Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caso Supercrítico da Equação Quase-geostrófica

Virgínia Santos de Jesus

São Cristóvão – SE
Julho de 2023

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caso Supercrítico da Equação Quase-geostrófica

por

Virgínia Santos de Jesus

sob a orientação do

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo

São Cristóvão – SE
Julho de 2023

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

J58c

Jesus, Virgínia Santos de.
Caso supercrítico da equação quase-geostrófica / Virgínia Santos de Jesus ; orientador Wilberclay Gonçalves Melo. – São Cristóvão, SE, 2023.
111 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Fourier, Análise de. 4. Dinâmica dos fluidos. I. Melo, Wilberclay Gonçalves, orient. II. Título.

CDU 532.511

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Caso Supercrítico da Equação Quase-geostrófica

por

Virgínia Santos de Jesus

Aprovada pela banca examinadora:

Wilberclay Goncalves Melo

Prof. Dr. Wilberclay Goncalves Melo - UFS
Orientador

Gerson Cruz Araujo

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo - UFS
Primeiro Examinador

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - UESPI
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Julho de 2023

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marcelo Déda Chagas, s/n - Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887 CEP: 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat@academico.ufs.br

À minha família!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais Ivone e Gilvando, às minhas irmãs Aline e Maria e ao meu sobrinho Gabriel, por me apoiarem incondicionalmente nesta etapa acadêmica. Esta que, sem dúvidas, foi a mais difícil até aqui, não estaria sendo finalizada sem o suporte de vocês.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PROMAT, que fizeram parte da minha formação no Mestrado. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Wilberclay Gonçalves Melo, pela atenção, paciência e apoio dado na elaboração desta dissertação e também no direcionamento da minha trajetória acadêmica no Mestrado.

Agradeço aos meus colegas e amigos do Mestrado e também aos que estão comigo desde a graduação. Em especial a Dilton, Thayane, Jeverson e Rafael, que estiveram por perto nos momentos mais difíceis e nos mais legais.

Agradeço aos professores Gerson Cruz Araujo e Natã Firmino Santana Rocha por aceitarem o convite de compor a banca examinadora do meu trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Em geral, as equações diferenciais parciais de Navier-Stokes são responsáveis por descreverem a dinâmica dos fluidos. Neste sentido, estas mesmas equações constroem modelos capazes de expressar algumas leis físicas de forma matemática. Com isso, destacamos a equação do movimento responsável por descrever a dinâmica dos fluidos geofísicos, a qual denominamos de equação quase-geostrófica. Neste trabalho, investigamos a existência e unicidade de uma solução global no tempo para esta equação, com dissipação supercrítica, em um específico espaço de Sobolev não homogêneo usual. Além disso, estabelecemos o decaimento destas mesmas soluções, quando o tempo tende ao infinito. É importante ressaltar que a obtenção desta solução global é determinada através de um critério de explosão obtido para soluções locais. Para este fim, utilizamos técnicas relacionadas à Análise de Fourier.

Palavras-chave: Equação quase-geostrófica; Critério de explosão; Soluções globais; Decaimento de soluções globais.

Abstract

In general, the Navier-Stokes equations describe the fluid dynamics. In this sense, these same equations represent models capable of expressing some physical laws in a mathematical way. Thereby, we highlight the equation of motion that determine the dynamics of geophysical fluids, which we call quasi-geostrophic equation. In this work, we investigate the existence and uniqueness of a global solution for this equation, with supercritical dissipation, in a specific usual non-homogeneous Sobolev space. Furthermore, we established the decay of this same solution, as time goes to infinity. It is important to point out that to obtain this global solution it is necessary to establish an blow-up criterion obtained for local solutions. For this purpose, we have used techniques related to Fourier Analysis.

Keywords: Quasi-geostrophic equation; Blow-up criterion; Global solutions; Decay of global solutions.

Sumário

Introdução

A mecânica dos fluidos é uma área da Física que estuda fluidos em movimento ou em repouso. Esta mesma é subdividida em duas subáreas denominadas: Hidrostática e Hidrodinâmica. A primeira estuda fluidos em equilíbrio estático, enquanto a segunda, também conhecida por Dinâmica dos Fluidos (ver [24] e referências inclusas para mais detalhes), dedica-se a investigar o comportamento de fluidos que se movimentam em velocidade e/ou aceleração variada.

Conforme [26], desde a pré-história há indícios que as civilizações da época tinham conhecimentos relacionados à Mecânica dos Fluidos, uma vez que tinham navios à vela que funcionavam à remo e possuíam sistema de irrigação. No entanto, as primeiras leis físicas para flutuação de corpos foram formuladas por Arquimedes em (285-212 a.C.).

Segundo [26], até meados do século XIV, não foi registrado nenhum avanço que pudesse ser considerado importante para a Mecânica dos Fluidos. As contribuições mais relevantes foram dadas por Isaac Newton (1642-1684), quando este elaborou suas leis de movimento e a lei de viscosidade de fluidos lineares, sendo estes conhecidos como Newtonianos. Esta descoberta permitiu que problemas envolvendo a quantidade de movimento dos fluidos fossem analisados.

Além disso, essa teoria levava em consideração a hipotése de um fluído “perfeito”. Esta suposição, foi explorada por diversos matemáticos do século XVIII como, por exemplo, Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Estes matemáticos resolveram muitos problemas de escoamento sem atrito. É importante destacar que foi Leonhard Euler quem desenvolveu as equações diferenciais de movimento, as quais são conhecidas por equação de Euler. A seguir, podemos observá-las:

$$u_t + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \text{em } (0,T) \times \Omega,$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ é um tempo fixo e, em adição, u é a velocidade, p é a pressão e ρ é a densidade do fluido.

De acordo com [26], muitos resultados foram formulados considerando a hipótese de fluido "perfeito"(incompressível e com viscosidade nula). Entretando, perceberam que a hipótese adotada tinha uma aplicação limitada na prática. Uma vez que, na Engenharia, os fluidos mais utilizados possuíam efeitos de viscosidade.

Diante disso, conforme [26], outras ciências foram desenvolvidas até que a teoria do escoamento viscoso fosse estabelecida. No entanto, esta só foi explorada por Navier (1785-1896) e Stokes (1819-1903) quando acrescentaram os termos de viscosidade Newtonianos às equações diferenciais de movimento. As equações clássicas resultantes, receberam o nome de equações de Navier-Stokes e estão descritas logo abaixo:

$$\begin{cases} u_t - \mu\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad \text{em } (0,T) \times \Omega; \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } (0,T) \times \Omega; \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad \text{em } \Omega; \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste sistema de equações, em concordância com [1], Ω é um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ a fronteira (suficientemente regular) de Ω e $T > 0$ um tempo fixo. Além disso, f indica a força externa ao fluido, u_0 a velocidade inicial do fluido, enquanto u é a velocidade do fluido. Identificamos p e μ como sendo a pressão do fluido e o coeficiente positivo de viscosidade, respectivamente. Estas equações são conhecidas por descreverem o escoamento de fluidos arbitrários.

Devido à sua relevância e aplicabilidade, em concordância com [23], as equações de Navier-Stokes, consiste em um dos sete problemas do milênio, estabelecidos pelo Instituto de Matemática Clay. O prêmio de um milhão de doláres é oferecido para quem demonstrar a existência ou inexistência de soluções globais no tempo (como também, suas regularidades) para estas equações. O sistema em questão está descrito a seguir:

$$\begin{cases} u_t - \mu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \quad x\in\mathbb{R}^3, t>0; \\ \nabla\cdot u = 0, \quad x\in\mathbb{R}^3, t>0; \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

Em conformidade com [23], por meio das equações de Navier-Stokes derivam-se diversos modelos usados em estudos relacionados à Dinâmica de Fluidos Geofísicos. Tais fluidos são definidos em [23] como sendo os invólucros fluidos de planetas como, por exemplo, a atmosfera, o oceano na Terra e também o fluido ionizado que compõe o núcleo externo da Terra. Alguns modelos matemáticos permitem que estes fluidos sejam estudados, são eles: modelo de água-rasa, modelo quase-geostrófico, modelo quase-geostrófico estratificado, modelo de água-rasa MHD, modelo quase-geostrófico magnetohidrodinâmico, entre outros. O modelo mais importante destes listados é o quase-geostrófico.

Conforme [23], o modelo quase-geostrófico é o mais relevante da dinâmica dos fluidos geofísicos, pois retrata bem a dinâmica dos movimentos em grande escala que ocorrem no oceano e na atmosfera em médias latitudes. Estes movimentos, são chamados ondas de Rossby e são consideradas soluções da equação quase-geostrófica e das equações de água-rasa num plano beta. Tais ondas em questão levam o nome do Meteorologista Carl-Gustaf Rossby (1898-1957), este foi o primeiro a explicar movimentos em grande escala na atmosfera relacionando-os com a Mecânica dos Fluidos.

As ondas de Rossby (também conhecidas por ondas planetárias), de acordo com [21], são caracterizadas por se propagarem no sentido oeste, tanto no oceano quanto na atmosfera. Estas ondas são longas e surgem devido à rotação e o formato do planeta Terra. Segundo [21], essas mesmas ondas tem influência em fenômenos climáticos como o El Ninõ (aquecimento anormal das águas do oceano Pacífico), podendo retardar seus efeitos na circulação oceânica. Isso explica o interesse da comunidade científica sobre estas ondas.

Ainda de acordo com [23], o modelo quase-geostrófico foi executado inicialmente pelo Meteoreologista Jule Charney (1917-1981). Além disso, a equações provenientes deste modelo foram as primeiras a serem solucionadas (numericamente) computacionalmente. Isso foi feito, juntamente com o matemático Jon Von Neumann (1903-1957) e o Meteorologista Ragnar Fjortoff (1913-1998) com o objetivo de fazer uma previsão do tempo.

Nesse sentido, em concordância com [23], a equação quase-geostrófica é importante pois retrata o desenvolvimento das ondas de Rossby, sendo estas dominantes nas escalas dos movimentos que ocorrem nos oceanos e na atmosfera.

Considerando que as equações provenientes do modelo quase-geostrófico descreve o comportamento de fluidos com velocidade de rotação alta, pode-se derivar das equações de Navier-Stokes (1) o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ u_\theta = (\partial_2 |D|^{-1}\theta, -\partial_1 |D|^{-1}\theta), \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2}$$

o qual denominamos de sistema de equações quase-geostróficas. Neste sistema, θ representa a temperatura potencial, u_θ a velocidade do fluido, t a variável temporal, x a variável no plano $\mathbb{R}^2$ e $|D|^{-1}$ o Laplaciano fracionário de ordem $-\frac{1}{2}$. É sabido, a partir da literatura (ver [4, 5, 8, 17–20, 22, 25, 27, 28] e referências inclusas), que a dissipação, dada pelo termo dissipativo $|D|^{2\alpha}\theta$ na primeira equação de (2), é chamada subcrítica, crítica ou supercrítica se $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha < \frac{1}{2}$, respectivamente.

Com relação ao caso subcrítico da equação (2) (e sistemas relacionados como, por exemplo, MHD-β e MHD generalizado), W. G. Melo, T. S. R. Santos [15] mostraram a existência de uma única solução branda e analítica global no tempo (assumindo dado inicial pequeno) para as equações MHD-β e, além disso, este mesmo trabalho apresenta taxas de decaimento (para tempo infinito), desta mesma solução, em espaços de Sobolev usuais e Sobolev-Gevrey (para mais detalhes, ver [15] e referências inclusas). R. H. Guterres, W. G. Melo, N. F. Rocha e T. S. R. Santos [11] comprovaram a existência de soluções locais e globais (esta última, para dado inicial suficientemente pequeno), juntamente com alguns critérios de explosão e estabilidade, respectivamente, para as equações MHD generalizadas em espaços de Sobolev usuais e Sobolev-Gevrey (referimos [11] e referências citadas para mais informações). Com respeito à equação quase-geostrófica (2), ainda no caso subcrítico, vale também lembrar que J. Benameur e M. Blel [3] estabeleceram uma única solução global (também com dado inicial pequeno) que decai a zero, quando o tempo tende a infinito, em espaços de Sobolev homogêneos (ver [3] e referências inclusas para mais pormenores). Em adição, sem considerar que o dado inicial é pequeno, M. Amara e J. Benemeur [2] garantiram a existência de uma solução única e global, trabalhando com o espaço $H^s(\mathbb{R}^2)$, onde $s \in (2-2\alpha, 2)$ (citamos [2] e referências inclusas para mais informações). Por fim, a propósito do caso crítico, gostaríamos de citar o trabalho publicado recentemente por W. G. Melo, N. F. Rocha e N. d. Costa [14], no qual os autores constataram que uma única solução branda global no tempo (considerando que o dado inicial é pequeno) para as equações (2) existe e, ademais, este artigo expõe taxas de decaimento (para tempo arbitrariamente grande), para esta mesma solução, em espaços de Sobolev-Gevrey (para mais esclarecimentos, ver [14] e referências inclusas).

Neste trabalho, assumiremos que $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, ou seja, que a equação quase-geostrófica (2) estudada nesta dissertação é considerada no caso supercrítico. Posto isso, podemos destacar que o objetivo desta dissertação é investigar a existência e unicidade de soluções globais para a equação quase-geostrófica no espaço de Sobolev não homogêneo $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando o dado inicial é suficientemente pequeno, e verificar o decaimento desta mesma solução, quando o tempo tende ao infinito.

Este trabalho foi elaborado através da inspiração gerada por [5] e, além disso, foi dividido em dois capítulos.

Iniciamos o Capítulo 1 com a seção intitulada "Informações Elementares". Nesta seção, apresentamos algumas definições de operadores tais como: divergente e Laplaciano usual. Depois disso, enunciamos um dos teoremas mais importantes da teoria de integração de Lebesgue, chamado Teorema da Convergência Dominada. Feito isso, elencamos alguns resultados oriundos da teoria dos espaços de Lebesgue, sendo eles: duas desigualdade de Minkowski (uma delas relacionada às integrais) e as desigualdades de Young e Hölder. Posto isso, apresentamos algumas informações, imprescindíveis ao nosso trabalho, sobre a transformada de Fourier. Por fim, definimos os espaços de Sobolev não homogêneo e homogêneo. Com isso, relacionamos as normas destes espaços com a norma do espaço de Lebesgue L^2. Na seção nomeada por "Resultados Preliminares", apresentamos alguns lemas técnicos, sendo estes de extrema importância na construção dos resultados principais deste trabalho como, por exemplo, o Lema de Chemin.

No Capítulo 2 concentramos nossos esforços no estudo dos resultados principais desta dissertação. Inicialmente, na seção "Critério de Explosão para Soluções Locais"estabelecemos um critério de explosão para a solução local da equação quase-geostrófica (2), obtida em [19]. Feito isso, na seção "Existência de Soluções Globais"consideramos o dado inicial suficientemente pequeno no espaço de Sobolev não homogêneo $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ e verificamos a existência de uma única solução global no tempo para a equação quase-geostrófica (2). Por conseguinte, a seção "Decaimento de Soluções Globais"estabelece o decaimento desta solução global, quando o tempo tende ao infinito.

Capítulo 1

Prelúdio

Este capítulo é constituído de duas seções, sendo que a primeira delas tem como objetivo apresentar definições e resultados considerados preliminares na elaboração desta dissertação. Para isso, começamos listando algumas informações obtidas nos cursos da Análise Matemática (ver [6, 10, 12, 13] para mais informações) tais como: divergente, Laplaciano usual, convolução, o Teorema da Convergência Dominada, os espaços de Lebesgue L^p e entre outros. Além disso, citamos alguns conceitos e resultados relacionados à transformada de Fourier, entre eles destacamos a Identidade de Plancherel e o Laplaciano fracionário (os dois de grande relevância para o desenvolvimento dos teoremas principais deste trabalho). Para finalizar esta seção, definimos o espaço de Sobolev não homogêneo usual, juntamente com sua norma e seu produto interno e, em seguida, o mesmo é realizado para o espaço de Sobolev homogêneo usual. Por fim, comparamos as normas destes dois espaços. A segunda e última seção, tem como finalidade apresentar os lemas técnicos que são fundamentais na contrução dos resultados principais deste trabalho. Em essência, nestes mesmos lemas estimamos, por exemplo, o produto interno do espaço de Sobolev não homogêneo.

1.1 Informações Elementares

Nesta seção, referenciamos elementos das teorias inerentes aos cursos de Análise Real e da Medida e Integração (para mais detalhes, ver [6, 10, 12, 13] e referências inclusas).

Definição 1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{C}^n$ (ou também $\mathbb{R}^n$) o espaço equipado com o produto interno padrão

$$x \cdot y := x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}. \tag{1.1}$$

Este produto induz uma norma definida por

$$|x| := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \tag{1.2}$$

com $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$. Além disso, tanto o produto interno quanto a norma obdecem a seguinte desigualdade:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \tag{1.3}$$

onde a mesma é denominada Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vale ressaltar que (1.1), (1.2) e (1.3) também são válidas para vetores de $\mathbb{R}^n$.

Logo abaixo, estabelecemos a notação para os campos vetoriais utilizados no nosso trabalho. Além disso, recordaremos o conceito de campo gradiente.

Definição 1.2. Sejam n, m números naturais. Suponha que $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função, isto é,

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), ..., f_m(t, x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

O campo gradiente de f é denotado por ∇f e definido da seguinte forma

$$\nabla f = (\nabla f_1, \nabla f_2, ..., \nabla f_m),$$

onde $\nabla f_j = (D_1 f_j, D_2 f_j, ..., D_n f_j)$, com $j = 1, 2, .., m$ e D_k a derivada parcial de ordem 1, com respeito à k-ésima coordenada, ou ainda, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Feito isso, somos capazes de conceituar o Laplaciano usual de uma função.

Definição 1.3. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Assuma que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função. O Laplaciano usual da função $f = (f_1, ..., f_m)$, denotado por Δf, é definido da seguinte forma:

$$\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, ..., \Delta f_m),$$

onde $\Delta f_j = \sum_{k=1}^{n} D_k^2 f_j$ para $j = 1, ..., m$.

A seguir, definiremos o conceito de uma aplicação escalar denominada divergente.

Definição 1.4. Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função. O divergente de f é definido por

$$\nabla \cdot f = \sum_{k=1}^{n} D_k f_k,$$

onde $f = (f_1, ..., f_n)$.

A equação quase-geostrófica apresenta um termo não linear e este é determinado por uma notação específica, a qual veremos a seguir.

Definição 1.5. Seja $n, k \in \mathbb{N}$. Considere as funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Definimos $f \cdot \nabla g$ por

$$\sum_{i=1}^{n} f_i D_i g,$$

onde $f = (f_1, ..., f_n)$ e $g = (g_1, ..., g_k)$.

Neste trabalho, principalmente nos lemas técnicos, utilizamos o conceito de convolução entre duas aplicações. Para mais detalhes, ver [10, 12, 13] e referências inclusas.

Definição 1.6. Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que f e g são funções definidas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é definida por

$$f * g(x) = \int_{\Omega} f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \Omega,$$

desde que a integral acima exista.

Posto isso, estamos prontos para definir potência e derivada multi-índice. Estes elementos são utéis para estabelecermos os espaços de Schwartz e estudarmos as propriedades da transformada de Fourier (para mais detalhes, ver [10, 12, 13] e referências inclusas).

Definição 1.7. Seja $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Dizemos que a potência multi-índice é o número real

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

A derivada multi-índice de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

A partir de agora, definiremos o espaço de Lebesgue L^p e alguns de seus principais resultados.

Definição 1.8. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $L^p = L^p(X)$ é o espaço de todas as funções f mensuráveis sobre X tais que

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Ademais, L^p é um espaço vetorial equipado da seguinte norma:

$$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_X |f|^p d\mu \Big]^{1/p}.$$

O espaço das funções f mensuráveis sobre X tais que $|f(x)| \leq c$ em quase toda parte de X, para alguma constante real c, é denotado por $L^\infty = L^\infty(X)$. Além disso, o espaço vetorial L^∞ é munido da norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0; |f(x)| \leq c \text{ em quase toda parte de } X\}. \tag{1.4}$$

Para consultar mais informações sobre estas normas, ver [6, 10, 12, 13].

Depois disso, enunciaremos um resultado fundamental da teoria de integração que diz respeito a convergência.

Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^1 que converge em quase toda parte para a função mensurável f. Se existe uma função $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Demonstração. Ver detalhes da demonstração em [10], p. 54. □

O próximo resultado, se refere ao espaço de Lebesgue L^p com uma variável com respeito ao tempo T.

Definição 1.9. Suponha que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço vetorial normado e T um número real positivo. O espaço $L^p([0,T]; X) = L^p_T(X)$, com $1 \leq p < \infty$, é o conjunto das funções mensuráveis $f : [0,T] \to X$ munido com a norma

$$\|f\|_{L^p([0,T];X)} := \left[\int_0^T \|f\|_X^p dt\right]^{1/p} < \infty. \tag{1.5}$$

De maneira análoga, definimos $L^\infty([0,T];X) = L^\infty_T(X)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $f : [0,T] \to X$ tais que $\|f(t)\|_X$ é limitada em quase toda parte de $[0,T]$. Além disso, este espaço é munido da seguinte norma:

$$\|f\|_{L^\infty_T(X)} = \text{supess}\{\|f(t)\|_X : t \in [0,T]\}. \tag{1.6}$$

Analogamente, definimos o conjunto $C([0,T];X) = C_T(X) = \{f : [0,T] \to X \text{ contínua}\}$ equipado com a norma do supremo essencial $\|\cdot\|_{L^\infty_T(X)}$.

