Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Jeverson Silva Santos

Equações de evolução fracionárias em escalas de interpolação e aplicações

São Cristóvão
2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S237e Santos, Jeverson Silva
Equações de evolução fracionárias em escalas de interpolação e aplicações / Jeverson Silva Santos ; orientador Bruno Luis de Andrade Santos. - São Cristóvão, 2023.
102 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Fluxo de Ricci. 2. Equações integrais. 3. Equação de onda. I. Santos, Bruno Luis de Andrade orient. II. Título.

CDU 517.9

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA-PROMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Equações de evolução fracionárias em escalas de interpolação e aplicações.

por

Jeverson Silva Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Bruno de Andrade

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos - UFS
Orientador

Marcelo Fernandes de Almeida

Prof. Dr. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Primeiro Examinador

Joelma A. de Moura Nascimento

Prof[a]. Dr[a]. Joelma Azevedo De Moura - UPE
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 28 de julho de 2023.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe e ao Departamento de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe.
Este estudo foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Resumo

A dissertação trata do estudo de equações de evolução lineares e semilineares com derivada fracionária de Caputo e parte linear governada por um operador setorial. No primeiro caso, estudamos estimativas sobre as famílias de operadores lineares associadas ao problema em escalas abstratas de interpolação e condições suficientes para boa-colocação global e regularidade espacial de soluções brandas. Na caso semilinear, estudamos a existência e unicidade de soluções brandas locais para o problema e sua possível continuação para um intervalo máximo de existência. Também estudamos o problema de regularidade espacial e dependência contínua em relação aos dados iniciais. Por fim, estudamos aplicações dos resultados abstratos em alguns modelos importantes, a saber, as equações de difusão-onda fracionárias e equações de placas fracionárias.

Palavras-chave: Equações de evolução fracionárias; Boa colocação e regularidade de soluções; Equação de difusão-onda; Equação da placa fracionária.

Abstract

This work is dedicated to the study of linear and semilinear evolution equations with Caputo fractional derivative, and linear part governed by a sectorial operator. In the first case, we study estimates on the families of linear operators associated with the problem in abstract interpolation scales and sufficient conditions to global well-posedness and spatial regularity of mild solutions. In the semilinear situation, we study the existence and uniqueness of local mild solutions to the problem and their possible continuation to a maximal interval of existence. We also study the problem of spatial regularity and continuous dependence with respect to initial data. Finnaly, we study applications of the abstract results to diffusion-wave equations and fractional plate equations.

Keywords:Fractional evolution equations; Well-posedness and regularity of solutions; Diffusion-wave equation; Fractional plate equation.

Conteúdo

Introdução

A dissertação é dedicada ao estudo de boa colocação e regularidade espacial para equações de evolução semilineares da forma

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde D_t^α é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (1, 2)$, $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ é um operador linear tal que $-A$ é setorial no espaço de Banach X_0, f é uma função não linear satisfazendo certas condições e $u_0, u_1 \in X_1 := D(A)$. Os principais resultados aqui apresentados estão contidos nas referências [11, 23].

Este tipo de problema de equação de evolução tem sido objeto de vários trabalhos científicos nos últimos anos, uma vez que este tópico envolve uma grande variedade de aplicações, como por exemplo, probabilidade [22], biomatemática [13], psicologia [24], funções especiais e mecânica dos fluidos [26], fenômenos de transporte e redes elétricas [7], entre outros. Um exemplo importante onde essas equações aparecem naturalmente é a teoria da viscoelasticidade linear unidimensional. As equações básicas desta teoria são dadas por

$$\sigma_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t), \tag{0.0.2}$$

$$\epsilon(x,t) = u_x(x,t), \tag{0.0.3}$$

$$\epsilon(x,t) = J_0\sigma(x,t) + \dot{J} * \sigma(x,t), \tag{0.0.4}$$

onde ρ é a densidade, u é o deslocamento, σ é a tensão e ϵ é a deformação. A função material J, que representa a característica do material onde ocorre o fenômeno, é não negativa e não decrescente. Seu valor inicial $J_0 = \lim_{t\to 0^+} J(t) = J(0^+) \geq 0$ é chamado de característica instantânea. A equação de evolução para o deslocamento $u(x,t)$ pode ser derivada das equações acima de tal forma a obter

$$u_{xx} = \epsilon_x(x,t) = (J_0 + \dot{J}*)\sigma_x = (J_0 + \dot{J}*)\rho u_{tt}. \tag{0.0.5}$$

Se considerarmos os chamados materiais do tipo potência, cuja função material é dada por

$$J(t) = \frac{1}{\rho a}\frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)},\ \ 0 < \gamma \leq 1,\ t > 0,$$

onde a é uma constante positiva e Γ é a função Gama de Euler, a equação (0.0.5) ganha a forma

$$\partial_t^\alpha u = au_{xx}, \tag{0.0.6}$$

com $1 \leq \alpha = 2 - \gamma \leq 2$ e ∂_t^α é a derivada fracionária de Caputo em relação ao tempo. Seguindo as referências [6] e [18], a lei da fluência anterior é fornecida por modelos viscoelásticos cujo a relação tensão-deformação verifica

$$\sigma = \rho a \partial_t^\alpha \epsilon, \ 0 < \gamma \leq 1.$$

Para $\gamma = 1$ temos a situação do fluido Newtoniano, onde a representa a viscosidade cinemática. Neste caso, a equação (0.0.6) é a equação de difusão. Quando $\gamma = 0$, segue que (0.0.6) torna-se a equação da onda de D'Alembert com velocidade de onda $c = \sqrt{a}$. Na situação intermediária $0 < \gamma < 1$, a equação de evolução (0.0.6) é chamada de equação de difusão-onda fracionária.

Do ponto de vista matemático, o estudo da existência, unicidade e dependência contínua das soluções, a teoria da regularidade (espacial ou temporal), a análise do comportamento assintótico e a caracterização de soluções especiais são temas bastante proeminentes na teoria de equações de evolução fracionárias, ver [2, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17]. Com este fato em mente, o objetivo deste trabalho é estudar resultados de boa colocação e teoria de regularidade espacial para (0.0.1) e fornecer aplicações de tal teoria em algumas equações de evolução concretas. Como sabemos, uma abordagem eficiente para equações diferenciais parciais está intimamente ligada ao conceito de soluções escolhido para se trabalhar. Nesta dissertação, estamos particularmente interessados na teoria de soluções brandas para (0.0.1). Consideraremos o problema acima em escalas abstratas de interpolação-extrapolação. Este tipo de escala de espaços de Banach é muito flexível e se aplica a uma grande variedade de situações concretas. Em nossa situação, essas escalas são construídas com a ajuda do operador linear A e são muito bem adaptadas aos problemas apresentados. Além disso, estas escalas podem ser usadas como medidas precisas da regularidade das soluções. Recomendamos o livro [4] para conceitos e resultados gerais sobre escalas abstratas de interpolação-extrapolação.

No Capítulo 1 deste trabalho relembramos alguns conceitos e fatos gerais que serão úteis no estudo das equações de evolução fracionárias. Em especial, relembramos algumas propriedades especiais das funções Gamma e Beta e fazemos uma breve revisão sobre integração e diferenciação fracionária no sentido de Riemann-Liouville e Caputo. Ademais, estudamos as relações que estes elementos possuem com a teoria da transformada de Laplace. No Capítulo 2 começamos estudando os métodos de interpolação real. Apresentamos as principais propriedade do J-método e do K-método, além de comprovar sua equivalência. Estudamos também as escalas de interpolação-extrapolação abstratas e apresentamos as escalas de potência fracionárias associadas a operadores setoriais como um exemplo.

O Capítulo 3 contém os enunciados e demonstrações dos principais resultados a cerca do estudo da equação (0.0.1). Primeiramente, assumindo que A é um operador setorial compatível com a ordem de derivação $\alpha \in (1,2)$, provamos que as famílias de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ são fortemente contínuas e admitem extensões analíticas para setores adequados do plano complexo. Além disso, usando argumentos precisos de interpolações e resultados de subordinações adequados, estudamos o efeito de suavização para essas famílias nas escalas de interpolação-extrapolação associadas ao operador A. Adicionalmente, estudamos condições suficientes para a boa colocação global da versão linear de (0.0.1). Como aplicação deste último resultado, estudamos a equação linear de difusão-onda não homogênea

$$\partial_t^\alpha u = \Delta u + f, \text{ em } [0,\infty) \times \mathbb{R}^N,$$

sujeita aos dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(0,x) = u_1(x),$$

onde $u_0, u_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 < q < \infty$, $N \geq 1$, e $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada. De fato, para uma constante adequada $\tilde{\eta}_q \in (1,2)$ e todo $\alpha \in (1,\tilde{\eta}_q)$, a equação linear de difusão-onda tem uma solução branda dada por

$$u(t,x) = E_\alpha(tA_q)u_0(x) + S_\alpha(tA_q)u_1(x) + \int_0^t R_\alpha((t-s)A_q)f(s,x)ds,$$

$t \in [0,\infty)$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Note que no caso limite $\alpha = 2$, o problema acima torna-se a equação linear da onda. Nessa situação, é importante lembrar que, de forma geral, o problema está mal posto em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$. Esta afirmação decorre do fato bem conhecido de que se o operador de Laplace gera uma família cosseno em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$, então $N = 1$ ou $q = 2$, veja, por exemplo, [5, Teorema 8.3.12].

Ainda no Capítulo 3 estudamos o problema semilinear (0.0.1) na situação onde o termo não linear é uma função que satisfaz uma condição do tipo localmente Lipschitz. Esse tipo de suposição é bastante geral e permite tratar, por exemplo, equações com não linearidades do tipo gradiente. No centro de nosso estudo deste problema está o efeito suavizante de $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$. De fato, com este resultado fornecemos condições suficientes para a existência de uma única solução branda $u \in C([0,\tau], X_1)$ dada por

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds, \qquad t \in [0,\tau].$$

Além disso, a solução depende continuamente dos dados iniciais e obtém um efeito de regularização imediato. Como aplicação, consideramos a equação de difusão-onda não linear

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \Delta u + |u|^{\rho-1}u, \text{ em } (0,\infty) \times \Omega, \\ u = 0, \text{ em } [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde $\rho > 1$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente regular $\partial\Omega$, $\alpha \in (1,2)$ e ∂_t^α é a derivada fracionária de Caputo. Sob condições adequadas, garantimos a existência de uma única solução branda $u \in C([0,\tau], L^q(\Omega))$ para o problema acima, que pode ser continuada até um tempo máximo de existência $t_{max} > 0$ tal que $t_{max} = \infty$ ou

$$\limsup_{t \to t_{max}^-} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} = \infty.$$

Além disso, esta solução obtém uma regularização imediata e depende continuamente dos dados iniciais. As aplicações supramencionadas estão contidas no Capítulo 4, o qual contém também um estudo sobre a equação da placa fracionária com não-linearidades do tipo gradiente no contexto de dados iniciais em H_0^1.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo reúne as principais ferramentas que utilizaremos no decorrer desta dissertação. Em especial, faremos um apanhado de definições e resultados que serão importantes para nosso estudo. Por brevidade, não iremos provar todos dos fatos aqui expostos.

