música, e outros, de ruído. A diferença entre ambos é que o som musical possui periodicidade (NUSSENZVEIG, 2002).

Existem algumas qualidades fisiológicas dos sons que conseguimos distinguir: altura e intensidade.

2.2.8.1 Altura

A altura de um som está relacionada com a frequência da onda produzida. Essa qualidade fisiológica sonora nos permite distinguir sons graves de sons agudos. As notas musicais correspondem a sons com certas alturas bem definidas.

Os acordes musicais emitidos por um instrumento como o violão são formados por superposições de harmônicos. Tomando como exemplo a escala natural de dó maior, para que os sons produzidos pelos acordes sejam harmoniosos é necessário que haja muitas coincidências entre os harmônicos gerados, levando a consonância. Para três notas (tríade), um acorde perfeito maior é formado quando há uma proporção de 4:5:6 entre as notas. Como exemplos temos dó-mi-sol, fá-lá-dó, sol-si-ré (Tabela 1). Quando dois sons são percebidos como a mesma nota musical, mas em alturas diferentes, dizemos que há um intervalo de oitava, ou seja, a frequência de uma nota musical é o dobro da outra.

Tabela 1 – Intervalos ν_n/ν_1 entre dó e as demais notas na escala maior natural

Nota	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
ν_n/ν_1	1	9/8 (segunda)	5/4 (terça)	4/3 (quarta)	3/2 (quinta)	5/3 (sexta)	15/8 (sétima)	2 (oitava)

Fonte: (NUSSENZVEIG, 2002)

2.2.8.2 Intensidade

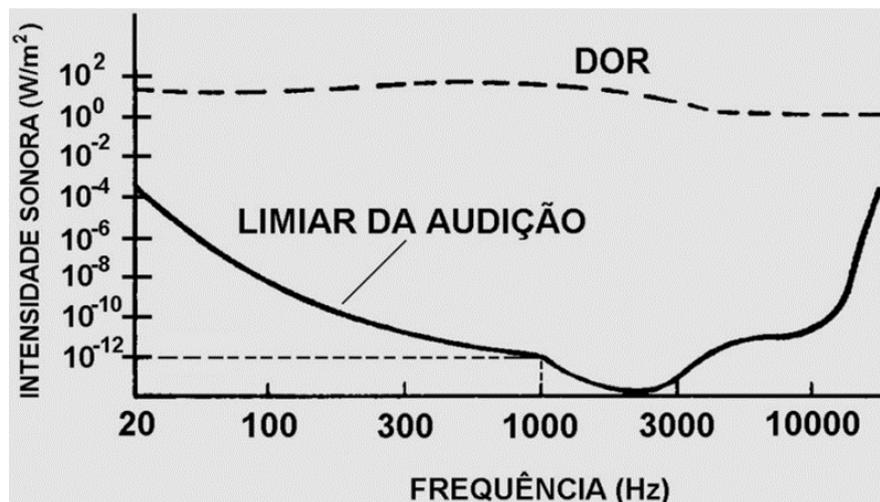
Uma onda mecânica, quando se propaga, transporta energia que se distribui no meio material. A intensidade sonora está relacionada com essa energia transportada por

unidade de área e de tempo. Esta também pode ser expressa de acordo com a Equação 2.15, onde ρ é a densidade do meio de propagação da onda, v é a velocidade da onda no meio material, ω é a frequência angular da onda, e S_m é a amplitude do deslocamento longitudinal das moléculas de ar. (RODRIGUES, 2020).

$$I = \frac{1}{2} \rho v (\omega S_m)^2 \quad (2.15)$$

Pode-se observar que uma onda com maior frequência ou maior amplitude irá transmitir maior quantidade de energia já que a intensidade varia principalmente com o quadrado dessas grandezas físicas. Um aparelho auditivo normal é sensibilizado por um valor mínimo de intensidade que dependerá da frequência do som. Na Figura 11 é possível observar essa curva do limiar da audição, em que podemos destacar que, para uma frequência aproximada de 1000 Hz , o limite mínimo de audição é de 10^{-12} W/m^2 . Este valor de intensidade é tomado como referência para comparações com outras intensidades sonoras, e é representado por I_0 . É possível notar ainda que ondas com intensidades sonoras acima de 1 W/m^2 podem causar dores ao ouvido.

Figura 11 – Limiar da audição humana



Fonte: (RODRIGUES, 2020)

O aparelho auditivo tem a função de captar ondas mecânicas e convertê-las em estímulos nervosos que serão interpretados pelo cérebro. A sensação percebida pelo ouvido varia de acordo com uma função logarítmica da intensidade sonora. Ela é definida por β e com unidade de medida denominada “bel” (B).

$$\beta = \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.16)$$

Entretanto, a unidade mais usada é o “decibel” (dB). Desta forma, a partir da Equação 2.16, introduzimos o nível de intensidade sonora (NIS) cuja unidade é o decibel.

$$NIS = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.17)$$

Cada 1 decibel corresponde a intensidade I , 10 vezes maior que a intensidade I_0 . Na Tabela 2 é apresentado níveis sonoros para alguns sons típicos.

Tabela 2 – Níveis sonoros de alguns sons típicos

TIPO DE SOM	NIS (dB)
Limiar da audição	0
Sussurro das folhas	10
Rua sem tráfego	40
Conversação normal (a 1m)	60
Tráfego pesado	80
Limiar doloroso	120
Decolagem de jato (a 50 m)	140

Fonte: (RODRIGUES, 2020)

2.2.9 Vibração de uma Placa Retangular

Uma placa pode ser comparada a uma barra bidimensional ou a uma membrana com rigidez (FLETCHER, 1998). Uma placa, ao vibrar, pode transmitir ondas de compressão (ondas longitudinais), de cisalhamento, de torção, e/ou ondas de flexão. No nosso caso, iremos estudar a vibração de uma placa retangular com as quatro extremidades livres.

Ao contrário do que se possa esperar que a velocidade da onda de compressão pode ser calculada da mesma forma que se calcularia para uma corda ou para uma barra, a ligeira expansão lateral da onda é acompanhada de uma pequena rigidez adicional. Desta forma, a velocidade longitudinal, c_L é descrita por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (2.18)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, termo relacionado à contração lateral. E é a tensão intrínseca da placa chamada de módulo de elasticidade ou Módulo de Young, e ρ é a densidade volumétrica da placa.

Em se tratando das Figuras de Chladni (Seção 1.2), o movimento de maior contribuição para a formação dos padrões estacionários é o gerado pelas ondas de flexão da placa descrito pela equação (FLETCHER, 1998):

$$-D\nabla^4 z = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez flexural, termo que depende das características mecânicas da placa. Temos ainda que z representa o deslocamento transversal de qualquer ponto da placa em função do tempo, e h é a espessura da placa.

Adotando uma solução harmônica da forma $z = Z(x, y)e^{i\omega t}$, podemos reescrever a Equação 2.19 da seguinte maneira:

$$\nabla^4 Z(x, y) - k^4 Z(x, y) = 0, \quad (2.20)$$

onde $k = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{h} \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{c_L \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}$, termo chamado de número de onda.

Como $v = \frac{\omega}{k}$ e $\omega = 2\pi f$, obtemos o seguinte para a velocidade da onda transversal:

$$v(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}} f h c_L} \quad (2.21)$$

A frequência das ondas de flexão é proporcional a k^2 . Os valores de k correspondem aos modos normais de vibração de acordo com as condições de contorno (FLETCHER, 1998).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_L h}{\sqrt{48\pi^2}} k^2 \quad (2.22)$$

Desta forma, é possível observar, a partir da Equação 2.21, que a velocidade da onda transversal depende da frequência para ondas de flexão (FLETCHER, 1998). Isso acontece devido ao acoplamento de movimento de flexão nas duas direções, o que faz com que os modos de vibração em ambas as direções não sejam puros como no caso de uma barra. Desta forma, as linhas nodais se tornam curvas.

A frequência fundamental de ressonância (Figura 12) para uma placa quadrada de extremidades livres se relaciona com o comprimento de onda correspondente ao dobro do comprimento da placa, $\lambda = 2L$. Sendo $k = 2\pi/\lambda$,

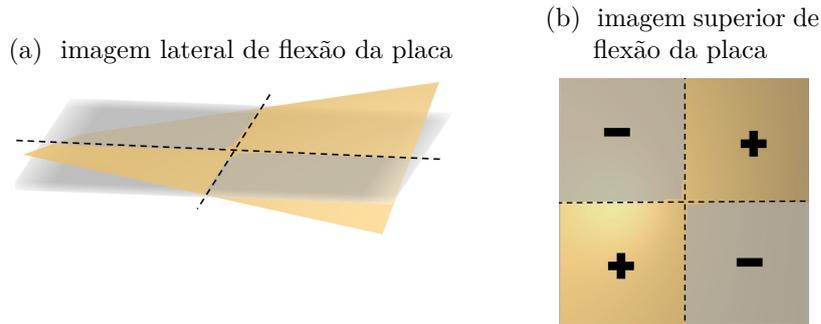
$$k = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L} \quad (2.23)$$

Substituindo 2.23 em 2.22,

$$f_{mn} = \frac{1}{L^2} \frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \cdot \xi_{mn} \quad (2.24)$$

onde ξ_{mn} é o fator de frequência que depende das condições de contorno das extremidades da placa e, conseqüentemente, dos modos normais de vibração m e n .

Figura 12 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada



Na Figura 12, as linhas nodais representam meia onda em cada direção. As regiões com o sinal “+” representam movimento de elevação, enquanto que as de sinal “-” representam movimento de abaixamento.

De acordo com Warburton (1954), o fator de frequência é definido como:

$$\xi_{mn}^2 = G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \quad (2.25)$$

onde os coeficientes G_x , G_y , H_x , H_y , J_x , J_y dependem das condições de contorno e dos modos de vibração.

Tabela 3 – Coeficientes da Equação 2.25 para a placa de extremidades livres

m	G_x	H_x	J_x
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

Fonte: (WARBURTON, 1954)

Para os demais coeficientes, os valores são os mesmos, fazendo a troca de m por n .

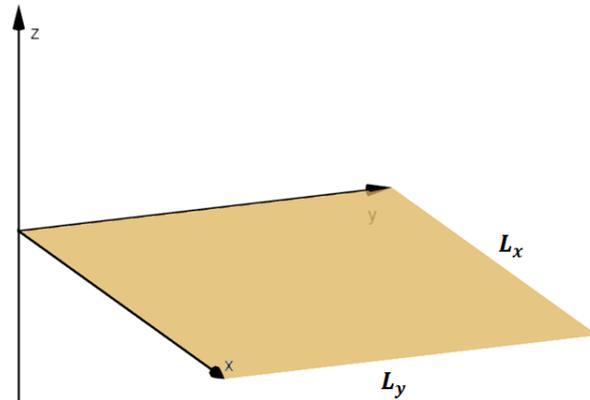
Consideremos a representação de uma placa retangular com um de seus vértices coincidindo com a origem do plano XY como mostra a Figura 13.

Para o caso de ondas estacionárias viajando em um plano, a amplitude de vibração dependerá da superposição de uma onda estacionária na direção x e outra na direção y .

A solução para a forma de vibração da placa na direção z deve satisfazer as condições de contorno para as quatro laterais da placa. Da Equação 2.19 e aplicando o operador ∇^4 , chegamos à seguinte equação que também deve satisfazer a solução do problema (WARBURTON, 1954):

$$\frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1 - \nu^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.26)$$

Figura 13 – placa de lados L_x e L_y no plano XY



Entretanto, não é possível encontrar uma forma para z que satisfaça a Equação 2.26 juntamente com as condições de contorno para o caso dos quatro lados da placa livres. É necessário assumir a parte espacial da solução $Z(x, y)$ composta por uma série infinita, onde cada termo da série satisfaz a Equação 2.26.

O deslocamento na direção z será da forma:

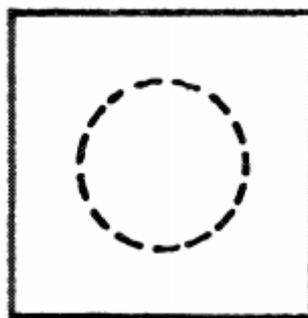
$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin(\omega t) \quad (2.27)$$

Sendo

$$Z(x, y) = \sum A_{mn} X_{mn}(x) Y_{mn}(y) \quad (2.28)$$

Como exemplo, de acordo com os parâmetros tabelados em Leissa (1993) para o terceiro modo de vibração da placa para $\nu = 1/3$, teremos

Figura 14 – Terceiro modo



Fonte: (LEISSA, 1993)

Terceiro modo: $Z(x, y) = A_{02}(X_0Y_2 + X_2Y_0) + A_{22}X_2Y_2 + A_{04}(X_0Y_4 + X_4Y_0) + A_{24}(X_2Y_4 + X_4Y_2) + A_{44}X_4Y_4 + \dots$

Sendo:

$$A_{02} = 1$$

$$A_{22} = -0,0447$$

$$A_{04} = -0,02011$$

$$A_{24} = -0,00384$$

$$A_{44} = -0,0282$$

Porém, Warburton (1954) apresentou uma solução mais simples de descrever o problema da placa completamente livre. Ele toma os termos de maior contribuição na série (Equação 2.28). Desta forma, temos

$$Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2.29)$$

Onde, para $x = 0$ e $x = L_x = L_y$

$$X(x) = \begin{cases} \cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)} \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 2, 4, 6... \\ \sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)} \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 1, 3, 5... \end{cases}$$

De maneira análoga, para a direção y

$$Y(y) = \begin{cases} \cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 2, 4, 6... \\ \sin \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon'/2)}{\sinh(\epsilon'/2)} \cdot \sinh \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 1, 3, 5... \end{cases}$$

Os fatores de amplitudes, γ e γ' definidos para cada padrão nodal são encontrados graficamente através da interseção entre curvas de equações:

$$\begin{cases} \tan(\gamma/2) + \tanh(\gamma/2) = 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \tan(\gamma'/2) - \tanh(\gamma'/2) = 0 & \text{para } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Pode-se chegar à seguinte relação:

$$\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}(2m - 1) \quad (2.30)$$

Ritz mostrou que a superposição dos modos $(m, n) \pm (n, m)$ para uma placa quadrada, $L_x = L_y$, só existe nas condições em que $m - n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ (WARBURTON, 1954).

Teremos então como solução geral os seguintes casos de formas de vibração:

Caso 1: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 0$, onde $m = 2, 4, 6, \dots$

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm A \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.31)$$

$$\text{Com } \alpha = -\frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)}.$$

Caso 2: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 1$, onde $m = 3, 5, 7, \dots$

$$Z(x, y) = A \left(1 - \frac{2y}{L_y} \right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm$$

$$A \left(1 - \frac{2x}{L_x} \right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.32)$$

$$\text{Com } \alpha' = \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)}.$$

Caso 3: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $m > 1, n > 1$, onde m e n assumem quantidades diferentes.

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \pm A \left[\cos \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.33)$$

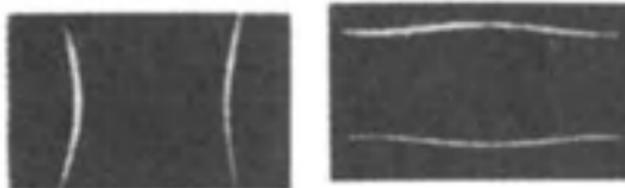
$$\text{Com } \beta = \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \text{ e } \epsilon = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

Para uma placa onde $L_x \gg L_y$, os modos $(2,0)$ e $(0,2)$ surgem completamente independentes como se pode ver na Figura 15.

Figura 15 – Modos de vibração independentes

(a) Modo $(2,0)$

(b) Modo $(0,2)$

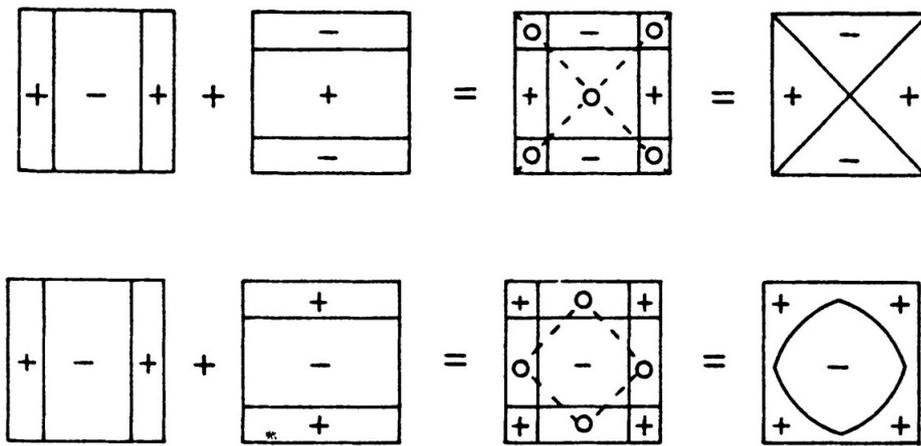


Fonte: (FLETCHER, 1998)

Se $L_x \rightarrow L_y$, os modos independentes se combinam linearmente para formar dois novos modos. No caso de uma placa quadrada, duas combinações são possíveis, dependendo se os modos estão em fase ou fora de fase, como se pode ver na Figura 16. A combinação $(2,0) + (0,2)$ tem um valor de frequência maior que $(2,0) - (0,2)$. No modo anel (Figura 17b) ocorre uma rigidez adicional devido ao fato de que os movimentos de flexão se opõem. Já no modo X (Figura 17a) cada modo auxilia o outro através de uma interação elástica chamada de acoplamento de Poisson.

É importante destacar que os pontos onde a função espacial $Z(x, y)$ se anula, a função $z(x, y, t)$ (Equação 2.27) também se anula. Ou seja, esses pontos permanecerão estáticos formando linhas nodais, região no qual os grãos de areia se acumulam. Na Figura 18, temos alguns padrões de Chladni em que são apresentadas as combinações de modos em fase e fora de fase.

Figura 16 – Modo X, $(2,0) - (0,2)$, e do modo anel, $(2,0) + (0,2)$



Fonte: (FLETCHER, 1998)

Figura 17 – Combinação dos modos $(2,0)$ e $(0,2)$

(a) Modo $(2,0) - (0,2)$

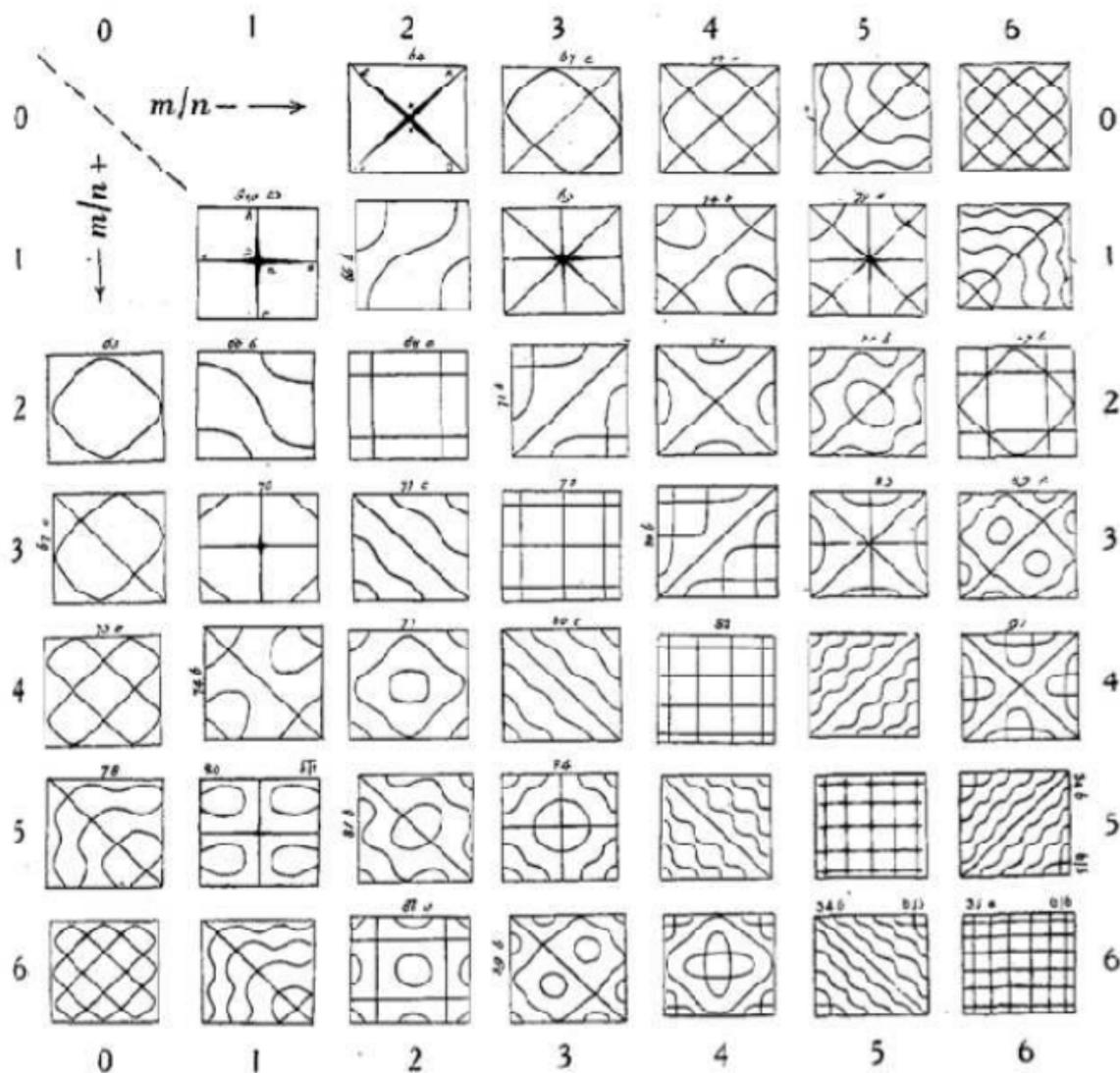


(b) Modo $(2,0) + (0,2)$



Fonte: Autor

Figura 18 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre



Fonte: (BLANCAS, 2011)

3 Metodologia

É fácil verificar que a abordagem dos conteúdos da Física ondulatória feita pelos livros didáticos no ensino básico sobre o tema versa sobre o caso unidimensional. Nesse sentido, há poucos trabalhos acadêmicos na área de ensino de Física que se dispõem a utilizar metodologias voltadas para o ensino da ondulatória bidimensional. Contudo, há alguns trabalhos de mestrado na área de Ciências da Natureza em que se utilizam maneiras significativas e visualmente intrigantes de demonstrar o movimento vibratório de placas finas através do experimento das Figuras de Chladni. Destacam-se Lima (2020) que construiu um experimento utilizando como itens básicos, um alto-falante, com a função de vibrador mecânico, amplificador de som bluetooth BT 118 (Figura 19a), controlado via aplicativo no smartphone, placas de acrílico e areia fina; Silva (2018) utilizou como diferencial o amplificador de som LL Áudio AB100BT (Figura 19b) conectado via aplicativo no smartphone, placa metálica de zinco e sal refinado; e Santos (2018) que, além das chapas de alumínio e de aço inox, utilizou um conjunto oscilador juntamente com o gerador de sinal ICEL GV 2002 2MHZ (Figura 19c), um amplificador e sal de cozinha.

Figura 19 – Aparelhos utilizados em trabalhos acadêmicos na área de ensino



Nesses três trabalhos citados, o custo dos equipamentos eletrônicos é elevado. Na busca de tornar a utilização desse tipo de experimento ainda mais acessível, abordamos uma nova proposta, utilizando materiais com menor custo e, de fácil montagem.

3.1 Contextualização da Escola

O produto educacional foi aplicado no Colégio Estadual José Amaral Lemos, que está localizado na Rua Givaldo Moura da Silva nº 70, Bairro Centro, em Pirambu-SE. No ano da aplicação do produto educacional, em 2021, O estabelecimento de ensino era composto por 16 turmas, sendo 6 turmas de Ensino Fundamental e 10 turmas de Ensino Médio. Além disso, a escola contava com 621 alunos matriculados. O presente trabalho foi destinado aos alunos do segundo ano do Ensino Médio por se tratar de temas que normalmente são abordados nessa série. A escola está localizada numa cidade litorânea onde a pesca é uma das principais fontes de renda da população. Há muitos alunos que são de povoados e que dependem do transporte escolar para se deslocarem até a escola.

3.2 Estrutura das Aulas

As aulas foram distribuídas da seguinte maneira:

Quadro 2 – Distribuição das Aulas.

Aula	Descrição das atividades	Duração
1	- Aula tradicional, utilizando slides, explicando o experimento de Chladni dentro do contexto histórico, e mostrando a aplicação deste com ênfase em uma abordagem bidimensional.	40 min
	- Formação dos grupos, distribuição das funções entre os alunos, e explicação da atividade que os grupos irão realizar.	10 min
2	- Os alunos realizam a atividade de modelagem computacional no GeoGebra, seguindo um roteiro estabelecido.	50 min
3 e 4	- Os grupos executam um roteiro experimental formando as figuras de Chladni.	80 min
	- Os grupos discutem e resolvem o problema proposto em consonância com a tipologia de investigações (Quadro 1).	20 min
	- Aplicação da Etapa 4 do ensino por investigação (Seção 2.1.1) em que os alunos escrevem sobre o que aprenderam na aula.	—
5	- Os grupos apresentam os resultados a partir de cada escriba.	30 min
	- Aplicação da Etapa 3 do ensino por investigação (Seção 2.1.1) em que perguntas são feitas aos alunos, visando uma discussão com a turma inteira a fim de esclarecer conceitos não tão bem compreendidos.	20 min
	- Aplicação do pós-teste.	—

3.3 Material Elaborado

3.3.1 Materiais e Confeção do Experimento de Chladni

No Quadro 3, apresentamos os materiais básicos utilizados na montagem do aparato experimental.

Quadro 3 – Materiais utilizados.

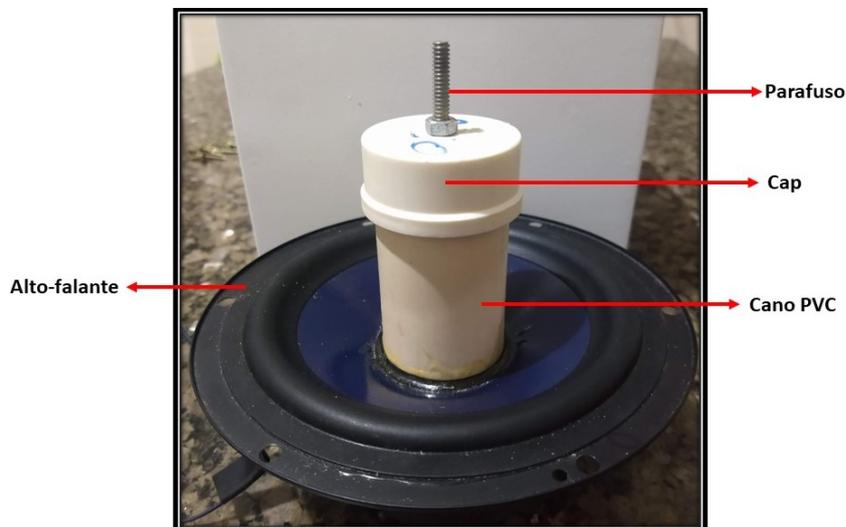
- Módulo amplificador de áudio ZK-502M com 50 W, conexão bluetooth 5.0;
- Fonte de tensão de 12 V, 2 A;
- Alto falante 100 W, 6 Ω , 6 polegas;
- Smartphone ou tablet para a instalação do app *Gerador de Frequência*;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 25 cm \times 25 cm \times 1 mm;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 20 cm \times 20 cm \times 1 mm;
- Areia fina e farinha;
- Caixa de madeira para fixar o alto falante com base 18 cm \times 18 cm e altura de 15 cm;
- Cano PVC de 6 cm de comprimento e 40 mm de diâmetro;
- Cap para o cano PVC de 40 mm de diâmetro
- Parafuso de 2 cm de comprimento e 5 mm de diâmetro;
- Duas porcas e duas arruelas para o parafuso acima;
- Seis parafusos para madeira do tipo chipboard com (3,5 \times 16) mm;
- Quatro parafusos para madeira do tipo chipboard com (4,0 \times 30) mm;
- Cola araldite;
- Furadeira;
- Chave de fenda philips;
- Serra para cano PVC;
- Alicates.
- Protetor Auricular

Alto-falante

O alto-falante é o dispositivo responsável pela vibração da placa metálica. A conexão entre o dispositivo de áudio e a placa será através do cano PVC. Este deverá ser

colado no centro do diafragma do alto-falante como mostra a Figura 20. Foi utilizada cola araldite para fixar o cano ao dispositivo eletrônico.

Figura 20 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante



O parafuso com $5\text{ mm} \times 2\text{ cm}$ deverá ser inserido no centro do cap e depois preso por uma porca como se pode ver na Figura 20. Em seguida, o cap deverá ser encaixado ao cano.

Placa Amplificadora

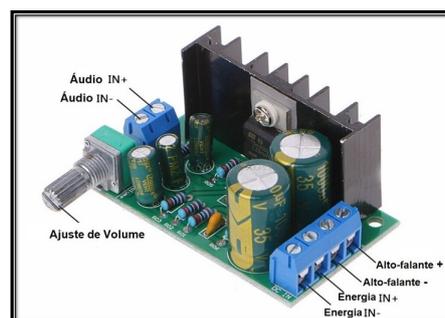
A placa amplificadora é uma peça fundamental para o funcionamento do experimento. Ela é responsável por amplificar o som que sai do smartphone para o alto-falante. Existem vários modelos de placa com variados tipos de potência. Neste caso, é importante um modelo que possua dissipador de calor. Pela praticidade de menos conexões com fios, foi utilizado na montagem desse aparato experimental o módulo amplificador de áudio ZK – 502M com 50 W de potência e bluetooth 5.0 (Figura 21a). Este funciona com tensão DC entre 5 V e 24 V. Nesse aparato experimental, utilizamos uma fonte de energia de 12 V. Na Figura 22, temos como o amplificador deve ser conectado ao alto-falante.

Figura 21 – Amplificadores de áudio.

(a) Módulo Amplificador de Áudio ZK – 502M Bluetooth



(b) Módulo Amplificador Tda 2050



Como opção de montagem, com a utilização de amplificador sem bluetooth e um cabo de áudio mono P2, foi testado o modelo Tda 2050 mono de 30 W com volume ajustável e tensão de entrada de 12 V DC, ideal para quaisquer alto-falantes com as mesmas especificações do utilizado neste produto educacional.

As portas de entrada e saída estão apresentadas na Figura 21b. À esquerda, existem duas portas de entrada do sinal que será transmitido do celular. À direita, há duas portas de entrada da fonte de alimentação, e mais duas portas de saída do sinal amplificado para o alto-falante.

