



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA - POLO 11

PRODUTO EDUCACIONAL

ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

Thomaz Santos Neres

Produto educacional submetido ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Sergipe no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:

Prof. Dr. Emerson Luis de Santa Helena

Coorientador:

Prof. Dr. Edvaldo Alves de Souza Junior

São Cristóvão/SE

Agosto/2022

Apresentação

Este produto educacional foi desenvolvido para a aplicação de um trabalho experimental e computacional sobre o conteúdo de ondas bidimensionais, como parte de um estudo de Física da dissertação de mestrado cujo título é “Estudo da Vibração de Placas Através dos Padrões Estacionários de Chladni”, por meio do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, na Universidade Federal de Sergipe.

Este documento fornecerá uma guia para montagem do experimento e para a utilização da aplicação computacional desenvolvida através do software GeoGebra. Além disso, é apresentada uma sugestão de roteiro de aplicação do produto (com características de sequência didática) baseada na metodologia ensino por investigação. Porém, é importante destacar que o professor que desejar aplicá-la pode adaptá-la de acordo com o próprio contexto escolar. Salienta-se também que, embora o conteúdo seja apresentado com um único produto, tanto o material experimental como o computacional podem ser trabalhados de forma independente, comportando-se cada um como um único produto, a depender do desejo ou das condições de trabalho do professor.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino	8
Figura 2 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada	11
Figura 3 – placa de lados L_x e L_y no plano XY	12
Figura 4 – Terceiro modo	13
Figura 5 – Modos de vibração independentes	15
Figura 6 – Modo X, (2,0) - (0,2), e do modo anel, (2,0) + (0,2)	16
Figura 7 – Combinação dos modos (2,0) e (0,2)	16
Figura 8 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre	16
Figura 9 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante	18
Figura 10 – Amplificadores de áudio.	19
Figura 11 – Conexão do amplificador ao alto-falante	19
Figura 12 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira	19
Figura 13 – Placas Metálicas	20
Figura 14 – Esquema de encaixe da placa metálica	20
Figura 15 – Areia e farinha utilizadas no experimento	21
Figura 16 – Protetor Auricular	21
Figura 17 – Imagem da tela inicial do Aplicativo <i>Gerador de Frequência</i>	22
Figura 18 – Interface da modelagem no GeoGebra	23
Figura 19 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D	23
Figura 20 – Área de programação para um objeto no GeoGebra	24
Figura 21 – Área de programação do botão iniciar/pausar	24
Figura 22 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância	45
Figura 23 – Comparações de modos: modelagem x experimento	48
Figura 24 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	50
Figura 25 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro	51
Figura 26 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$	52
Figura 27 – Figura $f_B \times f_A$	52
Figura 28 – Figuras de Chladni na placa de aço $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$	53

Lista de quadros

Quadro 1 – Materiais utilizados.	17
Quadro 2 – Grau de abertura de uma investigação	26
Quadro 3 – Distribuição das Aulas.	28
Quadro 4 – Acesso aos materiais	47

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Coeficientes da Equação 2.8 para a placa de extremidades livres . . .	12
Tabela 2	–	Frequências de ressonância nas placas de ferro	50
Tabela 3	–	Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões	52

Lista de abreviaturas e siglas

SBF: Sociedade Brasileira de Física

MNPEF: Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

UFS: Universidade Federal de Sergipe

2D: Duas dimensões

3D: Três dimensões

PVC: Policloreto de vinila

Sumário

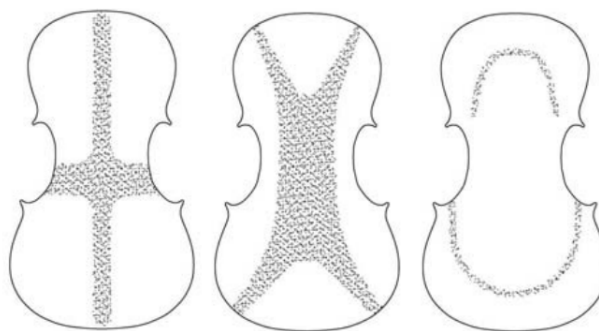
1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Objetivo	9
1.1.1	Objetivo Geral	9
1.1.2	Objetivos Específicos	9
2	PRINCIPAIS FUNDAMENTOS	10
2.1	Vibração de uma Placa Retangular	10
3	PRODUTO	17
3.1	Materiais e Confeção do Experimento de Chladni	17
3.2	Aplicação Computacional para Figuras de Chladni	22
4	PROPOSTA PARA APLICAÇÃO DO PRODUTO	26
4.1	Método Ensino Investigativo	26
4.2	Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa	26
4.3	Estrutura das Aulas	28
4.3.1	Material para a Aula 1	29
4.3.2	Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional	38
4.3.3	Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni	41
4.3.4	Material para Construção de Gráfico	45
4.3.5	Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni	45
4.3.6	Links de Acesso aos Materiais da Aplicação do Produto	47
5	RESULTADOS ESPERADOS	48
5.1	Modelagem Computacional das Figuras de Chladni	48
5.2	Experimento das Figuras de Chladni	49
5.2.0.1	Experimento com Placas de Ferro	49
5.2.0.2	Experimento com Placas de Alumínio	51
	REFERÊNCIAS	54

1 Introdução

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756-1827) é conhecido, por muitos, como o “pai da acústica” por várias contribuições importantes a este campo numa época em que os olhos estavam voltados para o estudo da termodinâmica e do eletromagnetismo. Até o momento em que Chladni iniciou os estudos na área da acústica, somente as vibrações em instrumentos de cordas e de sopro haviam sido estudadas. Ele iniciou a exploração das vibrações em placas. Para perturbar o sólido, utilizou inicialmente um arco de violino. A partir disto, padrões bidimensionais de ondas estacionárias eram formados. Chladni conseguiu “dar luz” ao som, utilizando areias finas que eram deslocadas para as regiões nodais da superfície (SANTOS et al., 2018). Além disso, fez importantes descobertas sobre vibrações em cordas e barras, inclusive, demonstrando a existência de ondas longitudinais nas barras (HENRIQUE, 2002).

As Figuras de Chladni, como são conhecidos os padrões de ondas estacionárias ou de frequências ressonantes em superfícies bidimensionais como placas, chapas, membranas, e tampões, têm relevante aplicação no campo da música na determinação da qualidade de instrumentos musicais feitos de madeira como o violino e violão (SANTOS; FILHO; ROCHA, 2018). O tipo de madeira, bem como as dimensões utilizadas em cada parte do instrumento influem na qualidade do som ressoado através da caixa acústica. Além do mais, através de areia polvilhada na superfície do material perturbado, é possível enxergar as regiões equivalentes aos nodos do caso unidimensional de uma corda vibrando como se pode ver na figura seguinte.

Figura 1 – Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino



Fonte: (DONOSO et al., 2008)

Essas três configurações de linhas nodais foram obtidas pelo Método Chladni e são chamadas de modos de vibração 1, 2 e 5 com frequências correspondentes a $(112 \pm 12) \text{ Hz}$, $(171 \pm 20) \text{ Hz}$, $(369 \pm 36) \text{ Hz}$ respectivamente. Esses mesmos modos podem ser observados numa placa retangular ou quadrada (Figuras 7 e 8) correspondentes às menores frequências de vibração associadas aos modos $(1, 1)$, $(2, 0) - (0, 2)$, e $(2, 0) + (0, 2)$, respectivamente.

Essa sequência de modos de vibração é necessária para que a madeira se comporte harmonicamente em violinos de boa qualidade onde é característico que os modos 2 e 5 se encontrem separados por uma oitava, ou seja, numa razão 1:2 na frequência. Neste caso, a relação 171:369 se aproxima de uma oitava (DONOSO et al., 2008).

O Método Chladni é um tema que também pode ser utilizado em processos de funcionamento e de fabricação de outros instrumentos musicais de percussão e de cordas. Além do mais, os comportamentos vibracionais de diversos materiais podem ser estudados a partir da análise modal de uma placa metálica flexível acoplada a uma cavidade acústica com a finalidade de encontrar soluções inovadoras, através do estudo dos níveis de ruído em sistemas como cabines veiculares, alto-falantes, motores de combustão (LIMA, 2017).

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho apresenta uma proposta de estudo da vibração de placas dentro das perspectivas do ensino por investigação, através do estudo das Figuras de Chladni, utilizando um aparato experimental controlado via smartphone e um prévio ambiente de modelagem computacional que possa servir como material potencialmente significativo.

1.1.2 Objetivos Específicos

Considerando o desenvolvimento do trabalho e o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Criar um experimento de laboratório de baixo custo e de fácil montagem para a criação das Figuras de Chladni;
- Criar um aplicativo de interface gráfica matemática para a visualização e análise dos padrões de Chladni;
- Aplicar a metodologia ensino por investigação no estudo das vibrações em placas de Chladni.

2 Principais Fundamentos

2.1 Vibração de uma Placa Retangular

Uma placa pode ser comparada a uma barra bidimensional ou a uma membrana com rigidez (FLETCHER, 1998). Uma placa, ao vibrar, pode transmitir ondas de compressão (ondas longitudinais), de cisalhamento, de torção, e/ou ondas de flexão. No nosso caso, iremos estudar a vibração de uma placa retangular com as quatro extremidades livres.

Ao contrário do que se possa esperar que a velocidade da onda de compressão pode ser calculada da mesma forma que se calcularia para uma corda ou para uma barra, a ligeira expansão lateral da onda é acompanhada de uma pequena rigidez adicional. Desta forma, a velocidade longitudinal, c_L é descrita por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (2.1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, termo relacionado à contração lateral. E é a tensão intrínseca da placa chamada de módulo de elasticidade ou Módulo de Young, e ρ é a densidade volumétrica da placa.

Em se tratando das Figuras de Chladni (Seção 1), o movimento de maior contribuição para a formação dos padrões estacionários é o gerado pelas ondas de flexão da placa descrito pela equação (FLETCHER, 1998):

$$-D\nabla^4 z = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ é a rigidez flexural, termo que depende das características mecânicas da placa. Temos ainda que z representa o deslocamento transversal de qualquer ponto da placa em função do tempo, e h é a espessura da placa.

Adotando uma solução harmônica da forma $z = Z(x, y)e^{i\omega t}$, podemos reescrever a Equação 2.2 da seguinte maneira:

$$\nabla^4 Z(x, y) - k^4 Z(x, y) = 0, \quad (2.3)$$

onde $k = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{h} \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{12}\omega}{c_L \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}}$, termo chamado de número de onda.

Como $v = \frac{\omega}{k}$ e $\omega = 2\pi f$, obtemos o seguinte para a velocidade da onda transversal:

$$v(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} f h c_L \quad (2.4)$$

A frequência das ondas de flexão é proporcional a k^2 . Os valores de k correspondem aos modos normais de vibração de acordo com as condições de contorno (FLETCHER, 1998).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_L h}{\sqrt{48\pi^2}} k^2 \quad (2.5)$$

Desta forma, é possível observar, a partir da Equação 2.4, que a velocidade da onda transversal depende da frequência para ondas de flexão (FLETCHER, 1998). Isso acontece devido ao acoplamento de movimento de flexão nas duas direções, o que faz com que os modos de vibração em ambas as direções não sejam puros como no caso de uma barra. Desta forma, as linhas nodais se tornam curvas.

A frequência fundamental de ressonância (Figura 2) para uma placa quadrada de extremidades livres se relaciona com o comprimento de onda correspondente ao dobro do comprimento da placa, $\lambda = 2L$. Sendo $k = 2\pi/\lambda$,

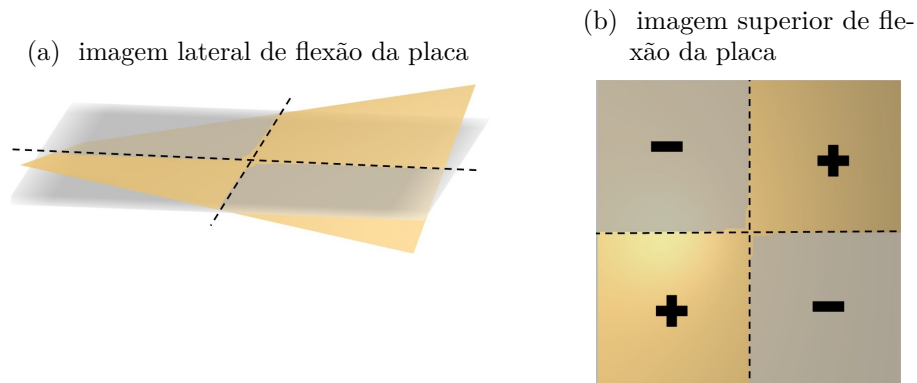
$$k = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L} \quad (2.6)$$

Substituindo 2.6 em 2.5,

$$f_{mn} = \frac{1}{L^2} \frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \cdot \xi_{mn} \quad (2.7)$$

onde ξ_{mn} é o fator de frequência que depende das condições de contorno das extremidades da placa e, conseqüentemente, dos modos normais de vibração m e n .

Figura 2 – Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada



Na Figura 2, as linhas nodais representam meia onda em cada direção. As regiões com o sinal “+” representam movimento de elevação, enquanto que as de sinal “−” representam movimento de abaixamento.