Os próximos três resultados são considerados elementares na teoria dos espaços de Lebesgue L^p.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e p e q números reais satisfazendo $1 < p, q < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então, tem-se que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{1.7}$$

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p. 174. □

A partir deste resultado básico, podemos enunciar os teoremas abaixo.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha que $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Considere $p, q \in \mathbb{R}$ são tais que $1 \leq p, q \leq \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então, $fg \in L^1$. Ademais,*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p. 182. □

Teorema 1.4 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Seja $p \in \mathbb{R}$ de modo que $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p$. Então, $f + g \in L^p$. Temos também que*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{1.9}$$

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p. 183. □

Logo abaixo, observaremos uma generalização para a Desigualdade de Minkowski.

Teorema 1.5 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medida* $\sigma-$*finitos. Assuma que* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *é uma função mensurável na* σ*-álgebra produto.*

a) *Se* $f \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, *então*

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

b) *Se* $1 \leq p < \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ *para quase todo* $y \in Y$ *e* $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ *seja uma função em* $L^1(\nu)$, *então* $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ *para quase todo* $x \in X$. *Além disso,* $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ *é uma função no espaço* $L^p(\mu)$, *e*

$$\left\|\int f(\cdot, y)d\nu(y)\right\|_{L^p} \leq \int \|f(\cdot, y)\|_{L^p} d\nu(y).$$

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p.194. □

Agora, estabeleceremos o conceito do espaço de Banach (para mais detalhes, ver [6]).

Definição 1.10. Um espaço normado X é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida por sua própria norma.

A seguir, enunciaremos alguns resultados relacionados a completude dos espaços de Lebesgue L^p.

Teorema 1.6. *Seja* $p \in \mathbb{R}$ *de modo que* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,* L^p *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p. 183. □

No espaço de Lebesgue L^p, ao escolhermos $p = 2$, chegamos a um espaço de Hilbert. Adiante, apresentaremos qual a caracterização de um espaço de Hilbert (ver [6] para mais informações).

Definição 1.11. Seja H um espaço munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert se $(H, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach, onde $\| \cdot \|$ é proviniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sabendo disso, podemos formalizar o resultado abaixo.

Teorema 1.7. *Sejam $f, g \in L^2$. Então,*

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_X f(x)\overline{g(x)}dx$$

define um produto interno em L^2, que produz norma a $\|\cdot\|_{L^2}$ definida previamente. Além disso, temos que L^2 é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10] p. 183. □

Além disso, podemos estabelecer, ainda no espaço de Hilbert, uma caracterização para todos os funcionais lineares contínuos.

Teorema 1.8 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, um funcional linear contínuo. Então, existe um único $v_f \in H$ tal que*

$$f(u) = \langle u, v_f\rangle, \quad \forall u \in H.$$

Além disso, $\|f\| = \|v_f\|$. Aqui $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$.

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração ver [6]. □

Posto isso, apresentaremos um conceito de convergência proveniente de um curso introdutório de Análise Funcional (ver [6] para mais informações).

Definição 1.12. Sejam X um espaço normado e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que x_n converge fracamente para $x \in X$, e escrevemos $x_n \rightharpoonup x$, quando $n \to \infty$, se $f(x_n) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, para todo $f : X \to \mathbb{K}$ funcional linear e contínuo.

Vale lembrar que o limite da convergência fraca é único (ver [6] para mais detalhes desta afirmação).

Vejamos agora o que nos diz o Teorema da diferenciação de Lebesgue.

Teorema 1.9 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$f_\delta(x) = \frac{1}{|B(x,\delta)|}\int_{B(x,\delta)} f(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue usual (ver [10] *para mais informações) e $B(x,\delta)$ é a bola aberta de centro x e raio $\delta > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Então, f_δ converge para f em quase toda parte, quando $\delta \to 0$.*

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [10]. $\square$

Outra definição extremamente importante em um curso de Análise funcional é apresentada abaixo (ver [6] para mais informações).

Definição 1.13. Seja X um espaço normado. Dizemos que X é reflexivo se a aplicação (dita injeção canônica) $j : X \to X''$, dada por $j(x) = j_x$, com $j_x(f) = f(x)$, é bijetiva. Aqui $X' = \{f : X \to \mathbb{K}$ é linear e contínuo$\}$.

O resultado a seguir estabelece uma conexão entre as definições 1.11 e 1.13.

Teorema 1.10. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [6]. $\square$

A seguir, apresentamos um teorema que substitui o famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass da Análise na Reta.

Teorema 1.11. *Toda sequência limitada em um espaço reflexivo admite subsequência que converge fracamente.*

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [6]. $\square$

Agora, vamos estudar alguns conceitos básicos sobre a transformada de Fourier (ver [6, 10, 12, 13] para mais informações).

Definição 1.14. Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que ν, β são n-uplas em $\mathbb{N}^n$. A seminorma $\|\cdot\|_{(\nu,\beta)}$ de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, é definida por

$$\|f\|_{(\nu,\beta)} = \|x^\nu \partial_x^\beta f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\nu \partial_x^\beta f(x)|\}. \tag{1.10}$$

Posto isso, definiremos o espaço de Schwartz.

Definição 1.15. Seja n número natural. Suponha que ν, β são n-uplas em $\mathbb{N}^n$. Dizemos que o conjunto $S(\mathbb{R}^n)$, definido por

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\nu,\beta)} < \infty, \nu, \beta \in \mathbb{N}^n\}, \tag{1.11}$$

é o espaço de Schwartz.

Sabendo disso, estamos prontos para apresentar o conceito de transformada de Fourier sobre o espaço de Schwartz.

Definição 1.16. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

e identificamos i como sendo a unidade imaginária dos números complexos.

O próximo resultado nos certifica que o operador $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ é linear e contínuo, assim como sua inversa.

Teorema 1.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ o operador transformada de Fourier definido por $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$. É verdade que $\mathcal{F}$ é bijetor, linear e contínuo. Além disso, a linearidade e continuidade também se aplicam a sua inversa, a qual denominamos transformada de Fourier inversa, dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} f(x)dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [25]. □

Tendo posto isso, podemos estudar as propriedades do operador transformada de Fourier.

Teorema 1.13. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ e α uma n-upla de $\mathbb{N}^n$. Então, as seguintes informações são verdadeiras:*

i) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

ii) $\mathcal{F}(x^\alpha f(x))(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, \widehat{g} dx$;

iv) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$;

v) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \widehat{f} * \widehat{g}$.

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração, ver [25]. $\square$

O próximo resultado estabelece duas conexões entre uma aplicação e sua transformada de Fourier no espaço de Lebesgue L^2.

Teorema 1.14 (Identidade de Plancherel)**.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$(2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

De modo geral, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos ainda que

$$(2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser consultada em [25]. $\square$

A seguir, apresentaremos o conceito de distribuição temperada, para mais detalhes consultar [10, 25] e referências inclusas.

Definição 1.17. Seja $n \in \mathbb{N}$. A aplicação $\Psi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada se é linear e contínua. Além disso, denominamos $S'(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das distribuições temperadas.

Agora, veremos que é possível estender a ideia da transformada de Fourier relacionado ao espaço das distribuições temperadas.

Definição 1.18. Seja $n \in \mathbb{N}$. Assuma que $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de Ψ é definida por

$$\mathcal{F}(\Psi)(f) = \widehat{\Psi}(f) = \Psi(\widehat{f}), \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.14}$$

Além disso, pode-se verificar que $\mathcal{F}(\Psi) \in S'(\mathbb{R}^n)$, para todo $\Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$. Sabendo disso, o resultado posterior garante que o operador $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ é linear e invertível.

Teorema 1.15. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Assuma que o operador $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, denominado transformada de Fourier é dado por $\mathcal{F}(\Psi) = \widehat{\Psi}$. É verdade que $\mathcal{F}$ é bijetor, linear e contínuo. Além disso, a linearidade e continuidade também é atribuída a sua inversa, a qual denominamos transformada de Fourier inversa, dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\Psi)(f) := \Psi(\mathcal{F}^{-1}(f)), \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n), \tag{1.15}$$

Demonstração. Para consultar detalhes desta demonstração, ver [25]. □

Em seguida, estabeleceremos uma identificação entre os espaços de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$ com o espaço das distribuições temperadas $S'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.16. *Suponha que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p = 1, 2$. Dizemos que a aplicação $T_f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, dada por*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{f(x)}dx, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

é uma distribuição temperada, ou seja, $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Para consultar detalhes da demonstração deste resultado, ver [10, 25]. □

A seguir, estabeleceremos o conceito de um operador utilizado nesta dissertação que faz parte do termo difusivo da equação quase-geostrófica (para mais detalhes, ver [8, 22] e referências inclusas).

Definição 1.19. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assuma que $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. O Laplaciano fracionário de ordem α de f, o qual denotamos por $|D|^\alpha f$, é definido da seguinte forma:

$$\widehat{|D|^\alpha f}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para finalizarmos os tópicos relacionados à transformada de Fourier, apresentaremos o conceito de semigrupo do calor.

Definição 1.20. Seja $n \in \mathbb{N}$. Considere f um funcional em $S'(\mathbb{R}^n)$ e α um número real. Dizemos que o semigrupo do calor $e^{-t|D|^{2\alpha}}$ aplicado em f é definido por

$$e^{-t|D|^{2\alpha}} f = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-t|\xi|^{2\alpha}} \widehat{f}\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

A partir de agora, definiremos os espaços de Sobolev homogêneo e não homogêneo usuais (ver [5,6,17–20] e referências inclusas). Destacamos que são nesses espaços onde buscaremos as soluções para a equação quase-geostrófica.

Para isso, comecemos considerando $s \geq 0$. Com isso, observe que

$$1 + |\xi|^2 \leq 2 \max \left\{1, |\xi|^2\right\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Elevando ambos os lados a s, chegamos a

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^s (\max \left\{1, |\xi|^2\right\})^s \leq 2^s (1 + |\xi|^{2s}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Dessa forma, temos que

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^s (1 + |\xi|^{2s}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{1.16}$$

Agora, perceba que

$$1 \leq 1 + |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

e também que

$$|\xi|^2 \leq 1 + |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Elevando estas duas últimas desigualdades a s e, em seguida, somando seus respectivos resultados, obtemos

$$1 + |\xi|^{2s} \leq 2(1 + |\xi|^2)^s, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{1.17}$$

Assim, por (1.16) e (1.17), inferimos que

$$2^{-s}(1 + |\xi|^2)^s \leq 1 + |\xi|^{2s} \leq 2(1 + |\xi|^2)^s, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $|\widehat{f}(\xi)|^2$, podemos escrever

$$2^{-s}(1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \leq (1 + |\xi|^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 \leq 2(1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Integrando esta expressão sobre $\mathbb{R}^2$, resulta que

$$2^{-s}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2s})|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \leq 2\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi. \tag{1.18}$$

A partir disso, podemos definir o espaço de Sobolev não homogêneo usual como abaixo.

Definição 1.21. Considere $s \geq 0$. Denotamos o espaço de Sobolev não homogêneo por

$$H^s(\mathbb{R}^2) := \{f \in S'(\mathbb{R}^2); \widehat{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2s})|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi < \infty\}.$$

Este espaço é munido da norma

$$\|f\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2s})|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Tal norma é gerada pelo produto interno

$$\langle f,g\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2s})\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

É comum encontrar na literatura o espaço $H^s(\mathbb{R}^2)$ munido da norma definida através da integral

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Esta é equivalente àquela estabelecida na definição 1.21 por causa de (1.18) (para $s \geq 0$).

A seguir, estabelecemos o espaço de Sobolev homogêneo usual.

Definição 1.22. Considere $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev homogêneo é dado por

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^2) := \{f \in S'(\mathbb{R}^2); \widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi < \infty\}.$$

A norma deste espaço é

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Esta norma é gerada pelo produto interno

$$\langle f,g\rangle_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Por meio dessas definições, conseguimos obter uma relação entre as normas dos espaços de Sobolev citados anteriomente com a norma do espaço de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^2)$. Tal relação é dada por

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2s})|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 + \|f\|_{\dot{H}^s}^2.$$

Logo, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), temos que

$$\|f\|_{H^s}^2 = (2\pi)^2\|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{\dot{H}^s}^2. \tag{1.19}$$

Analogamente, deduzimos que

$$\langle f,g\rangle_{H^s} = (2\pi)^2\langle f,g\rangle_{L^2} + \langle f,g\rangle_{\dot{H}^s}. \tag{1.20}$$

Podemos relacionar também as normas dos espaços de Sobolev homogêneos e não homogêneo da seguinte forma:

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2s})|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_{H^s}^2, \quad \forall\, s \geq 0. \tag{1.21}$$

Além disso, pode-se comparar espaços de Sobolev não homogêneo entre si. Para isso, é necessário relacionar seus respectivos parâmetros. Para sermos mais precisos, permita-nos considerar $H^s(\mathbb{R}^2)$ e $H^t(\mathbb{R}^2)$, com $0 \leq s \leq t$. Assim, por (1.17), é verdade que

$$\|f\|_{H^s}^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq 2\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^t|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por (1.16), podemos escrever

$$\|f\|_{H^s}^2 \leq 2^{t+1}\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2t})|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2^{t+1}\|f\|_{H^t}^2.$$

Logo, concluímos que

$$\|f\|_{H^s}^2 \leq 2^{t+1}\|f\|_{H^t}^2, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{1.22}$$

1.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, estabeleceremos algumas ferramentas auxiliares que serão relevantes para a prova dos nossos resultados principais.

Lema 1.1. *Seja $\theta \in S'(\mathbb{R}^2)$. Defina $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta)$. Então, é verdade que*

$$|\widehat{u_\theta}| = |\widehat{\theta}| \quad e \quad \nabla \cdot u_\theta = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\nabla \cdot u_\theta = D_1(D_2|D|^{-1}\theta) + D_2(-D_1|D|^{-1}\theta) = 0.$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\widehat{u_\theta} = \mathcal{F}(D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta) = (\mathcal{F}\{D_2|D|^{-1}\theta\}, -\mathcal{F}\{D_1|D|^{-1}\theta\}).$$

Deste modo, o Teorema 1.13 i) implica que

$$\widehat{u_\theta}(\xi) = ((i\xi)^{(0,1)}\mathcal{F}\{|D|^{-1}\theta(\xi)\}, -(i\xi)^{(1,0)}\mathcal{F}\{|D|^{-1}\theta(\xi)\}).$$

Portanto, aplicando a definição 1.19, conclui-se que

$$\widehat{u_\theta}(\xi) = ((i\xi)^{(0,1)}|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -(i\xi)^{(1,0)}|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi)). \tag{1.23}$$

Usando a definição 1.7, deduzimos que

$$(i\xi)^{(0,1)} = (i\xi_1)^0(i\xi_2)^1 = i\xi_2 \quad \text{e} \quad (i\xi)^{(1,0)} = (i\xi_1)^1(i\xi_2)^0 = i\xi_1. \tag{1.24}$$

Sendo assim, substituindo (1.24) em (1.23), obtemos

$$\widehat{u_\theta}(\xi) = i(\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi)). \tag{1.25}$$

Desta forma, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u_\theta}(\xi)| &= |(\xi_2|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi), -\xi_1|\xi|^{-1}\widehat{\theta}(\xi))| \\
&= \sqrt{(\xi_2^2|\xi|^{-2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2) + (\xi_1^2|\xi|^{-2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2)} \\
&= \sqrt{\frac{\xi_2^2+\xi_1^2}{|\xi|^2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2} = \sqrt{\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2}|\widehat{\theta}(\xi)|^2} \\
&= \sqrt{|\widehat{\theta}(\xi)|^2} = |\widehat{\theta}(\xi)|,
\end{aligned}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$. □

A seguir, estabeleceremos um resultado estudado em um curso introdutório de Análise Funcional (para mais informações, ver [6] e referências inclusas) que será útil no nosso estudo envolvendo um específico critério de explosão para soluções locais da equação quase-geostrófica.

Lema 1.2. *Seja $(H, \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em H tal que $x_n \rightharpoonup x$ em H, quando $n \to \infty$, e $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Demonstração. Por hipotése, tem-se que $x_n \rightharpoonup x$, quando $n \to \infty$ (ver definição 1.12). Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ é limitada e também que

$$\liminf_{n\to\infty} \|\, x_n\| \geq \|\, x\|.$$

Consequentemente, chegamos a

$$\|\, x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\, x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|\, x_n\| \leq \|\, x\|.$$

Isso implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \|\, x_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|\, x_n\| = \|\, x\|.$$

Em consequência disso, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|. \tag{1.26}$$

Observe ainda que, pelo Teorema da Representação de Riez (ver Teorema 1.8), tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2, \tag{1.27}$$

pois $x_n \rightharpoonup x$, quando $n \to \infty$. Sabendo disso, note que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \|x\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, passando ao limite, quando $n \to \infty$, e aplicando (1.26) e (1.27), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

$\square$

Devido à caracterização dada na definição das normas dos espaços de Sobolev que serão os ambientes onde residirão as soluções da equação quase-geostrófica estudada aqui, precisaremos da seguinte desigualdade.

Lema 1.3. *Seja $\sigma \geq 1$. É verdade que*

$$||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| \leq \sigma 2^{\sigma-1}|\xi - \eta|[|\eta|^{\sigma-1} + |\xi - \eta|^{\sigma-1}], \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração. Para demonstrar esta desigualdade, considere a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x^\sigma, \quad \forall x \in [0,\infty).$$

Como f é uma função derivável, pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in [0,\infty)$, existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(\beta x + (1-\beta)y)(x - y). \tag{1.28}$$

No entanto, observe que

$$f'(x) = \sigma x^{\sigma-1}, \quad \forall x \in [0,\infty).$$

Sendo assim, fazendo $x = |\xi|$ e $y = |\eta|$ em (1.28), obtemos

$$|\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma = \sigma[\beta|\xi| + (1-\beta)|\eta|][|\xi| - |\eta|].$$

Aplicando o módulo em ambos os lados da igualdade acima, chegamos a

$$||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| = \sigma|[\beta|\xi| + (1-\beta)|\eta|]^{\sigma-1}|||\xi| - |\eta||.$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} ||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| &\leq \sigma[\beta|\xi - \eta + \eta| + (1-\beta)|\eta|]^{\sigma-1}|\xi - \eta| \\ &\leq \sigma[\beta|\xi - \eta| + \beta|\eta| + |\eta| - \beta|\eta|]^{\sigma-1}|\xi - \eta| \\ &= \sigma[\beta|\xi - \eta| + |\eta||]^{\sigma-1}|\xi - \eta| \\ &\leq \sigma[|\xi - \eta| + |\eta||]^{\sigma-1}|\xi - \eta|, \end{aligned}$$

pois, $\beta \in (0,1)$ e $\sigma \geq 1$. Dessa forma, podemos escrever

$$||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| \leq \sigma[|\xi - \eta| + |\eta||]^{\sigma-1}|\xi - \eta|.$$

Observe ainda que $|\xi - \eta| \leq \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}$ e também $|\eta| \leq \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}$. Sabendo disso, inferimos que

$$\begin{aligned} ||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| &\leq \sigma[\max\{|\xi - \eta|, |\eta|\} + \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}]^{\sigma-1}|\xi - \eta| \\ &= \sigma 2^{\sigma-1} \max\{|\xi - \eta|, |\eta|\}^{\sigma-1}|\xi - \eta| \\ &\leq \sigma 2^{\sigma-1}[|\eta|^{\sigma-1} + |\xi - \eta|^{\sigma-1}]|\xi - \eta|, \end{aligned}$$

já que $\sigma \geq 1$. Em consequência disso, deduzimos que

$$||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma| \leq \sigma 2^{\sigma-1}|\xi - \eta|[|\eta|^{\sigma-1} + |\xi - \eta|^{\sigma-1}].$$

□

Abaixo, apresentamos a prova de um exercício presente em um curso de Análise na Reta. Este será utilizado na prova do nosso critério de explosão para soluções locais da equação quase-geostrófica (ver prova do Teorema 2.1).

Lema 1.4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}^+$, onde $X \subseteq \mathbb{R}$, e defina $\sup f = \sup f(X)$. Então, vale a seguinte igualdade:*

$$[\sup f]^2 = \sup[f^2].$$

Demonstração. Primeiramente, lembre que

$$\sup[f^2] = \sup[f \cdot f] \leq \sup f \cdot \sup f = [\sup f]^2.$$

Dessa forma, temos que $\sup[f^2] \leq [\sup f]^2$. Suponha, por absurdo, que $\sup[f^2] < [\sup f]^2$. Isso é equivalente a $\sqrt{\sup[f^2]} < \sup f$. Assim, dado $\epsilon = \sup f - \sqrt{\sup[f^2]} > 0$, existe $f(t_0) \in f(X)$, com $t_0 \in X$, tal que

$$\sup\, f - \epsilon < f(t_0).$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\sqrt{\sup[f^2]} < f(t_0).$$

Logo, temos que

$$\sup[f^2] < f^2(t_0).$$

Isto é um absurdo! Portanto, a igualdade desejada segue. □

O resultado a seguir será utilizado em vários momentos das provas dos nossos resultados principais. Este é conhecido como Lema de Chemin.