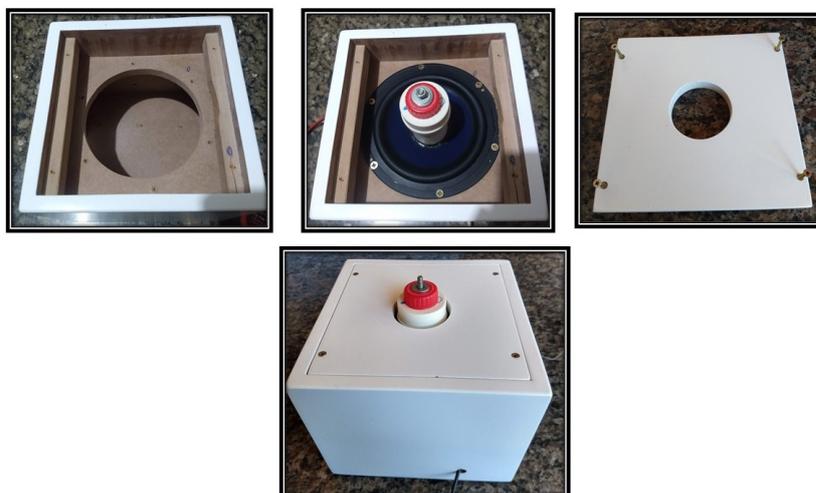
Figura 22 – Conexão do amplificador ao alto-falante



Caixa de Madeira

Para o encaixe do alto-falante, utilizamos uma caixa de madeira compensada com base 18 cm × 18 cm e altura de 15 cm. Foi feito um furo na tampa com um diâmetro de 60 mm, suficiente para que o cano oscile sem contato com as paredes do furo. O esquema está descrito na Figura 23.

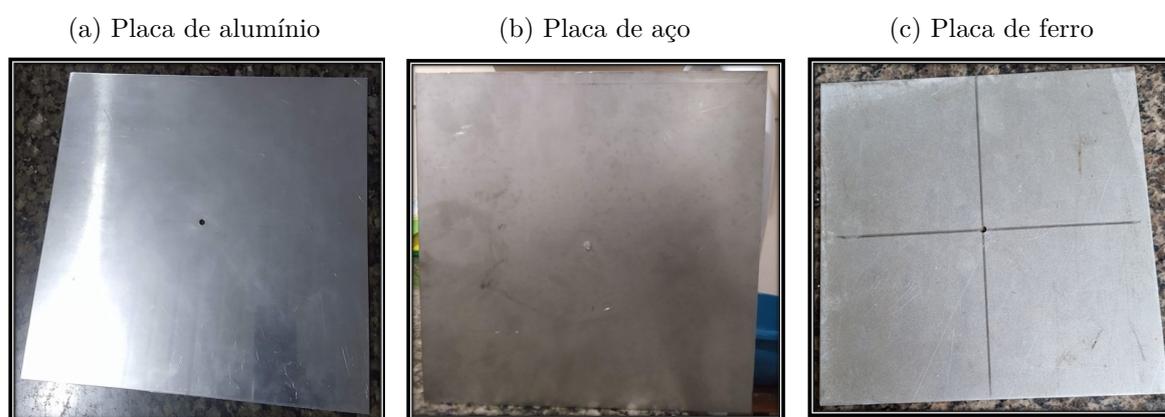
Figura 23 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira



Placas Metálicas

Neste produto educacional, a partir de testes e análise de custo benefício, utilizamos duas placas de ferro galvanizado como já descritas na lista de materiais (Quadro 3). Alguns testes foram feitos com placas de alumínio, aço inox, e placa de acrílico. As placas de alumínio tinham as dimensões de $30\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 2\text{ mm}$ e $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 2\text{ mm}$, as placas de aço inox com dimensões $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 1\text{ mm}$ e $20\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 1\text{ mm}$, e a placa de acrílico, $26\text{ cm} \times 26\text{ cm} \times 2\text{ mm}$. Esta última não demonstrou eficiência na formação de figuras devido ao nível elevado de aderência da areia em sua superfície, impedindo que os grãos se movimentassem livremente.

Figura 24 – Placas Metálicas



A placa metálica deve ser inserida no parafuso central (Figura 25) e então presa por uma arruela e uma porca.

Figura 25 – Esquema de encaixe da placa metálica



É importante certificar-se de que a placa esteja nivelada para não correr o risco de, no momento da vibração dos grãos, estes se deslocarem mais para um lado, e inclusive, fazendo com que boa parte dos grãos não permaneçam sobre a placa, impedindo a visualização completa das figuras de Chladni.

Areia Fina e Farinha

Os grãos a serem utilizados são de suma importância. Estes não podem estar úmidos e têm que ser pequenos, finos. Utilizamos como teste a areia da praia por ser fácil de se conseguir na região onde a Instituição de ensino está localizada, e, pelo fato de termos obtido um resultado bastante satisfatório. Caso a areia esteja muito úmida no momento da execução do experimento, sugiro que a mesma seja aquecida. Utilizamos, para isso, o aparelho micro-ondas por 1 minuto de funcionamento com a areia dentro sendo aquecida. Entretanto, para fins de aplicação deste produto educacional, utilizamos farinha pelo fato de ser um material de fácil acesso e, de ter apresentado um resultado mais satisfatório que a areia. Para utilizar grãos mais homogêneos e de menores tamanhos, foi utilizada a farinha dentro do paliteiro para jogá-la sobre a placa metálica.

Figura 26 – Areia e farinha utilizadas no experimento



Protetor Auricular

O som de algumas frequências de vibração da placa podem incomodar alguns alunos. Então é importante que se tenha à disposição, durante a realização do experimento das figuras de Chladni, protetores auriculares para a proteção contra os níveis de ruídos que possam incomodar.

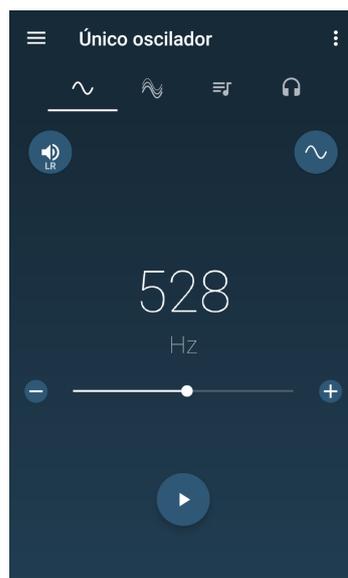
Figura 27 – Protetor Auricular



Aplicativo Gerador de Frequência

Existem muitos aplicativos gratuitos de geração de sinais sonoros. Entretanto, o Aplicativo *Gerador de Frequência* foi satisfatório para o desejado. Este pode ser encontrado no Google Play para o sistema operacional Android. Aplicativos similares podem ser encontrados em outras plataformas de software. O smartphone ou tablet é conectado via bluetooth com a placa amplificadora, através do qual o sinal é enviado via o aplicativo.

Figura 28 – Imagem da tela inicial do Aplicativo *Gerador de Frequência*



3.3.2 Aplicação Computacional para Figuras de Chladni

O GeoGebra é um software de código aberto de matemática dinâmica, reunindo recursos de cálculos, criação de gráficos, simulações. O GeoGebra possui milhões de usuários e já recebeu diversos prêmios (GEOGEBRA, 2021). Existe um grande acervo de materiais didáticos que podem ser compartilhados livremente. Além disso, os códigos desses materiais são abertos para quem quiser ver e/ou preferir fazer alguma modificação na programação. Ainda, é possível seguir autores que fazem parte de uma comunidade internacional do GeoGebra. Desta forma, o seguidor recebe atualizações de novos materiais em seu "feed" de notícias.

Além de ser uma calculadora e, de oferecer ferramenta gráfica, o GeoGebra também oferece o ferramental para se criar animações tanto em 2D como em 3D, além de botões, controles deslizantes, etc. Ele é bastante utilizado também em simulações de eventos físicos como o trabalho de Bracho et al. (2019) que elaborou um simulador para o ensino do movimento parabólico numa situação do tiro livre no futebol. Já Ribeiro (2019) desenvolveu um conjunto de simulações com o GeoGebra para auxiliar o professor de Física no ensino da cinemática. Também, com a utilização do software, uma proposta

de cenário virtual para o ensino de oscilações e conceitos de ondas foi desenvolvida no trabalho de Melo (2021).

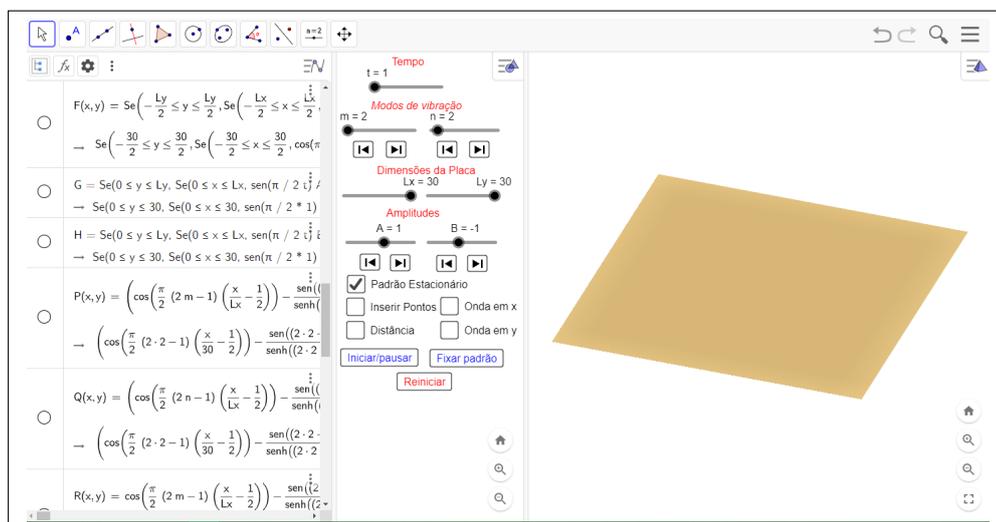
Figura 29 – Interface da modelagem no GeoGebra



Fonte: <<https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>>

O GeoGebra oferece duas opções de linguagem de programação: código GeoGebra e JavaScript. Três áreas principais foram utilizadas para a criação da modelagem das Figuras de Chladni (Figura 30):

Figura 30 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D



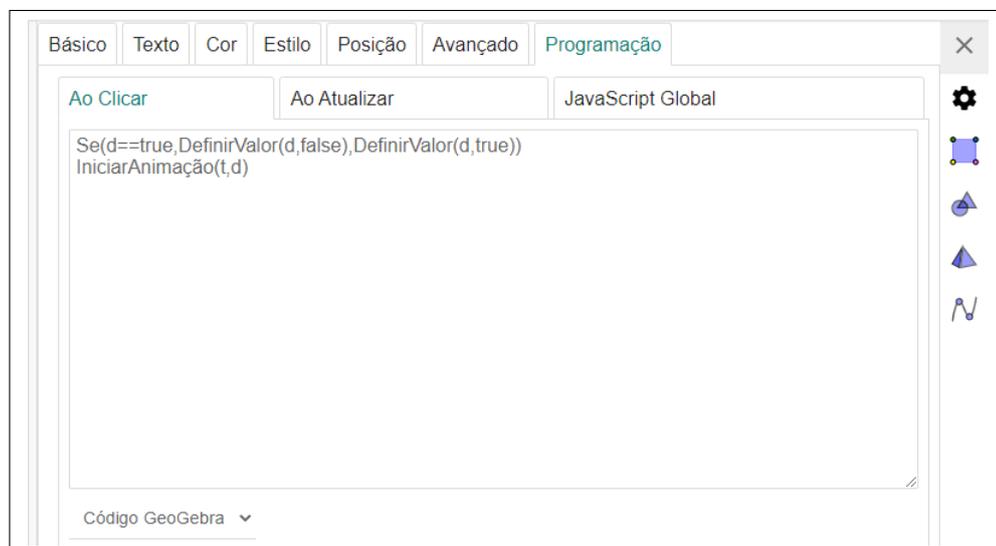
- Janela de Álgebra - Esta janela é a principal. É nela que os objetos e controles são criados através da inserção de funções e proposições lógicas. Foi nesta janela que foram inseridas as condições lógicas de acordo com as equações 2.31, 2.32, 2.33.
- Janela de visualização - Nessa janela, são exibidos os controles da simulação como botões, caixas de visualização, controle deslizante.

- Janela de visualização 3D - Nessa janela é visualizada a execução de tudo que foi inserido, programado e controlado nas janelas anteriores.

Figura 31 – Área de programação para um objeto no GeoGebra



Figura 32 – Área de programação do botão iniciar/pausar



É importante destacar que o software de modelagem no GeoGebra foi executado nos navegadores Google Chrome (versão: 102.0.5005.115) e Microsoft Edge (versão: 102.0.1245.41). Este último se mostrou mais eficaz na manipulação das variáveis e na reprodução das animações. Devido a isto, o navegador Microsoft Edge foi utilizado pelos alunos na aplicação deste produto educacional.

Nesta seção foi apresentado, de forma breve, o mínimo necessário utilizado na criação do ambiente de modelagem das Figuras de Chladni. Claro que há muitos outros

detalhes envolvidos na criação desse ambiente computacional. A modelagem pode ser melhor otimizada e possuir mais ferramentas de controles e de visualização. Ela passa por um processo de constante aprimoramento. Mas a princípio, o software é mais que suficiente para a visualização e entendimento sobre a formação dos padrões estacionários de Chladni.

3.3.3 Material para Construção de Gráfico

Na atividade de experimento das figuras de Chladni, os grupos precisaram criar um gráfico das frequências de ressonância das duas placas de ferro a fim de analisar o coeficiente angular da reta gerada. Na Figura 33 temos o modelo de arquivo no excel utilizado pelos alunos para preenchimento dos dados de forma que o gráfico e os coeficientes da equação foram gerados automaticamente.

Figura 33 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância

TURMA :		Análise do coeficiente angular do gráfico																					
		Frequência f: frequência de ressonância da placa de ferro (25 cm) ² Frequência f': frequência de ressonância da placa de ferro (20 cm) ²																					
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Frequência f (Hz)</th> <th>Frequência f' (Hz)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	Frequência f (Hz)	Frequência f' (Hz)											<div style="font-size: 2em; font-weight: bold;">Sem dados</div>		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Função Linear</th> </tr> <tr> <th colspan="2">$y = ax + b$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>coeficiente angular</td> <td>coeficiente linear</td> </tr> <tr> <td>a =</td> <td>b =</td> </tr> </tbody> </table>	Função Linear		$y = ax + b$		coeficiente angular	coeficiente linear	a =	b =
Frequência f (Hz)	Frequência f' (Hz)																						
Função Linear																							
$y = ax + b$																							
coeficiente angular	coeficiente linear																						
a =	b =																						

[Link de acesso](#)

Para poder editar o arquivo de forma online, é necessário que se faça uma cópia, clicando em **Arquivo** → **Fazer uma cópia**.

3.3.4 Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional

Como já vimos anteriormente, a formação das figuras de Chladni não é tão simples de ser entendida. Muitos alunos podem achar, inicialmente, que se trata de uma força de atração entre os grãos de farinha (ou areia), quando na verdade existem regiões na onda estacionária em que ocorrem interferências totalmente destrutivas chamadas de linhas nodais. Desta forma, os grãos vibram se deslocando para essas regiões.

A fim de representar esse fenômeno através da visualização do movimento de vibração da placa, criamos um ambiente de modelagem computacional a partir do software

GeoGebra. Desta forma, os alunos poderiam relacionar os resultados teóricos com os experimentais, agregando conhecimento e impulsionando nova aprendizagem.

O seguinte roteiro no GeoGebra foi realizado pelos grupos:

1. Acesse o ambiente de modelagem das Figuras de Chladni em <<https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>>.
2. Para gerar um padrão estacionário, altere os modos de vibração m e n para $m = 2$ e $n = 0$, e clique em *Iniciar*;
3. Clique em *Inserir Pontos* e observe seu movimento de vibração;
4. Clique em *Fixar Padrão* e leve os pontos para regiões de máxima e mínima amplitudes de vibração da placa. Inicie a simulação;
5. Como é chamada a região em que o ponto permaneceu parado? Numa situação real, qual seria o comportamento de uma partícula livre que estivesse em uma região de amplitude máxima? Como se chama essa região de máxima amplitude?
6. Gere a figura com os modos de vibração $m = 2, n = 2$;
7. Insira os pontos e clique em *Fixar Padrão*. Depois clique em *Distância* e leve os pontos para duas linhas nodais paralelas consecutivas. Para isto, mova os pontos buscando o valor mais próximo do nivelamento igual a zero e anote o valor da distância entre os dois pontos. O que é essa distância medida entre os dois pontos?
8. Registrando as imagens e os modos de vibração, gere as figuras para os padrões referentes a $m = 2, n = 0$ com $B = 1$ e $B = -1$; $m = 3, n = 1$ com $B = 1$ e $B = -1$; $m = 3, n = 2$ com $B = 1$; $m = 4, n = 0$ com $B = 1$ e $B = -1$; $m = 2$ e $n = 2$, com $B = 1$; $m = 2$ e $n = 2$ com $B = 1$; $m = 4$ e $n = 6$ com $B = -1$; $m = 6$ e $n = 2$, com $B = -1$; $m = 7$ e $n = 3$ com $B = 1$.
9. O que deve ocorrer com a frequência de vibração da placa à medida que os modos de vibração m e n aumentam? O que acontece com o comprimento de onda? O que se observa nas figuras?

3.3.5 Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni

Nesse experimento, os alunos buscam formar pelo menos cinco figuras de Chladni, utilizando farinha em duas placas quadradas de ferro com lados de 25 cm e 20 cm, e 1 mm de espessura. Os alunos manipulam a vibração das placas através do aplicativo chamado *gerador de frequência*. O sinal de frequência chega a um amplificador bluetooth. A partir deste, o som sai amplificado para um alto-falante.

Nessa atividade experimental, através de uma análise gráfica, os alunos encontram uma relação entre as frequências de ressonância das placas e suas dimensões, algo que normalmente é trabalhado em laboratórios de ensino com casos unidimensionais, como em cordas vibrantes.

Os grupos manipulam o experimento da seguinte forma:

1. Utilizando a placa de ferro $(25\text{ cm})^2$
 - a) Forme os padrões de Chladni para cinco (5) frequências de ressonância distintas.
 - b) Anote os valores das frequências de ressonância e, através de desenhos, registre as imagens dos padrões de Chladni.
2. Quais são as variáveis utilizadas para controlar a vibração da placa?
3. O que ocorre na placa metálica juntamente com os grãos quando apenas a frequência de vibração é modificada? E quando somente o volume da fonte é alterado?
4. Repita o mesmo procedimento do item “1)” para a placa de ferro $(20\text{ cm})^2$, procurando encontrar as mesmas figuras já encontradas para a placa anterior. Anote os valores das novas frequências de ressonância.
5. Por que, nas duas placas de ferro, as mesmas figuras se formaram, mas em frequências diferentes?
6. A partir dos valores das frequências de ressonância das duas placas de ferro, trace um gráfico de $f' \times f$, utilizando a planilha de dados no Excel, onde f' e f são as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$ respectivamente.
 - a) Perceba que, no gráfico, é criada uma função da forma $y = ax + b$. Compare-a com $f' = a \cdot f$, e anote o valor do coeficiente angular **a**.
 - b) Calcule o quociente entre as áreas das placas de ferro $(25\text{ cm})^2$ e $(20\text{ cm})^2$.
 - c) De acordo com os itens anteriores, qual o significado matemático do coeficiente angular **a**.
7. O que aconteceu com a frequência de ressonância da placa de ferro quando se diminuiu o comprimento desta, mantendo a mesma espessura, para formar a mesma figura? Relacionando a resposta anterior à equação $f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante$, o que se pode concluir sobre a relação da frequência de ressonância e o comprimento de uma mesma placa quadrada?

3.3.6 Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni

Após a obtenção dos resultados, tanto no GeoGebra como no experimento com as placas metálicas, os grupos devem identificar os padrões em comum nas duas atividades anteriores a fim de tentarem perceber que a teoria e o experimento estão intimamente conectados. Com isso, os alunos concluem como as figuras de Chladni se formam.

A seguir, o roteiro desta atividade:

1. O que se observa nas figuras das placas de ferro? Encontrou alguma figura semelhante às aquelas observadas no GeoGebra? Quais?
2. De acordo com o que observaram na modelagem e no experimento, expliquem como as figuras de Chladni se formam. Por que os grãos se concentram em determinadas regiões da placa?
3. O que vocês acharam do experimento e da atividade realizada?

4 Relato da Aplicação e Resultados

Neste capítulo apresentaremos um relato da aplicação do produto educacional que foi realizada com uma turma de segundo ano do Ensino Médio. Foram três encontros. Os dois primeiros, cada um, com duas aulas de 50 minutos e o último encontro com uma aula de 50 minutos como pode ser observado no Quadro 2.

A sequência didática do ensino por investigação foi aplicada com 29 alunos. Porém, 5 alunos não participaram de todas as etapas da aplicação do produto educacional. Devido a isto, a análise dos resultados de aprendizagem através do pré-teste e do pós-teste foi feita com 24 alunos.

É importante dizer que o presente trabalho foi realizado durante o período ainda de pandemia onde, no Estado de Sergipe, o ensino voltava aos poucos para o modelo totalmente de presencial.

4.1 Relato dos encontros

Este produto educacional foi aplicado durante as duas últimas semanas de novembro e a primeira semana de dezembro no ano de 2021.

Em uma aula anterior à aplicação do produto, foi mostrado aos alunos como funcionaria a dinâmica da sequência didática de ensino por investigação, juntamente com um pré-teste a fim de verificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da ondulatória. Os alunos realizaram essa tarefa em um momento posterior à aula.

4.1.1 Primeiro Encontro

A primeira aula foi ministrada utilizando slides, recapitulando tópicos já estudados pelos alunos, mas de modo a destacar o caso bidimensional em comparação com o caso unidimensional. Nesta aula, de maneira breve, foi tratado o estudo das ondas mecânicas com ênfase no experimento de Ernst Chladni e suas aplicações. Nos últimos 10 minutos da primeira aula, houve a formação de grupos com cinco alunos escolhidos de maneira aleatória, e foram explicadas as atribuições de cada função dentro do grupo. As funções (Seção 2.1.2) foram escolhidas em comum acordo entre os integrantes de cada grupo.

Os espaços físicos dos laboratórios de ciências e de informática eram pequenos e com quantidade de computadores insuficiente para todos os grupos ao mesmo tempo. Por conta disso, os alunos foram divididos em duas turmas, turma 1 e turma 2, cada uma com três grupos. Desta forma, as atividades nos laboratórios foram desenvolvidas com as

turmas separadas em momentos diferentes.

Na segunda aula, os grupos trabalharam com um ambiente de simulação no GeoGebra que modelou o experimento das figuras de Chladni. Nesta atividade, as duas primeiras etapas da *SEI* (Seção 2.1.1) foram contempladas. Neste caso, levando em conta o grau de abertura da atividade (Figura 3), a definição do problema e a escolha do método foram fechadas, mas com soluções abertas. Os alunos seguiram um roteiro de uso da modelagem computacional. Esta atividade exigiu dos alunos as seguintes dimensões do processo cognitivo de acordo com a Taxionomia de Blomm revisada: lembrar, entender, aplicar, analisar, avaliar, e criar (KRATHWOHL, 2002).

Foi observado que alguns poucos alunos não tinham facilidade em operar o computador. Alguns estavam mexendo na máquina pela primeira vez. Entretanto, isso não foi empecilho para que a atividade fosse concluída dentro do tempo de 50 minutos.

4.1.2 Segundo Encontro

No início da terceira aula, o experimento a ser realizado pelos alunos foi apresentado, detalhando as variáveis que poderiam ser modificadas, bem como o controle digital destas via tablet. Assim sendo, cada grupo realizou o procedimento experimental. De acordo com a Figura 3, a definição do problema e a escolha do método foram fechadas, enquanto que a solução do problema foi aberta. Nessa atividade, cada grupo ficou com a tarefa de encontrar duas figuras de Chladni para cada placa ferro, num total de quatro figuras de ressonância por grupo. Entretanto, 10 padrões de Chladni deveriam ser registrados de acordo com o roteiro experimental. A fim de facilitar a observação da formação das figuras por parte dos demais grupos, enquanto um grupo manipulava o experimento, os outros dois ficavam observando o surgimento das figuras de Chladni a partir da projeção de um data show em tela grande. Quando encontravam a frequência aproximada de ressonância, o experimento era pausado e todos os grupos anotavam essas frequências e desenhavam a figura formada no devido espaço contido no material. Inicialmente, alguns alunos ficaram na expectativa de que imediatamente algo acontecesse com os grãos de farinha, enquanto alteravam as frequências, e nada acontecia ainda. Entretanto, com um pouco de espera e paciência a primeira figura surgiu.

Nos últimos 20 minutos da quarta aula, os alunos discutiram e resolveram o problema disposto no roteiro experimental. Além disso, foi aplicada a Etapa 4 (Seção 2.1.1) do ensino por investigação em que os alunos escreveram, fora do ambiente da aula, o que aprenderam nesses encontros da aplicação do produto educacional.

4.1.3 Terceiro Encontro

Na aula cinco, com todos os alunos reunidos, os resultados de cada grupo foram apresentados a partir de cada um dos seus escribas. Neste encontro, ocorreu a aplicação da Etapa 3 (Seção 2.1.1) do ensino por investigação em que houve uma discussão ampla acerca do tema de ondulatória, juntamente com os resultados encontrados, a fim de tentar esclarecer alguns possíveis conceitos físicos e matemáticos que não ficaram tão claros para os alunos. A exemplo disso, houve o esclarecimento de como as micro-ondas proporcionam o aquecimento de um alimento. Ocorreu também a discussão acerca do porquê dos coeficientes lineares encontrados pelas duas turmas serem diferentes e não nulos, sendo que, pela teoria, deveriam ser zero.

Ao final da aula, um pós-teste foi aplicado com o intuito de verificar o que houve de mudança na aprendizagem de cada aluno.

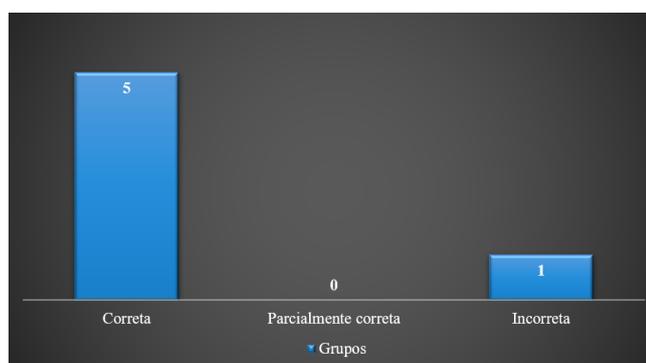
4.2 Resultados e Discussão

4.2.1 Atividade com Modelagem Computacional

Nesta atividade, inicialmente os alunos acessaram o ambiente de modelagem computacional no GeoGebra e seguiram alguns procedimentos antes de responderem os questionamentos. Este estarão dispostos a seguir juntamente com as análises referentes às respostas dos alunos.

Questão 5 - *Como é chamada a região em que o ponto permaneceu parado? Numa situação real, qual seria o comportamento de uma partícula livre que estivesse em uma região de amplitude máxima? Como se chama essa região de máxima amplitude?*

Quadro 4 – Respostas dos grupos na Questão 5 da atividade computacional



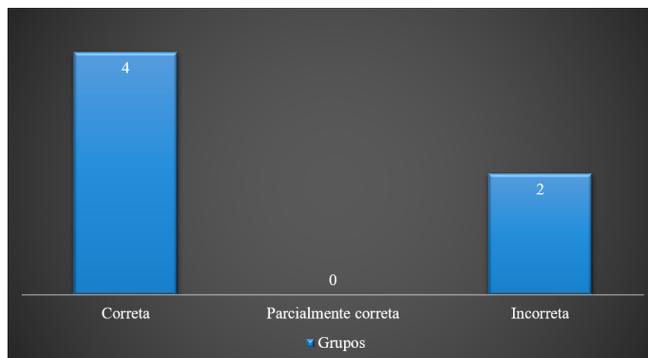
A grande maioria dos grupos respondeu de maneira satisfatória, ficando evidente que eles conseguiram relacionar a teoria da primeira aula com a atividade de modelagem computacional no GeoGebra. Cinco grupos responderam da seguinte forma:

- **Grupo A:** Linha nodal; ia vibrar; crista da onda.
- **Grupo B:** Linha nodal. Essa partícula se deslocaria para a linha nodal. Crista da onda.
- **Grupo C:** É chamada de linha nodal. Ela ficaria se deslocando, vibrando junto com a placa. Crista da onda.
- **Grupo E:** Linha nodal. A partícula rolaria até a linha nodal, onde não há vibrações. Crista da onda.
- **Grupo F:** Mínima amplitude. Vibraria mais e sairia do lugar. Crista da onda.

Questão 7 - *Insira os pontos e clique em Fixar Padrão. Depois clique em Distância e leve os pontos para duas linhas nodais paralelas consecutivas. Para isto, mova os*

pontos buscando o valor mais próximo do nivelamento igual a zero e anote o valor da distância entre os dois pontos. O que é essa distância medida entre os dois pontos?

Quadro 5 – Respostas dos grupos na Questão 7 da atividade computacional

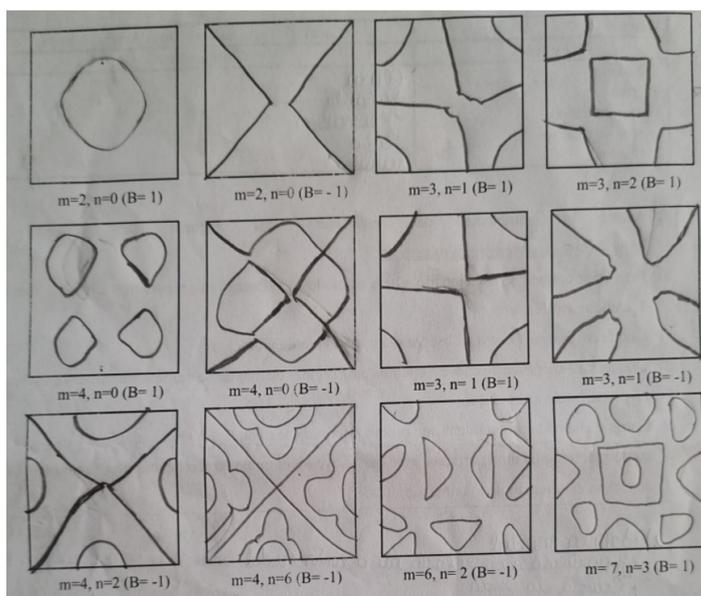


O procedimento foi seguido sem grandes dificuldades. Porém, dois grupos não responderam de maneira correta enquanto que os restante respondeu que a distância medida entre as duas linhas nodais se tratava da metade do comprimento de onda.

