

Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT

Dissertação

Os problemas de transporte
energético da Chesf e de seu combate
fulminante a possíveis incêndios

por

Antônio Márcio de Lima Soares

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, SE

Junho de 2023

Universidade Federal de Sergipe
Pro-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT

**Os problemas de transporte
energético da Chesf e de seu combate
fulminante a possíveis incêndios**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Discente: Antônio Márcio de Lima Soares
Orientador: Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória

São Cristóvão, SE
Junho de 2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S676p Soares, Antônio Márcio de Lima.
Os problemas de transporte energético da Chesf e de seu combate fulminante a possíveis incêndios / Antônio Márcio de Lima Soares ; orientador André Vinícius Santos Dória. – São Cristóvão, SE, 2023.
92 f.

Dissertação (mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Matemática. 2. Programação linear. 3. Otimização matemática.
4. Modelagem. I. Dória, André Vinícius Santos, orient. II. Título.

CDU 519.852



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL



Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Os problemas de transporte energético da Chesf e de seu combate
fulminante a possíveis incêndios**

por

Antônio Márcio de Lima Soares

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Vinícius Santos Dória - UFS
Orientador

Prof. Dr. Lucas Rezende Valeriano - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Cayo Rodrigo Felizardo Dória - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 26 de Junho de 2023.

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Esta que é a minha segunda dissertação da vida, sem dúvidas, já me fez pensar na terceira (risos - mas, é sério mesmo!). Enorme é a minha gratidão, antes de tudo, a Deus! Por Ele me dar saúde, pais zelosos, uma esposa e filhos que me inspiram, o sempiterno desejo pelos estudos científicos e teológicos, como o sou grato!

Ao Dr. André Dória, exímio matemático e orientador meu, dissipo um inigualável muito obrigado! Que professor e companheiro altamente profissional no que faz! Dá gosto de ver! Também fora mui agradável ter sido alvo do trabalho ímpar de parte da equipe de professores do PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe (DMA/UFS), a saber: Dr. Evilson Vieira, Dr. Allyson Oliveira, Dr. José Anderson, Dr. Disson Soares e a adorável Dr^a. Débora Lopes. Obrigado, nobres!

À turma com a qual convivi durante os anos do curso, sou grato pelas boas discussões, por cada contribuição acadêmica recebida e que forneci, especialmente, nas aulas de resolução de problemas. Jamais esquecerei de cada um de vocês!

Enfim, a todos que sempre me apoiaram nos estudos, direta ou indiretamente, desde a época de concurseiro às conquistas laborais e acadêmicas, recebam um fraterno abraço de agradecimento! Verdadeiramente, há palavras que geram vida.

Resumo

A Matemática como uma das principais ciências na construção de uma ou mais decisões estratégicas a serem tomadas em diferentes cotidianos da humanidade definiu a presente pesquisa. O seu principal objetivo disse respeito à busca pela otimização de procedimentos operacionais de transporte de energia elétrica e de designação de pessoal em determinada ação de combate a incêndios pelo complexo hidrelétrico da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (Chesf), localizado na cidade de Paulo Afonso/BA. Nesse sentido, enquanto uma investigação aplicada à certa realidade, ora munida de reflexões significativas sobre as informações numéricas e não numéricas colhidas, estabelecemos o perfil quali-quantitativo como o *modus operandi* do nosso estudo. E, quanto aos resultados obtidos, solucionamos dois problemas de programação linear associados aos procedimentos que mencionamos acima, por meio do método *Simplex*, trazendo-se, com isso, consequências decisórias relevantes para Chesf. Além disso, também realizamos destacamentos sobre a prática do professor de Matemática nos ensinos básico e superior em torno do estudo de problemas de otimização.

Palavras-chave: Programação Linear. Transporte. Designação de pessoal. Chesf.

Abstract

Mathematics as one of the main sciences in the construction of one or more strategic decisions to be taken in different daily lives of humanity defined the present research. Its main objective was related to the search for the optimization of procedures operations for transporting electricity and assigning personnel in a specific firefighting action at hydroelectric complex of Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (Chesf), located in the city of Paulo Afonso/BA. In this sense, as an investigation applied to a certain reality, now equipped with significant reflections on the numerical and non-numerical information collected, we established the quali-quantitative profile as the *modus operandi* of our study. And, as for the results obtained, we solved two linear programming problems associated with the procedures mentioned above, using the *Simplex* method, thus bringing relevant decision-making consequences for Chesf. In addition, we also carried out highlights on the practice of Mathematics teachers in basic and higher education around the study of optimization problems.

Keywords: Linear Programming. Transport. Assignment of personnel. Chesf.

Sumário

Introdução	1
1 Elementos fundantes deste estudo	3
1.1 A humanidade, a natureza e a abstração	3
1.2 Modelagem matemática: primeiros conceitos	5
1.3 As programações matemáticas	9
1.3.1 A poderosa programação linear	10
1.3.1.1 Um problema de transporte	13
1.3.1.2 Um problema de designação de pessoal	16
2 O clássico algoritmo <i>Simplex</i>	19
2.1 Definições, teoremas e corolários	20
2.2 A experimentação do método <i>Simplex</i>	30
2.2.1 Aplicação à resolução de um PPL	31
2.2.2 Melhoramento de uma <i>solução básica</i>	34
2.2.2.1 Continuação e parada do algoritmo	41
2.2.3 Os quadros (<i>tableaus</i>) <i>Simplex</i>	42
2.2.3.1 <i>Tableaus</i> em duas fases	47
3 O uso computacional do <i>Simplex</i>	56
3.1 O <i>Linear Program Solver (LPSolver)</i>	57
3.2 Usando o <i>LibreOffice Calc</i>	60
3.3 Modelagem em <i>Python</i>	63
4 A Chesf e os PPLs que descobrimos	68
4.1 O problema de transporte energético	71

4.2 O problema de combate a incêndios	77
Considerações finais	82
Bibliografia	85

Introdução

A Matemática Pura, entre os seus mais incríveis alcances em nosso cotidiano, possui nos *Problemas de Otimização* abrangente destaque. Nas Engenharias, nas Ciências Sociais Aplicadas, a exemplo das formações em Administração e em Economia, situações-problemas donde se objetiva *minimizar* ou *maximizar* determinados processos, atividades, são rotinas fortemente requeridas em diferentes contextos.

Com o ferramental matemático advindo dos estudos em *Álgebra Linear*, diferentes matemáticos, ao longo da história, construíram conhecimentos que abriram portas para variadas conquistas/descobertas em outras ciências, especialmente, no campo da otimização de modelos aplicados à certa realidade. Modelagens matemáticas que cumpriam com critérios de linearidade ou de não linearidade, configuradas por variáveis discretas ou contínuas, alinhavam-se aos dados coletados em uma pesquisa e forneciam resultados ditos ótimos numa tomada de decisão. Eis a natureza principal dos problemas de otimização: poder-se tomar a melhor decisão, a decisão ótima, guardadas a viabilidade e a factibilidade para tanto ante específico contexto do mundo real.

Esse latente poder da Matemática motivou-me a deflagrar uma pesquisa envolvendo a área do conhecimento intitulada por *Pesquisa Operacional*, particularmente no tocante às modelagens matemáticas oriundas da *Programação Linear*. De onde viriam a inspiração para a geração de um perfil de pesquisador ainda mais intenso e refinado na profissão que desempenho, a de professor. Atuando como docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), *campus* Paulo Afonso/BA, atesto frequentemente parcerias técnicas sendo firmadas entre esta instituição de ensino e o denominado complexo hidrelétrico da Companhia Hidro Elétrica do São Francisco (Chesf), localizado na cidade de Paulo Afonso, uma vez que tal instituto dispõe da oferta de cursos técnicos na área de Eletricidade e o único curso superior em Engenharia Elétrica ofertado na citada cidade.

Como um indubitável papel de instituições de ensino que promovem pesquisa e ex-

tensão, as mencionadas parcerias com segmentos da comunidade localmente impactada pela promoção da ciência por tais ambientes educacionais, com efeito, demarcam um dos sentidos de sua existência. Portanto, questionei-me sobre como eu, enquanto professor de Matemática do IFBA, poderia trazer melhorias/aperfeiçoamentos em alguma dimensão operacional da Chesf.

Assim, munido da formação de excelência que recebi durante o curso de Mestrado em Matemática pelo PROFMAT, elaborei dois problemas de pesquisa, um relacionado ao transporte de energia elétrica do complexo hidrelétrico supracitado aos estados do nordeste brasileiro, outro com respeito à designação de pessoal em uma atividade de combate a incêndios neste complexo. Dessa maneira, nosso objetivo principal de investigação foi o de otimizar procedimentos operacionais da Chesf em relação aos contextos situacionais que selecionamos. E, a fim de atingirmos essa objetivação, especificamente, tratamos de fundamentar a teoria de otimização de situações-problemas através da programação linear; realizar um levantamento de dados que nos permitisse modelar matematicamente cada situação; executar as modelagens e resolver os problemas.

Diante do exposto, a metodologia de pesquisa quali-quantitativa foi aquela a qual recorreremos para a concretização dos nossos objetivos investigativos. Haja vista que, quanto a essa abordagem científica, não somente estruturamos e classificamos resultados numéricos, mas também trazemos interpretação e compreensão contextual da situação estudada. Com isso, mantivemos a coerência investigatória entre os problemas, os objetivos e a metodologia de pesquisa, dada a natureza de pesquisa aplicada que engendramos.

Em suma, no decurso da produção desta dissertação, quanto ao seu *Capítulo 1*, discutimos as preliminares para o estudo de problemas de otimização aplicados a situações do mundo real; no *Capítulo 2*, elencamos a fundamentação teórica matemática desenvolvida para resolver esses problemas, quando modelados linearmente; à altura do *Capítulo 3*, descrevemos algumas possibilidades de utilização de aplicativos e de uma linguagem de programação para a resolução de problemas de programação linear; no *Capítulo 4*, seguiu-se a culminância da pesquisa, com a resolução dos problemas de pesquisa que projetamos, contextualizando-os e empregando-lhes a devida solução; e, nas *Considerações finais*, reafirmamos a importância do estudo desenvolvido, argumentando os efeitos de sua aplicação pela Chesf, ao passo que também reconhecemos e sugerimos o envolvimento do tema de nossa pesquisa com o exercício docente de professores de Matemática.

Capítulo 1

Elementos fundantes deste estudo

A partir de agora, começaremos a pormenorizar uma sequência de pré-requisitos teóricos fundantes do estudo que desenvolvemos. Com efeito, contextos histórico-sociais, culturais, definições e certas propriedades comuns à ação de modelar matematicamente uma situação-problema serão ricamente listados a seguir.

1.1 A humanidade, a natureza e a abstração

Se por uma semana fôssemos a um bosque acampar, quais pensamentos provavelmente você teria? Sem dúvidas, nos preocuparíamos com a nossa manutenção de vida em tal período, o que comeríamos, vestiríamos, como dormiríamos, como nos deslocaríamos num ambiente natural de mata, entre outras necessidades, e, especialmente, como nos protegeríamos de certos seres vivos nocivos ao ser humano.

Nesse contexto, cada preocupação desencadeada para o sucesso do acampamento em questão - isto é, entrarmos e sairmos da mata sem quaisquer acidentes ou incidentes, ou, ainda, com o mínimo deles - dependerá de uma rotina de planejamentos e execuções destes através das pessoas ali presentes. E, naturalmente, cada plano, cada decisão a ser tomada, serão iniciados no campo das ideias, no abstrato modelo mental do grupo de indivíduos em suas discussões, de modo que os argumentos mais convincentes entre as personagens da trama vão tomando forma, ganham projeções em uma folha de papel, transformam-se naquilo que chamamos de modelagem da realidade para se alcançar determinado objetivo (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Agora, de posse dessas diversas projeções de uma realidade a ser vivida, seus autores

passam a explorar o campo crítico-reflexivo da condição humana diante de um desafio, de problemas a serem solucionados numa perspectiva ótima. Ou seja, que atinja o alcance máximo de atendimento às necessidades da semana de acampamento, ao passo que minimize as falhas na execução de cada atitude planejada. Note aqui, então, que, após algumas leituras das histórias registradas das civilizações humanas, ao longo das eras, atestamos a lida quase que diária das pessoas com problemas do tipo “melhore isso; e, com isso, evite aquilo”, “transporte a carga por determinado caminho”, etc.

Eis uma realidade latente da humanidade, que é, inclusive, majestosamente encontrada na natureza, na incrível intelectualidade dos demais seres vivos em se adaptar aos ambientes mais desafiadores para se sobreviver na Terra. Um exemplo fenomenal disso podemos encontrar entre as abelhas, que compreendem que o modelo ótimo para a formação dos alvéolos das colmeias é aquele que possui o formato de tampa dado por um polígono hexagonal, para os quais elas conseguem gerar uma maior capacidade de armazenamento de cera em uma menor porção desta (SIDARTA, 2015).

E o nosso acampamento, como teria terminado? Dentre os planejamentos desenvolvidos para passarmos uma semana na mata, munidos das reflexões sobre a possibilidade de execução de cada um deles, será que encontraríamos elementos matemáticos nesse processo? Se sim, quais provavelmente seriam estes? Claramente, desde a quantificação de alimento e água necessários para o grupo, até o dimensionamento da região ocupada por nossas barracas, considerando-se arranjos espaciais mais seguros, que facilitassem a comunicação entre as pessoas e os seus deslocamentos, bem como o transporte de certas cargas, podemos enumerar certas áreas da Matemática que viriam à tona, caso algumas das personagens as conhecessem: Aritmética, Geometria Euclidiana Plana e Espacial, Grafos e, ainda, em algum nível, a Geometria Fractal. E, assim, veríamos aquilo que chamamos de modelagem matemática como uma representação da realidade a nossa volta, enquanto ferramenta decisório de ações mais precisas em um ambiente natural.

Destarte, o desenvolvimento de conhecimentos sobre as ditas modelagens matemáticas, uma vez que estas estão diretamente ligadas aos padrões observados pelo ser humano na natureza, desperta-nos o preponderante interesse pelo assunto. Mas, o que é exatamente um modelo matemático? Da imaginação humana à prática de uma conduta, o que significa criar um modelo que é considerado aplicável ao ambiente em que estamos inseridos? Pois bem, para responder a tais questionamentos, vamos à próxima subseção.

1.2 Modelagem matemática: primeiros conceitos

Para Goldbarg e Luna (2005), em se tratando das teorias do conhecimento científico, o ato de modelar matematicamente uma situação observada pelo ser humano diz respeito à concatenação de ideias logicamente estruturadas que configurem uma espécie de substituição da realidade. Isso posto, com efeito, para se atingir três objetivos principais:

- (i) facilitar o processo de raciocínio de quem planeja na tomada de decisões;
- (ii) aumentar o nível de plausibilidade da decisão tomada;
- (iii) destacar as condições adversas da realidade em oposição ao modelo estruturado.

Assim, temos precedentes para falarmos em modelos matemáticos sobre certa realidade contextual que sejam bons ou ruins. Sendo estes adjetivos atribuídos ou não por meio da chamada tradução matemática da realidade pelo modelador da situação manifestada por necessidades do meio, bem como do homem. E, como poderíamos experimentar, desenvolver uma fidedigna tradução matemática do ambiente ao qual estamos inseridos não é exatamente uma tarefa trivial, senão não poucas vezes bastante complexa.

Com isso, as garantias de um melhor modelo ajustável a determinado contexto advêm do rol de métodos/artifícios erigidos para solucionar o problema, via modelagem anteriormente estabelecida. Ou seja, mesmo a ação de modelar matematicamente uma situação-problema pode ser classificada como ótima, isto é, quando atingimos um modelo que nos permite o uso de elevada quantidade de ferramentas matemáticas (teoremas, corolários, proposições, lemas, entre outros, a partir de uma ou mais subáreas do conhecimento matemático) e, também, que leva o modelador a novas descobertas técnico-científicas.

Voltando-nos para o contexto do acampamento que vivenciávamos na seção anterior, exemplificamos abaixo uma tradução matemática contextual de uma pessoa (ponto A) que avista outras duas (pontos B e C) localizadas na margem oposta de um riacho que corria pelo bosque:

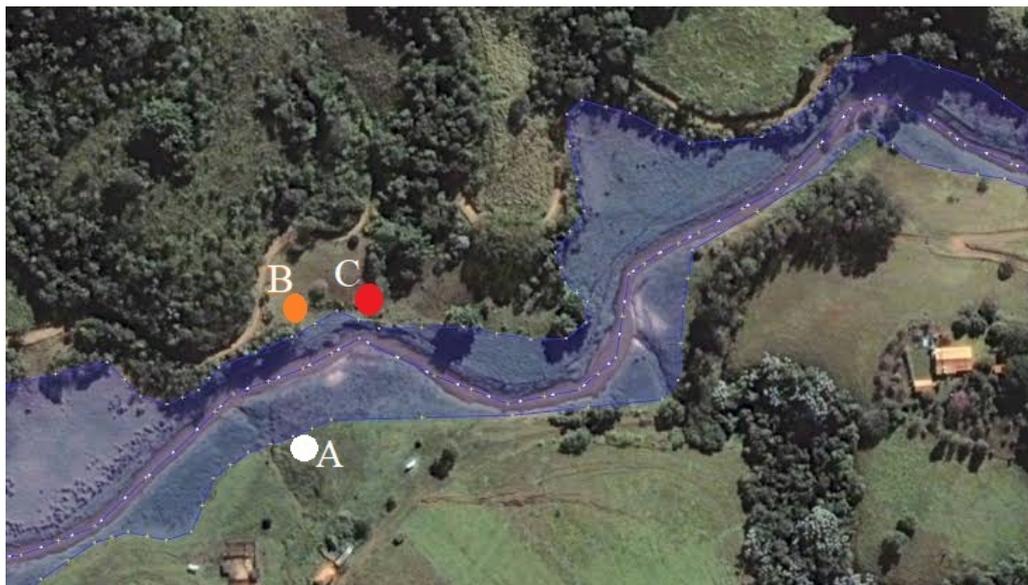


Figura 1.1: realidade complexa. Fonte: Google Maps.

Dessa forma, caso quiséssemos modelar matematicamente a menor distância de travessia da pessoa A para outra margem do riacho - segmento de reta AA' (Figura 1.2); o que se prova facilmente utilizando-se o Teorema de Pitágoras, via Figura 1.2 ainda, donde AB e AC são as hipotenusas dos triângulos retângulos $AA'B$ e $AA'C$, respectivamente, ambos retângulos no vértice A' -, tendo como referências observacionais os demais indivíduos, faríamos o seguinte:

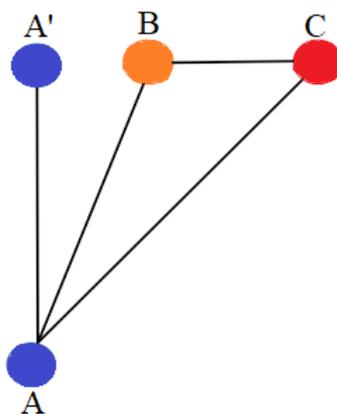


Figura 1.2: modelo matemático. Fonte: construção própria.

Vemos que um modelo matemático não é necessariamente idêntico à realidade alvo de sua tradução contextual. Isso fomenta, mais uma vez, o que falamos anteriormente, acerca da busca de uma modelagem ótima, assim como de uma solução otimizada. Doravante, nessa seara, elencamos os aguçantes problemas de otimização, geralmente denotados como

problemas de otimização contínua ou problemas de otimização discreta.

Passeando-se pelas literaturas dos séculos XX e XXI, a exemplo das asseverações lançadas por Kann (1992), Deb (2001), Collette e Siarry (2013) e Ringuest (2012), encontramos a seguinte estrutura lógica para um problema modelado sob a égide da otimização contínua, ora aplicada sobre certa realidade complexa: sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas de várias variáveis e, muitas vezes, diferenciáveis em um intervalo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, desejamos:

Maximizar ou minimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ restrita a

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & \text{com } i \in \mathbb{N}; \\ h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, & \text{para } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

O fato de termos funções de múltiplas variáveis segue-se da dinâmica do contexto real modelado matematicamente, pois quase sempre teremos um vasto rol de fatores trazendo implicações sobre o nosso estudo.

Por outro lado, indo na direção de uma situação-problema, agora, dita discreta, consideraremos um conjunto finito $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega\}$ e um conjunto de subconjuntos Θ de Ω tal que $\Theta \neq \emptyset$ e $\Theta \subseteq P(\Omega)$, donde $P(\Omega)$ denota o conjunto das partes de Ω , de maneira que seja possível definir a função $f_o : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de *função objetivo*. Logo, sendo $\Theta = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, com $k \in \mathbb{N}$, um problema de otimização combinatória se materializa pela busca de:

Obter-se um S_i , com $1 \leq i \leq k$, dadas certas restrições, tal que:

$$\begin{cases} f_o(S_i) \geq f_o(S_j), & \forall j \neq i, \text{ se o problema é de maximização;} \\ f_o(S_i) \leq f_o(S_j), & \forall j \neq i, \text{ se o problema é de minimização.} \end{cases}$$

Ademais, em termos clássicos da literatura, cada configuração S_i é nomeada como *solução viável* do problema, enquanto Θ será chamado de *espaço das soluções viáveis*. E, além disso, ante às muitas realidades naturais e sociais com as quais lidaremos, a deflagração de uma modelagem do meio receberá até duas identificações: modelagem concreta (modelos físicos, geométricos) e/ou modelagem abstrata (modelos lógicos, esquemáticos, ma-

temáticos).

Com efeito, na construção de um modelo lançaremos mão de diversos ingredientes que potencializarão a nossa busca por solucionar um problema de otimização. São eles: intuição, experiência com o tema (práxis), persistência, criatividade, bom humor, capacidade de síntese (GOLDBARG; LUNA, 2005). A formulação matemática de um contexto do mundo natural, real, a fim de gerar um modelo de otimização, será um sucesso na medida em que tenhamos obtido a mais fidedigna tradução do contexto mencionado.

Nesse sentido, a criação de um modelo representativo de determinada realidade, com incógnitas, dados de entrada e saída adequados à natureza do problema, equações, restrições do problema, gráficos e funções objetivo, não decorre simplesmente de um vasto conhecimento matemático, senão também de condições subjetivas do indivíduo, oriundas de sua cognição, de uma formação sociocultural, inclusive. Assim, a seguir, apresentamos um mapa mental que nos permite visualizar o fluxo de um processo de modelagem:

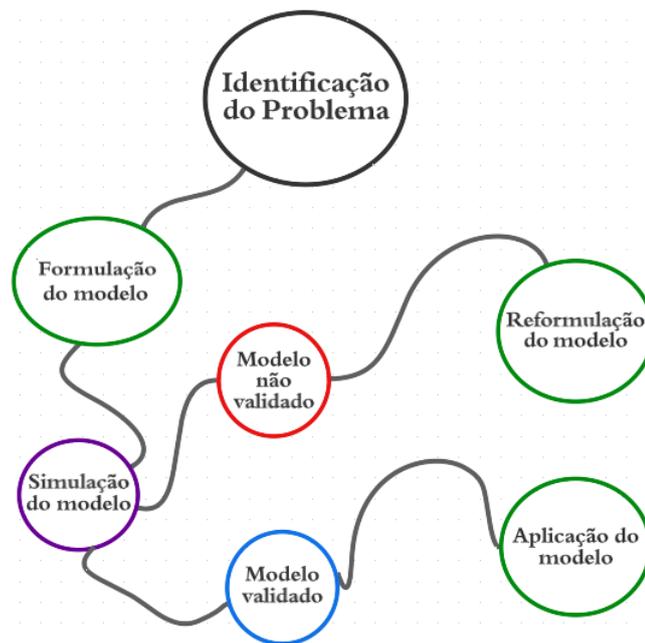


Figura 1.3: processo de modelagem.

Finalmente, destaque-se que o uso de constantes de proporcionalidade entre as variáveis de certo modelo, por definição, quase sempre figurarão nas configurações deste. Aliás, quando da validação do modelo, em muitos casos, far-se-á necessário realizar aproximações sobre este em função do contexto real, via elencação de nossas variáveis.

1.3 As programações matemáticas

Avançando-se com as discussões preliminares deste estudo, mergulhamos, agora, em mais alguns conceitos altamente preponderantes para a construção de modelagens de problemas de otimização. De início, você já se perguntou acerca do significado da palavra *programar*?