1.1 Resultados gerais

Inicialmente, precisamos apresentar ferramentas matemáticas relevantes para o estudo do cálculo fracionário. A função Gama apresenta características intrínsecas estando relacionadas com as definições de operadores importantes que posteriormente serão abordados.

Definição 1.1.1. *A função Gama é definida por*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

para $Re(z) > 0$.

A função Gama tem as seguintes propriedades:

i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;

ii) $\Gamma(n+1) = n!$, com $n \in \mathbb{N}$;

iii) Para $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$, temos

$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(1+z)(2+z)...(n+z)}.$$

Definição 1.1.2. *A função Beta é definida pela integral*

$$B(z_1, z_2) := \int_0^1 s^{z_1-1}(1-s)^{z_2-1}ds,$$

e o seu domínio é dado por

$$D(B) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; Re(z_1) > 0 \text{ e } Re(z_2) > 0\}.$$

Uma relação importante entre as funções Gamma e Beta é dada pela igualdade

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)}, \quad \forall\ (z_1, z_2) \in D(B).$$

Definição 1.1.3. *Seja $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ um caminho com variação limitada e $f : \{\gamma\} \subset \mathbb{C} \to X$ uma função vetorial continua. A integral de contorno de f sobre a curva γ é definida por*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (f \circ \gamma)d\gamma,$$

onde a integral é considerada no sentido de Riemann-Stieltjes.

Quando $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é um caminho suave e $f : \{\gamma\} \subset \mathbb{C} \to X$ uma função vetorial continua segue que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definição 1.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : \Omega \to X$ uma função vetorial. Se para todo $\lambda \in \Omega$ existe $f'(\lambda) \in X$, tal que*

$$\lim_{z \to \lambda} \left\| \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} - f'(\lambda) \right\| = 0,$$

dizemos que f é holomorfa e chamamos $f' : \Omega \to X$ a sua derivada.

Teorema 1.1.1. *(Teorema de Cauchy) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio de Cauchy e $f : \overline{\Omega} \to X$ uma função continua que é holomorfa em Ω. Então*

$$\int_{+\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

Além disso, para $\lambda \in \Omega$,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \lambda}dz.$$

Concluiremos esta seção destacando um caminho complexo que será muito importante nesta dissertação. Dados $\epsilon > 0$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, considere

$$Ha_1 := \{se^{i\theta};\ s \in [\epsilon, \infty)\}, \quad Ha_2 := \{\epsilon e^{is};\ s \in [-\theta, \theta]\} \quad \text{e} \quad Ha_3 := \{se^{-i\theta};\ s \in [\epsilon, \infty)\}.$$

Chamaremos

$$Ha = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3$$

de caminho de Hankel. Em alguns casos escrevemos $Ha = Ha(\epsilon, \theta)$ para mostra a dependência do raio e do ângulo.

Para a demonstração do próximo lema ver [19].

Lema 1.1.1. *(Desigualdade singular de Gronwall) Sejam $T > 0, a, b \geq 0$ e $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Considere a função não negativa $\phi \in L^\infty(0, T)$, tal que*

$$\phi(t) \leq at^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta}\phi(s)ds, \forall t \in [0, T].$$

Então existe uma constante $C = C(T, \alpha, \beta, b)$, tal que

$$\phi(t) \leq aCt^{-\alpha} \text{ para quase todo } t \in [0, T].$$

1.2 Transformada de Laplace

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^+ \to X$ é do tipo exponencial se existem constantes $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|f(t)\|_X \leq Me^{\gamma t},\ \forall t \geq t_0.$$

É simples verificar que para uma função localmente integrável do tipo exponencial $f : \mathbb{R}^+ \to X$ existe $\gamma > 0$ tal que a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

é convergente para $Re(\lambda) > \gamma$. Segue deste fato que $\widehat{f}$ dada pela regra

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

está bem definida ao menos no conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re(\lambda) > \gamma\}$, para algum $\gamma > 0$. Chamamos $\widehat{f}$ de transformada de Laplace de f. É comum também representar a transformada de Laplace por $\mathcal{L}$, isto é,

$$\mathcal{L}\{f\}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda).$$

Definição 1.2.1. *A convolução entre duas funções mensuráveis $f, g : [0, \infty) \to X$ é dada pela regra*

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad t > 0,$$

sempre que a integral existe.

Quando $f, g : [0, \infty) \to X$ são funções localmente integráveis e de tipo exponencial, segue que $f * g$ é localmente integrável, do tipo exponencial e vale

$$\mathcal{L}\{f * g\}(\lambda) = \mathcal{L}\{f\}(\lambda)\mathcal{L}\{g\}(\lambda),$$

onde λ está na região de convergência de ambas as funções.

1.3 Integração e diferenciação fracionária

Finalizamos este capítulo com a noção do cálculo fracionário, o qual é de conhecimento essencial para o estudo que segue. Estudaremos as definições, assim como algumas propriedades dos operadores de integração e derivação fracionária do tipo Riemann-Lioville e Caputo. Para um melhor detalhamento desse assunto sugerimos ao leitor a referência [20].

Para $\beta > 0$, considere as funções

$$g_\beta(t) = \frac{t^{(\beta-1)}}{\Gamma(\beta)}, \quad t > 0. \tag{1.3.1}$$

Para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \int_0^t g_\alpha(t-s)g_\beta(s)ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} \frac{s^{(\beta-1)}}{\Gamma(\beta)} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} s^{(\beta-1)} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(t\left(1 - \frac{s}{t}\right)\right)^{\alpha-1} s^{(\beta-1)} ds \\
&= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} s^{(\beta-1)} ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{s}{t}$, segue que

$$\begin{aligned}(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} \frac{(xt)^{(\beta-1)}}{t} dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{(\beta-1)} dx. \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha,\beta) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} = g_{\alpha+\beta}(t).\end{aligned}$$

Isto é, $(g_\alpha * g_\beta) = g_{\alpha+\beta}$.

Definição 1.3.1. *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ de uma função $f \in L^1$ é dada por*

$$J_t^\alpha f(t) := (g_\alpha * f)(t), \quad t > 0.$$

Por convenção, escrevemos $J_t^0 f = f$, $t > 0$.

Observe que se $\alpha, \beta \geq 0$, $t > 0$ e $f \in L^1$, então

$$\begin{aligned}J_t^\alpha (J_t^\beta f(t)) &= J_t^\alpha (g_\beta * f)(t) = [g_\alpha * (g_\beta * f)](t) \\ &= [(g_\alpha * g_\beta) * f](t) = (g_{\alpha+\beta} * f)(t) = J^{\alpha+\beta} f(t),\end{aligned}$$

ou seja, $J_t^\alpha J_t^\beta = J^{\alpha+\beta}$.

Definição 1.3.2. *A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ de uma função $f \in L^1$ tal que $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}$ é definida por*

$$\mathbf{D}_t^\alpha f(t) := D_t^m (g_{m-\alpha} * f)(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > 0,$$

onde D_t^m é a derivada de ordem inteira $m = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$.

Sejam $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ e $f \in L^1$. A integral e a derivada de Riemann-Liouville verificam a relação

$$\mathbf{D}_t^\alpha J_t^\alpha f = f.$$

Além disso, se $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}$, então

$$J_t^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0) g_{\alpha+k+1-m}(t).$$

Quando $\alpha \in (0,1)$ esta relação se torna

$$J_t^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = f(t) - (g_{1-\alpha} * f)(0) g_\alpha(t).$$

Já para $\alpha \in (1,2)$ vale

$$J_t^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = f(t) - (g_{1-\alpha} * f)(0) g_{\alpha-1}(t) - (g_{2-\alpha} * f)^{'}(0) g_\alpha(t).$$

De maneira geral, se as k derivadas de $g_{m-\alpha} * f$ são nulas, então vale a recíproca

$$J_t^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha f = f.$$

Apesar de ser uma generalização da noção de derivada de ordem inteira, a derivada de Riemman-Liouville não possui algumas propriedades importantes. Por exemplo, se $\alpha \in (0,1)$ então $\mathbf{D}_t^\alpha 1 = g_{1-\alpha}$. A ideia então é considerar uma outra noção de derivação fracionária que mantenha boas propriedades da derivação inteira.

Definição 1.3.3. *A derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0$ de uma função $f \in W^{m,1}$ é definida por*

$$D_t^\alpha f(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t), \quad t > 0,$$

onde $m = \lceil \alpha \rceil$.

Se $f \in L^1$, $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}$ e $f \in C^{m-1}$, então vale a relação

$$D_t^\alpha f(t) = \mathbf{D}_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t).$$

Novamente, a derivada de Caputo é uma inversa à esquerda de J_t^α, mas em geral, não é uma inversa à direita. Por exemplo, se $\alpha \in (0,1)$, $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}$ e $f \in C$, então

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0).$$

No caso onde $\alpha \in (1,2)$, $g_{2-\alpha} * f \in W^{2,1}$ e $f \in C$, obtemos

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0) - f^{'}(0) g_2(t), \quad t > 0.$$

Para finalizar esta seção relembre que a transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0$ de uma função f é dada por

$$\widehat{D_t^\alpha} f(\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{m-1-k}, \tag{1.3.2}$$

onde $m = \lceil \alpha \rceil$.

Capítulo 2

Teoria básica de interpolação

Nesta seção, coletamos as principais definições e resultados básicos da teoria de interpolação que usaremos neste trabalho. A maior parte dos resultados foram baseados nas referências [12, 23]. Recomendamos também os trabalhos [1, 4, 21, 25].

2.1 Interpolação real

Neste seção, apresentamos o método de interpolação o real. Ele é toda uma família de funtores de interpolação, indexados no intervalo $(0, 1)$, que tem uma propriedade útil chamada propriedade de reiteração.

2.1.1 Os espaços L^q_*.

Definição 2.1.1. *(Medida de Haar). Na $\sigma - algebra$ de Borel em $\mathbb{R}_+$, a medida de Haar, definida por: $d\mu(t) = dt/t$ para $t > 0$.*

Observação 2.1.1. *Note que a medida de Haar é invariante por escalar, ou seja,*

$$\mu(a, b) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_+$. Por outro lado, para todo $\lambda > 0$, temos que

$$\mu(\lambda a, \lambda b) = ln(\lambda b) - \ln(\lambda a) = \ln\left(\frac{\lambda b}{\lambda a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \mu(a, b).$$

Definição 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach real ou complexo. Para $1 \leq q \leq \infty$ o espaço $L^q_*(\mathbb{R}, X) := L^q_*$ é definido pelo espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \mathbb{R}_+ \to X$, tal que $\|f\|_{L^q_*} < \infty$, onde*

$$\|f\|_{L^q_*} := \left(\int_0^\infty \|f\|^q \frac{1}{t} dt. \right)^{\frac{1}{q}},$$

se $1 \leq q < \infty$ e

$$\|f\|_{L^\infty_*} := \operatorname{ess\,sup}\{\|f(t)\|; 1 < t < \infty\}.$$

Duas funções são ditas idênticas, se forem iguais em quase todo ponto em $\mathbb{R}_+$.

Agora iremos de fato mostrar que $\|\cdot\|_{L^q_*}$ é de fato uma norma.