Questão 8 - Registrando as imagens e os modos de vibração abaixo, gere as figuras referentes aos seguintes padrões:

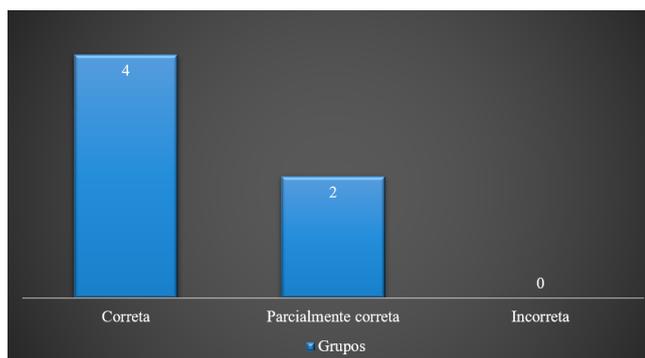
Abaixo estão os desenhos registrados por um dos grupos.

Figura 34 – Desenhos registrados pelos alunos a partir do GeoGebra



Questão 9 - O que deve ocorrer com a frequência de vibração da placa à medida que os modos de vibração m e n aumentam? O que deve acontecer com o comprimento de onda? O que se observa nas figuras?

Quadro 6 – Respostas dos grupos na Questão 9 da atividade computacional



Os grupos analisaram que, com o aumento dos modos de vibração, a frequência aumentou, o comprimento de onda diminuiu e mais linhas nodais iam se formando. Dois grupos não souberam expressar-se com respostas claras e completas.

4.2.2 Atividade Experimental com as Figuras de Chladni

Questão 1 - Utilizando a placa de ferro de $(25\text{ cm})^2$:

- Forme os padrões de Chladni para cinco (5) frequências de ressonância distintas.
- Anote os valores das frequências de ressonância e, através de desenhos, registre as imagens dos padrões de Chladni nos espaços abaixo.

Nessa questão, os grupos puderam manipular o experimento a partir das variáveis intensidade e altura. Eles conseguiram produzir pelo menos oito padrões estacionários de Chladni como se pode observar na Figura 36. Porém, apenas as cinco primeiras figuras de Chladni, juntamente com suas respectivas frequências de ressonância, foram registradas como se pode ver na Figura 35.

Figura 35 – Figuras de Chladni desenhadas na atividade experimental

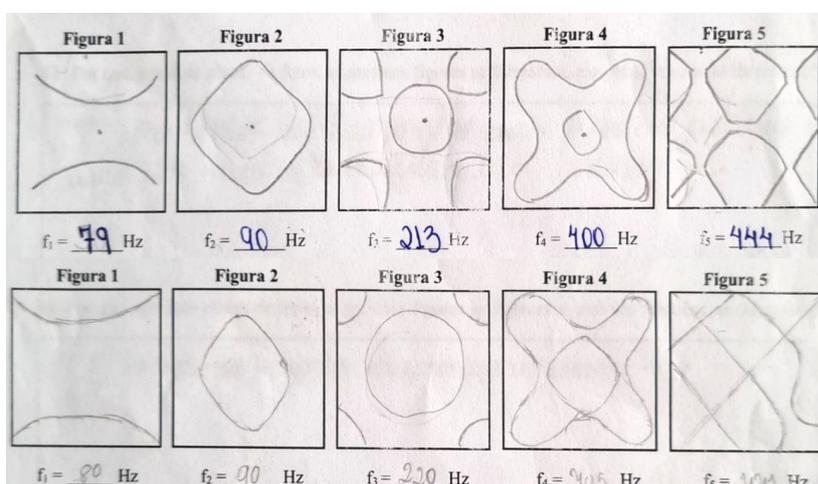
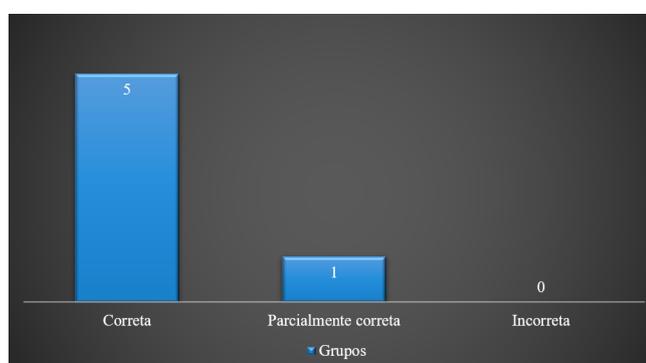


Figura 36 – Figuras de Chladni encontradas na atividade experimental



Questão 2 - *Quais são as variáveis utilizadas para controlar a vibração da placa?*

Quadro 7 – Respostas dos grupos na Questão 2 da atividade experimental



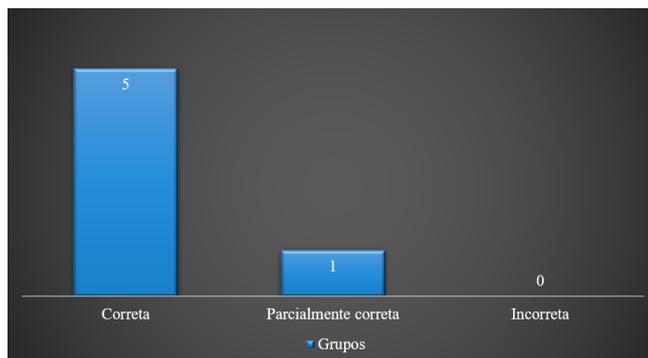
Neste experimento os alunos puderam formar as figuras através dos ajustes da frequência e do volume. Desta forma, os mesmos puderam perceber e distinguir uma variável da outra e suas relevâncias na formação dos padrões estacionários. Considerando o gráfico no Quadro 7, cinco grupos escreveram, como respostas para a questão, as variáveis intensidade (ou volume) e frequência. Somente um grupo escreveu frequência, deixando a resposta incompleta.

Questão 3 - *O que ocorre na placa metálica juntamente com os grãos quando apenas a frequência de vibração é modificada? E quando somente o volume da fonte é alterado?*

De acordo com o gráfico no Quadro 8, a maioria dos grupos respondeu corretamente, escrevendo que, quando somente a frequência da fonte era modificada, novas figuras se formavam. Já a intensidade de vibração da placa aumentava.

Isso mostra que os alunos conseguiram lembrar-se dos conceitos sobre as qualidades fisiológicas do som, entender e aplicar as duas variáveis combinadas, conseguindo formar os padrões estacionários de Chladni.

Quadro 8 – Respostas dos grupos na Questão 3 da atividade experimental



Questão 4 - *Repita o mesmo procedimento do item “1)” para a placa de ferro (20 cm)², procurando encontrar as mesmas figuras já encontradas para a placa anterior. Anote os valores das novas frequências de ressonância.*

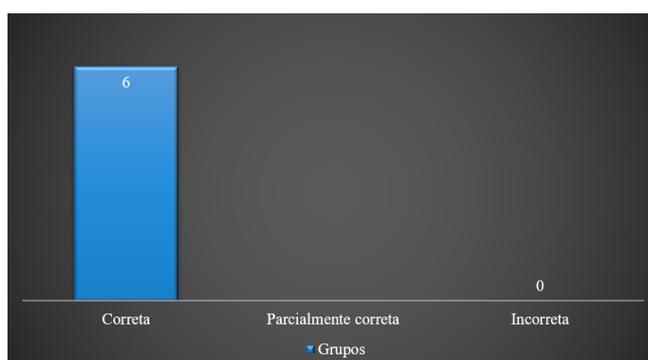
Figura 37 – Questão 4 da Atividade Experimental com as Figuras de Chladni

Figura 1 $f_1' = 121$ Hz	Figura 2 $f_2' = 123$ Hz	Figura 3 $f_3' = 333$ Hz	Figura 4 $f_4' = 600$ Hz	Figura 5 $f_5' = 689$ Hz
Figura 1 $f_1' = 118$ Hz	Figura 2 $f_2' = 128$ Hz	Figura 3 $f_3' = 338$ Hz	Figura 4 $f_4' = 600$ Hz	Figura 5 $f_5' = 686$ Hz

Na Figura 37, as cinco primeiras frequências foram registradas pela turma 1, e as cinco frequências restantes, registradas pela turma 2. Nas frequências f_4' e f_5' os ajustes se tornaram mais finos, possibilitando menor diferença entre os valores encontrados pelas duas turmas. Ainda é possível destacar que para a placa com menor área as frequências de ressonância utilizadas para formar as mesmas figuras foram maiores.

Questão 5 - *Por que, nas duas placas de ferro, as mesmas figuras se formaram, mas em frequências diferentes?*

Quadro 9 – Respostas dos grupos na Questão 5 da atividade experimental

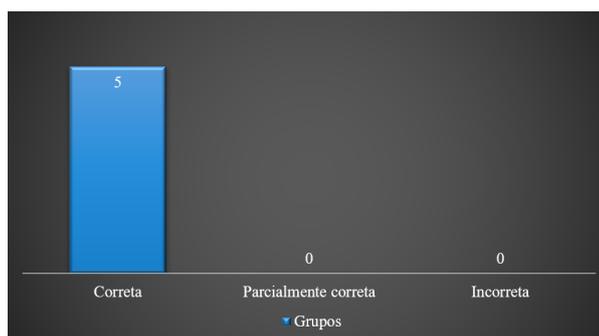


Esse resultado mostra que ficou óbvio para os alunos que o fato de as dimensões das placas terem sido alteradas influenciou nas frequências de ressonância das placas de ferro.

Questão 6 - A partir dos valores das frequências de ressonância das duas placas de ferro, trace um gráfico de $f' \times f$, utilizando a planilha de dados no Excel, onde f' e f são as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20 \text{ cm})^2$ e $(25 \text{ cm})^2$ respectivamente.

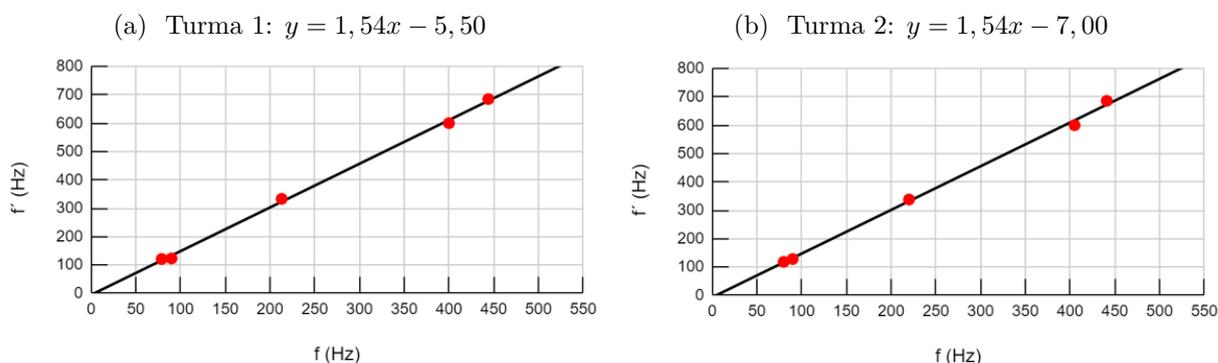
- Perceba que, no gráfico, é criada uma função da forma $y = ax + b$. Compare-a com $f' = a \cdot f$, e anote o valor do coeficiente angular a .
- Calcule o quociente entre as áreas das placas de ferro $(25 \text{ cm})^2$ e $(20 \text{ cm})^2$.
- De acordo com os itens anteriores, qual o significado matemático do coeficiente angular a .

Quadro 10 – Respostas dos grupos na Questão 6 da atividade experimental



Após os alunos perceberem que haveria uma conexão entre a frequência de ressonância e as dimensões das placas, seria importante que encontrassem aproximadamente o fator matemático que relacionava essas duas grandezas físicas.

Figura 38 – Gráficos de $f' \times f$ obtidos pelos alunos



A partir dos gráficos (Figura 38) gerados pelos alunos, podemos observar que os coeficientes angulares encontrados foram os mesmos, $a = 1,54$. Em seguida, os grupos

calcularam o quociente entre as áreas das placas e encontraram o valor $(L/L')^2 = 1,56$. A partir desses dois valores, concluíram que o coeficiente angular era aproximadamente igual ao quociente entre as áreas das placas.

O Grupo F não entregou o item *c* respondido. Contudo, de acordo com o Quadro 10, cinco grupos concluíram respondendo corretamente apesar dos valores obtidos nos itens a e b serem diferentes, mas próximos. Pela teoria (Equação 2.24), considerando placas de mesmo material e de mesmas espessuras, as frequências de ressonância destas, são inversamente proporcionais ao quadrado do lado.

$$f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante$$

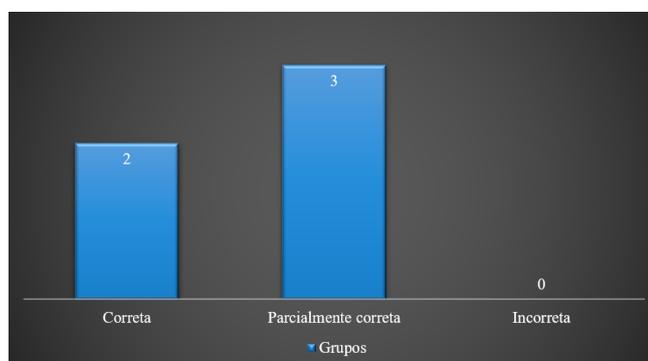
Logo, chegamos à seguinte relação entre as frequências e as dimensões para as duas placas de mesmo material:

$$f' = \frac{L^2}{L'^2} \cdot f$$

Pode-se observar que o coeficiente linear é zero diferentemente dos valores encontrados pelos grupos na Figura 38. É importante que essas diferenças sejam destacadas no último encontro da sequência didática, citando as incertezas que fazem parte do erro experimental.

Questão 7 - *O que aconteceu com a frequência de ressonância da placa de ferro quando se diminuiu o comprimento desta, mantendo a mesma espessura, para formar a mesma figura? Relacionando a resposta anterior à equação $f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante$, o que se pode concluir sobre a relação da frequência de ressonância e o comprimento de uma mesma placa quadrada?*

Quadro 11 – Respostas dos grupos na Questão 7 da atividade experimental



Ainda o Grupo F não respondeu esta última questão, provavelmente não conseguiu terminar a atividade em tempo hábil. Os demais grupos conseguiram responder de forma que os grupos B e C concluíram que quanto menor a placa, maior teria que ser a frequência

aplicada para se formar a mesma figura. Os Grupos A, D e E responderam de forma coerente e incompleta.

Nesta questão, o ideal seria que os grupos destacassem a relação de proporção inversa entre a frequência de ressonância e o quadrado do lado da placa metálica. Como isto não aconteceu, essa relação foi discutida na última aula da aplicação deste produto educacional de acordo com a Etapa 3 (Seção 2.1.1) do ensino por investigação.

4.2.3 Atividade Experimental e Modelagem Computacional

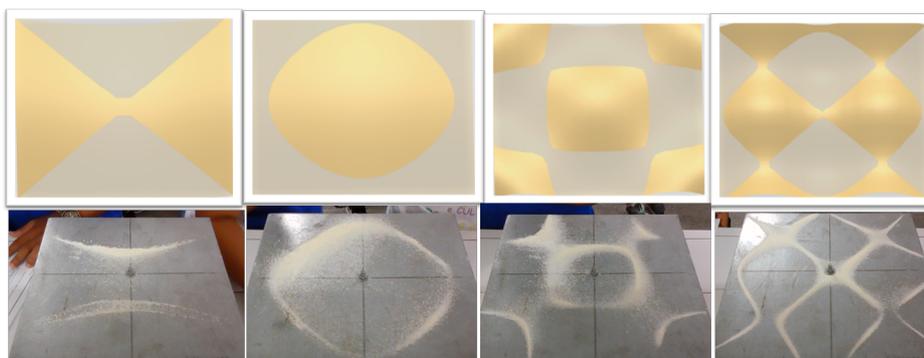
Questão 1 - *O que se observa nas figuras das placas de ferro? Encontrou alguma figura semelhante àquelas observadas no GeoGebra? Quais?*

Quadro 12 – Questão 1 da Atividade Experimental e Computacional

Placa	Frequências de ressonância (Hz)				Modos de vibração (m,n)			
Ferro (25 cm)²	79	90	213	444	(2,0)	(2,0)	(3,2)	(4,0)

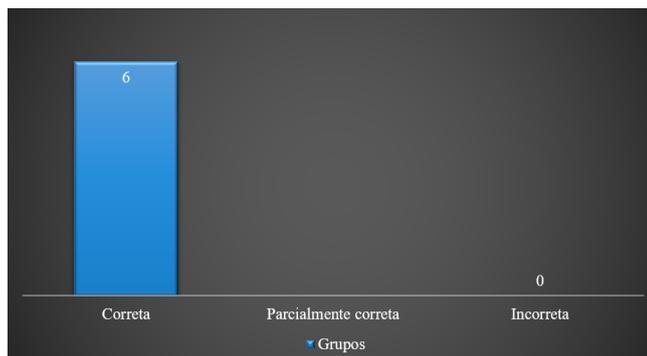
No Quadro 12 estão as frequências destacadas pelos alunos da turma 1, juntamente com os modos de vibração registrados na Figura 34. As demais frequências registradas pelos grupos da turma 2 estão na Figura 35. De modo geral, essas foram as figuras (Figura 39) encontradas pelos alunos através da modelagem no GeoGebra e através do experimento de Chladni:

Figura 39 – Figuras registradas pelos alunos através da modelagem e do experimento



Questão 2 - *De acordo com o que observaram na modelagem e no experimento, expliquem como as figuras de Chladni se formam. Por que os grãos se concentram em determinadas regiões da placa?*

Quadro 13 – Questão 2 da Atividade Experimental e Computacional



Nesta questão, os grupos puderam fazer uma análise do experimento de Chladni através dos grãos de farinha com o movimento dos pontos na modelagem computacional. A partir disto, todos os grupos concluíram que as Figuras de Chladni se formam porque os grãos se concentram em regiões da placa que não vibram, chamadas de linhas nodais.

Questão 3 - *O que vocês acharam do experimento e da atividade realizada?*

Grupo A: Foi interessante, pois podemos ver a física de uma maneira mais fácil de entender.

Grupo B: Foi um experimento bem legal, podemos entender um pouco mais sobre frequência na prática.

Grupo C: Foi muito interessante. Conhecemos outros objetivos. Um estudo muito bom.

Grupo D: Foi bem legal e interessante, mas um pouco barulhenta.

Grupo E: Foram interessantes e acrescentou no nosso aprendizado.

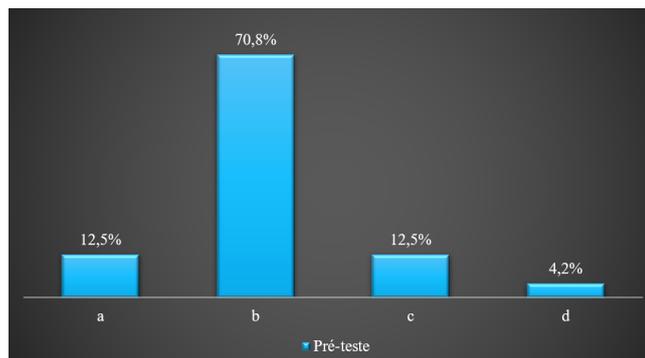
Grupo F: Muito divertido, legal e interessante.

4.2.4 Pré-teste e Pós-teste

I. *Sobre acústica, marque uma opção.*

- a) *Não me interessa*
- b) *Interessa-me pouco*
- c) *Interessa-me bastante*
- d) *Não sei responder*

Quadro 14 – Teste diagnóstico - Questão I

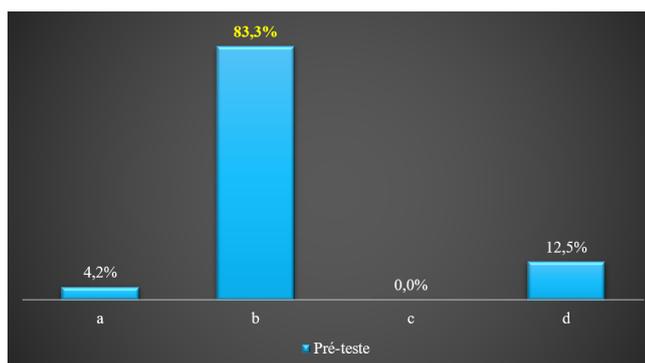


II. *O alto falante é um componente eletrônico que transforma sinais elétricos em som. Neste, existe um diafragma que se desloca para frente e para trás, de acordo com os sinais elétricos enviados, produzindo ondas de pressão que se propagam através do ar até os nossos ouvidos.*

Quando se aumenta o volume de um alto falante, ocorre mudança

- a) *Na altura da onda que se propaga*
- b) *Na amplitude da onda que se propaga*
- c) *Na velocidade da onda que se propaga*
- d) *Na frequência da onda que se propaga*

Quadro 15 – Teste diagnóstico - Questão II



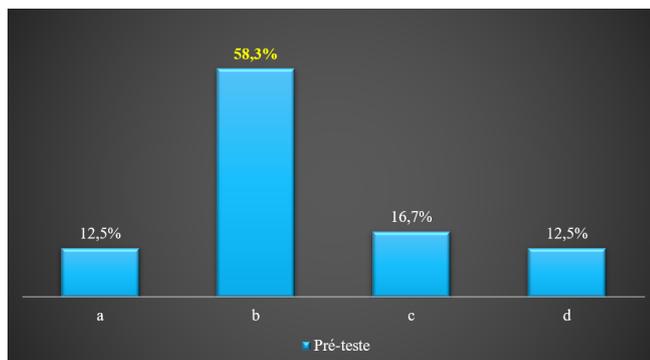
Esse resultado mostra que a grande maioria dos alunos tinha conhecimento da definição de intensidade sonora. Porém, cerca de 16,5% do alunado ainda tinha dificuldade em lembrar ou reconhecer a relação de volume com amplitude.

III. *Dada a função $y = 5x + 1$, marque a opção que corresponde ao valor do coeficiente angular.*

- a) *y*

- b) 5
- c) x
- d) 1

Quadro 16 – Teste diagnóstico-Questão III

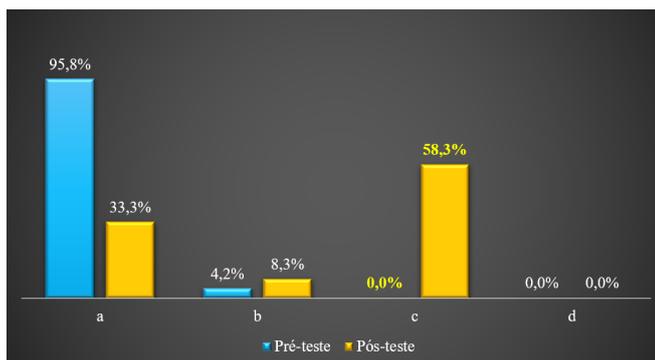


Apesar de a maioria dos alunos saberem identificar o coeficiente angular, foi necessário falar, de forma breve, sobre coeficiente angular e linear na primeira aula da sequência didática. Isso foi necessário já que os grupos precisariam identificar o coeficiente no roteiro do experimento de Chladni com as placas de ferro.

IV. *Considere uma placa metálica, com extremidades livres, vibrando com certa quantidade de areia depositada sobre ela. Na figura seguinte, é possível observar que há acúmulo de grãos de areia em algumas regiões da placa. Isso se dá ao fato de, nessas regiões de acúmulo de areia,*

- a) *a vibração gerar forças de atração entre os grãos e a placa*
- b) *a velocidade de propagação da onda mecânica ser zero*
- c) *a amplitude de vibração ser mínima*
- d) *a altura da onda mecânica ser zero*

Quadro 17 – Teste de aprendizagem - Questão IV

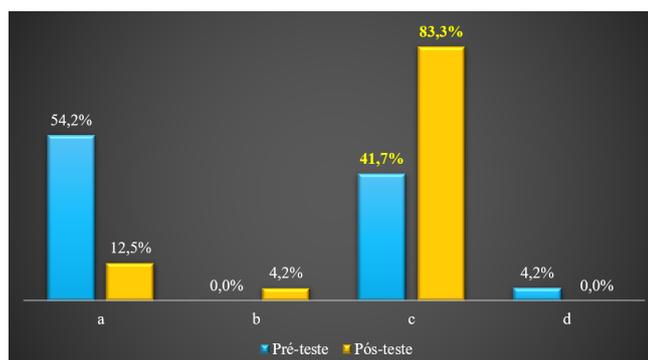


Podemos destacar que antes da aplicação do produto educacional, praticamente cem por cento dos alunos achavam que existia uma força de atração que atraia os grãos na placa, enquanto que nenhum aluno optou pela resposta correta. Após a aplicação do produto, cerca de 33,3% ainda continuaram com a mesma opção de resposta. Isso se deve provavelmente ao fato de a concepção alternativa estar bastante impregnada nesses alunos. Entretanto, é importante enfatizar que o número de acertos saltou de 0% para 58,3%.

V. *Tomemos o exemplo de grãos de areia sobre uma placa metálica. Se essa placa for perturbada com uma vibração externa com frequência que varia, os grãos de areia:*

- a) *Irão sempre vibrar*
- b) *Nunca irão vibrar*
- c) *Nem sempre irão vibrar*
- d) *Não sei responder*

Quadro 18 – Teste de aprendizagem - Questão V



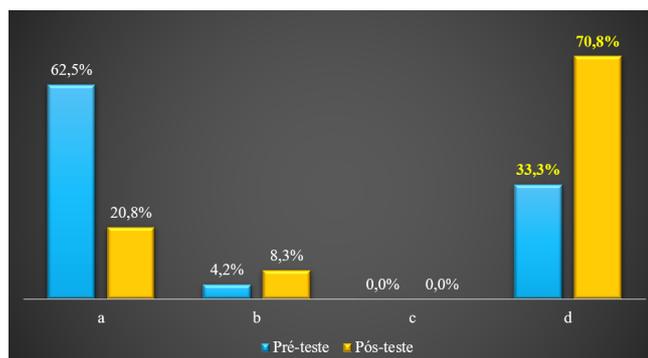
O gráfico mostra que antes da *SEI* ocorreu praticamente uma divisão de respostas entre os itens *a* e *c*. Porém, após a *SEI*, muitos que achavam que os grãos iriam sempre vibrar acabaram entendendo que os mesmos vibravam somente em algumas frequências, e migraram para o item *c*.

VI. *Em qual das opções NÃO está presente o fenômeno ondulatório da ressonância?*

- a) *Um alimento sendo aquecido através do forno micro-ondas.*
- b) *Uma taça sendo quebrada com o grito.*
- c) *Um violão emitindo um som*
- d) *Um garoto escutando a conversa atrás do muro*

A partir do gráfico, podemos identificar que inicialmente 62,5% dos alunos não sabiam que o aquecimento de um alimento através das micro-ondas ocorria por ressonância.

Quadro 19 – Teste de aprendizagem - Questão VI

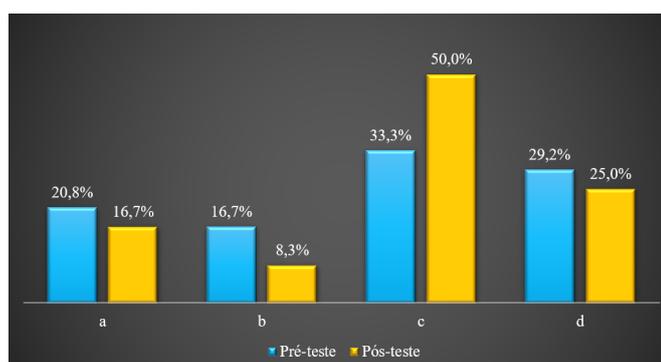


Desta forma, foi necessário discutir essa temática no último encontro. Com isso, o percentual de acertos aumentou para 70,8%.

VII. *Marque a opção que corresponde ao grau de facilidade que você tem para operar um computador.*

- Nunca mexi em um computador*
- Não tenho facilidade em operar um computador*
- Tenho alguma noção em operar um computador*
- Tenho facilidade em operar um computador*

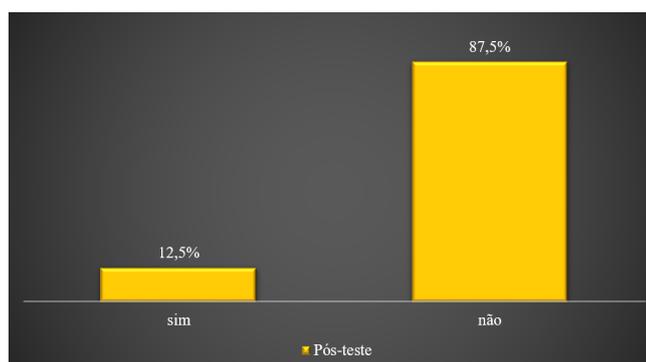
Quadro 20 – Teste de aprendizagem - Questão VII



Podemos entender através do gráfico que, antes da aplicação do produto, 37,5% dos alunos nunca haviam mexido em um computador ou não tinha facilidade em operar um computador. Com a manipulação da modelagem no GeoGebra, os alunos puderam aprender a lidar com instrumentos como o computador que faz parte do tempo atual deles. Desta forma, a porcentagem de alunos que tem alguma noção ou facilidade em operar um computador passou de 62,5% para 75,0%.

VIII. *Você teve dificuldade para operar o software de modelagem computacional? Caso sim, qual foi a dificuldade?*

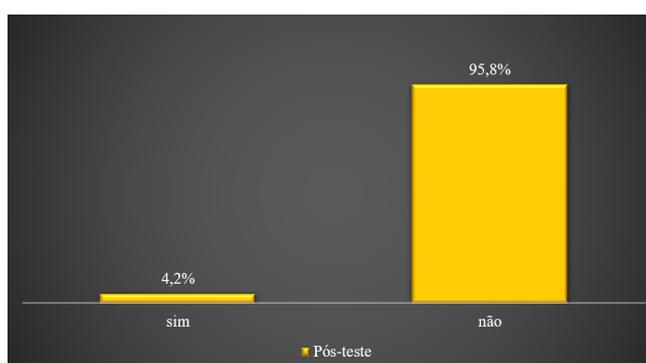
Quadro 21 – Teste de aprendizagem - Questão VIII



A partir das repostas no gráfico, 12,5% (3 alunos) disseram que tiveram dificuldade para operar o software de modelagem computacional por não saberem mexer direito no computador. Como a atividade foi em grupo, isso não foi empecilho para o desenvolvimento dessa atividade. Podemos destacar ainda que o resultado foi bastante satisfatório já que, além de a grande maioria dos alunos não terem dificuldade em operar o GeoGebra, desses 87,5%, 25% dos alunos tinham no mínimo alguma dificuldade em operar o computador. Esses dados reforçam que é possível executar o roteiro de modelagem computacional de forma cooperativa, mesmo com dificuldade em operar um computador.

IX. *Você teve dificuldade para operar o experimento? Caso sim, qual foi a dificuldade?*

Quadro 22 – Teste de aprendizagem - Questão IX



Apenas um aluno teve dificuldade em operar o experimento. Segundo o mesmo, na hora de espalhar os grãos na placa para formar as figuras. Podemos destacar algumas falas dos que não tiveram dificuldade.