Ouvimos tanto falar de tal vocábulo por todo lugar, hoje em dia, que consideramos de salutar necessidade, antes dos devidos formalismos desta seção, definir bem o que ele quer dizer. De acordo com o dicionário Michaelis (2022), o verbo *programar* significa simplesmente “*fazer planos para; planejar*”. E, no contexto acadêmico, computacional ou não, programamos quando, primeiramente, idealizamos ações que se desdobrarão ao longo da execução de um projeto, sendo estas concretizadas ou não.

Poderíamos, então, falar em *Programação Matemática*? A resposta é um grande SIM! Destacavelmente concebida por meio da configuração de algoritmos e das implementações de técnicas de cálculo algébrico e geométrico, temos a *Pesquisa Operacional* (PO) como um de seus ramos clássicos de investigação científica.

Segundo Borges (2020), a PO surgiu durante a Segunda Guerra Mundial, sendo os seus destacados precursores os matemáticos George Dantzig (1914-2005), John Von Neumann (1903-1957) e Leonid Kantorovich (1912-1986), e define um domínio de conhecimento que se utiliza de métodos matemáticos para garantir que a humanidade possa tomar as melhores decisões nos mais diversos contextos estabelecidos por determinada situação. Como um de seus objetivos principais tem-se a busca pela otimização de recursos em pequena quantidade - mais escassos -, dada uma situação-problema vivenciada por alguém, por uma empresa, fábrica, indústria, governos, entre outros.

Dessa maneira, seja numa condução mais trivial ou mais complexa, debruçarmos-nos sobre a PO implica em termos substancial ferramental teórico-prático na otimização de situações-problema, uma vez que, muitas vezes, a tomada de decisão não comporta simplesmente uma rápida reflexão intelectual voltada à sua ótima obtenção. Isso nos imputa a demanda por métodos matemáticos estruturados para o estudo dos diferentes cenários emanados da situação; o que podemos extrair de um passo a passo bem trilhado pela PO.

A deflagração da presente pesquisa ocorre através de até duas naturezas quanto a sua abordagem, a saber: a quantitativa e/ou a qualitativa. A primeira é aplicável a problemas

considerados mais complexos, oriundos de certas realidades naturais, socioculturais, que se fundamentam na utilização do método científico para a interpretação destas; a segunda está intimamente relacionada ao uso da experiência pessoal daquele(s) que tomará(ão) uma ou mais decisões diante da situação-problema.

Aliás, no tocante ao estudo que estamos desenvolvendo nesta dissertação, atuaremos sob o enfoque da primeira abordagem aqui mencionada, estabelecendo-se conexões com a segunda. E, aquela, à luz da PO, é, por exemplo, modelada por um conjunto de sentenças matemáticas que representam a situação-problema evidenciada. Destarte, quando existem n decisões, ora quantificáveis, para tomarmos, segue-se que podemos vincular cada uma dessas decisões a uma dada incógnita da modelagem matemática realizada da situação, sendo esta chamada de *variável de decisão*. Em simbologia matemática, tais variáveis de decisão são denotadas por letras minúsculas latinas e indexadas, como, por exemplo: x_i , com $i = 1, 2, \dots, n$.

Nesse intento, as ditas variáveis de decisão se relacionarão por meio da chamada *função objetivo*, isto é, por $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Função esta comentada por nós em seção anterior e que nos permite exprimir o grau de eficácia procurado a partir do modelo. Com efeito, a escrita algébrica dessa função não é única, obviamente em face da natureza do problema e de suas limitações/restrições, além do tipo de PO aplicada.

Entre os muitos tipos de PO, encontramos a famosa *Programação Linear*, a *Programação Não Linear*, a *Programação Inteira*, a *Simulação de Monte Carlo*, a *Teoria dos Jogos*, a *Teoria das Filas* e a *Teoria dos Grafos*. A primeira, a qual faremos uso no presente trabalho, possui como característica o fato de as variáveis de decisão serem contínuas e lineares (aquelas pertencentes ao conjunto dos números reais e munidas da linearidade usual, isto é, possuem expoente fixo igual a um e não aparecem mutuamente multiplicadas), bem como também podermos conceber a função objetivo enquanto uma expressão algébrica linear. Mais ainda, seus algoritmos geradores de solução são destacavelmente eficientes e há sofisticadas técnicas matemáticas para transformarmos modelos de programação não linear em modelos lineares.

1.3.1 A poderosa programação linear

Eis a mais básica maneira de modelarmos um problema de otimização. É da *Programação Linear* (PL), inclusive, que naturalmente poderemos partir para outras mo-

delagens matemáticas possíveis da realidade, no contexto da PO. Mas, uma primeira indagação surge: quando as informações extraídas de uma situação-problema poderão ser elencadas através de uma PL?

Dadas as características de expressões matemáticas lineares, uma situação do mundo real é modelada nas vias da PL, com ou sem o uso de aplicativos computacionais, sempre que evidenciarmos as seguintes estruturas:

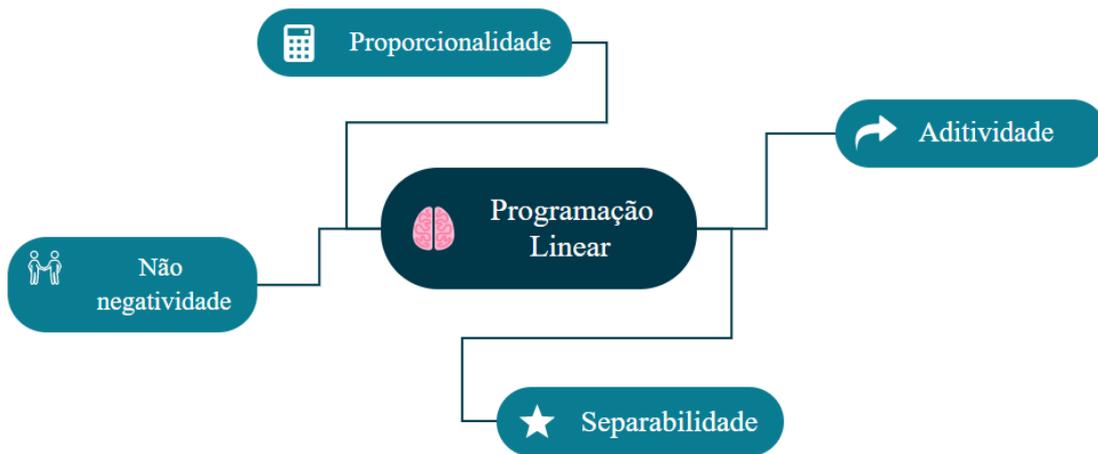


Figura 1.4: elementos presentes em um problema modelado pela PL.

Por *Proporcionalidade*, temos a sua constatação quando ocorre de a quantidade de recursos utilizados por certa variável ser proporcional ao nível de si mesma imersa na solução derradeira da situação-problema. Em acréscimo, dentro de um contexto de custo *versus* operacionalização, também a interpretação do custo de cada variável deve ser proporcional ao nível de sua operação.

Quanto a *Não Negatividade*, temos que sempre será concebível desenvolver certa variável em âmbito não negativo, bem como jamais ocorrerá de alguma proporção de um certo recurso ficar sem poder ser usado. Sobre a *Aditividade*, depararemos-nos com o somatório das variáveis sendo equivalente ao custo total de determinada situação. E, por fim, acerca da *Separabilidade*, será possível reconhecemos de maneira pontual o custo - ou, ainda, a utilização de recursos - das operações de cada variável.

Após todas essas pormenorizações teóricas comuns a um contexto que está apto a ser modelado por meio da PL, vamos à escrita matemática de uma situação-problema assim modelada, em sua formatação geral:

Otimizar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, com $x_j \geq 0$,

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{com } i = p + 1, p + 2, \dots, m.$$

Donde c_j são os coeficientes de proporcionalidade de cada variável x_j , $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é a chamada matriz das restrições do problema e $n, m, p \in \mathbb{N}$. Além disso, por *otimizar* a função objetivo entendemos como a sua *minimização* ou *maximização*; o que dependerá da problema estudado.

Assim, buscamos obter os valores de cada variável contínua x_j que otimizam $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, claro, sujeitos às restrições observadas, uma vez elencadas a matriz A e as quantidades de b_i (valor limite de cada restrição) e c_j . Ademais, ainda podemos configurar a modelagem de um problema através das chamadas *formas canônica e padrão* da PL.

(i) Forma canônica:

Otimizar $z = f(x) = cx$,

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} Ax \leq b \quad \text{ou} \quad Ax \geq b; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

(ii) Forma padrão:

Otimizar $z = f(x) = cx$,

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} Ax = b, \quad \text{com } b \geq 0 \text{ dado;} \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Sendo A também a matriz das restrições do problema, c o coeficiente de proporcionalidade da variável de decisão x e b o valor limite de dada restrição. De fato, é fácil notar que tais formatações geral, canônica e padrão, listadas acima, são matematica-

mente equivalentes. Com efeito, podemos sair do caso geral para os demais, a partir de um desenvolvimento algébrico recíproco. Inclusive, em se tratando das operações que podemos executar sobre um modelo de PL, há de se destacar três delas, as ditas *operações elementares*:

(O₁) Operação de *mudança* do processo de otimização:

minimizar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ equivale a maximizar $z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
e, maximizar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é igual a minimizar $z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

(O₂) Operação de *transformação* de variável real livre em variável não negativa:

se x_j é uma variável livre, então poderemos tomar duas variáveis auxiliares não negativas x'_j e x''_j tal que $x_j = x'_j - x''_j$. Por variável livre identificamos aquela incógnita que ainda não foi valorada.

(O₃) Operação de *alteração* de desigualdades em igualdades:

note que $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = b$, com $x_{n+1} \geq 0$;
e, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq b \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_{n+1} = b$, com $x_{n+1} \geq 0$.
Chamamos x_{n+1} de variável de folga.

Nesse momento, estamos prontos para exercitarmos os primeiros exemplos de uma modelagem de certa situação-problema por meio da PL. Antes, porém, observamos que a variável de decisão poderá ser duplamente indexada, nos casos aos quais os dados de um problema que a define estejam interdependentemente correlacionados. Veremos isto no problema 1.

1.3.1.1 Um problema de transporte

Problema 1 (ilustrativo). A fábrica CATVOLTS, de produção de cabos de transmissão elétrica de alta tensão com 10 km de extensão, possui duas unidades, cada qual localizada nas cidades de Lagarto/SE e de Brumado/BA. Os cabos produzidos no último bimestre de 2022 serão transportados para três centrais de distribuição (CDs) nas regiões Norte, Sudeste e Sul do Brasil, durante o primeiro semestre de 2023. Os dados de demanda de cada central de distribuição, do custo de envio dos produtos partindo de cada unidade da fábrica em questão e do total produzido por estas estão descritos no quadro abaixo.

Dados	CD-Norte	CD-Sudeste	CD-SUL	Produção por unidade
Unidade de Lagarto	550 reais	2440 reais	3615 reais	13 cabos
Unidade de Brumado	700 reais	1500 reais	2100 reais	18 cabos
Demandas por CD	10 cabos	14 cabos	7 cabos	—

Desejando-se minimizar o custo de transporte, o departamento de logística dessa fábrica calculará as quantidades ótimas de produtos que serão transportadas de cada unidade fabricante para as CDs. Qual seria o modelo de PL empregado?

Solução

Estamos diante de uma situação-problema denotada, no campo da *Pesquisa Operacional*, como um *Problema de Transporte*. Este se caracteriza através da *relação logística* entre os chamados *pontos de oferta* de determinado(s) produto(s) e os seus associados *pontos de demanda*.

À luz do problema acima, podemos exibir um grafo com os possíveis caminhos de distribuição dos produtos de cada unidade de produção aos CD-Norte (CD 1), CD-Sudeste (CD 2) e CD-Sul (CD 3). Cada caminho desse identificará um certo valor de custo de transporte, ao passo que buscaremos, atendendo-se a todas as demandas, minimizar o custo total para a realização do transporte necessário para cada demanda.

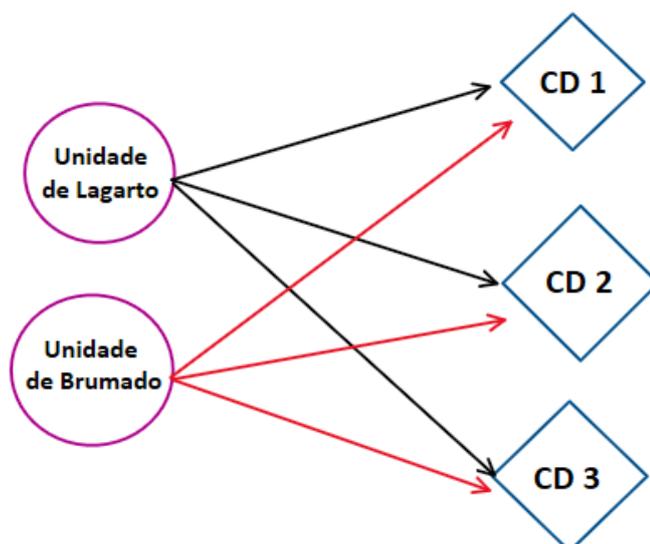


Figura 1.5: grafo dos caminhos de distribuição do problema.

Agora, definamos a *variável de decisão* para tal problema.

x_{ij} := quantidade de produto transportada da unidade i da fábrica até a CD j , com $i = 1$ representando a unidade de Lagarto, $i = 2$ a de Brumado, bem como $j = 1$ associado à CD 1, $j = 2$ quanto a CD 2 e $j = 3$, à CD 3. Por exemplo, x_{12} nos indica a quantidade de produto transportada da unidade de Lagarto à CD-Sudeste.

Agora, conhecendo os custos de transporte exibidos no quadro acima, podemos expressar a *função objetivo* do problema, a saber:

$$\begin{aligned} z &= f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) \\ &= 550 \cdot x_{11} + 2440 \cdot x_{12} + 3615 \cdot x_{13} + 700 \cdot x_{21} + 1500 \cdot x_{22} + 2100 \cdot x_{23} \end{aligned}$$

Isso posto, precisamos minimizar z . Em simbologia matemática, queremos obter o $\text{Min}(z)$, ou, ainda, o $\text{Min}\{f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})\}$.

Quanto às restrições do problema, além do fato de $x_{ij} \geq 0$, com $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, perceba que temos duas categorias destas neste caso, a relativa ao total produzido por unidade (R_1) e aquela associada às demandas das CDs (R_2). Assim, ficamos com:

$$R_1 : \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 13; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 18. \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 10; \\ x_{12} + x_{22} \geq 14; \\ x_{13} + x_{23} \geq 7. \end{cases}$$

Para R_1 , temos desigualdade do tipo “menor ou igual”, uma vez que estamos diante de uma contextual limitação do total produzido por cada unidade de produção. Analogamente, em R_2 , a desigualdade “maior ou igual” se justifica pelas demandas de cada CD a serem atendidas, que devem ser atingidas ou até superadas - não é comumente concebível não atendê-las, se se produz o suficiente para isso e há compradores/clientes potenciais para o produto demandado.

Em suma, finalizamos a modelagem do *Problema 1*, sob a égide da PL, nas condições supracitadas, da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } z = 550 \cdot x_{11} + 2440 \cdot x_{12} + 3615 \cdot x_{13} + 700 \cdot x_{21} + 1500 \cdot x_{22} + 2100 \cdot x_{23} ,$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 13; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 18; \\ x_{11} + x_{21} \geq 10; \\ x_{12} + x_{22} \geq 14; \\ x_{13} + x_{23} \geq 7; \\ \text{com } x_{ij} \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Nas literaturas matemáticas que versam sobre PO, dizemos que a situação-problema a qual acabamos de modelar através da PL é denominada de uma modelagem por PL inteira. A razão disso decorre do fato de os dados numéricos do exercício pertencerem apenas ao conjunto \mathbb{Z} .

1.3.1.2 Um problema de designação de pessoal

Problema 2 (ilustrativo). A refinada fabricante de macacões *jeans* artesanais, registrada pelo nome IDENTIDADE DE EULER, possui duas linhas de produção dessa longa peça de roupa, uma de macacões masculinos adultos e outra de macacões femininos adultos, que comportam até 60 funcionários e, no momento, contam com 42. Sabe-se que: (a) a linha de produção dos macacões masculinos adultos comporta, no máximo, 24 pessoas; cada macacão desse é produzido por 03 pessoas por dia de trabalho; e sua unidade vendida fornece um lucro de 71,5 reais; (b) a linha de produção dos macacões femininos adultos comporta, no máximo, 36 pessoas; cada um deles é feito por 02 pessoas por dia de trabalho; e sua venda unitária fornece um lucro de 66,9 reais. Dessa maneira, objetivando maximizar seu lucro total ao dia, qual seria o modelo de PL que um consultor matemático elaboraria para esta empresa?

Solução

Semelhantemente ao problema anterior, nesse momento, vivenciamos uma situação-problema denotada, no campo da *Pesquisa Operacional*, como um *Problema de Designação de Pessoal*. Trata-se de um contexto com aplicação matemática análoga ao problema de transporte. Sendo que, na designação de pessoal, evidenciaremos uma *relação logística* entre os *recursos* (apenas humanos ou de diferentes naturezas) de produção de

determinado(s) produto(s) e as suas associadas *tarefas* a serem executadas. Isso posto, com respeito a uma busca pela maximização ou pela minimização de uma função objetivo modelada através da relação mencionada.

Assim, seguindo-se conforme a teoria apresentada, como também fizemos no desenvolvimento do problema anterior, definamos a nossa *variável de decisão*.

x_j := quantidade da produção diária (gerada pelos funcionários) a ser vendida por dia de cada macacão masculino adulto, se $j = 1$; ou, de cada macacão feminino adulto, se $j = 2$.

Daí, de acordo com as informações fornecidas no exercício, temos a *função objetivo* abaixo, que persegue a maximização do lucro dessa famosa empresa - isto é, $\text{Max}(z)$ ou $\text{Max}\{f(x_1, x_2)\}$:

$$z = f(x_1, x_2) = 71,5 \cdot x_1 + 66,9 \cdot x_2$$

Ponderando-se sobre as restrições do problema, ora demarcadas nas linhas de produção dos macacões, temos a restrição de cada x_j em relação à capacidade total de trabalhadores por linha de produção (R_1) e a restrição relativa à quantidade de funcionários, disponíveis no momento, que preparam cada unidade de um tipo de macacão por dia de trabalho (R_2).

$$R_1 : 0 \leq x_1 \leq \frac{24}{3} \quad \text{e} \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{36}{2};$$

$$R_2 : 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 42.$$

As expressões, seja em R_1 ou em R_2 , vêm à tona devido à natural dependência - anunciada pelo exercício - da feitura de cada tipo de macacão com respeito ao número de trabalhadores necessários por unidade de produção.

Portanto, a consultoria do matemático do problema estabeleceria, via PL, a seguinte modelagem matemática da situação:

$$\text{Maximizar } z = 71,5 \cdot x_1 + 66,9 \cdot x_2 ,$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 8; \\ 0 \leq x_2 \leq 18; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 42; \\ \text{com } x_j \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Veja que temos condições de afirmar qual seria a capacidade diária de produção da IDENTIDADE DE EULER, sendo possível, especialmente, definirmos a disponibilidade de funcionários para a manutenção de suas atividades. Estamos diante de uma concatenação de tomadas de decisão preciosa para o bom e melhor funcionamento de certa organização.

Pois bem, através da PL, vimos como concretizar modelagens matemáticas de situações a serem otimizadas do dia a dia de muita gente. Incrível, não é mesmo? Entretanto, sim, pelo menos, uma pergunta deve nos ocorrer: quais cálculos realizar para obtermos os valores ótimos de cada variável de decisão, minimizando ou maximizando determinada função objetivo?

A resposta para isso e, com certeza, para outras curiosidades que surgirão, por condição *sine qua non*, virão nas próximas seções.

Capítulo 2

O clássico algoritmo *Simplex*

Criado em 1946 pelo matemático George Dantzig e por sua equipe de pesquisadores, durante trabalhos realizados no departamento da Força Aérea Americana, o algoritmo *Simplex* está entre as mais relevantes invenções matemáticas do século passado. O termo *Simplex* indica a justaposição entre *Simple* (simples, em português) e x (uma variável).

É interessante destacarmos o que queremos dizer pelo termo *algoritmo*. Seja em *Matemática* ou na *Computação*, algoritmos são um conjunto de instruções ou comandos sequenciados e sistematicamente concebidos com o objetivo de resolver determinado problema ou realizar certa tarefa.

A motivação para o seu desenvolvimento veio da busca pela resolução de Problemas de Programação Linear (PPLs), que, normalmente, possuem infinitas soluções, das quais desejamos obter a solução ótima. Esse desejo, essa busca, perpassa por duas dificuldades a serem superadas quando estamos diante de um sistema indeterminado de equações/inequações lineares - um PPL -, a saber:

- (i) Como encontrar soluções iniciais (básicas) do mencionado sistema de equações?
- (ii) Como contornarmos a verificação das inúmeras soluções iniciais possíveis com o objetivo de se obter a otimização desse sistema?

Nesse intento, então, veio à tona o clássico algoritmo *Simplex*. Recorrendo-se, especialmente, a vários tópicos da Álgebra Linear, o algoritmo, em uma explicação geral, dado um PPL, após obter uma solução inicial (básica) extremada (aquela com valores baixos ou altos, considerando as restrições do problema), segue calculando novas soluções com valores iguais ou melhorados em relação à solução inicial, no contexto da otimização

requerida, até alcançar a solução ótima.

Os detalhes de como esse processo se materializa decorre de uma série de conceitos matemáticos, os quais veremos a seguir. Inclusive, com outra invenção humana, a dos computadores, o uso do *Simplex* em situações-problema de expressivo porte se tornou tarefa bem mais rápida e simplificada.

2.1 Definições, teoremas e corolários

Definição 2.1.1. Uma base de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \leq n$, é uma matriz quadrada de m vetores coluna linearmente independentes (LI) em \mathbb{R}^m . E, as variáveis associadas a essas colunas são chamadas de *variáveis básicas*.

Exemplificando-se a definição acima, temos que:

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 21 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 73 \end{bmatrix}$, temos que $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ é uma base

de M . Isso posto, pois:

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vetores coluna LI. De fato, é

fácil verificar que: dados escalares α , β e γ sobre o corpo dos números reais, concluiremos que $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \cdot x_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Por outro lado, se tais vetores coluna não fossem inicialmente LI, poderíamos achá-los através da obtenção da matriz reduzida linha-equivalente à matriz M , donde selecionaríamos três colunas não nulas e não negativas (uma das condições para um PPL) para compor a matriz B - claro, quando possível.

Note que x_1, x_2 e x_3 definem as nossas variáveis básicas. Com isso, escrevemos, neste exemplo, $x_B = (x_1, x_2, x_3)$, sendo x_B o vetor das variáveis básicas. Já no tocante às demais colunas da matriz M , identificamo-las por:

$x_4 = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 73 \end{bmatrix}$, com $x_R = (x_4, x_5)$ sendo o vetor das

remanescentes colunas das variáveis ditas não básicas.

Agora, quando generalizamos a exemplificação da Definição 2.1.1, segue que: se $A_{m \times n}$ é uma matriz tal que $m \leq n$ e $B_{m \times m}$ uma matriz que represente a sua base, então x_B denota o vetor das variáveis básicas de m componentes e x_R indica o vetor das remanescentes $n - m$ variáveis não básicas. Daí, naturalmente podemos decompor o vetor das variáveis x , em geral, como:

$$x = (x_B, x_R) \quad \text{ou} \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad x = \begin{bmatrix} x_B & x_R \end{bmatrix}^t.$$

Uma vez que é possível solucionarmos um sistema de equações $m \times m$ somente em termos das variáveis básicas, pois estas são LI, teremos uma solução dada por $\bar{x} = (x_B, 0)$. Ademais, ao estendermos a mesma busca por solução a partir da matriz $A_{m \times n}$, bastar-nos-á decompô-la em uma matriz $B_{m \times m}$, com $\text{posto}(B) = m$ e $\det(B) \neq 0$ (B é não singular), e em outra, $R_{m \times (n-m)}$:

$$A_{m \times n} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \vdots \\ B_{m \times m} \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ R_{m \times (n-m)} \\ \vdots \end{matrix} \end{array} \right].$$

E, dessa maneira, com respeito à decomposição acima, dado o sistema $Ax = b$, chegamos ao desenvolvimento:

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_{m \times m} & R_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\ &\Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \\ &\Leftrightarrow x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot Rx_R. \end{aligned}$$

Doravante, surgem as próximas definições.