Lema 1.5. *Sejam s_1 e s_2 números reais tais que $s_1 < 1$ e $s_1 + s_2 > 0$. Então, existe uma constante $C_1 = C_1(s_1, s_2)$, tal que para todo $f, g \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^2)$, tem-se que $fg \in \dot{H}^{s_1+s_2-1}(\mathbb{R}^2)$ e*

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-1}} \leq C_1[\|f\|_{\dot{H}^{s_1}}\|g\|_{\dot{H}^{s_2}} + \|f\|_{\dot{H}^{s_2}}\|g\|_{\dot{H}^{s_1}}]. \tag{1.29}$$

Além disso, se também $s_2 < 1$, existe uma constante $C_2 = C_2(s_1, s_2)$ tal que para todo $f \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^2)$ e $g \in \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^2)$, obtém-se $fg \in \dot{H}^{s_1+s_2-1}(\mathbb{R}^2)$ e

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-1}} \leq C_2\|f\|_{\dot{H}^{s_1}}\|g\|_{\dot{H}^{s_2}}. \tag{1.30}$$

Demonstração. Para mais detalhes, ver [7] e [16]. □

O lema a seguir diz respeito à existência de soluções locais para a equação quase-geostrófica

$$\begin{cases} \partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.31}$$

onde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta)$. É importante frisar que, devido à finalidade deste texto (estudar solução global da equação quase-geostrófica e seu comportamento) e à extensão da prova do resultado a seguir, decidimos omitir a prova deste mesmo nesta dissertação.

Lema 1.6. *Seja $\theta^0 \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Então, existem um único instante $T > 0$ e uma única solução local $\theta \in C([0,T]; H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ para (1.31).*

Demonstração. Para mais detalhes, ver [19]. □

Capítulo 2

Explosão da Solução Local para a Equação Quase-Geostrófica

Neste capítulo, utilizaremos a existência de soluções locais, apresentada no Lema 1.6 (para mais detalhes, ver [19]), para o problema de valor inicial relacionado ao caso supercrítico da equação quase-geostrófica

$$\begin{cases} \partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta) \in \mathbb{R}^2$, com o objetivo de estabelecer um critério de explosão para as soluções locais obtidas no Lema 1.6 (demonstrado em [19]). É importante destacar que, as ideias utilizadas nas provas dos resultados deste capítulo foram retiradas de [5].

2.1 Critério de Explosão para Soluções Locais

Nesta seção, trabalharemos com a solução maximal $\theta \in C([0,T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ para a equação quase-geostrófica (3.1), estabelecida a partir do Lema 1.6 (ver [19] para mais informações). Mais especificamente, assumiremos que o tempo maximal T^* de existência de θ

é finito para concluir que

$$\int_0^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau = \infty.$$

Para provar esta igualdade acima, precisaremos de dois lemas auxiliares. O primeiro deles está enunciado e provado logo abaixo.

Lema 2.1. *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e* $\sigma \geq 1$. *Então, existe uma constante* $C(\alpha) > 0$ *tal que, para* $\theta \in \dot{H}^{\sigma+\alpha}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, *temos que*

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq \sigma 2^\sigma C(\alpha) \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}^2.$$

Demonstração. Inicialmente, observe que $\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = 0$. De fato, pelo Lema 1.1, temos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^2} (u_\theta \cdot \nabla\theta)\theta \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\sum_{j=1}^2 u_\theta^j D_j\theta\Big)\theta \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^2 D_j(u_\theta^j\theta)\theta \, d\xi,$$

onde $u_\theta = (u_\theta^1, u_\theta^2)$. Logo, podemos escrever

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j\theta)\theta \, d\xi. \tag{2.2}$$

Por conseguinte, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j\theta)\theta \, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j\theta D_j\theta \, d\xi.$$

Dessa forma, por (2.2), temos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j\theta)\theta \, d\xi = -\sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j\theta D_j\theta \, d\xi = -\sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} (u_\theta^j D_j\theta)\theta \, d\xi.$$

A partir disso, inferimos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = -\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2}.$$

Assim, mostramos o desejado. Em consequência disso, pela relação vista em (1.20), segue que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma} = \langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{\dot{H}^\sigma}.$$

Dessa forma, pela definição de produto interno em $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), escrevemos

$$\begin{aligned}|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{\dot{H}^\sigma}| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\sigma} \widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}(\xi)\, \overline{\widehat{\theta(\xi)}} d\xi \Big| \\ &= \Big| \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma \widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}(\xi)\, \overline{|\xi|^\sigma \widehat{\theta(\xi)}} d\xi \Big| = |\langle \widehat{|D|^\sigma (u_\theta \cdot \nabla\theta)}, \widehat{|D|^\sigma\theta}\rangle_{L^2}|.\end{aligned}$$

Assim, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), deduzimos que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = (2\pi)^2 |\langle |D|^\sigma (u_\theta \cdot \nabla\theta), |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2}|. \tag{2.3}$$

Observe ainda que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} = 0.$$

Com efeito, pela definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7) e Lema 1.1, tem-se que

$$\begin{aligned}\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^2} (u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta])\overline{|D|^\sigma\theta}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\sum_{j=1}^{2} u_\theta^j D_j[|D|^\sigma\theta]\Big)|D|^\sigma\theta\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} D_j(u_\theta^j |D|^\sigma\theta)|D|^\sigma\theta\, d\xi,\end{aligned}$$

desde que θ é real. Com isso, inferimos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j |D|^\sigma\theta)|D|^\sigma\theta\, d\xi. \tag{2.4}$$

Deste modo, podemos perceber o seguinte:

$$\int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j |D|^\sigma\theta)|D|^\sigma\theta\, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j |D|^\sigma\theta D_j[|D|^\sigma\theta]\, d\xi.$$

Posto isso, aplicando (2.4), segue que

$$\begin{aligned}\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} D_j(u_\theta^j|D|^\sigma\theta)|D|^\sigma\theta\, d\xi = -\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j|D|^\sigma\theta D_j[|D|^\sigma\theta]\, d\xi\\ &= -\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j D_j[|D|^\sigma\theta]|D|^\sigma\theta\, d\xi = -\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j D_j[|D|^\sigma\theta]\overline{|D|^\sigma\theta}\, d\xi,\end{aligned}$$

já que θ é real. Por isso, é possível escrever

$$\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} = -\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2}.$$

Logo, isso implica que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} = 0. \tag{2.5}$$

Usando este fato, podemos reescrever (2.3) da seguinte forma:

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = (2\pi)^2|\langle |D|^\sigma(u_\theta \cdot \nabla\theta), |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2} - \langle u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta], |D|^\sigma\theta\rangle_{L^2}|.$$

Usando novamente a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) na igualdade acima, chegamos a

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = (2\pi)^2|(2\pi)^{-2}\langle \widehat{|D|^\sigma(u_\theta \cdot \nabla\theta)}, \widehat{|D|^\sigma\theta}\rangle_{L^2} - (2\pi)^{-2}\langle \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma\theta]}, \widehat{|D|^\sigma\theta}\rangle_{L^2}|.$$

Dessa forma, pela definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), temos que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\sigma(u_\theta \cdot \nabla\theta)}\overline{\widehat{|D|^\sigma\theta}}\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot [\nabla|D|^\sigma\theta]}\overline{\widehat{|D|^\sigma\theta}}\, d\xi\right|. \tag{2.6}$$

Agora, vamos resolver as integrais acima separadamente. Assim, por definição do Laplaciano fracionário (ver definição 1.19), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\sigma(u_\theta \cdot \nabla\theta)}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\sigma\theta}(\xi)}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma\widehat{(u_\theta \cdot \nabla\theta)}\overline{|\xi|^\sigma\widehat{\theta}(\xi)}\, d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j=1}^{2} |\xi|^\sigma\widehat{(u_\theta^j D_j\theta)}\overline{|\xi|^\sigma\widehat{\theta}(\xi)} d\xi\\ &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma\widehat{(u_\theta^j D_j\theta)}\overline{|\xi|^\sigma\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.\end{aligned}$$

Usando as propriedades de transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\sigma (u_\theta \cdot \nabla\theta)}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma [\widehat{u_\theta^j} * \widehat{D_j \theta}](\xi) |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Pela definição de convolução (ver definição 1.6), chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\sigma (u_\theta \cdot \nabla\theta)}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta^j}(\xi - \eta) \widehat{D_j \theta}(\eta) d\eta |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Desse modo, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\sigma (u_\theta \cdot \nabla\theta)}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\sigma [\widehat{u_\theta}(\xi - \eta) \cdot \widehat{\nabla\theta}(\eta)] d\eta |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi. \quad (2.7)$$

Na segunda integral de (2.6), analogamente ao que foi feito acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma \theta]}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} \widehat{u_\theta^j D_j[|D|^\sigma \theta]} |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi \\ &= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta^j D_j[|D|^\sigma \theta]} |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma \theta]}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\widehat{u_\theta^j} * \widehat{D_j[|D|^\sigma \theta]})(\xi) |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Fazendo uso da definição de convolução novamente (ver definição 1.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma \theta]}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta^j}(\xi - \eta) \widehat{D_j[|D|^\sigma \theta]}(\eta) d\eta |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Em consequência disso, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla |D|^\sigma \theta}(\xi) \overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta^j}(\xi - \eta) \widehat{|D|^\sigma [D_j \theta]}(\eta) d\eta |\xi|^\sigma \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Novamente, pela definição do Laplaciano fracionário (ver definição 1.19), tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta^j}(\xi-\eta)|\eta|^\sigma \widehat{D_j\theta}(\eta)d\eta|\xi|^\sigma\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Por fim, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta \cdot \nabla[|D|^\sigma \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\sigma \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\theta}(\xi-\eta)\cdot[|\eta|^\sigma \widehat{\nabla\theta}(\eta)]d\eta|\xi|^\sigma\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6), notamos que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| = (2\pi)^{-2}\Big|\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}[|\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma][\widehat{u_\theta}(\xi-\eta)\cdot\widehat{\nabla\theta}(\eta)]d\eta|\xi|^\sigma\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi\Big|.$$

Portanto, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, é verdade que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \le (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}||\xi|^\sigma - |\eta|^\sigma||\widehat{u_\theta}(\xi-\eta)||\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.$$

Assim, pelo Lema 1.3 (lembre que $\sigma \ge 1$), podemos escrever

$$\begin{aligned}|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \le{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^\sigma|\widehat{u_\theta}(\xi-\eta)||\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi\\ &+ (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{u_\theta}(\xi-\eta)||\eta|^{\sigma-1}|\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1 e o Teorema 1.13 na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \le{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi\\ &+ (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Reescrevendo a desigualdade acima, percebemos que

$$\begin{aligned}|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \le{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^\sigma|\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^{\sigma+\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi\\ &+ (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^{\sigma+\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Com isso, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), inferimos que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(\sigma+\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+(2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(\sigma+\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Desse modo, note que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}} \\
&+(2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{\theta}(\xi-\eta)||\eta|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Sabendo disso, definimos as seguintes aplicações:

$$
\widehat{f}(\xi) = |\xi||\widehat{\theta}(\xi)| \ \text{ e } \ \widehat{g}(\xi) = |\xi|^{\sigma}|\widehat{\theta}(\xi)|.
$$

Fazendo a substituição na última desigualdade, segue que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{g}(\xi-\eta)\widehat{f}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}} \\
&+(2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Utilizando mais uma vez a definição de convolução (ver definição 1.6), resulta que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{g}*\widehat{f})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}} \\
&+(2\pi)^{-2}\sigma 2^{\sigma-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando as propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), conseguimos escrever

$$
|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq \sigma 2^{\sigma}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{fg}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}.
$$

Diante disso, é possivel constatar que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq \sigma 2^\sigma \|fg\|_{\dot{H}^{-\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}. \tag{2.9}$$

Agora, denote $s_1 = 1 - 2\alpha$ e $s_2 = \alpha$. Observe que, $s_1 < 1$, dado que $\alpha > 0$. Além disso, $s_2 < 1$ e $s_1 + s_2 = 1 - \alpha > 0$, pois $\alpha < 1$. Nestas condições, aplicando o Lema 1.5 em (2.9) inferimos que

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq \sigma 2^\sigma C(\alpha) \|f\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} \|g\|_{\dot{H}^{\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}. \tag{2.10}$$

Posto isso, pela definição de norma em $\dot{H}^{1-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), podemos escrever

$$\|f\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-2\alpha)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-2\alpha)} ||\xi|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Reescrevendo a igualdade acima, obtemos

$$\|f\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)} |\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\|g\|_{\dot{H}^{\alpha}} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha} ||\xi|^\sigma \widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(\sigma+\alpha)} |\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\|g\|_{\dot{H}^{\alpha}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}$$

Substituindo as normas de f e g em (2.10), chegamos a

$$|\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\sigma}| \leq \sigma 2^\sigma C(\alpha) \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \|\theta\|^2_{\dot{H}^{\sigma+\alpha}}.$$

□

Precisaremos de outro lema auxiliar para mostrar que uma solução maximal $\theta \in C([0, T^*),$ $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ (com T^* finito) para a equação quase-geostrófica (3.1), obtida por [19] (ver Lema

1.6), deve satisfazer o seguinte critério de explosão:

$$\int_0^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau = \infty.$$

Lema 2.2. *Sejam $0 < \alpha \leq 1/2$ e $\theta, \omega \in H^{2-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Então, existe uma constante positiva $C(\alpha)$ tal que as seguintes afirmações são válidas:*

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| \leq C(\alpha)\|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \tag{2.11}$$

e também

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| \leq C(\alpha)\|\omega\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2. \tag{2.12}$$

Demonstração. Inicialmente, assuma que $\delta = 2 - 2\alpha$ (note que $\delta \in [1, 2)$).

Comecemos com a prova de (2.11). Deste modo, aplique o Lema 1.1 para obter

$$\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = 0.$$

Conforme discutimos na demonstração do Lema 2.1, e observando (1.20), temos que

$$\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta} = \langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{\dot{H}^\delta}.$$

Com isso, pela definição de produto interno em $\dot{H}^\delta(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), escrevemos

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| = |\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{\dot{H}^\delta}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\delta}\widehat{u_\omega \cdot \nabla\theta}(\xi)\,\overline{\widehat{\theta(\xi)}}d\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{\delta}\widehat{u_\omega \cdot \nabla\theta}(\xi)\,\overline{|\xi|^\delta\widehat{\theta(\xi)}}d\xi\right| = |\langle \widehat{|D|^\delta(u_\omega \cdot \nabla\theta)}, \widehat{|D|^\delta\theta}\rangle_{L^2}|.\end{aligned}$$

Usando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| = (2\pi)^2|\langle |D|^\delta(u_\omega \cdot \nabla\theta), |D|^\delta\theta\rangle_{L^2}|. \tag{2.13}$$

Como feito na demonstração do Lema 2.1, é verdade que

$$\langle u_\omega.\nabla[|D|^\delta\theta], |D|^\delta\theta\rangle_{L^2} = 0.$$

(Ver (2.5) para mais detalhes). Por isso, podemos escrever a igualdade (2.13) da seguinte forma:

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| = (2\pi)^2 |\langle |D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta), |D|^\delta\theta\rangle_{L^2} - \langle u_\omega . \nabla[|D|^\delta\theta], |D|^\delta\theta\rangle_{L^2}|.$$

Assim, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), chegamos a

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| = |\langle \widehat{|D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta)}, \widehat{|D|^\delta\theta}\rangle_{L^2} - \langle \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta\theta]}, \widehat{|D|^\delta\theta}\rangle_{L^2}|.$$

Por definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), segue que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| = \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta)}\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}}\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta\theta]}\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}}\, d\xi \Big|. \tag{2.14}$$

Agora, estudaremos as integrais apresentadas na igualdade acima. Usando a definição do Laplaciano fracionário (ver definição 1.19), escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta)}(\xi)\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}(\xi)}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\delta \widehat{(u_\omega \cdot \nabla\theta)}\, \overline{|\xi|^\delta \widehat{\theta}(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} |\xi|^\delta \widehat{(u_\omega^j D_j\theta)} |\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\delta \widehat{(u_\omega^j D_j\theta)} |\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.
\end{aligned}$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta)}(\xi)\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\delta (\widehat{u_\omega^j} * \widehat{D_j\theta})(\xi) |\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Fazendo uso definição de convolução (ver definição 1.6), chegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\delta (u_\omega \cdot \nabla\theta)}(\xi)\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega^j}(\xi - \eta) \widehat{D_j\theta}(\eta) d\eta |\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi.$$

Com isso, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^\delta (u_\theta \cdot \nabla\theta)}(\xi)\, \overline{\widehat{|D|^\delta\theta}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\delta [\widehat{u_\omega}(\xi - \eta) \cdot \widehat{\nabla\theta}(\eta)] d\eta |\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)} d\xi. \tag{2.15}$$

Na segunda integral de (2.14), é verdade que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} \widehat{u_\omega^j D_j[|D|^\delta \theta]}|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi$$
$$= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega^j D_j[|D|^\delta \theta]}|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Utilizando as propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), deduzimos o seguinte:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\widehat{u_\omega^j} * \widehat{D_j[|D|^\delta \theta]})(\xi)|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Pela definição de convolução (ver definição 1.6), percebemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega^j}(\xi-\eta)\widehat{D_j[|D|^\delta \theta]}(\eta)d\eta|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Consequentemente, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega^j}(\xi-\eta)\widehat{|D|^\delta[D_j \theta]}(\eta)d\eta|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Utilizando mais uma vez a definição do Laplaciano fracionário (ver definição 1.19), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega^j}(\xi-\eta)|\eta|^\delta \widehat{D_j \theta}(\eta)d\eta|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi.$$

Dessa forma, podemos inferir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega \cdot \nabla[|D|^\delta \theta]}(\xi)\overline{\widehat{|D|^\delta \theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u_\omega}(\xi-\eta) \cdot [|\eta|^\delta \widehat{\nabla\theta}(\eta)]d\eta|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), obtemos

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta \rangle_{H^\delta}| = (2\pi)^{-2} \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\xi|^\delta - |\eta|^\delta][\widehat{u_\omega}(\xi-\eta) \cdot \widehat{\nabla\theta}(\eta)]d\eta|\xi|^\delta \overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi \Big|.$$

Com isso, deduzimos que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^\delta - |\eta|^\delta||\widehat{u_\omega}(\xi-\eta)||\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\delta|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.$$

Com isso, pelo Lema 1.3, inferimos que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^\delta|\widehat{u_\omega}(\xi-\eta)||\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\delta|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi \\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta||\widehat{u_\omega}(\xi-\eta)||\eta|^{\delta-1}|\widehat{\nabla\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\delta|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi,\end{aligned}$$

pois $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Usando o Lema 1.1 e o Teorema 1.13, podemos escrever

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^\delta|\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\delta|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi \\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta||\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta|^{\delta}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^\delta|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Escrevendo de outro modo a desigualdade acima, notamos que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^\delta|\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^{\delta+\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi \\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1} \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta||\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta|^{\delta}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta|\xi|^{\delta+\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

Com isso, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), inferimos que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{}& (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^\delta|\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\times\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(\delta+\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta||\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta|^\delta|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\times\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(\delta+\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^\delta}| &\leq (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta|^{\delta}|\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}\\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\xi-\eta||\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta|^{\delta}|\widehat{\theta}(\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, defina as seguintes aplicações:

$$\widehat{f_2}(\xi)=|\xi|^{\delta}|\widehat{\omega}(\xi)|,\ \widehat{g_2}(\xi)=|\xi||\widehat{\theta}(\xi)|$$

e também

$$\widehat{f_3}(\xi)=|\xi||\widehat{\omega}(\xi)|,\ \widehat{g_3}(\xi)=|\xi|^{\delta}|\widehat{\theta}(\xi)|.$$

Substituindo essas funções em (2.17), conclui-se que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^\delta}| &\leq (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{f_2}(\xi-\eta)\widehat{g_2}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}\\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{f_3}(\xi-\eta)\widehat{g_3}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.\end{aligned}$$

Usando a definição de convolução (ver definição 1.6), escrevemos

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^\delta}| &\leq (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{f_2}*\widehat{g_2})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}\\ &+ (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{f_3}*\widehat{g_3})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.\end{aligned}$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), segue que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^\delta}| &\leq \delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{f_2 g_2}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}\\ &+ \delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{-2\alpha}|\widehat{f_3 g_3}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.\end{aligned}$$

Logo, percebemos que

$$|\langle u_\omega\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^\delta}| \leq \delta 2^{\delta-1}[\|f_2 g_2\|_{\dot{H}^{-\alpha}}+\|f_3 g_3\|_{\dot{H}^{-\alpha}}]\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}. \tag{2.18}$$

Agora, para aplicar o Lema 1.5, defina os seguintes valores relacionados à $\|f_2 g_2\|_{\dot{H}^{-\alpha}}$ e

$\|f_3 g_3\|_{\dot{H}^{-\alpha}}$, respectivamente:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha \\ s_2 = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

e também

$$\begin{cases} p_1 = 1 - \alpha \\ p_2 = 0. \end{cases}$$

Na primeira lista de valores acima, note que $s_1 < 1$ e $s_2 < 1$, posto que $0 < \alpha < 1$. Além disso, podemos concluir que $s_1 + s_2 = 1 - \alpha > 0$, pois $\alpha < 1$. Já na segunda lista, perceba que $p_1 < 1$, dado que $\alpha > 0$ e, claramente, $p_2 < 1$. Por fim, $p_1 + p_2 = 1 - \alpha > 0$, dado que $\alpha < 1$. Dessa forma, pelo Lema 1.5, temos que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq \delta 2^{\delta-1} C(\alpha)[\|f_2\|_{\dot{H}^\alpha}\|g_2\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} + \|f_3\|_{\dot{H}^{1-\alpha}}\|g_3\|_{\dot{H}^0}]\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}, \tag{2.19}$$

desde que $\delta = 2 - 2\alpha$. Analisando cada norma do lado direito da desigualdade acima, percebemos que

$$\|f_2\|_{\dot{H}^\alpha} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}|\widehat{f_2}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(\alpha+\delta)}|\widehat{\omega}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \|\omega\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.$$

Usando o fato que $\delta = 2 - 2\alpha$, segue que

$$\|f_2\|_{\dot{H}^\alpha} = \|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}.$$

Além disso, observe que

$$\|g_2\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-2\alpha)}|\widehat{g_2}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}.$$

Temos ainda que

$$\|f_3\|_{\dot{H}^{1-\alpha}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-\alpha)}|\widehat{f_3}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)}|\widehat{\omega}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} = \|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}.$$

Por fim, vale também que

$$\|g_3\|_{\dot{H}^0} = \Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^0 |\widehat{g_3}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)} |\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}},$$

porque $\delta = 2 - 2\alpha$. Substituindo todas essas normas em (2.19), obtemos

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq \delta 2^{\delta-1} C(\alpha)[\|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} + \|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}] \|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}.$$

Dessa forma, deduzimos que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq \delta 2^{\delta} C(\alpha) \|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}.$$

Portanto, denotando $C(\alpha)$ ao invés de $\delta 2^\delta C(\alpha)$ (lembre que $\delta = 2 - 2\alpha$), concluímos que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| \leq C(\alpha) \|\omega\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}.$$

Isto prova a desigualdade (2.11).