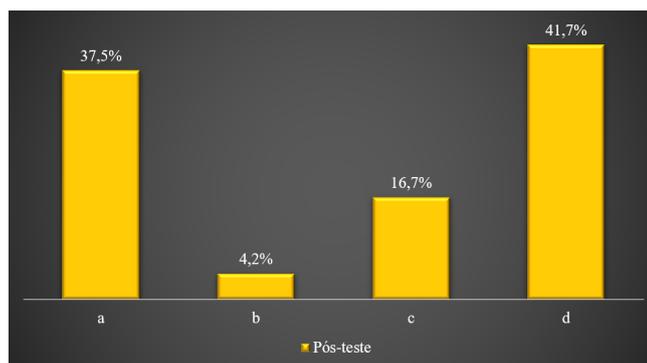
- Não, foi fácil com a ajuda do grupo
- Não, pois seguimos as etapas que estavam no roteiro
- Não, meus companheiros eram bem espertos

Essas falas mostram a importância do trabalho cooperativo no desenvolvimento e resolução de problemas. É importante ressaltar que nenhum dos alunos teve dificuldade em entender e seguir o roteiro. Isso é de suma importância, pois, desta forma, qualquer professor que pretender aplicar esse experimento juntamente com o roteiro terá mínima chance de ter algum problema ou contratempo com sua execução.

X. *O que mais lhe ajudou a entender ressonância em placas?*

- a) *A teoria e o experimento*
- b) *A teoria e a modelagem computacional*
- c) *A modelagem computacional e o experimento*
- d) *A teoria, a modelagem computacional, e o experimento*

Quadro 23 – Teste de aprendizagem - Questão X



O gráfico mostra que a teoria, a modelagem e o experimento foram muito importantes para a aprendizagem dos alunos. As respostas foram bem divididas entre os itens *a* e *d*. Podemos perceber que a porcentagem de alunos que votou no item *a* (37,5%), com a ausência da modelagem computacional, corresponde exatamente ao número de alunos que nunca havia mexido em um computador ou não tinha facilidade em operar um computador (Quadro 20).

XI. *Conte o que aprendeu com essas atividades da aula. Diga também o que mais lhe chamou atenção.*

Segue o que alguns alunos escreveram:

Aluno 1 - A ter paciência para atingir o resultado. As imagens se formando através dos grãos.

Aluno 2 - Eu aprendi mais sobre a física, e que ela é mais legal, fazendo na prática, e aprendi sobre frequência, volume que é a intensidade.

Aluno 3 - A forma diferente de aprender com experimentos.

Aluno 4 - Eu aprendi porque determinada parte da placa não vibra e como é chamada (linha nodal). Aprendi o que é frequência, intensidade, Hz, som. Os três pontos principais me chamaram atenção: a parte computacional do sistema, o experimento na prática com as placas na farinha muito incrível como é movimentar pelo tablet a frequência, e a placa vibra, e como os números se encaixam entre frequências.

Aluno 5 - Eu aprendi mais sobre a física, e que ela é mais legal, fazendo na prática, e aprendi sobre frequência, volume que é a intensidade.

XII. *Relate de forma breve alguma experiência sua com a ondulatória.*

A seguir temos os relatos de alguns alunos:

Aluno 6 - Quando coloquei um pouco de água na caixinha de som e de acordo com o grave da música a água pulsava.

Aluno 7 - Eu aprendi mais sobre a física, e que ela é mais legal, fazendo na prática, e aprendi sobre frequência, volume que é a intensidade.

Aluno 8 - Tocar violão, esquentar um alimento no micro-ondas, Fazer ligação, receber mensagem. Escutar música.

Aluno 9 - Quando eu utilizo o micro-ondas que eu não sabia o que acontecia para a comida esquentar e agora sei. Por manusear caixa de som e não saber porque o áudio não saia bem e o volume todo aumentado. Mas agora sei que depende também daqueles três que tem e significa grave, médio e agudo. Quando toco violão. Quando fui tirar raio X. Quando me balanço em um balanço por diversão naqueles parques e agora abrillantando o meu currículo esse maravilhoso experimento com placas metálicas no CEJAL com o professor e minha turma do 2º A.

Aluno 10 - Quando joguei uma pedra no rio. E nas aulas de física.

Pode-se destacar desses relatos que os alunos tomaram consciência dos fenômenos ondulatórios que estão no cotidiano deles até então não percebidos. Eles puderam refletir sobre momentos de suas vidas em que a física se fez e continua presente.

5 Considerações Finais

Neste trabalho de mestrado foi estudado a vibração de placas metálicas através da formação e da análise das Figuras de Chladni. Para isso, foi criado um experimento de laboratório de baixo custo e de fácil montagem que pode ser controlado via smartphone ou tablet. Além disso, foi desenvolvido um aplicativo de modelagem computacional por meio do GeoGebra, representando virtualmente os padrões estacionários de Chladni para a placa quadrada de extremidades livres. A análise visual das Figuras de Chladni apresentadas no aplicativo de interface gráfica matemática mostrou que a modelagem computacional simulou aproximadamente bem a realidade do experimento com as placas metálicas, estando em conformidade com o que Leissa (1993) escreveu a partir de um compilado de estudos.

A metodologia ensino por investigação foi utilizada no desenvolvimento das atividades de modo que os alunos trabalharam conforme a dinâmica de grupo cooperativo. De acordo com a observação da aplicação do produto e análise dos resultados, essa estratégia de ensino se mostrou eficiente. A grande maioria dos alunos, 87,5%, não teve dificuldade em operar o software de modelagem computacional. Desses, 25% dos alunos nunca haviam mexido em um computador ou não tinham facilidade em operar um. Isso mostra que, mesmo diante dessa dificuldade, foi possível executar o roteiro de modelagem computacional de forma cooperativa.

A manipulação da modelagem no GeoGebra possibilitou algum desenvolvimento cognitivo dos discentes por intermédio do uso de um instrumento, o computador, que faz parte de uma construção histórica, cultural e, do cotidiano de todos. Alunos que não sabiam mexer em um computador passaram a ter alguma noção. A porcentagem de alunos que tem alguma noção ou facilidade em operar um computador aumentou 20% em comparação com a condição anterior à utilização do software.

O resultado do experimento com as figuras de Chladni mostrou que praticamente nenhum aluno teve dificuldade em operar o aparato experimental. Desta forma, qualquer professor que pretender aplicar esse experimento, juntamente com o roteiro, não terá algum problema com sua execução. Foi notório em falas dos alunos que as Figuras de Chladni formadas chamaram a atenção deles e serviram de motivação para buscarem o estudo e a compreensão da teoria relacionada aos padrões bidimensionais.

A modelagem e o experimento permitiram aos alunos a relação entre a teoria e a prática experimental. Todos os grupos conseguiram explicar de forma correta como os padrões estacionários de Chladni se formam. Foi possível ainda encontrar a relação entre as frequências de ressonância das duas placas de ferro através da análise do coeficiente angular

no gráfico gerado. A partir das etapas do ensino investigativo, os alunos puderam relacionar o que aprenderam durante as atividades realizadas com os fenômenos do cotidiano deles que até então não tinham consciência da física se fazendo presente.

Antes da aplicação do produto na escola, alguns testes foram feitos com placas de ferro, alumínio e aço. Podemos destacar o experimento feito com as placas quadradas de ferro com lados de 25 *cm* e 20 *cm* e espessuras de 1 *mm*. Nestas, vários testes de frequências foram feitos para o mesmo padrão estacionário a fim de encontrar um intervalo de confiança para cada Figura de Chladni formada, sendo relevante ao professor que pretenda aplicar esse experimento, pois garante que qualquer valor medido pelos alunos estará dentro do intervalo estimado, não gerando dúvidas quanto a validade dos resultados experimentais. A partir de nove valores de frequências de ressonância com suas respectivas incertezas de ambas as placas, um gráfico foi gerado apresentando um coeficiente angular de $1,534 \pm 0,002$. Em comparação com o valor teórico de 1,56, o resultado mostrou que o experimento teve ótima exatidão e precisão com incerteza relativa de aproximadamente 0,13% e erro relativo dado por 1,9%.

O produto educacional introduziu abordagens contextualizadas sobre a fabricação de caixas acústicas, como do violino e violão; possibilitou relações entre a física, a história das ondas mecânicas e, as aplicações das ondas sonoras no campo da música; permitiu aos alunos competências para extraírem informações através do tratamento de dados com a análise de gráficos; proporcionou habilidades com a manipulação da modelagem e do experimento, e montagem de um gráfico; promoveu o conhecimento a partir do significado das linhas nodais e de como os grãos se acumulam nelas formando as Figuras de Chladni. Desta forma, o presente trabalho cumpriu com as expectativas da BNCC: contextualização, interdisciplinaridade, competências, habilidades, conhecimentos.

Referências

- BAPTISTA, M. Concepção e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico. 2010. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1854>>.
- BLANCAS, P. G. *PFC: IMPLEMENTACIÓN DE PRÁCTICAS DE DINÁMICA ESTRUCTURAL EN EL LABORATORIO*. 2011. <<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60109/fichero/4.Vibraci%C3%B3n+de+una+placa+cuadrada%252FVIBRACI%C3%93N+DE+UNA+PLACA+CUADRADA.pdf>>. Acessado em 25/04/2021.
- BRACHO, L. A. C.; PRIETO, J. L.; SÁNCHEZ, I. C.; ARAUJO, R. E. G. Uma experiência de elaboração de um simulador com geogebra para o ensino do movimento parabólico. *Paradigma*, Instituto Pedagógico de Maracay, n. 2, p. 196–217, 2019.
- CARVALHO, A. M. P. d. et al. Ensino por investigação: condições para implementação em sala de aula. *São Paulo: Cengage Learning*, 2013.
- CLEOPHAS, M. das G. Ensino por investigação: concepções dos alunos de licenciatura em ciências da natureza acerca da importância de atividades investigativas em espaços não formais. *Revista Linhas*, v. 17, n. 34, p. 266–298, 2016.
- COCHITO, M. Cooperação e aprendizagem: educação intercultural. *Lisboa: Acime*, p. 180, 2004.
- COELHO, L.; PISONI, S. Vygotsky: sua teoria e a influência na educação. *Revista e-PED*, v. 2, n. 1, p. 144–152, 2012.
- DONOSO, J. P.; TANNÚS, A.; GUIMARAES, F.; FREITAS, T. C. d. A física do violino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 2305–1, 2008.
- FLETCHER, T. D. R. a. N. H. *The Physics of Musical Instruments*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998. ISBN 978-1-4419-3120-7, 978-0-387-21603-4.
- GASPAR, A.; MONTEIRO, I. C. de C. Atividades experimentais de demonstrações em sala de aula: uma análise segundo o referencial da teoria de vygotsky. *Investigações em ensino de ciências*, v. 10, n. 2, p. 227–254, 2016.
- GEOGEBRA. 2021. <<https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>>. Acessado em 22/03/2021.
- GRILLO, M. L.; PEREZ, L. R. Física e música. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, 2016.
- GRILLO, M. L. N.; BAPTISTA, L. R. P.; BRANDÃO, L. P. Ensino de física contextualizado através da história, da filosofia e da música. 2013.
- HENRIQUE, L. *Acústica musical*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. (Manuais universitários). ISBN 9789723109870. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5h3FGwAACAAJ>>.

- IVIC, I.; VYGOTSKY, L. S. Tradução de José Eustáquio Romão. Org: Edgar Pereira Coelho. *Coleção Educadores MEC. Recife: Fundação Nabuco, Editora Massangana*, 2010.
- JÚNIOR, J. M. da S.; COELHO, G. R. O ensino por investigação como abordagem para o estudo do efeito fotoelétrico com estudantes do ensino médio de um instituto federal de educação, ciência e tecnologia. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 37, n. 1, p. 51–78, 2020.
- KRATHWOHL, D. R. A revision of bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, Taylor & Francis, v. 41, n. 4, p. 212–218, 2002.
- LEISSA, A. *Vibration of Plates*. [S.l.]: Asoa, 1993.
- LIMA, K.; PEREIRA, P.; LIMA, J. Ensino de ciências por investigação em ciências biológicas: revisão sistemática de literatura em artigos de periódicos nacionais classificados no qualis. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 12, n. 1, p. 1–34, jan. 2021. Disponível em: <<http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2739>>.
- LIMA, M. A. de. *USO DAS FIGURAS DE CHLADNI NO ENSINO DE FÍSICA*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2020.
- LIMA, P. H. R. d. Análise modal experimental de placa flexível acoplada à cavidade acústica por vibrometro laser. 2017.
- MARTINS, L. A.-C. P. História da ciência: objetos, métodos e problemas. *Ciência & Educação (Bauru)*, SciELO Brasil, v. 11, n. 2, p. 305–317, 2005.
- MELO, G. F. d. *O USO DO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NO ENSINO DE OSCILAÇÕES E CONCEITOS DE ONDA*. Dissertação (Mestrado), 2021.
- MONK, J. D. M. *Learning To Teach Science: Activities For Student Teachers And Mentors*. 1. ed. [S.l.]: Taylor Francis Group, 1995. ISBN 0-203-39254-X.
- MOREIRA, M. A. *Teorias de aprendizagem*. [S.l.]: Editora pedagógica e universitária São Paulo, 1999. v. 2.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. 4. ed. [S.l.]: Editora Blucher, 2002. v. 2.
- PEREIRA, A.; JUNIOR, P. L. Implicações da perspectiva de wertsch para a interpretação da teoria de vygotsky no ensino de física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 31, n. 3, p. 518–535, 2014.
- RIBEIRO, A. Desenvolvimento de simulações em geogebra para o ensino da cinemática. Universidade Federal do Maranhão, 2019.
- RODRIGUES, C. G. *Ondas, Acústica, Psicoacústica e Poluição Sonora*. [S.l.: s.n.], 2020. ISBN 978-65-00-06846-7.
- SANTOS, R. S. d.; FILHO, P. S. d. C.; ROCHA, Z. d. F. D. C. Descobertas sobre a teoria do som: a história dos padrões de chladni e sua contribuição para o campo da acústica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018.

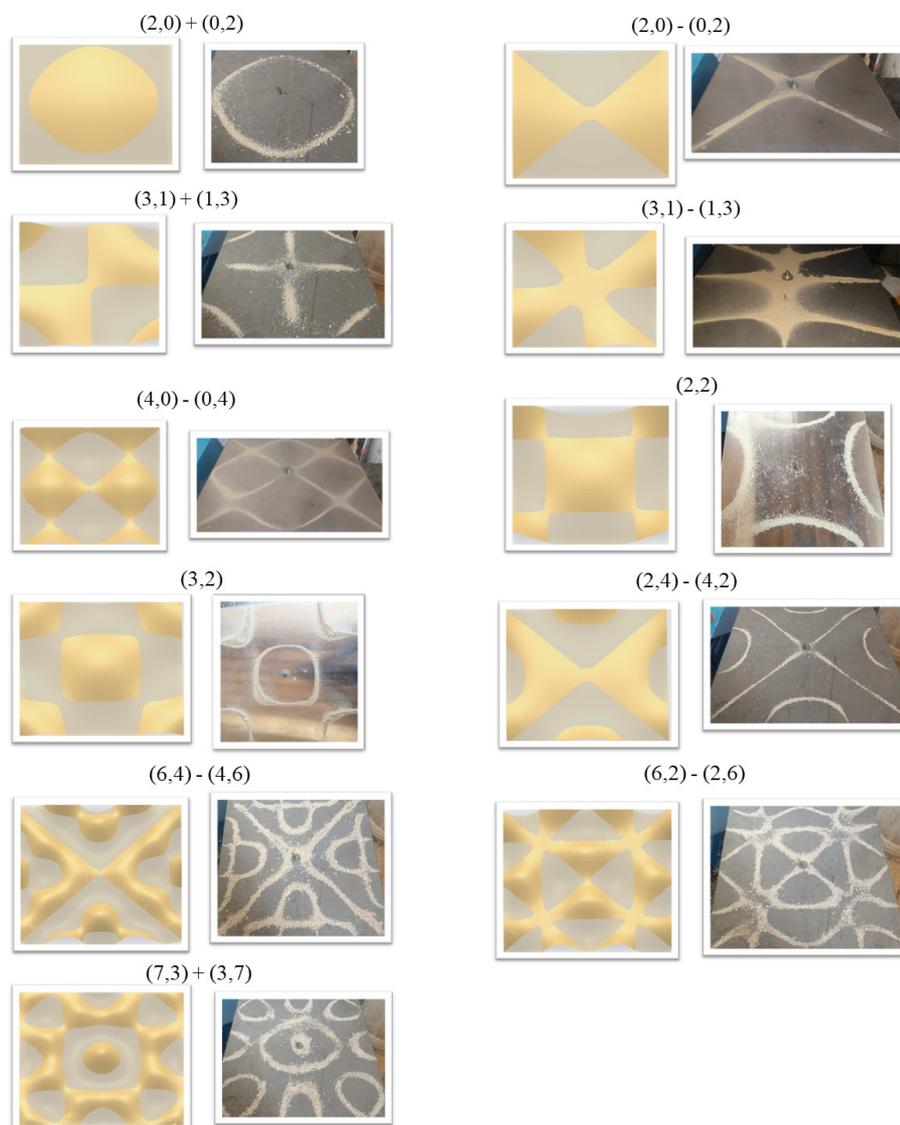
- SANTOS, R. S. d. et al. *Estudo da influência das affordances para aprendizagem de ressonância em meios materiais por meio dos padrões de Chladni*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- SANTOS, R. S. dos. *PADRÕES SONOROS DE CHLADNI*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- SCARPA, D. L.; CAMPOS, N. F. Potencialidades do ensino de biologia por investigação. *Estudos avançados*, SciELO Brasil, v. 32, n. 94, p. 25–41, 2018.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. *Física para Cientistas e Engenheiros*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. v. 2. ISBN 978-85-221-1336-1.
- SILVA, W. d. O. *UMA SEQUÊNCIA DE AULAS PARA O ESTUDO DE ONDAS COM AUXÍLIO DAS FIGURAS DE CHLADNI*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Roraima, 2018.
- SOUZA, R. A.; GRACIANO, M. R. da S.; FIELDS, K. A. P. *Ensino por investigação*. [S.l.: s.n.], 2018. ISBN 978-85-400-2467-0.
- VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. *São Paulo, Martins*, 1991.
- VYGOTSKY, L. S. A construção do pensamento e da linguagem. *Trad. Paulo Bezerra, Martins fontes São Paulo*, v. 2, 2001.
- WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 168, n. 1, p. 371–384, 1954. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1954_168_040_02>.
- WELLINGTON, J. *Secondary science: Contemporary issues and practical approaches*. [S.l.]: Routledge, 2002.
- ZÔMPERO, A. F.; LABURÚ, C. E. Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos históricos e diferentes abordagens. *Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)*, SciELO Brasil, v. 13, n. 3, p. 67–80, 2011.

APÊNDICE A – Resultados Esperados

A.1 Modelagem Computacional das Figuras de Chladni

A fim de analisar e representar virtualmente alguns dos padrões de Chladni para o problema da placa quadrada com os quatro lados livres, foi utilizado o ambiente matemático gratuito *GeoGebra* a partir das equações 2.31, 2.32, 2.33. Podemos destacar alguns dos resultados obtidos através do simulador em comparação com o experimento.

Figura 40 – Comparações de modos: modelagem x experimento



Fonte: Autor

Os resultados da modelagem e do experimento estão em conformidade com o que Leissa (1993) escreveu a partir de um compilado de estudos.

A.2 Experimento das Figuras de Chladni

A.2.0.1 Experimento com Placas de Ferro

Considerando a possibilidade de variações nos valores de frequência nas medidas durante a execução do experimento, uma série de variações de frequência foi realizada para um mesmo modo de vibração. Com esses valores foi possível estimar um valor médio para o modo de vibração escolhido, e, além disso, estimar uma incerteza para a medida. Decidiu-se adotar um modo rústico para obtenção da média e da incerteza. Um modo simples e que, ao mesmo tempo, iria garantir que qualquer valor medido pelos alunos estaria dentro do intervalo estimado, não gerando dúvidas quanto a validade dos resultados experimentais. Além de ser de simples aplicação para alunos e professores.

Neste modo, por exemplo, o valor médio não foi encontrado a partir de média simples, mas sim identificando dentro do intervalo de frequências obtido quais os valores máximo e mínimo encontrados para cada padrão estacionário. A partir disso, um intervalo de confiança de frequência foi estabelecido para cada figura de Chladni formada, de modo que:

$$p = f_{max} - f_{min}$$

Considerando esta abordagem, a incerteza é calculada por:

$$\delta = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$$

Desta forma, existe a garantia de que a frequência de ressonância f medida para cada padrão estacionário esteja entre f_{min} e f_{max} , $f_{min} < f < f_{max}$. Como o valor verdadeiro da frequência de ressonância não é conhecido, fizemos uma estimativa da medida por meio do valor médio do intervalo de confiança:

$$\bar{f} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

Desta forma, o valor da frequência de ressonância para cada figura de Chladni corresponde a:

$$f = \bar{f} \pm \delta$$

Na Tabela 4 temos as frequências de ressonância para nove padrões estacionários com suas incertezas, onde f' e f representam as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$ respectivamente.

Tabela 4 – Frequências de ressonância nas placas de ferro

$f'(Hz) : (20\text{ cm})^2$	$f(Hz) : (25\text{ cm})^2$
$79,0 \pm 3,0$	$119,5 \pm 1,5$
$88,5 \pm 1,5$	$125,5 \pm 2,5$
$216,5 \pm 0,5$	$335,0 \pm 5,0$
$291,5 \pm 0,5$	$454,5 \pm 0,5$
$404,5 \pm 7,5$	$605,0 \pm 5,0$
$442,0 \pm 2,0$	$686,0 \pm 1,0$
$569,0 \pm 5,0$	$875,0 \pm 5,0$
$587,5 \pm 0,5$	$903,5 \pm 0,5$
$615,5 \pm 0,5$	$950,5 \pm 0,5$

Na Figura 41, temos algumas das figuras de Chladni formadas utilizando uma placa de ferro quadrada de lado 25 cm e grãos de farinha.

Figura 41 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$



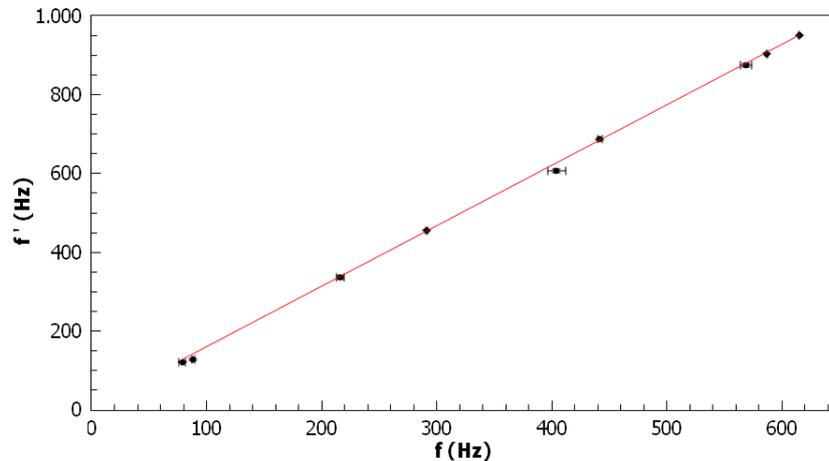
Fonte: Autor

A partir dos valores tabelados (Tabela 4) das frequências de ressonância para as duas placas de ferro, foi plotado um gráfico utilizando regressão linear como se pode observar na Figura 42.

Encontramos como coeficientes angular e linear $1,534 \pm 0,002$ e $5,2 \pm 0,8$ respectivamente. O próximo passo seria a comparação com os valores teóricos. A descrição da obtenção destes valores é descrita a seguir a partir da Equação 2.24.

Adotando placas de mesmo material e de mesmas espessuras, as frequências de ressonância destas são inversamente proporcionais ao quadrado do lado.

$$f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante \tag{A.1}$$

Figura 42 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro

Da Equação A.1 chegamos à seguinte relação entre as frequências e as dimensões para as duas placas de mesmo material:

$$f' = \frac{L^2}{L'^2} \cdot f \quad (\text{A.2})$$

Desta forma, tomando as placas de ferro de $(20 \text{ cm})^2$ e $(25 \text{ cm})^2$, encontramos o seguinte valor teórico do coeficiente angular:

$$\frac{L^2}{L'^2} = \frac{25^2}{20^2} = 1,56 \quad (\text{A.3})$$

A incerteza relativa foi de aproximadamente 0,13%. O erro relativo foi dado por 1,9%. Os resultados mostram que o experimento tem ótima exatidão e precisão. Ao analisar o resultado e o fato da média e da incerteza terem sido estimadas de forma rústica, conclui-se que o experimento dará “conforto” para quem precisa encontrar as frequências de ressonância, até mesmo estudá-las comparando com a teoria.

Tudo que foi mostrado e discutido é relevante para o professor que pretender aplicar esse experimento, principalmente pelo fato da Tabela 4 apresentar os intervalos de confiança das frequências que possivelmente os alunos devem encontrar.

A.2.0.2 Experimento com Placas de Alumínio

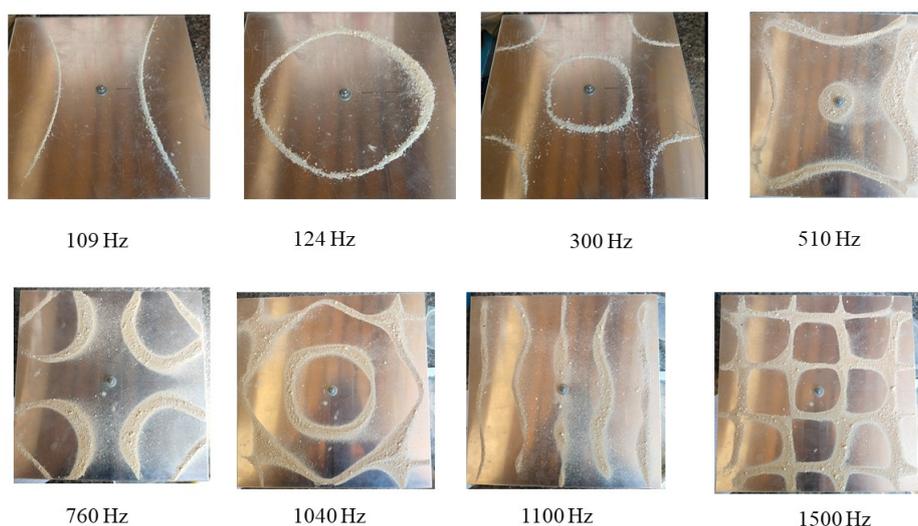
Desta vez, sem enfatizar as incertezas, buscando aproximadamente seguir o roteiro experimental do produto educacional de maneira prévia ao que os alunos fariam na escola durante a aplicação da atividade experimental, foram feitos testes também com placas de alumínio e de aço, utilizando areia da praia e também farinha. Ambos os resultados foram satisfatórios. Nas Figuras 45, 43, estão destacadas algumas das figuras geradas com suas respectivas frequências de ressonância.

Um resultado bem significativo também foi encontrado de acordo com o que se esperava da teoria (Equação 2.24). Foram geradas quatro figuras semelhantes em duas placas de alumínio de áreas diferentes, $(30\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$, mas com mesmas espessuras, 2 mm. Na Tabela 5, são apresentadas as frequências utilizadas para formar os quatro primeiros padrões da Figura 43.

Tabela 5 – Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões

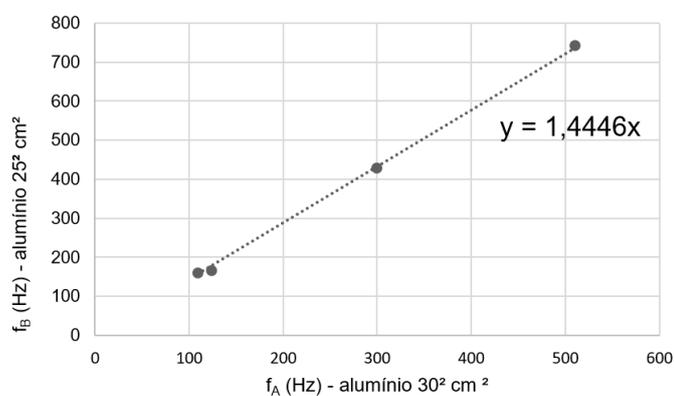
f_A - placa de alumínio 30^2 cm^2	f_B - placa de alumínio 25^2 cm^2
109 Hz	160 Hz
124 Hz	166 Hz
300 Hz	429 Hz
510 Hz	742 Hz

Figura 43 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$



Fonte: Autor

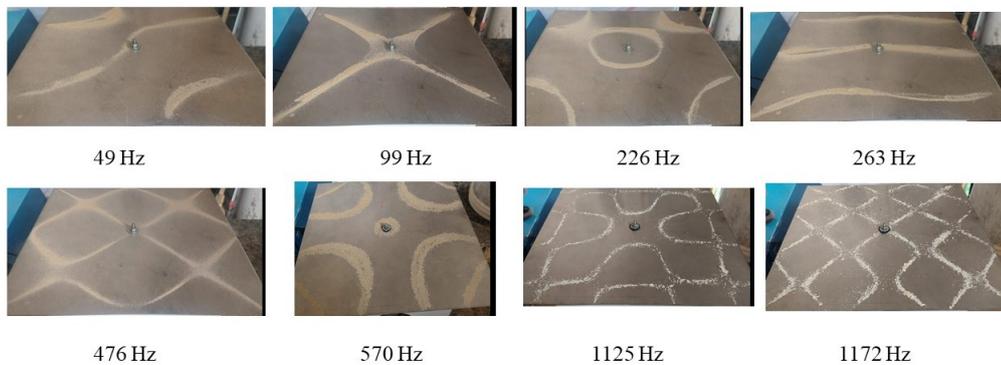
Figura 44 – Figura $f_B \times f_A$



Da Equação A.1, foi verificado a partir do gráfico (Figura 44) que o coeficiente angular está de acordo com a Equação A.2.

$$\frac{L_A^2}{L_B^2} = \frac{30^2}{25^2} = 1,44 \quad (\text{A.4})$$

Figura 45 – Figuras de Chladni na placa de aço 25 cm × 25 cm



Fonte: Autor

APÊNDICE B – Material com Roteiro da Atividade de Modelagem Computacional

Professor: Thomaz Santos Neres



Roteiro da Atividade de Modelagem Computacional

Grupo:	Data:	Local: Colégio Estadual José Amaral Lemos
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escreva		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) Acesse o ambiente de modelagem das Figuras de Chladni em <https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>
- 2) Para gerar um padrão estacionário, altere os modos de vibração m e n para $m = 2$ e $n = 0$ com $B = 1$, e clique em *Iniciar*;
- 3) Clique em *Inserir Pontos* e observe seu movimento de vibração;
- 4) Clique em *Fixar Padrão* e leve os pontos para regiões de máxima e mínima amplitudes de vibração da placa. Inicie a simulação;
- 5) Como é chamada a região em que o ponto permaneceu parado? Numa situação real, qual seria o comportamento de uma partícula livre que estivesse em uma região de amplitude máxima? Como se chama essa região de máxima amplitude?