Definição 2.1.2. Seja $B_{m \times m}$ uma base associada à matriz $A_{m \times n}$, com $m \leq n$. O vetor \bar{x} , composto por $x_B = B^{-1} \cdot b$ e por $x_R = 0$, é chamado de *solução básica* do sistema

$$Ax = b.$$

Definição 2.1.3. Uma solução básica sem componentes negativas é denotada por *solução básica viável*.

Logo, através dessas definições, ficaríamos com a seguinte decomposição do vetor \bar{x} , munido de n coordenadas:

$$\bar{x} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} \cdot b & 00000\dots 0 \end{array} \right).$$

Dos *Problemas 1 e 2* da seção anterior, ao aplicarmos as definições que acabamos de exibir sobre o seu conjunto de restrições, que consiste em um sistema de inequações que pode ser transformado em um sistema de equações, temos que:

para o *Problema 1*,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 13 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 18 \\ x_{11} + x_{21} \geq 10 \\ x_{12} + x_{22} \geq 14 \\ x_{13} + x_{23} \geq 7 \\ \text{com } x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_4 = 13 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_5 = 18 \\ x_{11} + x_{21} - x_6 = 10 \\ x_{12} + x_{22} - x_7 = 14 \\ x_{13} + x_{23} - x_8 = 7 \\ \text{com } x_4, x_5, x_6, x_7 \text{ e } x_8 \text{ sendo variáveis de folga} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 13 \\ 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 18 \\ x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 0x_4 + 0x_5 - x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 10 \\ 0x_{11} + x_{12} + 0x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 0x_{23} + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - x_7 + 0x_8 = 14 \\ 0x_{11} + 0x_{12} + x_{13} + 0x_{21} + 0x_{22} + x_{23} + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - x_8 = 7. \end{array} \right.$$

Desse modo, colocamos o PPL em destaque na sua forma padrão; e, ainda, podemos modelar a matriz dos coeficientes das variáveis desse sistema:

$$A_{5 \times 11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daí, acerca das matrizes B (base para $A_{5 \times 11}$) e R , temos como realizar a seguinte divisão sobre $A_{5 \times 11}$:

$$B_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R_{5 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

em que, neste caso, $x_B = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_5)$ e $x_R = (x_{22}, x_{23}, x_4, x_6, x_7, x_8)$ - situação a qual construímos B como uma matriz quadrada formada por colunas LI. Destaque-se que B será uma base viável se, além de suas colunas serem LI, cada uma de suas entradas forem não negativas.

Agora, obtendo-se $x_B = B^{-1} \cdot b$, vem que:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \\ 10 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \\ 7 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $\bar{x} = (-8, 14, 7, 18, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ configurando uma solução básica, apesar de ainda não viável, sendo $x_{11} = -8$, $x_{12} = 14$, $x_{13} = 7$, $x_{21} = 18$, $x_5 = 0$ e $x_{22} = x_{23} = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ - para termos uma solução básica viável, partiríamos de outra matriz B possível; outros procedimentos, em especial, veremos mais adiante.

Quanto ao *Problema 2*, teríamos:

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 42 \\ \text{com } x_j \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_4 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 42 \\ \text{com } x_3, x_4 \text{ e } x_5 \text{ sendo variáveis de folga} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 42. \end{cases}$$

Donde decorre a construção da matriz dos coeficientes de x_j desse sistema:

$$A_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E, com respeito às matrizes B (base para $A_{3 \times 5}$) e R , podemos realizar a seguinte divisão sobre $A_{3 \times 5}$:

$$A_{3 \times 5} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \text{ sendo } B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, neste caso, $x_B = (x_1, x_2, x_3)$ e $x_R = (x_4, x_5)$. Analogamente, também poderíamos tomar $x_B = (x_1, x_2, x_4)$ e $x_R = (x_3, x_5)$, entre outras possibilidades em que B é uma matriz quadrada formada por colunas LI.

Além disso, calculando-se $x_B = B^{-1} \cdot b$, temos:

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{x} = (2, 18, 6, 0, 0) \text{ é uma solução básica}$$

viável do mencionado *Problema 2*, em que $x_1 = 2$, $x_2 = 18$, $x_3 = 6$ e $x_4 = x_5 = 0$.

Definição 2.1.4. Um conjunto (ou região) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \text{ com } x \geq 0\}$ é chamado de *conjunto de soluções viáveis* para um PPL, em que A , x e b são matrizes de ordens $m \times n$, $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente.

Definição 2.1.5. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se, para quaisquer elementos x e y de C , tem-se que: $\forall a \in [0, 1]; ax + (1 - a)y \in C$.

Definição 2.1.6. Uma combinação convexa sobre um conjunto convexo C é uma combinação linear em que os coeficientes de ponderação são não negativos e somam um.

Exemplificando-se a Definição 2.1.6, temos que: se y é uma combinação convexa de x_1, x_2, \dots, x_n , então:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \text{ e } \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Definição 2.1.7. Dizemos que x não é um ponto extremo (vértice) de um conjunto convexo C quando existe $a \in (0, 1)$ tal que $x = ay + (1 - a)z$, com $y, z \in C \setminus \{x\}$.

Teorema 2.1.1. Um conjunto C das soluções viáveis de um modelo de PL é um conjunto convexo.

Demonstração: suponha que C é um conjunto de soluções viáveis de um modelo de PL. Logo, C é formado pelos pontos x tal que $Ax = b$, com $x \geq 0$. Com isso, provemos que C é um conjunto convexo. Assim, precisamos provar que: dados dois pontos $x_1, x_2 \in C$, a combinação convexa $x = ax_1 + (1 - a)x_2$ pertence a C , com $a \in [0, 1]$.

Se $x_1, x_2 \in C$, então $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$, com $x_1, x_2 \geq 0$. Agora, tomando-se x um ponto qualquer pertencente ao segmento de reta $\overline{x_1x_2}$, segue que:

$$\exists a \in [0, 1]; x = ax_1 + (1 - a)x_2.$$

Note que $x \geq 0$, pois $x_1, x_2 \geq 0$ e $a \in [0, 1]$. Daí, multiplicando-se A em ambos os membros desta igualdade, ficamos com:

$$Ax = A[ax_1 + (1 - a)x_2]$$

$$Ax = aAx_1 + (1 - a)Ax_2$$

$$Ax = ab + (1 - a)b$$

$$Ax = b \Rightarrow x \in C \quad \blacksquare$$

Teorema 2.1.2. Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo (vértice) do conjunto (região) de soluções viáveis.

Demonstração: da Definição 2.1.4, sabemos que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \text{ com } x \geq 0\}$ é o conjunto de soluções viáveis para um PPL. Se $x \in C$ é uma solução básica viável qualquer neste conjunto, provemos que x é um ponto extremo de C .

Se $x \in C$ é uma solução básica viável, então, a menos de reordenação das variáveis, é da forma:

$$x_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+ \text{ as variáveis básicas.}$$

Suponha que x não é um ponto extremo de C . Pela Definição 2.1.7, existem dois pontos t e $w \in C \setminus \{x\}$ tais que x pode ser obtido como: $x = at + (1 - a)w$, com $a \in (0, 1)$.

E, além disso, sendo $t, w \in C$, temos que: $At = b$ e $Aw = b$, com $t, w \geq 0$. Donde decorre que, sobre as variáveis básicas de x , podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = at_1 + (1 - a)w_1 \\ x_2 = at_2 + (1 - a)w_2 \\ \vdots \\ x_m = at_m + (1 - a)w_m \\ 0 = at_{m+1} + (1 - a)w_{m+1} \\ \vdots \\ 0 = at_n + (1 - a)w_n \end{array} \right.$$

Portanto, como t e w são não negativos e $a \in (0, 1)$, então, $t_{m+i} = w_{m+i} = 0$, com

$i \in \{1, 2, \dots, n - m\}$.

Logo, t e w são da forma:

$$t_{n \times 1} = \begin{bmatrix} t_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_{n \times 1} = \begin{bmatrix} w_B \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí, da Definição 2.1.1, deveremos ter $B.t_B = b$ e $B.w_B = b$; o que nos leva, subtraindo-se os membros correspondentes dessas igualdades, a:

$$B.t_B - B.w_B = b - b = 0$$

$$B(t_B - w_B) = 0 \Rightarrow t_B - w_B = 0, \text{ visto que } B \neq 0, \text{ pois se}$$

trata de uma matriz não singular.

Assim, uma vez que $t_B - w_B = 0 \Rightarrow t_B = w_B \Rightarrow t = w$, temos um absurdo, já que t e w são distintos. Com isso, concluímos que x , de fato, é um ponto extremo de C . ■

Após enunciarmos e, inclusive, demonstrarmos o Teorema 2.1.2, surge aquela clássica indagação matemática: vale a sua recíproca? Com efeito, a resposta é positiva. Um ponto extremo em C é também uma solução básica viável do sistema $Ax = b$. Ademais, veja que não existem soluções viáveis, t e w , distintas da solução básica x e que satisfaçam à igualdade $x = at + (1-a)w$. E, assim, temos o teorema abaixo.

Teorema 2.1.3. Um ponto x é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um PPL se, e somente se, $x \geq 0$ (viável) for uma solução básica do sistema de equações lineares $Ax = b$.

Demonstração: basta-nos provar a implicação de ida (\Rightarrow), dado que o Teorema 2.1.2 equivale a implicação de volta (\Leftarrow). Assim, vejamos a demonstração a seguir.

(\Rightarrow) Seja x um ponto extremo de $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \text{ com } x \geq 0\}$ e suponha que x não represente uma solução básica deste. Logo, x possui um número r de entradas não nulas, digamos $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r} > 0$, com r maior do que m , em que m indica o número de linhas da matriz A . Agora, sendo a_j a j -ésima coluna de A , temos que $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$ são LD, já que x não é uma solução básica de C . Portanto, existem números não todos nulos, $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_r}$, tais que $t_{j_1}a_{j_1} + t_{j_2}a_{j_2} + \dots + t_{j_r}a_{j_r} = 0$ e $t_j = 0$, quando $j \neq j_1, j_2, \dots, j_r$. Daí, $At = 0$ e, então, podemos escrever $A(x \pm \lambda t) = Ax \pm \lambda At = b \pm 0 = b$, com $\lambda > 0$ tomado tão pequeno o quanto queiramos tal que $x - \lambda t$ e $x + \lambda t$ pertencem a C . Com

isso, x acaba por ser expresso como uma combinação convexa de dois pontos distintos de C , a saber: $\frac{1}{2}(x - \lambda t)$ e $\frac{1}{2}(x + \lambda t)$. Portanto,

$$x = \frac{1}{2}(x - \lambda t) + \frac{1}{2}(x + \lambda t).$$

Então, pela Definição 2.1.7, x não é ponto extremo; o que contradiz nossa hipótese. Dessa forma, x , de fato, sendo ponto extremo de C , implica em configurar uma solução básica deste. ■

Corolário 2.1.1. O conjunto dos pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado em $\binom{n}{m}$.

Demonstração: do Teorema 2.1.1, sabemos que um conjunto C de soluções viáveis é um conjunto convexo. E, este, por sua vez, geometricamente, possui um número finito de vértices (extremos), visto que tal conjunto C se trata de uma região poligonal formada por expressões algébricas lineares - aquela formada pela reunião de um número finito de regiões triangulares coplanares e sem sobreposição. Logo, o conjunto de seus pontos extremos é finito. Em acréscimo, do Teorema 2.1.3, como todo ponto extremo em C é uma solução básica viável do sistema $Ax = b$, então, ao construirmos a matriz $B_{m \times m}$, uma base para $A_{m \times n}$, com $m \leq n$, temos um total de n colunas da qual escolhemos m , com a finalidade de exibirmos matrizes $m \times m$, isto é, para tal construção fazemos a combinação de n tomados m a m , que é calculada por: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. ■

Corolário 2.1.2. Se existe uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

Demonstração: pela contrapositiva, suponha que um modelo de PL não possua solução básica viável x . Então, pelo Teorema 2.1.3, não existe ponto extremo no conjunto C das soluções viáveis desse PPL. Agora, suponha que x seja uma solução viável. Assim, como x não é ponto extremo de C , então existem soluções viáveis y e z tais que $x = \alpha y + \beta z$, com $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha, \beta > 0$. Com isso, ao tomarmos y e z como combinação convexa de outras soluções viáveis, repetidamente, chegaremos à combinação convexa de x em relação a pontos extremos de C ; um absurdo, por hipótese. Portanto, x não é solução viável do PPL associado. ■

Neste ponto da fundamentação teórica matemática do *método Simplex*, tal qual reconhecemos associações entre soluções básicas, soluções viáveis, soluções básicas viáveis e

pontos extremos, agora, veremos dois teoremas que relacionam esses pontos com o valor da função objetivo de um PPL. Eles encerram a base teórica desse clássico e poderoso algoritmo.

Teorema 2.1.4. Se uma função objetivo possui um máximo (ou um mínimo), então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C das soluções viáveis do modelo de PL.

Demonstração: considere f uma função objetivo que possui um valor máximo $k \in \mathbb{R}$ no ponto x_M . Logo, temos que $f(x) \leq f(x_M) = k, \forall x \in C$.

Agora, sejam x'_1, x'_2, \dots, x'_p os pontos extremos do conjunto convexo C . Assim, provemos que x_M é um desses pontos extremos. Destarte, suponha que x_M não seja um ponto extremo de C . Portanto, das Definições 2.1.6 e 2.1.7 e do Teorema 2.1.1, ele pode ser obtido pela seguinte combinação convexa:

$$x_M = a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_px'_p, \text{ com } a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p \text{ e } a_1 + a_2 + \dots + a_p = 1.$$

Aplicando-se f a x_M , que é uma função linear, dado o contexto de PL ao qual estamos inseridos, temos:

$$f(x_M) = f(a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_px'_p) = a_1f(x'_1) + a_2f(x'_2) + \dots + a_pf(x'_p) = k$$

Isso posto, como, entre os pontos extremos x'_1, x'_2, \dots, x'_p de C , podemos definir o ponto extremo x'_M tal que $f(x'_M) = \max\{f(x'_i)\}$, com $i = 1, 2, \dots, p$, segue que:

$$f(x_M) = a_1f(x'_1) + a_2f(x'_2) + \dots + a_pf(x'_p) \leq a_1f(x'_M) + a_2f(x'_M) + \dots + a_pf(x'_M)$$

$$f(x_M) \leq a_1f(x'_M) + a_2f(x'_M) + \dots + a_pf(x'_M) = (a_1 + a_2 + \dots + a_p)f(x'_M)$$

$$f(x_M) \leq 1 \cdot f(x'_M) \Rightarrow f(x_M) \leq f(x'_M)$$

Dessa maneira, ficamos com $f(x_M) \geq f(x'_M)$, por hipótese, e com, simultaneamente, $f(x_M) \leq f(x'_M)$. E, então, $f(x_M) = k = f(x'_M)$. Portanto, x_M , enquanto solução ótima para f , é ponto extremo de C .

Observe que a demonstração fornecida para o Teorema 2.1.4 partiu da hipótese de uma função objetivo (f) possuir um máximo ($k \in \mathbb{R}$). Todavia, se partíssemos de f possuindo um mínimo, teríamos uma prova análoga. ■

Acerca do desfecho da demonstração acima, recomendamos que o leitor desta pesquisa realize a análoga demonstração mencionada. É um bom exercício.

Teorema 2.1.5. Se a função objetivo assume o máximo (ou o mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.

Demonstração: seja f uma função objetivo, que é linear, por definição, e que assume determinado valor ótimo k (máximo ou mínimo) nos pontos extremos x_1 e x_2 . Com isso, $f(x_1) = f(x_2) = k$. Agora, tomando-se x como combinação convexa de x_1 e x_2 , isto é, $x = ax_1 + (1 - a)x_2$, com $a \in [0, 1]$, segue que:

$$f(x) = f(ax_1 + (1 - a)x_2) = af(x_1) + (1 - a)f(x_2) = ak + (1 - a)k = k$$

Desse modo, de fato, f assume o mesmo valor ótimo em qualquer combinação convexa envolvendo mais de um ponto extremo, x_1 e x_2 . ■

Com efeito, ora apropriados das definições, teoremas e corolários elencados, reconhecemos que o algoritmo *Simplex* é materializado através da experimentação de um conjunto sequenciado de soluções básicas viáveis, com o objetivo - como já sabíamos - de determinar o valor ótimo de certa função objetivo. Essa rotina traz uma excepcional atuação ao algoritmo, além de termos uma quantidade finita de procedimentos até a sua convergência ao resultado perseguido.

A seguir, ilustramos, por meio de uma figura, a relação lógica intrínseca ao funcionamento do algoritmo *Simplex*:

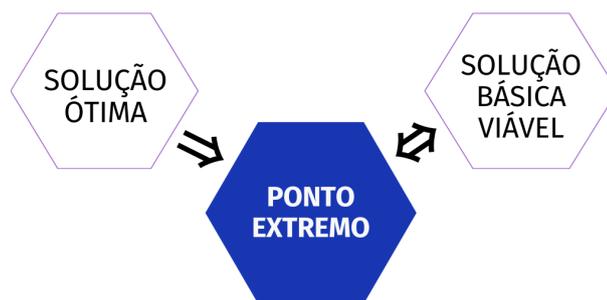


Figura 2.1: implicações em torno de uma solução ótima.

2.2 A experimentação do método *Simplex*

Neste momento, estamos prontos para atestar a atuação prática do método em tela, a partir da aplicação de uma lista de passos voltados à solução de sistemas de equações

lineares, ora sujeitos a determinada função objetivo. Em especial, podemos destacar que essa atuação dispõe de três momentos cruciais para o seu alcance, a saber:

1. Quanto ao processo de inversão de $B_{m \times m}$, a matriz básica obtida de $A_{m \times n}$, que, por sua vez, denota a matriz das restrições de um modelo de PL;
2. Com respeito às condições de mudança de variáveis nas entradas da matriz básica, a fim de que haja certeza de melhoria da solução durante o desenvolvimento das etapas do algoritmo;
3. Acerca das ocasiões de parada do algoritmo e, conseqüentemente, da interpretação desse contexto (parcialmente conclusivo, conclusivo ou permanentemente inconclusivo).

Em (1), o algoritmo frequentemente é elaborado para se utilizar do método de inversão de matrizes dado pelas clássicas operações elementares entre linhas. Este cálculo de inversão matricial garante ao algoritmo que as suas iterações sejam sempre aproveitadas, no trânsito entre o avanço e o retorno do processo de obtenção de $B_{m \times m}^{-1}$.

Sobre (2), com a inserção na matriz básica de certa variável não básica, faz-se uma estimativa do provável auxílio que isso traz para o acréscimo ou decréscimo da função objetivo (seja para maximização ou minimização). Essa atuação nos garante a eleição da variável de maior auxílio para tanto. Aliás, para Goldbarg e Luna (2005, p.97), “a eficiência do método *simplex* e seu extraordinário poder de funcionar na prática estão associados ao critério adotado nesse cálculo”.

Tratando-se de (3), através dos momentos de parada do algoritmo, teremos a identificação das razões pelas quais não existem mais chances de que uma troca de variável na matriz básica possa melhorar a condição de otimização. Ademais, também reconheceremos os contextos em que haverá uma tendência de crescimento/decrescimento infinito da função objetivo ou de não viabilidade do PPL.

2.2.1 Aplicação à resolução de um PPL

Seguindo-se com nossa atenção em torno do *Problema 2*, modelado na Seção 1.3.1, caso ele possua solução, então a perseguiremos maximizando a função objetivo z sobre o conhecido conjunto C das soluções viáveis. Inicialmente, exemplifiquemos o grau de

dificuldade de tal problema por meio de uma representação geométrica de suas restrições; o que é possível, quando dispomos de duas ou três variáveis de decisão, e, então, construímos ambientes geométricos no plano cartesiano ou no octante.

Defina as variáveis x_1 e x_2 como o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente. Assim, podemos estabelecer a seguinte construção gráfica:

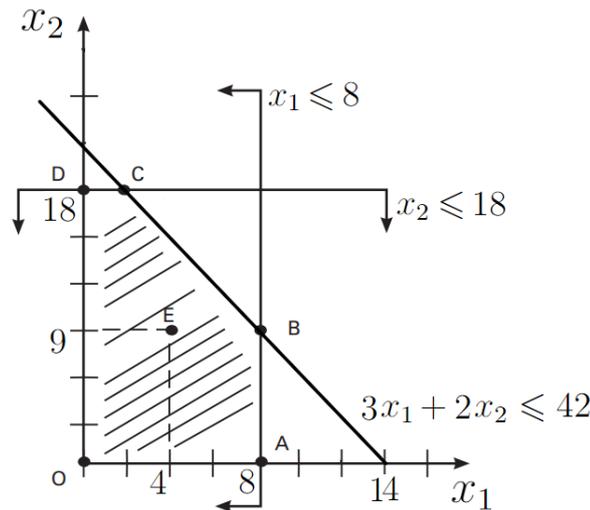


Figura 2.2: representação geométrica das restrições do *Problema 2*.

Fixamos os pontos A, B, C, D, E e O como exemplos de soluções para o conjunto das restrições do *Problema 2*, que pertencem à região convexa ABCDO. Eis aqui uma verificação do Teorema 2.1.1. Além disso, dado que os pontos A, B, C, D e O são extremos (vértices) dessa região convexa, pelo Teorema 2.1.3, estes fazem parte do conjunto de soluções básicas viáveis do sistema de equações lineares $Ax = b$, ora expresso na página 24. Com isso, vejamos os valores assumidos pela função objetivo em cada um desses pontos:

Pontos	Coordenadas (x_1, x_2)	Valor de $z = f(x_1, x_2) = 71,5 \cdot x_1 + 66,9 \cdot x_2$
A	(8, 0)	572
B	(8, 9)	1174,1
C	(2, 18)	1347,2
D	(0, 18)	1204,2
E	(4, 9)	888,1
O	(0, 0)	0

Veja que, entre os pontos exemplificados acima, a solução que nos traz o maior valor de

z é a que corresponde ao ponto C. Daí, como estamos diante de um PPL de maximização de z , então esse seria o par (x_1, x_2) que garantidamente nos fornece o máximo de tal função? A melhor resposta, neste momento, é afirmar que temos um ponto indicativo da existência de uma solução ótima, vide Teorema 2.1.4, porém não ainda com certeza que ele seja o resultado ótimo para z . Ainda não verificamos se não há algum outro ponto que o supere em z . Assim, temos que o ponto C define a melhor solução básica viável, por ora, para o *Problema 2*.

Do Corolário 2.1.1, com respeito ao sistema $Ax = b$, sabemos que o número total de pontos extremos desse PPL é limitado a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$. De fato, conforme Figura 2.2, a quantidade de pontos extremos desse PPL está limitado a 10, visto que temos cinco destes tipos de pontos. Daí, como a solução ótima se encontra em um ponto extremo, precisaremos partir de uma solução básica viável, melhorando-a, até atingirmos o máximo para z . Esse intento permitirá confirmarmos a otimalidade de C ou não. Veremos como desenvolver este procedimento na próxima subseção, ao passo que trilharmos os três momentos cruciais de execução do algoritmo *Simplex*.

É relevante termos ciência de que é possível nos depararmos com um conjunto de soluções viáveis que seja um conjunto vazio. Isso nos conduz a um PPL, ainda que coerentemente modelado, sem solução. Esta é a situação a qual denominamos de um PPL inviável ou impossível. Numa representação gráfica, com x_1 e x_2 não negativos, vemos como tal inviabilidade decorre de uma região viável vazia. Observe a seguir:

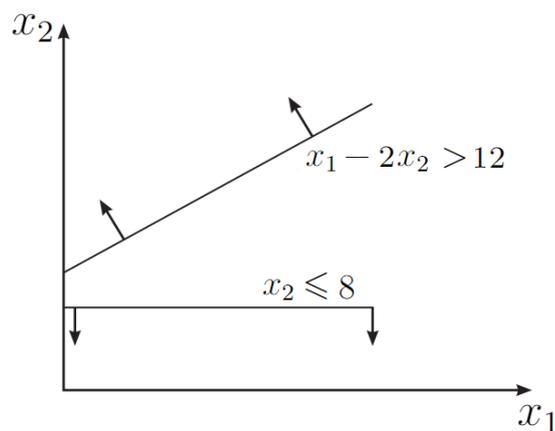


Figura 2.3: PPL impossível.