Agora, provaremos (2.12). Esta prova é semelhante ao que foi feito em (2.11). Por isso, permita-nos omitir alguns detalhes. Comecemos, então, observando que

$$\begin{aligned}|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{}& (2\pi)^{-2} \delta 2^{\delta-1} \Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^\delta |\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta||\widehat{\theta}(\eta)| d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}} \\ &+ (2\pi)^{-2} \delta 2^{\delta-1} \Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta||\widehat{\omega}(\xi-\eta)||\eta|^\delta |\widehat{\theta}(\eta)| d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}},\end{aligned} \tag{2.20}$$

ver (2.17) para mais detalhes (lembre que $\delta = 2 - 2\alpha$). Sabendo disso, defina as sequintes aplicações:

$$\widehat{f_4}(\xi) = |\xi|^\delta |\widehat{\omega}(\xi)|, \;\; \widehat{g_4}(\xi) = |\xi||\widehat{\theta}(\xi)|$$

e também

$$\widehat{f_5}(\xi) = |\xi||\widehat{\omega}(\xi)|, \;\; \widehat{g_5}(\xi) = |\xi|^\delta |\widehat{\theta}(\xi)|.$$

Fazendo as devidas substituições em (2.20), obtemos

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{} & (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f_4}(\xi-\eta)\widehat{g_4}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}} \\
& + (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f_5}(\xi-\eta)\widehat{g_5}(\eta)d\eta\Big)^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Pela definição de convolução (ver definição 1.6), escrevemos

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{} & (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{f_4} * \widehat{g_4})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}} \\
& + (2\pi)^{-2}\delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}[(\widehat{f_5} * \widehat{g_5})(\xi)]^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Utilizando as propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), segue que

$$
\begin{aligned}
|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq{} & \delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}|\widehat{f_4 g_4}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}} \\
& + \delta 2^{\delta-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\alpha}|\widehat{f_5 g_5}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Com isso, notamos que

$$
|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \leq \delta 2^{\delta-1}[\|f_4 g_4\|_{\dot{H}^{-\alpha}} + \|f_5 g_5\|_{\dot{H}^{-\alpha}}]\|\theta\|_{\dot{H}^{\delta+\alpha}}. \tag{2.21}
$$

Agora, para aplicar o Lema 1.5, defina os seguintes valores relacionados à $\|f_4 g_4\|_{\dot{H}^{-\alpha}}$ e $\|f_5 g_5\|_{\dot{H}^{-\alpha}}$, respectivamente:

$$
\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 1-\alpha \end{cases}
$$

e também

$$
\begin{cases} p_1 = 1-2\alpha \\ p_2 = \alpha. \end{cases}
$$

Na primeira lista de valores, observe que $s_1 < 1$. Além disso, $s_2 < 1$, pois $\alpha > 0$. Diante disso, podemos concluir que $s_1 + s_2 = 1-\alpha > 0$, dado que $\alpha < 1$. Já na segunda lista, podemos notar que $p_1 < 1$, já que $\alpha > 0$. Além do mais, $p_1 + p_2 = 1 - \alpha > 0$ e $p_2 < 1$, pelo fato de $\alpha < 1$. Assim, pelo Lema 1.5, segue que

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \le \delta 2^{\delta-1} C(\alpha)[\|f_4\|_{\dot H^0}\|g_4\|_{\dot H^{1-\alpha}} + \|f_5\|_{\dot H^{1-2\alpha}}\|g_5\|_{\dot H^\alpha}]\|\theta\|_{\dot H^{2-\alpha}}, \tag{2.22}$$

pois $\delta = 2 - 2\alpha$. Dessa forma, temos que

$$\|f_4\|_{\dot H^0} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f_4}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\delta}|\widehat{\omega}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \|\omega\|_{\dot H^\delta} = \|\omega\|_{\dot H^{2-2\alpha}}.$$

Note ainda que

$$\|g_4\|_{\dot H^{1-\alpha}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-\alpha)}|\widehat{g_4}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \|\theta\|_{\dot H^{2-\alpha}}.$$

Perceba também que

$$\|f_5\|_{\dot H^{1-2\alpha}} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(1-2\alpha)}|\widehat{f_5}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)}|\widehat{\omega}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \|\omega\|_{\dot H^{2-2\alpha}}.$$

Para finalizar, observamos que

$$\|g_5\|_{\dot H^\alpha} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}|\widehat{g_5}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac12} = \|\theta\|_{\dot H^{2-\alpha}},$$

porque $\delta = 2 - 2\alpha$. Substituindo essas normas em (2.22), obtemos

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^\delta}| \le \delta 2^\delta C(\alpha)\|\omega\|_{\dot H^{2-2\alpha}}\|\theta\|^2_{\dot H^{2-\alpha}}.$$

Sendo assim, denotando por $C(\alpha)$ a constante $\delta 2^\delta C_2$ (lembre que $\delta = 2 - 2\alpha$), chegamos a

$$|\langle u_\omega \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| \le C(\alpha)\|\omega\|_{\dot H^{2-2\alpha}}\|\theta\|^2_{\dot H^{2-\alpha}}.$$

Isto prova (2.12). $\square$

O próximo resultado diz respeito a um critério de explosão para as soluções locais da equação quase-geostrófica (3.1), obtidas por [19] (ver Lema 1.6). Mais precisamente, admitimos que o tempo maximal de existência da solução local para (3.1) é finito para determinar esta condição.

Teorema 2.1. *Seja $\theta \in C([0, T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ uma solução maximal de (3.1) (dada no Lema*

1.6, *ver também* [19]), *onde* T^* *é o tempo maximal de existência de* θ. *Se* $T^* < \infty$, *então*

$$\int_0^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau = \infty.$$

Demonstração. Realizaremos a prova deste resultado em três passos, supondo, por absurdo, que $\theta \in C([0,T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ é uma solução maximal do sistema (3.1), $T^* < \infty$ e

$$\int_0^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau < \infty. \tag{2.23}$$

Passo 1: Mostraremos que $\theta(t)$ é limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in [0, T^*)$.

Devido à (2.23) (ver Teorema 1.9), considere o tempo $t^0 \in (0, T^*)$ tal que

$$\int_{t^0}^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau < \frac{1}{2C(\alpha)}, \tag{2.24}$$

onde $C(\alpha) > 0$ é dado no Lema 2.2 (note que $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ em (3.1)). A primeira equação do sistema (3.1) nos diz que

$$\partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Em consequência disso, temos que

$$\partial_t \theta = -|D|^{2\alpha}\theta - u_\theta \cdot \nabla\theta. \tag{2.25}$$

Sabendo disso, observe que

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 = \frac{d}{dt}\langle \theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} = 2\mathrm{Re}\,[\langle \theta, \partial_t\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}],$$

onde $\mathrm{Re}\,[z]$ representa a parte real do número complexo z. Reescrevendo, chegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 = \mathrm{Re}\,[\langle \theta, \partial_t\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}].$$

Substituindo (2.25) na igualdade acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 = \mathrm{Re}\,[\langle \theta, -|D|^{2\alpha}\theta - u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}].$$

Por propriedade de produto interno, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} = -\mathrm{Re}\,[\langle \theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}] - \mathrm{Re}\,[\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}]. \tag{2.26}$$

Agora vamos analisar os termos do lado direito da igualdade acima. Assim, novamente pela definição de produto interno em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.21), infere-se que

$$\begin{aligned}
\langle \theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})\widehat{\theta}(\xi)\overline{\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})\widehat{\theta}(\xi)\overline{|\xi|^{2\alpha}\widehat{\theta}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})\widehat{\theta}(\xi)|\xi|^{2\alpha}\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})|\widehat{|D|^{\alpha}\theta}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Logo, pela definição da norma em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.21), segue que

$$\langle \theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} = \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}.$$

Usando este fato em (2.26), inferimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} = -\mathrm{Re}\,[\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}].$$

Dessa forma, podemos deduzir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|.$$

Assim, integrando a desigualdade acima sobre $[t^0, s]$ (com $t^0 \leq s \leq t < T^*$), tem-se

$$\int_{t^0}^{s} \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau + \int_{t^0}^{s} \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \int_{t^0}^{s} |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, concluímos que

$$\frac{1}{2}\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\Big|_{t^0}^{s} + \int_{t^0}^{s} \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \int_{t^0}^{s} |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Fazendo as devidas substituições, chegamos a

$$\frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} - \frac{1}{2}\|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \int_{t^0}^{s} \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \int_{t^0}^{s} |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Com isso, inferimos que

$$\frac{1}{2}\|\theta(s)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + \int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \le \frac{1}{2}\|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + \int_{t^0}^{s} |\langle u_\theta\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| d\tau.$$

Consequentemente, deduzimos que

$$\|\theta(s)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \le \|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_{t^0}^{s} |\langle u_\theta\cdot\nabla\theta,\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}| d\tau.$$

Aplicando (2.11) (ver Lema 2.2) na integral do lado direito da desigualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\theta(s)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau &\le \|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2C(\alpha)\int_{t^0}^{s} \|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 d\tau \\
&\le \|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2C(\alpha)\int_{t^0}^{s} \sup_{\tau\in[t^0,s]}\{\|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 d\tau \\
&\le \|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2C(\alpha)\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\}\int_{t^0}^{s} \|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 d\tau. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Por outro lado, é verdade que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \le \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2.$$

Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)}||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \le \int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{|D|^\alpha\theta}(\xi)|^2 d\xi = \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2.
\end{aligned}$$

Usando esta informação e que $s < T^*$ em (2.27), escrevemos

$$\begin{aligned}
\|\theta(s)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau &\le \|\theta(t^0)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 \\
&+ 2C(\alpha)\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\}\int_{t^0}^{T^*} \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Dessa forma, por (2.24) e (1.21), segue que

$$\begin{aligned}\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau &\leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2C(\alpha)\frac{1}{2C(\alpha)} \sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\} \\ &= \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\} \\ &\leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\},\end{aligned}$$

já que $2-2\alpha \geq 0$. Logo, podemos escrever

$$\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_{t^0}^{s} \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\}.$$

Em consequência disso, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\}.$$

Pela Desigualdade de Young (ver Teorema 1.2), tem-se que

$$\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{(\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\})^2}{2}.$$

Com isso, pelo Lema 1.4, chegamos a

$$\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\}, \quad \forall s \in [t^0, t].$$

Observe que, os termos do lado direito da desigualdade acima não dependem de s. Por este motivo, podemos concluir que tal expressão é cota superior para $\{\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} : s \in [t^0, t]\}$. Sendo assim, passando ao supremo, quando $s \in [t^0, t]$, obtemos

$$\sup_{s\in[t^0,t]}\{\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\} \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\}.$$

Isso implica que

$$\frac{1}{2}\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\} \leq \|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \frac{1}{2}.$$

Logo, podemos inferir que

$$\sup_{\tau\in[t^0,t]}\{\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}\} \leq 2\|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 1.$$

A partir disso, deduzimos que

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq 2\|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 1, \quad \forall t \in [t^0, T^*).$$

Denotando

$$N = \sqrt{2\|\theta(t^0)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 1} \text{ e } M = \max\{N, \sup_{\tau\in[0,t^0]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\}\}$$

(observe que $\sup_{\tau\in[0,t^0]}\{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\}$ existe, pois $\theta \in C([0,t^0], H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)))$, concluímos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq M, \quad \forall t \in [0, T^*). \tag{2.28}$$

Portanto, $\theta(t)$ é limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in [0, T^*)$.

Passo 2: Nesta etapa, mostraremos que $\lim\limits_{t\nearrow T^*} \|\theta(t) - \theta^*\|_{L^2} = 0$, para algum $\theta^* \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

Para isso, iniciaremos considerando uma sequência $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, T^*)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = T^*$. Sendo assim, lembrando que a primeira equação do sistema (3.1) nos informa que

$$\partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Integrando a equação acima sobre $[0, \tau_n]$, obtemos

$$\int_0^{\tau_n} \partial_\tau\theta d\tau + \int_0^{\tau_n} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_0^{\tau_n} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$\theta(\tau_n) - \theta^0 + \int_0^{\tau_n} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_0^{\tau_n} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau = 0.$$

Logo, temos que

$$\theta(\tau_n) = \theta^0 - \int_0^{\tau_n} |D|^{2\alpha}\theta d\tau - \int_0^{\tau_n} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau. \tag{2.29}$$

Analogamente, chegamos a

$$\theta(\tau_m) = \theta^0 - \int_0^{\tau_m} |D|^{2\alpha}\theta d\tau - \int_0^{\tau_m} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau. \tag{2.30}$$

Subtraindo (2.30) de (2.29), inferimos que

$$\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m) = -\int_0^{\tau_n} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_0^{\tau_m} |D|^{2\alpha}\theta d\tau - \int_0^{\tau_n} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau + \int_0^{\tau_m} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau.$$

Usando as propriedades de integral, conseguimos escrever

$$\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m) = \int_{\tau_n}^{0} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_0^{\tau_m} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_{\tau_n}^{0} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau + \int_0^{\tau_m} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau.$$

Com isso, temos que

$$\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m) = \int_{\tau_n}^{\tau_m} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_m} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau.$$

Aplicando a norma $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8) em ambos os lados da igualdade acima, tem-se que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} = \left\| \int_{\tau_n}^{\tau_m} |D|^{2\alpha}\theta d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_m} u_\theta \cdot \nabla\theta d\tau \right\|_{L^2} \leq \int_{\tau_n}^{\tau_m} \||D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} d\tau.$$

Pela Desigualdade de Minkowski (ver Teorema 1.4), segue que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq \int_{\tau_n}^{\tau_m} \||D|^{2\alpha}\theta\|_{L^2} d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} d\tau. \tag{2.31}$$

Feito isso, analisaremos os termos do lado direito da desigualdade acima. Sendo assim, usando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) no primeiro termo, escrevemos

$$\||D|^{2\alpha}\theta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2} \|\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}\|_{L^2}^2.$$

Assim, pela definição de norma em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8), é verdade que

$$\|\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{2\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}^2.$$

Dessa forma, temos que

$$\||D|^{2\alpha}\theta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}^2. \tag{2.32}$$

Além disso, observe que podemos reescrever o segundo termo do lado direito de (2.31) da seguinte forma:

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} = \Big\|\sum_{j=1}^{2} u_\theta^j D_j\theta\Big\|_{L^2},$$

onde $u_\theta = (u_\theta^1, u_\theta^2)$. Pela Desigualdade de Minkowski (ver Teorema 1.4), infere-se que

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq \sum_{j=1}^{2} \|u_\theta^j D_j\theta\|_{L^2}.$$

Logo, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), podemos escrever

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}\sum_{j=1}^{2} \|\widehat{u_\theta^j D_j\theta}\|_{L^2}. \tag{2.33}$$

Sabendo disso, note que

$$\|\widehat{u_\theta^j D_j\theta}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u_\theta^j D_j\theta}(\xi)|^2 d\xi = \|u_\theta^j D_j\theta\|_{\dot{H}^0}^2.$$

Usando esta informação em (2.33), chegamos a

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}\sum_{j=1}^{2} \|u_\theta^j D_j\theta\|_{\dot{H}^0}.$$

Dessa forma, denote $s_1 = 1 - 2\alpha$ e $s_2 = 2\alpha$. Observe que, $s_1 < 1$, pois $\alpha > 0$, e $s_2 < 1$, visto que $\alpha < \frac{1}{2}$. Além disso, $s_1 + s_2 = 1 > 0$. Com isso, concluímos que

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}\sum_{j=1}^{2} \|u_\theta^j D_j\theta\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-1}}.$$

Assim, pelo Lema 1.5, inferimos que

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}C(\alpha)\sum_{j=1}^{2}\|u_\theta^j\|_{\dot{H}^{2\alpha}}\|D_j\theta\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}}.$$

Deste modo, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), percebemos que

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}C(\alpha)\Big(\sum_{j=1}^{2}\|u_\theta^j\|_{\dot{H}^{2\alpha}}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{2}\|D_j\theta\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir disso, deduzimos que

$$\|u_\theta \cdot \nabla\theta\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}C(\alpha)\|u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}\|\nabla\theta\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}}. \tag{2.34}$$

Substituindo (2.32) e (2.34) em (2.31), conseguimos mostrar a seguinte desigualdade:

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}\int_{\tau_n}^{\tau_m}\|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}d\tau + (2\pi)^{-1}C(\alpha)\int_{\tau_n}^{\tau_m}\|u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}\|\nabla\theta\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}}d\tau. \tag{2.35}$$

Usando a definição de norma em $\dot{H}^{2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22) e Lema 1.1, observamos que

$$\|u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} = \Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(2\alpha)}|\widehat{u_\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(2\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}.$$

Temos ainda, pelo Teorema 1.13, que

$$\begin{aligned}\|\nabla\theta\|_{\dot{H}^{1-2\alpha}} &= \Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(1-2\alpha)}|\widehat{\nabla\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(1-2\alpha)}|\xi|^2|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(2-2\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} = \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}.\end{aligned}$$

Substituindo estas normas na desigualdade (2.35), constatamos que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1}\int_{\tau_n}^{\tau_m}\|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}d\tau + (2\pi)^{-1}C(\alpha)\int_{\tau_n}^{\tau_m}\|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}d\tau.$$

Como $2 - 2\alpha \geq 0$, por (1.21), concluímos que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}.$$

Em consequência disso, tem-se

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-2} \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} d\tau + (2\pi)^{-2} C(\alpha) \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}} d\tau.$$

Utilizando o fato que $\theta(\tau)$ é limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, para todo $\tau \in [0, T^*)$, ver (2.28), segue que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq (2\pi)^{-1} \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} d\tau + (2\pi)^{-1} C(\alpha) M \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} d\tau.$$

Podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte maneira:

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq [(2\pi)^{-1} + (2\pi)^{-1} C(\alpha) M] \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} d\tau.$$

Uma vez que $2\alpha > 0$, por (1.21), tem-se que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha}} \leq \|\theta\|_{H^{2\alpha}}.$$

Por isso, chegamos a

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq [(2\pi)^{-1} + (2\pi)^{-1} C(\alpha) M] \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{H^{2\alpha}} d\tau.$$

Agora, veja que $0 < 2\alpha < 2 - 2\alpha$, dado que $0 < \alpha < 1/2$. Por estes motivos, ao usarmos (1.22), obtemos

$$\|\theta\|_{H^{2\alpha}} \leq 2^{\frac{3-2\alpha}{2}} \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq [(2\pi)^{-1} + (2\pi)^{-1} C(\alpha) M] 2^{\frac{3-2\alpha}{2}} \int_{\tau_n}^{\tau_m} \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}} d\tau.$$