Proposição 2.1.1. *$\|\cdot\|_{L^q_*}$ é uma norma.*

Demonstração. Denote por $X^{\mathbb{R}_+}$ e $X^{\mathbb{R}}$ os espaços de todas as funções lineares de valores em X definidas em $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}$ respectivamente, e considere o mapa: $\psi : X^{\mathbb{R}_+} \to X^{\mathbb{R}}$, onde $\psi(f) = f \circ e$. Além disso, se $1 \leq q < \infty$, temos

$$\|f\|_{L^q_*} := \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^q \frac{1}{t} dt. \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{-\infty}^\infty \|f(e^s)\|^q \frac{e^s}{e^s} ds \right)^{\frac{1}{q}} = \|\psi\|_{L^q}$$

e, se $q = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty_*} := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}_+}\{\|f(t)\|\} = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathbb{R}}\{\|\psi(e^s)\|\} = \|\psi\|_{L^\infty}.$$

A partir dessas igualdades, a linearidade, bijetividade de ψ, e o fato de que norma $\|\cdot\|_{L^q}$ é de fato uma L^q, segue que $\|\cdot\|_{L^q_*}$ satisfaz as propriedades de uma norma. Além disso, ψ é um isomorfismo isométrico entre L^q_* e L^q. Portanto, L^q_* é completo. $\square$

Observação 2.1.2. *Seja $f : \mathbb{R}_+ \to X$ e $1 \leq q < \infty$. Para todo $c > 0$ temos*

$$\|t \longmapsto f(ct)\|_{L^q_*} = \int_0^\infty \|f(ct)\|^q \frac{1}{t} dt = \int_0^\infty \|f(s)\|^q \frac{c^{-1}}{c^{-1}s} ds = \int_0^\infty \|f(s)\|^q \frac{1}{s} ds = \|f(s)\|_{L^q_*}$$

e

$$\|f(ct)\|_{L^\infty_*} := \operatorname{ess\,sup}\{\|f(ct)\|\} = \operatorname{ess\,sup}\{\|f(s)\|\} = \|f\|_{L^\infty_*}.$$

Considere novamente o isomorfismo isométrico ψ e sejam F e G duas funções mensuráveis definidas em $\mathbb{R}$, assim a convolução entre elas é definida por:

$$(F * G)(t) = \int_{-\infty}^\infty F(t-s)G(s) ds,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Se $f, g \in L^q_*$, temos

$$\begin{aligned}(\psi(f) * \psi(g))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(f)(t-s)\psi(g)(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{t-s})g(e^s)ds \\ &= \int_0^{\infty} f\left(\frac{e^t}{r}\right) g(r)\frac{1}{r}dr.\end{aligned}$$

Ou seja:

$$(\psi(f) * \psi(g))(t) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{e^t}{r}\right) g(r)\frac{1}{r}dr. \tag{2.1.1}$$

Definição 2.1.3. *(Convolução para medida de Haar) Sejam f e g funções mensuráveis reais ou complexas em $\mathbb{R}_+$. Nós definimos μ-convolução por*

$$(f *_\mu g)(t) := \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{r}\right) g(r)\frac{1}{r}dr,\ t > 0.$$

Agora pela equação (2.1.1) pode ser escrita por

$$(\psi(f) * \psi(g))(t) = (f *_\mu g)(e^t) = (\psi(f *_\mu g))(t). \quad \text{para } t > 0. \tag{2.1.2}$$

Teorema 2.1.1. *(Desigualdade de Young para medida de Haar). Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ e sejam $f \in L^p_*$ e $g \in L^q_*$ funções reais ou complexas. Então $f *_\mu g \in L^r_*$ e $\|f *_\mu g\|_{L^r_*} \leq \|f\|_{L^p_*}\|g\|_{L^q_*}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.1, temos

$$\|f\|_{L^p_*} = \|\psi(f)\|_{L^p} < \infty \quad \text{e } \|g\|_{L^q_*} = \|\psi(g)\|_{L^q} < \infty.$$

Assim pela desigualdade de Young para convoluções (ver em [1]), temos

$$(\psi(f) * \psi(g))(t) \in L^r \quad \text{e } \|\psi(f) * \psi(g)\|_{L^r} \leq \|\psi(f)\|_{L^p}\|\psi(g)\|_{L^q}.$$

Então

$$\begin{aligned}\|f *_\mu g\|_{L^r_*} &= \|\psi(f *_\mu g)\|_{L^r} \\ &= \|\psi(f) * \psi(g)\|_{L^r} \\ &\leq \|\psi(f)\|_{L^p}\|\psi(g)\|_{L^q} \\ &= \|f\|_{L^p_*}\|g\|_{L^q_*}.\end{aligned}$$

□

2.1.2 As normas J e K.

Para cada $t > 0$ considere os seguintes funcionais.

$$J(t; u) := \max\{\|u\|_{X_0}, t\|u\|_{X_1}; u \in X_0 \cap X_1\} \text{ e}$$

$$K(t; u) := \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\},\ u \in X_0 + X_1.$$

Note que J e K definem normas em seus respectivos espaços, $J(1; u) = \|u\|_{X_0 \cap X_1}$, $K(1; u) = \|u\|_{X_0+X_1}$, $J(t; u)$ e $K(t; u)$ são funções monótonas não decrescentes de $t \in \mathbb{R}_+$.

Proposição 2.1.2. *As funções $t \longmapsto J(t; u)$ e $t \longmapsto K(t; u)$ são continuas.*

Demonstração. Note que a norma é uma função continua e a função $J(\cdot; u)$ é o máximo de duas funções continuas, logo é uma função continua. Agora fixe $t > 0$ e seja $(t_n) \in \mathbb{R}_+$ uma sequência, tal que $t_n \to t$. Vamos provar que $K(t_n; u) \to K(t; u)$. Para isso, seja $\epsilon > 0$ e suponha sem perda de generalidade $\epsilon < t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $u_n = u_0^n + u_1^n$ e

$$\|u_0^n\|_{X_0} + t_n\|u_1^n\|_{X_1} \leq K(t_n; u) + \epsilon. \tag{2.1.3}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|u_1^n\|_{X_1} \leq \frac{K(t_n; u) + \epsilon}{t_n} &= \frac{\inf\{\|u_0\|_{X_0} + t_n\|u_1\|_{X_1}\} + \epsilon}{t_n} \\
&\leq \frac{\max\{1, t_n\}\|u\|_{X_0+X_1} + \epsilon}{t_n} \\
&= \frac{\max\{1, t_n\}\|u\|_{X_0+X_1}}{t_n} + \frac{\epsilon}{t_n} \\
&= \max\left\{\frac{1}{t_n}, 1\right\}\|u\|_{X_0+X_1} + \frac{\epsilon}{t_n} \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, 1\right\}\|u\|_{X_0+X_1} + 1.
\end{aligned}$$

Seja $C = \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, 1\right\}\|u\|_{X_0+X_1} + 1$, assim

$$\|u_1^n\|_{X_1} \leq C \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \text{n} \in \mathbb{N}. \tag{2.1.4}$$

Assim, das equações (2.1.3) e (2.1.4), temos

$$\begin{aligned}
K(t, u) &\leq \|u_0^n\|_{X_0} + t\|u_1^n\|_{X_1} \\
&\leq \|u_0^n\|_{X_0} + t\|u_1^n\|_{X_1} - t_n\|u_1^n\|_{X_1} + t_n\|u_1^n\|_{X_1} \\
&\leq \|u_0^n\|_{X_0} + t_n\|u_1^n\|_{X_1} + (t - t_n)\|u_1^n\|_{X_1} \\
&\leq K(t_n; u) + \epsilon + C(t - t_n).
\end{aligned}$$

Sendo assim

$$K(t;u) - K(t_n;u) \leq \epsilon + C(t - t_n), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \text{n} \in \mathbb{N}. \tag{2.1.5}$$

Agora vamos tomar $u_0 \in X_0$ e $u_1 \in X_1$, tal que $u = u_0 + u_1$ e

$$\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} \leq K(t;u) + \epsilon,$$

assim

$$\begin{aligned} K(t_n;u) &\leq \|u_0\|_{X_0} + t_n\|u_1\|_{X_1} \\ &\leq \|u_0\|_{X_0} + t_n\|u_1\|_{X_1} - t\|u_1\|_{X_1} + t\|u_1\|_{X_1} \\ &= \|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} + (t_n - t)\|u_1\|_{X_1} \\ &\leq K(t;u) + \epsilon + (t_n - t)\|u_1\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Logo

$$K(t;u) - K(t_n;u) \geq -(\epsilon + (t_n - t)\|u_1\|_{X_1}) \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \text{n} \in \mathbb{N}. \tag{2.1.6}$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando as equações (2.1.5) e (2.1.6), temos

$$-\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} (K(t;u) - K(t_n;u)) \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\lim_{n\to\infty} K(t_n;u) = K(t;u).$$

□

Proposição 2.1.3. *Dado $u \in X_0 \cap X_1$, a função $t \longmapsto J(t;u)$ é convexa. Por outro lado, se $u \in X_0 + X_1$, então a função $t \longmapsto K(t;u)$ é uma função concava.*

Demonstração. Note que

$$\min\{1,t\}\max\{\|u\|_{X_0}, t\|u\|_{X_1}\} \leq \max\{\|u\|_{X_0}, t\|u\|_{X_1}\} \leq \max\{1,t\}\max\{\|u\|_{X_0}, t\|u\|_{X_1}\}.$$

Ou seja:

$$\min\{1,t\}\|u\|_{X_0\cap X_1} \leq J(t;u) \leq \max\{1,t\}\|u\|_{X_0\cap X_1} \tag{2.1.7}$$

e

$$\min\{1,t\}\inf\{\|u\|_{X_0} + t\|u\|_{X_1}\} \leq \inf\{\|u\|_{X_0} + t\|u\|_{X_1}\} \leq \max\{1,t\}\inf\{\|u\|_{X_0} + t\|u\|_{X_1}\}.$$

Ou seja:

$$\min\{1,t\}\|u\|_{X_0+X_1} \leq K(t;u) \leq \max\{1,t\}\|u\|_{X_0+X_1}. \tag{2.1.8}$$

Então $J(t,\cdot)$ e $K(t,\cdot)$ são normas equivalentes a $\|\cdot\|_{X_0\cap X_1}$ e $\|\cdot\|_{X_0+X_1}$ respectivamente. Se dados $0<a<b$ e $\theta\in(0,1)$, então

$$\begin{aligned} J((1-\theta)a+\theta b);u) &= \max\{\|u\|_{X_0},(1-\theta)a+\theta b)\|u\|_{X_1}\} \\ &\leq \max\{(1-\theta)\|u\|_{X_0},(1-\theta)a\|u\|_{X_1}\}+\max\{\theta\|u\|_{X_0},\theta b\|u\|_{X_1}\} \\ &= (1-\theta)\max\{\|u\|_{X_0},a\|u\|_{X_1}\}+\theta\max\{\|u\|_{X_0},b\|u\|_{X_1}\} \\ &= (1-\theta)J(a;u)+\theta J(b;u). \end{aligned}$$