2.2.2 Melhoramento de uma *solução básica*

Considere um PPL que possua solução básica viável, em que desejamos minimizar a sua função objetivo, donde $A_{m \times n}$ é uma matriz de posto m - caso tivéssemos um caso de maximização, recorde-se de que $\text{Max}(z) = \text{Min}(-z)$:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z = cx, \\ &\text{sujeito a: } Ax = b, \text{ com } x \geq 0. \end{aligned}$$

Entre suas componentes básicas e não básicas, c pode ser decomposto em c_B (componentes básicas) e c_R (componentes não básicas); ou seja, $c = (c_B, c_R)$. E, quanto a uma solução básica viável de $Ax = b$, podemos definir $\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b & 0 \end{bmatrix}^t$, com $B_{m \times m}^{-1}$ sendo a matriz inversa da matriz básica obtida de $A_{m \times n}$, como já vimos em seção anterior. Logo, nesses termos, um valor inicial para z é dado por:

$$z_0 = c \cdot \bar{x} = c \cdot \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B & c_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B \cdot B^{-1}b.$$

Além disso, dado que x , em função das variáveis básicas e não básicas, também como já conhecíamos, é denotado por $x = \begin{bmatrix} x_B & x_R \end{bmatrix}^t$ e $Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b$, ficamos com: $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$. Disto, podemos reescrever x_B como segue, a partir da definição do produto de uma matriz qualquer possível por uma matriz coluna:

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j,$$

em que J indica o conjunto dos índices das variáveis não básicas e a_j os coeficientes das variáveis não básicas x_j .

Diante do exposto, deduzimos, a partir de $z = cx$, que:

$$\begin{aligned} z = cx &= \begin{bmatrix} c_B & c_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \\ z &= c_B x_B + c_R x_R \\ z &= c_B \left(B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \end{aligned}$$

$$z = c_B B^{-1}b - c_B \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j + \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$z = z_0 - \sum_{j \in J} c_B B^{-1}a_j x_j + \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$z = z_0 - \sum_{j \in J} (c_B B^{-1}a_j x_j - c_j x_j)$$

$$z = z_0 - \sum_{j \in J} (c_B B^{-1}a_j - c_j) x_j$$

$$z = z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j,$$

com $z_j = c_B \cdot B^{-1}a_j = c_B \cdot y_j$, para cada variável não básica, pondo $B^{-1}a_j = y_j$.

Após essa simples e sofisticada dedução matemática, vemos na equação $z = z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$ uma potencial maneira de melhorar uma solução básica viável de um PPL, que nos conduz a um genuíno critério de verificação de otimalidade de z . Isso posto, pois, ao passo que se $z_j - c_j > 0$, então temos a chance de, a partir da entrada da variável x de índice j na matriz básica (base), diminuir a valoração da função objetivo por meio de $(z_j - c_j) x_j$, claro, desde que tal variável possa admitir valor positivo (viabilidade de um modelo de PL).

Nesse contexto, a expressão $z_j - c_j$ é normalmente interpretada como o coeficiente de *utilidade relativa* da variável x_j ; já a sua valoração negativa, $c_j - z_j$, é frequentemente nominada, na literatura, como *custo reduzido*. Doravante, fixando-se por k o índice dessa variável não básica, teremos: $z = z_0 - (z_k - c_k) x_k$. E, esta equação nos fornece uma *conclusão preponderante*: quanto ao processo de otimização apresentado, a variável x_k deve ser incrementada maximamente, uma vez que o aumento de valor em x_k faz com que o resultado de z diminua na nova solução básica, inclusive, proporcionalmente, à quantidade do custo reduzido relacionado.

Com isso, como $x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j$, temos, em termos de x_k :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k.$$

E, pondo $\bar{b} = B^{-1}b$, bem como $y_k = B^{-1}a_k$, ficamos com:

$$x_B = \bar{b} - y_k x_k.$$

Ademais, esta última igualdade ainda pode ser estabelecida matricialmente, em função das componentes de $x_B, x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}$, e de $\bar{b}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m$, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} \cdot x_k.$$

Finalmente, da equação imediatamente acima, alcançamos as listadas interpretações:

(i) se existir algum elemento y_{ik} tal que $y_{ik} \leq 0$, então o valor de x_{B_i} relacionado pode aumentar indefinidamente com o aumento de x_k ;

(ii) se $y_{ik} > 0$, então o valor de x_{B_i} relacionado diminui com o aumento de x_k ;

(iii) para garantir a não negatividade de uma solução básica viável, x_k apenas poderá crescer até que a primeira componente em x_{B_i} seja decrescida a zero, $\forall y_{ik} > 0$; mas, então, isso equivale ao mínimo entre todos os quocientes envolvendo \bar{b}_i e y_{ik} , isto é:

$$\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\}.$$

Perceba que o cálculo do menor resultado do quociente acima, com efeito, apresenta-nos a situação aritmética em que certo \bar{b}_i , em relação ao seu associado y_{ik} , está mais próximo deste. Isso nos leva a concluir que o correspondente x_{B_i} a ambos, de fato, aproximar-se-á de zero ou, ainda, poderia ser negativo. Daí, segue-se a relevância da alínea (iii).

(iv) Da *conclusão preponderante* sobre $z = z_0 - (z_k - c_k) x_k$, teremos que a variável x_k entrará na base melhorando a valoração da função objetivo, e x_s , que corresponde à variável relacionada ao mínimo em (iii), sendo linearmente dependente com x_k , deixará a base ao ser decrescida a zero em face do crescimento de x_k . Ou seja, a minimização ótima é atingida pela entrada sequenciada na base da variável associada ao maior valor de $(z_k - c_k)$, ao passo que a de menor valoração em (iii), presente na base, a deixará.

Pois bem, a partir de agora, com efeito, podemos assinalar um majestoso desfecho ao *Problema 2*, que havíamos retomado. Assim, usando-se o critério de melhoria de uma

solução básica viável que acabamos de construir, como o problema em questão trata-se de um caso de maximização de $z = f(x_1, x_2)$, passaremos-lo à situação de otimização equivalente a minimizar $z = -f(x_1, x_2)$ - se o contexto já fosse o de minimização, bastaria-nos prosseguir com o processo de melhoria da solução básica. Portanto, ficamos com:

$$\text{Minimizar } z = -71,5 \cdot x_1 - 66,9 \cdot x_2 ,$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 8; \\ 0 \leq x_2 \leq 18; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 42; \\ \text{com } x_j \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Inserindo-se as variáveis de folga, a fim de exibirmos o sistema de equações lineares das restrições, $Ax = b$, temos, como fizemos anteriormente:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_4 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 42 \\ \text{com } x_3, x_4 \text{ e } x_5 \text{ sendo variáveis de folga} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 42. \end{cases}$$

Logo, as nossas matrizes das restrições e dos termos independentes de x , A e b , respectivamente, são dadas por:

$$A_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix}.$$

Além dessas reconhecidas matrizes, oriundas do conjunto de restrições desse PPL, também temos a matriz c , dos coeficiente das variáveis da função objetivo, claro, com a adição das variáveis de folga, a saber:

$$c_{1 \times 5} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -71,5 & -66,9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, de $A_{3 \times 5}$, tomemos $B_{3 \times 3}$, entre outras opções possíveis, composta, respectiva-

mente, pelas colunas a_3, a_2 e a_5 . Consequentemente, $c_B = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & 0 \end{bmatrix}$ e:

$$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, teremos $x_B = (x_3, x_2, x_5)$ e $x_R = (x_1, x_4)$, além dos seguintes conjuntos de índices: $I = \{3, 2, 5\}$ e $J = \{1, 4\}$. Em seguida, calculemos x_B , a fim de obtermos uma solução básica viável \bar{x} :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = (8, 18, 6, 0, 0) = (x_3, x_2, x_5, x_1, x_4).$$

Portanto, achemos z_0 , a partir de \bar{x} :

$$z_0 = c_B x_B = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} = -1204,2.$$

Com este valor para z , ainda não podemos afirmar que atingimos o mínimo ótimo. Precisamos calcular $z_j - c_j, \forall j \in J$, a fim de constatarmos se ocorre algum $z_j - c_j > 0$. Se ocorrer, tomamos o valor mais alto desta diferença - no caso de valores empatados, selecionamos qualquer um deles - e, em seguida, confirmamos qual variável deve entrar na base (matriz básica) e aquela a sair, ao passo que melhoraremos a solução básica viável já obtida; se não ocorrer, não teremos mais como melhorar tal solução que nos levou a z_0 , encontrando-se, assim, o valor ótimo de z em z_0 .

Para $j = 1$,

$$z_1 - c_1 = c_B y_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1$$

$$z_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - (-71,5) = 71,5.$$

Para $j = 4$,

$$z_4 - c_4 = c_B y_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4$$

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -66,9.$$

Daí, visto que $z_1 - c_1 > 0$, x_1 (a_1) entrará na base. E, para descobrirmos quem a deixará, calculemos o $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{i1}} \mid y_{i1} > 0 \right\}$:

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{11}}, \frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}} \right\} = \min \left\{ \frac{8}{1}, \frac{18}{0}, \frac{6}{3} \right\} = \min \{8, \#, 2\} = 2.$$

Logo, como nossas variáveis básicas eram x_3 , x_2 e x_5 , nessa ordem, e o mínimo obtido acima obedece esta ordenação entre os quocientes calculados, temos que x_5 (a_5) é a variável a sair da base, com a entrada de x_1 . Assim, passamos a ter x_3 , x_2 e x_1 como as novas variáveis básicas e x_4 e x_5 representando as não básicas. Então, os conjuntos de índices ficam dados por $I = \{3, 2, 1\}$ e $J = \{4, 5\}$ e a nova matriz básica (base) se expressa da seguinte maneira:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Neste momento, reiniciaremos o processo de busca pelo valor ótimo de z . Caso $z_j - c_j$, $\forall j \in J$, não assuma mais resultados positivos, não teremos como melhorar a nova solução básica viável que encontraremos, a fim de minimizar $z = -f(x_1, x_2)$. Com isso, estaremos certos de que encontramos a sua solução ótima.

Prosseguindo-se, temos, agora, $c_D = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & -71,5 \end{bmatrix}$ e calculando-se a nova solução básica viável, segue que:

$$x_D = D^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x}' = (6, 18, 2, 0, 0) = (x_3, x_2, x_1, x_4, x_5).$$

Assim, obtendo-se o valor da função objetivo, z'_0 , associado a \bar{x}' , vem que:

$$z'_0 = c_D x_D = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & -71,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 2 \end{bmatrix} = -1347,2.$$

Será este o valor mínimo ótimo de $z = -f(x_1, x_2)$? Passemos ao cálculo de $z_j - c_j$, $\forall j \in J$:

para $j = 4$,

$$z_4 - c_4 = c_D y_4 - c_4 = c_D D^{-1} a_4 - c_4$$

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & -71,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$z_4 - c_4 = -66,9 + \frac{143}{3} = -\frac{57,7}{3} < 0;$$

para $j = 5$,

$$z_5 - c_5 = c_D y_5 - c_5 = c_D D^{-1} a_5 - c_5$$

$$z_5 - c_5 = \begin{bmatrix} 0 & -66,9 & -71,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0$$

$$z_5 - c_5 = -\frac{71,5}{3} < 0.$$

Destarte, dado que os resultados de $z_j - c_j$ dessa etapa de execução do algoritmo *Simplex* são todos negativos, não temos mais como melhorar a minimização da presente função objetivo. Com isso, $z'_0 = -1347,2$, quando $x_1 = 2$, $x_2 = 18$ e $x_3 = 6$, é o mínimo ótimo procurado.

Portanto, lembrando-se de que o problema de otimização em questão, originalmente modelado, era de maximização de $z = f(x_1, x_2)$ e $\text{Max}\{f(x_1, x_2)\} = \text{Min}\{-f(x_1, x_2)\}$, ficamos com a solução ótima:

$$z_{\text{ótimo}} = 1347,2.$$

Com efeito, com plena certeza, agora, vimos que o ponto C, vide Figura 2.2, ponto extremo formado pelo par $(x_1 = 2, x_2 = 18)$, leva-nos ao máximo de z .

2.2.2.1 Continuação e parada do algoritmo

A fim de organizarmos cada etapa dos cálculos que acabamos de realizar, configuramos um passo a passo de continuação destes até a solução ótima de um PPL dado pela busca do mínimo de $z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, bem como quanto às regras de parada do algoritmo. Seguem os tais:

Passo 1: obtenha uma solução básica viável x_B , isto é, \bar{x} , a partir de uma matriz básica $B_{m \times m}$, ora estabelecida através da matriz dos coeficientes das restrições do PPL, $A_{m \times n}$, dadas por um sistema de equações lineares $Ax = b$. Exprima a solução inicial $z_0 = -f(\bar{x})$ e **avance para o próximo passo**.

Passo 2: calcule os valores de todos os $z_j - c_j$, com $j \in J$, sendo J o conjunto de índices das variáveis não básicas. Neste ponto, recordemos de que I define o conjunto de índices relativos às variáveis básicas. Com isso, se obtermos todos os $z_j - c_j < 0$, então \bar{x} já é a solução que torna $z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ótimo, quando estamos diante de um PPL do tipo $\text{Min}\{-f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ - o que equivale, por outro lado, ao $\text{Max}\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$. Assim, aqui o algoritmo **para!**

Caso **não ocorra** $z_j - c_j < 0, \forall j \in J$, liste todos os casos em que $z_j - c_j > 0$. **Avance para o próximo passo**.

Passo 3: dado que $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B y_j$, se, para algum j da lista anterior, $y_j \leq 0$, então não existe solução ótima única, pois teríamos um decrescimento infinito de z , nesses casos. Aqui, então, o algoritmo **para!**

Caso contrário, escolha k tal que $z_k - c_k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$. Em seguida, insira x_k na matriz básica (base), retirando desta x_s , a partir do cálculo de

$$\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\}.$$

Passo 4: obtenha a nova matriz básica (base), $D_{m \times m}$, a partir de $B_{m \times m}$, pela substituição da coluna a_s pela coluna a_k da matriz $A_{m \times n}$. Dessa maneira, calcule a nova solução básica viável, $x_D = \bar{x}'$; atualize os conjuntos de índices, a saber: $I = (I \setminus \{s\}) \cup \{k\}$ e $J = (J \setminus \{k\}) \cup \{s\}$; e, assim, determine a nova solução inicial $z'_0 = -f(\bar{x}')$. Doravante, **volte para o passo 2**.

Uma vez que sabemos como solucionar um PPL, de acordo com o método *Simplex* apresentado, dois questionamentos haveriam de surgir, ao longo do tempo: será que não seria possível otimizar o volume de cálculos realizados para se atingir a solução ótima de um PPL? E, caso precisemos se utilizar de alguma variável de folga negativa, a fim de mantermos a não negatividade das variáveis de um modelo de PL, como procederíamos, sob o uso da *operação elementar* O_2 ? Ambas indagações são encaradas na subseqüente seção.

2.2.3 Os quadros (*tableaus*) *Simplex*

Imagine poder realizar os cálculos da seção anterior, executando passo a passo o algoritmo *Simplex*, de forma compacta, otimizada. Isso foi possível a partir do olhar, novamente, da Álgebra Linear sobre o sistema de equações lineares das restrições de um PPL, o nosso conhecido $Ax = b$.

Com o objetivo de deixar os cálculos manuais que apresentamos muito mais facilitados, passaremos a trabalhar com a *matriz aumentada* do sistema $Ax = b$. Estabelecendo-se mais alguns detalhes nesse processo, configuraremos um *tableau* (tabela) - também chamado de quadro - com todos os dados iniciais de um PPL alvo de nossa resolução e, seguindo-se analogamente o passo a passo explicitado na Subseção 2.2.2.1, após recorrermos ao processo de inversão de matrizes por *operações elementares* e ao método de *pivoteamento de Gauss-Jordan*, alcançaremos a solução ótima desse problema, desde que esta seja possível de ser obtida.

O *tableau* pode ser construído de diferentes maneiras, mantendo-se as mesmas condições de melhoramento de uma solução básica viável de um PPL, quando não possuímos variável de folga negativa. Discorreremos uma possibilidade para tanto, conforme seqüência a seguir:

1. Deflagre uma resolução por meio da minimização de uma função objetivo;
2. Expresse função objetivo e restrições em um *tableau* como segue, por exemplo, no *Problema 2*, gerando-se uma matriz aumentada do sistema $Ax = b$:

$$\begin{cases} z = -71,5x_1 - 66,9x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 42 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z + 71,5x_1 + 66,9x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5) = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 8 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 18 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 42. \end{cases}$$

E, temos o primeiro *tableau*, pondo $x_3 = S_1$, $x_4 = S_2$ e $x_5 = S_3$:

<i>Tableau 1</i>	C_j	-143/2	-669/10	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R
0	S_1	1	0	1	0	0	8
0	S_2	0	1	0	1	0	18
0	S_3	3	2	0	0	1	42
	Z	143/2	669/10	0	0	0	0

Figura 2.4: matriz aumentada inicial.

Antes de mais nada, passamos os valores racionais que porventura existam no PPL para a escrita fracionária; o que nos garantirá precisão nos cálculos com números decimais. Além disso, usamos a letra S para as variáveis de folga não negativas com o objetivo de tornar mais clara, visualmente, no *tableau*, a distinção entre as variáveis originais do problema e aquelas auxiliares. Em seguida, note que a última linha, onde representamos a função objetivo, consiste precisamente nos valores de $z_j - c_j$, partindo-se de c_B tomado a partir das variáveis de folga, que estão constituindo a nossa matriz básica (base). Logo, a solução básica viável de partida é dada por $\bar{x} = (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) = (0, 0, 8, 18, 42)$ e,

então, temos o valor inicial de z : $z_0 = 0$ (última linha da última coluna - a coluna dos resultados, denotada por R).

3. Avançando-se, como existe $z_j - c_j > 0$, podemos melhorar a solução básica já obtida em busca do valor ótimo para a função objetivo. Assim, como já aprendemos anteriormente, escolhemos k tal que $z_k - c_k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$ e inserimos x_k na matriz básica (base), retirando desta a variável correspondente ao $\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\}$.

No caso do *Problema 2*, x_1 entrará na base e S_1 a deixará, pois:

$$z_1 - c_1 = \frac{143}{2} = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\} \text{ e } \min \left\{ \frac{8}{1}, \frac{18}{0}, \frac{42}{3} \right\} = \min \{8, \#, 14\} = 8.$$

Portanto, conseqüentemente, o elemento do *tableau* imediatamente abaixo de x_1 e à direita de S_1 , posicionado em sua linha 1 e coluna 1, identificará o nosso 1º pivô, valor para o qual reduziremos a 1 (se assim ele não for) e anularemos todos os demais elementos de sua coluna. Este cálculo de operações elementares entre linhas de uma matriz aumentada nos garante a inversão da nova matriz básica, obtida com a mudança de variável na base. Ademais, por estarmos manipulando a situação através de uma matriz aumentada, simultaneamente seguiremos encontrando melhores soluções para o PPL, perseguindo-se o valor ótimo para z , quando não houver mais $z_j - c_j > 0$.

Desse modo, realizaremos as seguintes operações elementares entre linhas, pivoteando-se o 1º pivô acima mencionado: $L_3 \rightarrow (-3)L_1 + L_3$ e $L_4 \rightarrow -\frac{143}{2}L_1 + L_4$. Destarte, segue o *tableau 2*, depois dessa iteração sobre o primeiro *tableau*:

<i>Tableau 2</i>	C_j	-143/2	-669/10	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R
-143/2	x_1	1	0	1	0	0	8
0	s_2	0	1	0	1	0	18
0	s_3	0	2	-3	0	1	18
	Z	0	669/10	-143/2	0	0	-572

Figura 2.5: primeira iteração.

Primeira iteração executada, ainda temos $z_j - c_j > 0$. Com isso, seguimos minimizando z , voltando a realizar os cálculos narrados em 3. Agora, x_2 entra na base e S_3 sai, visto que:

$$z_2 - c_2 = \frac{669}{10} = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\} \text{ e } \min \left\{ \frac{8}{0}, \frac{18}{1}, \frac{18}{2} \right\} = \min \{ \infty, 18, 9 \} = 9.$$

Nosso 2º pivô está dado por 2 (linha 3 e coluna 2), conseqüentemente. Pivoteando-o, realizamos as operações: $L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3$, $L_4 \rightarrow -\frac{669}{10}L_3 + L_4$ e $L_2 \rightarrow (-1)L_3 + L_2$. Disto, segue-se o *tableau* 3:

<i>Tableau 3</i>		C_j	-143/2	-669/10	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		R
-143/2	x_1	1	0	1	0	0		8
0	S_2	0	0	3/2	1	-1/2		9
-669/10	x_2	0	1	-3/2	0	1/2		9
	Z	0	0	577/20	0	-669/20		-11741/10

Figura 2.6: segunda iteração.

Segunda iteração realizada e ainda temos um $z_j - c_j > 0$. Daí, voltemos a minimizar z , ora desenvolvendo os cálculos assinalados em 3, mais uma vez. Neste momento, S_1 entra na base e S_2 sai, visto que:

$$z_3 - c_3 = \frac{577}{20} = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\} \text{ e } \min \left\{ \frac{8}{1}, \frac{9}{\frac{3}{2}}, \frac{9}{-\frac{3}{2}} \right\} = \min \left\{ 8, \frac{18}{3}, -\frac{18}{3} \right\} = \frac{18}{3}.$$

Perceba que não tomamos o mínimo acima como o resultado negativo que surgiu, pois o denominador de cada quociente (y_{ik}) destacado deve ser um valor positivo, como já argumentamos em seção pretérita. O 3º pivô, então, é $\frac{3}{2}$ (linha 2 e coluna 3). A fim de pivoteá-lo, faremos:

$$L_2 \rightarrow \frac{L_2}{\frac{3}{2}}, \quad L_1 \rightarrow (-1)L_2 + L_1, \quad L_4 \rightarrow -\frac{577}{20}L_2 + L_4 \text{ e } L_3 \rightarrow \frac{3}{2}L_2 + L_3.$$

Assim, chegamos ao *tableau 4*:

<i>Tableau 4</i>	C_j	-143/2	-669/10	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R
-143/2	x_1	1	0	0	-2/3	1/3	2
0	S_1	0	0	1	2/3	-1/3	6
-669/10	x_2	0	1	0	1	0	18
	Z	0	0	0	-577/30	-143/6	-6736/5

Figura 2.7: terceira iteração.

Por fim, não possuímos mais $z_j - c_j > 0$. Ou seja, não é possível continuarmos a minimizar $z = -f(x_1, x_2)$. Então, atingimos a solução ótima da nossa função objetivo, a saber:

$$z = \frac{-6736}{5} = -1347,2; \text{ com } x_1 = 2, S_1 = 6, x_2 = 18 \text{ e } S_2 = S_3 = 0.$$

Tal resultado para o $\text{Min}\{-f(x_1, x_2)\}$ é o mesmo quando fazemos o $\text{Max}\{f(x_1, x_2)\}$, como já sabemos. Daí, com respeito a este último caso, ficamos com a solução ótima dada por:

$$z_{\text{ótimo}} = 1347,2.$$

Em suma, vimos que a sequência de cálculos de otimização através dos *tableaus* parte de uma base constituída pelas variáveis de folga. Estas formam uma matriz canônica, sempre que suas entradas são positivas. Isso é decisivamente estratégico para a facilitação do desenvolvimento do algoritmo *Simplex* aplicado a um PPL. Entretanto, como procederíamos no caso em que, além de não termos uma base canônica de partida (situação em que não houve alguma variável de folga, ora ocasionada por uma restrição dada por igualdade), tivermos entradas negativas nesta última?