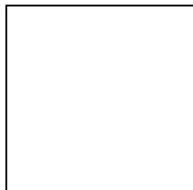
Resposta:

- 6) Gere a figura com os modos de vibração $m = 2$, $n = 2$;
- 7) Insira os pontos e clique em *Fixar Padrão*. Depois clique em *Distância* e leve os pontos para duas linhas nodais paralelas consecutivas. Para isto, mova os pontos buscando o valor mais próximo do nivelamento igual a zero e anote o valor da distância entre os dois pontos. O que é essa distância medida entre os dois pontos?

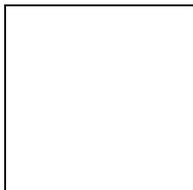
Resposta:

Professor: Thomaz Santos Neres

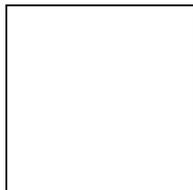
8) Registrando as imagens e os modos de vibração abaixo, gere as figuras referentes aos seguintes padrões:



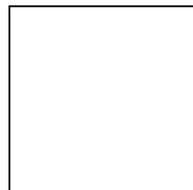
$m=2, n=0$ (B= 1)



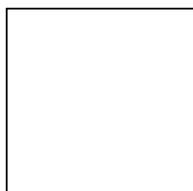
$m=2, n=0$ (B= - 1)



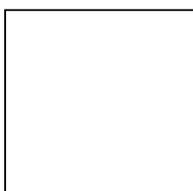
$m=3, n=1$ (B= 1)



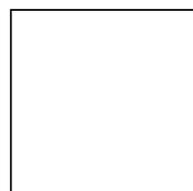
$m=3, n=2$ (B= 1)



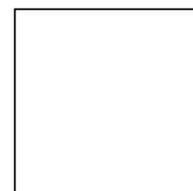
$m=4, n=0$ (B= 1)



$m=4, n=0$ (B= -1)



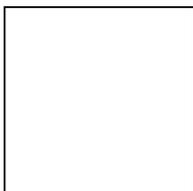
$m=2, n= 2$ (B=1)



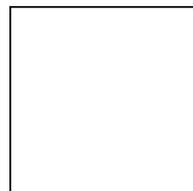
$m=3, n=1$ (B= -1)



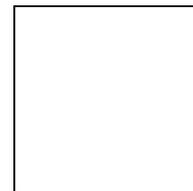
$m=4, n=2$ (B= -1)



$m=4, n=6$ (B= -1)



$m=6, n= 2$ (B= -1)



$m= 7, n=3$ (B= 1)

9) O que deve ocorrer com a frequência de vibração da placa à medida que os modos de vibração m e n aumentam? O que deve acontecer com o comprimento de onda? O que se observa nas figuras?

Resposta:

APÊNDICE C – Material com Roteiro da Atividade Experimental

Professor: Thomaz Santos Neres



Roteiro da Atividade Experimental

Grupo:	Data:	Local: Colégio Estadual José Amaral Lemos
Funções		Componentes
Facilitador		
Escriba		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

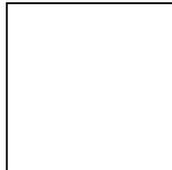
- 1) Utilizando a placa de ferro de $(25\text{ cm})^2$:
- Forme os padrões de Chladni para cinco (5) frequências de ressonância distintas.
 - Anote os valores das frequências de ressonância e, através de desenhos, registre as imagens dos padrões de Chladni nos espaços abaixo.

Figura 1



$f_1 = \text{_____ Hz}$

Figura 2



$f_2 = \text{_____ Hz}$

Figura 3



$f_3 = \text{_____ Hz}$

Figura 4



$f_4 = \text{_____ Hz}$

Figura 5



$f_5 = \text{_____ Hz}$

- 2) Quais são as variáveis utilizadas para controlar a vibração da placa?

Resposta:

- 3) O que ocorre na placa metálica juntamente com os grãos quando apenas a frequência de vibração é modificada? E quando somente o volume da fonte é alterado?

Resposta:

Professor: Thomaz Santos Neres

- 4) Repita o mesmo procedimento do item “1)” para a placa de ferro $(20 \text{ cm})^2$, procurando encontrar as mesmas figuras já encontradas para a placa anterior. Anote os valores das novas frequências de ressonância.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 5

$f_1' = \text{_____ Hz}$

$f_2' = \text{_____ Hz}$

$f_3' = \text{_____ Hz}$

$f_4' = \text{_____ Hz}$

$f_5' = \text{_____ Hz}$

- 5) Por que, nas duas placas de ferro, as mesmas figuras se formaram, mas em frequências diferentes?

Resposta:

- 6) A partir dos valores das frequências de ressonância das duas placas de ferro, trace um gráfico de $f' \times f$, utilizando a planilha de dados no Excel, onde f' e f são as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20 \text{ cm})^2$ e $(25 \text{ cm})^2$ respectivamente.

- a) Perceba que, no gráfico, é gerada uma função da forma $y = a \cdot x + b$. Compare-a com $f' = a \cdot f$, e anote o valor do coeficiente angular **a**.

Resposta:

a = _____

- b) Calcule o quociente entre as áreas das placas de ferro $(25 \text{ cm})^2$ e $(20 \text{ cm})^2$.

Resposta:

$\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \text{_____}$

- c) De acordo com os itens anteriores, qual o significado matemático do coeficiente angular **a**?

Resposta:

Professor: Thomaz Santos Neres

- 7) O que aconteceu com a frequência de ressonância da placa de ferro quando se diminuiu o comprimento desta, mantendo a mesma espessura, para formar a mesma figura? Relacionando a resposta anterior à equação $f_{mn} = \frac{\epsilon_{mn}}{L^2} \cdot constante$, o que se pode concluir sobre a relação da frequência de ressonância e o comprimento de uma mesma placa quadrada?

Resposta:

APÊNDICE D – Material com Roteiro da Atividade Experimental e Computacional

Professor: Thomaz Santos Neres



Roteiro da Atividade Experimental e Computacional

Grupo:		Data:	Local: Colégio Estadual José Amaral Lemos		
Funções		Componentes			
Facilitador					
Escriba					
Gestor de tempo					
Gestor de recursos					
Mediador					

- 1) O que se observa nas figuras das placas de ferro? Encontrou alguma figura semelhante àquelas observadas no GeoGebra? Quais?

Resposta:

Placa	Frequências de ressonância (Hz)					Modos de vibração (m,n)				
Ferro (25 cm)²										

- 2) De acordo com o que observaram na modelagem e no experimento, expliquem como as figuras de Chladni se formam. Por que os grãos se concentram em determinadas regiões da placa?

Resposta:

- 3) O que vocês acharam do experimento e da atividade realizada?

Resposta:

APÊNDICE E – Material com Pré-teste

Professor: Thomaz Santos Neres



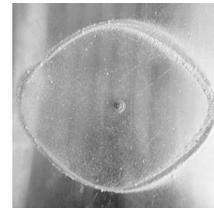
Nome:

Data:

Escola: Colégio Estadual José Amaral Lemos

Pré – Teste

1. Sobre acústica, marque uma opção.
 - a) Não me interessa
 - b) Interesse-me pouco
 - c) Interesse-me bastante
 - d) Não sei responder
2. Marque a opção que corresponde ao grau de facilidade que você tem para operar um computador.
 - a) Nunca mexi em um computador
 - b) Não tenho facilidade em operar um computador
 - c) Tenho alguma noção em operar um computador
 - d) Tenho facilidade em operar um computador
3. Dada a função $y = 5x + 1$, marque a opção que corresponde ao valor do coeficiente angular.
 - a) y
 - b) 5
 - c) x
 - d) 1
4. Considere uma placa metálica, com extremidades livres, vibrando com certa quantidade de areia depositada sobre ela. Na figura seguinte, é possível observar que há acúmulo de grãos de areia em algumas regiões da placa. Isso se dá ao fato de, nessas regiões de acúmulo de areia,
 - a) a vibração gerar forças de atração entre os grãos e a placa
 - b) a velocidade de propagação da onda mecânica ser zero
 - c) a amplitude de vibração ser mínima
 - d) a altura da onda mecânica ser zero



Professor: Thomaz Santos Neres

5. O alto falante é um componente eletrônico que transforma sinais elétricos em som. Neste, existe um diafragma que se desloca para frente e para trás, de acordo com os sinais elétricos enviados, produzindo ondas de pressão que se propagam através do ar até os nossos ouvidos. Quando se aumenta o volume de um alto falante, ocorre mudança
- Na altura da onda que se propaga
 - Na amplitude da onda que se propaga
 - Na velocidade da onda que se propaga
 - Na frequência da onda que se propaga
6. Tomemos o exemplo de grãos de areia sobre uma placa metálica. Se essa placa for perturbada com uma vibração externa com frequência que varia, os grãos de areia:
- Irão sempre vibrar
 - Nunca irão vibrar
 - Nem sempre irão vibrar
 - Não sei responder
7. Em qual das opções NÃO está presente o fenômeno ondulatório da ressonância?
- Um alimento sendo aquecido através do forno micro-ondas.
 - Uma taça sendo quebrada com o grito.
 - Um violão emitindo um som
 - Um garoto escutando a conversa atrás do muro

APÊNDICE F – Material com Pós-teste

Professor: Thomaz Santos Neres



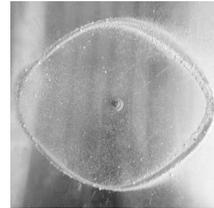
Nome:

Data:

Escola: Colégio Estadual José Amaral Lemos

Pós - Teste

- Marque a opção que melhor corresponde ao grau de facilidade que você tem para operar um computador.
 - Não sei operar um computador
 - Tenho dificuldade de operar um computador
 - Tenho alguma noção em operar um computador
 - Tenho facilidade em operar um computador
- Considere uma placa metálica, com extremidades livres, vibrando com certa quantidade de areia depositada sobre ela. Na figura seguinte, é possível observar que há acúmulo de grãos de areia em algumas regiões da placa. Isso se dá ao fato de, nessas regiões de acúmulo de areia,
 - a vibração gerar forças de atração entre os grãos e a placa
 - a velocidade de propagação da onda mecânica ser zero
 - a amplitude de vibração ser mínima
 - a altura da onda mecânica ser zero
- Tomemos o exemplo de grão de areia sobre uma placa metálica. Se essa placa for perturbada com uma vibração externa, os grãos de areia:
 - Irão sempre vibrar
 - Nunca irão vibrar
 - Nem sempre irão vibrar
 - Não sei responder
- Em qual das opções NÃO está presente o fenômeno ondulatório da ressonância?
 - Um alimento sendo aquecido através do forno micro-ondas.
 - Uma taça sendo quebrada com o grito.
 - Um violão emitindo um som
 - Um garoto escutando a conversa atrás do muro



Professor: Thomaz Santos Neres

5. O que mais lhe ajudou a entender ressonância em placas?

- a) A teoria e o experimento
- b) A teoria e a modelagem computacional
- c) A modelagem computacional e o experimento
- d) A teoria, a modelagem computacional, e o experimento

6. Você teve dificuldade para operar o software de modelagem computacional? Caso sim, qual foi a dificuldade?

Resposta:

7. Você teve dificuldade para operar o experimento? Caso sim, qual foi a dificuldade?

Resposta:

8. Conte o que aprendeu com essas atividades da aula. Diga também o que mais lhe chamou atenção.

Resposta:

9. Relate de forma breve alguma experiência sua com a ondulatória.

Resposta:

APÊNDICE G – Material da Aula 1



ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

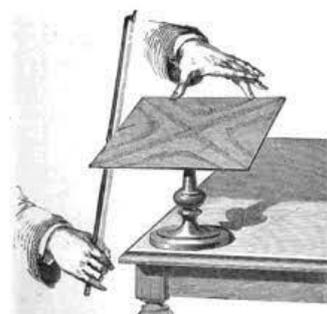
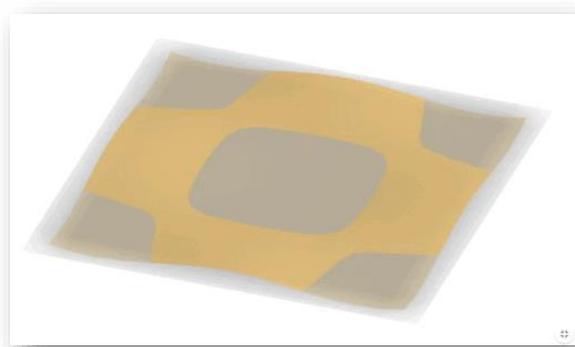
Escola: Colégio Estadual José Amaral Lemos

Professor: Thomaz Santos Neres

Disciplina: Física

1 Introdução

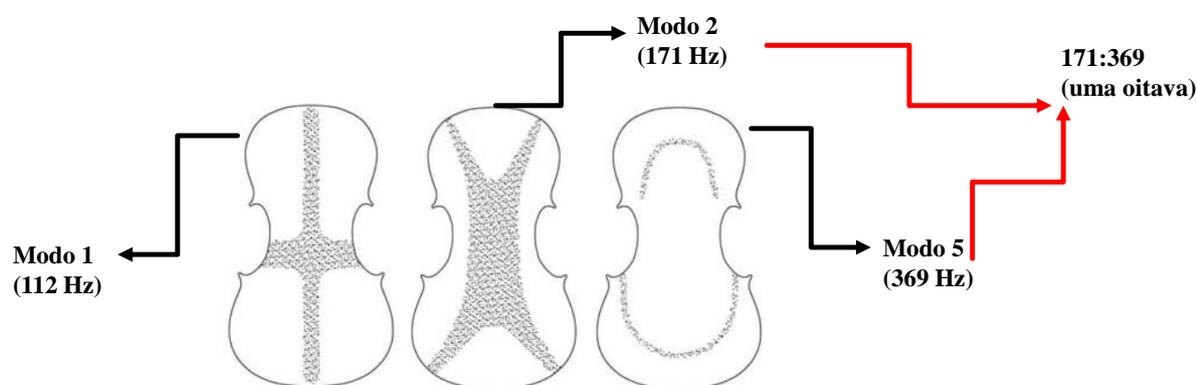
- Ernest Florens Friedrich Chladni (1756-1827) foi o primeiro a explorar a vibração de placas e barras, utilizando areias finas para demonstrar, visualmente, a existência de padrões bidimensionais nesses materiais.



2

1 Introdução

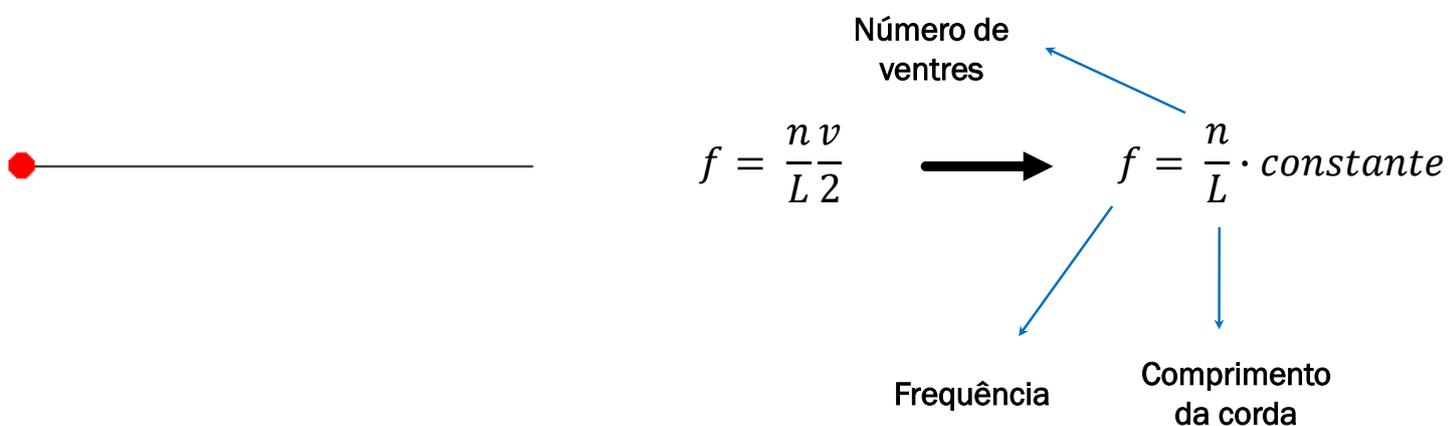
- Os padrões de ondas estacionárias (Figuras de Chladni) têm relevante aplicação no campo da música na determinação da **qualidade de instrumentos** feitos de madeira como violino e violão.



Fonte – (Donoso et al., 2008)

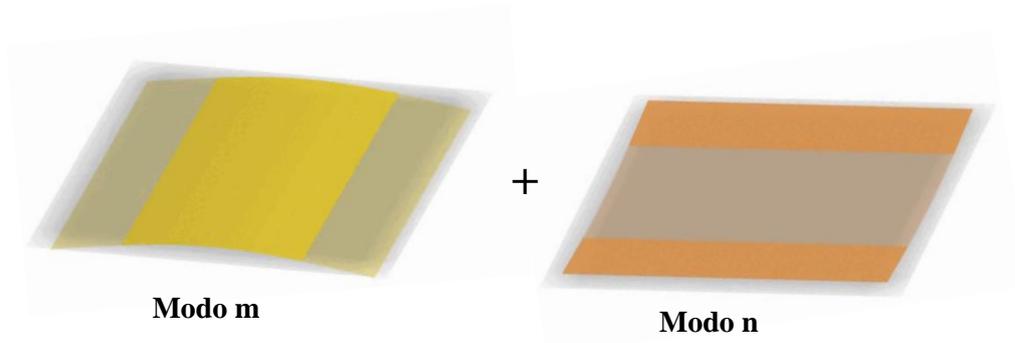
3

Onda Unidimensional (uma dimensão)



4

Onda Bidimensional (duas dimensões)

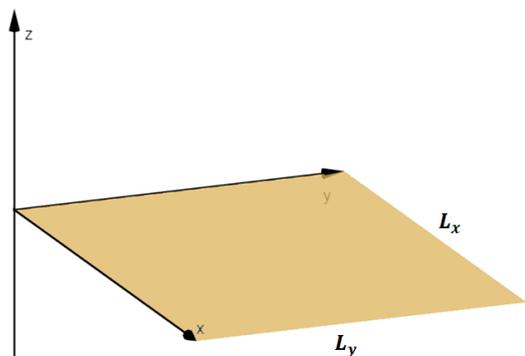


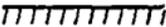
$$f = \frac{1}{L^2} \left[\frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \right] \cdot \xi_{mn}$$

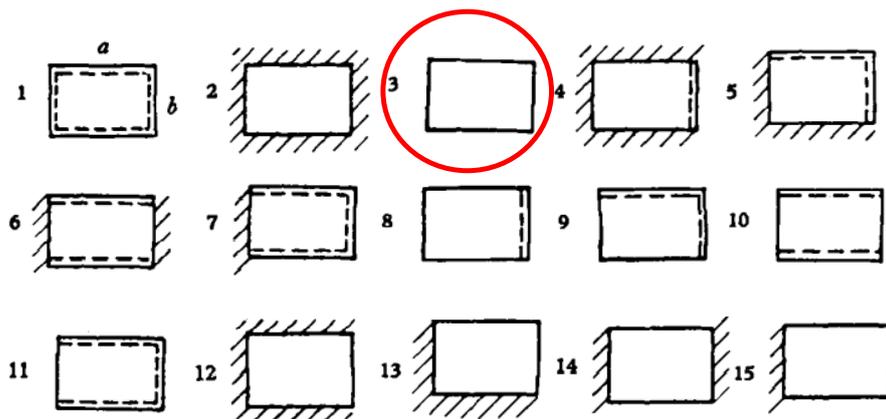
constante
 fator de frequência

5

Vibração de uma Placa Quadrada



-  Bordas livres suportadas
-  Bordas fixas
-  Bordas livres



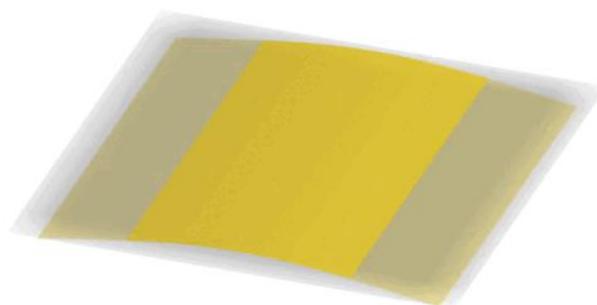
(WARBURTON, 1954)

6

Placa Retangular com Bordas Livres



Vibração de uma placa retangular. (FLETCHER, 1998)



7

Placa Quadrada com Bordas Livres

$\text{modo } (2,0) - (0,2)$
 $\text{modo } (2,0) + (0,2)$

Modelagem Computacional

Tempo
 $t = 3.83$

Modos de vibração
 $m = 2$ $n = 2$

Dimensões da Placa
 $L_x = 30$ $L_y = 30$

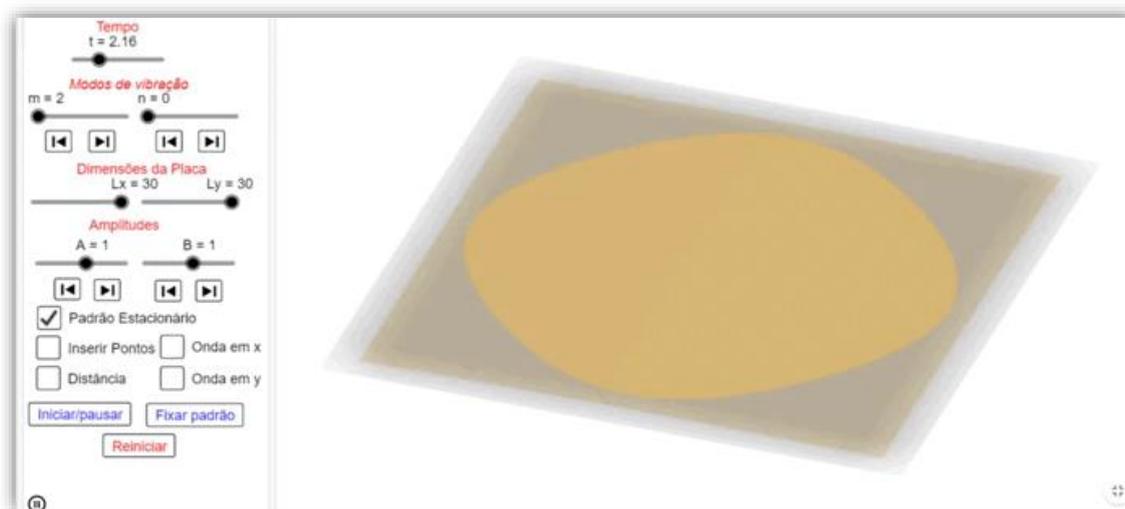
Amplitudes
 $A = 1$ $B = 1$

Padrão Estacionário
 Inserir Pontos Onda em x
 Distância Onda em y

Iniciar/pausar Fixar padrão
 Reiniciar

nivelamento = 0°
 distância = 14.42 cm

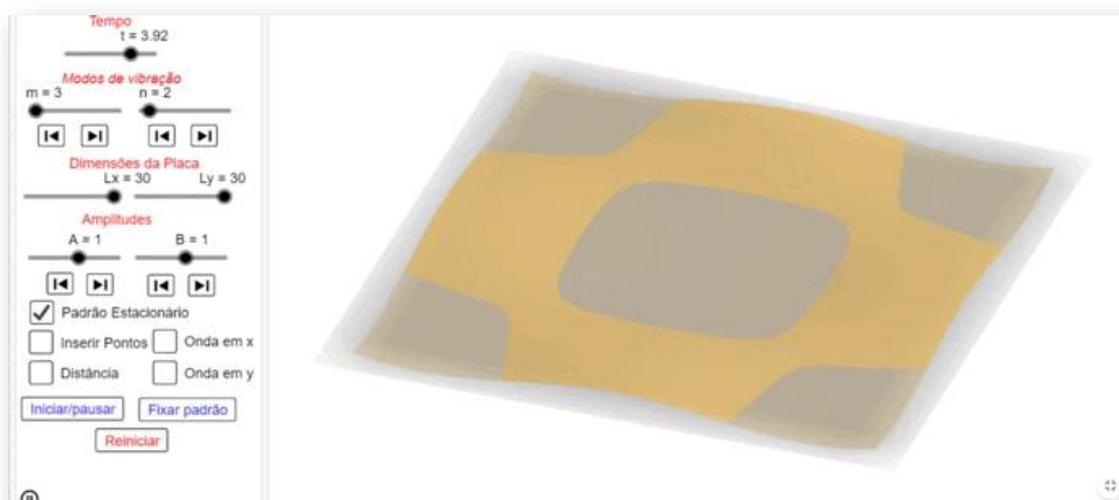
Modelagem Computacional



10

Roteiro Experimental

Modelagem computacional

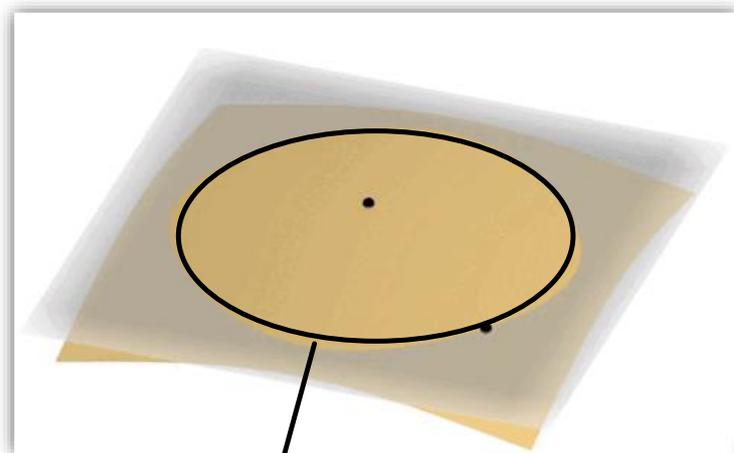


11

Alguns Resultados do Experimento das Figuras de Chladni



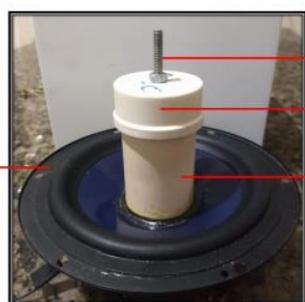
124 Hz



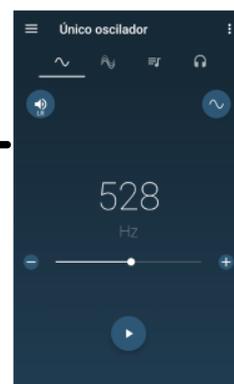
Região da placa que não vibra (linha nodal)

12

Material Elaborado



Amplificador Bluetooth



App "Gerador de Frequência"

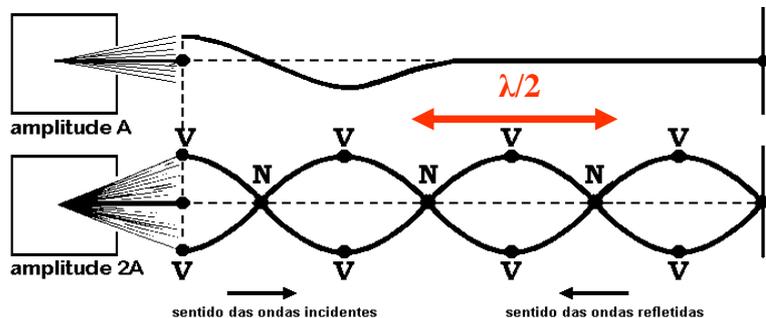


13

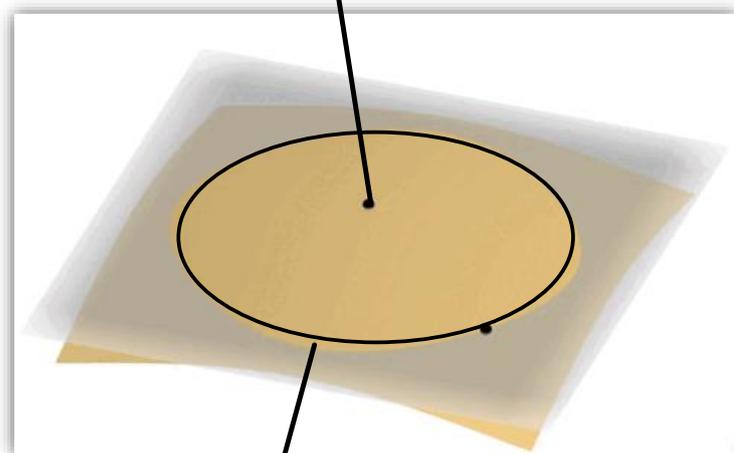
Onda unidimensional

vs

Onda bidimensional



Máxima amplitude de vibração (crista da onda)



Região da placa que não vibra (linha nodal)

- A distância entre dois nós (pontos nodais) consecutivos é $\lambda/2$ (metade do comprimento de onda).
- Quando a frequência (f) aumenta, o comprimento de onda (λ) diminui proporcionalmente.

14

Funções de Grupos Cooperativos

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entres os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.
- **Escriba:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

15

APÊNDICE H – Produto Educacional

Nas páginas seguintes, encontra-se o produto educacional.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA - POLO 11

PRODUTO EDUCACIONAL

ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

Thomaz Santos Neres

Produto educacional submetido ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Sergipe no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:

Prof. Dr. Emerson Luis de Santa Helena

Coorientador:

Prof. Dr. Edvaldo Alves de Souza Junior

São Cristóvão/SE

Agosto/2022

Apresentação

Este produto educacional foi desenvolvido para a aplicação de um trabalho experimental e computacional sobre o conteúdo de ondas bidimensionais, como parte de um estudo de Física da dissertação de mestrado cujo título é “Estudo da Vibração de Placas Através dos Padrões Estacionários de Chladni”, por meio do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, na Universidade Federal de Sergipe.