De acordo com Warburton (1954), o fator de frequência é definido como:

$$\xi_{mn}^2 = G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \quad (2.8)$$

onde os coeficientes G_x , G_y , H_x , H_y , J_x , J_y dependem das condições de contorno e dos modos de vibração.

Tabela 1 – Coeficientes da Equação 2.8 para a placa de extremidades livres

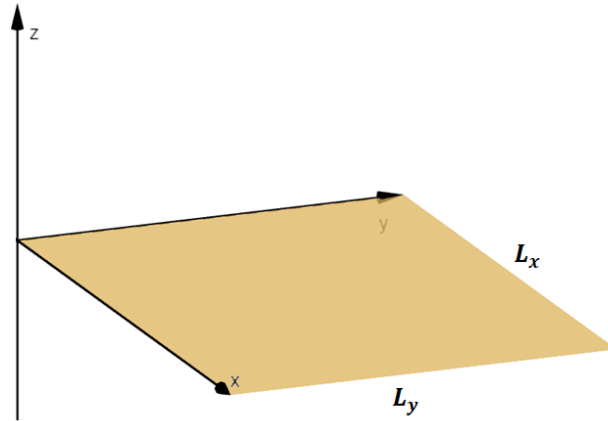
m	G_x	H_x	J_x
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

Fonte: (WARBURTON, 1954)

Para os demais coeficientes, os valores são os mesmos, fazendo a troca de m por n .

Consideremos a representação de uma placa retangular com um de seus vértices coincidindo com a origem do plano XY como mostra a Figura 3.

Figura 3 – placa de lados L_x e L_y no plano XY



Para o caso de ondas estacionárias viajando em um plano, a amplitude de vibração dependerá da superposição de uma onda estacionária na direção x e outra na direção y .

A solução para a forma de vibração da placa na direção z deve satisfazer as condições de contorno para as quatro laterais da placa. Da Equação 2.2 e aplicando o operador ∇^4 , chegamos à seguinte equação que também deve satisfazer a solução do problema (WARBURTON, 1954):

$$\frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1 - \nu^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Entretanto, não é possível encontrar uma forma para z que satisfaça a Equação 2.9 juntamente com as condições de contorno para o caso dos quatro lados da placa livres. É necessário assumir a parte espacial da solução $Z(x, y)$ composta por uma série infinita, onde cada termo da série satisfaz a Equação 2.9.

O deslocamento na direção z será da forma:

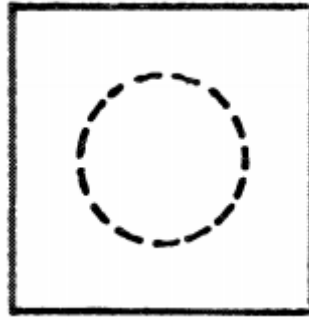
$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin(\omega t) \quad (2.10)$$

Sendo

$$Z(x, y) = \sum A_{mn} X_{mn}(x) Y_{mn}(y) \quad (2.11)$$

Como exemplo, de acordo com os parâmetros tabelados em Leissa (1993) para o terceiro modo de vibração da placa para $\nu = 1/3$, teremos

Figura 4 – Terceiro modo



Fonte: (LEISSA, 1993)

Terceiro modo: $Z(x, y) = A_{02}(X_0Y_2 + X_2Y_0) + A_{22}X_2Y_2 + A_{04}(X_0Y_4 + X_4Y_0) + A_{24}(X_2Y_4 + X_4Y_2) + A_{44}X_4Y_4 + \dots$

Sendo:

$$A_{02} = 1$$

$$A_{22} = -0,0447$$

$$A_{04} = -0,02011$$

$$A_{24} = -0,00384$$

$$A_{44} = -0,0282$$

Porém, Warburton (1954) apresentou uma solução mais simples de descrever o problema da placa completamente livre. Ele toma os termos de maior contribuição na série (Equação 2.11). Desta forma, temos

$$Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2.12)$$

Onde, para $x = 0$ e $x = L_x = L_y$

$$X(x) = \begin{cases} \cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)} \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 2, 4, 6... \\ \sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)} \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 1, 3, 5... \end{cases}$$

De maneira análoga, para a direção y

$$Y(y) = \begin{cases} \cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 2, 4, 6... \\ \sin \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon'/2)}{\sinh(\epsilon'/2)} \cdot \sinh \epsilon' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 1, 3, 5... \end{cases}$$

Os fatores de amplitudes, γ e γ' definidos para cada padrão nodal são encontrados graficamente através da interseção entre curvas de equações:

$$\begin{cases} \tan(\gamma/2) + \tanh(\gamma/2) = 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \tan(\gamma'/2) - \tanh(\gamma'/2) = 0 & \text{para } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Pode-se chegar à seguinte relação:

$$\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}(2m - 1) \quad (2.13)$$

Ritz mostrou que a superposição dos modos $(m, n) \pm (n, m)$ para uma placa quadrada, $L_x = L_y$, só existe nas condições em que $m - n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ (WARBURTON, 1954).

Teremos então como solução geral os seguintes casos de formas de vibração:

Caso 1: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 0$, onde $m = 2, 4, 6, \dots$

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm A \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\text{Com } \alpha = -\frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)}.$$

Caso 2: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $n = 1$, onde $m = 3, 5, 7, \dots$

$$Z(x, y) = A \left(1 - \frac{2y}{L_y} \right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm$$

$$A\left(1 - \frac{2x}{L_x}\right) \left[\sin \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.15)$$

$$\text{Com } \alpha' = \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)}.$$

Caso 3: Modos $(m, n) \pm (n, m)$ para $m > 1, n > 1$, onde m e n assumem quantidades diferentes.

$$Z(x, y) = A \left[\cos \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \pm A \left[\cos \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.16)$$

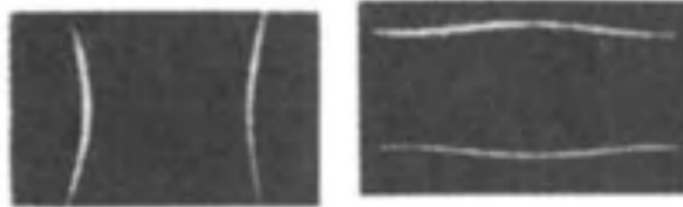
$$\text{Com } \beta = \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \text{ e } \epsilon = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

Para uma placa onde $L_x \gg L_y$, os modos (2,0) e (0,2) surgem completamente independentes como se pode ver na Figura 5.

Figura 5 – Modos de vibração independentes

(a) Modo (2,0)

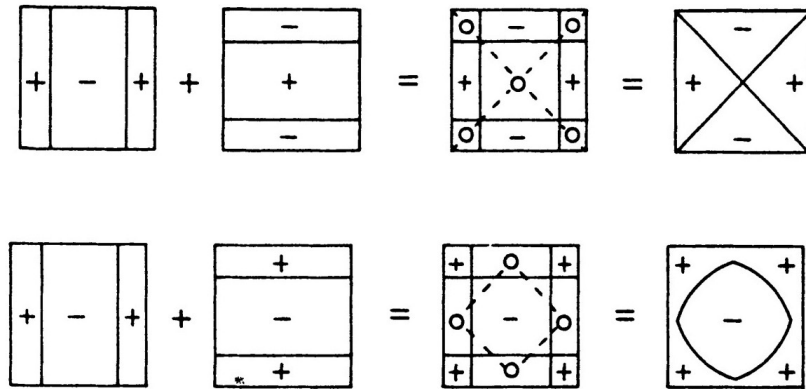
(b) Modo (0,2)



Fonte: (FLETCHER, 1998)

Se $L_x \rightarrow L_y$, os modos independentes se combinam linearmente para formar dois novos modos. No caso de uma placa quadrada, duas combinações são possíveis, dependendo se os modos estão em fase ou fora de fase, como se pode ver na Figura 6. A combinação $(2,0) + (0,2)$ tem um valor de frequência maior que $(2,0) - (0,2)$. No modo anel (Figura 7b) ocorre uma rigidez adicional devido ao fato de que os movimentos de flexão se opõem. Já no modo X (Figura 7a) cada modo auxilia o outro através de uma interação elástica chamada de acoplamento de Poisson.

É importante destacar que os pontos onde a função espacial $Z(x, y)$ se anula, a função $z(x, y, t)$ (Equação 2.10) também se anula. Ou seja, esses pontos permanecerão estáticos formando linhas nodais, região no qual os grãos de areia se acumulam. Na Figura 8, temos alguns padrões de Chladni em que são apresentadas as combinações de modos em fase e fora de fase.

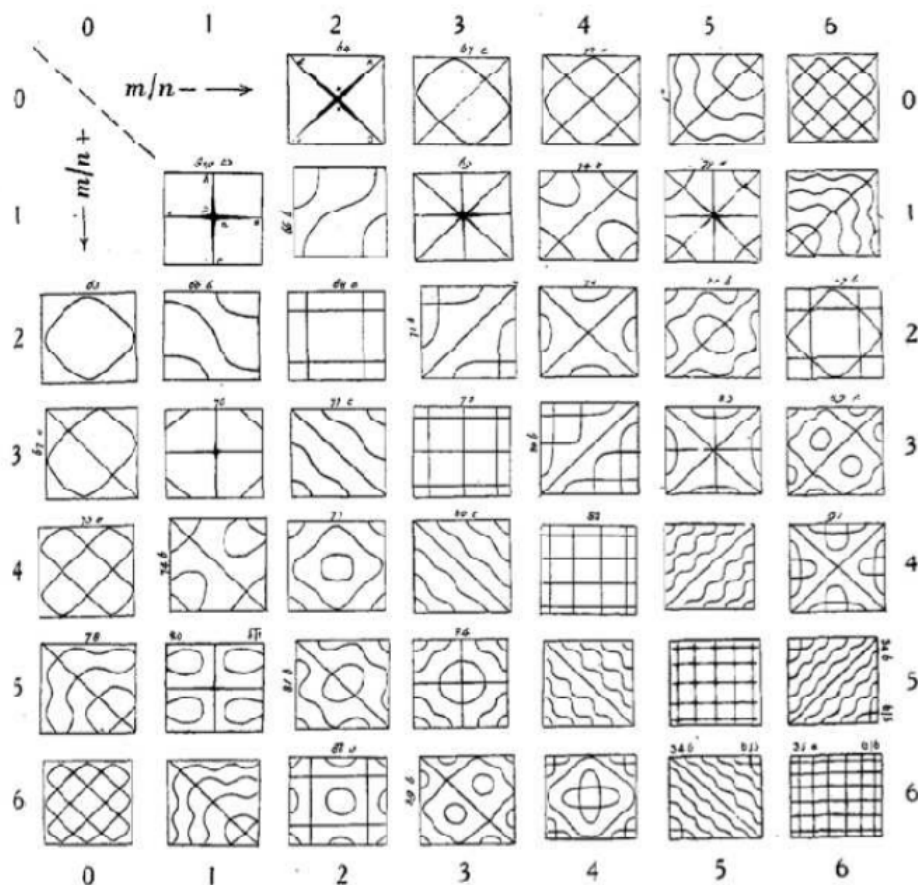
Figura 6 – Modo X, $(2,0) - (0,2)$, e do modo anel, $(2,0) + (0,2)$ 

Fonte: (FLETCHER, 1998)

Figura 7 – Combinação dos modos $(2,0)$ e $(0,2)$ (a) Modo $(2,0) - (0,2)$ (b) Modo $(2,0) + (0,2)$ 

Fonte: Autor

Figura 8 – Modos de vibração de uma placa totalmente livre



Fonte: (BLANCAS, 2011)

3 Produto

3.1 Materiais e Confecção do Experimento de Chladni

No Quadro 1, apresentamos os materiais básicos utilizados na montagem do aparato experimental.

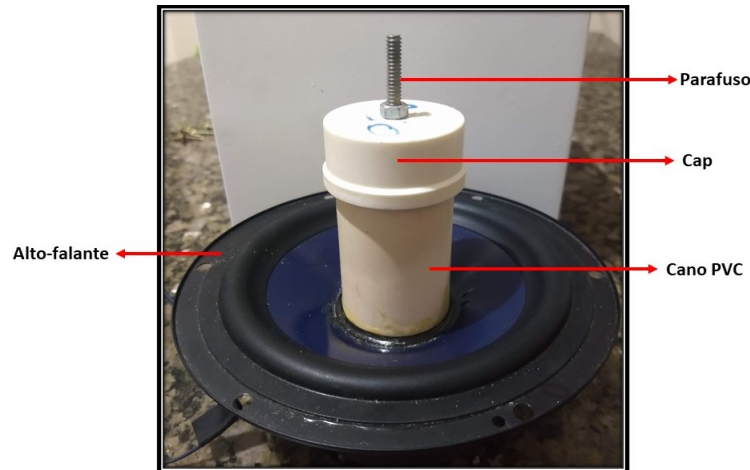
Quadro 1 – Materiais utilizados.