Lembre-se de que essa é uma pergunta pertinente, pois, por definição, uma matriz básica é formada por colunas LI com valores não negativos. Mas, então, quando estivermos diante de restrições dos tipos “maior ou igual” ou “igual”, não teremos uma base viável, pois valores negativos estarão presentes na base de partida do *tableau*. Sendo assim, tal

cenário impulsionou o desenvolvimento de uma técnica de resolução de um PPL, nesses termos, chamada de *tableaus em duas fases*.

2.2.3.1 *Tableaus em duas fases*

Do nosso *Problema 1*, acompanhando-se os parágrafos finais da seção anterior, temos a mencionada situação em que recorreremos à presente técnica. Iniciemos retomando tal PPL, que originalmente é de minimização de z , e, paulatinamente, explicitaremos o funcionamento de sua resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = 550x_{11} + 2440x_{12} + 3615x_{13} + 700x_{21} + 1500x_{22} + 2100x_{23} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 13 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 18 \\ x_{11} + x_{21} \geq 10 \\ x_{12} + x_{22} \geq 14 \\ x_{13} + x_{23} \geq 7 \\ \text{com } x_{ij} \in \mathbb{Z}_+. \end{array} \right.$$

Reescrevendo-se o PPL na forma padrão:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 550x_{11} + 2440x_{12} + 3615x_{13} + 700x_{21} + 1500x_{22} + 2100x_{23} + 0(x'_1 + \dots + x'_5) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x'_1 = 13 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x'_2 = 18 \\ x_{11} + x_{21} - x'_3 = 10 \\ x_{12} + x_{22} - x'_4 = 14 \\ x_{13} + x_{23} - x'_5 = 7 \\ \text{com } x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 \text{ e } x'_5 \text{ sendo variáveis de folga.} \end{array} \right.$$

E ainda temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} z - 550x_{11} - 2440x_{12} - 3615x_{13} - 700x_{21} - 1500x_{22} - 2100x_{23} + 0(x'_1 + \dots + x'_5) = 0 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 + 0x'_4 + 0x'_5 = 13 \\ 0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + 0x'_1 + x'_2 + 0x'_3 + 0x'_4 + 0x'_5 = 18 \\ x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 0x'_1 + 0x'_2 - x'_3 + 0x'_4 + 0x'_5 = 10 \\ 0x_{11} + x_{12} + 0x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 0x_{23} + 0x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 - x'_4 + 0x'_5 = 14 \\ 0x_{11} + 0x_{12} + x_{13} + 0x_{21} + 0x_{22} + x_{23} + 0x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 + 0x'_4 - x'_5 = 7. \end{array} \right.$$

Assim, notamos que, quando fôssemos estruturar o 1º *tableau*, a base da qual partiríamos estaria dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, não temos uma base viável para o PPL em questão, quando o resolvemos através dos *tableaus Simplex*. Conseqüentemente, também não conseguiríamos uma solução básica viável, neste caso. É, com isso, que surgem os *tableaus Simplex de duas fases*.

O objetivo dessa técnica, diante de entradas negativas em B , ora concebidas por restrições do tipo “ \geq ” ou “ $=$ ”, é o de inserirmos variáveis auxiliares - também chamadas de artificiais - nestas sentenças, a fim de sairmos das entradas negativas em B . Dessa maneira, pondo:

$$x_{11} = x_1, x_{12} = x_2, x_{13} = x_3, x_{21} = x_4, x_{22} = x_5, x_{23} = x_6,$$

$$x'_1 = S_1, x'_2 = S_2, x'_3 = S_3, x'_4 = S_4 \text{ e } x'_5 = S_5,$$

sendo A_1 , A_2 e A_3 as variáveis artificiais acrescentadas ao PPL, para simplificar e tornar mais didática a apresentação de suas equações, segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} z - 550x_1 - 2440x_2 - 3615x_3 - 700x_4 - 1500x_5 - 2100x_6 + 0(S_1 + \dots + S_5) + \dots \\ \dots + 0(A_1 + A_2 + A_3) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 = 13 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 = 18 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0S_1 + 0S_2 - S_3 + 0S_4 + 0S_5 + A_1 = 10 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - S_4 + 0S_5 + A_2 = 14 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 - S_5 + A_3 = 7. \end{array} \right.$$

Isso posto, seguir-se-á a 1ª fase dos *tableaus em duas fases*.

Fase 1: mantendo-se todas as variáveis do PPL (originais e artificiais), buscamos obter uma solução básica viável. Para tanto, a partir de uma base viável composta também pelas variáveis artificiais e definindo uma função objetivo artificial u , que é a soma dessas variáveis, cada variável artificial deverá ser zerada. Tal função objetivo, portanto, é minimizada sujeita às restrições do PPL, pelo método *Simplex* já conhecido. Daí, caso $u \neq 0$, não conseguiremos solucionar o problema original e, então, o PPL é inviável, visto que não sairemos da base artificial. Por outro lado, se $u = 0$, atingiremos a solução ótima ou uma solução ótima (caso em que temos diferentes soluções ótimas possíveis) do modelo de PL.

Apliquemos essa fase ao *Problema 1*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } u = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0(S_1 + \dots + S_5) + A_1 + A_2 + A_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 = 13 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 = 18 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0S_1 + 0S_2 - S_3 + 0S_4 + 0S_5 + A_1 = 10 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - S_4 + 0S_5 + A_2 = 14 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 - S_5 + A_3 = 7. \end{array} \right.$$

E, com isso, ficamos com a seguinte sequência de *tableaus* da 1ª fase:

Tableau 1		C_j														
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R
0	s_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13
0	s_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	18
1	A_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10
1	A_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	14
1	A_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	7
	u	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	31

Figura 2.8: *tableau* inicial.

A linha associada a u , como já sabemos, é obtida pelo cálculo de cada $u_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$ (recorde-se de que a_j indica cada coluna da matriz A dos coeficientes das variáveis presentes nas restrições do PPL posto na forma padrão), sendo a última entrada dela, localizada no canto inferior direito do *tableau*, dada pela solução básica inicial de u , $u_0 = c_B x_B = c_B B^{-1} b$. Como existem $u_j - c_j > 0$, seguiremos minimizando u , escolhendo-se o maior valor entre essas diferenças, ou, em caso de empate entre estas, qualquer um desses maiores resultados nos permite executar a minimização pretendida, a fim de inserirmos a sua variável associada na base.

Em geral, nessa última situação, seguindo-se um padrão de organização natural, ordenamos a escolha da variável de menor índice para ingressar na base (ou deixá-la) entre aquelas empatadas. De todo modo, o simples empate mencionado já pode desenvolver inconvenientes ao algoritmo *Simplex*, consoante a estrutura lógico-dedutiva apresentada para o critério de minimização. Tratar-se-á, como veremos no *Problema 1*, de certos casos em que o PPL possui diferentes soluções ótimas e sofre degeneração.

Voltando à Figura 2.8, o valor destacado com o contorno na cor azul se trata do nosso 1º pivô (linha 3 e coluna 1), que selecionamos e também já sabemos como obter, conforme procedimentos detalhadamente descritos na Seção 2.2.3. Portanto, x_1 entrará na base e A_1 a deixará.

Após o primeiro pivoteamento, segue o próximo *tableau*:

Tableau 2		C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R	
0	s_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	3	
0	s_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	18	
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10	
1	A_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	14	
1	A_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	7	
	u	0	1	1	0	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	21	

Figura 2.9: primeira iteração.

Ainda possuímos $u_j - c_j > 0$ e, então, continuaremos com a minimização de u . Já destacado em azul, temos o nosso 2º pivô (linha 1 e coluna 2) selecionado. Assim, x_2 entrará na base e s_1 a deixará.

Pivoteando-se o elemento assinalado, ficamos com:

Tableau 3		C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R
0	x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	3
0	s_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	18
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10
1	A_2	0	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	1	1	0	11
1	A_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	7
	u	0	0	0	1	1	1	-1	0	-1	-1	-1	0	0	0	18

Figura 2.10: segunda iteração.

Valores positivos de $u_j - c_j$ continuam constando. Próximo pivô, o 3º, segue na linha 3 e coluna 4. A variável x_4 entrará na base e x_1 a deixará. Realizemos a nova iteração, pivoteando-se o nosso terceiro pivô:

Tableau 4		C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R
0	x_2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13
0	s_2	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	-1	0	0	8
0	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10
1	A_2	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	1
1	A_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	7
	u	-1	0	0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	8

Figura 2.11: terceira iteração.

Dessa vez, selecionamos o 4º pivô na linha 4 e coluna 5. Daí, x_5 entrará na base e A_2 a deixará. De fato, ainda prosseguiremos com a minimização de u , executando a primeira fase da resolução do *Problema 1*, via *tableaus em duas fases*. Após o pivoteamento desse elemento, temos:

Tableau 5		C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R
0	x_2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	13
0	s_2	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	-1	-1	0	7
0	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10
0	x_5	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	1
1	A_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	7
	u	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	7

Figura 2.12: quarta iteração.

De posse do 5º pivô, selecionado na linha 2 e coluna 3, após a quarta iteração realizada, x_3 entrará na base e S_2 a deixará. Pivoteando-o, teremos:

Tableau 6	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	A_1	A_2	A_3	R
0	x_2	1	1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	0	1	1	0	6
0	x_3	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	-1	-1	0	7
0	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	10
0	x_5	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	-1	0	0	8
1	A_3	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0
	u	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Figura 2.13: quinta iteração.

Chegamos ao **fim da Fase 1**. Não temos mais $u_j - c_j$ positivos. A minimização da função objetivo artificial, u , encerrou e ela resultou em zero. Logo, A_3 sairá da base. Veja que ficamos com uma base para o PPL original, a partir de agora, composta pelas variáveis x_2, x_3, x_4 e x_5 , que consiste numa base viável. Com isso, neste momento, inauguramos a segunda fase dos *tableaus em duas fases*.

Fase 2: o *tableau* final da primeira fase passa a figurar como o *tableau* inicial da segunda fase, sendo a função objetivo artificial trocada pela função objetivo original. Doravante, o algoritmo *Simplex* segue atuando sobre z , perseguindo a solução ótima do PPL original. Dessa maneira, avancemos ao *tableau 7*:

Tableau 7	C_j	550	2440	3615	700	1500	2100	0	0	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	R
2440	x_2	1	1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	0	6
3615	x_3	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	7
700	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	10
1500	x_5	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	8
	Z	1090	0	0	0	0	575	3615	2675	1975	1175	0	58945

Figura 2.14: *tableau* reiniciado com z .

Com contorno circular azul, segue-se o nosso 6^o pivô (linha 2 e coluna 7), ora selecionado a partir do maior valor de $z_j - c_j > 0$ - recorde-se de que a última linha do *tableau* diz respeito a cada uma dessas diferenças ordenadas, que já sabemos calcular. Igualmente, a escolha do pivô vimos como realizar, minuciosamente, na seção anterior. Dado o pivô em questão, então S_1 entrará na base e x_3 a deixará. Note, ainda, que a solução inicial de z , z_0 , equivale a 58945, quando $x_2 = 6$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$, $x_5 = 8$ e $x_1 = x_6 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$. Sigamos minimizando z , a fim de obtermos seu valor ótimo. Vamos ao próximo *tableau*, após pivotarmos o 6^o pivô:

Tableau 8	C_j	550	2440	3615	700	1500	2100	0	0	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	R
2440	x_2	1	1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	0	6
0	s_1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	7
700	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	10
1500	x_5	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	8
	Z	1090	0	-3615	0	0	-3040	0	-940	-1640	-2440	0	33640

Figura 2.15: sexta iteração.

Considerando-se que possuímos $z_j - c_j > 0$, seguimos com a minimização de z . Agora, o pivô selecionado, o 7^o, encontra-se na linha 1 e coluna 1. Logo, x_1 entrará na base e x_2 a deixará. Pivotando o valor em destaque, temos:

Tableau 9	C_j	550	2440	3615	700	1500	2100	0	0	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	R
550	x_1	1	1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	0	6
0	s_1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	7
700	x_4	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
1500	x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	14
	Z	0	-1090	-3615	0	0	-1950	0	150	-550	-1350	0	27100

Figura 2.16: sétima iteração.

Estamos bem perto de atingir a solução ótima de z . O novo pivô, o 8^o , está localizado na linha 3 e coluna 8. Assim, S_2 entrará na base e x_4 a deixará. Pivoteando-se tal valor:

Tableau 10	C_j	550	2440	3615	700	1500	2100	0	0	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	R
550	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	10
0	s_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	3
0	s_2	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
1500	x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	14
	Z	0	-940	-3615	-150	0	-2100	0	0	-550	-1500	0	26500

Figura 2.17: oitava iteração.

Não existindo mais $z_j - c_j$ positivo, **concluimos a Fase 2** da resolução de um PPL através dos *tableaus em duas fases*. **Obtivemos um mínimo ótimo degenerado** de z , quando $x_1 = 10$, $S_1 = 3$, $S_2 = 4$, $x_5 = 14$ e $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$, a saber: 26500. Dizemos um mínimo degenerado, uma vez que esse resultado não satisfaz a todas restrições do PPL original, falhando apenas na última ($x_3 + x_6 \geq 7$). Estamos diante de um caso especial do método *Simplex*, aquele em que temos diferentes soluções ótimas para z .

Sempre que isto ocorrer, recorreremos aos valores disponíveis nas variáveis de folga (valores excedentes) e os utilizaremos precisamente nas restrições necessárias, considerando-se uma distribuição que melhor cumpra com o modelo de PL, bem como mantenha a viabilidade das demais restrições; o que, neste caso, nos fornece a possibilidade de tomar $x_3 = 3$, zerando S_1 , e $x_6 = 4$, zerando S_2 .

Logo, ficamos com $x_1 = 10$, $x_3 = 3$, $x_5 = 14$, $x_6 = 4$ e $x_2 = x_4 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$, sendo **um mínimo ótimo viável** dado por: $z = 45745$. **Outro mínimo ótimo viável** que conseguimos, **ainda melhor**, ocorre quando transferimos $S_1 = 3$ para x_2 , fazendo com que x_5 diminua para 11, obedecendo as restrições do problema. E, as três unidades retiradas de x_5 , acrescidas das quatro oriundas de S_2 , transferidas para x_6 , leva-nos a: $z = 44020$, sendo $x_1 = 10$, $x_2 = 3$, $x_5 = 11$, $x_6 = 7$ e $x_3 = x_4 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$.

Capítulo 3

O uso computacional do *Simplex*

Com uma gama de dezenas de aplicativos criados desde a segunda metade do século passado, entre possibilidades de acesso/*download* gratuitos ou pagos, listamos algumas opções gratuitas de programas computacionais que processam o algoritmo *Simplex*. Estes são geralmente recomendados para PPLs de básico a médio porte, tendo um bom desempenho em alguns casos mais expressivos, até uma quantidade de variáveis de decisão de ordem centesimal.

Apresentaremos as funcionalidades e operacionalização do aplicativo *LPSolver*, da ferramenta *Solver* do *LibreOffice Calc* (ou *Excel*), bem como da biblioteca *SciPy* da linguagem de programação *Python*, ora direcionados à resolução de PPLs por meio do método *Simplex*. Os dois primeiros programas podem ser baixados nos seguintes sites:

<https://sourceforge.net/projects/lpsolve>

<https://www.libreoffice.org/download/download-libreoffice/>

No caso do *Excel*, como um programa pago, original da *Microsoft*, ou o compramos, ou utilizamos a sua versão livre a partir do cadastro de uma conta de email da *Hotmail*. E, quanto à utilização da biblioteca *SciPy* da linguagem de programação *Python*, temos a facilitada possibilidade de fazermos uso do *Google Colab*, que nos permite implementar e executar a mencionada linguagem em um navegador. Segue o seu site:

<https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb>

3.1 O *Linear Program Solver* (*LPSolver*)

Uma vez baixado, o *LPSolver* será apresentado em duas telas, como na Figura 3.1:

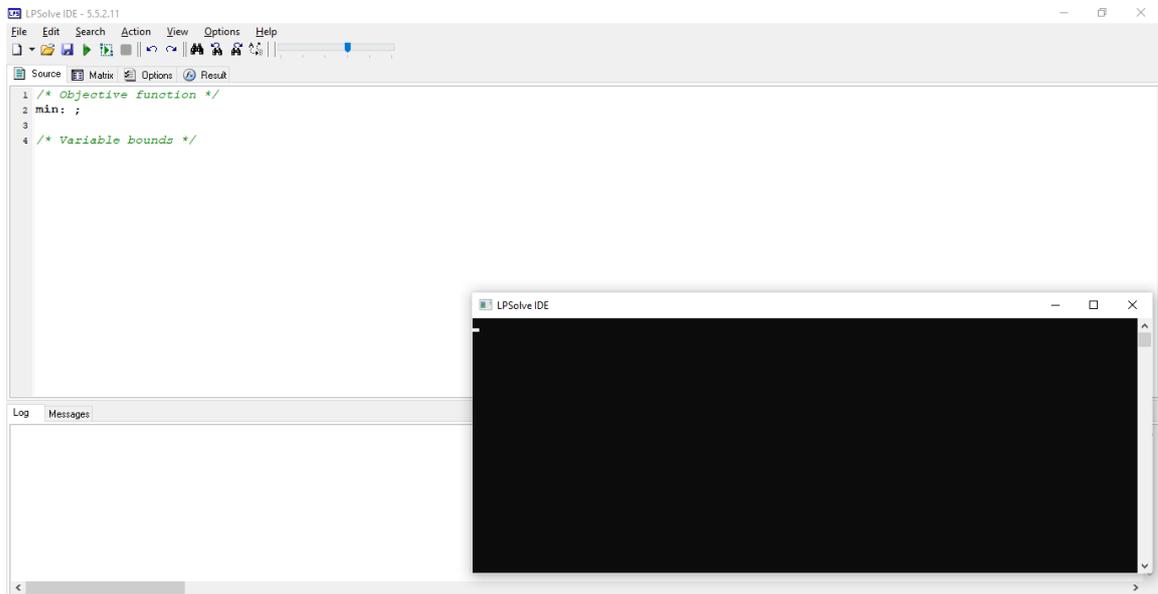


Figura 3.1: área de trabalho do *LPSolver*.

A tela escura nos retornará o resultado do processo de otimização da função objetivo, após a preenchermos abaixo do título *Objective function* (linha 2), na janela superior de fundo branco, depois do pré-preenchimento “min” ou “max”. Nesta escrita, digitamos normalmente a expressão algébrica da função, usando ponto como o símbolo separador entre a parte inteira e a decimal de um número. Em tal programa, as variáveis de decisão já são consideradas como não negativas.

A alteração entre uma situação de minimização ou de maximização é realizada por meio da abreviação pré-preenchida no início da linha 2, deixando a escrita “min” ou “max”, conforme o caso. Em seguida, partimos para a inserção das restrições do modelo de PL.

Abaixo do título *Variable bounds*, inserimos as sentenças matemáticas lineares de restrição do PPL. Para o símbolo de “menor ou igual”, digitamos “ \leq ”; analogamente, para o caso “maior ou igual”, escrevemos “ \geq ”. Cada linha de inequação e/ou equação é finalizada por ponto e vírgula (;).

Ao inserirmos os problemas dos quais tratamos em seções anteriores, começando pelo *Problema 2*, ficamos com:

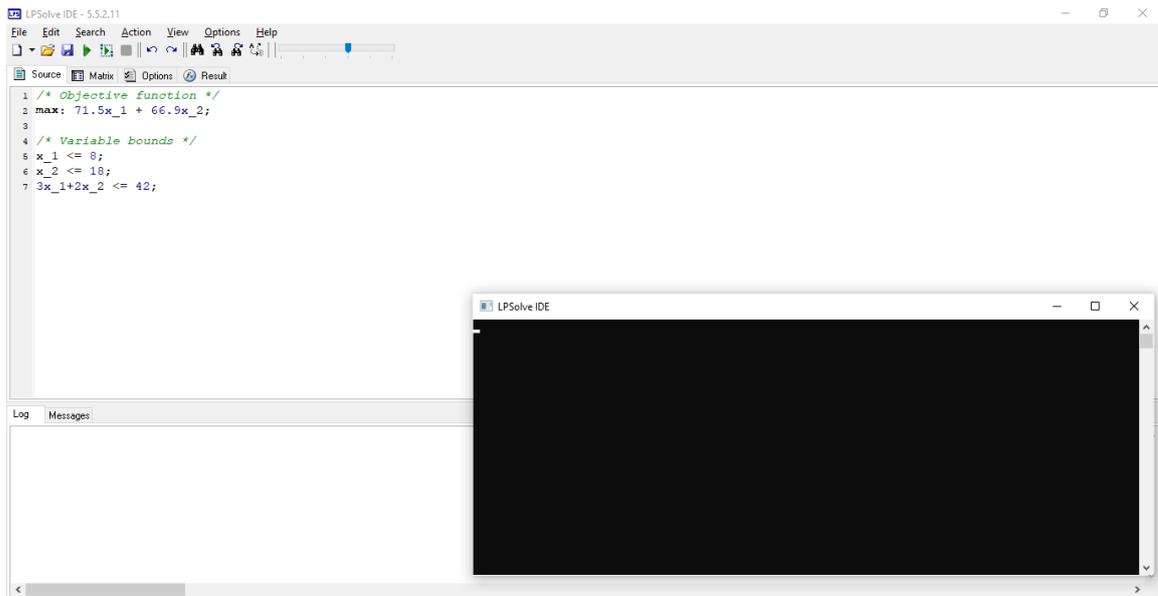


Figura 3.2: inserção da função objetivo e de suas restrições.

Ao simplesmente clicarmos no botão *play*, na cor verde, localizado na 2ª linha da faixa de opções do programa, temos o resultado ótimo da função objetivo requerido.

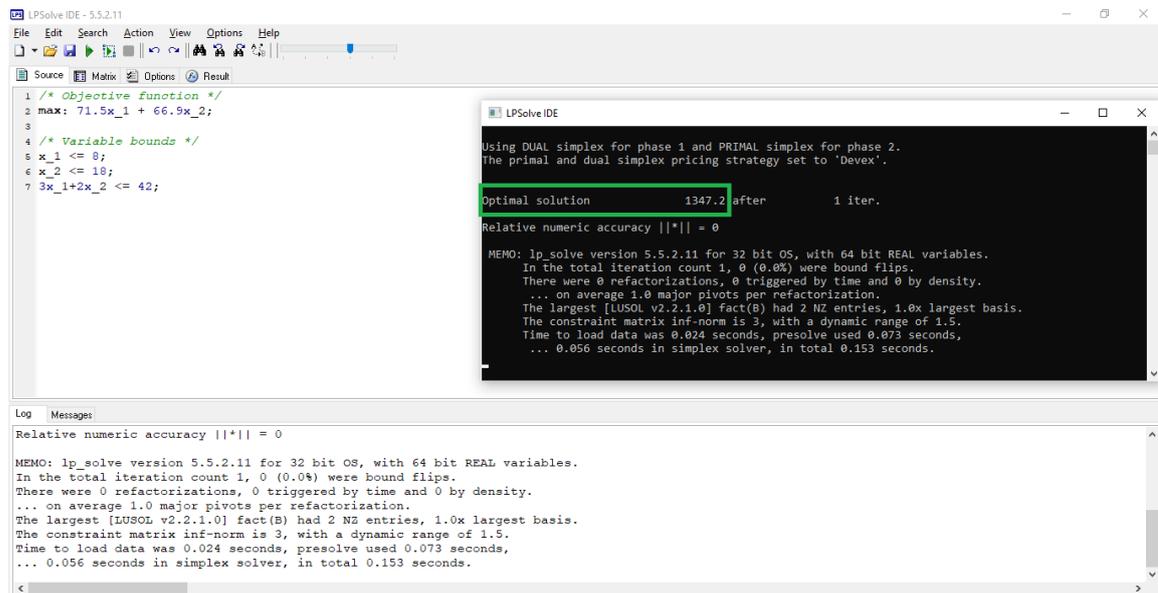


Figura 3.3: resultado ótimo da função objetivo.