Este documento fornecerá uma guia para montagem do experimento e para a utilização da aplicação computacional desenvolvida através do software GeoGebra. Além disso, é apresentada uma sugestão de roteiro de aplicação do produto (com características de sequência didática) baseada na metodologia ensino por investigação. Porém, é importante destacar que o professor que desejar aplicá-la pode adaptá-la de acordo com o próprio contexto escolar. Salienta-se também que, embora o conteúdo seja apresentado com um único produto, tanto o material experimental como o computacional podem ser trabalhados de forma independente, comportando-se cada um como um único produto, a depender do desejo ou das condições de trabalho do professor.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino	8
Figura 2 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada	11
Figura 3 – placa de lados L_x e L_y no plano XY	12
Figura 4 – Terceiro modo	13
Figura 5 – Modos de vibração independentes	15
Figura 6 – Modo X, (2,0) - (0,2), e do modo anel, (2,0) + (0,2)	16
Figura 7 – Combinação dos modos (2,0) e (0,2)	16
Figura 8 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre	16
Figura 9 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante	18
Figura 10 – Amplificadores de áudio.	19
Figura 11 – Conexão do amplificador ao alto-falante	19
Figura 12 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira	19
Figura 13 – Placas Metálicas	20
Figura 14 – Esquema de encaixe da placa metálica	20
Figura 15 – Areia e farinha utilizadas no experimento	21
Figura 16 – Protetor Auricular	21
Figura 17 – Imagem da tela inicial do Aplicativo <i>Gerador de Frequência</i>	22
Figura 18 – Interface da modelagem no GeoGebra	23
Figura 19 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D	23
Figura 20 – Área de programação para um objeto no GeoGebra	24
Figura 21 – Área de programação do botão iniciar/pausar	24
Figura 22 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância	45
Figura 23 – Comparações de modos: modelagem x experimento	48
Figura 24 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	50
Figura 25 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro	51
Figura 26 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$	52
Figura 27 – Figura $f_B \times f_A$	52
Figura 28 – Figuras de Chladni na placa de aço $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	53

Lista de quadros

Quadro 1 – Materiais utilizados.	17
Quadro 2 – Grau de abertura de uma investigação	26
Quadro 3 – Distribuição das Aulas.	28
Quadro 4 – Acesso aos materiais	47

Lista de tabelas

Tabela 1 – Coeficientes da Equação 2.8 para a placa de extremidades livres . . .	12
Tabela 2 – Frequências de ressonância nas placas de ferro	50
Tabela 3 – Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões	52

Lista de abreviaturas e siglas

SBF: Sociedade Brasileira de Física

MNPEF: Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

UFS: Universidade Federal de Sergipe

2D: Duas dimensões

3D: Três dimensões

PVC: Policloreto de vinila

Sumário

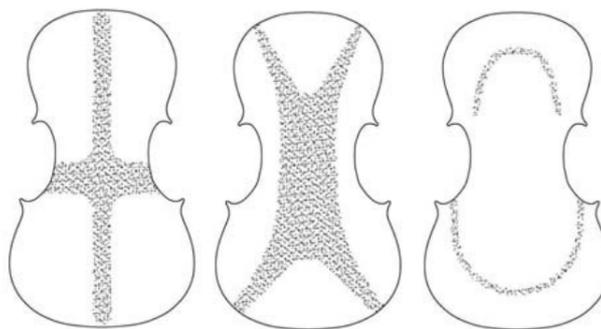
1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Objetivo	9
1.1.1	Objetivo Geral	9
1.1.2	Objetivos Específicos	9
2	PRINCIPAIS FUNDAMENTOS	10
2.1	Vibração de uma Placa Retangular	10
3	PRODUTO	17
3.1	Materiais e Confecção do Experimento de Chladni	17
3.2	Aplicação Computacional para Figuras de Chladni	22
4	PROPOSTA PARA APLICAÇÃO DO PRODUTO	26
4.1	Método Ensino Investigativo	26
4.2	Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa	26
4.3	Estrutura das Aulas	28
4.3.1	Material para a Aula 1	29
4.3.2	Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional	38
4.3.3	Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni	41
4.3.4	Material para Construção de Gráfico	45
4.3.5	Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni	45
4.3.6	Links de Acesso aos Materiais da Aplicação do Produto	47
5	RESULTADOS ESPERADOS	48
5.1	Modelagem Computacional das Figuras de Chladni	48
5.2	Experimento das Figuras de Chladni	49
5.2.0.1	Experimento com Placas de Ferro	49
5.2.0.2	Experimento com Placas de Alumínio	51
	REFERÊNCIAS	54

1 Introdução

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827) é conhecido, por muitos, como o “pai da acústica” por várias contribuições importantes a este campo numa época em que os olhos estavam voltados para o estudo da termodinâmica e do eletromagnetismo. Até o momento em que Chladni iniciou os estudos na área da acústica, somente as vibrações em instrumentos de cordas e de sopro haviam sido estudadas. Ele iniciou a exploração das vibrações em placas. Para perturbar o sólido, utilizou inicialmente um arco de violino. A partir disto, padrões bidimensionais de ondas estacionárias eram formados. Chladni conseguiu “dar luz” ao som, utilizando areias finas que eram deslocadas para as regiões nodais da superfície (SANTOS et al., 2018). Além disso, fez importantes descobertas sobre vibrações em cordas e barras, inclusive, demonstrando a existência de ondas longitudinais nas barras (HENRIQUE, 2002).

As Figuras de Chladni, como são conhecidos os padrões de ondas estacionárias ou de frequências ressonantes em superfícies bidimensionais como placas, chapas, membranas, e tampões, têm relevante aplicação no campo da música na determinação da qualidade de instrumentos musicais feitos de madeira como o violino e violão (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018). O tipo de madeira, bem como as dimensões utilizadas em cada parte do instrumento influem na qualidade do som ressoado através da caixa acústica. Além do mais, através de areia polvilhada na superfície do material perturbado, é possível enxergar as regiões equivalentes aos nodos do caso unidimensional de uma corda vibrando como se pode ver na figura seguinte.

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino



Fonte: (DONOSO et al., 2008)

Essas três configurações de linhas nodais foram obtidas pelo Método Chladni e são chamadas de modos de vibração 1, 2 e 5 com frequências correspondentes a $(112 \pm 12) \text{ Hz}$, $(171 \pm 20) \text{ Hz}$, $(369 \pm 36) \text{ Hz}$ respectivamente. Esses mesmos modos podem ser observados numa placa retangular ou quadrada (Figuras 7 e 8) correspondentes às menores frequências de vibração associadas aos modos $(1, 1)$, $(2, 0) - (0, 2)$, e $(2, 0) + (0, 2)$, respectivamente.

Essa sequência de modos de vibração é necessária para que a madeira se comporte harmonicamente em violinos de boa qualidade onde é característico que os modos 2 e 5 se encontrem separados por uma oitava, ou seja, numa razão 1:2 na frequência. Neste caso, a relação 171:369 se aproxima de uma oitava (DONOSO et al., 2008).

O Método Chladni é um tema que também pode ser utilizado em processos de funcionamento e de fabricação de outros instrumentos musicais de percussão e de cordas. Além do mais, os comportamentos vibracionais de diversos materiais podem ser estudados a partir da análise modal de uma placa metálica flexível acoplada a uma cavidade acústica com a finalidade de encontrar soluções inovadoras, através do estudo dos níveis de ruído em sistemas como cabines veiculares, alto-falantes, motores de combustão (LIMA, 2017).

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho apresenta uma proposta de estudo da vibração de placas dentro das perspectivas do ensino por investigação, através do estudo das Figuras de Chladni, utilizando um aparato experimental controlado via smartphone e um prévio ambiente de modelagem computacional que possa servir como material potencialmente significativo.

1.1.2 Objetivos Específicos

Considerando o desenvolvimento do trabalho e o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Criar um experimento de laboratório de baixo custo e de fácil montagem para a criação das Figuras de Chladni;
- Criar um aplicativo de interface gráfica matemática para a visualização e análise dos padrões de Chladni;
- Aplicar a metodologia ensino por investigação no estudo das vibrações em placas de Chladni.

2 Principais Fundamentos

2.1 Vibração de uma Placa Retangular

Uma placa pode ser comparada a uma barra bidimensional ou a uma membrana com rigidez (FLETCHER, 1998). Uma placa, ao vibrar, pode transmitir ondas de compressão (ondas longitudinais), de cisalhamento, de torção, e/ou ondas de flexão. No nosso caso, iremos estudar a vibração de uma placa retangular com as quatro extremidades livres.

Ao contrário do que se possa esperar que a velocidade da onda de compressão pode ser calculada da mesma forma que se calcularia para uma corda ou para uma barra, a ligeira expansão lateral da onda é acompanhada de uma pequena rigidez adicional. Desta forma, a velocidade longitudinal, c_L é descrita por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (2.1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, termo relacionado à contração lateral. E é a tensão intrínseca da placa chamada de módulo de elasticidade ou Módulo de Young, e ρ é a densidade volumétrica da placa.

Em se tratando das Figuras de Chladni (Seção 1), o movimento de maior contribuição para a formação dos padrões estacionários é o gerado pelas ondas de flexão da placa descrito pela equação (FLETCHER, 1998):

$$-D\nabla^4 z = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ é a rigidez flexural, termo que depende das características mecânicas da placa. Temos ainda que z representa o deslocamento transversal de qualquer ponto da placa em função do tempo, e h é a espessura da placa.

Adotando uma solução harmônica da forma $z = Z(x, y)e^{i\omega t}$, podemos reescrever a Equação 2.2 da seguinte maneira:

$$\nabla^4 Z(x, y) - k^4 Z(x, y) = 0, \quad (2.3)$$

onde $k = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{h} \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{c_L \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}$, termo chamado de número de onda.

Como $v = \frac{\omega}{k}$ e $\omega = 2\pi f$, obtemos o seguinte para a velocidade da onda transversal:

$$v(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}} f h c_L} \quad (2.4)$$

A frequência das ondas de flexão é proporcional a k^2 . Os valores de k correspondem aos modos normais de vibração de acordo com as condições de contorno (FLETCHER, 1998).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_L h}{\sqrt{48\pi^2}} k^2 \quad (2.5)$$

Desta forma, é possível observar, a partir da Equação 2.4, que a velocidade da onda transversal depende da frequência para ondas de flexão (FLETCHER, 1998). Isso acontece devido ao acoplamento de movimento de flexão nas duas direções, o que faz com que os modos de vibração em ambas as direções não sejam puros como no caso de uma barra. Desta forma, as linhas nodais se tornam curvas.

A frequência fundamental de ressonância (Figura 2) para uma placa quadrada de extremidades livres se relaciona com o comprimento de onda correspondente ao dobro do comprimento da placa, $\lambda = 2L$. Sendo $k = 2\pi/\lambda$,

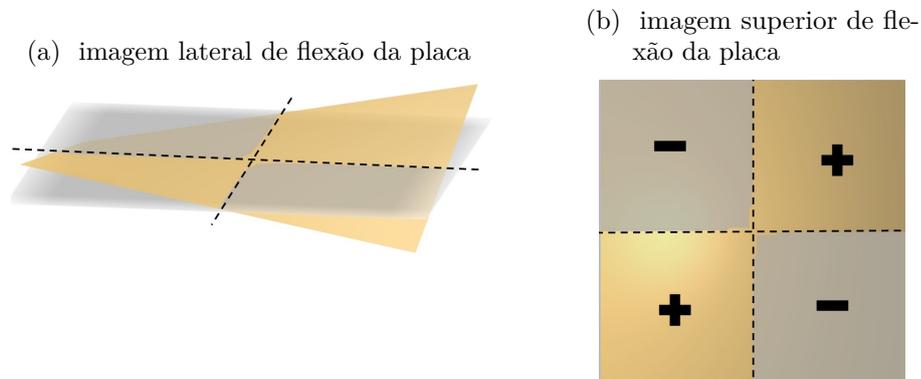
$$k = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L} \quad (2.6)$$

Substituindo 2.6 em 2.5,

$$f_{mn} = \frac{1}{L^2} \frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \cdot \xi_{mn} \quad (2.7)$$

onde ξ_{mn} é o fator de frequência que depende das condições de contorno das extremidades da placa e, conseqüentemente, dos modos normais de vibração m e n .

Figura 2 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada



Na Figura 2, as linhas nodais representam meia onda em cada direção. As regiões com o sinal “+” representam movimento de elevação, enquanto que as de sinal “-” representam movimento de abaixamento.

De acordo com Warburton (1954), o fator de frequência é definido como:

$$\xi_{mn}^2 = G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \quad (2.8)$$

onde os coeficientes $G_x, G_y, H_x, H_y, J_x, J_y$ dependem das condições de contorno e dos modos de vibração.

Tabela 1 – Coeficientes da Equação 2.8 para a placa de extremidades livres

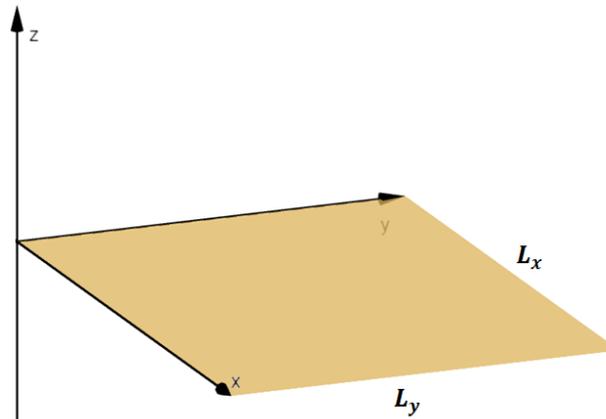
m	G_x	H_x	J_x
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

Fonte: (WARBURTON, 1954)

Para os demais coeficientes, os valores são os mesmos, fazendo a troca de m por n .

Consideremos a representação de uma placa retangular com um de seus vértices coincidindo com a origem do plano XY como mostra a Figura 3.

Figura 3 – placa de lados L_x e L_y no plano XY



Para o caso de ondas estacionárias viajando em um plano, a amplitude de vibração dependerá da superposição de uma onda estacionária na direção x e outra na direção y .

A solução para a forma de vibração da placa na direção z deve satisfazer as condições de contorno para as quatro laterais da placa. Da Equação 2.2 e aplicando o operador ∇^4 , chegamos à seguinte equação que também deve satisfazer a solução do problema (WARBURTON, 1954):

$$\frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1 - \nu^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Entretanto, não é possível encontrar uma forma para z que satisfaça a Equação 2.9 juntamente com as condições de contorno para o caso dos quatro lados da placa livres. É necessário assumir a parte espacial da solução $Z(x, y)$ composta por uma série infinita, onde cada termo da série satisfaz a Equação 2.9.

O deslocamento na direção z será da forma:

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin(\omega t) \quad (2.10)$$

Sendo

$$Z(x, y) = \sum A_{mn} X_{mn}(x) Y_{mn}(y) \quad (2.11)$$

Como exemplo, de acordo com os parâmetros tabelados em Leissa (1993) para o terceiro modo de vibração da placa para $\nu = 1/3$, teremos

Figura 4 – Terceiro modo



Fonte: (LEISSA, 1993)

Terceiro modo: $Z(x, y) = A_{02}(X_0Y_2 + X_2Y_0) + A_{22}X_2Y_2 + A_{04}(X_0Y_4 + X_4Y_0) + A_{24}(X_2Y_4 + X_4Y_2) + A_{44}X_4Y_4 + \dots$

Sendo:

$$A_{02} = 1$$

$$A_{22} = -0,0447$$

$$A_{04} = -0,02011$$

$$A_{24} = -0,00384$$

$$A_{44} = -0,0282$$

Porém, Warburton (1954) apresentou uma solução mais simples de descrever o problema da placa completamente livre. Ele toma os termos de maior contribuição na série (Equação 2.11). Desta forma, temos

$$Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2.12)$$

Onde, para $x = 0$ e $x = L_x = L_y$

$$X(x) = \begin{cases} \cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)} \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 2, 4, 6... \\ \sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)} \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 1, 3, 5... \end{cases}$$

De maneira análoga, para a direção y

$$Y(y) = \begin{cases} \cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 2, 4, 6... \\ \sin \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon'/2)}{\sinh(\epsilon'/2)} \cdot \sinh \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 1, 3, 5... \end{cases}$$

Os fatores de amplitudes, γ e γ' definidos para cada padrão nodal são encontrados graficamente através da interseção entre curvas de equações:

$$\begin{cases} \tan(\gamma/2) + \tanh(\gamma/2) = 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \tan(\gamma'/2) - \tanh(\gamma'/2) = 0 & \text{para } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Pode-se chegar à seguinte relação:

$$\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}(2m - 1) \quad (2.13)$$

Ritz mostrou que a superposição dos modos $(m, n) \pm (n, m)$ para uma placa quadrada, $L_x = L_y$, só existe nas condições em que $m - n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ (WARBURTON, 1954).

Teremos então como solução geral os seguintes casos de formas de vibração:

Caso 1: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 0$, onde $m = 2, 4, 6, \dots$

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm A \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\text{Com } \alpha = -\frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)}.$$

Caso 2: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 1$, onde $m = 3, 5, 7, \dots$

$$Z(x, y) = A \left(1 - \frac{2y}{L_y} \right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm$$

$$A\left(1 - \frac{2x}{L_x}\right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.15)$$

$$\text{Com } \alpha' = \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)}.$$

Caso 3: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $m > 1, n > 1$, onde m e n assumem quantidades diferentes.

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right) \right] \cdot \left[\cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) \right] \\ \pm A \left[\cos \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right) \right] \cdot \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.16)$$

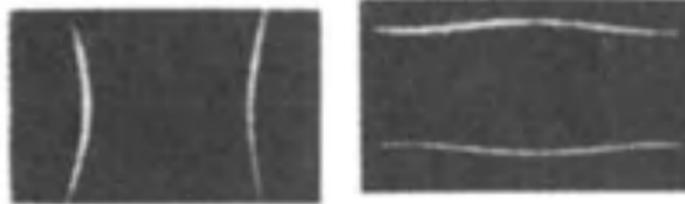
$$\text{Com } \beta = \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \text{ e } \epsilon = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

Para uma placa onde $L_x \gg L_y$, os modos $(2,0)$ e $(0,2)$ surgem completamente independentes como se pode ver na Figura 5.

Figura 5 – Modos de vibração independentes

(a) Modo $(2,0)$

(b) Modo $(0,2)$

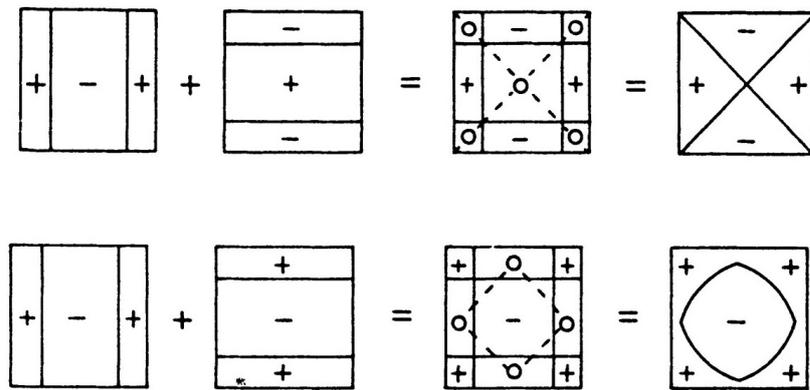


Fonte: (FLETCHER, 1998)

Se $L_x \rightarrow L_y$, os modos independentes se combinam linearmente para formar dois novos modos. No caso de uma placa quadrada, duas combinações são possíveis, dependendo se os modos estão em fase ou fora de fase, como se pode ver na Figura 6. A combinação $(2,0) + (0,2)$ tem um valor de frequência maior que $(2,0) - (0,2)$. No modo anel (Figura 7b) ocorre uma rigidez adicional devido ao fato de que os movimentos de flexão se opõem. Já no modo X (Figura 7a) cada modo auxilia o outro através de uma interação elástica chamada de acoplamento de Poisson.

É importante destacar que os pontos onde a função espacial $Z(x, y)$ se anula, a função $z(x, y, t)$ (Equação 2.10) também se anula. Ou seja, esses pontos permanecerão estáticos formando linhas nodais, região no qual os grãos de areia se acumulam. Na Figura 8, temos alguns padrões de Chladni em que são apresentadas as combinações de modos em fase e fora de fase.

Figura 6 – Modo X, (2,0) - (0,2), e do modo anel, (2,0) + (0,2)



Fonte: (FLETCHER, 1998)

Figura 7 – Combinação dos modos (2,0) e (0,2)

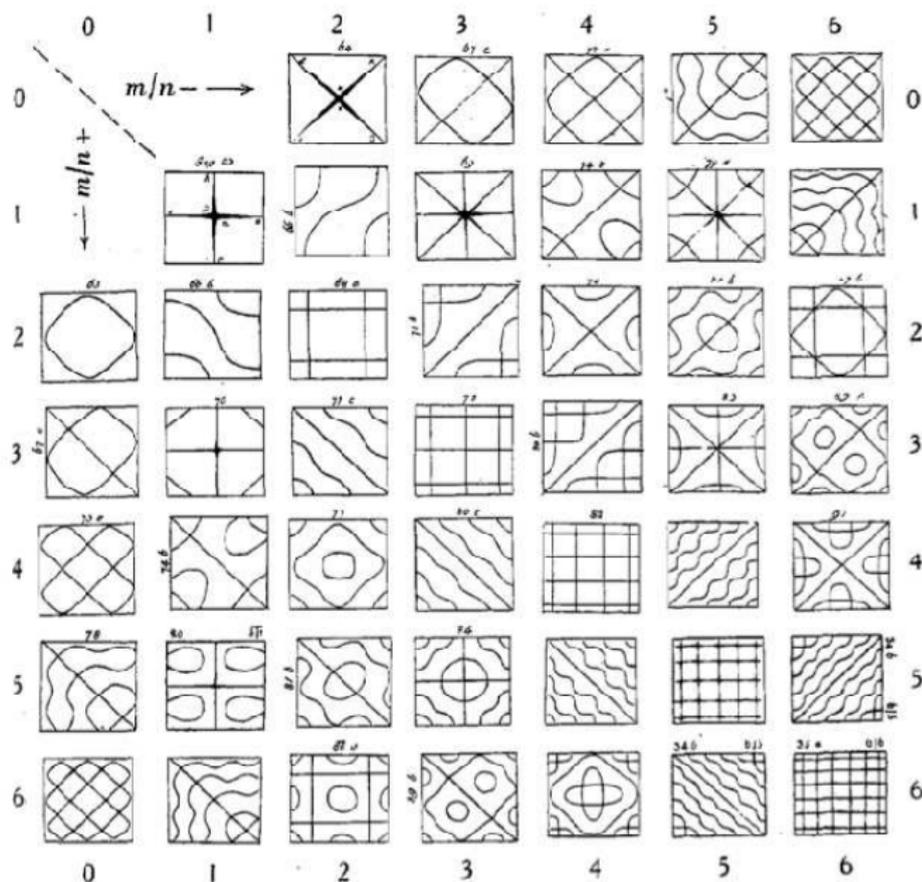
(a) Modo (2,0) - (0,2)

(b) Modo (2,0) + (0,2)



Fonte: Autor

Figura 8 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre



Fonte: (BLANCAS, 2011)

3 Produto

3.1 Materiais e Confecção do Experimento de Chladni

No Quadro 1, apresentamos os materiais básicos utilizados na montagem do aparato experimental.

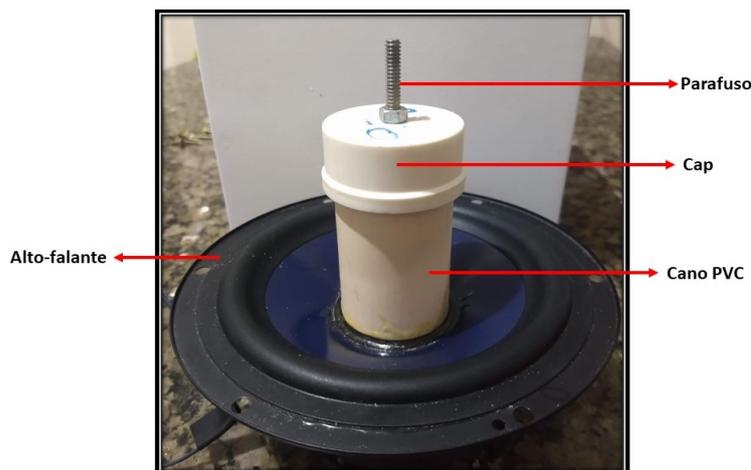
Quadro 1 – Materiais utilizados.

- Módulo amplificador de áudio ZK-502M com 50 W, conexão bluetooth 5.0;
- Fonte de tensão de 12 V, 2 A;
- Alto falante 100 W, 6 Ω , 6 polegas;
- Smartphone ou tablet para a instalação do app *Gerador de Frequência*;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 25 cm \times 25 cm \times 1 mm;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 20 cm \times 20 cm \times 1 mm;
- Areia fina e farinha;
- Caixa de madeira para fixar o alto falante com base 18 cm \times 18 cm e altura de 15 cm;
- Cano PVC de 6 cm de comprimento e 40 mm de diâmetro;
- Cap para o cano PVC de 40 mm de diâmetro
- Parafuso de 2 cm de comprimento e 5 mm de diâmetro;
- Duas porcas e duas arruelas para o parafuso acima;
- Seis parafusos para madeira do tipo chipboard com (3,5 \times 16) mm;
- Quatro parafusos para madeira do tipo chipboard com (4,0 \times 30) mm;
- Cola araldite;
- Furadeira;
- Chave de fenda philips;
- Serra para cano PVC;
- Alicates.
- Protetor Auricular

Alto-falante

O alto-falante é o dispositivo responsável pela vibração da placa metálica. A conexão entre o dispositivo de áudio e a placa será através do cano PVC. Este deverá ser colado no centro do diafragma do alto-falante como mostra a Figura 9. Foi utilizada cola araldite para fixar o cano ao dispositivo eletrônico.

Figura 9 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante



O parafuso com $5\text{ mm} \times 2\text{ cm}$ deverá ser inserido no centro do cap e depois preso por uma porca como se pode ver na Figura 9. Em seguida, o cap deverá ser encaixado ao cano.

Placa Amplificadora

A placa amplificadora é uma peça fundamental para o funcionamento do experimento. Ela é responsável por amplificar o som que sai do smartphone para o alto-falante. Existem vários modelos de placa com variados tipos de potência. Neste caso, é importante um modelo que possua dissipador de calor. Pela praticidade de menos conexões com fios, foi utilizado na montagem desse aparato experimental o módulo amplificador de áudio *ZK – 502M* com 50 W de potência e bluetooth 5.0 (Figura 10a). Este funciona com tensão DC entre 5 V e 24 V . Nesse aparato experimental, utilizamos uma fonte de energia de 12 V . Na Figura 11, temos como o amplificador deve ser conectado ao alto-falante.

Como opção de montagem, com a utilização do amplificador sem bluetooth e um cabo de áudio mono P2, foi testado o modelo Tda 2050 mono de 30 W com volume ajustável e tensão de entrada de 12 V DC, ideal para quaisquer alto-falantes com as mesmas especificações do utilizado neste produto educacional.

As portas de entrada e saída estão apresentadas na Figura 10b. À esquerda, existem duas portas de entrada do sinal que será transmitido do celular. À direita, há duas portas de entrada da fonte de alimentação, e mais duas portas de saída do sinal amplificado para o alto-falante.

Figura 10 – Amplificadores de áudio.

(a) Módulo Amplificador de Áudio ZK – 502M Bluetooth



(b) Módulo Amplificador Tda 2050

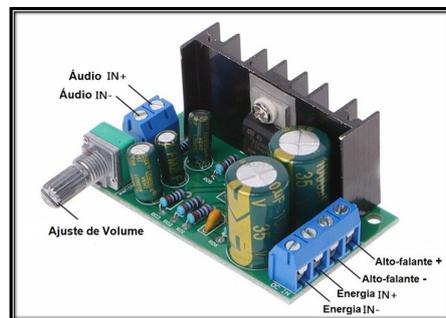
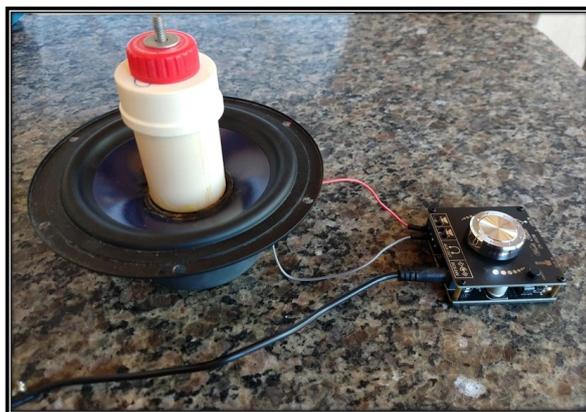


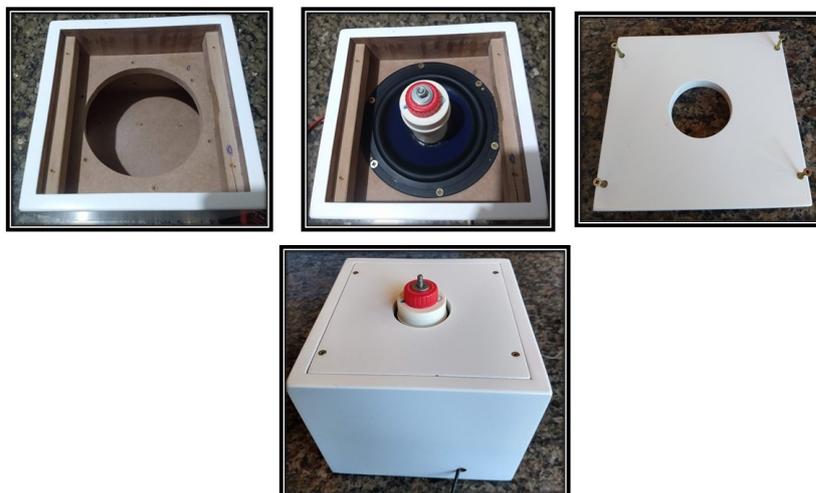
Figura 11 – Conexão do amplificador ao alto-falante



Caixa de Madeira

Para o encaixe do alto-falante, utilizamos uma caixa de madeira compensada com base $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ e altura de 15 cm . Foi feito um furo na tampa com um diâmetro de 60 mm , suficiente para que o cano oscile sem contato com as paredes do furo. O esquema está descrito na Figura 12.

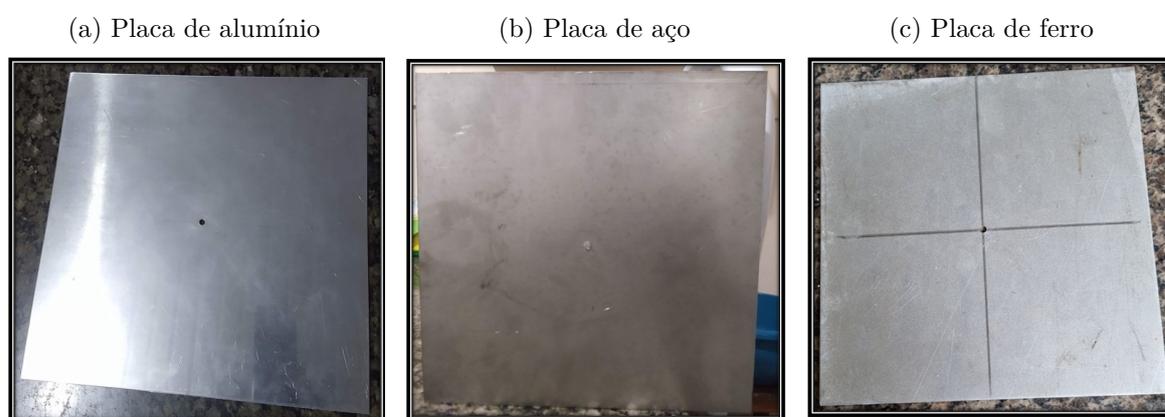
Figura 12 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira



Placas Metálicas

Neste produto educacional, a partir de testes e análise de custo benefício, utilizamos duas placas de ferro galvanizado como já descritas na lista de materiais (Quadro 1). Alguns testes foram feitos com placas de alumínio, aço inox, e placa de acrílico. As placas de alumínio tinham as dimensões de $30\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 2\text{ mm}$ e $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 2\text{ mm}$, as placas de aço inox com dimensões $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 1\text{ mm}$ e $20\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 1\text{ mm}$, e a placa de acrílico, $26\text{ cm} \times 26\text{ cm} \times 2\text{ mm}$. Esta última não demonstrou eficiência na formação de figuras devido ao nível elevado de aderência da areia em sua superfície, impedindo que os grãos se movimentassem livremente.