- Módulo amplificador de áudio ZK-502M com 50 W, conexão bluetooth 5.0;
- Fonte de tensão de 12 V, 2 A;
- Alto falante 100 W, 6 Ω , 6 polegas;
- Smartphone ou tablet para a instalação do app *Gerador de Frequência*;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 25 cm $\times$ 25 cm $\times$ 1 mm;
- Placa de ferro galvanizado com dimensões 20 cm $\times$ 20 cm $\times$ 1 mm;
- Areia fina e farinha;
- Caixa de madeira para fixar o alto falante com base 18 cm $\times$ 18 cm e altura de 15 cm;
- Cano PVC de 6 cm de comprimento e 40 mm de diâmetro;
- Cap para o cano PVC de 40 mm de diâmetro
- Parafuso de 2 cm de comprimento e 5 mm de diâmetro;
- Duas porcas e duas arruelas para o parafuso acima;
- Seis parafusos para madeira do tipo chipboard com (3,5 $\times$ 16) mm;
- Quatro parafusos para madeira do tipo chipboard com (4,0 $\times$ 30) mm;
- Cola araldite;
- Furadeira;
- Chave de fenda philips;
- Serra para cano PVC;
- Alicate.
- Protetor Auricular

Alto-falante

O alto-falante é o dispositivo responsável pela vibração da placa metálica. A conexão entre o dispositivo de áudio e a placa será através do cano PVC. Este deverá ser colado no centro do diafragma do alto-falante como mostra a Figura 9. Foi utilizada cola araldite para fixar o cano ao dispositivo eletrônico.

Figura 9 – Esquema da conexão do cano PVC à membrana do alto-falante



O parafuso com $5\text{ mm} \times 2\text{ cm}$ deverá ser inserido no centro do cap e depois preso por uma porca como se pode ver na Figura 9. Em seguida, o cap deverá ser encaixado ao cano.

Placa Amplificadora

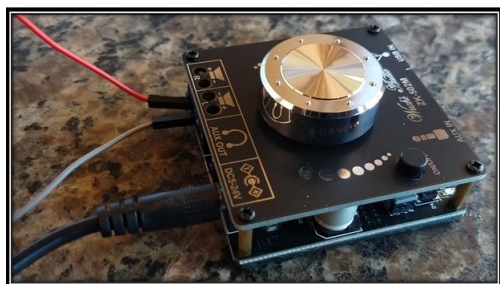
A placa amplificadora é uma peça fundamental para o funcionamento do experimento. Ela é responsável por amplificar o som que sai do smartphone para o alto-falante. Existem vários modelos de placa com variados tipos de potência. Neste caso, é importante um modelo que possua dissipador de calor. Pela praticidade de menos conexões com fios, foi utilizado na montagem desse aparato experimental o módulo amplificador de áudio *ZK – 502M* com 50 W de potência e bluetooth 5.0 (Figura 10a). Este funciona com tensão DC entre 5 V e 24 V . Nesse aparato experimental, utilizamos uma fonte de energia de 12 V . Na Figura 11, temos como o amplificador deve ser conectado ao alto-falante.

Como opção de montagem, com a utilização do amplificador sem bluetooth e um cabo de áudio mono P2, foi testado o modelo Tda 2050 mono de 30 W com volume ajustável e tensão de entrada de 12 V DC, ideal para quaisquer alto-falantes com as mesmas especificações do utilizado neste produto educacional.

As portas de entrada e saída estão apresentadas na Figura 10b. À esquerda, existem duas portas de entrada do sinal que será transmitido do celular. À direita, há duas portas de entrada da fonte de alimentação, e mais duas portas de saída do sinal amplificado para o alto-falante.

Figura 10 – Amplificadores de áudio.

(a) Módulo Amplificador de Áudio ZK – 502M Bluetooth



(b) Módulo Amplificador Tda 2050

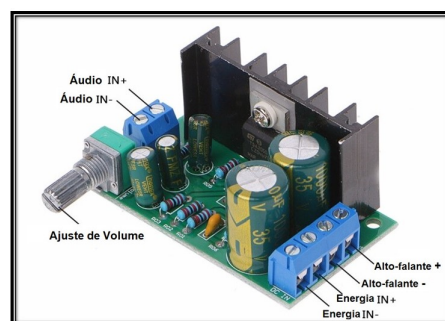
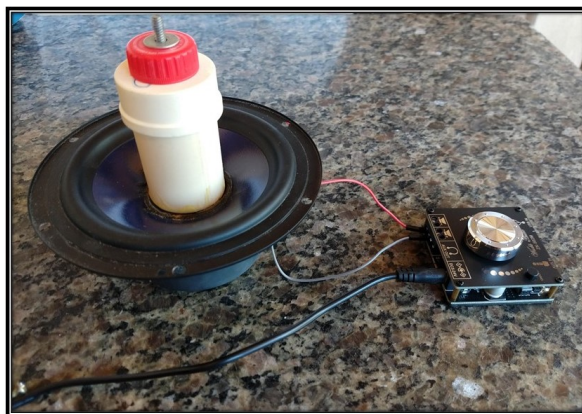


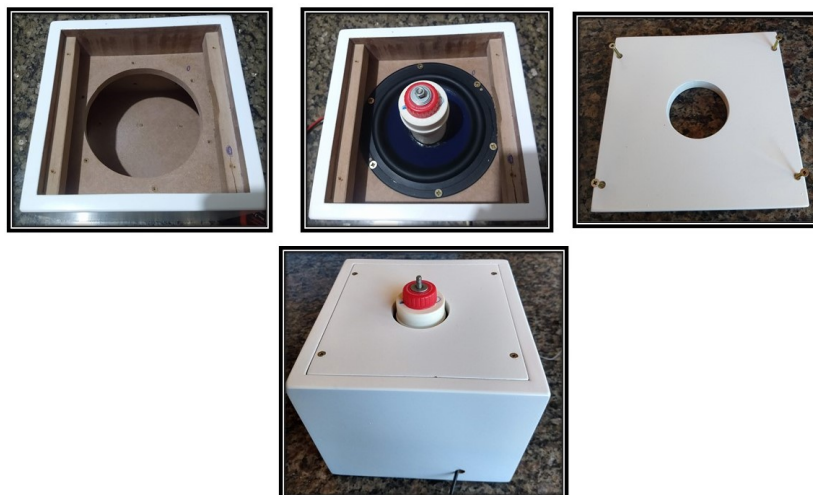
Figura 11 – Conexão do amplificador ao alto-falante



Caixa de Madeira

Para o encaixe do alto-falante, utilizamos uma caixa de madeira compensada com base $18\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ e altura de 15 cm . Foi feito um furo na tampa com um diâmetro de 60 mm , suficiente para que o cano oscile sem contato com as paredes do furo. O esquema está descrito na Figura 12.

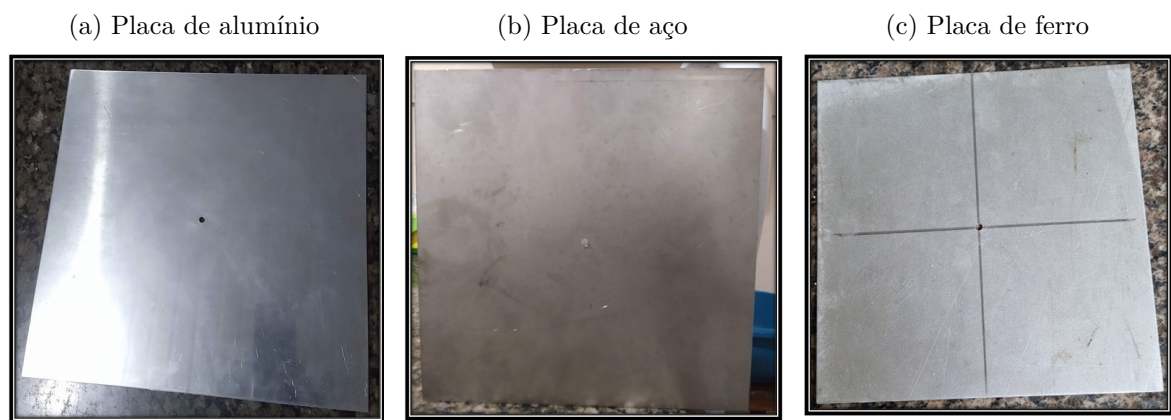
Figura 12 – Esquema do encaixe do alto-falante na caixa de madeira



Placas Metálicas

Neste produto educacional, a partir de testes e análise de custo benefício, utilizamos duas placas de ferro galvanizado como já descritas na lista de materiais (Quadro 1). Alguns testes foram feitos com placas de alumínio, aço inox, e placa de acrílico. As placas de alumínio tinham as dimensões de $30\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 2\text{ mm}$ e $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 2\text{ mm}$, as placas de aço inox com dimensões $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 1\text{ mm}$ e $20\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 1\text{ mm}$, e a placa de acrílico, $26\text{ cm} \times 26\text{ cm} \times 2\text{ mm}$. Esta última não demonstrou eficiência na formação de figuras devido ao nível elevado de aderência da areia em sua superfície, impedindo que os grãos se movimentassem livremente.

Figura 13 – Placas Metálicas



A placa metálica deve ser inserida no parafuso central (Figura 14) e então presa por uma arruela e uma porca.

Figura 14 – Esquema de encaixe da placa metálica



É importante certificar-se de que a placa esteja nivelada para não correr o risco de, no momento da vibração dos grãos, estes se deslocarem mais para um lado, e inclusive, fazendo com que boa parte dos grãos não permaneçam sobre a placa, impedindo a visualização completa das figuras de Chladni.

Areia Fina e Farinha

Os grãos a serem utilizados são de suma importância. Estes não podem estar úmidos e têm que ser pequenos, finos. Utilizamos como teste a areia da praia por ser fácil de se conseguir na região onde a Instituição de ensino está localizada, e, pelo fato de termos obtido um resultado bastante satisfatório. Caso a areia esteja muito úmida no momento da execução do experimento, sugiro que a mesma seja aquecida. Utilizamos, para isso, o aparelho micro-ondas por 1 minuto de funcionamento com a areia dentro sendo aquecida. Entretanto, para fins de aplicação deste produto educacional, utilizamos farinha pelo fato de ser um material de fácil acesso e, de ter apresentado um resultado mais satisfatório que a areia. Para utilizar grãos mais homogêneos e de menores tamanhos, foi utilizada a farinha dentro do paliteiro para jogá-la sobre a placa metálica.

Figura 15 – Areia e farinha utilizadas no experimento

(a) Areia da praia



(b) Farinha e paliteiro



Protetor Auricular

O som de algumas frequências de vibração da placa podem incomodar alguns alunos. Então é importante que se tenha à disposição, durante a realização do experimento das figuras de Chladni, protetores auriculares para a proteção contra os níveis de ruídos que possam incomodar.

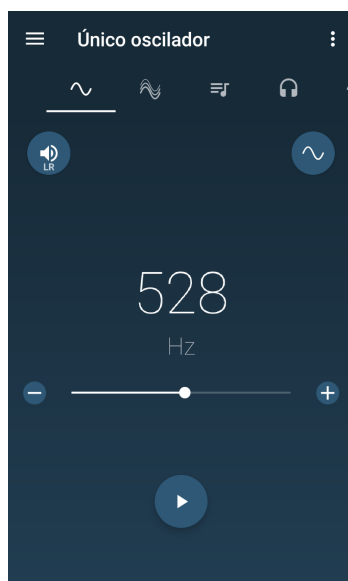
Figura 16 – Protetor Auricular



Aplicativo Gerador de Frequência

Existem muitos aplicativos gratuitos de geração de sinais sonoros. Entretanto, o Aplicativo *Gerador de Frequência* foi satisfatório para o desejado. Este pode ser encontrado no Google Play para o sistema operacional Android. Aplicativos similares podem ser encontrados em outras plataformas de software. O smartphone ou tablet é conectado via bluetooth com a placa amplificadora, através do qual o sinal é enviado via o aplicativo.

Figura 17 – Imagem da tela inicial do Aplicativo *Gerador de Frequência*



3.2 Aplicação Computacional para Figuras de Chladni

O GeoGebra é um software de código aberto de matemática dinâmica, reunindo recursos de cálculos, criação de gráficos, simulações. O GeoGebra possui milhões de usuários e já recebeu diversos prêmios (GEOGEBRA, 2021). Existe um grande acervo de materiais didáticos que podem ser compartilhados livremente. Além disso, os códigos desses materiais são abertos para quem quiser ver e/ou preferir fazer alguma modificação na programação. Ainda, é possível seguir autores que fazem parte de uma comunidade internacional do GeoGebra. Desta forma, o seguidor recebe atualizações de novos materiais em seu "feed" de notícias.

Além de ser uma calculadora e, de oferecer ferramenta gráfica, o GeoGebra também oferece o ferramental para se criar animações tanto em 2D como em 3D, além de botões, controles deslizantes, etc. Ele é bastante utilizado também em simulações de eventos físicos como o trabalho de Bracho et al. (2019) que elaborou um simulador para o ensino do movimento parabólico numa situação do tiro livre no futebol. Já Ribeiro (2019) desenvolveu um conjunto de simulações com o GeoGebra para auxiliar o professor de Física no ensino da cinemática. Também, com a utilização do software, uma proposta

de cenário virtual para o ensino de oscilações e conceitos de ondas foi desenvolvida no trabalho de Melo (2021).