Na 3ª linha do menu de opções do *LPSolver*, no botão *Result*, ao clicarmos nele, o programa exibe os valores das variáveis de decisão que otimizaram a função objetivo, bem como o valor desta:

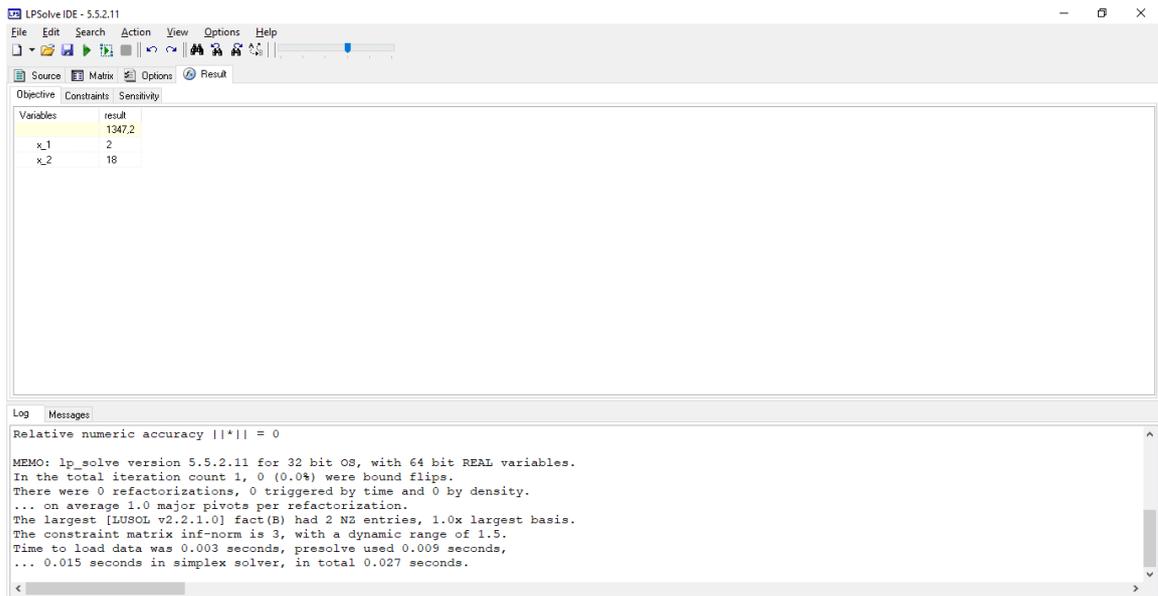


Figura 3.4: resultado ótimo da função objetivo e os correspondentes valores de suas variáveis.

Experimentando o *LPSolver* em nosso *Problema 1*, alcançamos o seguinte resultado:

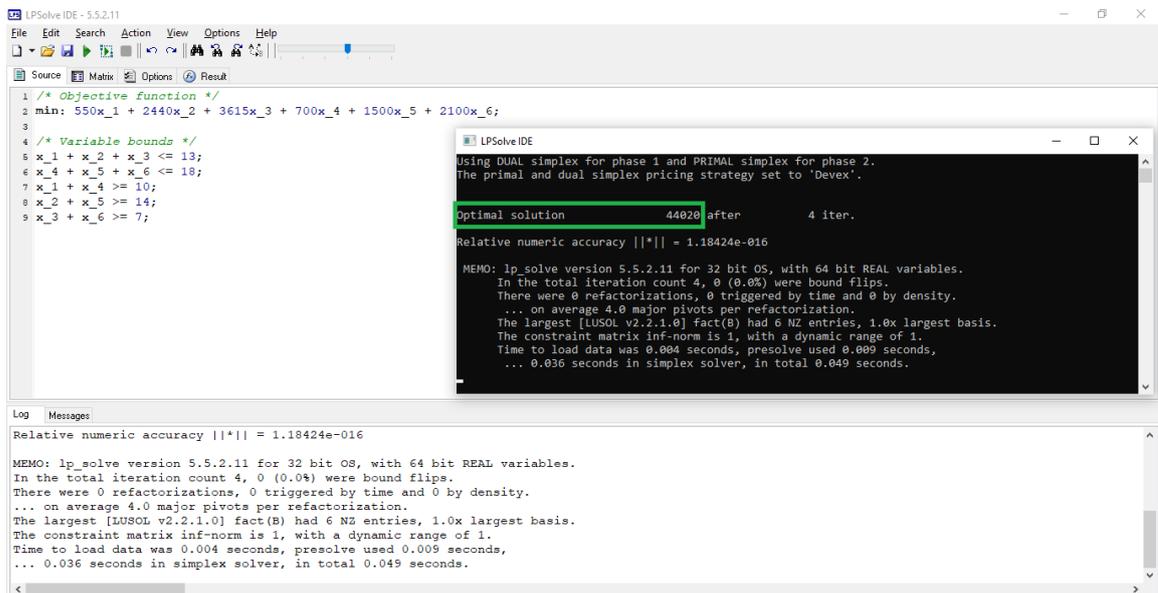


Figura 3.5: valor ótimo da função objetivo do *Problema 1*.

Como não poderia deixar de ser, em ambos os problemas, obtivemos os mesmos resultados ótimos obtidos em seções anteriores da presente pesquisa, destacadamente coerentes. Agora, passemos para os demais *softwares*.

3.2 Usando o *LibreOffice Calc*

A tradicional ferramenta *Solver*, encontrada no *LibreOffice Calc* (ou no *Excel*), permite-nos obter valores máximos ou mínimos para células programadas com tal finalidade, quando possível. Vejamos como proceder para o seu uso a partir dos problemas já estudados por nós até aqui.

Ao abrir uma planilha no *LibreOffice Calc*, podemos preencher um PPL completamente como segue:

	B	C	D	E	F	G	H	I
4								
5								
6		X_1	X_2					
7	c_B	71,5	66,9					
8								
9		0	0		Z =	=C7*C9+D7*D9		
10	s.a.							
11	[1]	1	0	<=	8	0		
12	[2]	0	1	<=	18	0		
13	[3]	3	2	<=	42	0		
14								
15								
16								
17								

Figura 3.6: inserção do *Problema 2* numa planilha.

Por s.a. (“*sujeito a*”) indicamos as sentenças de restrição do PPL. Cada sentença dessa deve ser preenchida considerando-se todas as variáveis de decisão do problema. Não é necessário inserir as folgas.

As células destacadas na cor verde são criadas para receber os valores das variáveis de decisão que otimizam a função objetivo z . Note, na célula G9, a modelagem de z com essa finalidade

E, quanto à modelagem das restrições em torno das células verdes, naturalmente, seguimos analogamente à função z :

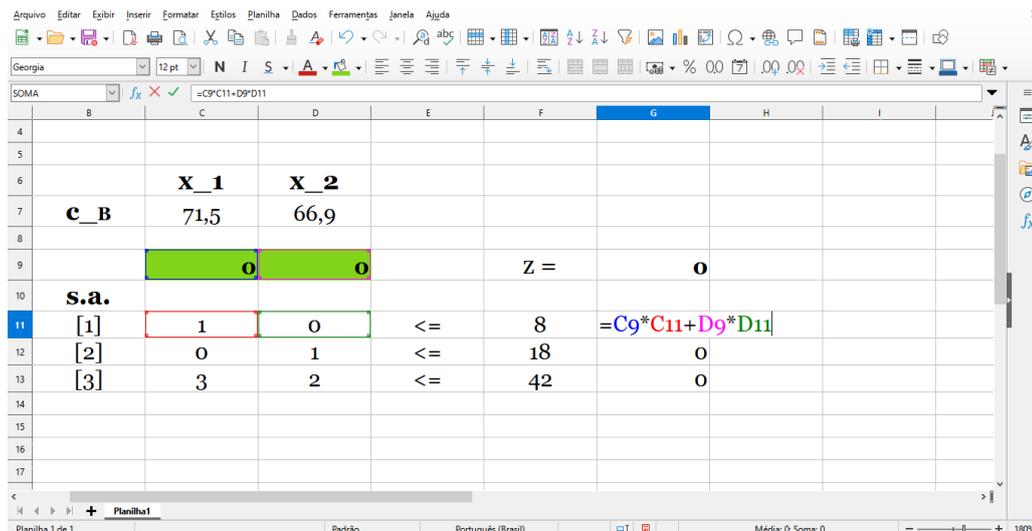


Figura 3.7: modelagem das restrições do *Problema 2*.

Doravante, agora, vamos acessar a ferramenta *Solver*, como indicado na Figura 3.8 abaixo:

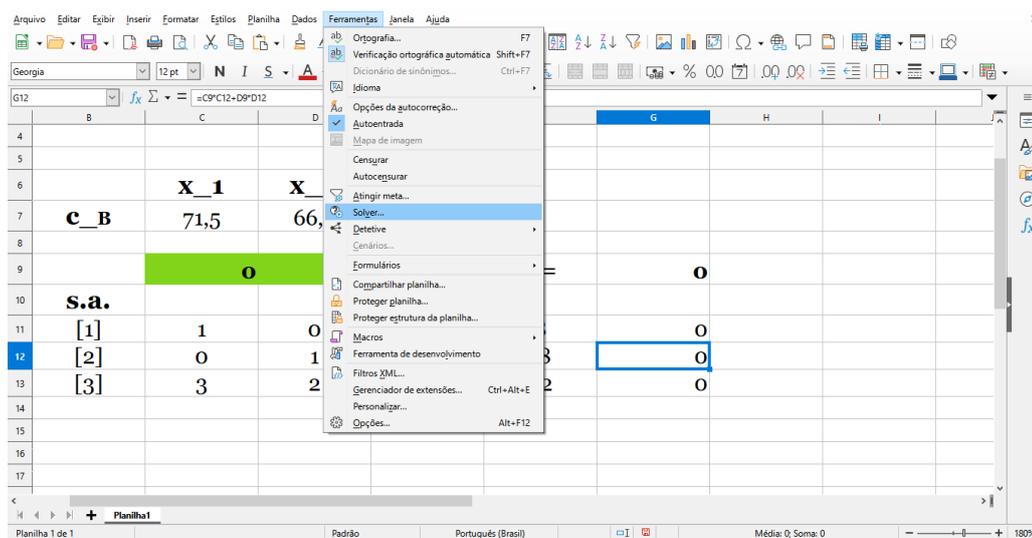


Figura 3.8: acessando o *Solver* do *LibreOffice Calc*.

Após clicarmos no botão virtual destacado acima, passamos a ter a janela do *Solver* sobreposta a da planilha, como vemos na Figura 3.9. Ela nos disponibiliza os campos de preenchimento para a célula que indica a função objetivo z do problema, para as células que receberão os valores que otimizam z (células variáveis) e para os pares de células das restrições do problema (célula variável e seu limite após a desigualdade). Note que, logo na segunda opção do *Solver*, de cima para baixo, temos como definir o tipo de otimização com a qual estamos lidando.

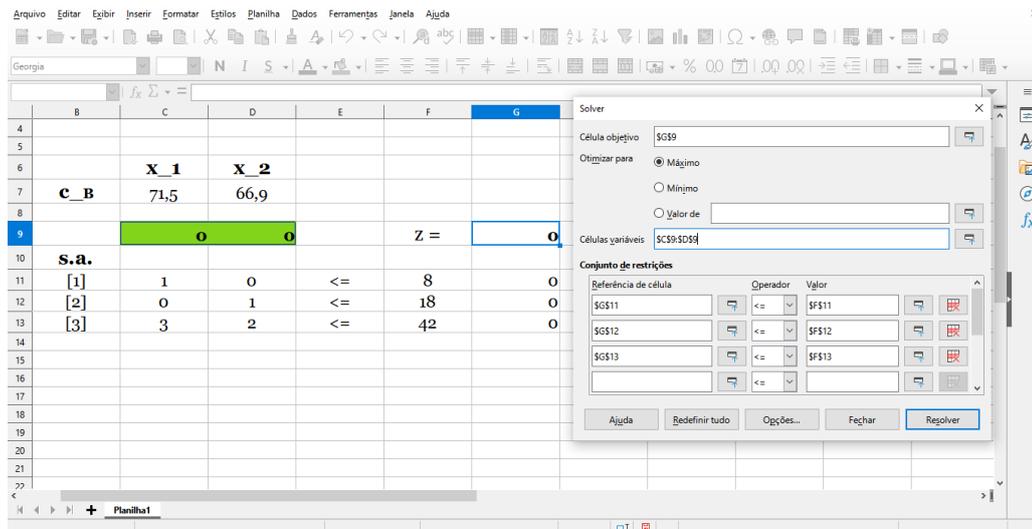


Figura 3.9: janela *Solver* aberta.

Realizados os devidos preenchimentos nos campos evidenciados na Figura 3.9, passamos para o botão “Opções” na mesma janela do *Solver*. Ao clicarmos nele, faremos a opção de iteração da ferramenta pelo *Solver linear do LibreOffice*, como temos na Figura 3.10:

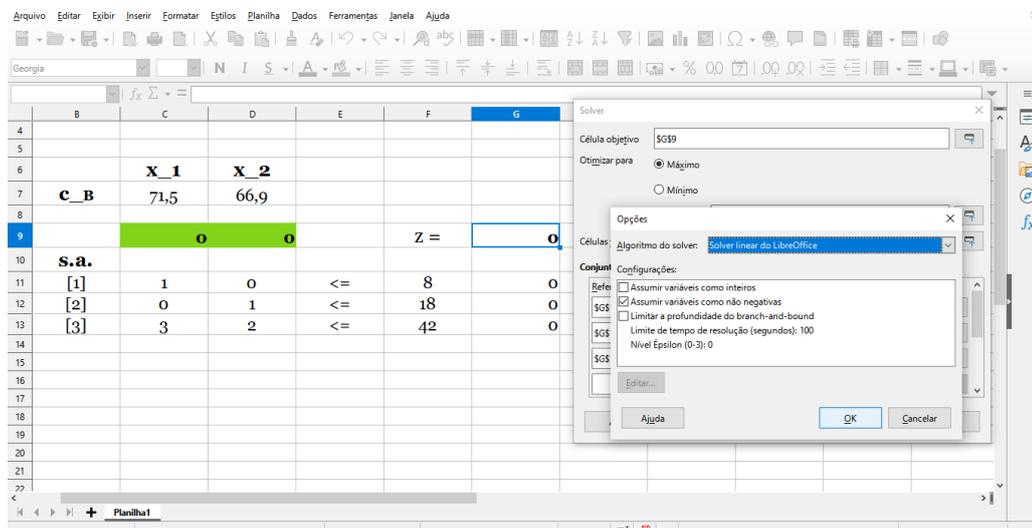


Figura 3.10: opção pelo *Solver linear do LibreOffice*.

Essa é a opção que se utiliza do método *Simplex* de resolução de um PPL. Feito isso, clicamos em “Ok” e, em seguida, em “Resolver”, como exibido na Figura 3.11. Pronto! Alcançamos o valor ótimo de z , os valores das variáveis de decisão para tanto e o uso dos recursos disponíveis em cada restrição.

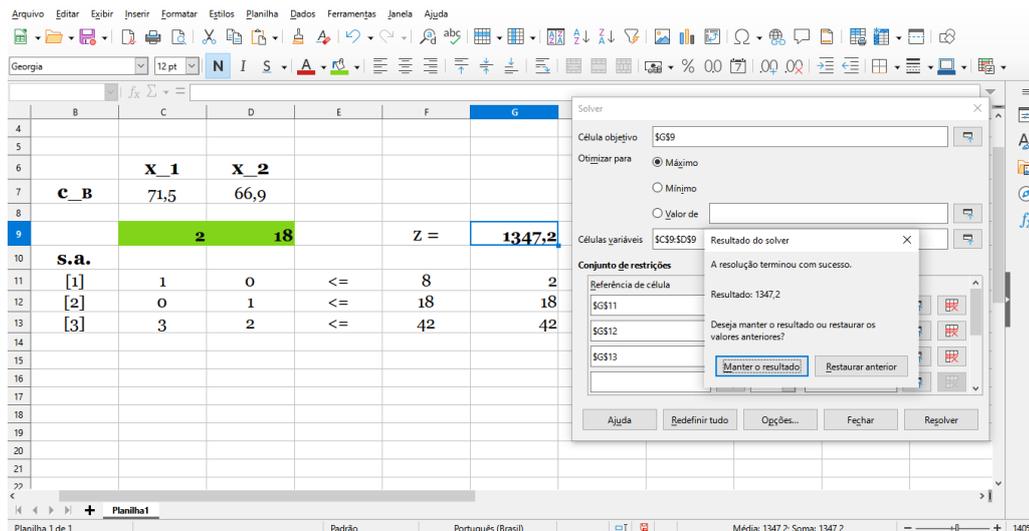


Figura 3.11: resolução do *Problema 2* pelo *Solver* do *LibreOffice Calc*.

Em acréscimo, veja, na Figura 3.12, como ficaria a resolução do nosso *Problema 1* passado, seguindo os passos acima narrados:

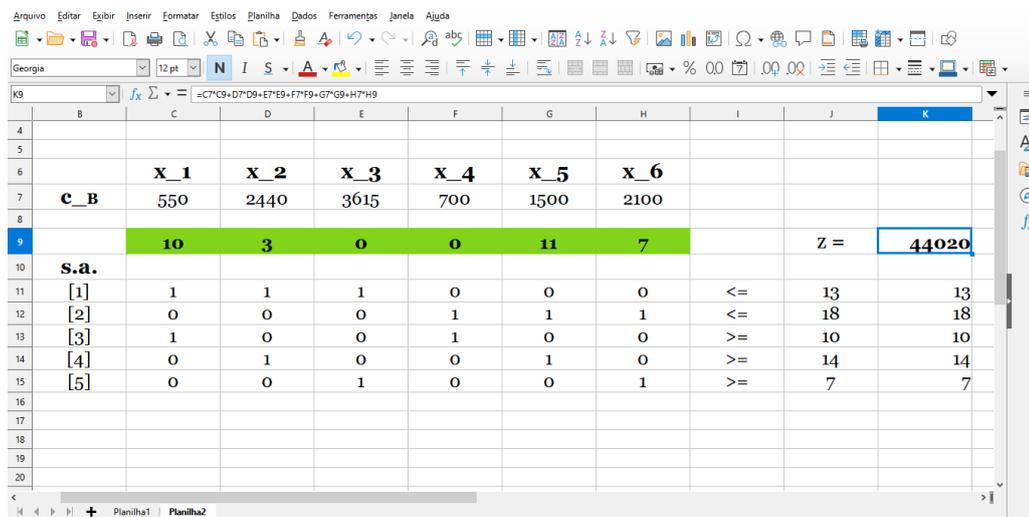


Figura 3.12: resolução do *Problema 1* pelo *Solver* do *LibreOffice Calc*.

Mais uma vez, todos os resultados que obtivemos para os mencionados problemas seguiram idênticos, ainda que por diferentes fontes de geração do mesmo método de resolução de um modelo de PL. O que, claro, era o esperado, sob a égide da Matemática.

3.3 Modelagem em *Python*

No tocante à programação do algoritmo *Simplex* na linguagem *Python*, dispomos da conhecida biblioteca *SciPy*. Esta possui uma série de aplicações computacionais ligadas à

grande área do conhecimento científico das Ciências Exatas. Podemos conhecê-lo e instalá-lo através do link <https://scipy.org/>. Isso posto, a fim de usá-lo durante programações em *Python*.

Por outro lado, à luz das possibilidades de tais programações, temos a chance de nos utilizarmos das ferramentas do *SciPy* pela página online do *Google Colab*, como dissemos anteriormente. Basta-nos, para tanto, declararmos na linha inicial do nosso código, qual(is) entre as suas ferramentas faremos uso. Para resolução de PPLs, usamos o pacote *scipy.optimize*, desenvolvido apenas para modelos de minimização com restrições do tipo “ \leq ”. Ou seja, quando tivermos um caso de $\text{Max}(z)$, trabalharemos com o $\text{Min}(-z)$. Analogamente, nas restrições do tipo “ \geq ”, escreveremos-as multiplicadas por “ -1 ”. Vejamos, então, como proceder a partir desse recurso computacional.

Primeiro, acesse a página do *Google Colab*, como na figura a seguir, e clique na opção “Novo notebook”. Isso nos levará ao ambiente de programação online do *Python*.

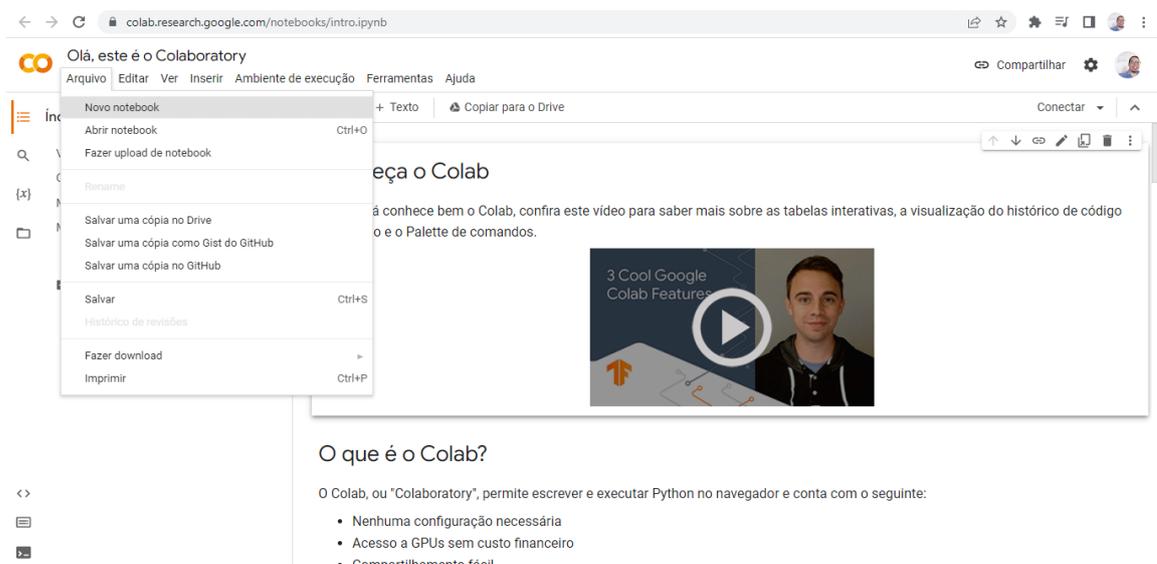


Figura 3.13: página inicial do *Google Colab* e o acesso à área de programação.

Ao acessar a área de programação, conforme Figura 3.14, veja que a nossa produção será arquivada no *Google Drive* da conta *Gmail* que usamos para acessar o *Colab*, bem como temos o bloco retangular na cor cinza voltado para a implementação dos códigos de programação em *Python*. Após os preenchermos, clicamos no botão *play*, à esquerda.

Sucessivamente, para abriremos novos blocos de código, selecionamos a opção “+ Código”, como ainda nos mostra a Figura 3.14:

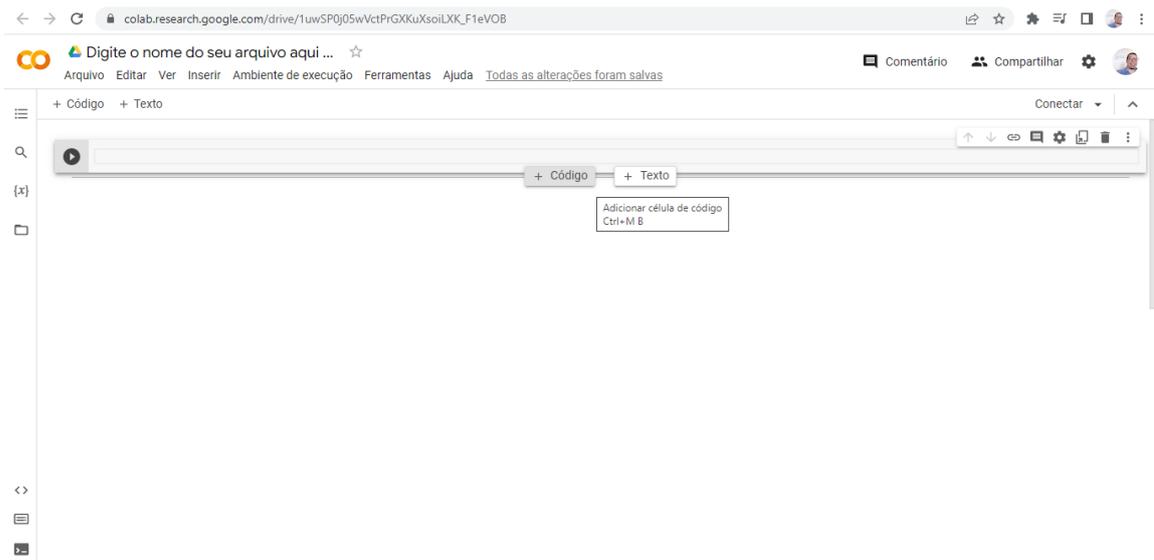


Figura 3.14: ambiente de programação no *Colab*.