Figura 13 – Placas Metálicas



A placa metálica deve ser inserida no parafuso central (Figura 14) e então presa por uma arruela e uma porca.

Figura 14 – Esquema de encaixe da placa metálica



É importante certificar-se de que a placa esteja nivelada para não correr o risco de, no momento da vibração dos grãos, estes se deslocarem mais para um lado, e inclusive, fazendo com que boa parte dos grãos não permaneçam sobre a placa, impedindo a visualização completa das figuras de Chladni.

Areia Fina e Farinha

Os grãos a serem utilizados são de suma importância. Estes não podem estar úmidos e têm que ser pequenos, finos. Utilizamos como teste a areia da praia por ser fácil de se conseguir na região onde a Instituição de ensino está localizada, e, pelo fato de termos obtido um resultado bastante satisfatório. Caso a areia esteja muito úmida no momento da execução do experimento, sugiro que a mesma seja aquecida. Utilizamos, para isso, o aparelho micro-ondas por 1 minuto de funcionamento com a areia dentro sendo aquecida. Entretanto, para fins de aplicação deste produto educacional, utilizamos farinha pelo fato de ser um material de fácil acesso e, de ter apresentado um resultado mais satisfatório que a areia. Para utilizar grãos mais homogêneos e de menores tamanhos, foi utilizada a farinha dentro do paliteiro para jogá-la sobre a placa metálica.

Figura 15 – Areia e farinha utilizadas no experimento



Protetor Auricular

O som de algumas frequências de vibração da placa podem incomodar alguns alunos. Então é importante que se tenha à disposição, durante a realização do experimento das figuras de Chladni, protetores auriculares para a proteção contra os níveis de ruídos que possam incomodar.

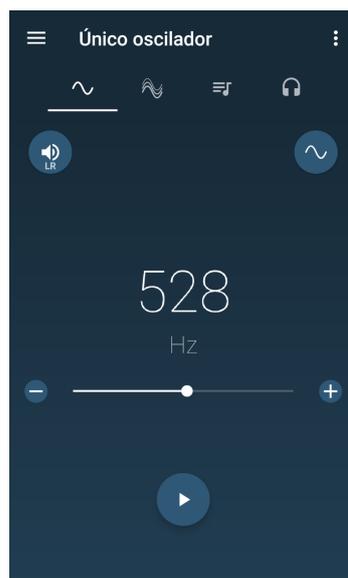
Figura 16 – Protetor Auricular



Aplicativo Gerador de Frequência

Existem muitos aplicativos gratuitos de geração de sinais sonoros. Entretanto, o Aplicativo *Gerador de Frequência* foi satisfatório para o desejado. Este pode ser encontrado no Google Play para o sistema operacional Android. Aplicativos similares podem ser encontrados em outras plataformas de software. O smartphone ou tablet é conectado via bluetooth com a placa amplificadora, através do qual o sinal é enviado via o aplicativo.

Figura 17 – Imagem da tela inicial do Aplicativo *Gerador de Frequência*



3.2 Aplicação Computacional para Figuras de Chladni

O GeoGebra é um software de código aberto de matemática dinâmica, reunindo recursos de cálculos, criação de gráficos, simulações. O GeoGebra possui milhões de usuários e já recebeu diversos prêmios (GEOGEBRA, 2021). Existe um grande acervo de materiais didáticos que podem ser compartilhados livremente. Além disso, os códigos desses materiais são abertos para quem quiser ver e/ou preferir fazer alguma modificação na programação. Ainda, é possível seguir autores que fazem parte de uma comunidade internacional do GeoGebra. Desta forma, o seguidor recebe atualizações de novos materiais em seu "feed" de notícias.

Além de ser uma calculadora e, de oferecer ferramenta gráfica, o GeoGebra também oferece o ferramental para se criar animações tanto em 2D como em 3D, além de botões, controles deslizantes, etc. Ele é bastante utilizado também em simulações de eventos físicos como o trabalho de Bracho et al. (2019) que elaborou um simulador para o ensino do movimento parabólico numa situação do tiro livre no futebol. Já Ribeiro (2019) desenvolveu um conjunto de simulações com o GeoGebra para auxiliar o professor de Física no ensino da cinemática. Também, com a utilização do software, uma proposta

de cenário virtual para o ensino de oscilações e conceitos de ondas foi desenvolvida no trabalho de Melo (2021).

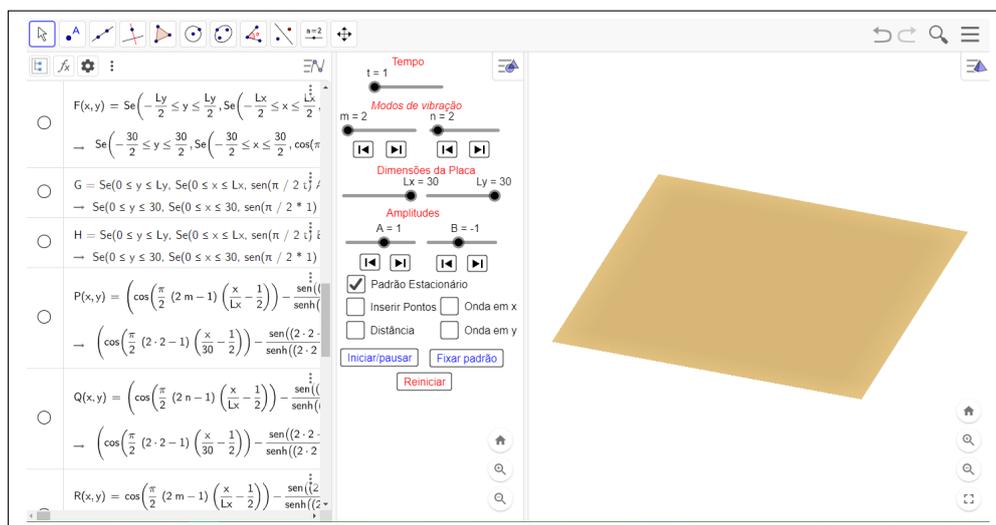
Figura 18 – Interface da modelagem no GeoGebra



Fonte: <<https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>>

O GeoGebra oferece duas opções de linguagem de programação: código GeoGebra e JavaScript. Três áreas principais foram utilizadas para a criação da modelagem das Figuras de Chladni (Figura 19):

Figura 19 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D



- Janela de Álgebra - Esta janela é a principal. É nela que os objetos e controles são criados através da inserção de funções e proposições lógicas. Foi nesta janela que foram inseridas as condições lógicas de acordo com as equações 2.14, 2.15, 2.16.
- Janela de visualização - Nessa janela, são exibidos os controles da simulação como botões, caixas de visualização, controle deslizante.

- Janela de visualização 3D - Nessa janela é visualizada a execução de tudo que foi inserido, programado e controlado nas janelas anteriores.

Figura 20 – Área de programação para um objeto no GeoGebra



Figura 21 – Área de programação do botão iniciar/pausar



É importante destacar que o software de modelagem no GeoGebra foi executado nos navegadores Google Chrome (versão: 102.0.5005.115) e Microsoft Edge (versão: 102.0.1245.41). Este último se mostrou mais eficaz na manipulação das variáveis e na reprodução das animações. Devido a isto, o navegador Microsoft Edge foi utilizado pelos alunos na aplicação deste produto educacional.

Nesta seção foi apresentado, de forma breve, o mínimo necessário utilizado na criação do ambiente de modelagem das Figuras de Chladni. Claro que há muitos outros

detalhes envolvidos na criação desse ambiente computacional. A modelagem pode ser melhor otimizada e possuir mais ferramentas de controles e de visualização. Ela passa por um processo de constante aprimoramento. Mas a princípio, o software é mais que suficiente para a visualização e entendimento sobre a formação dos padrões estacionários de Chladni.

4 Proposta para Aplicação do Produto

4.1 Método Ensino Investigativo

Baptista (2010) destaca uma classificação das atividades (Quadro 2) proposta por Monk (1995) quanto ao grau de abertura de uma investigação no âmbito educacional. Desta forma, o professor consegue melhor ter a noção das atividades que se deve criar para exigir do aluno níveis de habilidades em conformidade com os objetivos educacionais planejados para a implementação do problema através da sequência de ensino investigativo.

Quadro 2 – Grau de abertura de uma investigação

Definição do Problema	- Mais prescritivo - Variáveis especificadas e operacionalizadas	Fechada
	- Mais exploratório - Variáveis não são especificadas	Aberta
Escolha do Método	- O professor diz aos alunos o que fazer, ou fornece o material	Fechada
	- Escolha livre do procedimento	Aberta
Solução	- Uma solução aceitável	Fechada
	- Várias soluções aceitáveis	Aberta

Fonte: (MONK, 1995, p. 76)

4.2 Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa

Segundo Cochito (2004), o sucesso da dinâmica de um grupo cooperativo passará, no mínimo, pela distribuição de funções em cada grupo. Desta forma, cada aluno terá um papel fundamental no alcance do objetivo de resolver o problema investigativo. Dentre outras, podemos destacar as seguintes funções de grupos cooperativos (COCHITO, 2004, p. 87):

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entres os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.

- **Escriba:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

4.3 Estrutura das Aulas

Em uma aula anterior à aplicação do produto, é importante que seja mostrado aos alunos como funcionará a dinâmica do ensino por investigação, juntamente com um pré-teste a fim de verificar os conhecimentos prévios dos mesmos acerca da ondulatória. Essa tarefa pode ser realizada pelos alunos fora da sala de aula.

As aulas devem ser distribuídas da seguinte forma:

Quadro 3 – Distribuição das Aulas.

Aula	Descrição das atividades	Duração
1	- Aula tradicional, utilizando slides, explicando o experimento de Chladni dentro do contexto histórico, e mostrando a aplicação deste com ênfase em uma abordagem bidimensional.	40 min
	- Formação dos grupos, distribuição das funções entre os alunos, e explicação da atividade que os grupos irão realizar.	10 min
2	- Os alunos realizam a atividade de modelagem computacional no GeoGebra, seguindo um roteiro estabelecido.	50 min
3 e 4	- Os grupos executam um roteiro experimental formando as figuras de Chladni.	80 min
	- Os grupos discutem e resolvem o problema proposto em consonância com a tipologia de investigações.	20 min
	- Aplicação da Etapa 4 do ensino por investigação em que os alunos escrevem sobre o que aprenderam na aula.	—
5	- Os grupos apresentam os resultados a partir de cada escriba.	30 min
	- Aplicação da Etapa 3 do ensino por investigação em que perguntas são feitas aos alunos, visando uma discussão com a turma inteira a fim de esclarecer conceitos não tão bem compreendidos.	20 min
	- Aplicação do pós-teste.	—

De forma opcional, o pós-teste pode ser aplicado a fim de verificar o que houve de ganho na aprendizagem de cada aluno.

4.3.1 Material para a Aula 1

A sugestão é que na primeira seja recapitulado os tópicos já estudados pelos alunos, mas de modo a destacar o caso bidimensional em comparação com o caso unidimensional. Nesta aula, de maneira breve, deve ser tratado o estudo das ondas mecânicas com ênfase no experimento de Ernst Chladni e suas aplicações. Nesta aula, ainda deve haver a formação de grupos com cinco alunos escolhidos de maneira aleatória, sendo explicadas as atribuições de cada função dentro do grupo. A preferência é de que as funções (Seção 4.2) sejam escolhidas em comum acordo entre os integrantes de cada grupo.

A seguir, temos a sugestão da apresentação dos slides para esta aula:



ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

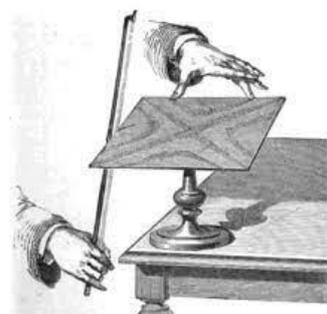
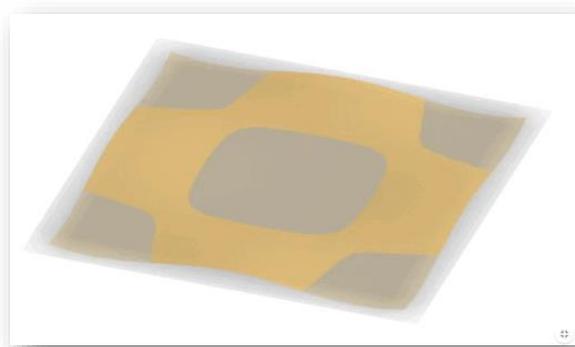
Escola: Colégio Estadual José Amaral Lemos

Professor: Thomaz Santos Neres

Disciplina: Física

1 Introdução

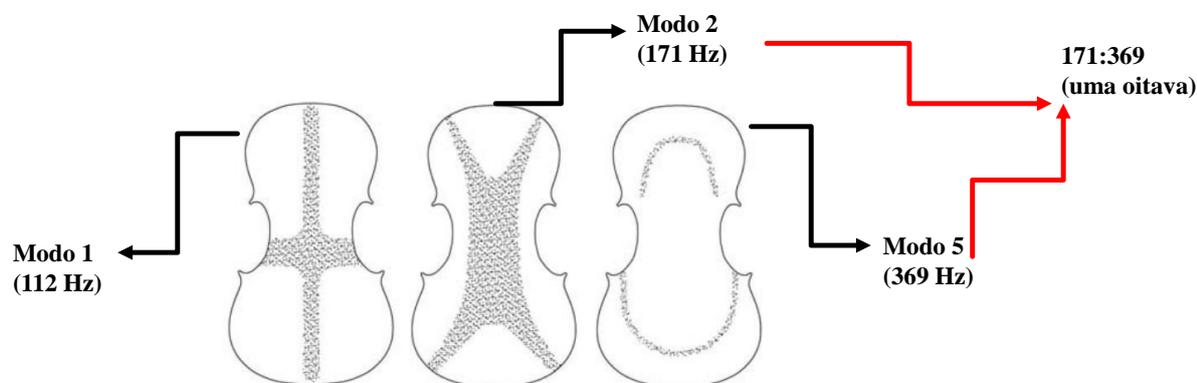
- Ernest Florens Friedrich Chladni (1756-1827) foi o primeiro a explorar a vibração de placas e barras, utilizando areias finas para demonstrar, visualmente, a existência de padrões bidimensionais nesses materiais.



2

1 Introdução

- Os padrões de ondas estacionárias (Figuras de Chladni) têm relevante aplicação no campo da música na determinação da **qualidade de instrumentos** feitos de madeira como violino e violão.



Fonte – (Donoso et al., 2008)

3

Onda Unidimensional (uma dimensão)



$$f = \frac{nv}{L2}$$

Número de ventres

→

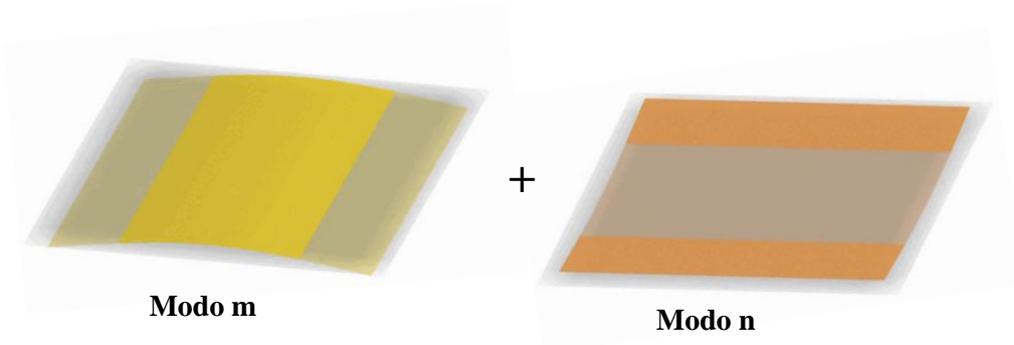
$$f = \frac{n}{L} \cdot \text{constante}$$

Frequência

Comprimento da corda

4

Onda Bidimensional (duas dimensões)



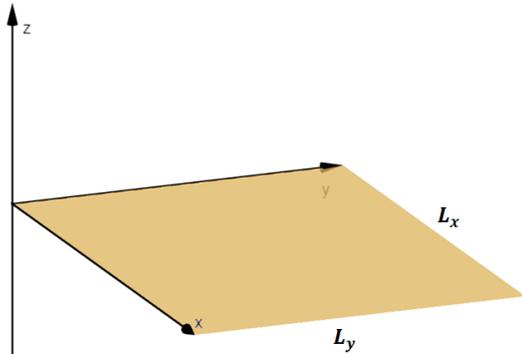
$$f = \frac{1}{L^2} \left[\frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \right] \cdot \xi_{mn}$$

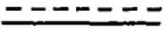
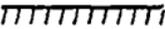
constante

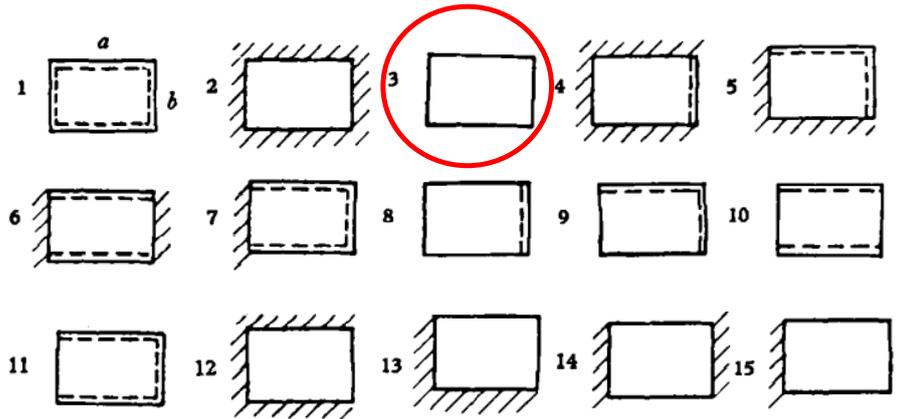
fator de frequência

5

Vibração de uma Placa Quadrada

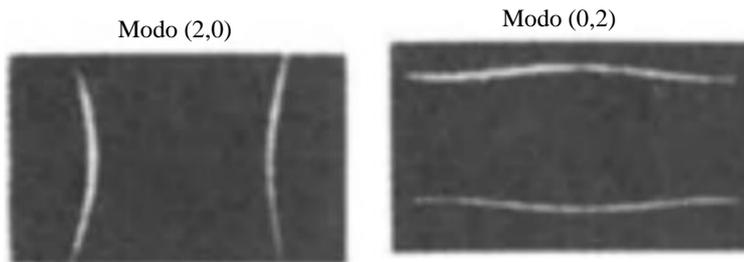


-  Bordas livres suportadas
-  Bordas fixas
-  Bordas livres

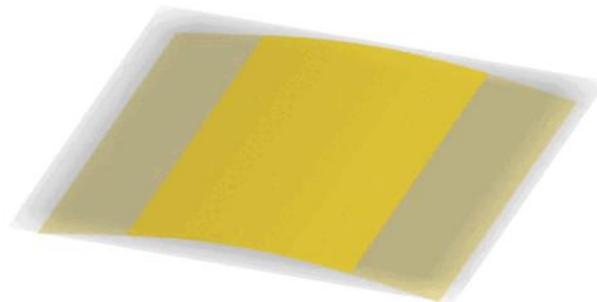


(WARBURTON, 1954)

Placa Retangular com Bordas Livres



Vibração de uma placa retangular. (FLETCHER, 1998)



Placa Quadrada com Bordas Livres

$\text{modo } (2,0) - (0,2)$
 $\text{modo } (2,0) + (0,2)$

Modelagem Computacional

Tempo
 $t = 3.83$

Modos de vibração
 $m = 2$ $n = 2$

Dimensões da Placa
 $L_x = 30$ $L_y = 30$

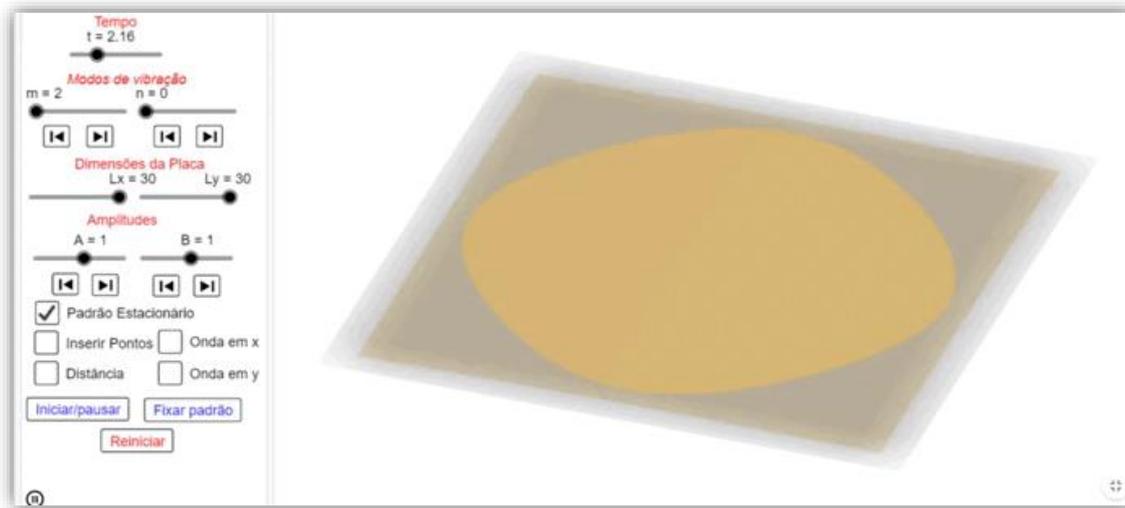
Amplitudes
 $A = 1$ $B = 1$

Padrão Estacionário
 Inserir Pontos Onda em x
 Distância Onda em y

Iniciar/pausar Fixar padrão
 Reiniciar

nivelamento = 0°
 distância = 14.42 cm

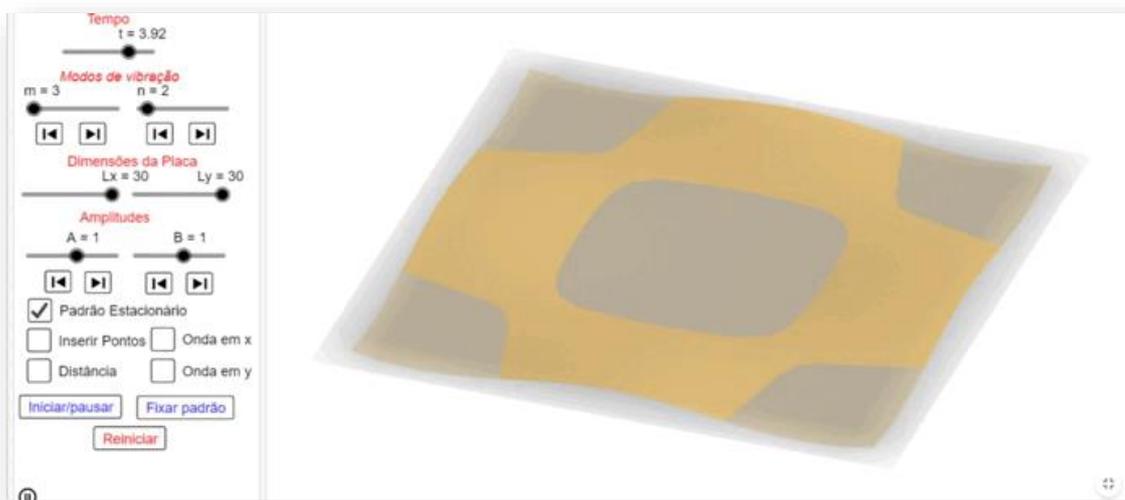
Modelagem Computacional



10

Roteiro Experimental

Modelagem computacional

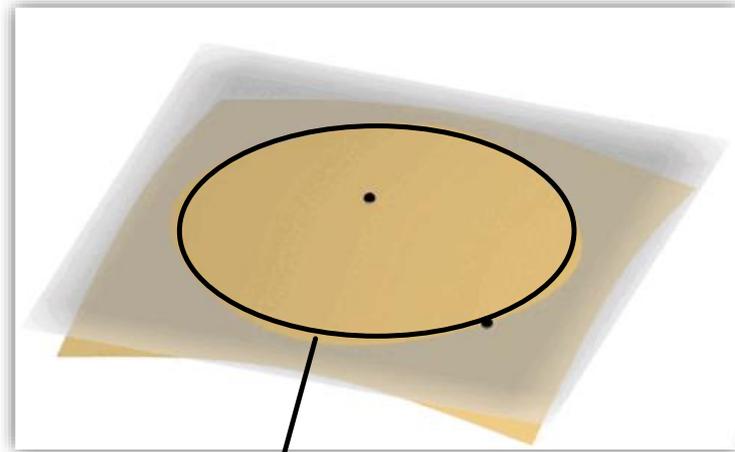


11

Alguns Resultados do Experimento das Figuras de Chladni



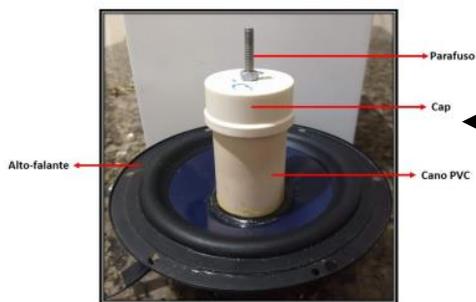
124 Hz



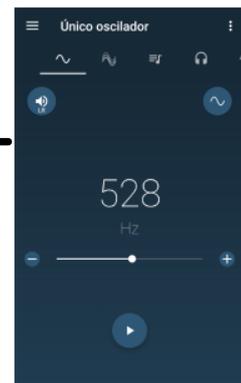
Região da placa que não vibra (linha nodal)

12

Material Elaborado



Amplificador Bluetooth



App "Gerador de Frequência"

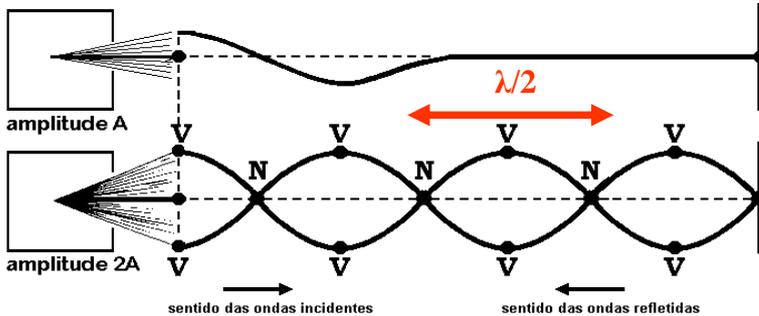


13

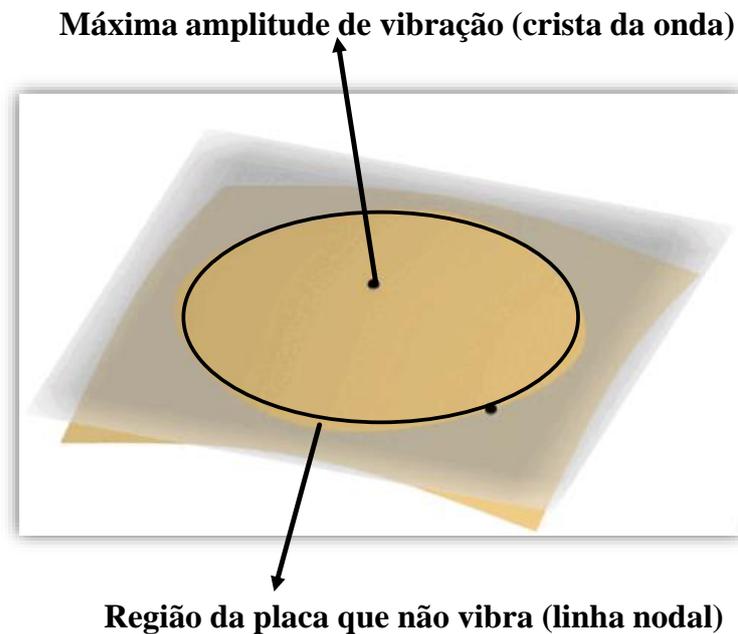
Onda unidimensional

vs

Onda bidimensional



- A distância entre dois nós (pontos nodais) consecutivos é $\lambda/2$ (metade do comprimento de onda).
- Quando a frequência (f) aumenta, o comprimento de onda (λ) diminui proporcionalmente.



14

Funções de Grupos Cooperativos

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entre os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.
- **Escreva:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

15

4.3.2 Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional

A formação das figuras de Chladni não é tão simples de ser entendida. Muitos alunos podem achar, inicialmente, que se trata de uma força de atração entre os grãos de farinha (ou areia), quando na verdade existem regiões na onda estacionária em que ocorrem interferências totalmente destrutivas chamadas de linhas nodais. Desta forma, os grãos vibram se deslocando para essas regiões.

A fim de representar esse fenômeno através da visualização do movimento de vibração da placa, criamos um ambiente de modelagem computacional a partir do software GeoGebra. Desta forma, os alunos poderiam relacionar os resultados teóricos com os experimentais, agregando conhecimento e impulsionando nova aprendizagem. A descrição detalhada do software bem como a forma de acessá-lo está na Seção 3.2.

O seguinte roteiro no GeoGebra deverá ser realizado pelos grupos:

Professor:

Roteiro da Atividade de Modelagem Computacional

Grupo:	Data:	Local:
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escriba		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) Acesse o ambiente de modelagem das Figuras de Chladni em <https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>
- 2) Para gerar um padrão estacionário, altere os modos de vibração m e n para $m = 2$ e $n = 0$ com $B = 1$, e clique em *Iniciar*;
- 3) Clique em *Inserir Pontos* e observe seu movimento de vibração;
- 4) Clique em *Fixar Padrão* e leve os pontos para regiões de máxima e mínima amplitudes de vibração da placa. Inicie a simulação;
- 5) Como é chamada a região em que o ponto permaneceu parado? Numa situação real, qual seria o comportamento de uma partícula livre que estivesse em uma região de amplitude máxima? Como se chama essa região de máxima amplitude?

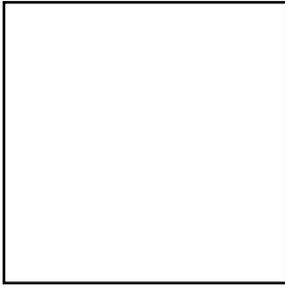
Resposta:

- 6) Gere a figura com os modos de vibração $m = 2$, $n = 2$;
- 7) Insira os pontos e clique em *Fixar Padrão*. Depois clique em *Distância* e leve os pontos para duas linhas nodais paralelas consecutivas. Para isto, mova os pontos buscando o valor mais próximo do nivelamento igual a zero e anote o valor da distância entre os dois pontos. O que é essa distância medida entre os dois pontos?