Portanto J é convexa. Por outro lado, dados $0<a<b$, $\theta\in(0,1)$, $u\in X_0+X_1$ e $\epsilon>0$ arbitrário, podemos tomar $u_0\in X_0$ e $u_1\in X_1$, tal que

$$\begin{aligned} K((1-\theta)a+\theta b);u)+\epsilon &\geq \|u_0\|_{X_0}+[(1-\theta)a+\theta b)]\|u_1\|_{X_1} \\ &= \|u_0\|_{X_0}-\theta\|u_0\|_{X_0}+\theta\|u_0\|_{X_0}+[(1-\theta)a+\theta b)]\|u_1\|_{X_1} \\ &= (1-\theta)\|u_0\|_{X_0}+(1-\theta)a\|u_1\|_{X_1}+\theta\|u_0\|_{X_0}+\theta b\|u_1\|_{X_1} \\ &= (1-\theta)K(a;u)+\theta K(b;u). \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, segue que

$$K((1-\theta)a+\theta b);u)\geq=(1-\theta)K(a;u)+\theta K(b;u).$$

Portanto K é concava. $\square$

Note que, se $u\in X_0\cap X_1$, então dados quaisquer t e s positivos, temos

$$K(t;u)\leq\|u\|_{X_0}\leq J(s;u) \text{ e } K(t;u)\leq t\|u\|_{X_1}=\frac{t}{s}s\|u\|_{X_1}\leq\frac{t}{s}J(s;u).$$

Ou seja

$$K(t;u)\leq\min\left\{1,\frac{t}{s}\right\}J(s;u). \tag{2.1.9}$$

2.1.3 O K-Método.

Se $\theta\in(0,1)$ e $1\leq q\leq\infty$, nós denotamos por $(X_0,X_1)_{\theta,q;K}$, o conjunto de todos $u\in X_0+X_1$, tal que a função $t\longmapsto t^{-\theta}K(t;u)$ pertencente a L_*^q, ou seja, dados $\theta\in(0,1)$ e $1\leq q\leq\infty$,

$$(X_0,X_1)_{\theta,q;K}:=\{u;\ u\in X_0+X_1,t\longmapsto t^{-\theta}K(t;u)\in L_*^q\}.$$

Note que $0\in(X_0,X_1)_{\theta,q;K}$, além disso, se $u,v\in(X_0,X_1)_{\theta,q;K}$ e $\lambda\in\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) pela equação (2.1.8), temos:

$$K(t,u+\lambda v)\leq K(t;u)+|\lambda|K(t;v),$$

para todo $t > 0$, onde

$$\|t \longmapsto t^{-\theta}K(t; u + \lambda v)\|_{L^q_*} \leq \|t \longmapsto t^{-\theta}K(t; u)\|_{L^q_*} + |\lambda|\|t \longmapsto t^{-\theta}K(t; v)\|_{L^q_*} < \infty$$

e $u + \lambda v \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$. Portanto $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ é um espaço vetorial linear, assim

$$\|u\|_{\theta,q;K} := \|t \mapsto t^{-\theta}K(t; u)\|_{L^q_*}, u \in X_0 + X_1,$$

define uma norma em $X_0 + X_1$.

Notação 2.1.1. *Denotamos* $\|K(t; u)\|_{L^q_*} := \|t \longmapsto t^{-\theta}K(t; u)\|_{L^q_*}$.

Notação 2.1.2. *(A função ϕ_θ) A notação ϕ_θ, quando $\theta \in (0, 1)$ é reservada para a função $\phi_\theta(t) = t^{-\theta} \min\{1, t\}, t > 0$.*

Proposição 2.1.4. *Seja $\theta \in (0, 1)$, então a função $\phi_\theta(t) = t^{-\theta} \min\{1, t\}$ satisfaz as seguintes propriedades*

(i) Para todo $q \in [1, \infty]$, temos que $\phi_\theta \in L^q_*$, além disso.

$$\|\phi_\theta\|_{L^q_*} = \begin{cases} ((1-\theta)\theta q)^{\frac{-1}{q}}, & \text{se } 1 \leq q < \infty, \\ 1, & \text{se } q = \infty. \end{cases}$$

(ii) $\|\phi_\theta\|_{L^q_*} = \left\|t^{-\theta} \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right\|_{L^q_*}$.

Demonstração. (i) Note que

$$\phi_\theta(t) = \begin{cases} t^{1-\theta}, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ t-\theta, & \text{se } 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Além disso $\phi_\theta(t) \leq 1$, para todo $t > 0$ e $\phi_\theta(1) = 1$, assim $\|\phi_\theta\|_{L^\infty_*} = 1$. Por outro lado, dado $1 \leq q < \infty$, temos

$$\frac{|\phi_\theta(t)|^q}{t} = \begin{cases} t^{(1-\theta)q-1}, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{-\theta q-1}, & \text{se } 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\|\phi_\theta(t)\|_{L^q_*} &= \left(\int_0^\infty |\phi_\theta(t)|^q \frac{1}{t}dt.\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 \|\phi_\theta(t)\|^q \frac{1}{t}dt + \int_1^\infty \|\phi_\theta(t)\|^q \frac{1}{t}dt.\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 t^{(1-\theta)q-1}dt + \int_1^\infty t^{-\theta q-1}dt.\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\theta)q} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^{-\theta q}}{\theta q} + \frac{1}{\theta q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\theta)q} + \frac{1}{\theta q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto $\phi_\theta \in L^q_*$.

(ii) Note que

$$
\begin{aligned}
\left\|t^\theta \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right\|_{L^\infty_*} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}\left\{t^\theta \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right\} \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)}\left\{s^{-\theta}\min\{1, s\}\right\} \\
&= \|\phi_\theta\|_{L^\infty_*}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $1 \leq q < \infty$, temos

$$
\left\|t^\theta \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right\|^q_{L^q_*} = \int_0^\infty \left|t^\theta \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right|^q \frac{1}{t}dt,
$$

tome $s = \frac{1}{t}$, o que implica $ds = \frac{-1}{t^2}dt$, assim

$$
\begin{aligned}
\left\|t^\theta \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\}\right\|^q_{L^q_*} &= \int_\infty^0 |s^{-\theta}\min\{1, s\}|^q s\frac{-1}{s^2}ds \\
&= \int_0^\infty |s^{-\theta}\min\{1, s\}|^q \frac{1}{s}ds \\
&= \|\phi_\theta\|_{L^q_*}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.1.2. *(O K-Método). Sejam (X_0, X_1) um par de interpolação de espaços de Banach Complexos, $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$, então as afirmações abaixo são verdadeiras* *(i) Se $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$, então*

$$\|\phi_\theta\|_{L^q_*}\|u\|_{X_0+X_1} \leq \|u\|_{\theta,q;K}.$$

(ii) Se $u \in (X_0 \cap X_1)$, então

$$\|u\|_{\theta,q;K} \leq \|\phi_\theta\|_{L^q_*}\|u\|_{X_0\cap X_1}.$$

(iii) $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ é o espaço de Banach Complexo intermediário entre X_0 e X_1.

Demonstração. (i) Seja $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$, então

$$\min\{1,t\}\|u\|_{X_0+X_1} \leq K(t;u), \quad \text{t} > 0,$$

assim

$$\phi_\theta\|u\|_{X_0+X_1} \leq t^{-\theta}K(t;u), \quad \text{t} > 0$$

e

$$\|\phi_\theta\|_{L^q_*}\|u\|_{X_0+X_1} \leq \|u\|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.10}$$

(ii) Seja $u \in (X_0 \cap X_1)$, então da equação (2.1.9), temos

$$t^{-\theta}K(t;u) \leq t^{-\theta}\min\{1,t\}J(1,u) = \phi_\theta(t)\|u\|_{X_0\cap X_1} \quad \text{t} > 0.$$

Portanto

$$\|t^{-\theta}K(t;u)\|_{L^q_*} = \|u\|_{\theta,q;K} \leq \|\phi_\theta\|_{L^q_*}\|u\|_{X_0\cap X_1}. \tag{2.1.11}$$

(iii) Dos itens anteriores, temos

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q;K} \hookrightarrow X_0 + X_1.$$

Resta-nos mostrar a completude de $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$. Para isso, seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de Cauchy em $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$, da equação (2.1.10), temos que $\{u_n\}$ é uma sequencia de Cauchy em $\|\cdot\|_{X_0+X_1}$, assim existe $u \in X_0 + X_1$, tal que

$$\|u - u_n\|_{X_0+X_1} \to 0, \text{ quando n} \to \infty.$$

Queremos mostra que $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ e $\|u - u_n\|_{\theta,q;K} \to 0$, quando n $\to \infty$. Para isso, seja $\epsilon > 0$, então existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_m - u_n\|_{\theta,q;K} < \epsilon \text{ sempre que } m,n \geq N(\epsilon).$$

Seja $I_M = [\frac{1}{M}, M], M > 0$. Para $m, n \geq N(\epsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
\|t^{-\theta}K(t; u_n - u)\|_{L^q_*(I_M)} &\leq \|t^{-\theta}K(t; u_n - u_m)\|_{L^q_*(I_M)} + \|t^{-\theta}K(t; u_m - u)\|_{L^q_*(I_M)} \\
&\leq \|u_n - u_m\|_{\theta,q;K} + \|t^{-\theta}K(t; u_m - u)\|_{L^q_*(I_M)} \\
&\leq \epsilon + \|t^{-\theta}K(t; u_m - u)\|_{L^q_*(I_M)}.
\end{aligned}$$

Dá equação (2.1.8) $K(t, \cdot) \leq \max\{1, t\}\| \cdot \|_{X_0+X_1}$, assim

$$\begin{aligned}
\|t^{-\theta}K(t; u_m - u)\|_{L^q_*(I_M)} &\leq \|t^{-\theta}\max\{1, t\}\|_{L^q_*(I_M)}\|u_m - u\|_{X_0+X_1} \\
&= C_M\|u_m - u\|_{X_0+X_1},
\end{aligned}$$

onde $C_M = \|t^{-\theta}\max\{1, t\}\|_{L^q_*(I_M)} < \infty$. Então

$$\|t^{-\theta}K(t; u_n - u)\|_{L^q_*(I_M)} \leq \epsilon + C_M\|u_m - u\|_{X_0+X_1}.$$

Para $M > 0$ e $m, n \geq N(\epsilon)$. Fazendo $m \to \infty$, temos

$$\|t^{-\theta}K(t; u_n - u)\|_{L^q_*} \leq \epsilon, \text{ para todo } n \geq N(\epsilon) \text{ e para todo } M > 0.$$

Fazendo agora $M \to \infty$, temos

$$\|t^{-\theta}K(t; u_n - u)\|_{L^q_*(I_M)} \leq \epsilon, \text{ para todo } n \geq N(\epsilon).$$

Sendo assim $u_n \to u$, logo $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$, além disso, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\|u_n - u\|_{\theta,q;K} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

□

Teorema 2.1.3. *(Teorema de Interpolação exata para o método K). Sejam $\theta \in (0, 1)$ e $1 \leq q \leq \infty$ e sejam $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ pares de interpolação de espaços de Banach Complexos. Então $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ e $(Y_0, Y_1)_{\theta,q;K}$ são espaços de interpolação exatas tipo θ para (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1).*