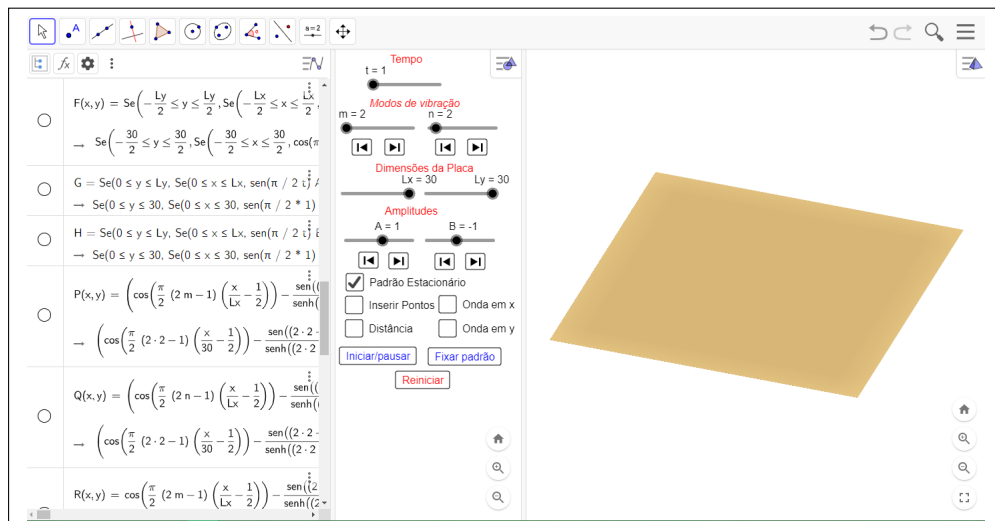
Figura 18 – Interface da modelagem no GeoGebra



Fonte: <<https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>>

O GeoGebra oferece duas opções de linguagem de programação: código GeoGebra e JavaScript. Três áreas principais foram utilizadas para a criação da modelagem das Figuras de Chladni (Figura 19):

Figura 19 – Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D



- Janela de Álgebra - Esta janela é a principal. É nela que os objetos e controles são criados através da inserção de funções e proposições lógicas. Foi nesta janela que foram inseridas as condições lógicas de acordo com as equações 2.14, 2.15, 2.16.
- Janela de visualização - Nessa janela, são exibidos os controles da simulação como botões, caixas de visualização, controle deslizante.

- Janela de visualização 3D - Nessa janela é visualizada a execução de tudo que foi inserido, programado e controlado nas janelas anteriores.

Figura 20 – Área de programação para um objeto no GeoGebra

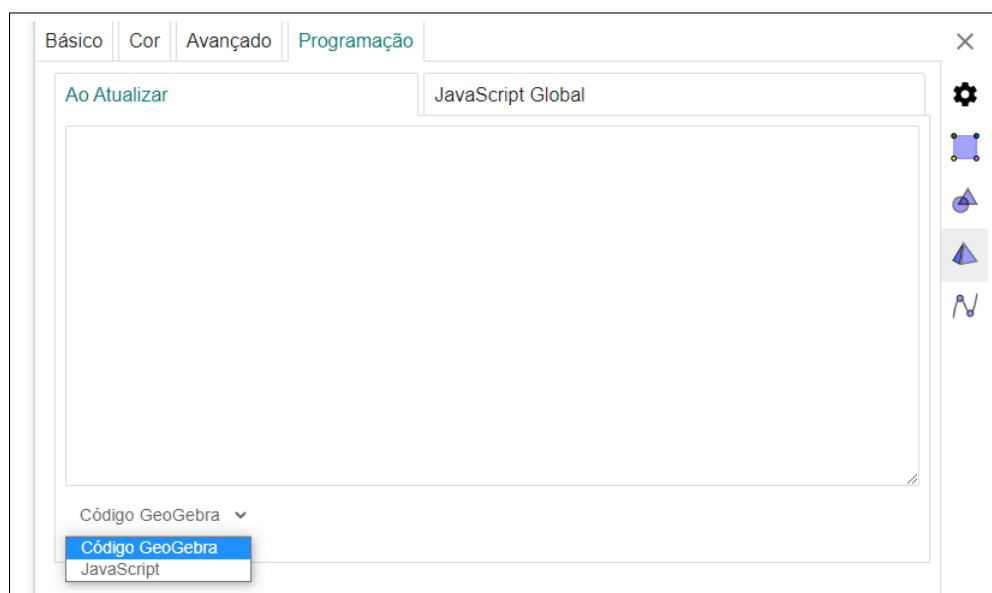


Figura 21 – Área de programação do botão iniciar/pausar



É importante destacar que o software de modelagem no GeoGebra foi executado nos navegadores Google Chrome (versão: 102.0.5005.115) e Microsoft Edge (versão: 102.0.1245.41). Este último se mostrou mais eficaz na manipulação das variáveis e na reprodução das animações. Devido a isto, o navegador Microsoft Edge foi utilizado pelos alunos na aplicação deste produto educacional.

Nesta seção foi apresentado, de forma breve, o mínimo necessário utilizado na criação do ambiente de modelagem das Figuras de Chladni. Claro que há muitos outros

detalhes envolvidos na criação desse ambiente computacional. A modelagem pode ser melhor otimizada e possuir mais ferramentas de controles e de visualização. Ela passa por um processo de constante aprimoramento. Mas a princípio, o software é mais que suficiente para a visualização e entendimento sobre a formação dos padrões estacionários de Chladni.

4 Proposta para Aplicação do Produto

4.1 Método Ensino Investigativo

Baptista (2010) destaca uma classificação das atividades (Quadro 2) proposta por Monk (1995) quanto ao grau de abertura de uma investigação no âmbito educacional. Desta forma, o professor consegue melhor ter a noção das atividades que se deve criar para exigir do aluno níveis de habilidades em conformidade com os objetivos educacionais planejados para a implementação do problema através da sequência de ensino investigativo.

Quadro 2 – Grau de abertura de uma investigação

Definição do Problema	- Mais prescritivo - Variáveis especificadas e operacionalizadas	Fechada
	- Mais exploratório - Variáveis não são especificadas	Aberta
Escolha do Método	- O professor diz aos alunos o que fazer, ou fornece o material	Fechada
	- Escolha livre do procedimento	Aberta
Solução	- Uma solução aceitável	Fechada
	- Várias soluções aceitáveis	Aberta

Fonte: (MONK, 1995, p. 76)

4.2 Funções de Grupo na Aprendizagem Cooperativa

Segundo Cochito (2004), o sucesso da dinâmica de um grupo cooperativo passará, no mínimo, pela distribuição de funções em cada grupo. Desta forma, cada aluno terá um papel fundamental no alcance do objetivo de resolver o problema investigativo. Dentre outras, podemos destacar as seguintes funções de grupos cooperativos (COCHITO, 2004, p. 87):

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entres os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.

- **Escriba:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

4.3 Estrutura das Aulas

Em uma aula anterior à aplicação do produto, é importante que seja mostrado aos alunos como funcionará a dinâmica do ensino por investigação, juntamente com um pré-teste a fim de verificar os conhecimentos prévios dos mesmos acerca da ondulatória. Essa tarefa pode ser realizada pelos alunos fora da sala de aula.

As aulas devem ser distribuídas da seguinte forma:

Quadro 3 – Distribuição das Aulas.

Aula	Descrição das atividades	Duração
1	- Aula tradicional, utilizando slides, explicando o experimento de Chladni dentro do contexto histórico, e mostrando a aplicação deste com ênfase em uma abordagem bidimensional.	40 min
	- Formação dos grupos, distribuição das funções entre os alunos, e explicação da atividade que os grupos irão realizar.	10 min
2	- Os alunos realizam a atividade de modelagem computacional no GeoGebra, seguindo um roteiro estabelecido.	50 min
3 e 4	- Os grupos executam um roteiro experimental formando as figuras de Chladni.	80 min
	- Os grupos discutem e resolvem o problema proposto em consonância com a tipologia de investigações.	20 min
	- Aplicação da Etapa 4 do ensino por investigação em que os alunos escrevem sobre o que aprenderam na aula.	—
5	- Os grupos apresentam os resultados a partir de cada escriba.	30 min
	- Aplicação da Etapa 3 do ensino por investigação em que perguntas são feitas aos alunos, visando uma discussão com a turma inteira a fim de esclarecer conceitos não tão bem compreendidos.	20 min
	- Aplicação do pós-teste.	—

De forma opcional, o pós-teste pode ser aplicado a fim de verificar o que houve de ganho na aprendizagem de cada aluno.

4.3.1 Material para a Aula 1

A sugestão é que na primeira seja recapitulado os tópicos já estudados pelos alunos, mas de modo a destacar o caso bidimensional em comparação com o caso unidimensional. Nesta aula, de maneira breve, deve ser tratado o estudo das ondas mecânicas com ênfase no experimento de Ernst Chladni e suas aplicações. Nesta aula, ainda deve haver a formação de grupos com cinco alunos escolhidos de maneira aleatória, sendo explicadas as atribuições de cada função dentro do grupo. A preferência é de que as funções (Seção 4.2) sejam escolhidas em comum acordo entre os integrantes de cada grupo.

A seguir, temos a sugestão da apresentação dos slides para esta aula:



ESTUDO DA VIBRAÇÃO DE PLACAS ATRAVÉS DOS PADRÕES ESTACIONÁRIOS DE CHLADNI

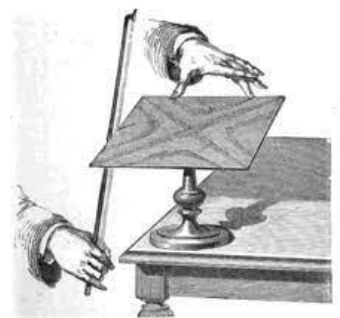
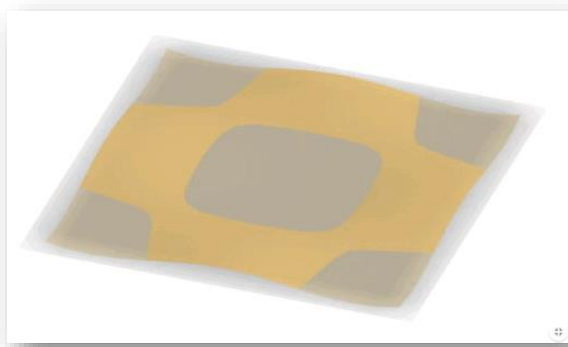
Escola: Colégio Estadual José Amaral Lemos

Professor: Thomaz Santos Neres

Disciplina: Física

1 Introdução

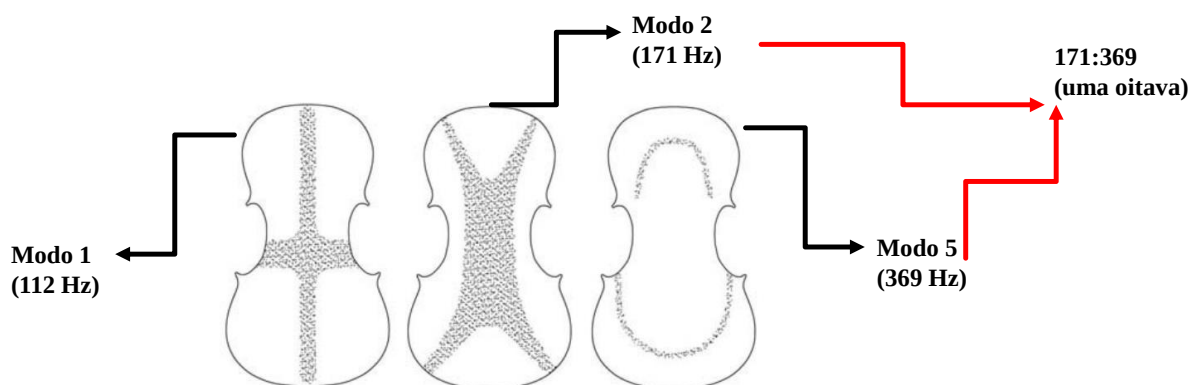
- Ernest Florens Friedrich Chladni (1756-1827) foi o primeiro a explorar a vibração de placas e barras, utilizando areias finas para demonstrar, visualmente, a existência de padrões bidimensionais nesses materiais.



2

1 Introdução

- Os padrões de ondas estacionárias (Figuras de Chladni) têm relevante aplicação no campo da música na determinação da **qualidade de instrumentos** feitos de madeira como violino e violão.