Dessa maneira, experimentando a resolução do *Problema 2* através do *Python*, executamos a seguinte digitação, em que, do pacote *scipy.optimize*, importamos a função *linprog*:

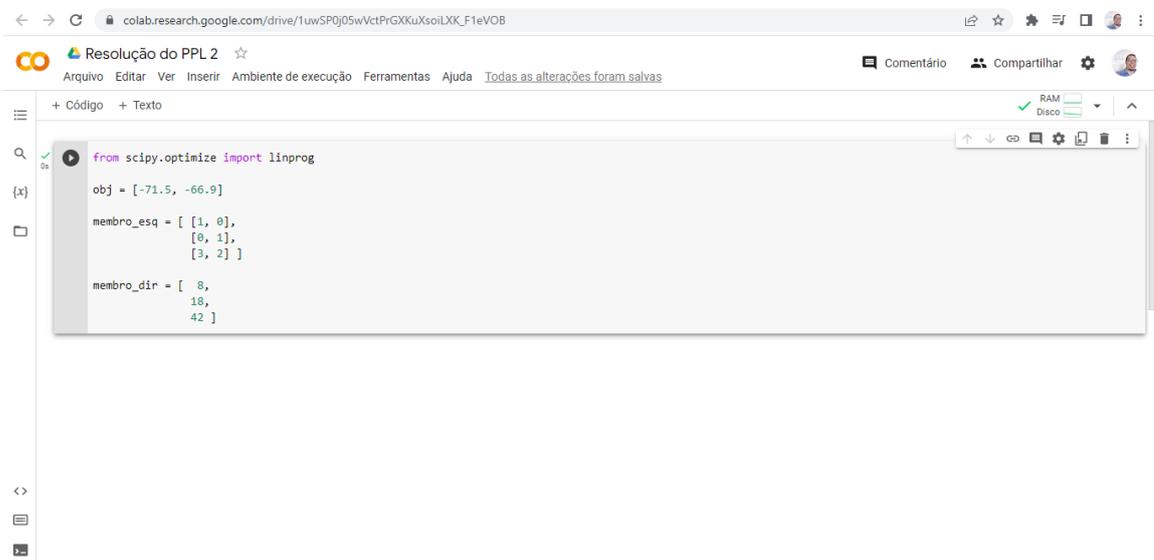


Figura 3.15: primeiro bloco de programação em *Python* para resolução do *Problema 2*.

Por “obj” estamos destacando os coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo $z = -71,5 \cdot x_1 - 66,9 \cdot x_2$, a qual iremos minimizar - o que equivale a maximizar $z = 71,5 \cdot x_1 + 66,9 \cdot x_2$. Em seguida, carregamos os coeficientes das sentenças que definem o conjunto de restrições do PPL, exibindo-os ordenadamente, membro a membro, em formato matricial.

No próximo passo, de acordo com a Figura 3.16, abrimos mais um bloco de código, a fim de carregarmos a programação que nos dará o resultado do valor ótimo para o $\text{Min}(z)$, quando $z = -71,5 \cdot x_1 - 66,9 \cdot x_2$.

The screenshot shows a Google Colab notebook titled "Resolução do PPL 2". The code cell contains the following Python code:

```
[2] from scipy.optimize import linprog

obj = [-71.5, -66.9]

membro_esq = [ [1, 0],
               [0, 1],
               [3, 2] ]

membro_dir = [ 8,
               18,
               42 ]

opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")
```

The output shows a deprecation warning: "method='revised simplex' is deprecated and will be removed in SciPy 1.11.0. Please use one of the HIGHS solvers." The execution status is "0s conclusão: 16:23".

Figura 3.16: inserção do código *optimize* (opt), conforme pacote *scipy.optimize*.

No pacote *scipy.optimize*, “c” faz a leitura dos coeficientes da função objetivo, “A_ub” e “b_ub”, respectivamente, carregam as matrizes dos coeficientes das restrições do PPL e dos valores limite destas. Clicamos no botão *play* desta linha de código e, com isso, abrimos o terceiro e último bloco de código para retornarmos o resultado da otimização requerida, digitando-se apenas o comando “opt” e clicando-se neste novo *play*.

The screenshot shows the same Google Colab notebook as Figure 3.16, but with an additional code cell and its output. The new code cell contains:

```
[9] opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")
```

The output shows the same deprecation warning as before. A new code cell contains the command:

```
opt
```

The output of this command is:

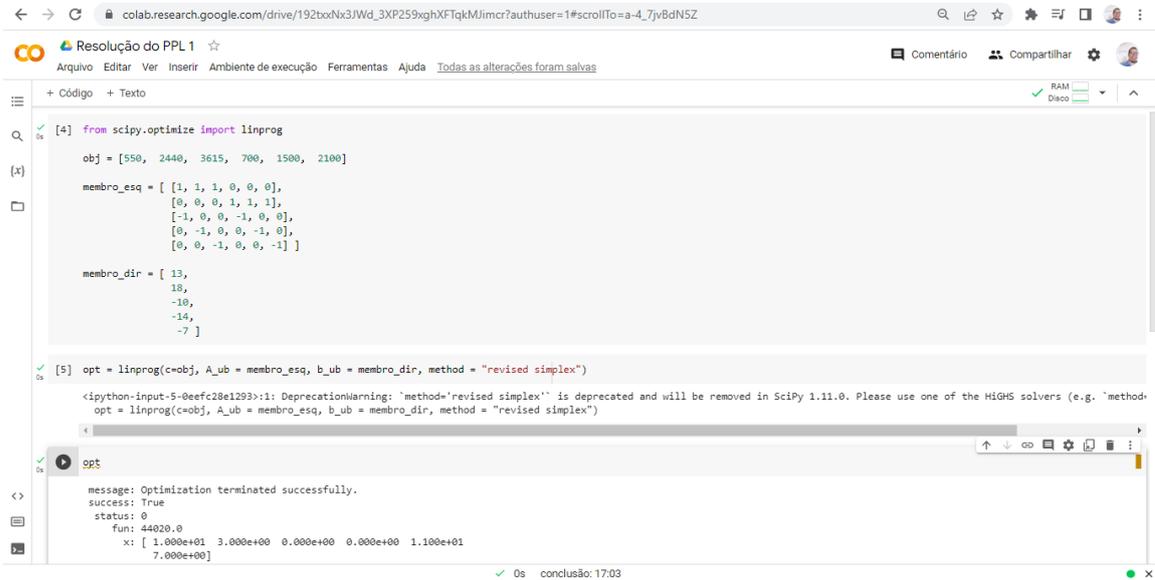
```
message: Optimization terminated successfully.
success: True
status: 0
fun: -1347.2
x: [ 2.000e+00  1.800e+01]
```

The execution status is "0s conclusão: 15:59".

Figura 3.17: valor ótimo da função z e os valores das variáveis que geraram tal resultado.

Assim, chegamos ao $\text{Min}(z) = -1347,2$ - que equivale ao $\text{Max}(z) = 1347,2$ -, quando $x_1 = 2$ e $x_2 = 18$. Recordemos-nos de que, em linguagem computacional, $2,000\text{e}+00 = 2,0 \cdot 10^0 = 2$ e $1,800\text{e}+01 = 1,8 \cdot 10^1 = 18$.

Abaixo, vejamos todo o processo realizado acima, dessa vez, sobre o *Problema 1*:



```

[4] from scipy.optimize import linprog

obj = [550, 2440, 3615, 700, 1500, 2100]

membro_esq = [ [1, 1, 1, 0, 0, 0],
                [0, 0, 0, 1, 1, 1],
                [-1, 0, 0, -1, 0, 0],
                [0, -1, 0, 0, -1, 0],
                [0, 0, -1, 0, 0, -1] ]

membro_dir = [ 13,
                18,
                -10,
                -14,
                -7 ]

[5] opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")

<ipython-input-5-0eefc28e1293>:1: DeprecationWarning: `method='revised simplex'` is deprecated and will be removed in SciPy 1.11.0. Please use one of the HIGHS solvers (e.g. `method='linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")`

[6] opt

message: Optimization terminated successfully.
success: True
status: 0
fun: 44020.0
x: [ 1.000e+01  3.000e+00  0.000e+00  0.000e+00  1.100e+01
      7.000e+00]
  
```

Figura 3.18: solução ótima para o nosso PPL 1, via programação em *Python*.

Por fim, novamente, vimos os mesmos resultados ótimos já obtidos para os PPLs mencionados voltando a aparecer, agora, por meio de uma das mais populares linguagens de programação utilizada no meio científico, a linguagem *Python*. O que, matematicamente, novamente também esperávamos.

Capítulo 4

A Chesf e os PPLs que descobrimos

A *Companhia Hidro Elétrica do São Francisco* (Chesf), fundada através do Decreto-Lei número 8031, de 1945, tendo suas operações iniciadas em março de 1948, trata-se de uma das maiores empresas geradoras e transmissoras de energia elétrica do Brasil. Isso posto, de acordo com dados fornecidos pela entidade denominada como *Operador Nacional do Sistema Elétrico* (ONS), que é fiscalizada pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL).

A partir de suas 12 usinas hidrelétricas (UHs), 14 usinas eólicas e 12 subestações, inúmeras linhas de transmissão são utilizadas para atender as demandas por energia elétrica de cerca de 40,5% do território brasileiro. Entre as usinas hidrelétricas da Chesf, nesta pesquisa, direcionamos nossa atenção ao magnífico complexo hidrelétrico localizado na cidade de Paulo Afonso/BA, também conhecida como a capital da energia, e em Delmiro Gouveia/AL.

O sistema de transmissão energética inicial desse complexo, gerado pelas usinas Paulo Afonso I (PA I), Paulo Afonso II (PA II), Paulo Afonso III (PA III), Paulo Afonso IV (PA IV) e Apolônio Sales (AS), dissipa-se por todos os estados do nordeste brasileiro: Alagoas (AL), Bahia (BA), Ceará (CE), Maranhão (MA), Paraíba (PB), Pernambuco (PE), Piauí (PI), Rio Grande do Norte (RN) e Sergipe (SE). Destaque-se que tal distribuição energética de saída é deflagrada em alta e ultra-alta tensão, na ordem de 500 quilovolts (kV), com corrente alternada.

Em seguida, a mencionada transmissão inicial segue espalhando-se pelas demais regiões do Brasil, através de outros pontos de distribuição mantidos pelo Sistema de Interligação Nacional (SIN). Veja a figura abaixo, constante na página da ONS:

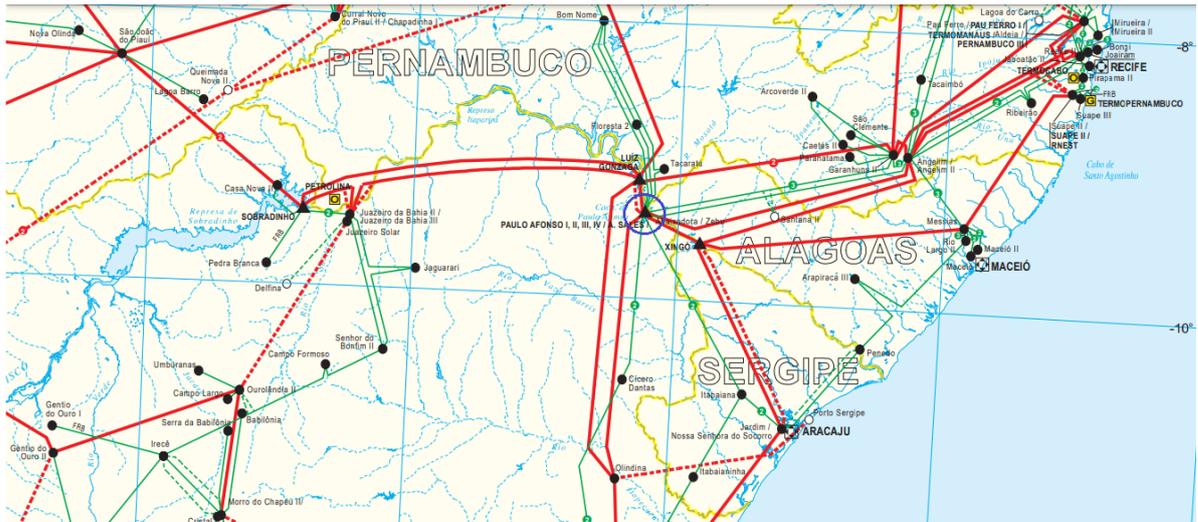


Figura 4.1: linhas de transmissão saindo do complexo hidrelétrico da Chesf em Paulo Afonso e em Delmiro Gouveia (destacado em azul). Fonte: ONS.

Vejamos uma foto de parte de uma das usinas listadas acima, a PA IV:



Figura 4.2: parte da estrutura da usina PA IV. Fonte: www.pa4.com.br.

Com respeito à capacidade de geração de energia elétrica das usinas AS, PA I, PA II, PA III e PA IV, diariamente, em valores médios dados em megawatts (MW), temos o quadro a seguir:

Usinas	Rio	Capacidade Instalada (MW)
HIDRELÉTRICAS	-	
Apolônio Sales	São Francisco	400,00
Paulo Afonso I	São Francisco	180,00
Paulo Afonso II	São Francisco	443,00
Paulo Afonso III	São Francisco	794,20
Paulo Afonso IV	São Francisco	2.462,40

Figura 4.3: geração de energia elétrica por usina. Fonte: www.chesf.com.br.

A capacidade instalada por usina gera uma distribuição possível de energia por suas linhas de transmissão a cada meio minuto, em média. Ou seja, a cada hora por dia, a usina AS pode transmitir até $120 \cdot (400) \text{ MWh} = 48000 \text{ MWh} = 48 \text{ gigawatts-hora (GWh)}$. De igual modo, as usinas PA I, PA II, PA III e PA IV, por hora, podem transmitir energia elétrica, respectivamente, até a ordem de 21,6 GWh, 53,2 GWh, 95,3 GWh e 295,5 GWh.

Por outro lado, com respeito aos dados de demanda energética por estado brasileiro, ora disponibilizados no site do Ministério de Minas e Energia (<https://www.mme.gov.br/>), em relação à região nordeste, em média, temos os seguintes números em GWh por dia:

Estado brasileiro	Demanda por energia elétrica (em GWh por dia)
AL	16,29
BA	88,73
CE	42,81
MA	31,82
PB	20,87
PE	54,91
PI	15,08
RN	18,29
SE	11,81

Diante do exposto, podemos começar a vislumbrar uma natureza típica dos PPLs associados a determinada situação envolvendo a minimização do custo de transporte de certo(s) produto(s) por uma empresa. Com efeito, assim que saibamos os custos do transporte energético das usinas do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso aos estados

que destacamos acima, então teremos como apresentar à Chesf a melhor maneira de se realizar tal distribuição de sua produção em função dos seus custos operacionais.

Pois bem, segundo os dados financeiros de 2022 da Chesf, constantes na página <https://www.chesf.com.br>, a partir do menu *Investidores-Demonstrações financeiras*, encontramos que, em média, por hora ao dia, o custo de operacionalização de cada uma de suas usinas e subestações chega a 17,14 mil reais, tendo o custo total desse ano atingido mais de seis bilhões de reais. No cálculo de tal custo médio, a empresa considera as despesas com pessoal, materiais de insumo, investimentos, manutenção em equipamentos, segurança no trabalho, entre outros.

Assim, de posse do custo médio de operacionalização acima, por unidade da Chesf, bastar-nos-á tomar a porção relativa à distribuição energética em GWh por dia para os estados brasileiros que selecionamos, conforme cada uma das usinas alvo da presente pesquisa e, então, teremos condições de produzir um PPL e resolvê-lo. Para tanto, organizamos todos os dados recolhidos até aqui em um quadro. Deste, como veremos na próxima seção, constituir-se-á o problema de transporte energético da Chesf.

4.1 O problema de transporte energético

O quadro a seguir nos informa, entre as UHs selecionadas nesta pesquisa, o custo médio, em centenas de reais, de transporte de energia elétrica em GWh (a cada hora por dia) para os estados do nordeste brasileiro. A última linha, a das demandas, diz respeito à necessidade energética, em GWh, de cada um dos estados mencionados, por hora diária; na última coluna, a das ofertas, temos o limite de produção de energia elétrica por UH, em GWh, por dia.

Dados	AL	BA	CE	MA	PB	PE	PI	RN	SE	Ofertas
UH AS	0,3	2,5	2,8	2,8	2	1,8	2	2,7	0,24	48
UH PA I	0,4	2,6	2,5	3,1	1,9	1,8	1,7	2,8	0,34	21,6
UH PA II	0,24	2,4	2,9	3	2	1,9	1,8	2,6	0,3	53,2
UH PA III	0,7	2,2	3,3	2,6	1,7	1,7	2	2,5	0,44	95,3
UH PA IV	0,84	2,3	3,2	2,7	1,7	1,6	1,9	2,4	0,5	295,5
Demandas	16,29	88,73	42,81	31,82	20,87	54,91	15,08	18,29	11,81	—

Há de se destacar que os dados centrais do quadro, que traduzem o custo médio

do transporte de energia elétrica de cada UH para cada estado declarado, consistem em um cenário estimado pelo autor do presente estudo, pautando-se nas demonstrações financeiras globais divulgadas pela empresa. Dessa maneira, elaboramos as seguintes indagações: qual é a melhor distribuição de energia elétrica das UHs destacadas acima aos estados brasileiros listados em função do custo médio desse transporte? Ou seja, como tal distribuição pode ser estabelecida, a fim de minimizar o custo de transporte energético do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso?

Tais questionamentos ocorreram-me, entre outras motivações, após uma visita que realizei em março do corrente ano, 2023, a UH PA III. Na ocasião, não fui informado pelo guia de visita sobre alguma atuação da empresa voltada à minimização de seus custos de distribuição de energia elétrica por usina do complexo Paulo Afonso, apesar de inúmeros outros dados terem sido a mim fornecidos - as informações ditas abertas pela empresa. E, inclusive, com certa regularidade, todas as usinas desse complexo costumam manter seus geradores em funcionamento. Daí, todo excedente energético gerado é armazenado ou perdido, conforme dados constantes no site oficial da Chesf.

Quanto a outros estudos científicos em torno de determinado processo de otimização a ser possivelmente implementado pela Chesf, a partir de buscas no *Google Acadêmico*, encontrei várias pesquisas publicadas em diversas áreas, Física, Química, Engenharias, Economia, etc. Contudo, nenhuma equivalente à nossa proposta, especificamente voltada para o complexo hidrelétrico da cidade de Paulo Afonso.

Portanto, avancemos para a resolução da situação-problema que se materializou até aqui.

Solução

Inicialmente, vemos que estamos tratando de um PPL análogo ao nosso *Problema 1*, desenvolvido na Subseção 1.3.1.1. Assim, comecemos modelando-o matematicamente: defina a *variável de decisão* do problema. Isto é,

x_{ij} := quantidade de energia elétrica (em GWh ao dia) transportada da UH i , com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso ao estado j , com $j \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, do nordeste brasileiro. Por exemplo, x_{59} nos indica a quantidade de energia transmitida pela UH PA IV ao estado de Sergipe a cada hora diária.

Assim, conhecendo-se os custos de transporte exibidos no quadro anterior, segue a expressão da *função objetivo* do problema, a saber:

$$\begin{aligned}
 z &= f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{57}, x_{58}, x_{59}) \\
 &= 30 \cdot x_{11} + 250 \cdot x_{12} + 280 \cdot x_{13} + 280 \cdot x_{14} + 200 \cdot x_{15} + 180 \cdot x_{16} + 200 \cdot x_{17} + 270 \cdot \\
 &x_{18} + 24 \cdot x_{19} + 40 \cdot x_{21} + 260 \cdot x_{22} + 250 \cdot x_{23} + 310 \cdot x_{24} + 190 \cdot x_{25} + 180 \cdot x_{26} + 170 \cdot x_{27} + 280 \cdot \\
 &x_{28} + 34 \cdot x_{29} + 24 \cdot x_{31} + 240 \cdot x_{32} + 290 \cdot x_{33} + 300 \cdot x_{34} + 200 \cdot x_{35} + 190 \cdot x_{36} + 180 \cdot x_{37} + 260 \cdot x_{38} + \\
 &30 \cdot x_{39} + 70 \cdot x_{41} + 220 \cdot x_{42} + 330 \cdot x_{43} + 260 \cdot x_{44} + 170 \cdot x_{45} + 170 \cdot x_{46} + 200 \cdot x_{47} + 250 \cdot x_{48} + 44 \cdot \\
 &x_{49} + 84 \cdot x_{51} + 230 \cdot x_{52} + 320 \cdot x_{53} + 270 \cdot x_{54} + 170 \cdot x_{55} + 160 \cdot x_{56} + 190 \cdot x_{57} + 240 \cdot x_{58} + 50 \cdot x_{59}
 \end{aligned}$$

Com isso, buscaremos a minimização de z ; o que, em simbologia matemática, equivale a obter, como sabemos, o $\text{Min}(z)$, ou, ainda, o $\text{Min}\{f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{57}, x_{58}, x_{59})\}$. Para isso, precisaremos modelar as restrições do problema as quais a função objetivo está sujeita.

Pela definição de x_{ij} , temos que $x_{ij} \geq 0$. Além disso, note que possuímos duas categorias de restrições neste PPL, aquela relacionada ao total de energia produzida (a cada hora por dia) por UH - a chamaremos de restrições de oferta (R_o) - e a que diz respeito às associadas demandas dos estados do nordeste brasileiro por energia elétrica, também a cada hora por dia - que chamaremos de restrições de demanda (R_d). Portanto, ficamos com:

$$R_o : \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \leq 48; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} \leq 21,6; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} \leq 53,2; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} \leq 95,3; \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} \leq 295,5. \end{cases}$$

E, quanto às restrições R_d , temos:

$$R_d : \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \geq 16, 29; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \geq 88, 73; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \geq 42, 81; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} \geq 31, 82; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} \geq 20, 87; \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 54, 91; \\ x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} \geq 15, 08; \\ x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} \geq 18, 29; \\ x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} \geq 11, 81. \end{cases}$$

No tocante ao conjunto de restrições R_o , a desigualdade do tipo “menor ou igual” se estabelece pelo fato de estarmos diante de uma limitação do total energético produzido por cada UH (a cada hora por dia). Semelhantemente, em R_d , a desigualdade “maior ou igual” é justificada em face das demandas de energia por estado a serem supridas - elas serão atendidas se os estados receberem o que necessitam ou mais do que isso.