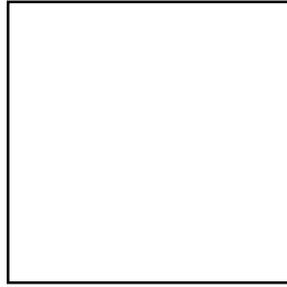
Resposta:

Professor:

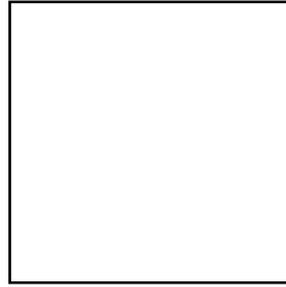
8) Registrando as imagens e os modos de vibração abaixo, gere as figuras referentes aos seguintes padrões:



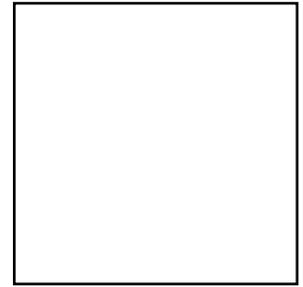
$m=2, n=0$ ($B= 1$)



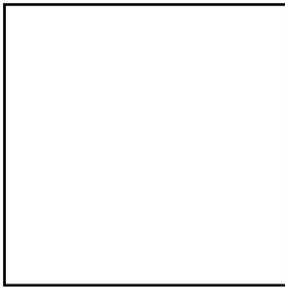
$m=2, n=0$ ($B= - 1$)



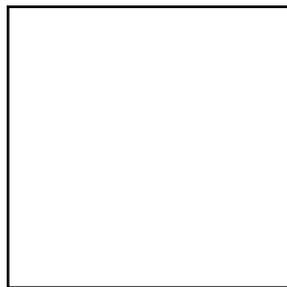
$m=3, n=1$ ($B= 1$)



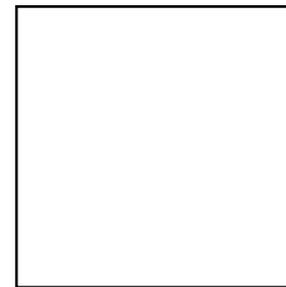
$m=3, n=2$ ($B= 1$)



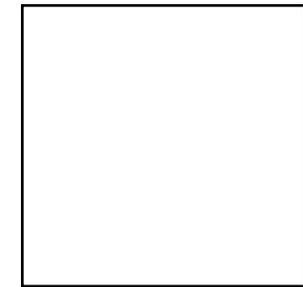
$m=4, n=0$ ($B= 1$)



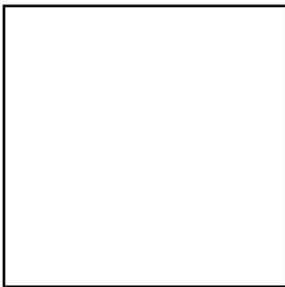
$m=4, n=0$ ($B= -1$)



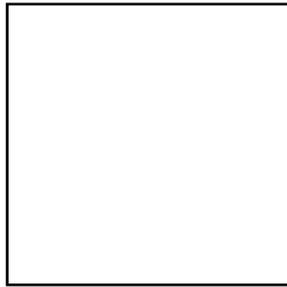
$m=2, n= 2$ ($B=1$)



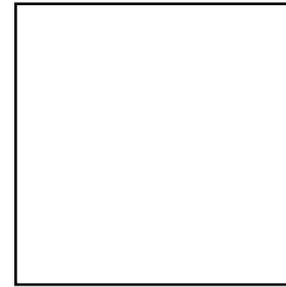
$m=3, n=1$ ($B= -1$)



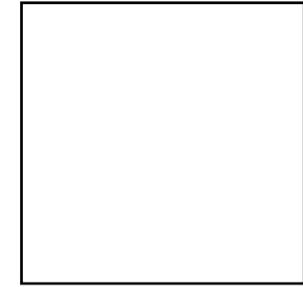
$m=4, n=2$ ($B= -1$)



$m=4, n=6$ ($B= -1$)



$m=6, n= 2$ ($B= -1$)



$m= 7, n=3$ ($B= 1$)

9) O que deve ocorrer com a frequência de vibração da placa à medida que os modos de vibração m e n aumentam? O que deve acontecer com o comprimento de onda? O que se observa nas figuras?

Resposta:

4.3.3 Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni

Nesse experimento, os alunos buscarão formar pelo menos cinco figuras de Chladni, utilizando farinha em duas placas quadradas de ferro com lados de 25 cm e 20 cm , e 1 mm de espessura. Os alunos manipularão a vibração das placas através do aplicativo chamado *gerador de frequência*. O sinal de frequência chega a um amplificador bluetooth. A partir deste, o som sai amplificado para um alto-falante.

Nessa atividade experimental, através de uma análise gráfica, os alunos devem encontrar uma relação entre as frequências de ressonância das placas e suas dimensões, algo que normalmente é trabalhado em laboratórios de ensino com casos unidimensionais, como em cordas vibrantes.

Os grupos devem manipular o experimento de Chladni da seguinte forma:

Professor:

Roteiro da Atividade Experimental

Grupo:	Data:	Local:
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escreva		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) Utilizando a placa de ferro de $(25\text{ cm})^2$:
- Forme os padrões de Chladni para cinco (5) frequências de ressonância distintas.
 - Anote os valores das frequências de ressonância e, através de desenhos, registre as imagens dos padrões de Chladni nos espaços abaixo.

Figura 1

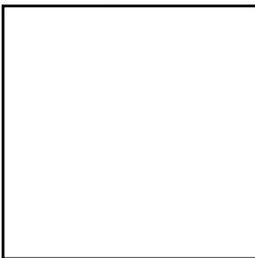


Figura 2

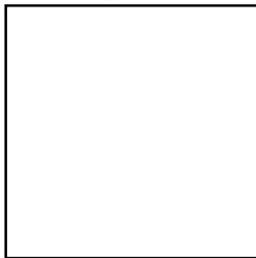


Figura 3

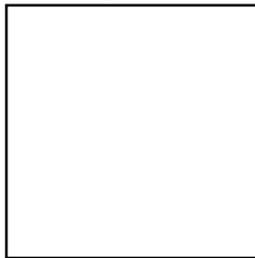


Figura 4

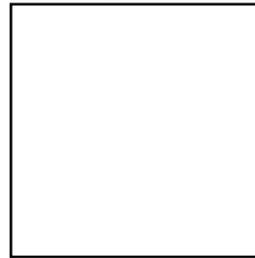
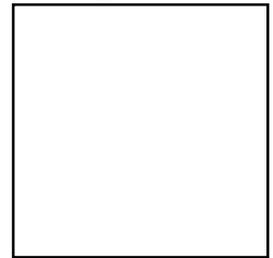


Figura 5



$f_1 = \text{_____ Hz}$

$f_2 = \text{_____ Hz}$

$f_3 = \text{_____ Hz}$

$f_4 = \text{_____ Hz}$

$f_5 = \text{_____ Hz}$

- 2) Quais são as variáveis utilizadas para controlar a vibração da placa?

Resposta:

- 3) O que ocorre na placa metálica juntamente com os grãos quando apenas a frequência de vibração é modificada? E quando somente o volume da fonte é alterado?

Resposta:

Professor:

- 4) Repita o mesmo procedimento do item “1)” para a placa de ferro $(20 \text{ cm})^2$, procurando encontrar as mesmas figuras já encontradas para a placa anterior. Anote os valores das novas frequências de ressonância.

Figura 1

$$f_1' = \text{_____ Hz}$$

Figura 2

$$f_2' = \text{_____ Hz}$$

Figura 3

$$f_3' = \text{_____ Hz}$$

Figura 4

$$f_4' = \text{_____ Hz}$$

Figura 5

$$f_5' = \text{_____ Hz}$$

- 5) Por que, nas duas placas de ferro, as mesmas figuras se formaram, mas em frequências diferentes?

Resposta:

- 6) A partir dos valores das frequências de ressonância das duas placas de ferro, trace um gráfico de $f' \times f$, utilizando a planilha de dados no Excel, onde f' e f são as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20 \text{ cm})^2$ e $(25 \text{ cm})^2$ respectivamente.

- a) Perceba que, no gráfico, é gerada uma função da forma $y = \mathbf{a} \cdot x + b$. Compare-a com $f' = \mathbf{a} \cdot f$, e anote o valor do coeficiente angular \mathbf{a} .

Resposta:

$$\mathbf{a} = \text{_____}$$

- b) Calcule o quociente entre as áreas das placas de ferro $(25 \text{ cm})^2$ e $(20 \text{ cm})^2$.

Resposta:

$$\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \text{_____}$$

- c) De acordo com os itens anteriores, qual o significado matemático do coeficiente angular \mathbf{a} ?

Resposta:

Professor:

- 7) O que aconteceu com a frequência de ressonância da placa de ferro quando se diminuiu o comprimento desta, mantendo a mesma espessura, para formar a mesma figura? Relacionando a resposta anterior à equação $f_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn}}{L^2} \cdot constante$, o que se pode concluir sobre a relação da frequência de ressonância e o comprimento de uma mesma placa quadrada?

Resposta:

4.3.4 Material para Construção de Gráfico

Na atividade de experimento das figuras de Chladni, os grupos precisarão criar um gráfico das frequências de ressonância das duas placas de ferro a fim de analisar o coeficiente angular da reta gerada. Na Figura 22 temos o modelo de arquivo no excel utilizado pelos alunos para preenchimento dos dados de forma que o gráfico e os coeficientes da equação são gerados automaticamente.

Figura 22 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância

TURMA :		Análise do coeficiente angular do gráfico																					
		Frequência f: frequência de ressonância da placa de ferro (25 cm) ² Frequência f': frequência de ressonância da placa de ferro (20 cm) ²																					
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Frequência f (Hz)</th> <th>Frequência f' (Hz)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	Frequência f (Hz)	Frequência f' (Hz)											<div style="font-size: 2em; opacity: 0.5;">Sem dados</div>		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Função Linear</th> </tr> <tr> <th colspan="2">y = ax + b</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>coeficiente angular</td> <td>coeficiente linear</td> </tr> <tr> <td>a =</td> <td>b =</td> </tr> </tbody> </table>	Função Linear		y = ax + b		coeficiente angular	coeficiente linear	a =	b =
Frequência f (Hz)	Frequência f' (Hz)																						
Função Linear																							
y = ax + b																							
coeficiente angular	coeficiente linear																						
a =	b =																						

[Link de acesso](#)

Para poder editar o arquivo de forma online, é necessário que se faça uma cópia, clicando em **Arquivo** → **Fazer uma cópia**.

4.3.5 Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni

Após a obtenção dos resultados, tanto no GeoGebra como no experimento com as placas metálicas, os grupos devem identificar os padrões em comum nas duas atividades anteriores a fim de tentarem perceber que a teoria e o experimento estão intimamente conectados. Com isso, os alunos concluem como as figuras de Chladni se formam.

A seguir, o roteiro desta atividade.

Professor:

Roteiro da Atividade Experimental e Computacional

Grupo:	Data:	Local:
Funções		Componentes
Facilitador		
Escriba		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) O que se observa nas figuras das placas de ferro? Encontrou alguma figura semelhante às aquelas observadas no GeoGebra? Quais?

Resposta:

Placa	Frequências de ressonância (Hz)					Modos de vibração (m,n)				
Ferro (25 cm)²										

- 2) De acordo com o que observaram na modelagem e no experimento, expliquem como as figuras de Chladni se formam. Por que os grãos se concentram em determinadas regiões da placa?

Resposta:

- 3) O que vocês acharam do experimento e da atividade realizada?

Resposta:

4.3.6 Links de Acesso aos Materiais da Aplicação do Produto

Disponibilizamos no Quadro 4 os links de acesso aos materiais utilizados na aplicação deste produto educacional.

Quadro 4 – Acesso aos materiais

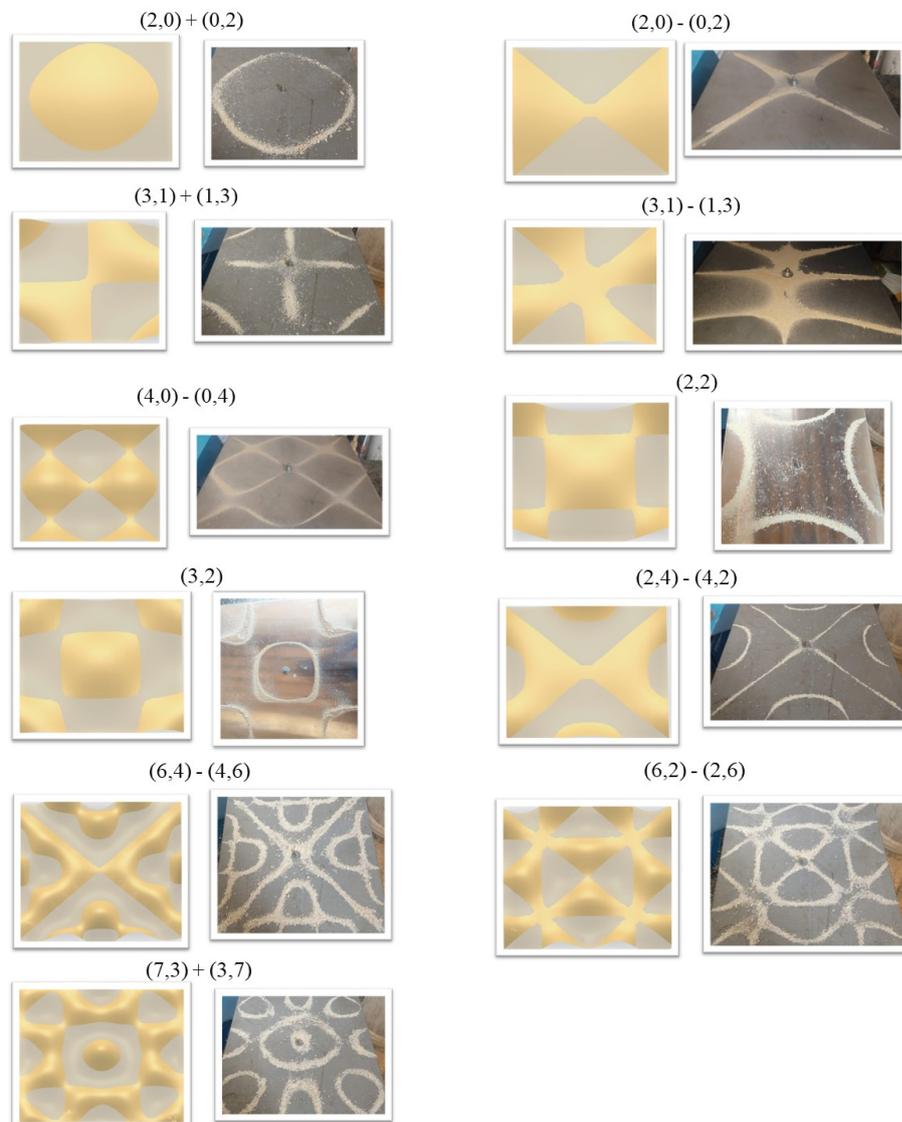
Material	Acesso
Atividade com modelagem computacional	link
Atividade com Experimento de Chladni	link
Atividade com modelagem e experimento	link
Planilha para construção de gráfico	link
Modelagem das Figuras de Chladni	link
Material da primeira aula	link
Pré-teste	link
Pós-teste	link
App Gerador de Frequência	link

5 Resultados Esperados

5.1 Modelagem Computacional das Figuras de Chladni

A fim de analisar e representar virtualmente alguns dos padrões de Chladni para o problema da placa quadrada com os quatro lados livres, foi utilizado o ambiente matemático gratuito *GeoGebra* a partir das equações 2.14, 2.15, 2.16. Podemos destacar alguns dos resultados obtidos através do simulador em comparação com o experimento.

Figura 23 – Comparações de modos: modelagem x experimento



Fonte: Autor

Os resultados da modelagem e do experimento estão em conformidade com o que Leissa (1993) escreveu a partir de um compilado de estudos.

5.2 Experimento das Figuras de Chladni

5.2.0.1 Experimento com Placas de Ferro

Considerando a possibilidade de variações nos valores de frequência nas medidas durante a execução do experimento, uma série de variações de frequência foi realizada para um mesmo modo de vibração. Com esses valores foi possível estimar um valor médio para o modo de vibração escolhido, e, além disso, estimar uma incerteza para a medida. Decidiu-se adotar um modo rústico para obtenção da média e da incerteza. Um modo simples e que, ao mesmo tempo, iria garantir que qualquer valor medido pelos alunos estaria dentro do intervalo estimado, não gerando dúvidas quanto a validade dos resultados experimentais. Além de ser de simples aplicação para alunos e professores.

Neste modo, por exemplo, o valor médio não foi encontrado a partir de média simples, mas sim identificando dentro do intervalo de frequências obtido quais os valores máximo e mínimo encontrados para cada padrão estacionário. A partir disso, um intervalo de confiança de frequência foi estabelecido para cada figura de Chladni formada, de modo que:

$$p = f_{max} - f_{min}$$

Considerando esta abordagem, a incerteza é calculada por:

$$\delta = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$$

Desta forma, existe a garantia de que a frequência de ressonância f medida para cada padrão estacionário esteja entre f_{min} e f_{max} , $f_{min} < f < f_{max}$. Como o valor verdadeiro da frequência de ressonância não é conhecido, fizemos uma estimativa da medida por meio do valor médio do intervalo de confiança:

$$\bar{f} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

Desta forma, o valor da frequência de ressonância para cada figura de Chladni corresponde a:

$$f = \bar{f} \pm \delta$$

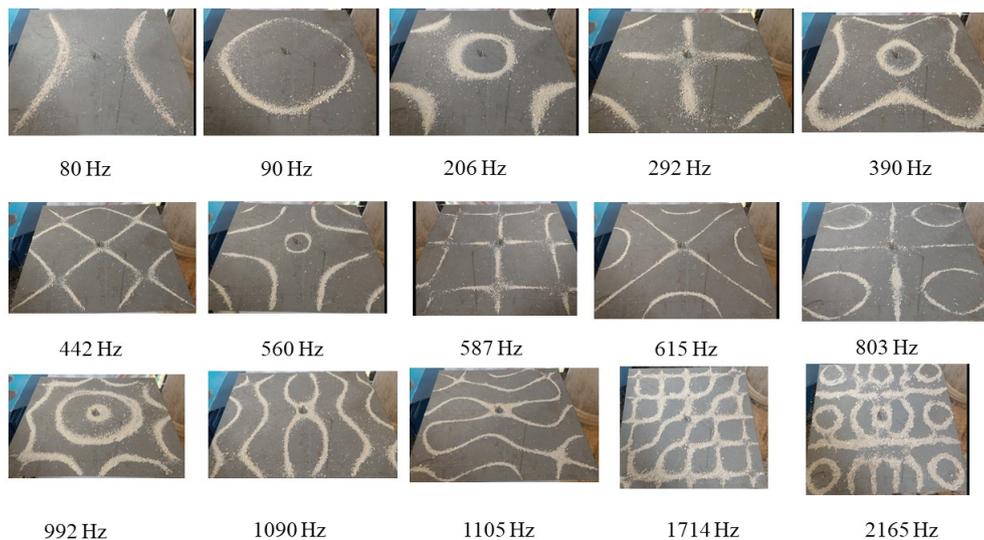
Na Tabela 2 temos as frequências de ressonância para nove padrões estacionários com suas incertezas, onde f' e f representam as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$ respectivamente.

Tabela 2 – Frequências de ressonância nas placas de ferro

$f'(Hz) : (20\text{ cm})^2$	$f(Hz) : (25\text{ cm})^2$
$79,0 \pm 3,0$	$119,5 \pm 1,5$
$88,5 \pm 1,5$	$125,5 \pm 2,5$
$216,5 \pm 0,5$	$335,0 \pm 5,0$
$291,5 \pm 0,5$	$454,5 \pm 0,5$
$404,5 \pm 7,5$	$605,0 \pm 5,0$
$442,0 \pm 2,0$	$686,0 \pm 1,0$
$569,0 \pm 5,0$	$875,0 \pm 5,0$
$587,5 \pm 0,5$	$903,5 \pm 0,5$
$615,5 \pm 0,5$	$950,5 \pm 0,5$

Na Figura 24, temos algumas das figuras de Chladni formadas utilizando uma placa de ferro quadrada de lado 25 cm e grãos de farinha.

Figura 24 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$



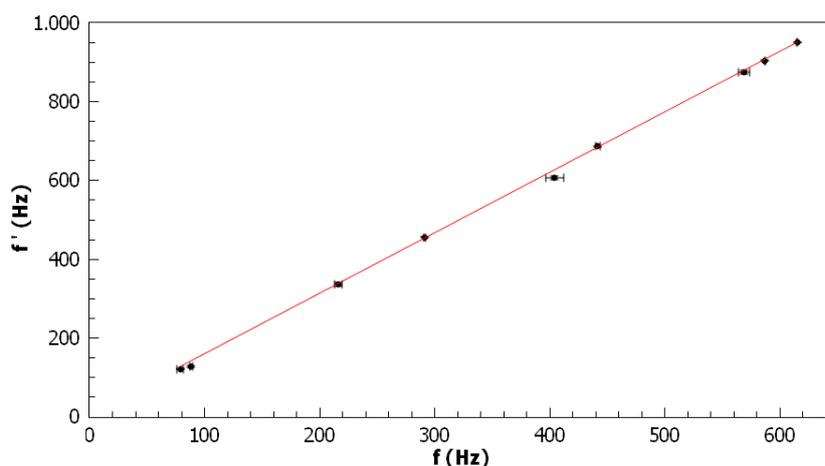
Fonte: Autor

A partir dos valores tabelados (Tabela 2) das frequências de ressonância para as duas placas de ferro, foi plotado um gráfico utilizando regressão linear como se pode observar na Figura 25.

Encontramos como coeficientes angular e linear $1,534 \pm 0,002$ e $5,2 \pm 0,8$ respectivamente. O próximo passo seria a comparação com os valores teóricos. A descrição da obtenção destes valores é descrita a seguir a partir da Equação 2.7.

Adotando placas de mesmo material e de mesmas espessuras, as frequências de ressonância destas são inversamente proporcionais ao quadrado do lado.

$$f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante \tag{5.1}$$

Figura 25 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro

Da Equação 5.1 chegamos à seguinte relação entre as frequências e as dimensões para as duas placas de mesmo material:

$$f' = \frac{L^2}{L'^2} \cdot f \quad (5.2)$$

Desta forma, tomando as placas de ferro de $(20 \text{ cm})^2$ e $(25 \text{ cm})^2$, encontramos o seguinte valor teórico do coeficiente angular:

$$\frac{L^2}{L'^2} = \frac{25^2}{20^2} = 1,56 \quad (5.3)$$

A incerteza relativa foi de aproximadamente 0,13%. O erro relativo foi dado por 1,9%. Os resultados mostram que o experimento tem ótima exatidão e precisão. Ao analisar o resultado e o fato da média e da incerteza terem sido estimadas de forma rústica, conclui-se que o experimento dará “conforto” para quem precisa encontrar as frequências de ressonância, até mesmo estudá-las comparando com a teoria.

Tudo que foi mostrado e discutido é relevante para o professor que pretender aplicar esse experimento, principalmente pelo fato da Tabela 2 apresentar os intervalos de confiança das frequências que possivelmente os alunos devem encontrar.

5.2.0.2 Experimento com Placas de Alumínio

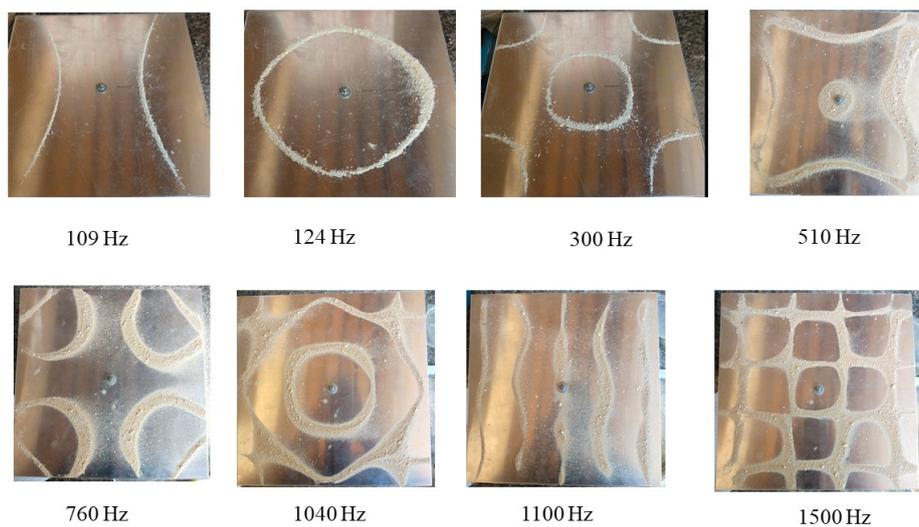
Desta vez, sem enfatizar as incertezas, buscando aproximadamente seguir o roteiro experimental do produto educacional de maneira prévia ao que os alunos fariam na escola durante a aplicação da atividade experimental, foram feitos testes também com placas de alumínio e de aço, utilizando areia da praia e também farinha. Ambos os resultados foram satisfatórios. Nas Figuras 28, 26, estão destacadas algumas das figuras geradas com suas respectivas frequências de ressonância.

Um resultado bem significativo também foi encontrado de acordo com o que se esperava da teoria (Equação 2.7). Foram geradas quatro figuras semelhantes em duas placas de alumínio de áreas diferentes, $(30\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$, mas com mesmas espessuras, 2 mm. Na Tabela 3, são apresentadas as frequências utilizadas para formar os quatro primeiros padrões da Figura 26.

Tabela 3 – Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões

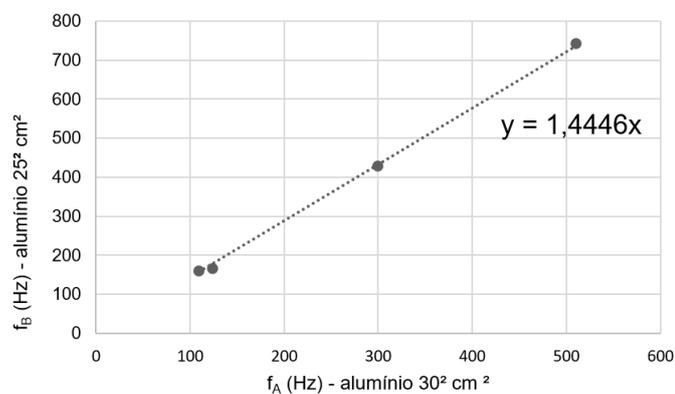
f_A - placa de alumínio 30^2 cm^2	f_B - placa de alumínio 25^2 cm^2
109 Hz	160 Hz
124 Hz	166 Hz
300 Hz	429 Hz
510 Hz	742 Hz

Figura 26 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$



Fonte: Autor

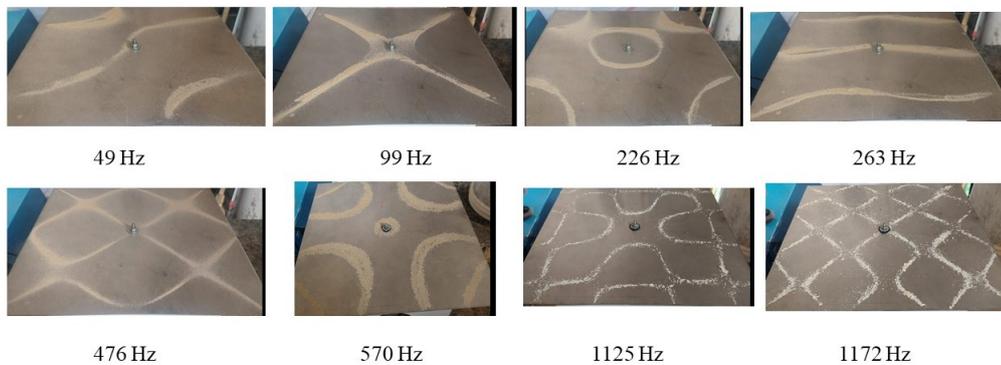
Figura 27 – Figura $f_B \times f_A$



Da Equação 5.1, foi verificado a partir do gráfico (Figura 27) que o coeficiente angular está de acordo com a Equação 5.2.

$$\frac{L_A^2}{L_B^2} = \frac{30^2}{25^2} = 1,44 \quad (5.4)$$

Figura 28 – Figuras de Chladni na placa de aço 25 cm × 25 cm



Fonte: Autor

Referências

- BAPTISTA, M. Concepção e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico. 2010. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1854>>.
- BLANCAS, P. G. *PFC: IMPLEMENTACIÓN DE PRÁCTICAS DE DINÁMICA ESTRUCTURAL EN EL LABORATORIO*. 2011. <<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60109/fichero/4.Vibraci%C3%B3n+de+una+placa+cuadrada%252FVIBRACI%C3%93N+DE+UNA+PLACA+CUADRADA.pdf>>. Acessado em 25/04/2021.
- BRACHO, L. A. C.; PRIETO, J. L.; SÁNCHEZ, I. C.; ARAUJO, R. E. G. Uma experiência de elaboração de um simulador com geogebra para o ensino do movimento parabólico. *Paradigma*, Instituto Pedagógico de Maracay, n. 2, p. 196–217, 2019.
- COCHITO, M. Cooperação e aprendizagem: educação intercultural. *Lisboa: Acime*, p. 180, 2004.
- DONOSO, J. P.; TANNÚS, A.; GUIMARAES, F.; FREITAS, T. C. d. A física do violino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 2305–1, 2008.
- FLETCHER, T. D. R. a. N. H. *The Physics of Musical Instruments*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998. ISBN 978-1-4419-3120-7,978-0-387-21603-4.
- GEOGEBRA. 2021. <<https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>>. Acessado em 22/03/2021.
- HENRIQUE, L. *Acústica musical*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. (Manuais universitários). ISBN 9789723109870. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5h3FGwAACAAJ>>.
- LEISSA, A. *Vibration of Plates*. [S.l.]: Asoa, 1993.
- LIMA, P. H. R. d. Análise modal experimental de placa flexível acoplada à cavidade acústica por vibrometro laser. 2017.
- MELO, G. F. d. *O USO DO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NO ENSINO DE OSCILAÇÕES E CONCEITOS DE ONDA*. Dissertação (Mestrado), 2021.
- MONK, J. D. M. *Learning To Teach Science: Activities For Student Teachers And Mentors*. 1. ed. [S.l.]: Taylor Francis Group, 1995. ISBN 0-203-39254-X.
- RIBEIRO, A. Desenvolvimento de simulações em geogebra para o ensino da cinemática. Universidade Federal do Maranhão, 2019.
- SANTOS, R. S. d.; FILHO, P. S. d. C.; ROCHA, Z. d. F. D. C. Descobertas sobre a teoria do som: a história dos padrões de chladni e sua contribuição para o campo da acústica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018.

SANTOS, R. S. d. et al. *Estudo da influência das affordances para aprendizagem de ressonância em meios materiais por meio dos padrões de Chladni*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 168, n. 1, p. 371–384, 1954. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1954_168_040_02>.