Fonte – (Donoso et al., 2008)

3

Onda Unidimensional (uma dimensão)



$$f = \frac{n v}{L 2} \longrightarrow f = \frac{n}{L} \cdot \text{constante}$$

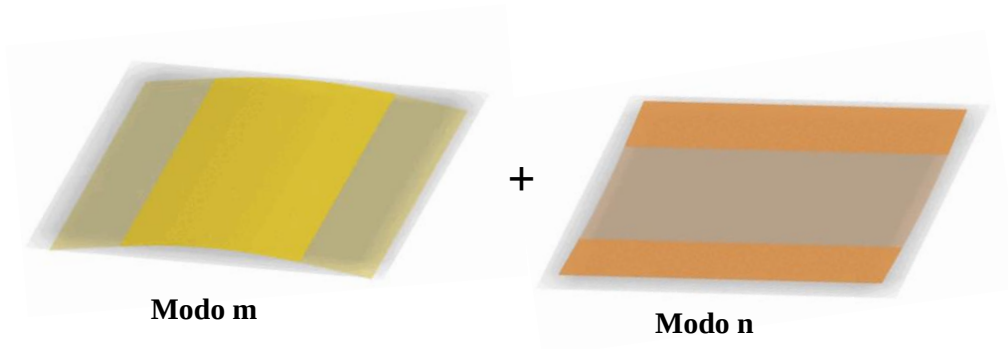
Número de ventres

Frequência

Comprimento da corda

4

Onda Bidimensional (duas dimensões)



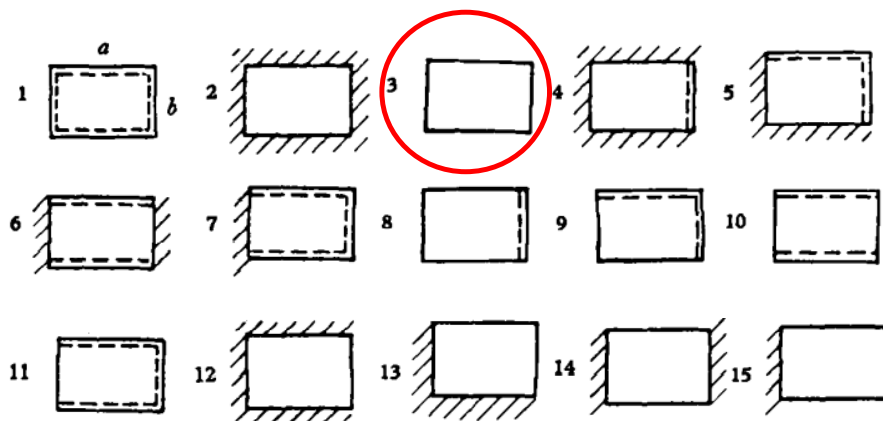
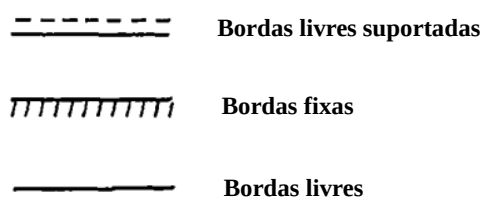
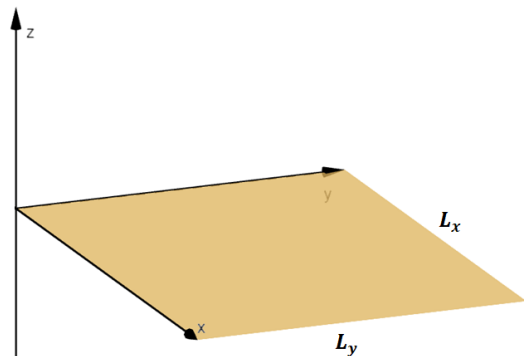
$$f = \frac{1}{L^2} \left[\frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \right] \cdot \xi_{mn}$$

constante

fator de frequência

5

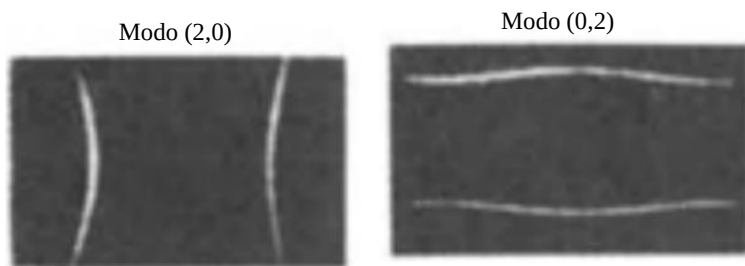
Vibração de uma Placa Quadrada



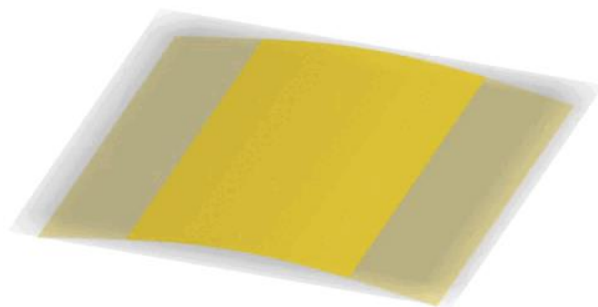
(WARBURTON, 1954)

6

Placa Retangular com Bordas Livres

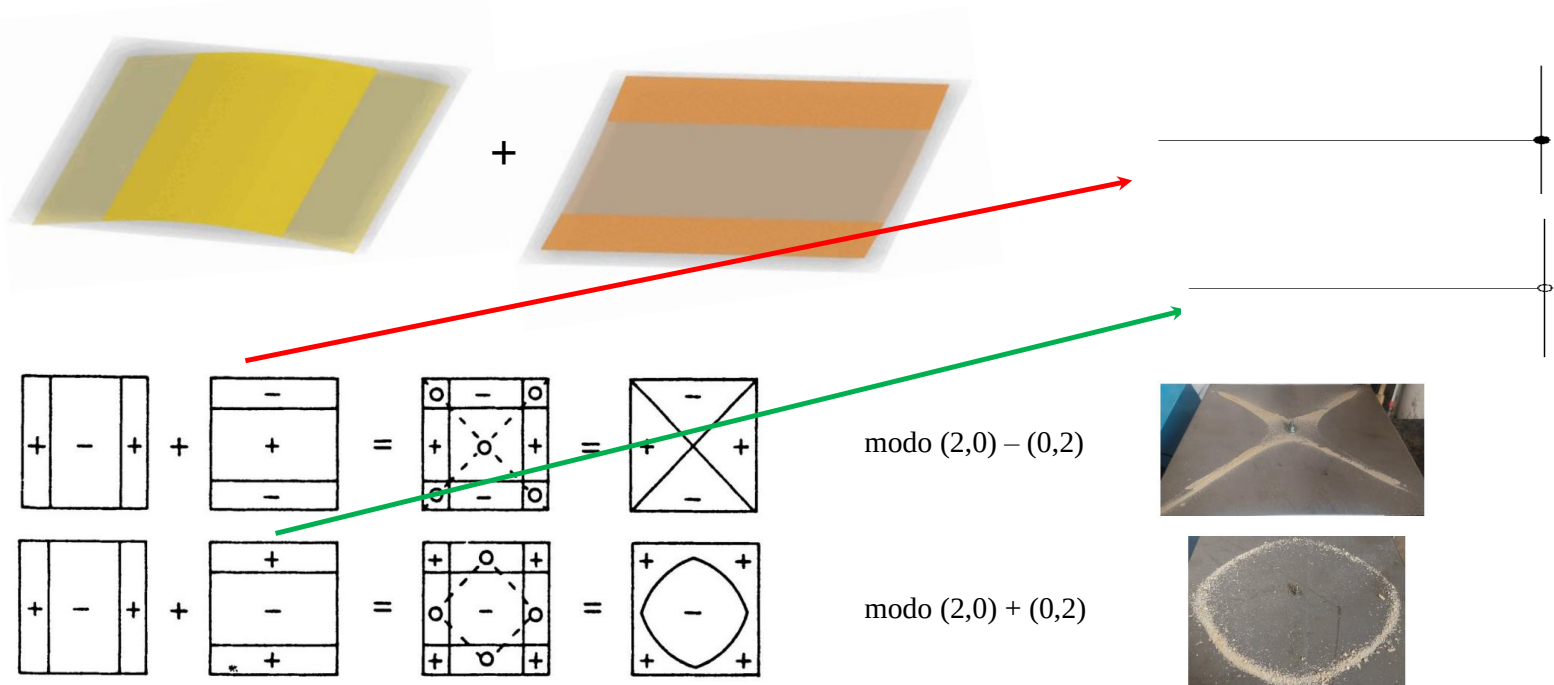


Vibração de uma placa retangular. (FLETCHER, 1998)