Em suma, podemos estruturar a modelagem do PPL em questão, nas condições por-menorizadas acima, como segue:

Minimizar $z = f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{57}, x_{58}, x_{59})$ tal que:

$$z = 30 \cdot x_{11} + 250 \cdot x_{12} + 280 \cdot x_{13} + 280 \cdot x_{14} + 200 \cdot x_{15} + 180 \cdot x_{16} + 200 \cdot x_{17} + 270 \cdot x_{18} + 24 \cdot x_{19} + 40 \cdot x_{21} + 260 \cdot x_{22} + 250 \cdot x_{23} + 310 \cdot x_{24} + 190 \cdot x_{25} + 180 \cdot x_{26} + 170 \cdot x_{27} + 280 \cdot x_{28} + 34 \cdot x_{29} + 24 \cdot x_{31} + 240 \cdot x_{32} + 290 \cdot x_{33} + 300 \cdot x_{34} + 200 \cdot x_{35} + 190 \cdot x_{36} + 180 \cdot x_{37} + 260 \cdot x_{38} + 30 \cdot x_{39} + 70 \cdot x_{41} + 220 \cdot x_{42} + 330 \cdot x_{43} + 260 \cdot x_{44} + 170 \cdot x_{45} + 170 \cdot x_{46} + 200 \cdot x_{47} + 250 \cdot x_{48} + 44 \cdot x_{49} + 84 \cdot x_{51} + 230 \cdot x_{52} + 320 \cdot x_{53} + 270 \cdot x_{54} + 170 \cdot x_{55} + 160 \cdot x_{56} + 190 \cdot x_{57} + 240 \cdot x_{58} + 50 \cdot x_{59},$$

sendo esta função sujeita a:

$$\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \leq 48; \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} \leq 21, 6; \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} \leq 53, 2; \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} \leq 95, 3; \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} \leq 295, 5; \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \geq 16, 29; \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \geq 88, 73; \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \geq 42, 81; \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} \geq 31, 82; \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} \geq 20, 87; \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 54, 91; \\
x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} \geq 15, 08; \\
x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} \geq 18, 29; \\
x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} \geq 11, 81; \text{ com } x_{ij} \in \mathbb{R}_+.
\end{cases}$$

Agora, utilizando-nos do algoritmo *Simplex*, resolveremos o problema. Nessa etapa, dado o volume de 45 variáveis do nosso modelo de PL, recorreremos ao programa *LPSolver* para alcançarmos o valor ótimo de z , entre as opções de *softwares* abordados no Capítulo 3. Seguem os resultados ótimo e de cada variável de decisão x_{ij} :

```

1 /* Objective function */
2 min: 30x_11 + 250x_12 + 280x_13 + 280x_14 + 200x_15 + 180x_16 + 200x_17 + 270x_18 + 24x_19 + 40x_21 + 260x_22 +
3 250x_23 + 310x_24 + 190x_25 + 180x_26 + 170x_27 + 280x_28 + 34x_29 + 24x_31 + 240x_32 + 290x_33 + 300x_34 +
4 200x_35 + 190x_36 + 180x_37 + 260x_38 + 30x_39 + 70x_41 + 220x_42 + 330x_43 + 260x_44 + 170x_45 + 170x_46 +
5 200x_47 + 250x_48 + 44x_49 + 84x_51 + 230x_52 + 320x_53 + 270x_54 + 170x_55 + 160x_56 + 190x_57 + 240x_58 + 50x_59;
6
7 /* Variable bounds */
8 x_11 + x_12 + x_13 + x_14 + x_15 + x_16 + x_17 + x_18 + x_19 <= 48;
9 x_21 + x_22 + x_23 + x_24 + x_25 + x_26 + x_27 + x_28 + x_29 <= 21.6;
10 x_31 + x_32 + x_33 + x_34 + x_35 + x_36 + x_37 + x_38 + x_39 <= 53.2;
11 x_41 + x_42 + x_43 + x_44 + x_45 + x_46 + x_47 + x_48 + x_49 <= 95.3;
12 x_51 + x_52 + x_53 + x_54 + x_55 + x_56 + x_57 + x_58 + x_59 <= 295.5;
13
14 x_11 + x_21 + x_31 + x_41 + x_51 >= 16.29;
15 x_12 + x_22 + x_32 + x_42 + x_52 >= 88.73;
16 x_13 + x_23 + x_33 + x_43 + x_53 >= 42.81;
17 x_14 + x_24 + x_34 + x_44 + x_54 >= 31.82;
18 x_15 + x_25 + x_35 + x_45 + x_55 >= 20.87;
19 x_16 + x_26 + x_36 + x_46 + x_56 >= 54.91;
20 x_17 + x_27 + x_37 + x_47 + x_57 >= 15.08;
21 x_18 + x_28 + x_38 + x_48 + x_58 >= 18.29;
22 x_19 + x_29 + x_39 + x_49 + x_59 >= 11.81;

```

Loop Messages
Optimal solution 59497 after 13 iter.
Relative numeric accuracy ||*|| = 2.2094e-016
MEMO: lp_solve version 5.5.2.11 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 13, 0 (0.0%) were bound flips.

26:19 ITE:12 INV:2 NOD:0 TIME:0:01

Figura 4.4: implementação do PPL no *LPSolver* e o resultado ótimo de z .

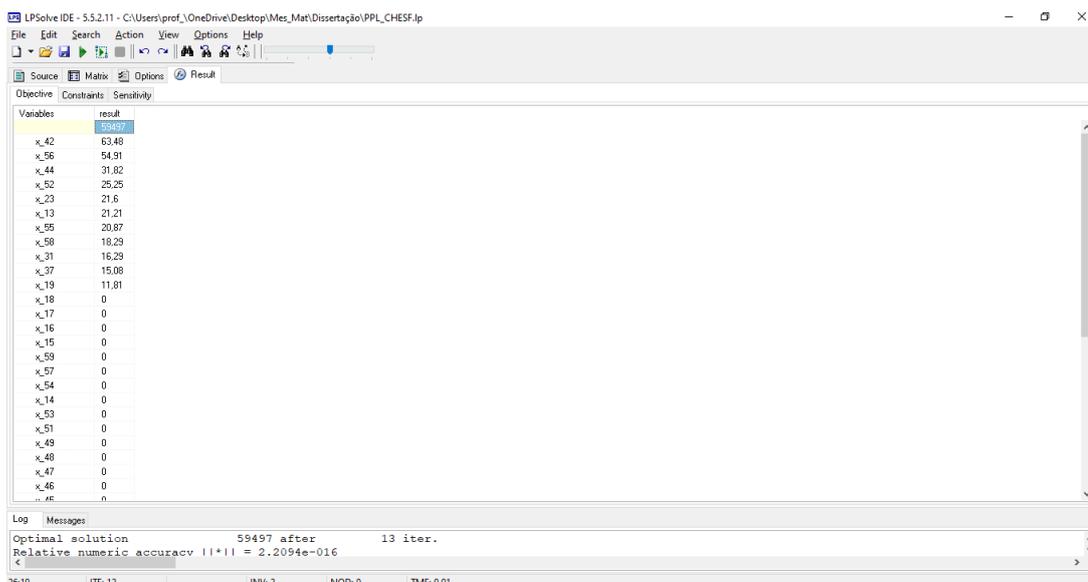


Figura 4.5: valor ótimo de z e os resultados de cada x_{ij} .

Concluimos que o custo médio mínimo, a cada hora por dia, do transporte de energia elétrica das usinas do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso aos estados do nordeste brasileiro é igual a:

$$z_{\text{ótimo}} = 59497 \text{ reais.}$$

O resultado ótimo obtido vem à tona quando temos cada variável de decisão valorada por: $x_{13} = 21, 21$, $x_{19} = 11, 81$, $x_{23} = 21, 6$, $x_{31} = 16, 29$, $x_{37} = 15, 08$, $x_{42} = 63, 48$, $x_{44} = 31, 82$, $x_{52} = 25, 25$, $x_{55} = 20, 87$, $x_{56} = 54, 91$, $x_{58} = 18, 29$ e todas as demais sendo iguais a zero. Ou seja, no cenário ótimo, considerando-se a atuação conjunta das cinco usinas do complexo em atendimento às demandas de todos os estados listados, por meio de uma resolução pelo método *Simplex*, temos que:

- (i) para a UH AS, dos seus 48 GWh produzidos, deve-se distribuir 21,21 GWh para o estado do Ceará e 11,81 GWh, para Sergipe;
- (ii) para a UH PA I, toda a sua produção de 21,6 GWh deve ser distribuída ao estado do Ceará;
- (iii) para a UH PA II, dos seus 53,2 GWh produzidos, deve-se distribuir 16,29 GWh para o estado de Alagoas e 15,08 GWh, para o Piauí;
- (iv) para a UH PA III, dos seus 95,3 GWh produzidos, deve-se dissipar 63,48 GWh para o estado da Bahia e 31,82 GWh, para o Maranhão;

(v) para a UH PA IV, dos seus 295,5 GWh produzidos, deve-se distribuir 25,25 GWh para o estado de Bahia, 20,87 GWh para Paraíba, 54,91 GWh para Pernambuco e 18,29 GWh para o Rio Grande do Norte.

Sofisticadamente, o algoritmo *Simplex* otimizou o custo médio total de transporte energético do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso, ao passo que atendeu a todas as demandas (em GWh) dos estados do nordeste brasileiro. Dessa maneira, contribuímos para a eficiência operacional da Chesf e, com efeito, esse alcance tende a gerar outros possíveis esforços vantajosos de otimização de sua realidade empresarial, como, por exemplo, em um contexto ambiental. Acerca de tal, trataremos na próxima seção.

4.2 O problema de combate a incêndios

O complexo hidrelétrico de Paulo Afonso está localizado em um raio de 04 *km*. Isso lhe garante uma área de 50,24 *km*², aproximadamente. Dessa maneira, um questionamento foi-me inquietante: se algum poste de alta ou ultra-alta tensão nessa área, responsável pela dissipação de energia elétrica inicial para as linhas de transmissão, vir abaixo, ocasionando um incêndio no espaço florestal de posse da Chesf, como esta deveria proceder para combatê-lo?

Entre os possíveis cálculos de risco de acidentes que deflagram incêndios, o mencionado acima é um dos mais arriscados de todos. Quando um poste de alta ou ultra-alta tensão cai ao chão, se o cabo de transmissão elétrica for rompido, caindo sobre o solo, então teremos a geração de um campo elétrico de longo alcance e grande intensidade elétrica. Não somente um incêndio iminente poderá ser desencadeado, bem como este não poderá ser combatido por terra, dado o potencial risco de eletrocussão, a menos que desenergizem a região atingida - o que ainda não zera instantaneamente a dissipação de corrente elétrica na área. Portanto, a maneira mais segura e eficiente de se combater tal tipo de incêndio, como não poderia deixar de ser, é por ar, fazendo-se uso de aviões e/ou helicópteros de combate aéreo ao fogo.

Se não combatido o mais rápido possível, incêndios em áreas florestais tornar-se-ão extremamente danosos, tanto ao meio ambiente (fauna e flora), quanto às pessoas que vivem nos aglomerados rurais e urbanos do entorno dos focos das chamas. Estas últimas, pior ainda no caso de um cabo de alta tensão emitindo fagulhas elétricas, apenas tendem a

ser realimentadas e a sua dissipação será amplamente projetada no meio. Logo, o combate aéreo a incêndios dessas proporções deve vir à tona em nível fulminante: rápido, intenso e em múltiplas frentes.

A Chesf, em seu quadro de funcionários, possui pilotos de avião e de helicópteros. A necessidade de contratação desse pessoal se justifica para inúmeras finalidades, desde o monitoramento de suas usinas ao transporte de passageiros/cargas e à resolução de problemas cujo acesso aos tais se dá apenas de maneira aérea. Nesse sentido, se, em certo dia, um acidente oriundo da queda de um poste de alta ou ultra-alta tensão ocorrer, fazendo com que um incêndio seja iniciado (com rápida propagação) na área florestal de localização do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso, que tem $50,24 \text{ km}^2$ de área, e sabendo-se que tal complexo possui uma demanda total por 10 pilotos de helicóptero, 15 pilotos de avião e 30 operadores aéreos de combate a incêndios (10 para helicópteros e 20 para aviões), como poderíamos otimizar o custo dessa operação associado à alocação de pessoal para um combate fulminante que elimine as chamadas em até duas horas, a partir das opções de aeronaves dispostas no quadro abaixo?

Aeronaves	Eficiência de combate em km^2/h	Custo (R\$/h)	Demanda por pessoal
Helicóptero A	10	1500	2 pilotos e 1 operador
Helicóptero B	15	2000	2 pilotos e 2 operadores
Avião A	20	3500	2 pilotos e 3 operadores

Os helicópteros dos tipos A e B são denominações que demos para duas marcas de aeronaves de básico e de médio porte voltadas ao combate de incêndios, respectivamente. O mesmo se aplica ao avião do tipo A. O contingente de pilotos e operadores do complexo hidrelétrico da Chesf de Paulo Afonso, descritos acima, atua em regime de trabalho por escala, segundo dados recentes de editais de concursos e processos seletivos realizados. Todavia, no caso de a escala laboral não ser obedecida ou por alguma necessidade, numa situação de urgência, a devida reposição ou reforço de pessoal é realizada por convocação extraordinária da equipe que está de folga.

Vemos, portanto, até aqui, que estamos vivenciando um PPL cuja natureza é a de designação de pessoal, a fim de minimizarmos o custo de determinada atividade. Dessa maneira, analogamente ao que apresentamos no *Problema 2*, tratado ao longo da fundamentação teórica desta pesquisa, solucionemos o problema real que acabamos de considerar e construir na presente seção.

Solução

Primeiramente, definamos nossa *variável de decisão*:

x_j := quantidade de aeronaves a serem utilizadas por hora no combate fulminante ao incêndio que se propaga, com $j = 1$ indicando a utilização do Helicóptero A; $j = 2$, o uso do Helicóptero B; e, $j = 3$, a utilização do Avião A. Logo, temos a seguinte *função objetivo* a ser minimizada:

$$\begin{aligned} z &= f(x_1, x_2, x_3) \\ &= 1500 \cdot x_1 + 2000 \cdot x_2 + 3500 \cdot x_3 \end{aligned}$$

Atentando-nos, agora, para as restrições do PPL, interpretamos dois grupos de restrição: (i) aquela que diz respeito à demanda que pode ser contemplada pelo combate aéreo ao fogo, em km^2/h ; e, (ii) a que se trata da disponibilidade de pessoal para atuação nesse combate.

Para (i), dado que todo o combate deve durar até duas horas, temos, em km^2/h , o planejamento ótimo dessa restrição dado por:

$$10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 \geq \frac{50,24}{2} = 25,12$$

O uso da desigualdade “maior ou igual” decorre do fato de termos um desempenho que atenda a toda área possível de domínio do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso, nunca menos, calculado em km^2/h , sob pena de não eliminarmos o incêndio.

Para (ii), seguem os modelos das restrições:

quanto aos helicópteros, temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ (pilotos);} \\ x_1 \leq 10 \text{ (operadores);} \\ 2x_2 \leq 10 \text{ (operadores);} \end{cases}$$

quanto ao avião:

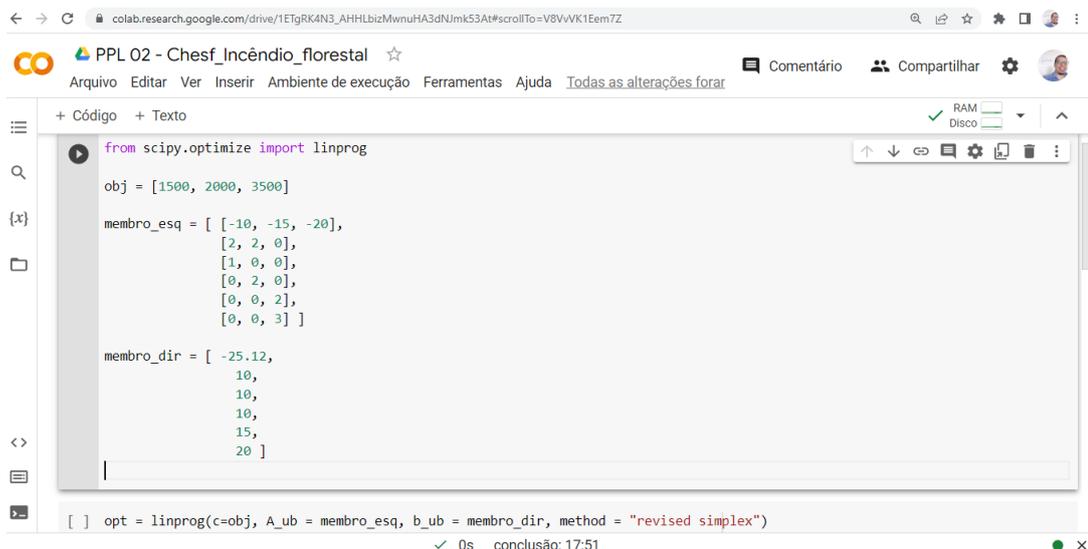
$$\begin{cases} 2x_3 \leq 15 \text{ (pilotos);} \\ 3x_3 \leq 20 \text{ (operadores).} \end{cases}$$

Com isso, alcançamos a modelagem completa do PPL em tela:

Minimizar $z = f(x_1, x_2, x_3) = 1500 \cdot x_1 + 2000 \cdot x_2 + 3500 \cdot x_3$, sendo esta função sujeita a:

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geq 25, 12; \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \leq 10; \\ 2x_2 \leq 10; \\ 2x_3 \leq 15; \\ 3x_3 \leq 20; \text{ com } x_j \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Nesse ponto, resolvendo o PPL através do método *Simplex*, faremos uso da ferramenta computacional *scipy.optimize* em *Python*. Observe as imagens a seguir:



```
from scipy.optimize import linprog

obj = [1500, 2000, 3500]

membro_esq = [ [-10, -15, -20],
               [ 2,  2,  0],
               [ 1,  0,  0],
               [ 0,  2,  0],
               [ 0,  0,  2],
               [ 0,  0,  3] ]

membro_dir = [ -25.12,
               10,
               10,
               10,
               15,
               20 ]

[ ] opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")
```

Figura 4.6: implementação do modelo de PL em *Python*, com uso da ferramenta *scipy.optimize*.

Após os dois blocos de códigos preenchidos, como na imagem acima, passamos para a linha de iteração final do algoritmo *Simplex*, neste ambiente de programação:

```
[2] opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")

<ipython-input-2-0eefc28e1293>:1: DeprecationWarning: `method='revised simplex'` is deprecated and will be removed in SciPy 1.
  opt = linprog(c=obj, A_ub = membro_esq, b_ub = membro_dir, method = "revised simplex")

opt
message: Optimization terminated successfully.
success: True
status: 0
fun: 3349.3333333333335
x: [ 0.000e+00 1.6746666666666675e+00 0.000e+00]
nit: 2
```

Figura 4.7: valor ótimo de z e os resultados de cada $x_j \in \mathbb{R}$.

Como atuamos computacionalmente no domínio dos números reais, obtivemos um custo mínimo, por hora, da operação de combate fulminante à área florestal do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso, dado por $3349,3333\dots35 \approx 3349,33$ reais, com $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 1,67466\dots675 \approx 1,675$. Contudo, como o modelo de PL do problema admite apenas $x_j \in \mathbb{Z}_+$, ficamos com os **valores factíveis** desta iguais a $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 2$, sendo o **valor ótimo factível** de z , por hora, equivalente a:

$$z_{\text{ótimo}} = 4000 \text{ reais.}$$

Portanto, utilizando-se, a cada hora, de duas aeronaves classificadas por helicópteros do tipo B, de médio porte para o combate aéreo a incêndios, a empresa terá percorrido uma área total de 60 km^2 no combate às chamas, ao fim de duas horas, e despendido oito mil reais para tanto. Isso contemplaria mínima e factivelmente a necessidade do complexo hidrelétrico de Paulo Afonso diante do cenário acidental que poderia se materializar. Além disso, quanto à designação de pessoal que otimizou a operação, teríamos designados quatro pilotos de helicóptero, bem como quatro operadores de combate a incêndios através desta aeronave, para a atividade em questão.

Considerações finais

Após cada etapa do estudo que desenvolvemos, diversos aprendizados puderam ser concebidos. A ação de pensar um problema de pesquisa e perseguir a(s) sua(s) possível(is) solução(ões), de fato, faz-nos sentir a inestimável sensação racional da capacidade humana de melhorar a nossa maneira de viver em sociedade.

Nessa perspectiva, trouxemos uma singela e significativa contribuição para o crescimento das melhores condições vida ao ser humano, especialmente, por meio da chamada rainha das ciências: a Matemática. A partir das constantes e inúmeras situações-problemas em que modelos matemáticos de *Programação Linear* podem ser imbricados, temos como atingir extraordinárias estratégias decisórias para o bem comum da relação entre indivíduos, grandes corporações empresariais, governos, etc, e nas múltiplas dimensões da pessoa: física, intelectual, política e econômica, por exemplo.

Ao nos debruçarmos sobre o estudo do algoritmo *Simplex* - o que arrematou consigo toda uma estrutura matemática necessária para a sua criação e implementação -, trilhamos uma trajetória que culminou no que intentávamos: modelar e solucionar *Problemas de Programação Linear* reais, cuja motivação e implementação fossem destacadamente relevantes. Com efeito, os resultados que obtivemos servirão ao público alvo da investigação concretizada. A Chesf, agora, passará a ter respostas fundamentadas cientificamente para indagações que venham a surgir em torno do que abordamos no Capítulo 4 desta dissertação.

Com respeito ao nível de abrangência do conhecimento matemático do método *Simplex* como ferramenta protagonista na resolução de PPLs, notamos que é estritamente plausível incluí-lo em pesquisas futuras desenvolvidas por mim junto a meus alunos de graduação, no curso de Engenharia Elétrica do IFBA, *campus* Paulo Afonso, vislumbrando, aliás, parcerias técnicas entre a instituição de ensino em questão e empresas da região, assim como com a prefeitura da cidade, através de projetos socioeconômicos voltados ao pequeno

e médio empreendedor.

Para esse conjunto de estudantes da Engenharia Elétrica, ver e executar as aplicações, por exemplo, de tópicos da disciplina de Álgebra Linear, usando-se programação linear, imbricarão grande fascínio aos discentes, uma vez que, não raramente, costumam ouvir comentários sobre a ausência de aplicações ao dia a dia de tal componente curricular. Evidentemente, não que tenhamos que produzir Matemática puramente pelo seu papel utilitário - se assim o fosse, muitos dos conhecimentos que temos hoje, de fato, não existiriam nem muito menos as descobertas de suas aplicações -, senão que, sempre que possível, materializemos o poder tecnológico da práxis matemática.

Em paralelo, quanto ao Ensino Básico, com o qual também lido, especificamente com o Ensino Médio Integrado a Cursos Técnicos, há tratáveis maneiras de implementar o estudo do algoritmo *Simplex*, claro, inicialmente em abordagem menos densa e progressivamente aprofundada, tal qual realizamos quando lecionamos tópicos de Olimpíadas de Matemática. Dessa forma, através de projetos de pesquisa, bem como de extensão, os espaços para a fomentação da *Pesquisa Operacional* podem ser paulatinamente consumidos. Ademais, em uma rápida busca em plataformas de pesquisa por informações, encontramos diversas experiências exitosas da inserção de estudos introdutórios, intermediários e inicialmente avançados em PO na Educação Básica, no Brasil e no mundo. Em especial, isso se estabeleceu a partir do assunto de Matemática Básica chamado de Sistemas de Equações Lineares, que fornece os alicerces de conhecimento para o tema.

Finalmente, no uso das minhas últimas palavras, estando inteiramente alinhado com o trabalho de pesquisa que deflagramos, enfatizo uma asseveração, proferida e registrada, do maior matemático de todos os tempos, como muitos assim o consideram, Leonhard Euler (1707-1783), qual seja: *Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.*

Referências Bibliográficas

- [1] BALBO, A. R. **O Método Simplex**: teoria e exemplos. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/simplex/teoria/3_simplex. Acesso em: 15 mar. 2023.
- [2] BORGES, A. **Descubra como a Pesquisa Operacional pode ajudar no processo de tomada de decisão**. Disponível em: <https://www.voitto.com.br/blog/artigo/pesquisa-operacional>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- [3] COLLETTE, Y.; SIARRY, P. **Multiobjective optimization**: principles and case studies. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. John Wiley & Sons, 2001.
- [5] EULER, L. **Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**. Lausannae & Genevae: Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio., 1744.
- [6] GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- [7] KANN, Viggo. **On the Approximability of NP-complete Optimization Problems**. Royal Institute of Technology of Sweden, 1992.
- [8] MENDEZ, Abel. **Método Simplex Online**: calculadora para Maximizar y Minimizar (Plan de Mejora). Disponível em: <https://www.plandemejora.com/calculadora-metodo-simplex-online/>. Acesso em: 10 mar. 2023.

- [9] MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- [10] RINGUEST, J. L. **Multiobjective optimization**: behavioral and computational considerations. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] SIDARTA, Instituto. **As abelhas sabem mais sobre matemática do que você imagina**. Disponível em: <https://mentalidadesmatematicas.org.br/abelhas-sabem-matematica/>. Acesso em: 13 jan. 2023.
- [12] WILHELM, V. E.; KLEINA, M. **Pesquisa Operacional**: definições e teoremas. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~volmir/PO_I_04_teoremas_basicos.pdf. Acesso em: 20 mar. 2023.