Demonstração. Seja $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ um operador linear limitado, tal que

$$M_i = \|T\|_{B(X_i,Y_I)} < \infty, i = 1, 2.$$

Seja $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q,K}$, logo podemos representar $u = u_0 + u_1$, com $u_0 \in X_0$ e $u_1 \in X_1$, assim temos que $Tu = Tu_0 + Tu_1$, com $Tu_0 \in Y_0$ e $Tu_1 \in Y_1$, consequentemente

$$\begin{aligned}
K(t; Tu) &= \inf\{\|y_0\|_{Y_0} + t\|y_1\|_{Y_1}; Ty = y_0 + y_1, y_0 \in Y_0 \text{ e } y_1 \in Y_1\} \\
&\leq \inf\{\|Tu_0\|_{Y_0} + t\|Tu_1\|_{Y_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\} \\
&\leq \inf\{M_0\|u_0\|_{Y_0} + tM_1\|u_1\|_{Y_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\} \\
&\leq \ M_0 \inf\left\{\|u_0\|_{Y_0} + t\left(\frac{M_1}{M_0}\right)\|u_1\|_{Y_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\right\} \\
&= M_0K\left(t\left(\frac{M_1}{M_0}\right); u\right).
\end{aligned}$$

Logo

$$\|Tu\|_{\theta,q;K} = \|t^{-\theta}K(t;Tu)\|_{L^q_*} \leq M_0 \left\| t^{-\theta}K\left(t\left(\frac{M_1}{M_0}\right)\right);u\right\|_{L^q_*}.$$

Tome $s = t(\frac{M_1}{M_0})$ e da observação 2.1.2, temos

$$\left\| t^{-\theta}K\left(t\left(\frac{M_1}{M_0}\right);u\right)\right\|_{L^q_*} = \left\| \left(\left(\frac{M_0}{M_1}\right)s\right)^{-\theta} K(s;u)\right\|_{L^q_*}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{\theta,q;K} &\leq M_0 \left\| \left(\left(\frac{M_0}{M_1}\right)s\right)^{-\theta} K(s;u)\right\|_{L^q_*} \\
&= M_0 \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} \|s^{-\theta}K(s;u)\|_{L^q_*} \\
&= M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|s^{-\theta}K(s;u)\|_{L^q_*} \\
&= M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|u\|_{\theta,q;K}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|Tu\|_{\theta,q;K} \leq \|T\|^{1-\theta}_{B(X_0,Y_0)}\|T\|^{\theta}_{B(X_1,Y_1)}\|u\|_{\theta,q;K}.$$

□

Teorema 2.1.4. *(Teorema da Versão Discreta do K-Método). Um elemento $u \in (X_0 + X_1)$ pertence a $(X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ se, e somente se, a sequência $\{2^{-i\theta}K(2^i;u)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ pertence a l^q. Além disso, o funcional*

$$|u|_{\theta,q;K} := \|2^{-i\theta}K(2^i;u);l^q\|, u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K},$$

define uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$ neste espaço. As constantes de equivalência dependem apenas de θ e q. Mais precisamente para cada $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$, existem $C_1(\theta,q)$ e $C_2(\theta,q)$, tais que para qualquer par de interpolação (X_0, X_1) de espaços de Banach Complexos, temos

$$C_1(\theta,q)|u|_{\theta,q;K} \leq \|u\|_{\theta,q;K} \leq C_2(\theta,q)|u|_{\theta,q;K}, \text{ para todo } u \in (X_0,X_1)_{\theta,q;K}. \tag{2.1.12}$$

Demonstração. Seja $u \in (X_0, X_1)$, assim dado $i \in \mathbb{Z}$, se $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$, então

$$2^{-(i+1)\theta} \leq t^{-\theta} \leq 2^{-i\theta},$$

e por $K(\cdot;u)$ ser monótona não decrescente, temos

$$K(2^i;u) \leq K(t;u) \leq K(2^{i+1};u).$$

Logo
$$2^{-(i+1)\theta}K(2^i;u) \leq t^{-\theta}K(t;u) \leq 2^{-i\theta}K(2^{i+1};u), \tag{2.1.13}$$
para $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$ e $i \in \mathbb{Z}$.
Agora, suponha $1 \leq q < \infty$. Então para $i \in \mathbb{Z}$, temos
$$(2^{-(i+1)\theta}K(2^i;u))^q \leq (t^{-\theta}K(t;u))^q \leq (2^{-i\theta}K(2^{i+1};u))^q, \text{ para } 2^i \leq t \leq 2^{i+1}.$$
Integrando a desigualdade acima em $\frac{dt}{t}$, temos
$$\int_{2^i}^{2^{i+1}} (2^{-(i+1)\theta}K(2^i;u))^q \frac{1}{t}dt \leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} (t^{-\theta}K(t;u))^q \frac{1}{t}dt \leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} (2^{-i\theta}K(2^{i+1};u))^q \frac{1}{t}dt,$$
segue que
$$\ln(2)(2^{-(i+1)\theta}K(2^i;u))^q \leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} (t^{-\theta}K(t;u))^q \frac{1}{t}dt \leq \ln(2)(2^{-i\theta}K(2^{i+1};u))^q.$$
O que implica
$$\ln(2)2^{-\theta q}(2^{-i\theta}K(2^i;u))^q \leq \int_{2^i}^{2^{i+1}} (t^{-\theta}K(t;u))^q \frac{1}{t}dt \leq \ln(2)2^{\theta q}(2^{-(i+1)\theta}K(2^{i+1};u))^q. \tag{2.1.14}$$
Por outro lado, note que
$$(\|u\|_{\theta,q;K})^q = \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t;u))^q \frac{1}{t}dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (t^{-\theta}K(t;u))^q \frac{1}{t}dt.$$
Assim tomando a soma na equação (2.1.14) com $i \in \mathbb{Z}$, temos
$$\ln(2)2^{-\theta q}\|2^{-i\theta}K(2^i;u);l^q\|^q \leq (\|u\|_{\theta,q;K})^q \leq \ln(2)2^{\theta q}\|2^{-i\theta}K(2^i;u);l^q\|^q$$
e
$$C_1(\theta,q)|u|_{\theta,q;K} \leq \|u\|_{\theta,q;K} \leq C_2(\theta,q)|u|_{\theta,q;K},$$
onde
$$C_1(\theta,q) = (\ln(2))^{\frac{1}{q}}2^{-\theta} \text{ e } C_2(\theta,q) = (\ln(2))^{\frac{1}{q}}2^{\theta}. \tag{2.1.15}$$
Se $q = \infty$, tomando o $\operatorname{ess\,sup}$ na equação (2.1.13) com $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$, temos
$$2^{-(i+1)\theta}K(2^i;u) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{2^i \leq t \leq 2^{i+1}} \{t^{-\theta}K(t;u)\} \leq 2^{-i\theta}K(2^{i+1};u), \text{ com } i \in \mathbb{Z}.$$
Ou seja
$$2^{-\theta}2^{-i\theta}K(2^i;u) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{2^i \leq t \leq 2^{i+1}} \{t^{-\theta}K(t;u)\} \leq 2^{\theta}2^{-(i+1)\theta}K(2^{i+1};u), \text{ com } i \in \mathbb{Z}.$$
Agora tomando o $\sup$ com $i \in \mathbb{Z}$, temos
$$2^{-\theta}|u|_{\theta,q;K} \leq \|u\|_{\theta,q;K} \leq 2^{\theta}|u|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.16}$$
$\square$

2.1.4 O J-Método.

Se $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$. Nós denotamos por $(X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ o conjunto de todos os $u \in X_0 + X_1$, tal que as condições abaixo são satisfeitas.

(A) Existe uma função $f : \mathbb{R}_+ \to X_0 \cap X_1$, tal que $f \in L^1_*(\mathbb{R}_+; X_0 + X_1)$ e
$$u = \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}.$$
(Onde a integral converge para u como integral de Bochner em $X_0 + X_1$.)

(B) A função $t \mapsto t^{-\theta} J(t; f(t)) \in L^q_*$.

Note que $0 \in (X_0 + X_1)_{\theta,q;J}$, além disso, se $u, v \in (X_0 + X_1)_{\theta,q;J}$ e $\lambda \in \mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, temos
$$u + \lambda v = \int_0^\infty (f(t) + \lambda g(t))\frac{dt}{t} = \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \lambda g(t)\frac{dt}{t}.$$
Logo $(X_0 + X_1)_{\theta,q;J}$ é um subespaço linear de $X_0 + X_1$.

Lema 2.1.1. *Seja $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$. Se $f : \mathbb{R}_+ \to X_0 \cap X_1$ é uma função, tal que $t \mapsto t^{-\theta} J(t; f(t)) \in L^q_*$, então:*

(i) $f \in L^1_*(\mathbb{R}_+; X_0 + X_1)$. Além disso
$$\|f\|_{L^1_*(\mathbb{R}+;X_0+X_1)} \leq \left\|\frac{1}{\phi_\theta}\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+)} \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} < \infty, \tag{2.1.17}$$
onde $\phi_\theta(t) = t^{-\theta}\min\{1, t\}$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

(ii) Para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, nós temos $f \in L^1_*([a,b]; X_0 \cap X_1)$ e
$$\|f\|_{L^1_*([a,b];X_0\cap X_1)} \leq \left\|\frac{1}{\phi_\theta}\right\|_{L^p_*([a,b];X_0\cap X_1)} \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*([a,b];X_0\cap X_1)} < \infty. \tag{2.1.18}$$

Demonstração. (i) Da equação (2.1.9), temos
$$\|f(s)\|_{X_0+X_1} = K(1; f(s)) \leq \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\} J(s; f(s)), s > 0.$$
Então
$$\begin{aligned}\|f(s)\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X_1)} &\leq \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\} J(s; f(s))\frac{ds}{s} \\ &= \int_0^\infty \left(s^\theta \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\}\right)(s^{-\theta} J(s; f(s)))\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder, temos

$$\|f\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X_1)} \leq \left\| s^\theta \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\} \right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+)} \|s^{-\theta} J(s; f(s))\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)}.$$

Assim

$$\|f\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X_1)} \leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+)} \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)}.$$

(ii) Da equação (2.1.7), temos

$$\min\{1, t\}\|u\|_{X_0\cap X_1} \leq J(t; u) \text{ com } t > 0 \text{ e } u \in X_0 \cap X_1.$$

Assim

$$t^{-\theta} \min\{1, t\}\|f(t)\|_{X_0\cap X_1} = \phi_\theta(t)\|f(t)\|_{X_0\cap X_1} \leq t^{-\theta} J(t; f(t)) \text{ com } t > 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1_*([a,b];X_0+X_1)} &= \int_a^b \|f(t)\|_{X_0\cap X_1} \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_a^b \frac{t^{-\theta} J(t; f(t))}{\phi_\theta} \frac{dt}{t} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\phi_\theta} \right\|_{L^p_*([a,b];X_0\cap X_1)} \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*([a,b];X_0\cap X_1)}.
\end{aligned}$$

□

Notação 2.1.3. *Dado $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, denotamos por $S(u : \theta, q)$ ou simplesmente $S(u)$, o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R}_+ \to X_0 \cap X_1$, que satisfazem (A) e (B).*