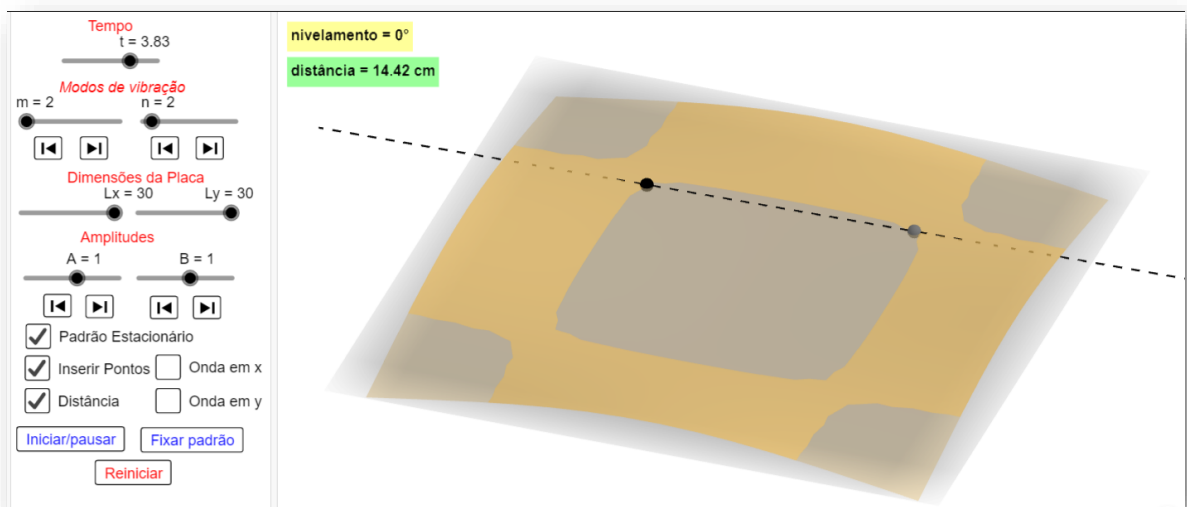
7

Placa Quadrada com Bordas Livres



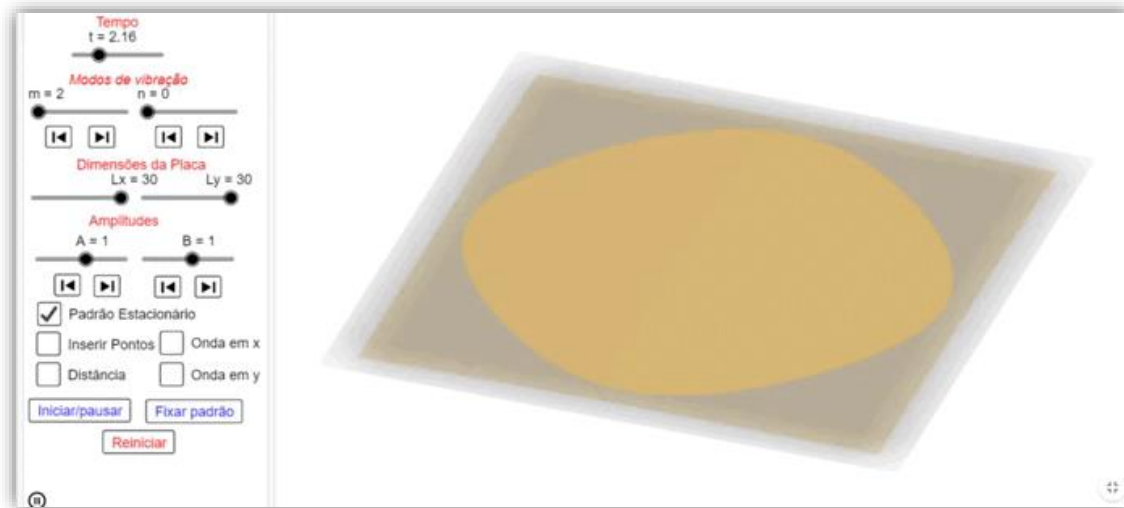
8

Modelagem Computacional



9

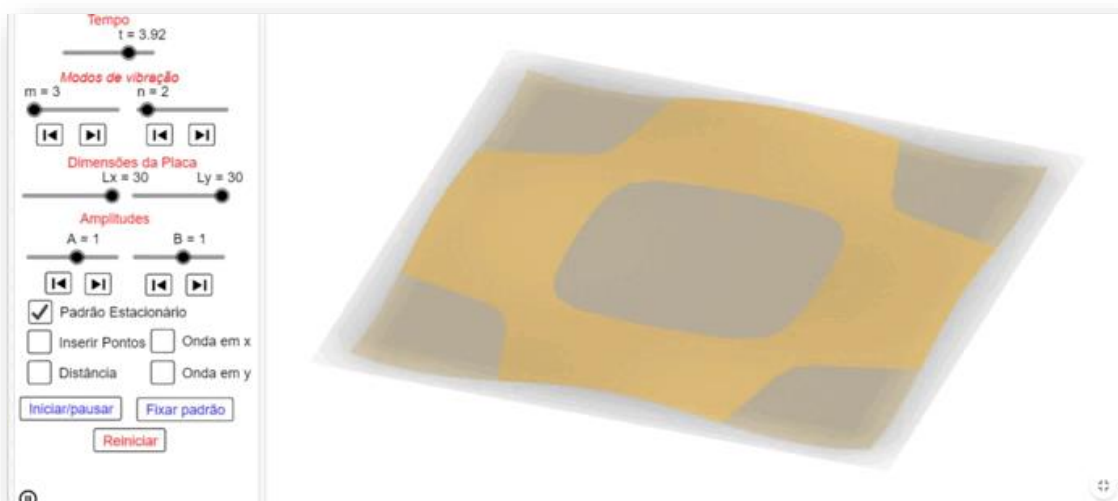
Modelagem Computacional



10

Roteiro Experimental

Modelagem computacional

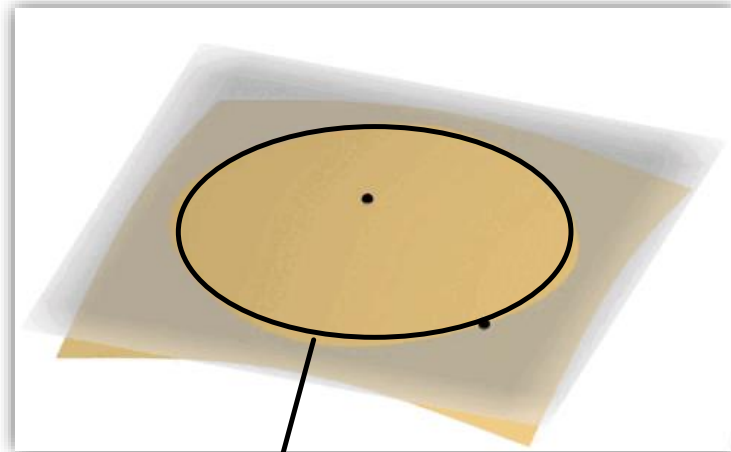


11

Alguns Resultados do Experimento das Figuras de Chladni



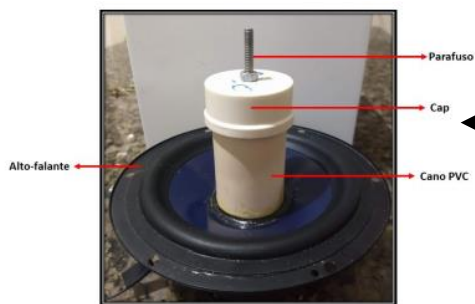
124 Hz



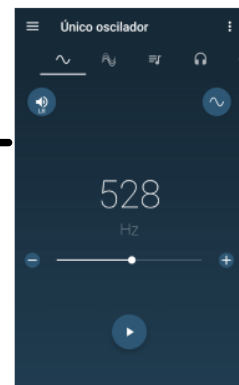
Região da placa que não vibra (linha nodal)

12

Material Elaborado



Amplificador Bluetooth



App "Gerador de Frequência"

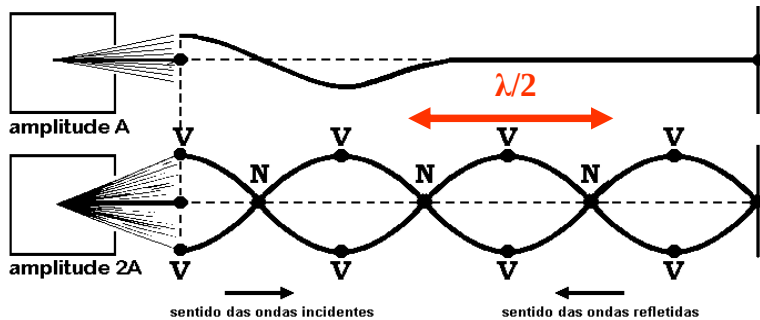


13

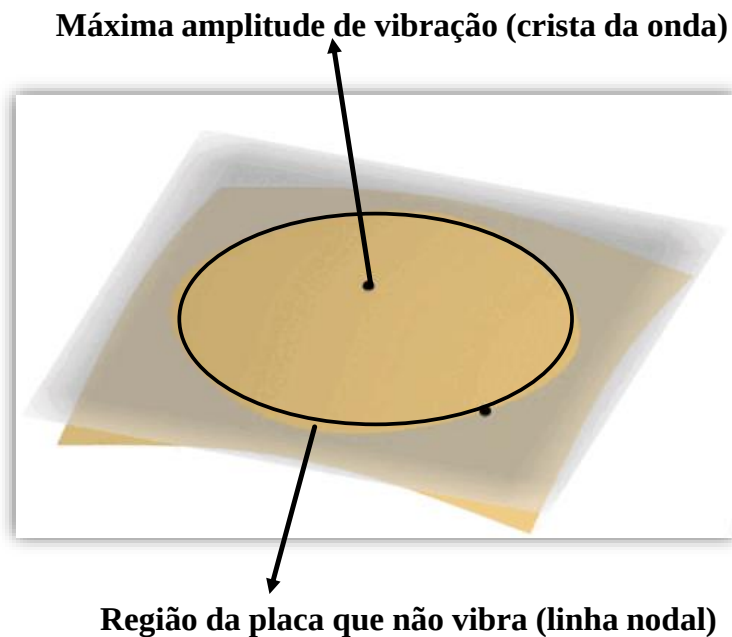
Onda unidimensional

vs

Onda bidimensional



- A distância entre dois nós (pontos nodais) consecutivos é $\lambda/2$ (metade do comprimento de onda).
- Quando a frequência (f) aumenta, o comprimento de onda (λ) diminui proporcionalmente.



14

Funções de Grupos Cooperativos

- **Facilitador:** Coordenada a execução do trabalho, facilita a comunicação de opiniões e ideias entre os membros do grupo. É ele quem é encarregado de se dirigir ao professor quando necessário.
- **Escreva:** Tem o papel de fazer as anotações do que os colegas vão dizendo e, de registrar as conclusões. Também é responsável por coordenar a apresentação do resultado final do trabalho de forma pública.
- **Gestor de tempo:** Ele gere o tempo do grupo, assegurando o cumprimento das tarefas no tempo previsto.
- **Gestor de recursos:** Procura materiais e faz as pesquisas para encontrar as informações necessárias para a resolução do problema.
- **Mediador:** Procura harmonizar conflitos. Deve ficar atento a comportamentos depreciativos. Encoraja os colegas a cooperarem e incentiva os menos participativos.

15

4.3.2 Roteiro da Atividade com Modelagem Computacional

A formação das figuras de Chladni não é tão simples de ser entendida. Muitos alunos podem achar, inicialmente, que se trata de uma força de atração entre os grãos de farinha (ou areia), quando na verdade existem regiões na onda estacionária em que ocorrem interferências totalmente destrutivas chamadas de linhas nodais. Desta forma, os grãos vibram se deslocando para essas regiões.

A fim de representar esse fenômeno através da visualização do movimento de vibração da placa, criamos um ambiente de modelagem computacional a partir do software GeoGebra. Desta forma, os alunos poderiam relacionar os resultados teóricos com os experimentais, agregando conhecimento e impulsionando nova aprendizagem. A descrição detalhada do software bem como a forma de acessá-lo está na Seção 3.2.

O seguinte roteiro no GeoGebra deverá ser realizado pelos grupos:

Professor:

Roteiro da Atividade de Modelagem Computacional

Grupo:	Data:	Local:
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escreva		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) Acesse o ambiente de modelagem das Figuras de Chladni em <https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>
- 2) Para gerar um padrão estacionário, altere os modos de vibração m e n para $m = 2$ e $n = 0$ com $B = 1$, e clique em *Iniciar*;
- 3) Clique em *Inserir Pontos* e observe seu movimento de vibração;
- 4) Clique em *Fixar Padrão* e leve os pontos para regiões de máxima e mínima amplitudes de vibração da placa. Inicie a simulação;
- 5) Como é chamada a região em que o ponto permaneceu parado? Numa situação real, qual seria o comportamento de uma partícula livre que estivesse em uma região de amplitude máxima? Como se chama essa região de máxima amplitude?

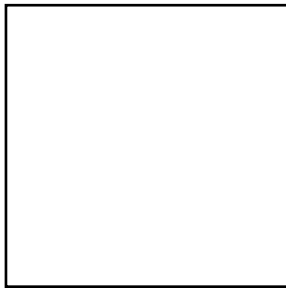
Resposta:

- 6) Gere a figura com os modos de vibração $m = 2$, $n = 2$;
- 7) Insira os pontos e clique em *Fixar Padrão*. Depois clique em *Distância* e leve os pontos para duas linhas nodais paralelas consecutivas. Para isto, mova os pontos buscando o valor mais próximo do nivelamento igual a zero e anote o valor da distância entre os dois pontos. O que é essa distância medida entre os dois pontos?

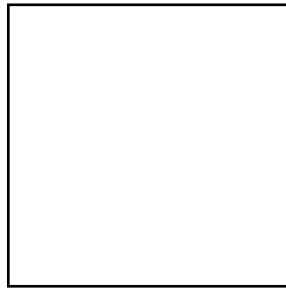
Resposta:

Professor:

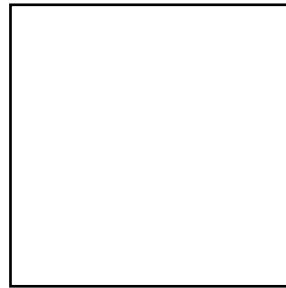
8) Registrando as imagens e os modos de vibração abaixo, gere as figuras referentes aos seguintes padrões:



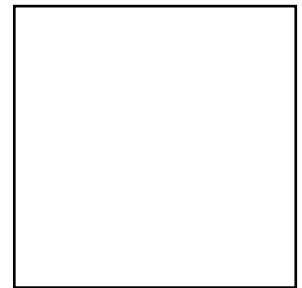
$m=2, n=0$ ($B= 1$)



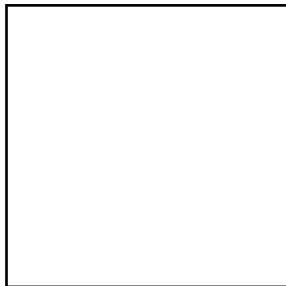
$m=2, n=0$ ($B= - 1$)



$m=3, n=1$ ($B= 1$)



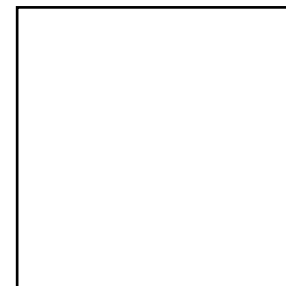
$m=3, n=2$ ($B= 1$)



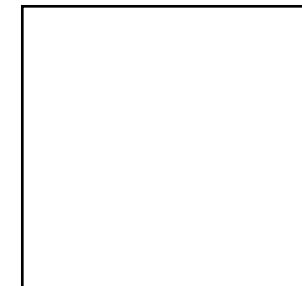
$m=4, n=0$ ($B= 1$)



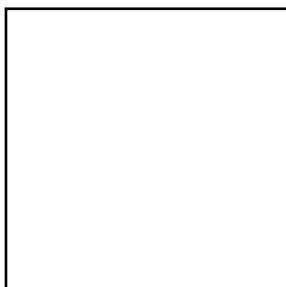
$m=4, n=0$ ($B= -1$)



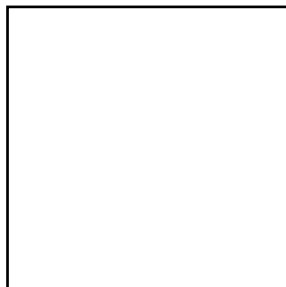
$m=2, n= 2$ ($B=1$)



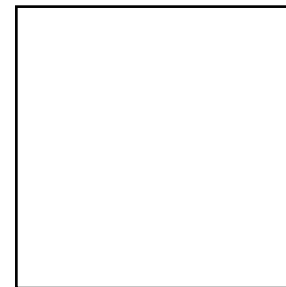
$m=3, n=1$ ($B= -1$)



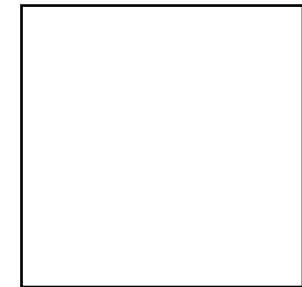
$m=4, n=2$ ($B= -1$)



$m=4, n=6$ ($B= -1$)



$m=6, n= 2$ ($B= -1$)



$m= 7, n=3$ ($B= 1$)

9) O que deve ocorrer com a frequência de vibração da placa à medida que os modos de vibração m e n aumentam? O que deve acontecer com o comprimento de onda? O que se observa nas figuras?

Resposta:

4.3.3 Roteiro do Experimento com Figuras de Chladni

Nesse experimento, os alunos buscarão formar pelo menos cinco figuras de Chladni, utilizando farinha em duas placas quadradas de ferro com lados de 25 cm e 20 cm , e 1 mm de espessura. Os alunos manipularão a vibração das placas através do aplicativo chamado *gerador de frequência*. O sinal de frequência chega a um amplificador bluetooth. A partir deste, o som sai amplificado para um alto-falante.