Usando mais uma vez o fato de $\theta(\tau)$ ser limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, para todo $\tau \in [0, T^*)$, ver (2.28), concluímos que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \leq [(2\pi)^{-1} + (2\pi)^{-1} C(\alpha) M] 2^{\frac{3-2\alpha}{2}} \int_{\tau_n}^{\tau_m} M d\tau.$$

Em resumo, temos que

$$\|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} \le [(2\pi)^{-1} + (2\pi)^{-1}C(\alpha)M]2^{\frac{3-2\alpha}{2}}M|\tau_m - \tau_n|.$$

Passando ao limite, quando $m, n \to \infty$, chegamos a

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\theta(\tau_n) - \theta(\tau_m)\|_{L^2} = 0,$$

desde que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T^*$. Logo, $(\theta(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Como este é um espaço de Banach (ver definição 1.10), existe $\theta^* \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\theta(\tau_n) - \theta^*\|_{L^2} = 0, \tag{2.36}$$

para toda sequência $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, T^*)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T^*$. Isto nos diz que

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|\theta(t) - \theta^*\|_{L^2} = 0.$$

Agora, observe que $\theta^* \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Com efeito, lembre que $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Hilbert (ver definição 1.11 e [9] para ver detalhes da prova). Logo, este é um espaço reflexivo (ver definição 1.13 e Teorema 1.10). Por isso, e usando o fato de $(\theta(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver (2.28)), pois $(\tau_n) \subseteq [0, T^*)$, garantimos a existência de uma subsequência $(\theta(\tau_{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\theta(\tau_{n_l}) \rightharpoonup \overline{\theta} \quad \text{em } H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2), \tag{2.37}$$

para algum $\overline{\theta} \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$ (ver Teorema 1.11). Além disso, por (1.19), temos que

$$\|\cdot\|_{L^2} \le \frac{1}{2\pi}\|\cdot\|_{H^{2-2\alpha}}, \tag{2.38}$$

porque $2 - 2\alpha \ge 0$. Por conseguinte, $\theta(\tau_n)$ e $\overline{\theta} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por (2.38). Sendo assim, vamos provar que

$$\theta(\tau_{n_l}) \rightharpoonup \overline{\theta} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2),$$

quando $l \to \infty$ (ver definição 1.12). Considere o funcional $f : (L^2(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{L^2}) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$

ou $\mathbb{C}$) linear e contínuo. Deste modo, deduzimos que

$$|f(x)| \leq C\|x\|_{L^2}, \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

para alguma constante $C > 0$. Como $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2) \subseteq L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver (2.38)), segue que

$$|f(x)| \leq C\|x\|_{L^2}, \quad \forall x \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2).$$

Desse modo, por (2.38), escrevemos

$$|f(x)| \leq C\|x\|_{L^2} \leq \frac{C}{2\pi}\|x\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall x \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2).$$

Posto isto, a restrição $g = f|_{H^{2-2\alpha}} : (H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{H^{2-2\alpha}}) \to \mathbb{K}$ é linear e contínuo. Sabendo disso, (2.37) implica que

$$\lim_{l \to \infty} g(\theta(\tau_{n_l})) = g(\overline{\theta}).$$

Por conseguinte, por definição de restrição, é verdade que

$$\lim_{l \to \infty} f(\theta(\tau_{n_l})) = f(\overline{\theta}),$$

para todo funcional $f : (L^2(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{L^2}) \to \mathbb{K}$ linear e contínuo. Logo, concluímos que $\theta(\tau_{n_l}) \rightharpoonup \overline{\theta}$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$ (ver definição 1.12). Em consequência de (2.36), podemos inferir

$$\lim_{l \to \infty} \|\theta(\tau_{n_l}) - \theta^*\|_{L^2} = 0.$$

Por conseguinte, $\theta(\tau_{n_l}) \rightharpoonup \theta^*$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$. Por fim, pela unicidade de limites fracos, concluímos que

$$\theta^* = \overline{\theta} \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2).$$

Passo 3: Vamos mostrar que $\lim_{t \nearrow T^*} \|\theta(t) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} = 0$.

Suponha, por contradição, que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\theta(t) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} \neq 0.$$

Pela definição de limite, isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, encontra-se $t_\delta \in (T^* - \delta, T^*)$ que satisfaz

$$\|\theta(t_\delta) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} \geq \varepsilon.$$

Sendo assim, podemos escolher $\delta = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ $(n \in \mathbb{N})$ de forma que obtemos $t_n \in (T^* - 1/n, T^*)$ tal que

$$\|\theta(t_n) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} \geq \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.39}$$

No Passo 1, vimos que, para $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, T^*)$, tem-se que $(\theta(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver (2.28)). Como $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Hilbert (ver definição 1.11 e [9] para ver detalhes da prova), esta sequência admite uma subsequência $(\theta(t_{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta_1$ em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$, para algum $\theta_1 \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver Teoremas 1.10 e 1.11). Pelo Passo 2 (ver (2.36)), deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|\theta(t_n) - \theta^*\|_{L^2} = 0.$$

Consequentemente, segue que $\lim_{l\to\infty} \|\theta(t_{n_l}) - \theta^*\|_{L^2} = 0$. O que implica em $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta^*$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$. Por outro lado, é verdade que $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta_1$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$ (ver definição 1.12). De fato, seja $f : (L^2(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{L^2}) \to \mathbb{K}$ um funcional linear e contínuo. Sendo assim, é verdade que

$$|f(x)| \leq C\|x\|_{L^2}, \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

para alguma constante $C > 0$. Por (1.19), temos que

$$\|x\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi}\|x\|_{H^{2-2\alpha}}, \qquad \forall x \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2).$$

Logo, inferimos que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{2\pi}\|x\|_{H^{2-2\alpha}}, \qquad \forall x \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2).$$

Dessa forma, a restrição $f|_{H^{2-2\alpha}} : (H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{H^{2-2\alpha}}) \to \mathbb{K}$ segue sendo um funcional linear e contínuo. Como $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta_1$ em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$, podemos escrever

$$\lim_{l\to\infty} |f|_{H^{2-2\alpha}}(\theta(t_{n_l})) - f|_{H^{2-2\alpha}}(\theta_1)| = 0.$$

Deste modo, pela definição de restrição de função, vale

$$\lim_{l\to\infty} |f(\theta(t_{n_l})) - f(\theta_1)| = 0.$$

A partir disso, deduzimos que

$$\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta_1 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } l \to \infty.$$

Logo, pela unicidade de limites fracos, estabelecemos que $\theta_1 = \theta^*$ (já que, $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta^*$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$). Por conseguinte, obtemos a seguinte convergência em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$:

$$\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta^*, \quad \text{quando } l \to \infty, \tag{2.40}$$

pois $\theta(t_{n_l}) \rightharpoonup \theta_1$ em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando $l \to \infty$. Agora, considere $0 \leq s < 2-2\alpha$ (lembre que $2-2\alpha > 0$) e escreva

$$s = \nu \cdot 0 + (1-\nu)(2-2\alpha), \quad \text{para algum } \nu \in (0,1].$$

Substituindo s e escrevendo $2 = 2\nu + 2(1-\nu)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\theta(t) - \theta^*\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^{2s}]|\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^{2[\nu\cdot 0+(1-\nu)(2-2\alpha)]}]|\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^{2\nu+2(1-\nu)} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^{2\nu}[1+|\xi|^{2(1-\nu)(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^{2(1-\nu)} d\xi.
\end{aligned}$$

Por (1.17), inferimos que

$$\|\theta(t) - \theta^*\|_{H^s}^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^{2\nu}[1+|\xi|^2]^{(1-\nu)(2-2\alpha)}|\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^{2(1-\nu)} d\xi,$$

desde que $2-2\alpha \geq 0$ (pois, $\alpha \leq 1$) e $\nu \leq 1$. Utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3) para $p = \frac{1}{\nu}$ e $q = \frac{1}{1-\nu}$, segue que

$$\|\theta(t) - \theta^*\|_{H^s}^2 \leq 2\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^2 \, d\xi\Big)^{\nu}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^2]^{(2-2\alpha)}|\widehat{\theta}(t) - \widehat{\theta^*}|^2 \, d\xi\Big)^{1-\nu}.$$

Fazendo uso de (1.16), chegamos a

$$\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s}^2 \le 2\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)-\widehat{\theta^*}|^2\, d\xi\Big)^{\nu}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} 2^{2-2\alpha}[1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(t)-\widehat{\theta^*}|^2\, d\xi\Big)^{1-\nu},$$

desde que $2-2\alpha \ge 0$. Reescrevendo a desigualdade acima, obtemos

$$\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s}^2 \le 2^{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)-\widehat{\theta^*}|^2\, d\xi\Big)^{\nu}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} [1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(t)-\widehat{\theta^*}|^2\, d\xi\Big)^{1-\nu}.$$

Dessa forma, temos que

$$\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s}^2 \le 2^{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}\|\widehat{\theta(t)-\theta^*}\|_{L^2}^{2\nu}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^{2(1-\nu)}.$$

Isso implica em

$$\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s} \le 2^{\frac{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}{2}}\|\widehat{\theta(t)-\theta^*}\|_{L^2}^{\nu}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^{1-\nu}.$$

Pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) e aplicando (2.28), temos ainda que

$$\begin{aligned}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s} &\le (2\pi)^{\nu}2^{\frac{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}{2}}\|\theta(t)-\theta^*\|_{L^2}^{\nu}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^{1-\nu}\\ &\le (2\pi)^{\nu}2^{\frac{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}{2}}\|\theta(t)-\theta^*\|_{L^2}^{\nu}[\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}+\|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}]^{1-\nu}\\ &\le (2\pi)^{\nu}2^{\frac{(2-2\alpha)(1-\nu)+1}{2}}\|\theta(t)-\theta^*\|_{L^2}^{\nu}[M+\|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}]^{1-\nu},\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,T^*)$. Passando ao limite, quando $t \nearrow T^*$, e usando o Passo 2, concluímos que

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^s}=0, \quad \forall 0\le s<2-2\alpha, \tag{2.41}$$

porque $\nu>0$. Seja $0\le t<r<T^*$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{R}}$ uma sequência real tal que $1<s_n<2-2\alpha$, para todo $n\in\mathbb{N}$, e $\lim_{n\in\mathbb{N}} s_n = 2-2\alpha$. Sabemos que a primeira equação do sistema (3.1) é da forma

$$\partial_t\theta+|D|^{2\alpha}\theta+u_\theta\cdot\nabla\theta=0.$$

Logo, temos que

$$\partial_t\theta=-|D|^{2\alpha}\theta-u_\theta\cdot\nabla\theta.$$

Assim, observe o seguinte:

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{s_n}}^2 = \frac{d}{dt}\langle\theta,\theta\rangle_{H^{s_n}} = 2\mathrm{Re}\,[\langle\theta,\partial_t\theta\rangle_{H^{s_n}}].$$

Portanto, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{s_n}}^2 = -\mathrm{Re}\,[\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{s_n}}] - \mathrm{Re}\,[\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]. \tag{2.42}$$

Analisando o primeiro termo do lado direito da igualdade acima, podemos notar que

$$\begin{aligned}
\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{s_n}} &= \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]\widehat{\theta}(\xi)\overline{\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]\widehat{\theta}(\xi)|\xi|^{2\alpha}\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]|\widehat{|D|^{\alpha}\theta}(\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned}$$

Logo, infere-se que

$$\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{s_n}} = \||D|^{\alpha}\theta\|_{H^{s_n}}^2.$$

Usando esta informação na igualdade (2.42), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{H^{s_n}}^2 + \||D|^{\alpha}\theta\|_{H^{s_n}}^2 = -\mathrm{Re}\,[\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}].$$

Integrando sobre $[t,r]$, chegamos a

$$\frac{1}{2}\int_t^r\frac{d}{d\tau}\|\theta\|_{H^{s_n}}^2d\tau + \int_t^r\||D|^{\alpha}\theta\|_{H^{s_n}}^2d\tau = -\int_t^r\mathrm{Re}\,[\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]d\tau.$$

Fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, deduzimos que

$$\frac{1}{2}\|\theta(\tau)\|_{H^{s_n}}^2|_t^r + \int_t^r\||D|^{\alpha}\theta\|_{H^{s_n}}^2d\tau = -\int_t^r\mathrm{Re}\,[\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]d\tau.$$

Dessa forma, temos que

$$\|\theta(r)\|_{H^{s_n}}^2 + 2\int_t^r\||D|^{\alpha}\theta\|_{H^{s_n}}^2d\tau = \|\theta(t)\|_{H^{s_n}}^2 - 2\int_t^r\mathrm{Re}\,[\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]d\tau.$$

Reescrevendo de outra forma, concluímos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{s_n}}^2 = \|\theta(r)\|_{H^{s_n}}^2 + 2\int_t^r \||D|^\alpha\theta\|_{H^{s_n}}^2 d\tau + 2\int_t^r \mathrm{Re}\,[\langle\theta, u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]d\tau. \tag{2.43}$$

Para simplificar a notação, denote

$$I = \int_t^r \mathrm{Re}\,[\langle\theta, u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{s_n}}]d\tau.$$

Sendo assim, como $s_n > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e usando o Lema 2.1 (com $\sigma = s_n$), obtemos

$$|I| \leq s_n 2^{s_n} C(\alpha)\int_t^r \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{s_n+\alpha}}^2 d\tau.$$

Como $0 < s_n < 2-2\alpha$ e $\|\cdot\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} < \|\cdot\|_{H^{2-2\alpha}}$, tem-se que

$$|I| \leq\ (2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)\int_t^r \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{s_n+\alpha}}^2 d\tau.$$

Uma vez que $\theta(\tau)$ é limitada em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver (2.28)), para todo $\tau \in [0, T^*)$, segue que

$$|I| \leq\ (2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)M\int_t^r \|\theta\|_{\dot{H}^{s_n+\alpha}}^2 d\tau. \tag{2.44}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{\dot{H}^{s_n+\alpha}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(s_n+\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s_n}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s_n}||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s_n}|\widehat{|\,D|^\alpha\theta}(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

Sendo assim, temos que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{s_n+\alpha}}^2 = \||\,D|^\alpha\theta\|_{\dot{H}^{s_n}}^2.$$

Substituindo esta norma na desigualdade (2.44), chegamos a

$$|\,I| \leq\ (2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)M\int_t^r \||\,D|^\alpha\theta\|_{\dot{H}^{s_n}}^2 d\tau.$$

Note que, $s_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por (1.21), segue que

$$\||\, D|^\alpha \theta\|_{\dot{H}^{s_n}}^2 \leq \||\, D|^\alpha \theta\|_{H^{s_n}}^2.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$|\, I| \leq \ (2-2\alpha)2^{2-2\alpha} C(\alpha) M \int_t^r \||\, D|^\alpha \theta\|_{H^{s_n}}^2 d\tau. \tag{2.45}$$

Utilizando (2.45) em (2.43), inferimos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{s_n}}^2 \leq \|\theta(r)\|_{H^{s_n}}^2 + [(2-2\alpha)2^{3-2\alpha} C(\alpha) M + 2] \int_t^r \||D|^\alpha \theta\|_{H^{s_n}}^2 d\tau.$$

Passando ao limite, quando $r \nearrow T^*$, e usando (2.41) (lembre que $0 \leq s_n < 2-2\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$), obtemos

$$\|\theta(t)\|_{H^{s_n}}^2 \leq \|\theta^*\|_{H^{s_n}}^2 + [(2-2\alpha)2^{3-2\alpha} C(\alpha) M + 2] \int_t^{T^*} \||D|^\alpha \theta\|_{H^{s_n}}^2 d\tau.$$

Como $0 < s_n < 2-2\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, infere-se

$$\|\theta(t)\|_{H^{s_n}}^2 \leq \|\theta^*\|_{H^{s_n}}^2 + C_{\alpha,M} \int_t^{T^*} \||D|^\alpha \theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau. \tag{2.46}$$

onde $C_{\alpha,M} = 2^{3-2\alpha}[(2-2\alpha)2^{3-2\alpha} C(\alpha) M + 2]$ (ver (1.22)). Feito isso, observe novamente que $s_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim sendo, por (1.17), tem-se

$$1 + |\xi|^{2s_n} \leq 2[1 + |\xi|^2]^{s_n}.$$

Como $s_n < 2-2\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e fazendo uso de (1.16), segue que

$$1 + |\xi|^{2s_n} \leq 2[1 + |\xi|^2]^{2-2\alpha} \leq 2^{3-2\alpha}[1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}].$$

Multiplicando esta desigualdade por $|\widehat{\theta}(\xi)|^2$, resulta que

$$[1 + |\xi|^{2s_n}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2 \leq 2^{3-2\alpha}[1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2.$$

Note que, $2^{3-2\alpha}[1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 2^{3-2\alpha}[1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = 2^{3-2\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = 2^{3-2\alpha}\|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 < \infty.$$

Assim sendo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.1), chegamos a

$$\lim_{n\to\infty}\|\theta\|_{H^{s_n}}^2 = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2s_n}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}[1+|\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2,$$

desde que $\lim_{n\to\infty} s_n = 2-2\alpha$. Analogamente, demonstra-se que

$$\lim_{n\to\infty}\|\theta^*\|_{H^{s_n}}^2 = \|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^2.$$

A partir disso, por (2.46), passando ao limite, quando $n\to\infty$, deduzimos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 \leq \|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + C_{\alpha,M}\int_t^{T^*}\||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau, \quad \forall t\in[0,T^*).$$

Consequentemente, temos que

$$\|\theta(t_{n_l})\|_{H^{2-2\alpha}}^2 \leq \|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + C_{\alpha,M}\int_{t_{n_l}}^{T^*}\||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau, \quad \forall l\in\mathbb{N}.$$

Passando ao limite superior, quando $l\to\infty$, e usando (2.23), resulta que

$$\limsup_{l\to\infty}\|\theta(t_{n_l})\|_{H^{2-2\alpha}}^2 \leq \|\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}}^2. \tag{2.47}$$

Dessa forma, (2.40) e (2.47) nos permitem aplicar o Lema 1.2 e obter a seguinte convergência:

$$\lim_{l\to\infty}\|\theta(t_{n_l})-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

No entanto, por (2.39), inferimos que

$$\|\theta(t_{n_l})-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} \geq \varepsilon, \quad \forall l\in\mathbb{N}.$$

Isso nos permite concluir que $\varepsilon\leq 0$. Isto é uma contradição! Portanto, segue que

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|\theta(t)-\theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, suponha, pelo Lema 1.6 (ver [19] para mais detalhes), que $\theta_2 \in C([0, T_1), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ (com $T_1 > 0$) é a solução para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \theta_2 + |D|^{2\alpha}\theta_2 + u_{\theta_2} \cdot \nabla\theta_2 = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta_2(0, x) = \theta^*(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Sabendo disso, defina

$$\theta_3(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \in [0, T^*); \\ \theta_2(t - T^*), & t \in [T^*, T^* + T_1). \end{cases}$$

Sendo assim, temos, pelo Passo 3, que $\theta_3 \in C([0, T^* + T_1), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$. De fato, veja que

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|\theta_3(t) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} = \lim_{t \nearrow T^*} \|\theta(t) - \theta^*\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

(Lembre que $\theta_2(0) = \theta^*$). Além disso, $\theta_3(0) = \theta(0) = \theta^0$. Com isso, θ_3 resolve o problema (3.1) e estende θ além de T^*. No entanto, isto é um absurdo, pois isto contraria a maximalidade de T^*. Portanto, concluímos que

$$\int_0^{T^*} \||D|^\alpha \theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau = \infty.$$

$\square$

Capítulo 3

Solução Global da Equação Quase-geostrófica e seu Decaimento

Neste capítulo, utilizaremos a existência de soluções locais, apresentada no Lema 1.6 (para mais detalhes, ver [19]), para o problema de valor inicial relacionado ao caso supercrítico da equação quase-geostrófica

$$\begin{cases} \partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\theta \in \mathbb{R}$ e $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta) \in \mathbb{R}^2$, com o objetivo de estabelecer uma única solução global (a partir de um dado inicial pequeno) juntamente com seu o decaimento a zero, quando o tempo tende a infinito.

É importante ressaltar que, nem todas as ideias utilizadas na demonstração dos resultados deste capítulo foram obtidas por meio de [5]. Mais especificamente, parte da prova do decaimento foi feita utilizando outro caminho e nos permitiu concluir o mesmo que em [5].

3.1 Existência de Soluções Globais

Nesta seção, mostraremos como encontrar uma única solução global no tempo para o sistema

$$\begin{cases} \partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0,x) = \theta^0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta)$, admitindo que o dado inicial é suficientemente pequeno no espaço $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Além disso, mostraremos que tal solução satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 3.1. *Existe uma constante real positiva C tal que se $\theta^0 \in H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ com $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C$, então existe uma solução global para (3.2) de forma que $\theta \in C(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$. Em adição, $|D|^\alpha\theta \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ e a estimativa abaixo é válida:*

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \int_0^t \||D|^\alpha\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Demonstração. Provaremos que se $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < \frac{1}{4C_\alpha}$, onde C_α é dada no desenvolvimento desta prova (ver (3.8)), podemos conseguir uma solução global em $C(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ que satisfaz (3.3).