Considere o funcional

$$\|u\|_{\theta,q;J} = \inf_{f\in S(u)} \{\|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*}\}, u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}.$$

Agora sejam $u, v \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ e $\epsilon > 0$. Podemos tomar $f \in S(u)$ e $g \in S(v)$, tal que

$$\|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*} \leq \|u\|_{\theta,q;J} + \epsilon \text{ e } \|t^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L^q_*} \leq \|v\|_{\theta,q;J} + \epsilon.$$

Note que $f + g \in S(u + v)$, então

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{\theta,q;J} &= \inf_{h\in S(u+v)} \{\|t^{-\theta} J(t; h(t))\|_{L^q_*}\} \\
&\leq \|t^{-\theta} J(t; f(t) + g(t))\|_{L^q_*} \\
&\leq \|t^{-\theta}(J(t; f(t)) + J(t; g(t)))\|_{L^q_*} \\
&\leq \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*} + \|t^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L^q_*} \\
&\leq \|u\|_{\theta,q;J} + \|v\|_{\theta,q;J} + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\|u+v\|_{\theta,q;J} \leq \|u\|_{\theta,q;J} + \|v\|_{\theta,q;J}.$$

Além disso, se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então $f \in S(u)$ se, e somente se, $\lambda f \in S(\lambda u)$. Assim

$$S(\lambda u) = \{\lambda f; f \in S(u)\} \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{\theta,q;J} &= \inf_{h \in S(\lambda u)} \{\|t^{-\theta} J(t; h(t))\|_{L^q_*}\} \\
&= \inf_{f \in S(u)} \{\|t^{-\theta} J(t; \lambda f(t))\|_{L^q_*}\} \\
&= \inf_{f \in S(u)} \{\|t^{-\theta} |\lambda| J(t; f(t))\|_{L^q_*}\} \\
&= \inf_{f \in S(u)} \{|\lambda| \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*}\} \\
&= |\lambda| \inf_{f \in S(u)} \{\|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*}\} \\
&= |\lambda| \|u\|_{\theta,q;J}.
\end{aligned}$$

Para provar que $\|\cdot\|_{\theta,q;J}$ é uma norma em $(X_0+X_1)_{\theta,q;J}$, resta mostrar que $\|u\|_{\theta,q;J} = 0$, então $u = 0$. O que mostraremos no resultado a seguir.

Teorema 2.1.5. *(O J-Método) Sejam (X_0, X_1) um par de interpolação de espaços de Banach complexos e sejam $\theta \in (0,1)$, $1 \leq q \leq \infty$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, então*

(i) Para todo $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, tem-se

$$\|u\|_{X_0+X_1} \leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*} \|u\|_{\theta,q;J}.$$

(ii) Para todo $u \in X_0 \cap X_1$, tem-se

$$\|\phi_\theta\|_{L^p_*} \|u\|_{\theta,q;J} \leq \|u\|_{X_0 \cap X_1}.$$

(iii) $(X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ é um espaço de Banach complexo intermediário entre X_0 e X_1.

Demonstração. (i) Sejam $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ e $f \in S(u)$. Pelo Lema 2.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_0+X_1} &= \left\| \int_0^\infty f(s) \frac{ds}{s} \right\|_{X_0+X_1} \\
&\leq \int_0^\infty \|f(s)\|_{X_0+X_1} \frac{ds}{s} \\
&\leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*} \|s^{-\theta} J(s; f(s))\|_{L^q_*} < \infty.
\end{aligned}$$

Tomando o $\inf_{f\in S(u)}$, temos

$$\|u\|_{X_0+X_1} \leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*}\|u\|_{\theta,q;J}.$$

Em particular, se $\|u\|_{\theta,q;J}=0$, então $u=0$. Assim $\|\cdot\|_{\theta,q;J}$ é uma norma em $(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$.

(ii) Seja $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, tal que $\psi(t)\geq 0$ e para todo $t>0$ $\|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*}=1$. Assim pela desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi(s)\min\left\{1,\frac{1}{s}\right\}\frac{ds}{s} &= \int_0^\infty (s^{-\theta}\psi(s))\left(s^\theta\min\left\{1,\frac{1}{s}\right\}\right)\frac{ds}{s}\\
&= \|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*}\left\|t^\theta\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}\right\|_{L^p_*}\\
&= \left\|t^\theta\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}\right\|_{L^p_*}\\
&= \|\phi_\theta\|_{L^p_*}<\infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $f\in L^q_*$ não negativa, tal que $\|f\|_{L^q_*}=1$, temos

$$\left\|t^\theta\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}\right\|_{L^p_*} = \sup_{\|f\|_{L^q_*}}\left\{\int_0^\infty f(x)\left(x^\theta\min\left\{1,\frac{1}{x}\right\}\right)\frac{dx}{x}\right\}$$

onde

$$\|\phi_\theta\|_{L^p_*} = \sup\left\{\int_0^\infty \psi(x)\min\left\{1,\frac{1}{x}\right\}\frac{dx}{x}\right\}. \tag{2.1.19}$$

Note que, o supremo esta sendo tomado sobre todas as funções $\psi\geq 0$, tal que $\|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*}=1$. Agora seja $u\in X_0\cap X_1$ e

$$g(t)=\left(\frac{\psi(t)\min\{1,\frac{1}{t}\}}{\int_0^\infty\psi(x)\min\left\{1,\frac{1}{x}\right\}\frac{dx}{x}}\right)u,\ t>0.$$

Vamos mostrar que $g\in S(u)$. De fato $g\in(X_0\cap X_1)$, para todo $t>0$

$$\int_0^\infty \|g(t)\|_{X_0+X_1}\frac{dt}{t}=\|u\|_{X_0+X_1}<\infty,$$

onde $g\in L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X_1)$ e

$$u=\int_0^\infty g(t)\frac{dt}{t}.$$

Além disso, pela equação (2.1.7), temos:

$$\begin{aligned} J(t;g(t)) &= J\left(t;\left(\frac{\psi(t)\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}}{\int_0^\infty \psi(x)\min\left\{1,\frac{1}{x}\right\}\frac{dx}{x}}\right)u\right) \\ &= \left(\frac{\psi(t)\min\{1,\frac{1}{t}\}}{\int_0^\infty \psi(x)\min\{1,\frac{1}{x}\}\frac{dx}{x}}\right)J(t;u) \\ &\leq \left(\frac{\psi(t)\min\{1,\frac{1}{t}\}}{\int_0^\infty \psi(x)\min\{1,\frac{1}{x}\}\frac{dx}{x}}\right)\max\{1,t\}\|u\|_{X_0\cap X_1} \\ &= \left(\frac{\psi(t)}{\int_0^\infty \psi(x)\min\{1,\frac{1}{x}\}\frac{dx}{x}}\right)\|u\|_{X_0\cap X_1}, t>0. \end{aligned}$$

Como ψ é tal que $\|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*}=1$, temos:

$$\|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*} \leq \left(\frac{\|u\|_{X_0\cap X_1}}{\int_0^\infty \psi(x)\min\{1,\frac{1}{x}\}\frac{dx}{x}}\right) < \infty.$$

Logo $t\to t^{-\theta}J(t;g(t))\in L^q_*$. Portanto $g\in S(u)$ e

$$\|u\|_{\theta,q;J} \leq \|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^q_*}.$$

Então

$$\|u\|_{\theta,q;J} \leq \left(\frac{\|u\|_{X_0\cap X_1}}{\int_0^\infty \psi(x)\min\{1,\frac{1}{x}\}\frac{dx}{x}}\right).$$

Tomando o supremo em todas $\psi\geq 0$, tais que $\|t^{-\theta}\psi(t)\|_{L^q_*}=1$, temos

$$\|\phi_\theta\|_{L^p_*}\|u\|_{\theta,q;J} \leq \|u\|_{X_0\cap X_1}.$$

(iii) Dos itens anteriores, temos

$$X_0\cap X_1 \hookrightarrow (X_0,X_1)_{\theta,q;J} \hookrightarrow X_0+X_1.$$

Resta-nos mostrar a completude de $(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$. Para isso seja $\{u_k\}\subset(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$ uma sequência, tal que $\sum\|u_k\|_{\theta,q;J}<\infty$, vamos provar que $\sum u_k$ converge em $(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$, ou seja, existe $w\in(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$, tal que $\|w-\sum_{k=1}^n\|_{\theta,q;J}\to 0$ quando $n\to\infty$. Para cada $k\in\mathbb{N}$, seja $f_k\in S(u_k)$, tal que

$$\|t^{-\theta}J(t;f_k(t))\|_{L^q_*} \leq \|u_k\|_{\theta,q;J}+\frac{1}{k^2},$$

assim

$$\sum_{k=1}^\infty \|t^{-\theta}J(t;f_k(t))\|_{L^q_*} \leq \sum_{k=1}^\infty(\|u_k\|_{\theta,q;J}+\frac{1}{k^2}) < \infty.$$

Logo, pelo Lema 2.1.1, temos

$$\|f_k\|_{L^1_*(\mathbb{R}+;X_0+X_1)} \leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*}\|t^{-\theta}J(t;f_k(t))\|_{L^q_*} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1_*(\mathbb{R}+;X_0+X_1)} < \infty,$$

logo $\sum f_k \in L^1_*(\mathbb{R}+;X_0+X_1)$.
Vamos denotar $F = \sum f_k$ e $w = \int_0^\infty F(t)\frac{dt}{t}$.

Afirmação 2.1.1. $w \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$.

Prova 2.1.1. *Note que, basta provar que $F \in S(w)$. De fato, $F(t) \in X_0 + X_1$ com $t \in \mathbb{R}_+$, pois fixando $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ e $C = \left\|\frac{1}{\phi_\theta}\right\|_{L^p_*}$. Assim pelo Lema 2.1.1, temos*

$$\|f_k\|_{L^1_*([a,b];X_0 \cap X_1)} \leq C\|t^{-\theta}J(t;f_k)\|_{L^q_*([a,b])}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1_*([a,b];X_0\cap X_1)} &\leq C\sum_{k=1}^{\infty} \|t^{-\theta}J(t;f_k)\|_{L^q_*([a,b])} \\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty} \|t^{-\theta}J(t;f_k)\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|u_k\|_{\theta,q;J} + \frac{1}{k^2}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Assim $\sum f_k \in L^1_*([a,b];X_0\cap X_1)$, em particular $F(t) = \sum f_k(t) \in X_0\cap X_1$, para todo $t \in [a,b]$, como $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ é arbitrário, segue que vale para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Por outro lado

$$\begin{aligned}\|t^{-\theta}J(t;F(t))\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} &= \left\|t^{-\theta}J\left(t;\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)\right\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\|t^{-\theta}J(t;f_k)\right\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\|u_k\|_{\theta,q;J} + \frac{1}{k^2}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Sendo assim $F \in S(w)$ e $w \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$. O que prova a afirmação.

E por fim

$$
\begin{aligned}
\|w - \sum_{k=1}^{n} u_k\|_{\theta,q;J} &\leq \left\| t^{-\theta} J(t; F(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t)) \right\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} \\
&= \left\| t^{-\theta} J\left(t; \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right) \right\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|t^{-\theta} J(t; F(t) - f_k(t)\|_{L^q_*(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\|w - \sum_{k=1}^{n} u_k\|_{\theta,q;J} \to 0$ quando $n \to \infty$.