Nessa atividade experimental, através de uma análise gráfica, os alunos devem encontrar uma relação entre as frequências de ressonância das placas e suas dimensões, algo que normalmente é trabalhado em laboratórios de ensino com casos unidimensionais, como em cordas vibrantes.

Os grupos devem manipular o experimento de Chladni da seguinte forma:

Professor:

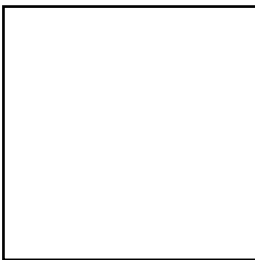
Roteiro da Atividade Experimental

Grupo:	Data:	Local:
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escreva		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

1) Utilizando a placa de ferro de $(25\text{ cm})^2$:

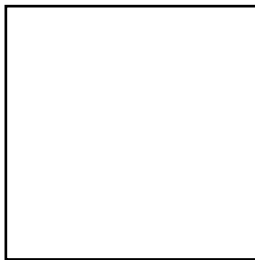
- Forme os padrões de Chladni para cinco (5) frequências de ressonância distintas.
- Anote os valores das frequências de ressonância e, através de desenhos, registre as imagens dos padrões de Chladni nos espaços abaixo.

Figura 1



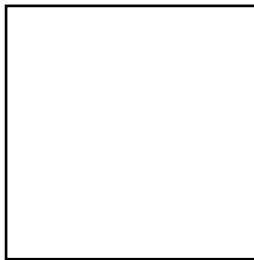
$f_1 = \text{_____ Hz}$

Figura 2



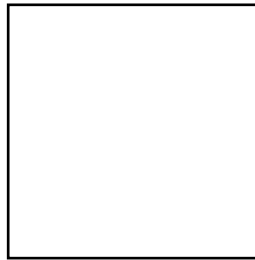
$f_2 = \text{_____ Hz}$

Figura 3



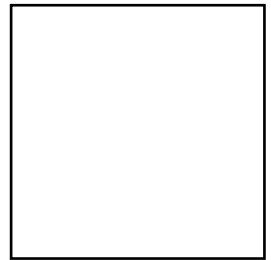
$f_3 = \text{_____ Hz}$

Figura 4



$f_4 = \text{_____ Hz}$

Figura 5



$f_5 = \text{_____ Hz}$

2) Quais são as variáveis utilizadas para controlar a vibração da placa?

Resposta:

3) O que ocorre na placa metálica juntamente com os grãos quando apenas a frequência de vibração é modificada? E quando somente o volume da fonte é alterado?

Resposta:

Professor:

- 4) Repita o mesmo procedimento do item “1)” para a placa de ferro $(20\text{ cm})^2$, procurando encontrar as mesmas figuras já encontradas para a placa anterior. Anote os valores das novas frequências de ressonância.

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
$f_1' = \underline{\hspace{2cm}}\text{Hz}$	$f_2' = \underline{\hspace{2cm}}\text{Hz}$	$f_3' = \underline{\hspace{2cm}}\text{Hz}$	$f_4' = \underline{\hspace{2cm}}\text{Hz}$	$f_5' = \underline{\hspace{2cm}}\text{Hz}$

- 5) Por que, nas duas placas de ferro, as mesmas figuras se formaram, mas em frequências diferentes?

Resposta:

- 6) A partir dos valores das frequências de ressonância das duas placas de ferro, trace um gráfico de $f' \times f$, utilizando a planilha de dados no Excel, onde f' e f são as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$ respectivamente.

- a) Perceba que, no gráfico, é gerada uma função da forma $y = \mathbf{a} \cdot x + b$. Compare-a com $f' = \mathbf{a} \cdot f$, e anote o valor do coeficiente angular $\mathbf{a}$.

Resposta:

$\mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$

- b) Calcule o quociente entre as áreas das placas de ferro $(25\text{ cm})^2$ e $(20\text{ cm})^2$.

Resposta:

$\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

- c) De acordo com os itens anteriores, qual o significado matemático do coeficiente angular $\mathbf{a}$?

Resposta:

Professor:

- 7) O que aconteceu com a frequência de ressonância da placa de ferro quando se diminuiu o comprimento desta, mantendo a mesma espessura, para formar a mesma figura? Relacionando a resposta anterior à equação $f_{mn} = \frac{\varepsilon_{mn}}{L^2} \cdot constante$, o que se pode concluir sobre a relação da frequência de ressonância e o comprimento de uma mesma placa quadrada?

Resposta:

4.3.4 Material para Construção de Gráfico

Na atividade de experimento das figuras de Chladni, os grupos precisarão criar um gráfico das frequências de ressonância das duas placas de ferro a fim de analisar o coeficiente angular da reta gerada. Na Figura 22 temos o modelo de arquivo no excel utilizado pelos alunos para preenchimento dos dados de forma que o gráfico e os coeficientes da equação são gerados automaticamente.

Figura 22 – Planilha para a construção de gráfico das frequências de ressonância

TURMA :		Análise do coeficiente angular do gráfico	
Frequência f: frequência de ressonância da placa de ferro (25 cm) ² Frequência f': frequência de ressonância da placa de ferro (20 cm) ²			
Frequência f (Hz)	Frequência f' (Hz)	Sem dados	
		Função Linear $y = ax + b$ coeficiente angular coeficiente linear a = b =	

[Link de acesso](#)

Para poder editar o arquivo de forma online, é necessário que se faça uma cópia, clicando em **Arquivo** → **Fazer uma cópia**.

4.3.5 Roteiro de Análise do Ambiente Computacional e do Experimento de Chladni

Após a obtenção dos resultados, tanto no GeoGebra como no experimento com as placas metálicas, os grupos devem identificar os padrões em comum nas duas atividades anteriores a fim de tentarem perceber que a teoria e o experimento estão intimamente conectados. Com isso, os alunos concluem como as figuras de Chladni se formam.

A seguir, o roteiro desta atividade.

Professor:

Roteiro da Atividade Experimental e Computacional

Grupo:	Data:	Local:
Funções	Componentes	
Facilitador		
Escriba		
Gestor de tempo		
Gestor de recursos		
Mediador		

- 1) O que se observa nas figuras das placas de ferro? Encontrou alguma figura semelhante àquelas observadas no GeoGebra? Quais?

Resposta:

Placa	Frequências de ressonância (Hz)					Modos de vibração (m,n)				
Ferro (25 cm)²										

- 2) De acordo com o que observaram na modelagem e no experimento, expliquem como as figuras de Chladni se formam. Por que os grãos se concentram em determinadas regiões da placa?

Resposta:

- 3) O que vocês acharam do experimento e da atividade realizada?

Resposta:

4.3.6 Links de Acesso aos Materiais da Aplicação do Produto

Disponibilizamos no Quadro 4 os links de acesso aos materiais utilizados na aplicação deste produto educacional.

Quadro 4 – Acesso aos materiais

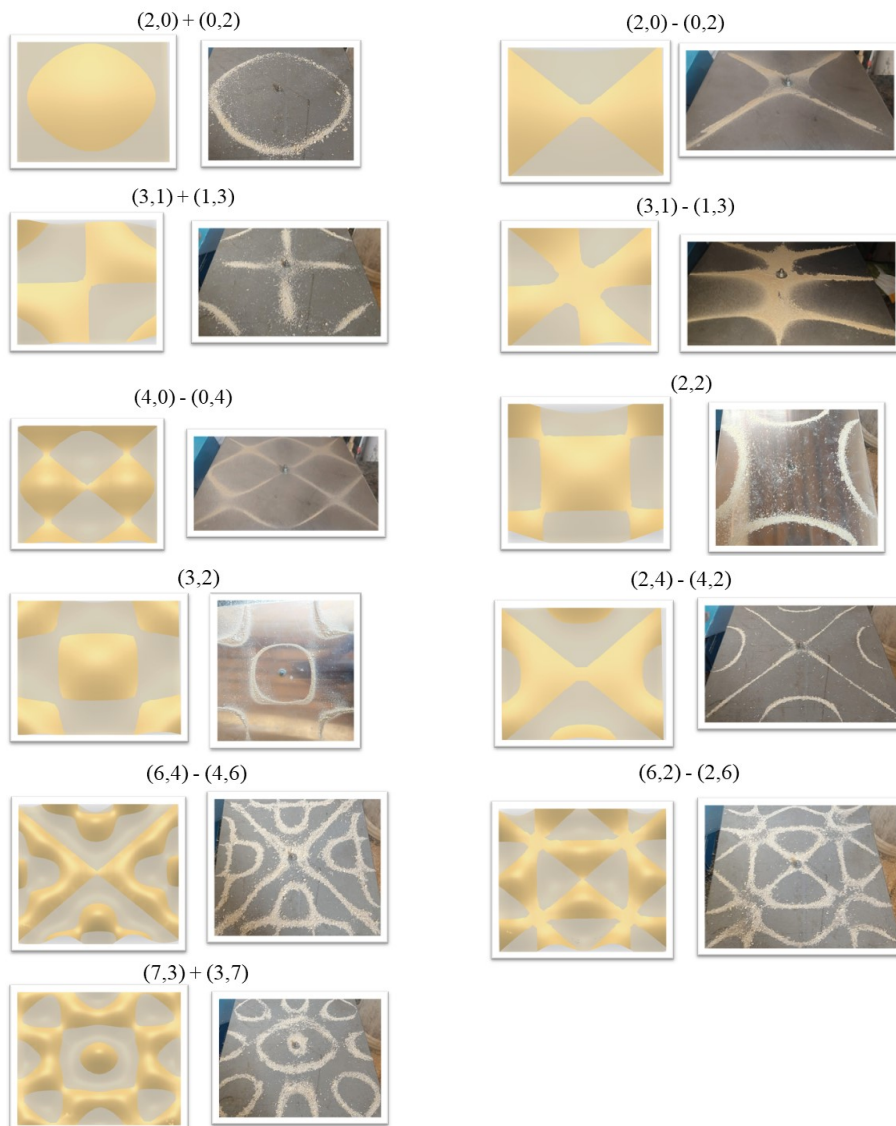
Material	Acesso
Atividade com modelagem computacional	link
Atividade com Experimento de Chladni	link
Atividade com modelagem e experimento	link
Planilha para construção de gráfico	link
Modelagem das Figuras de Chladni	link
Material da primeira aula	link
Pré-teste	link
Pós-teste	link
App Gerador de Frequência	link

5 Resultados Esperados

5.1 Modelagem Computacional das Figuras de Chladni

A fim de analisar e representar virtualmente alguns dos padrões de Chladni para o problema da placa quadrada com os quatro lados livres, foi utilizado o ambiente matemático gratuito *GeoGebra* a partir das equações 2.14, 2.15, 2.16. Podemos destacar alguns dos resultados obtidos através do simulador em comparação com o experimento.

Figura 23 – Comparações de modos: modelagem x experimento



Fonte: Autor

Os resultados da modelagem e do experimento estão em conformidade com o que Leissa (1993) escreveu a partir de um compilado de estudos.

5.2 Experimento das Figuras de Chladni

5.2.0.1 Experimento com Placas de Ferro

Considerando a possibilidade de variações nos valores de frequência nas medidas durante a execução do experimento, uma série de variações de frequência foi realizada para um mesmo modo de vibração. Com esses valores foi possível estimar um valor médio para o modo de vibração escolhido, e, além disso, estimar uma incerteza para a medida. Decidiu-se adotar um modo rústico para obtenção da média e da incerteza. Um modo simples e que, ao mesmo tempo, iria garantir que qualquer valor medido pelos alunos estaria dentro do intervalo estimado, não gerando dúvidas quanto a validade dos resultados experimentais. Além de ser de simples aplicação para alunos e professores.

Neste modo, por exemplo, o valor médio não foi encontrado a partir de média simples, mas sim identificando dentro do intervalo de frequências obtido quais os valores máximo e mínimo encontrados para cada padrão estacionário. A partir disso, um intervalo de confiança de frequência foi estabelecido para cada figura de Chladni formada, de modo que:

$$p = f_{max} - f_{min}$$

Considerando esta abordagem, a incerteza é calculada por:

$$\delta = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$$

Desta forma, existe a garantia de que a frequência de ressonância f medida para cada padrão estacionário esteja entre f_{min} e f_{max} , $f_{min} < f < f_{max}$. Como o valor verdadeiro da frequência de ressonância não é conhecido, fizemos uma estimativa da medida por meio do valor médio do intervalo de confiança:

$$\bar{f} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$$

Desta forma, o valor da frequência de ressonância para cada figura de Chladni corresponde a:

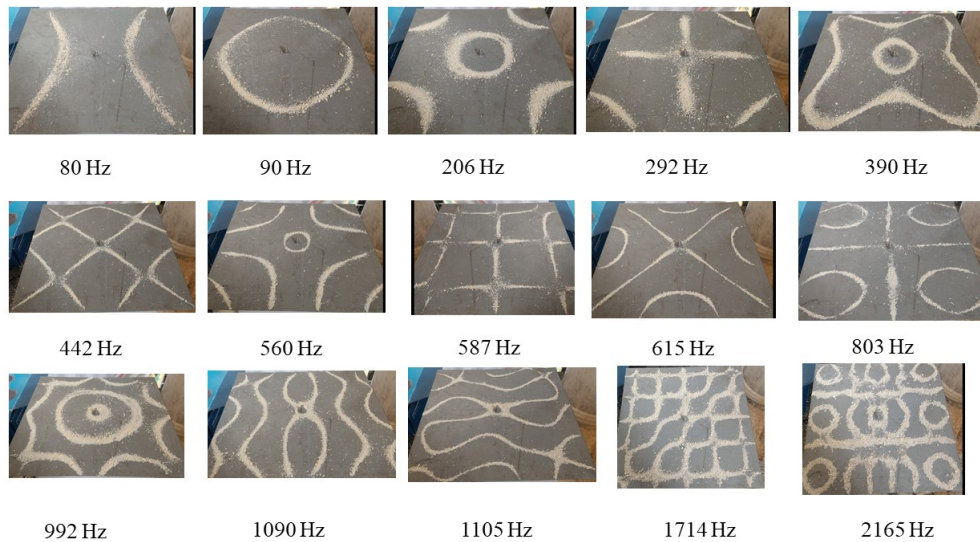
$$f = \bar{f} \pm \delta$$

Na Tabela 2 temos as frequências de ressonância para nove padrões estacionários com suas incertezas, onde f' e f representam as frequências de ressonância das placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$ respectivamente.