Seja $\theta \in C([0,T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ a solução maximal de (3.2), dada no Lema 1.6 (ver [19] para mais informações), onde T^* é o tempo maximal de existência de θ. Sendo assim, note que a primeira equação do sistema (3.2) nos diz que

$$\partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Isso implica em

$$\partial_t\theta = -|D|^{2\alpha}\theta - u_\theta \cdot \nabla\theta.$$

Sabendo disso, façamos

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} = \frac{d}{dt}\langle\theta,\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} = 2\mathrm{Re}\left[\langle\theta, \partial_t\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}\right].$$

Logo, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} = -\mathrm{Re}\,[\langle\theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}] - \mathrm{Re}\,[\langle\theta, u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}]. \tag{3.4}$$

Observando o primeiro termo do lado direito da igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
\langle\theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})\widehat{\theta}(\xi)\overline{\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})\widehat{\theta}(\xi)|\xi|^{2\alpha}\overline{\widehat{\theta}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^{2(2-2\alpha)})|\widehat{|D|^{\alpha}\theta}(\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pela definição de norma em $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.21), segue que

$$\langle\theta, |D|^{2\alpha}\theta\rangle_{H^{2-2\alpha}} = \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}.$$

Substituindo esta informação em (3.4), inferimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq |\langle\, u_\theta\cdot\nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|.$$

Integrando sobre $[0,t]$, chegamos a

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau + \int_0^t \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \int_0^t |\langle\, u_\theta\cdot\nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\frac{1}{2}\|\theta(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}}|_0^t + \int_0^t \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \int_0^t |\langle\, u_\theta\cdot\nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Fazendo as devidas substituições, concluímos que

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^{\alpha}\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}}d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t |\langle\, u_\theta\cdot\nabla\theta, \theta\rangle_{H^{2-2\alpha}}|d\tau.$$

Com isso, observe que $2-2\alpha \geq 1$, uma vez que $\alpha < 1/2$. Dessa forma, pelo Lema 2.1 (com

$\sigma = 2 - 2\alpha$), inferimos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2$$
$$+ 2(2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)\int_0^t \|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 d\tau. \tag{3.5}$$

Por (1.21), temos que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}},$$

já que $2 - 2\alpha \geq 0$ (pois, $\alpha \leq 1$). Usando esta informação na desigualdade (3.5), obtém-se

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2$$
$$+ 2(2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)\int_0^t \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2\, d\tau. \tag{3.6}$$

Além disso, perceba que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \leq \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2.$$

Com efeito, é verdade que

$$\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^2} [1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi, \tag{3.7}$$

uma vez que

$$|\xi|^{2(2-\alpha)} = |\xi|^{2(2-2\alpha)}|\xi|^{2\alpha} \leq [1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\xi|^{2\alpha}.$$

Sendo assim, podemos reescrever (3.7) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} [1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}]||\xi|^\alpha\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [1 + |\xi|^{2(2-2\alpha)}]|\widehat{|D|^\alpha\theta}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2.\end{aligned}$$

Substituindo esta informação em (3.6), obtemos

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2$$
$$+ 2(2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha)\int_0^t \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}\||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau.$$

Denotando a constante positiva

$$(2-2\alpha)2^{2-2\alpha}C(\alpha), \tag{3.8}$$

por C_α, segue que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + 2C_\alpha\int_0^t \|\theta\|_{H^{2-2\alpha}}\||D|^\alpha\theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau. \tag{3.9}$$

Agora, considere o tempo T definido por

$$T = \sup\{\, t \in [0, T^*);\ \sup_{\tau\in[0,t]} \{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}\}.$$

Inicialmente, note que $t \mapsto \|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}$ é uma função contínua sobre $[0, T^*)$ e, além disso, observe que

$$\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}.$$

A partir disso, existe $T^0 \in (0, T^*)$ tal que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall\, t \in [0, T^0].$$

Em adição, como $[0, T^0]$ é compacto, tem-se que

$$\sup_{t\in[0,T^0]} \{\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}\} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}},$$

já que este supremo, na verdade, é um máximo. Logo, temos que $T \geq T^0 > 0$. Ou seja, $T > 0$. Agora, pela definição de supremo, temos que, para todo $0 \leq t < T$, existe T_1 tal que $t < T_1 \leq T$ e

$$\sup_{\tau\in[0,T_1]} \{\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}}\} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}.$$

Assim, perceba que

$$\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \sup_{\tau\in[0,T_1]} \|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall\tau \in [0,T_1].$$

Então, segue que

$$\|\theta(\tau)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall\tau \in [0,T_1]. \tag{3.10}$$

Usando o fato que $t < T_1$ em (3.9), e aplicando (3.10), temos que

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 4C_\alpha\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} \int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau.$$

Como, por hipótese, $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < \frac{1}{4C_\alpha}$, inferimos que

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau.$$

Isso implica em

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + \int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall\, t \in [0,T). \tag{3.11}$$

Além disso, se considerarmos $T \leq T^*$ devemos ter $T = T^*$ ou $T < T^*$. Suponha, por contradição, que $T < T^*$. Por (3.11), temos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall\, t \in [0,T). \tag{3.12}$$

Sabemos que $\theta \in C([0,T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ (ver [19] para mais detalhes) e que $T < T^*$, então, por conseguinte, $\theta \in C([0,T], H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$. Assim, passando ao limite, quando $t \nearrow T$, em (3.12), obtemos

$$\|\theta(T)\|_{H^{2-2\alpha}} = \lim_{t\nearrow T} \|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|\theta(T)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}. \tag{3.13}$$

Desta forma, por (3.12) e (3.13), inferimos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Usando novamente o fato que $\theta \in C([0,T^*), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ e $T < T^*$, garantimos que existe $T_2 \in (T, T^*)$ de modo que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \in [T, T_2). \tag{3.15}$$

Logo, por (3.14) e (3.15), tem-se que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \in [0, T_2].$$

Com isso, pela continuidade de θ e por $[0, T_2]$ ser compacto, deduzimos que

$$\sup_{t\in[0,T_2]} \{\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}\} < 2\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}},$$

já que este supremo é, na verdade, um máximo. Dessa forma, temos que $T \geq T_2$. Isto é uma contradição! Pois, $T_2 > T$. Por isso, concluímos que $T = T^*$. Além disso, por (3.11) podemos inferir que

$$\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}}, \quad \forall t \in [0, T^*).$$

Note ainda que

$$\lim_{t\nearrow T^*} \int_0^t \||D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau = \int_0^{T^*} \| \, |D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau.$$

Isso implica em

$$\int_0^{T^*} \| \, |D|^\alpha\theta\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}} < \infty. \tag{3.16}$$

Nestas condições, pelo Teorema 2.1, segue que $T^* = \infty$. Assim sendo, θ é solução global em $C(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$.

Em adição, por (3.16), $|D|^\alpha\theta \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ e, além disso, por (3.11), concluímos que

$$\|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 + \int_0^t \||D|^\alpha \theta\|_{H^{2-2\alpha}}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2, \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.17}$$

□

3.2 Decaimento de Soluções Globais

Para finalizar nosso estudo, envolvendo a solução para o sistema

$$\begin{cases} \partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \theta(0, x) = \theta^0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3.18}$$

onde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e $u_\theta = (D_2|D|^{-1}\theta, -D_1|D|^{-1}\theta)$, obtida no Teorema 3.1, apresentaremos o decaimento desta mesma no espaço $H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)$, quando o tempo tende a infinito.

Teorema 3.2. *Se $\theta \in C([0, \infty), H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2))$ é a solução global de (3.18) tal que $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C$ (C é encontrado na prova do Teorema 3.1), então*

$$\lim_{t \to \infty} \|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

Demonstração. Faremos esta prova em duas etapas.

Passo 1: Vamos provar, primeiramente, que

$$\lim_{t \to \infty} \|\theta(t)\|_{L^2} = 0.$$

Para isso, note que da primeira equação do sistema (3.18), temos que

$$\partial_t \theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\partial_t \theta = -|D|^{2\alpha}\theta - u_\theta \cdot \nabla\theta.$$

Com isso, observe que

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle\theta,\theta\rangle_{L^2} = 2\langle\theta,\partial_t\theta\rangle_{L^2}.$$

Logo, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{L^2}^2 = -\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{L^2} - \langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{L^2}. \tag{3.19}$$

Usando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) no primeiro termo do lado direito da igualdade acima, resulta que

$$\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle\widehat{\theta},\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}\rangle_{L^2}.$$

Com isso, pela definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), escrevemos

$$\begin{aligned}\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{L^2} &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\theta}(\xi)\overline{\widehat{|D|^{2\alpha}\theta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\theta}(\xi)\overline{|\xi|^{2\alpha}\widehat{\theta}(\xi)}d\xi\\ &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}$$

Em consequência disso, temos que

$$\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{|D|^{\alpha}\theta}(\xi)|^2d\xi = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|D|^{\alpha}\theta}\|_{L^2}^2.$$

Usando novamente a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\langle\theta,|D|^{2\alpha}\theta\rangle_{L^2} = \||D|^{\alpha}\theta\|_{L^2}^2. \tag{3.20}$$

Usando que u_θ é livre de divergente (ver Lema 1.1), temos que

$$\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{L^2} = 0.$$

De fato, por definição, temos que

$$\langle\theta,u_\theta\cdot\nabla\theta\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^2}\theta(u_\theta\cdot\nabla\theta)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}\theta\Big(\sum_{j=1}^{2}u_\theta^jD_j\theta\Big)d\xi,$$

onde $u_\theta = (u_\theta^1, u_\theta^2)$. Logo, podemos escrever

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \theta D_j(u_\theta^j \theta) d\xi. \tag{3.21}$$

Sendo assim, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta D_j(u_\theta^j \theta)\, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j \theta D_j \theta d\xi.$$

Dessa forma, por (3.21), temos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_\theta^j \theta D_j \theta\, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^2} \theta \sum_{j=1}^{2} (u_\theta^j\, D_j\theta) d\xi.$$

A partir disso, inferimos que

$$\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \theta\rangle_{L^2} = -\int_{\mathbb{R}^2} \theta \sum_{j=1}^{2} (u_\theta^j\, D_j\theta) d\xi = -\int_{\mathbb{R}^2} \theta (u_\theta \cdot \nabla\theta) d\xi.$$

Deste modo, deduzimos que

$$\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{L^2} = -\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{L^2}.$$

Em consequência disso, concluímos que

$$\langle \theta, u_\theta \cdot \nabla\theta\rangle_{L^2} = 0. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.20) e (3.22) na igualdade (3.19), chegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_{L^2}^2 + \||D|^\alpha \theta\|_{L^2}^2 = 0.$$

Integrando sobre $[0, t]$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|\theta\|_{L^2}^2 d\tau + \int_0^t \||D|^\alpha \theta\|_{L^2}^2 d\tau = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{1}{2}\|\theta(\tau)\|_{L^2}^2 \,\Big|_0^t + \int_0^t \||D|^\alpha \theta\|_{L^2}^2 d\tau = 0.$$

Dessa forma, infere-se que

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\theta^0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau = 0.$$

Consequentemente, segue que

$$\|\theta(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau = \|\theta^0\|_{L^2}^2. \tag{3.23}$$

Agora, para $\delta > 0$, definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\omega_\delta &= A_\delta(D)\theta = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta})\\ \upsilon_\delta &= B_\delta(D)\theta = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta}),\end{aligned}$$

onde A^c indica o complementar do conjunto A, χ_C denota a função característica do conjunto C usual e $B(0,r)$ é a bola aberta de centro 0 e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, temos também que

$$\omega_\delta^0 = A_\delta(D)\theta^0 \text{ e } \upsilon_\delta^0 = B_\delta(D)\theta^0. \tag{3.24}$$

Sabendo disso, lembremos que a primeira equação do sistema (3.18) nos diz que

$$\partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação acima, temos que

$$\mathcal{F}(\partial_t\theta) + \mathcal{F}(|D|^{2\alpha}\theta) + \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Usando a definição de transformada de Fourier (ver definição 1.16), concluímos que

$$\partial_t\mathcal{F}(\theta) + |\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta) + \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Multiplicando a equação acima, por $\chi_{B(0,\delta)}$, segue que

$$\chi_{B(0,\delta)}\partial_t\mathcal{F}(\theta) + \chi_{B(0,\delta)}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta) + \chi_{B(0,\delta)}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa (ver Teorema 1.12), chegamos a

$$\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\partial_t\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)] = 0.$$

Dessa forma, temos que

$$\partial_t\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\mathcal{F}(\theta)] + |D|^{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)] = 0.$$

A partir disso, deduzimos que

$$\partial_t\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}] + |D|^{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)}\widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}] = 0.$$

Isso implica em

$$\partial_t A_\delta(D)\theta + |D|^{2\alpha}A_\delta(D)\theta + A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Por definição, concluímos que

$$\partial_t\omega_\delta + |D|^{2\alpha}\omega_\delta + A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Assim, podemos escrever

$$\langle \partial_t\omega_\delta + |D|^{2\alpha}\omega_\delta + A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2} = 0.$$

Com isso, segue que

$$\langle \partial_t\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} + \langle |D|^{2\alpha}\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} + \langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2} = 0. \tag{3.25}$$

Analisando cada termo da igualdade acima, podemos observar que

$$\frac{d}{dt}\|\omega_\delta\|^2_{L^2} = \frac{d}{dt}\langle \omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} = 2\mathrm{Re}\,[\langle \partial_t\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2}].$$

Logo, deduzimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\delta\|^2_{L^2} = \mathrm{Re}\,[\langle \partial_t\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2}]. \tag{3.26}$$

Aplicando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) no segundo termo de (3.25), obtemos

$$\langle |D|^{2\alpha}\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle \widehat{|D|^{2\alpha}\omega_\delta}, \widehat{\omega_\delta}\rangle_{L^2}.$$

Assim, por definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), é verdade que

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-2}\langle \widehat{|D|^{2\alpha}\omega_\delta}, \widehat{\omega_\delta}\rangle_{L^2} &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{|D|^{2\alpha}\omega_\delta}(\xi)\overline{\widehat{\omega_\delta}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}\widehat{\omega_\delta}(\xi)\overline{\widehat{\omega_\delta}(\xi)}d\xi \\
&= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}|\widehat{\omega_\delta}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{\alpha}\widehat{\omega_\delta}(\xi)|^2 d\xi \\
&= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{|D|^{\alpha}\omega_\delta}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|D|^{\alpha}\omega_\delta}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Deste modo, chegamos a

$$\langle |D|^{2\alpha}\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|D|^{\alpha}\omega_\delta}\|_{L^2}^2.$$

Usando novamente a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\langle |D|^{2\alpha}\omega_\delta, \omega_\delta\rangle_{L^2} = \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2. \tag{3.27}$$

Substituindo (3.26) e (3.27) em (3.25), resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\delta\|_{L^2}^2 + \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 + \mathrm{Re}\,[\langle\, A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}] = 0.$$

Reescrevendo, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\delta\|_{L^2}^2 + \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = -\mathrm{Re}\,[\langle\, A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}].$$

Isso implica em

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\delta\|_{L^2}^2 + \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 \leq |\langle\, A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}|.$$

Integrando sobre $[0,t]$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau + \int_0^t \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \int_0^t |\langle\, A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, chegamos a

$$\frac{1}{2}\|\omega_\delta(\tau)\|_{L^2}^2 \mid_0^t + \int_0^t \||D|^\alpha\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \int_0^t |\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| d\tau.$$

Fazendo as devidas substituições, inferimos que

$$\|\omega_\delta(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t |\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| d\tau. \tag{3.28}$$

Por outro lado, observe que

$$A_\delta(D)^2\theta = A_\delta(D)(A_\delta(D)\theta) = A_\delta(D)(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta})) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}) = A_\delta(D)\theta.$$

Dessa forma, temos que

$$A_\delta(D)^2\theta = A_\delta(D)\theta. \tag{3.29}$$

Além disso, podemos observar que

$$\langle\, A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = \langle\, f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2}. \tag{3.30}$$

Com efeito, por definição, temos que

$$\langle\, A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = \langle\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{f}), g\rangle_{L^2}.$$

Usando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), chegamos a

$$\langle\, A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{f})), \widehat{g}\rangle_{L^2}.$$

Em consequência disso, temos que

$$\langle\, A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle\chi_{B(0,\delta)}\widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{L^2}.$$

Por definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), escrevemos

$$\langle\, A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B(0,\delta)}\widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} dx.$$

Isso é equivalente a

$$\langle A_\delta(D)f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2} \int_{B(0,\delta)} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx. \tag{3.31}$$

Por outro lado, é verdade que

$$\langle f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{g})\rangle_{L^2}.$$

Pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\langle f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle \widehat{f}, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{g}))\rangle_{L^2}.$$

Consequentemente, inferimos que

$$\langle f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle \widehat{f}, \chi_{B(0,\delta)}\widehat{g}\rangle_{L^2}.$$

Usando a definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), escrevemos

$$\begin{aligned}
\langle f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2} &= (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(x)\overline{\chi_{B(0,\delta)}\widehat{g}(x)}dx \\
&= (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(x)\chi_{B(0,\delta)}\overline{\widehat{g}(x)}dx \\
&= (2\pi)^{-2} \int_{B(0,\delta)} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx.
\end{aligned}$$

Logo, deduzimos que

$$\langle f, A_\delta(D)g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2} \int_{B(0,\delta)} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx. \tag{3.32}$$

Comparando as igualdades (3.31) e (3.32), concluímos que (3.30) segue.

Agora, analisando o termo do lado direito da desigualdade (3.28), podemos notar, usando (3.30), que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| = |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, A_\delta(D)\omega_\delta\rangle_{L^2}|.$$

Como $\omega_\delta = A_\delta(D)\theta$, inferimos que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| = |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, A_\delta(D)^2\theta\rangle_{L^2}|.$$

Por (3.29), chegamos a

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| = |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, A_\delta(D)\theta \rangle_{L^2}|.$$

Consequentemente, segue que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| = |\langle u_\theta \cdot \nabla\theta, \omega_\delta \rangle_{L^2}|.$$

Pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), podemos escrever

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| = |(2\pi)^{-2} \langle \widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}, \widehat{\omega_\delta} \rangle_{L^2}|.$$

Usando a definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), infere-se que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| = (2\pi)^{-2} \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)(\xi) \overline{\widehat{\omega_\delta}(\xi)} d\xi \Big|.$$

Usando as propriedades de integral, deduzimos que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)(\xi) \overline{\widehat{\omega_\delta}(\xi)}| d\xi.$$

Pelas propriedades do módulo, chegamos a

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)(\xi)| |\overline{\widehat{\omega_\delta}(\xi)}| \, d\xi.$$

Em consequência disso, temos que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)(\xi)| |\widehat{\omega_\delta}(\xi)| \, d\xi. \tag{3.33}$$

Agora, perceba novamente que

$$u_\theta \cdot \nabla\theta = \sum_{j=1}^{2} u_\theta^j D_j \theta,$$

onde $u_\theta = (u_\theta^1, u_\theta^2)$. Sabendo que $\nabla \cdot u_\theta = 0$ (ver Lema 1.1), deduzimos que

$$\sum_{j=1}^{2} u_\theta^j D_j \theta = \sum_{j=1}^{2} D_j(u_\theta^j \theta).$$

Em decorrência disso, temos que

$$u_\theta \cdot \nabla\theta = \sum_{j=1}^{2} D_j(u_\theta^j \theta) = D_1(u_\theta^1\theta) + D_2(u_\theta^2\theta).$$

Como a transformada de Fourier é um operador linear (ver Teorema 1.12), chegamos a

$$\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = \mathcal{F}(D_1(u_\theta^1\theta)) + \mathcal{F}(D_2(u_\theta^2\theta)).$$

Utilizando as propriedades da transformada de Fourier (ver Teorema 1.13), segue que

$$\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = (i\xi_1)\widehat{(u_\theta^1\theta)} + (i\xi_2)\widehat{(u_\theta^2\theta)} = (i\xi_1)\mathcal{F}(u_\theta^1\theta) + (i\xi_2)\mathcal{F}(u_\theta^2\theta).$$

Logo, temos que

$$\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = i\sum_{j=1}^{2} \xi_j \mathcal{F}(u_\theta^j\theta).$$

Sendo assim, note que

$$|\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)| = \Big| i\sum_{j=1}^{2} \xi_j \mathcal{F}(u_\theta^j\theta)\Big| = |i|\Big|\sum_{j=1}^{2} \xi_j \mathcal{F}(u_\theta^j\theta)\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{2} \xi_j \mathcal{F}(u_\theta^j\theta)\Big| = |\xi \cdot \mathcal{F}(\theta u_\theta)|.$$

Dessa forma, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$|\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)| \leq |\xi||\mathcal{F}(\theta u_\theta)|. \tag{3.34}$$

Usando esta informação em (3.33), inferimos que

$$|\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi||\mathcal{F}(\theta u_\theta)(\xi)||\widehat{\omega_\delta}(\xi)|\, d\xi.$$

Usando o fato que $|\xi|^{2-2\alpha}|\xi|^{2\alpha-1} = |\xi|$, deduzimos que

$$|\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2-2\alpha}|\xi|^{2\alpha-1}|\mathcal{F}(\theta u_\theta)(\xi)||\widehat{\omega_\delta}(\xi)|\, d\xi.$$