$\square$

Teorema 2.1.6. *(Teorema da interpolação exata para o J-Método). Sejam $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$ e sejam (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1) pares de interpolação. Então $(X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ e $(Y_0, Y_1)_{\theta,q;J}$ são pares de interpolação tipo θ para (X_0, X_1) e (Y_0, Y_1).*

Demonstração. A demonstração é similar a demonstração do teorema 2.1.3. Seja $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ um operador linear limitado, tal que $M_i = \|T\|_{B(X_i,Y_i)} < \infty$, com $i = 0, 1$. Dado $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, tome $g \in S(u)$ e seja $f(t) = g(\frac{M_1}{M_0} t)$. Então

$$
\begin{aligned}
J(t; Tf(t)) &= \max\{\|Tf(t)\|_{Y_0}; t\|Tf(t)\|_{Y_1}\} \\
&= \max\{M_0\|f(t)\|_{X_0}; tM_1\|f(t)\|_{X_1}\} \\
&= M_0 \max\left\{ \|f(t)\|_{X_0}; t\left(\frac{M_1}{M_0}\right) \|f(t)\|_{X_1} \right\} \\
&= M_0 J\left(t\left(\frac{M_1}{M_0}\right); f(t) \right).
\end{aligned}
$$

Sendo assim

$$
\|t^{-\theta} J(t; Tf(t))\|_{L^q_*} \leq M_0 \left\| t^{-\theta} J\left(t\left(\frac{M_1}{M_0}\right); f(t) \right) \right\|_{L^q_*}.
$$

Tome $s = \left(\frac{M_1}{M_0}\right) t$, logo

$$
\begin{aligned}
\|t^{-\theta} J(t; Tf(t))\|_{L^q_*} &\leq M_0 \left\| \left(\left(\frac{M_0}{M_1}\right) s \right)^{-\theta} J\left(s; \left(\frac{M_0}{M_1}\right) s \right) \right\|_{L^q_*} \\
&= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|s^{-\theta} J(s; g(s)\|_{L^q_*}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.1.1, $T \circ f \in L^1_*(\mathbb{R}_+; Y_0 + Y_1)$. Além disso

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (T\circ f)(t)\frac{dt}{t} &= T\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}\\ &= T\int_0^\infty g(\frac{M_1}{M_0}t)\frac{dt}{t}\\ &= T\int_0^\infty g(s)\frac{ds}{s}\\ &= Tu.\end{aligned}$$

Então $T \circ f \in S(u)$ e

$$\|Tu\|_{\theta,q;J} \leq \|t^{-\theta}J(t;Tf(t))\|_{L^q_*} \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|s^{-\theta}J(s;g(s)\|_{L^q_*}.$$

Tomando o ínfimo de $g \in S(u)$, temos

$$\|Tu\|_{\theta,q;J} \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|u\|_{\theta,q;J}.$$

□

Lema 2.1.2. *Sejam* $\theta \in (0,1)$, $1 \leq q \leq \infty$ *e* $\frac{1}{q}+\frac{1}{p} = 1$. *Se* $\{u_i\} \subset X_0 \cap X_1$ *é tal que, a sequência* $\{2^{-i\theta}J(2^i;u)\} \in L^q$*, então*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|u_i\|_{X_0+X_1} \leq 2^{\theta}\ln(2)^{\frac{1}{q}-1}\|\phi_\theta\|_{L^p_*}\|2^{-i\theta}J(2^i;u)\|_{l^q}.$$

Demonstração. Defina $g : \mathbb{R}_+ \to X_0 \cap X_1$, dada por: $g(t) = (\ln(2))^{-1}u_{i+1}$, tal que $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, temos $J(2^i;g(t)) \leq J(t;g(t))$. Além disso, $2^{-(i+1)\theta} \leq t^{-\theta}$, então

$$\begin{aligned}t^{-\theta}J(t;g(t)) &\leq 2^{-i\theta}J(t;g(t))\\ &\leq 2^{-i\theta}J(2^{i+1};g(t))\\ &= 2^{-i\theta}J(2^{i+1};(\ln(2))^{-1}u_{i+1})\\ &= 2^{-i\theta}(\ln(2))^{-1}J(2^{i+1};u_{i+1})\\ &= 2^{-i\theta}(\ln(2))^{-1}J(2^{i+1};u_{i+1}).\end{aligned}$$

Ou seja

$$t^{-\theta}J(t;g(t)) = 2^{\theta}(\ln(2))^{-1}2^{-(i+1)\theta}J(2^{i+1};u_{i+1}). \qquad (2.1.20)$$

Então, se $1 \leq q < \infty$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^q_*}^q &= \int_0^\infty (t^{-\theta}J(t;g(t)))^q \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (t^{-\theta}J(t;g(t)))^q \frac{dt}{t} \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (2^\theta (\ln(2))^{-1} 2^{-(i+1)\theta} J(2^{i+1};u_{i+1}))^q \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^\theta (\ln(2))^{-1} 2^{-(i+1)\theta} J(2^{i+1};u_{i+1}))^q \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{\theta q} (\ln(2))^{-q} 2^{-(i+1)\theta q} J(2^{i+1};u_{i+1})^q \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{dt}{t} \\
&= 2^{\theta q} (\ln(2))^{-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-(i+1)\theta q} J(2^{i+1};u_{i+1})^q \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{dt}{t} \\
&= 2^{\theta q} (\ln(2))^{1-q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-(i+1)\theta q} J(2^{i+1};u_{i+1})^q \\
&= 2^{\theta q} (\ln(2))^{1-q} \|2^{-i\theta q} J(2^i;u_{i+1})\|_{l^q}^q.
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$\|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^q_*} = 2^\theta (\ln(2))^{\frac{1}{q}-1} \|2^{-i\theta} J(2^i;u_i)\|_{l^q} < \infty.$$

Por outro lado, se $q = \infty$, da equação (2.1.20), temos

$$
\begin{aligned}
\|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+)} &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} \{\|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^\infty_*(2^i,2^{i+1})}\} \\
&\leq 2^\theta (\ln(2))^{-1} sup_{i\in\mathbb{Z}} \{2^{-(i+1)\theta} J(2^{i+1};u_{i+1})\} \\
&= 2^\theta (\ln(2))^{-1} \|2^{-i\theta} J(2^i;u_i)\|_{l^\infty} < \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, em qualquer dos casos, a função $t \to t^{-\theta}J(t;g(t))$ pertence a L^q_* e pelo Lema 2.1.1

$$\|g\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X-1} \leq \|\phi_\theta\|_{L^p_*} \|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^q_*} < \infty. \tag{2.1.21}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} \|u_i\|_{X_0+X_1} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\|u_i\|_{X_0+X_1}}{\ln(2)} \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} \|g(t)\|_{X_0+X_1} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{\infty} \|g(t)\|_{X_0+X_1} \frac{dt}{t} \\
&\leq \|\phi_\theta\|_{L_*^p} \|s^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L_*^q} \\
&\leq 2^\theta (\ln(2))^{\frac{1}{q}-1} \|\phi_\theta\|_{L_*^p} \|2^{-i\theta} J(2^i; u_i)\|_{l^q} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.7. *(Teorema da versão discreta do J-Método) Sejam $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$. Um elemento $u \in X_0 + X_1$ pertence a $(X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ se, e somente se, as condições abaixo são satisfeitas*

(i) Existe uma sequência $\{u_i\} \subset X_0 \cap X_1$, tal que

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \|u_i\|_{X_0+X_1} < \infty \text{ e } \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i \text{ converge para } u \text{ em } X_0 + X_1.$$

(ii) A sequência $\{2^{-i\theta} J(2^i; u)\}$ pertence l^q. Além disso, o funcional

$$|u|_{\theta,q;J}; = \inf\{\|2^{-i\theta} J(2^i; u)\|_{l^q}; \{u_i\} \text{ satisfaz i) e ii) acima}\} \; u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J},$$

define uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{\theta,q;J}$. As constantes de equivalência não dependem do par (X_0, X_1). Mais precisamente, para cada $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq q \leq \infty$, existem constantes positivas $d_1(\theta,q)$ e $d_2(\theta,q)$ tais que, para qualquer par de interpolação de espaços de Banach complexos (X_0, X_1), temos

$$d_1(\theta,q)|u|_{\theta,q;J} \leq \|u\|_{\theta,q;J} \leq d_2(\theta,q)|u|_{\theta,q;J}$$

Demonstração. (i) Inicialmente, vamos supor $1 \leq q < \infty$. Seja $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$ e seja $\epsilon > 0$. Então, tome $f \in S(u;\theta;q)$ tal que

$$\|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{\theta,q;J} \leq (1+\epsilon)\|u\|_{\theta,q;J} \tag{2.1.22}$$

e para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja

$$u_i = \int_{2^i}^{2^{i+1}} f(t) \frac{dt}{t}.$$

Então $u_i \in X_0 \cap X_1$, assim pela Lema 2.1.1, $f \in L^1_*([2^i, 2^{i+1}]; X_0 \cap X_1)$. Além disso

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \|u|_{X_0+X_1} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} \|f(t)|_{X_0+X_1} \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \|f(t)|_{X_0+X_1} \frac{dt}{t} < \infty,$$

logo

$$\sum_{i=-m}^{n} u_i = \sum_{i=-m}^{n} \int_{2^i}^{2^{i+1}} f(t)\frac{dt}{t} = \int_{-m}^{n} f(t)\frac{dt}{t}$$

que converge para $\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}$ em $X_0 + X_1$ quando $n, m \to \infty$.