Tabela 2 – Frequências de ressonância nas placas de ferro

$f'(Hz) : (20\text{ cm})^2$	$f(Hz) : (25\text{ cm})^2$
$79,0 \pm 3,0$	$119,5 \pm 1,5$
$88,5 \pm 1,5$	$125,5 \pm 2,5$
$216,5 \pm 0,5$	$335,0 \pm 5,0$
$291,5 \pm 0,5$	$454,5 \pm 0,5$
$404,5 \pm 7,5$	$605,0 \pm 5,0$
$442,0 \pm 2,0$	$686,0 \pm 1,0$
$569,0 \pm 5,0$	$875,0 \pm 5,0$
$587,5 \pm 0,5$	$903,5 \pm 0,5$
$615,5 \pm 0,5$	$950,5 \pm 0,5$

Na Figura 24, temos algumas das figuras de Chladni formadas utilizando uma placa de ferro quadrada de lado 25 cm e grãos de farinha.

Figura 24 – Figuras de Chladni na placa de ferro $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ 

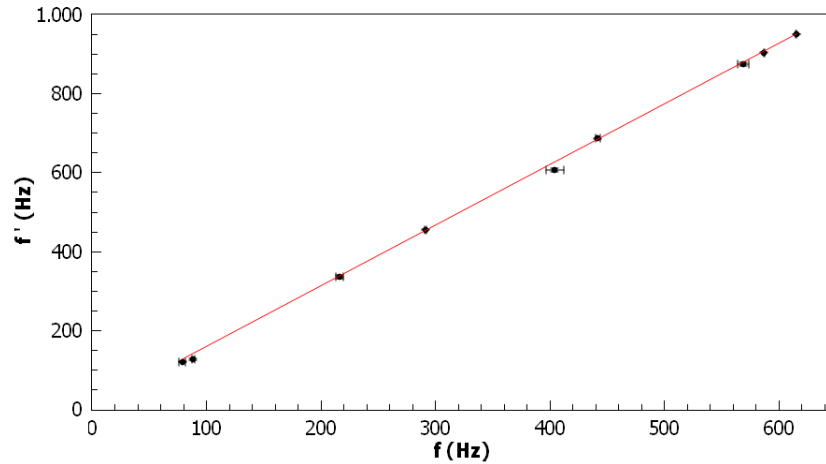
Fonte: Autor

A partir dos valores tabelados (Tabela 2) das frequências de ressonância para as duas placas de ferro, foi plotado um gráfico utilizando regressão linear como se pode observar na Figura 25.

Encontramos como coeficientes angular e linear $1,534 \pm 0,002$ e $5,2 \pm 0,8$ respectivamente. O próximo passo seria a comparação com os valores teóricos. A descrição da obtenção destes valores é descrita a seguir a partir da Equação 2.7.

Adotando placas de mesmo material e de mesmas espessuras, as frequências de ressonância destas são inversamente proporcionais ao quadrado do lado.

$$f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante \quad (5.1)$$

Figura 25 – Gráfico $f' \times f$ para a placa de ferro

Da Equação 5.1 chegamos à seguinte relação entre as frequências e as dimensões para as duas placas de mesmo material:

$$f' = \frac{L^2}{L'^2} \cdot f \quad (5.2)$$

Desta forma, tomando as placas de ferro de $(20\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$, encontramos o seguinte valor teórico do coeficiente angular:

$$\frac{L^2}{L'^2} = \frac{25^2}{20^2} = 1,56 \quad (5.3)$$

A incerteza relativa foi de aproximadamente 0,13% . O erro relativo foi dado por 1,9%. Os resultados mostram que o experimento tem ótima exatidão e precisão. Ao analisar o resultado e o fato da média e da incerteza terem sido estimadas de forma rústica, conclui-se que o experimento dará “conforto” para quem precisa encontrar as frequências de ressonância, até mesmo estudá-las comparando com a teoria.

Tudo que foi mostrado e discutido é relevante para o professor que pretender aplicar esse experimento, principalmente pelo fato da Tabela 2 apresentar os intervalos de confiança das frequências que possivelmente os alunos devem encontrar.

5.2.0.2 Experimento com Placas de Alumínio

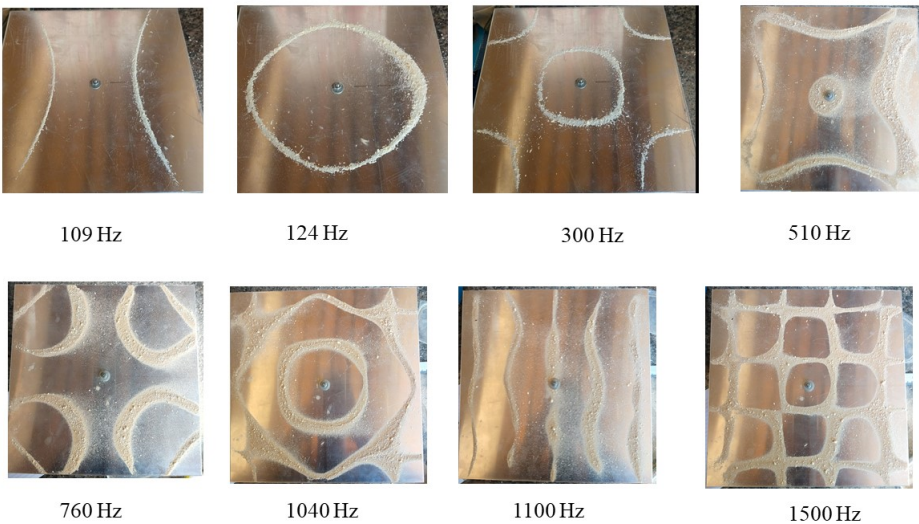
Desta vez, sem enfatizar as incertezas, buscando aproximadamente seguir o roteiro experimental do produto educacional de maneira prévia ao que os alunos fariam na escola durante a aplicação da atividade experimental, foram feitos testes também com placas de alumínio e de aço, utilizando areia da praia e também farinha. Ambos os resultados foram satisfatórios. Nas Figuras 28, 26, estão destacadas algumas das figuras geradas com suas respectivas frequências de ressonância.

Um resultado bem significativo também foi encontrado de acordo com o que se esperava da teoria (Equação 2.7). Foram geradas quatro figuras semelhantes em duas placas de alumínio de áreas diferentes, $(30\text{ cm})^2$ e $(25\text{ cm})^2$, mas com mesmas espessuras, 2 mm. Na Tabela 3, são apresentadas as frequências utilizadas para formar os quatro primeiros padrões da Figura 26.

Tabela 3 – Frequências utilizadas para formar os mesmos padrões

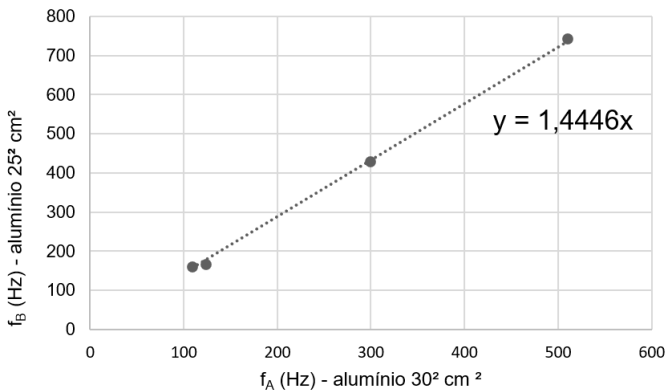
f_A - placa de alumínio 30^2 cm^2	f_B - placa de alumínio 25^2 cm^2
109 Hz	160 Hz
124 Hz	166 Hz
300 Hz	429 Hz
510 Hz	742 Hz

Figura 26 – Figuras de Chladni na placa de alumínio $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$



Fonte: Autor

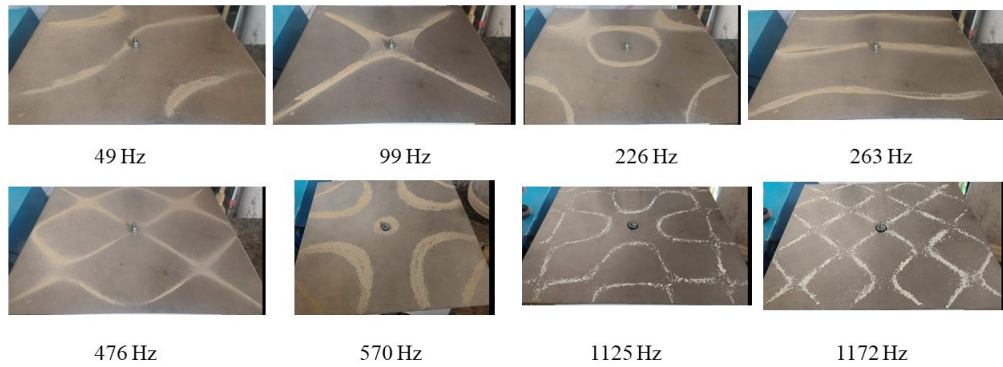
Figura 27 – Figura $f_B \times f_A$



Da Equação 5.1, foi verificado a partir do gráfico (Figura 27) que o coeficiente angular está de acordo com a Equação 5.2.

$$\frac{L_A^2}{L_B^2} = \frac{30^2}{25^2} = 1,44 \quad (5.4)$$

Figura 28 – Figuras de Chladni na placa de aço $25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$



Fonte: Autor

Referências

- BAPTISTA, M. Concepção e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico. 2010. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1854>>.
- BLANCAS, P. G. *PFC: IMPLEMENTACIÓN DE PRÁCTICAS DE DINÁMICA ESTRUCTURAL EN EL LABORATORIO*. 2011. <<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60109/fichero/4.Vibraci%C3%B3n+de+una+placa+cuadrada%252FVIBRACI%C3%93N+DE+UNA+PLACA+CUADRADA.pdf>>. Acessado em 25/04/2021.
- BRACHO, L. A. C.; PRIETO, J. L.; SÁNCHEZ, I. C.; ARAUJO, R. E. G. Uma experiência de elaboração de um simulador com geogebra para o ensino do movimento parabólico. *Paradigma*, Instituto Pedagógico de Maracay, n. 2, p. 196–217, 2019.
- COCHITO, M. Cooperação e aprendizagem: educação intercultural. *Lisboa: Acime*, p. 180, 2004.
- DONOSO, J. P.; TANNÚS, A.; GUIMARAES, F.; FREITAS, T. C. d. A física do violino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 2305–1, 2008.
- FLETCHER, T. D. R. a. N. H. *The Physics of Musical Instruments*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998. ISBN 978-1-4419-3120-7, 978-0-387-21603-4.
- GEOGEBRA. 2021. <<https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>>. Acessado em 22/03/2021.
- HENRIQUE, L. *Acústica musical*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. (Manuais universitários). ISBN 9789723109870. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5h3FGwAACAAJ>>.
- LEISSA, A. *Vibration of Plates*. [S.l.]: Asoa, 1993.
- LIMA, P. H. R. d. Análise modal experimental de placa flexível acoplada à cavidade acústica por vibrometro laser. 2017.
- MELO, G. F. d. *O USO DO GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NO ENSINO DE OSCILAÇÕES E CONCEITOS DE ONDA*. Dissertação (Mestrado), 2021.
- MONK, J. D. M. *Learning To Teach Science: Activities For Student Teachers And Mentors*. 1. ed. [S.l.]: Taylor Francis Group, 1995. ISBN 0-203-39254-X.
- RIBEIRO, A. Desenvolvimento de simulações em geogebra para o ensino da cinemática. Universidade Federal do Maranhão, 2019.
- SANTOS, R. S. d.; FILHO, P. S. d. C.; ROCHA, Z. d. F. D. C. Descobertas sobre a teoria do som: a história dos padrões de chladni e sua contribuição para o campo da acústica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018.

SANTOS, R. S. d. et al. *Estudo da influência das affordances para aprendizagem de ressonância em meios materiais por meio dos padrões de Chladni*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 168, n. 1, p. 371–384, 1954. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1954_168_040_02>.