Observe ainda que

$$\widehat{\omega_\delta} = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta})) = \chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}.$$

Deste modo, é verdade que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta),\omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2-2\alpha}|\xi|^{2\alpha-1}|\mathcal{F}(\theta u_\theta)(\xi)||\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}(\xi)|\,d\xi$$
$$\leq (2\pi)^{-2}\delta^{2-2\alpha}\int_{|\xi|<\delta}|\xi|^{2\alpha-1}|\mathcal{F}(\theta u_\theta)(\xi)||\widehat{\theta}(\xi)|\,d\xi,$$

desde que $2-2\alpha\geq 0$ (pois, $\alpha\leq 1$). Aplicando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), tem-se que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta),\omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\delta^{2-2\alpha}\Big(\int_{|\xi|<\delta}|\xi|^{2(2\alpha-1)}|\mathcal{F}(\theta u_\theta)(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\Big(\int_{|\xi|<\delta}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Em decorrência disso, inferimos que

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta),\omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\delta^{2-2\alpha}\|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha-1}}\|\widehat{\theta}\|_{L^2}. \tag{3.35}$$

Observe que, tomando $s_1=s_2=\alpha$ podemos utilizar o Lema 1.5 no primeiro termo do lado direito da desigualdade acima, uma vez que $s_1<1$ e $s_2<1$, dado que $\alpha<1$. Além disso, $s_1+s_2=2\alpha>0$, pois $\alpha>0$. Por isso, temos que

$$\|\theta\, u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha-1}} \leq C(\alpha)\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}\|u_\theta\|_{\dot{H}^\alpha}.$$

Sabendo disso, pelo Lema 1.1, note que

$$\|u_\theta\|_{\dot{H}^\alpha}=\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u_\theta}(\xi)|^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\Big[\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}.$$

Consequentemente, segue que

$$\|\theta u_\theta\|_{\dot{H}^{2\alpha-1}} \leq C(\alpha)\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) em (3.35), obtemos

$$|\langle A_\delta(D)(u_\theta\cdot\nabla\theta),\omega_\delta\rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}\delta^{2-2\alpha}\,C(\alpha)\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\|\widehat{\theta}\|_{L^2}.$$

Utilizando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), tem-se que

$$|\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq (2\pi)^{-2}(2\pi)^2\delta^{2-2\alpha}\, C(\alpha)\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\|\theta\|_{L^2}.$$

Dessa forma, conclui-se que

$$|\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq \delta^{2-2\alpha}\, C(\alpha)\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\|\theta\|_{L^2}. \tag{3.37}$$

A partir da igualdade (3.23), deduzimos a seguinte desigualdade de energia:

$$\|\theta(\tau)\|_{L^2} \leq \|\theta^0\|_{L^2}, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Usando esta informação em (3.37), chegamos a

$$|\langle\, A_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta), \omega_\delta \rangle_{L^2}| \leq \delta^{2-2\alpha}\, C(\alpha)\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\|\theta^0\|_{L^2}.$$

Substituindo este fato em (3.28), obtemos

$$\|\omega_\delta(t)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \||D|^\alpha\omega_\delta\|^2_{L^2}d\tau \leq \|\omega^0_\delta\|^2_{L^2} + 2\, C(\alpha)\delta^{2-2\alpha}\|\theta^0\|_{L^2}\int_0^t \|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\, d\tau.$$

Pela definição de norma em $\dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), podemos observar que

$$\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^\alpha\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{|\, D|^\alpha\theta}(\xi)|^2 d\xi.$$

Deste modo, inferimos que

$$\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha} = \|\widehat{|\, D|^\alpha\theta}\|^2_{L^2}.$$

Logo, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha} = (2\pi)^2\||\, D|^\alpha\theta\|^2_{L^2}.$$

Dessa forma, temos que

$$\|\omega_\delta(t)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \||D|^\alpha\omega_\delta\|^2_{L^2}d\tau \leq \|\omega^0_\delta\|^2_{L^2} + 2(2\pi)^2\, C(\alpha)\delta^{2-2\alpha}\|\theta^0\|_{L^2}\int_0^t \||\, D|^\alpha\theta\|^2_{L^2}\, d\tau.$$

Usando a igualdade (3.23) novamente, podemos escrever

$$2\int_0^t \||\,D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\|\omega_\delta(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^\alpha\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 + C(\alpha)(2\pi)^2\delta^{2-2\alpha}\|\theta^0\|_{L^2}^3. \tag{3.38}$$

Sabendo disso, defina

$$\varepsilon_\delta = \|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 + C(\alpha)(2\pi)^2\delta^{2-2\alpha}\|\theta^0\|_{L^2}^3.$$

Assim sendo, veja que

$$\lim_{\delta\searrow 0}\varepsilon_\delta = \lim_{\delta\searrow 0}\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 + C(\alpha)(2\pi)^2\|\theta^0\|_{L^2}^3 \lim_{\delta\searrow 0}\delta^{2-2\alpha}. \tag{3.39}$$

Antes de calcularmos este limite do lado esquerdo de (3.39), use a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14) para obter

$$\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\widehat{\omega_\delta^0}\|_{L^2}^2.$$

Com isso, por definição da norma em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8), segue que

$$\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{\omega_\delta^0}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{A_\delta(D)\theta^0}(\xi)|^2 d\xi.$$

Reescrevendo a igualdade acima, chegamos a

$$\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta^0})(\xi)|^2 d\xi.$$

Em decorrência disso, inferimos que

$$\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo, concluímos que

$$\|\omega_\delta^0\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{B(0,\delta)}|\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi.$$

Substituindo esta informação em (3.39), segue que

$$\lim_{\delta\searrow 0}\varepsilon_\delta = (2\pi)^{-2}\lim_{\delta\searrow 0}\int_{B(0,\delta)}|\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi + C(\alpha)(2\pi)^2\|\theta^0\|_{L^2}^3\lim_{\delta\searrow 0}\delta^{2-2\alpha}.$$

Portanto, pelo Teorema 1.9, podemos concluir que

$$\lim_{\delta\searrow 0}\varepsilon_\delta = 0, \tag{3.40}$$

pois $2-2\alpha > 0$ (já que $\alpha < 1$) e $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dessa forma, por (3.38), temos que

$$\sup_{t\geq 0}\{\|\omega_\delta(t)\|_{L^2}\} \leq \varepsilon_\delta.$$

Passando ao limite, quando $\delta \searrow 0$, obtemos

$$\lim_{\delta\searrow 0}\sup_{t\geq 0}\{\|\omega_\delta(t)\|_{L^2}\} = 0. \tag{3.41}$$

Além disso, podemos observar que

$$\|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\omega_\delta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\mathcal{F}(\omega_\delta)(\xi)|^2 d\xi.$$

Usando a definição de ω_δ, chegamos a

$$\|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta})(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi.$$

Isso é equivalente a

$$\|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 = \int_{B(0,\delta)}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = \int_{B(0,\delta)}||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo, tem-se que

$$\|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 = \int_{B(0,\delta)}||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.42}$$

Agora, veja que

$$\||\,D|^\alpha\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|\,D|^\alpha\omega_\delta}(\xi)\|_{L^2}^2,$$

utilizando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14). Assim, pela definição da norma

$L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8), segue que

$$\| |D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{\alpha}\widehat{\omega_\delta}(\xi)|^2 d\xi.$$

Consequentemente, inferimos que

$$\| |D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{\alpha}\mathcal{F}(\omega_\delta)(\xi)|^2 d\xi.$$

Isso implica em

$$\| |D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{\alpha}\chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}(\xi))|^2 d\xi.$$

O que equivale a

$$\| |D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{B(0,\delta)} ||\xi|^{\alpha}\widehat{\theta}(\xi))|^2 d\xi. \tag{3.43}$$

Comparando (3.42) e (3.43), deduzimos que

$$\| |D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\omega_\delta\|_{\dot{H}^{\alpha}}^2. \tag{3.44}$$

Por outro lado, de (3.38), temos que

$$2\int_0^t \||D|^{\alpha}\omega_\delta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \varepsilon_\delta.$$

Sendo assim, por (3.44), obtemos

$$2(2\pi)^{-2}\int_0^t \|\omega_\delta\|_{\dot{H}^{\alpha}}^2 d\tau \leq \varepsilon_\delta.$$

Fazendo $t \to \infty$, chegamos a

$$2(2\pi)^{-2}\int_0^{\infty} \|\omega_\delta\|_{\dot{H}^{\alpha}}^2 \leq \varepsilon_\delta.$$

Passando ao limite, quando $\delta \searrow 0$, deduzimos que

$$2(2\pi)^{-2}\lim_{\delta \searrow 0}\int_0^{\infty} \|\omega_\delta\|_{\dot{H}^{\alpha}}^2 \leq \lim_{\delta \searrow 0}\varepsilon_\delta.$$

Então, por (3.40), segue que

$$2(2\pi)^{-2}\lim_{\delta\searrow 0}\int_0^\infty \|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 = 0. \tag{3.45}$$

Deste modo, por (3.41) e (3.45) podemos concluir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \delta < \delta_0$, conclui-se que

$$\sup_{t\geq 0}\{\|\omega_\delta(t)\|_{L^2}\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \|\omega_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 d\tau < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.46}$$

De agora em diante, fixe $\delta \in (0, \delta_0)$ e relembre novamente que a primeira equação do sistema (3.18) nos diz que

$$\partial_t\theta + |D|^{2\alpha}\theta + u_\theta \cdot \nabla\theta = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação acima, obtemos

$$\mathcal{F}(\partial_t\theta) + \mathcal{F}(|D|^{2\alpha}\theta) + \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Utilizando a definição de transformada de Fourier (ver definição 1.16), resulta que

$$\partial_t\mathcal{F}(\theta) + |\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta) + \mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Multiplicando por $\chi_{B(0,\delta)^c}$, tem-se que

$$\chi_{B(0,\delta)^c}\partial_t\mathcal{F}(\theta) + \chi_{B(0,\delta)^c}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta) + \chi_{B(0,\delta)^c}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa (ver Teorema 1.12), podemos escrever

$$\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\partial_t\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)] = 0.$$

Assim sendo, temos que

$$\partial_t\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\mathcal{F}(\theta)] + |D|^{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\mathcal{F}(\theta)] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\mathcal{F}(u_\theta \cdot \nabla\theta)] = 0.$$

Diante disso, inferimos que

$$\partial_t\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta}] + |D|^{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta}] + \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}] = 0.$$

Isso é equivalente a

$$\partial_t B_\delta(D)\theta + |D|^{2\alpha} B_\delta(D)\theta + B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Por definição, constatamos que

$$\partial_t \upsilon_\delta + |D|^{2\alpha}\upsilon_\delta + B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) = 0.$$

Aplicando à equação acima o semigrupo do calor $e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}$ (ver definição 1.20), onde $\tau \in [0, t]$, obtemos

$$e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}(\partial_\tau \upsilon_\delta + |D|^{2\alpha}\upsilon_\delta + B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta)) = e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}(0).$$

Como o semigrupo do calor é um operador linear (segue diretamente da definição 1.20), inferimos que

$$e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}\partial_\tau \upsilon_\delta + e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}|D|^{2\alpha}\upsilon_\delta + e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}(B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta)) = 0.$$

Integrando sobre $[0, t]$, resulta que

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}\partial_\tau \upsilon_\delta \, d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}|D|^{2\alpha}\upsilon_\delta \, d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}(B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta))d\tau = 0. \tag{3.47}$$

Resolvendo a primeira integral acima, notamos que

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}\partial_\tau \upsilon_\delta d\tau = \upsilon_\delta(t) - e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}|D|^{2\alpha}\upsilon_\delta d\tau.$$

Em consequência disso, (3.47) é da forma

$$\upsilon_\delta(t) = e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}(B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta))d\tau.$$

Aplicando a norma em $\dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), com $\sigma = 2 - 2\alpha$, obtemos

$$\|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}} = \left\| e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}}B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta)d\tau \right\|_{\dot{H}^{-\sigma}}.$$

Diante disso, inferimos que

$$\|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}} \leq \|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}} + \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}} B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) d\tau \right\|_{\dot{H}^{-\sigma}}. \tag{3.48}$$

Analisando os termos do lado direito da desigualdade acima, percebemos que

$$\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} |\widehat{e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0}(\xi)|^2 d\xi.$$

Utilizando a definição de transformada de Fourier novamente (ver definição 1.16), tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} |\, e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\widehat{\upsilon_\delta^0}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2t|\xi|^{2\alpha}} |\mathcal{F}(\upsilon_\delta^0)(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da definição de υ_δ^0 (ver (3.24)), chegamos a

$$\begin{aligned}
\|e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2t|\xi|^{2\alpha}} |\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta^0}))(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2t|\xi|^{2\alpha}} |\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 = \int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2t|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^{-2\sigma} e^{-2t\delta^{2\alpha}} \int_{|\xi|\geq\delta} |\widehat{\theta^0}(\xi)|^2 d\xi,$$

desde que $\sigma = 2 - 2\alpha > 0$ (pois, $\alpha < 1$). Diante disso, tem-se que

$$\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 \leq \delta^{-2\sigma} e^{-2t\delta^{2\alpha}} \|\widehat{\theta^0}\|_{L^2}^2.$$

Utilizando a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), deduzimos que

$$\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 \leq (2\pi)^2 \delta^{-2\sigma} e^{-2t\delta^{2\alpha}} \|\theta^0\|_{L^2}^2.$$

Em resumo, descobrimos que

$$\|\, e^{-t|D|^{2\alpha}}\upsilon_\delta^0\|_{\dot{H}^{-\sigma}} \leq (2\pi)\delta^{-\sigma} e^{-t\delta^{2\alpha}} \|\theta^0\|_{L^2}. \tag{3.49}$$

Além disso, observe que

$$J := \Big\| \int_0^t e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}} B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta) d\tau \Big\|_{\dot{H}^{-\sigma}} \leq \int_0^t \| e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}} B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta)\|_{\dot{H}^{-\sigma}} d\tau.$$

Fazendo uso da definição de norma em $\dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.22), temos que

$$J \leq \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} |\mathcal{F}\{e^{-(t-\tau)|D|^{2\alpha}} B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta)\}|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Pela definição de transformada de Fourier (ver definição 1.16), chegamos a

$$J \leq \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} | \, e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \mathcal{F}(B_\delta(D)(u_\theta \cdot \nabla\theta))|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Usando da definição de $B_\delta(D)$, segue que

$$J \leq \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} | \, e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)^c} \widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}))|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Em consequência disso, temos que

$$J \leq \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\chi_{B(0,\delta)^c} \widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

A partir disso, inferimos que

$$J \leq \int_0^t \Big(\int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{-2\sigma} e^{-2(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} |\widehat{u_\theta \cdot \nabla\theta}|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Por (3.34), podemos escrever

$$J \leq \int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}} \Big(\int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{2-2\sigma} |\widehat{\theta u_\theta}|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau. \tag{3.50}$$

Resolvendo a integral que está em parênteses em (3.50), chegamos a

$$\begin{aligned} \Big(\int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{2-2\sigma} |\widehat{\theta u_\theta}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} &= \Big(\int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{2-2\sigma} \sum_{j=1}^{2} |\widehat{\theta u_\theta^j}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{2} \int_{|\xi|\geq\delta} |\xi|^{2-2\sigma} |\widehat{\theta u_\theta^j}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Em decorrência disso, inferimos que

$$\Big(\int_{|\xi|\geq\delta}|\xi|^{2-2\sigma}|\widehat{\theta u_\theta}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\Big(\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2(1-\sigma)}|\widehat{\theta u_\theta^j}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Sendo assim, segue que

$$\Big(\int_{|\xi|\geq\delta}|\xi|^{2-2\sigma}|\widehat{\theta u_\theta}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\Big(\sum_{j=1}^{2}\|\theta u_\theta^j\|^2_{\dot{H}^{1-\sigma}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Posto isso, (3.50) é da seguinte forma:

$$J\leq\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\Big(\sum_{j=1}^{2}\|\theta u_\theta^j\|^2_{\dot{H}^{1-\sigma}}\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Dado que $\sigma=2-2\alpha$, percebemos que $1-\sigma=2\alpha-1$. Com isso, temos que

$$J\leq\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\Big(\sum_{j=1}^{2}\|\theta u_\theta^j\|^2_{\dot{H}^{2\alpha-1}}\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Nestas condições, aplicando o Lema 1.5, com $s_1=s_2=\alpha$ (note que $s_1,s_2<1$, dado que $\alpha<1$, e $s_1+s_2=2\alpha>0$, já que $\alpha>0$), deduzimos que

$$J\leq\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\Big(\sum_{j=1}^{2}C(\alpha)^2\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\|u_\theta^j\|^2_{\dot{H}^\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Posto isso, podemos escrever

$$J\leq C(\alpha)\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}\|u_\theta\|_{\dot{H}^\alpha}d\tau.$$

Pelo Lema 1.1, constatamos que

$$J\leq C(\alpha)\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}d\tau. \tag{3.51}$$

Substituindo (3.49) e (3.51) em (3.48), obtemos

$$\|v_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}}\leq(2\pi)\delta^{-\sigma}e^{-t\delta^{2\alpha}}\|\theta^0\|_{L^2}+C(\alpha)\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\|\theta\|^2_{\dot{H}^\alpha}\,d\tau.$$

Passando à norma $L^2(\mathbb{R}^+)$ (ver definição 1.8), resulta que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq (2\pi)\delta^{-\sigma}\|\theta^0\|_{L^2}\Big(\int_0^\infty e^{-2t\delta^{2\alpha}}dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ C(\alpha)\Big(\int_0^\infty \Big(\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\|\theta(\tau)\|^2_{\dot{H}^\alpha}d\tau\Big)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.52}$$

Calculando a primeira integral do lado direito de (3.52), percebemos que

$$\int_0^\infty e^{-2t\delta^{2\alpha}}dt = \frac{1}{2\delta^{2\alpha}}.$$

Usando esta informação em (3.52), chegamos a

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq \|\theta^0\|_{L^2}\frac{(2\pi)\delta^{\alpha-2}}{\sqrt{2}} + C(\alpha)\Big(\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\chi_{(0,t)}(\tau)\|\theta(\tau)\|^2_{\dot{H}^\alpha}d\tau\Big)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

pois $\sigma = 2 - 2\alpha$. Assim, pela Desigualdade de Minkowski para integrais (ver Teorema 1.5), podemos escrever

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq \|\theta^0\|_{L^2}\frac{(2\pi)\delta^{\alpha-2}}{\sqrt{2}} + C(\alpha)\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-2(t-\tau)\delta^{2\alpha}}\chi_{(\tau,\infty)}(t)\|\theta(\tau)\|^4_{\dot{H}^\alpha}dt\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Em decorrência disso, segue que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq \frac{(2\pi)\delta^{\alpha-2}}{\sqrt{2}}\|\theta^0\|_{L^2} + C(\alpha)\int_0^\infty e^{\tau\delta^{2\alpha}}\|\theta(\tau)\|^2_{\dot{H}^\alpha}\Big(\int_\tau^\infty e^{-2\,t\delta^{2\alpha}}dt\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau. \tag{3.53}$$

Observe ainda que

$$\|\theta(\tau)\|^2_{\dot{H}^\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}^2}||\xi|^\alpha\widehat{\theta}(\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{|D|^\alpha\theta}(\tau)|^2 d\tau = \||\widehat{D|^\alpha\theta}(\tau)\|^2_{L^2}.$$

Assim, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\|\theta(\tau)\|^2_{\dot{H}^\alpha} = (2\pi)^2\||D|^\alpha\theta(\tau)\|^2_{L^2}. \tag{3.54}$$

Além disso, é verdade que

$$\int_\tau^\infty e^{-2\,t\delta^{2\alpha}}dt = \frac{e^{-2\tau\delta^{2\alpha}}}{2\delta^{2\alpha}}.$$

Com isso, temos que

$$\left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-2\,t\delta^{2\alpha}}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\tau\delta^{2\alpha}}\delta^{-\alpha}}{\sqrt{2}}. \tag{3.55}$$

Substituindo (3.54) e (3.55) em (3.53), tem-se que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq \frac{(2\pi)\delta^{\alpha-2}}{\sqrt{2}}\|\theta^0\|_{L^2} + C(\alpha)\frac{(2\pi)^2\delta^{-\alpha}}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\||\,D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau. \tag{3.56}$$

Por outro lado, pela igualdade (3.23), inferimos que

$$2\int_0^t \||\,D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Passando ao limite, quando $t \to \infty$, segue que

$$\int_0^{\infty}\||\,D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|\theta^0\|_{L^2}^2.$$

Por isso, podemos reescrever (3.56) da seguinte forma:

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} \leq \frac{(2\pi)\delta^{\alpha-2}}{\sqrt{2}}\|\theta^0\|_{L^2} + C(\alpha)\frac{(2\pi)^2\delta^{-\alpha}}{2\sqrt{2}}\|\theta^0\|_{L^2}^2. \tag{3.57}$$

Por hipótese, $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C$. Além disso, por (1.19), podemos inferir que

$$\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}}^2 \geq (2\pi)^2\|\theta^0\|_{L^2}^2.$$

Consequentemente, segue que

$$\|\theta^0\|_{L^2} \leq \frac{C}{2\pi}.$$

Isso significa que $\theta^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dessa forma, concluímos que $\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot{H}^{-\sigma})} < \infty$ (por (3.57)). Isto implica em

$$\upsilon_\delta \in L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^2)). \tag{3.58}$$

Por outro lado, note que

$$\upsilon_\delta + \omega_\delta = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,\delta)^c}\widehat{\theta} + \chi_{B(0,\delta)}\widehat{\theta}) = \mathcal{F}^{-1}((\chi_{B(0,\delta)^c} + \chi_{B(0,\delta)})\widehat{\theta}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\theta}).$$

Logo, segue que $\upsilon_\delta + \omega_\delta = \theta$.

Por outro lado, (3.46) nos permite inferir que $\omega_\delta \in L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2))$ e, além disso, por (3.23), temos que

$$2\int_0^t \||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.59}$$

Assim, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), segue que

$$\||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|D|^\alpha\theta}\|_{L^2}^2.$$

Por definição de norma $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8), podemos escrever

$$\begin{aligned}\||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{|D|^\alpha\theta}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}||\xi|^\alpha\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{\theta}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^2.\end{aligned}$$

Deste modo, chegamos a

$$\||D|^\alpha\theta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^2.$$

Logo, por (3.59), temos que

$$2(2\pi)^{-2}\int_0^t \|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 d\tau \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Passando ao limite, quando $t \to \infty$, obtemos

$$2(2\pi)^{-2}\int_0^\infty \|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 dt \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2.$$

A partir disso, deduzimos que $\theta \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2))$. Dessa forma, temos que $\upsilon_\delta = \theta - \omega_\delta$ $\in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2))$. Usando isso e (3.58), concluímos que $\upsilon_\delta \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^2))$. Agora, note que, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), resulta que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\widehat{\upsilon_\delta}\|_{L^2}^2.$$

Assim, pela definição de norma $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver definição 1.8), podemos escrever

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^0 |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^2 d\xi.$$

Sabendo que $-2\sigma < 0 < 2\alpha$, pois $\sigma = 2 - 2\alpha$ e $0 < \alpha < 1$, temos que

$$0 = q(-2\sigma) + (1-q)(2\alpha), \quad \text{para algum } q \in (0,1).$$

Com isso, chegamos a

$$\begin{aligned}\|\upsilon_\delta\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{q(-2\sigma)+(1-q)(2\alpha)} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^{2q+2(1-q)} d\xi \\ &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \Big[|\xi|^{q(-2\sigma)} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^{2q}\Big]\Big[|\xi|^{(1-q)(2\alpha)} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^{2(1-q)}\Big] d\xi.\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), resulta que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-2\sigma} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^q \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{\upsilon_\delta}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1-q}.$$

Logo, temos que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-2}\|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^{2q}\|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^{2(1-q)}.$$

Integrando a igualdade acima sobre $\mathbb{R}^+$, obtemos

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)}^2 = (2\pi)^{-2}\int_0^\infty \|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^{2q}\|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^{2(1-q)} d\tau.$$

Usando novamente a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), chegamos a

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)}^2 \le (2\pi)^{-2}\Big(\int_0^\infty \|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^{-\sigma}}^2 d\tau\Big)^q \Big(\int_0^\infty \|\upsilon_\delta\|_{\dot{H}^\alpha}^2 d\tau\Big)^{1-q}.$$

Com isso, deduzimos que

$$\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)}^2 \le (2\pi)^{-2}\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{-\sigma})}^{2q}\|\upsilon_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^\alpha)}^{2(1-q)}.$$

Em consequência disso, inferimos que $\upsilon_\delta \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$, pois $\upsilon_\delta \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^2) \cap$

$\dot{H}^{\alpha}(\mathbb{R}^2)$). Sabendo disso, defina o conjunto

$$E_\delta = \{t \geq 0 : \|v_\delta(t)\|_{L^2} > \tfrac{\varepsilon}{2}\}.$$

Então, observe que

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 |E_\delta| = \int_{E_\delta} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 dt \leq \int_{E_\delta} \|v_\delta(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \int_0^\infty \|v_\delta(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty,$$

onde $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue usual (ver [10] para mais informações). A partir disso, podemos definir o tempo finito

$$T_\varepsilon = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^\infty \|v_\delta(t)\|_{L^2}^2 dt$$

e, consequentemente, $|E_\delta| \leq T_\varepsilon$ (lembre que δ está fixo). Sabendo disso, podemos afirmar que $\exists\, t_0 \in [0, T_\varepsilon + 1] \backslash E_\delta$. Suponha que não existe $t_0 \in [0, T_\varepsilon + 1] \backslash E_\delta$. Isso implicaria que $[0, T_\varepsilon + 1] \backslash E_\delta = \emptyset$. Por isso, seguiria que $[0, T_\varepsilon + 1] \cap E_\delta^c = \emptyset$. Isso seria equivalente a $[0, T_\varepsilon + 1] \subseteq E_\delta$. Aplicando a medida de Lebesgue, teríamos que $|[0, T_\varepsilon + 1]| \leq |E_\delta|$ (ver [10] para mais detalhes das propriedades desta medida). Portanto, chegaríamos a

$$T_\varepsilon < T_\varepsilon + 1 \leq |E_\delta|.$$

Logo, valeria $T_\varepsilon < |E_\delta|$. Isso é uma contradição! Portanto, existe $t_0 \in [0, T_\varepsilon + 1]$ e $t_0 \notin E_\delta$. Sendo assim, temos que

$$\|v_\delta(t_0)\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.60}$$

Vimos que $\theta = v_\delta + \omega_\delta$. Dessa forma, podemos observar que

$$\|\theta(t_0)\|_{L^2} = \|v_\delta(t_0) + \omega_\delta(t_0)\|_{L^2} \leq \|v_\delta(t_0)\|_{L^2} + \|\omega_\delta(t_0)\|_{L^2}.$$

Consequentemente, por (3.46) e (3.60), segue que

$$\|\theta(t_0)\|_{L^2} < \varepsilon. \tag{3.61}$$

Pelo Teorema 3.1, temos que $\gamma(t, x) = \theta(t_0 + t, x)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$, é a única solução para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \gamma + |D|^{2\alpha}\gamma + u_\gamma \cdot \nabla \gamma = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \gamma(0,x) = \theta(t_0, x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.62}$$

(Note que, por (3.3) (ver Teorema 3.1), segue que

$$\|\gamma(0)\|_{H^{2-2\alpha}} = \|\theta(t_0)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C.)$$

Assim, da primeira equação do sistema (3.62), temos que

$$\partial_t \gamma + |D|^{2\alpha}\gamma + u_\gamma \cdot \nabla \gamma = 0.$$

Isso implica em

$$\partial_t \gamma = -|D|^{2\alpha}\gamma - u_\gamma \cdot \nabla \gamma.$$

Além disso, observe que

$$\frac{d}{dt}\|\gamma\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle \gamma, \gamma \rangle_{L^2} = 2\langle \gamma, \partial_t \gamma \rangle_{L^2}.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\gamma\|_{L^2}^2 = -\langle \gamma, |D|^{2\alpha}\gamma \rangle_{L^2} - \langle \gamma, u_\gamma \cdot \nabla \gamma \rangle_{L^2}.$$

Agora, vamos analisar cada um dos termos do lado direito da igualdade acima. Assim, pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), temos que

$$\langle \gamma, |D|^{2\alpha}\gamma \rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\langle \widehat{\gamma}, \widehat{|D|^{2\alpha}\gamma} \rangle_{L^2}.$$

Por definição de produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver Teorema 1.7), segue que

$$\begin{aligned} \langle \gamma, |D|^{2\alpha}\gamma \rangle_{L^2} &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\gamma}(\xi)\overline{\widehat{|D|^{2\alpha}\gamma}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\gamma}(\xi)\overline{|\xi|^{2\alpha}\widehat{\gamma}(\xi)}d\xi \\ &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\gamma}(\xi)|\xi|^{2\alpha}\overline{\widehat{\gamma}(\xi)}d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\alpha}|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} ||\xi|^{\alpha}\widehat{\gamma}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{|D|^{\alpha}\gamma}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos inferir que

$$\langle \gamma, |D|^{2\alpha}\gamma\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-2}\|\widehat{|D|^{\alpha}\gamma}\|_{L^2}^2.$$

Utilizando novamente a Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), chegamos a

$$\langle \gamma, |D|^{2\alpha}\gamma\rangle_{L^2} = \||D|^{\alpha}\gamma\|_{L^2}^2.$$

A partir disso, podemos observar que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\gamma\|_{L^2}^2 + \||D|^{\alpha}\gamma\|_{L^2} = -\langle \gamma, u_\gamma \cdot \nabla\gamma\rangle_{L^2}.$$

Considerando $\nabla \cdot u_\gamma = 0$ (ver Lema 1.1), como fizemos em (3.22), podemos concluir que

$$\langle \gamma, u_\gamma \cdot \nabla\gamma\rangle_{L^2} = 0.$$

Em decorrência disso, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\gamma\|_{L^2}^2 + \||D|^{\alpha}\gamma\|_{L^2}^2 = 0.$$

Integrando sobre $[0, t]$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\|\gamma\|_{L^2}^2 d\tau + \int_0^t \||D|^{\alpha}\gamma\|_{L^2}^2 d\tau = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que

$$\frac{1}{2}\|\gamma(\tau)\|_{L^2}^2\Big|_0^t + \int_0^t \||D|^{\alpha}\gamma\|_{L^2}^2 d\tau = 0.$$

Fazendo as devidas substituições, deduzimos que

$$\|\gamma(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^{\alpha}\gamma(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \|\gamma^0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $\gamma(t) = \theta(t_0 + t)$, por (3.61), segue que

$$\|\theta(t_0 + t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^{\alpha}\theta(t_0 + \tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta(t_0)\|_{L^2}^2 < \varepsilon^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|\theta(t_0+t)\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Fazendo $s = t_0 + t$, concluímos que

$$\|\theta(s)\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \forall s \geq t_0. \tag{3.63}$$

Portanto, $\lim\limits_{s\to\infty} \|\theta(s)\|_{L^2} = 0$.

Passo 2: Vamos mostrar, por fim, que

$$\lim_{t\to\infty} \|\theta(t)\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

Para isso, note que por hipótese $\|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C = \frac{1}{4C_\alpha}$, onde C_α é dado em (3.8). Então, pelo Teorema 3.1, tem-se que

$$\theta \in C(\mathbb{R}^+; H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)) \quad \text{e} \quad |D|^\alpha\theta \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)).$$

Por outro lado, observe que

$$\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-2\alpha}} = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi.$$

Sabendo disso, façamos $l = \frac{\alpha}{2-\alpha}$ (assim, $1 - l = \frac{2-2\alpha}{2-\alpha}$). Veja que, $l > 0$, pois $0 < \alpha < 2$. Além disso, $l < 1$, uma vez que $\alpha < 1$. Por outro lado, como

$$\frac{2\alpha}{2-\alpha} + \frac{2(2-2\alpha)}{2-\alpha} = 2,$$

então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-2\alpha)} |\widehat{\theta}(t)|^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}+\frac{2(2-2\alpha)}{2-\alpha}} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)|^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}} |\xi|^{2(2-2\alpha)} |\widehat{\theta}(t)|^{\frac{2(2-2\alpha)}{2-\alpha}} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 1.3), com $\frac{1}{p} = l$ e $\frac{1}{q} = 1 - l$, segue que

$$\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)|^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}\cdot\frac{2-\alpha}{\alpha}} d\xi \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} [|\xi|^{2(2-2\alpha)}]^{\frac{2-\alpha}{2-2\alpha}} |\widehat{\theta}(t)|^{\frac{2(2-2\alpha)}{2-\alpha}\cdot\frac{2-\alpha}{2-2\alpha}} d\xi \right)^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}.$$

Em consequência disso, chegamos a

$$\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi\Big)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(2-\alpha)} |\widehat{\theta}(t)|^2 d\xi\Big)^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}.$$

Dessa forma, temos que

$$\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \|\widehat{\theta}(t)\|_{L^2}^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^{\frac{2(2-2\alpha)}{2-\alpha}}.$$

Isso equivale a

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq \|\widehat{\theta}(t)\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}.$$

Pela Identidade de Plancherel (ver Teorema 1.14), deduzimos que

$$\|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \leq (2\pi)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|\theta(t)\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}.$$

Elevando as normas acima a $\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$ e integrando a desigualdade acima sobre $\mathbb{R}^+$, obtemos

$$\int_0^\infty \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt \leq (2\pi)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty \|\theta(t)\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-\alpha}} dt,$$

pois $\alpha < 1$. Pela igualdade (3.23), tem-se que

$$\int_0^\infty \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt \leq (2\pi)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|\theta^0\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty \|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-\alpha}} dt, \tag{3.64}$$

desde que $0 < \alpha < 1$. Observe ainda que, por (1.21), é verdade que

$$\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-\alpha}} \leq \|\theta(t)\|^2_{H^{2-\alpha}},$$

porque $\alpha \leq 2$. Sendo assim, podemos inferir que

$$\int_0^\infty \|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-\alpha}} dt \leq \int_0^\infty \|\theta(t)\|^2_{H^{2-\alpha}} dt \leq \int_0^\infty \||D|^\alpha \theta(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} dt.$$

Usando (3.3) (ver Teorema 3.1), deduzimos que

$$\int_0^\infty \|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{2-\alpha}} dt \leq \|\theta^0\|^2_{H^{2-2\alpha}} < \infty.$$

Utilizando esta informação em (3.64), concluímos que

$$\theta \in L^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{2-2\alpha}(\mathbb{R}^2)). \tag{3.65}$$

Agora, fixe $\varepsilon > 0$ e defina o conjunto

$$F_\varepsilon = \{\, t \geq t_0 : \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} \geq \varepsilon\},$$

onde t_0 é o tempo obtido no Passo 1. Com isso, observe que

$$\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}|F_\varepsilon| = \int_{F_\varepsilon} \varepsilon^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt \leq \int_{F_\varepsilon} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt < \infty,$$

por (3.65) (lembre também que $0 < \alpha < 1$). Em consequência disso, temos que

$$\varepsilon^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}|F_\varepsilon| \leq \int_0^{\infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt.$$

Dessa forma, definimos o tempo finito

$$t_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \int_0^{\infty} \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dt,$$

de modo que $|F_\varepsilon| \leq t_\varepsilon$. De maneira analóga ao que provamos anteriormente, concluímos que existe um tempo $t_1 \in [t_0, t_0 + t_\varepsilon + 1] \backslash F_\varepsilon$. Logo, $t_1 \geq t_0$ e $t_1 \notin F_\varepsilon$. Sendo assim, tem-se que

$$\|\theta(t_1)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}} < \varepsilon.$$

Como $t_1 \geq t_0$, então, por (3.63), podemos escrever

$$\|\theta(t_1)\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Por isso, aplicando (1.19), chegamos a

$$\|\theta(t_1)\|_{H^{2-2\alpha}}^2 = (2\pi)^2 \|\theta(t_1)\|_{L^2}^2 + \|\theta(t_1)\|_{\dot{H}^{2-2\alpha}}^2 < (2\pi)^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 < [(2\pi)^2 + 1]\varepsilon^2. \tag{3.66}$$

Pelo Teorema 3.1, temos que $\gamma(t,x) = \theta(t + t_1, x)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$, é a única solução para o sistema

$$\begin{cases} \partial_t \gamma + |D|^{2\alpha}\gamma + u_\gamma \cdot \nabla\gamma = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \gamma(0,x) = \theta(t_1, x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.67}$$

(Note que, por (3.3), ver Teorema 3.1, temos que

$$\|\theta(t_1)\|_{H^{2-2\alpha}} \leq \|\theta^0\|_{H^{2-2\alpha}} < C = \frac{1}{4C_\alpha},$$

onde C_α é dado em (3.8)). Assim, como, por (3.3) (ver Teorema 3.1) vale a desigualdade

$$\|\gamma(t)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^{2\alpha}\gamma(\tau)\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\gamma^0\|^2_{H^{2-2\alpha}},$$

então, é verdade que

$$\|\theta(t+t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^{2\alpha}\theta(\tau+t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau \leq \|\theta(t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}}.$$

Dessa forma, usando (3.66), segue que

$$\|\theta(t+t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}} + 2\int_0^t \||D|^{2\alpha}\theta(\tau+t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}} d\tau < [(2\pi)^2 + 1]\varepsilon^2.$$

Em consequência disso, podemos escrever

$$\|\theta(t+t_1)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq [(2\pi)^2 + 1]\varepsilon^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Com isso, escolha $s = t + t_1$ para obter

$$\|\theta(s)\|^2_{H^{2-2\alpha}} \leq [(2\pi)^2 + 1]\varepsilon^2, \quad \forall s \geq t_1.$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{s\to\infty} \|\theta(s)\|_{H^{2-2\alpha}} = 0.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Álvares, E. E. V., "Um estudo das equações de Navier-Stokes com condições de Fronteira". Dissertação (Mestrado). Florianópolis, 2019.

[2] Amara, M., Benameur, J., "Global solution of anisotropic quasi-geostrophic equations in Sobolev space," J. Math. Anal. Appl. **516**, 126512, 15 pp. (2022).

[3] Benameur, J., Blel, M., "Asymptotic Study of the 2D-DQGE Solutions", J. Funct. Spaces, Art. ID 538374, 6pp. (2014).

[4] Benameur, J., A., S. B., "Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space", J. Math. Anal. Appl. **497**, Paper No. 124873, 30 pp (2021).

[5] Benameur, J., Katar, C., "Asymptotic study of supercritical surface quasi-geostrophic equation in critical space," Nonlinear Anal. **224**, 12 pp. (2022).

[6] Brezis, H., "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations". Springer, 2011.

[7] Chemin, J. Y., "About Navier-Stokes Equations," Publication du Laboratoire Jaques-Louis Lions, Université de Paris VI, R96023 (1996).

[8] De Carvalho, G. J., "Alguns resultados do Laplaciano Fracionário e Funções s-harmônicas," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, (2020).

[9] Dos Santos, I. J. N., "Completude e Dual de Espacos de Sobolev Não Homogêneos," Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão (2019).

[10] Folland, G. B., "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications". Second Edition. ed. [S. l.: s. n.], 1999.

[11] Guterres, R., Melo, W. G., Rocha, N. F., Santos, T. S. R., "Well-Posedness, Blow-up Criteria and Stability for Solutions of the Generalized MHD Equations in Sobolev-Gevrey Spaces,"Acta Appl. Math. **176** (2021).

[12] Isnard, C., "Introdução à medida e integração". 1ª ed., 200.

[13] Júnior, A. A. de C., "Curso de teoria da medida". 2ª ed., 2008.

[14] Melo, W. G., Rocha, N. F., dos Santos Costa, N., "Decay rates for mild solutions of the quasi-geostrophic equation with critical fractional dissipation in Sobolev-Gevrey spaces,"Acta Appl. Math., **186**, 4, 13 pp. (2023).

[15] Melo, W. G., Santos, T. S. R., "Time decay rates for the generalized MHD-α equations in Sobolev-Gevrey spaces,"Appl. Anal.**18**, 6623-6644 (2022).

[16] Lemarie-Rieusset, P.G, "The Navier-Stokes Problem in the 21 st Century ". Taylor & Francis Group, 2018.

[17] Melo, W. G., Santos, T. S. R., Costa, N. S. "Existence of solutions and their behavior for the anisotropic quasi-geostrophic equation in Sobolev and Sobolev-Gevrey spaces,"(2022). (Submetido)

[18] Melo, W. G., Rocha, N. F., Costa, N. S. "Decay Rates for Mild Solutions of the Quasi-geostrophic Equation with Critical Fractional Dissipation in Sobolev-Gevrey Spaces,"Acta Appl. Math. **186**, Paper No. 4. (2023).

[19] Miura, H., "Dissipative quasi-geostrophic equation for large initial data in the critical Sobolev space,"Comm. Math. Phys. **267**, 141-157 (2006).

[20] Mustapha, A., Benameur, J., Katar, C., "Global solution of anisotropic quasi-geostrophic equations in Sobolev space,"J. Math. Anal. Appl. **516**, 15 pp. (2022).

[21] Oliveira, de F. S., "Sinais propagantes para oeste no oceano Atlântico: vórtices ou ondas de Rossby."Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

[22] Pozrikidis, C., "The fractional Laplacian,"CRC Press, Boca Raton, FL, xv+278 pp. (2016).

[23] Raphaldine, B., Raupp, C., Dias, P., “Introdução Matemática à Dinâmica dos Fluidos Geofísicos”. Rio de Janeiro: Impa, 2017.

[24] Rieutord, M., “Fluid Dynamics: An Introdution”. First ed., 2014.

[25] Stein, E. M., Shakarchi, R., “Fourier Analysis: an introduction”. Princeton University Press Princeton and Oxford, 2007.

[26] White, F. M., “Mecânica dos Fluidos.” 6^a ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

[27] Wu, J., “The 2D dissipative quasi-geostrophic equation,” Appl. Math. Lett., **15** 925-930 (2002).

[28] Wu, J., “Generalized MHD equations,” J. Differential Equations, **195** 284-312 (2003).