(ii) Note que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} 2^{-i\theta} J(2^i; u_i) &= 2^{-i\theta} J\left(2^i; \int_{2^i}^{2^{i+1}} f(t)\frac{dt}{t}\right) \\ &= 2^{-i\theta} \int_{2^i}^{2^{i+1}} J(2^i; f(t))\frac{dt}{t} \\ &\leq 2^{-i\theta} \int_{2^i}^{2^{i+1}} J(t; f(t))\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

com $2^i \leq t \leq 2^{i+1}$ e $J(2^i; f(t)) \leq J(t; f(t)) \leq J(2^{i+1}; f(t))$, além disso $2^{-(i+1)\theta} \leq t^{-\theta}$, assim

$$\begin{aligned} 2^{-i\theta} J(2^i; u_i) &\leq 2^{-i\theta} \int_{2^i}^{2^{i+1}} J(t; f(t))\frac{dt}{t} \\ &= 2^{\theta} \int_{2^i}^{2^{i+1}} 2^{-(i+1)\theta} J(t; f(t))\frac{dt}{t} \\ &\leq 2^{\theta} \int_{2^i}^{2^{i+1}} t^{-\theta} J(t; f(t))\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Holder, temos

$$2^{-i\theta} J(2^i; u_i) \leq 2^{\theta} \|1\|_{L^p_*([2^i, 2^{i+1}])} \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*([2^i, 2^{i+1}])}. \tag{2.1.23}$$

Se $q = 1$, então $p = \infty$ e $\|1\|_{L^p_*([2^i, 2^{i+1}])} = 1$. Por outro lado, se $1 < q < \infty$, então $1 < p < \infty$ e

$$\|1\|_{L^p_*([2^i, 2^{i+1}])} = \left(\int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = (\ln(2))^{\frac{1}{p}}.$$

Em qualquer um dos casos o valor $\|1\|_{L^p_*([2^i, 2^{i+1}])}$ não depende de i, assim denote $d_1(\theta, q) = (2^{-\theta} \ln(2))^{\frac{-1}{p}}$, então a equação (2.1.23) pode ser escrita

$$d_1(\theta, q) 2^{-i\theta} J(2^i; u_i) \leq \|t^{-\theta} J(t; f(t))\|_{L^q_*([2^i, 2^{i+1}])}. \tag{2.1.24}$$

Desta forma

$$
\begin{aligned}
d_1(\theta,q)\sum_{i=-\infty}^{\infty}(2^{-i\theta}J(2^i;u_i))^q &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty}\|t^{-\theta}J(t;f(t))\|^q_{L^q_*([2^i,2^{i+1}])}\\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{2^i}^{2^{i+1}}(t^{-\theta}J(t;f(t)))^q\frac{dt}{t}\\
&= \int_0^{\infty}(t^{-\theta}J(t;f(t)))^q\frac{dt}{t}\\
&\leq (1+\epsilon)^q\|u\|^q_{\theta,q;J}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
d_1(\theta,q)\|(2^{-i\theta}J(2^i;u_i))\|_{l^q} \leq (1+\epsilon)\|u\|_{\theta,q;J}.
$$

Para $q=\infty$, da equação (2.1.24), temos

$$
\begin{aligned}
d_1(\theta,\infty)\|(2^{-i\theta}J(2^i;u_i))\|_{l^\infty} &\leq \sup_{i\in\mathbb{Z}}\{\|t^{-\theta}J(t;f(t))\|_{L^\infty_*([2^i,2^{i+1}])}\\
&= \|t^{-\theta}J(t;f(t))\|_{L^\infty_*}\\
&\leq (1+\epsilon)\|u\|_{\theta,\infty;J}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, temos

$$
d_1(\theta,\infty)\|(2^{-i\theta}J(2^i;u_i))\|_{l^\infty} \leq \|u\|_{\theta,\infty;J}.
$$

Portanto a sequência $\{2^{-i\theta}J(2^i;u_i)\}$ pertence a l^q e $ii)$ é valido, além disso, tomando o ínfimo sobre toda $\{u_i\}$ satisfazendo $i)$ e $ii)$, temos

$$
d_1(\theta,q)|u|_{\theta,q;J} \leq \|u\|_{\theta,q;J}. \tag{2.1.25}
$$

Agora seja $u\in X_0+X_1$, tal que exista uma sequência $\{u_i\}$ que satisfaça $i)$ e $ii)$, vamos provar que $u\in(X_0,X_1)_{\theta,q;J}$.

Defina $g:\mathbb{R}_+\to X_0\cap X_1,$ dada por $g(t)=(\ln(2))^{-1}u_{i+1}, 2^i\leq t\leq 2^{i+1}$ e $i\in\mathbb{Z}$.

Da mesma forma da prova do Lema 2.1.2, mostramos que

$$
\|t^{-\theta}J(t;g(t))\|_{L^q_*} \leq 2^{\theta}(\ln(2))^{\frac{1}{q}-1}\|2^{-i\theta}J(2^i;u_i\|_{l^q} < \infty.
$$

Então, pelo Lema 2.1.1, $g\in L^1_*(\mathbb{R}_+;X_0+X_1)$. Além disso

$$
\int_0^{\infty}g(t)\frac{dt}{t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{2^i}^{2i+1}g(t)\frac{dt}{t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}u_i = u.
$$

Logo $g \in S(\theta, q; J)$ e $u \in (X_0, X_1)_{(\theta,q;J)}$. Portanto

$$\|u\|_{(\theta,q;J)} \leq \|t^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L^q_*} \leq 2^{\theta}(\ln(2))^{\frac{1}{q}-1}\|2^{-i\theta} J(2^i; u_i\|_{l^q}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as sequências, segue

$$\|u\|_{(\theta,q;J)} \leq d_2(\theta, q)|u|_{(\theta,q;J)}, \tag{2.1.26}$$

onde

$$d_2(\theta, q) = 2^{\theta}(\ln(2))^{\frac{1}{q}-1}. \tag{2.1.27}$$

Em particular, se $|u|_{\theta,q;J}$ para algum $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, então $\|u\|_{\theta,q;J} = 0$ então $u = 0$. E por fim da equação (2.1.25) e (2.1.26) nos mostram uma equivalência de normas.

□

2.1.5 A equivalência entre o K-Método e J-Método.

Proposição 2.1.5. *Seja $\theta \in (0, 1)$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então*

$$\|u\|_{\theta,q;K} \leq \|\phi_\theta\|_{L^r_*}\|u\|_{\theta,p;J}, \text{ para } u \in (X_0, X_1)_{\theta,p;J},$$

onde $\phi_\theta(t) = t^{-\theta}\min\{1, t\}$, para $t > 0$ e $1 \leq r \leq \infty]$ é dado por

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$$

Portanto $(X_0, X_1)_{\theta,p;J} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$.

Demonstração. Seja $u \in (X_0, X_1)_{\theta,p;J}$. Dado qualquer $f \in S(u; \theta, p)$, temos que, para todo $t > 0$

$$\begin{aligned}
t^{-\theta}K(t; u) &= t^{-\theta}K\left(t; \int_0^\infty f(s)\frac{ds}{s}\right) \\
&= t^{-\theta}\int_0^\infty K(t; f(s))\frac{ds}{s} \\
&= t^{-\theta}\int_0^\infty \min\left\{1, \frac{t}{s}\right\} J(t; f(s))\frac{ds}{s},
\end{aligned}$$

da equação (2.1.9). Então

$$\begin{aligned}
t^{-\theta}K(t; u) &= t^{-\theta}\int_0^\infty \min\left\{1, \frac{t}{s}\right\} J(t; f(s))\frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty \left(\left(\frac{t}{s}\right)^{-\theta}\min\left\{1, \frac{t}{s}\right\}\right)(s^{-\theta}J(t; f(s)))\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Da definição de convolução para a medida de Haar, segue

$$\begin{aligned}
t^{-\theta}K(t;u) &= (t^{-\theta}\min\{1,t\}) *_\mu (t^{-\theta}J(t;f(t))) \\
&= (\phi_\theta) *_\mu (t^{-\theta}J(t;f(t))).
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Young para medida de Haar

$$\|t^{-\theta}K(t;u)\|_{L^q_*} \leq \|\phi_\theta\|_{L^r_*}\|t^{-\theta}J(t;f(t))\|_{L^p_*} < \infty,$$

onde $1 \leq r \leq \infty$ é definido por $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, como $f \in S(u;\theta,p)$ é arbitrário, segue

$$\|u\|_{\theta,q;K} \leq \|t^{-\theta}K(t;u)\|_{L^q_*} \leq \|\phi_\theta\|_{L^r_*}\|u\|_{\theta,p;J}.$$

□

Teorema 2.1.8. *(Teorema de Equivalência). Seja $\theta \in (0,1)$. Então, existem constantes positivas $C(\theta)$ e $D(\theta)$ tais que, para qualquer $1 \leq q \leq \infty$ e qualquer par de interpolação de espaços de Banach complexos (X_0, X_1), as seguintes afirmações são válidas.*

(i) Para todo $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, tem-se

$$\|u\|_{\theta,q;K} \leq C(\theta)\|u\|_{\theta,q;J};$$

(ii) Para todo $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$, tem-se

$$\|u\|_{\theta,q;J} \leq D(\theta)\|u\|_{\theta,q;K}$$

(iii) A igualdade $(X_0, X_1)_{\theta,q;J} = (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$ vale com normas equivalentes.

Demonstração. Note que, se i) e ii) são validas, então iii) é consequência direta. Se $p = q$ na Proposição 2.1.5, assim $C(\theta) = \|\phi_\theta\|_{L^1_*}$ o que prova i). Para provar ii), seja $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, tome $v_i \in X_0$ e $w_i \in X_1$, tal que $u = v_i + w_i$ e

$$\|v_i\|_{X_0} + 2^i\|w_i\|_{X_1} \leq 2K(2^i;u)$$

e seja $u_i = v_{i+1} - v_i$, com $i \in \mathbb{Z}$.
Para provar que $u \in (X_0, X_1)_{\theta,q;J}$, vamos verificar que a sequência $\{u_i\}$ satisfaz os itens i) e ii) do Teorema da versão discreta do J-Método 2.1.7. Como $\{v_i\} \subset X_0$ e $\{w_i\} \subset X_1$, segue que

$$u_i = v_{i+1} - v_i = (u - w_{i+1}) - (u - w_i) = w_i - w_{i+1}$$

logo $\{u_i\} \subset X_0 \cap X_1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
2^{-i\theta}\|v_i\|_{x_0}2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1} &= 2^{-i\theta}(\|v_i\|_{X_0} + 2^i\|w_i\|_{X_1}) \\
&\leq 2^{i\theta}(2K(2^i;u)).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$2^{-i\theta}\|v_i\|_{x_0} + 2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1} \leq 2(2^{-i\theta}K(2^i;u)) \tag{2.1.28}$$

Pelo Teorema da versão discreta do K-Método 2.1.4, a sequência $\{2^{-i\theta}K(2^i;u)\}$ pertence a l^q e existe uma constante $C_1(\theta,q) > 0$, tal que

$$C_1(\theta,q)\|2^{-i\theta}K(2^i;u);l^q\| \leq \|u\|_{\theta,q;K}, \text{ com } u \in (X_0,X_0)_{\theta,q;K}.$$

Então tomando a norma l^q na equação (2.1.28), temos

$$\|2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0} + 2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1};l^q\| \leq 2\|(2^{-i\theta}K(2^i;u));l^q\| \leq \frac{2}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}$$

assim

$$\|2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0};l^q\|, \|2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1};l^q\| \leq \frac{2}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.29}$$

Note que, para $u_i = v_{i+1} - v_i$, temos

$$2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0} \leq 2^{-i\theta}\|v_{i+1}\|_{X_0} + 2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0} = 2^{\theta}(2^{-i(1+\theta)}\|v_{i+1}\|_{X_0}) + 2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0}.$$

Consequentemente

$$\|2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0};l^q\| \leq (2^{\theta}+1)\|2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0};l^q\|,$$

da equação (2.1.29)

$$\|2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0};l^q\| \leq \frac{2(2^{\theta}+1)}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.30}$$

Analogamente, $u_i = w_i - w_{i+1}$, temos

$$2^{i(1-\theta)}\|u_i\|_{X_1} \leq 2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1} + 2^{i(1-\theta)}\|w_{i+1}\|_{X_1} = 2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1} + 2^{(1-\theta)}(2^{(i+1)}\|w_{i+1}\|_{X_1})$$

e

$$\|2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_1};l^q\| \leq (1+2^{(\theta-1)})\|2^{i(1-\theta)}\|w_i\|_{X_1};l^q\| \leq \frac{2(1+2^{(\theta-1)})}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.31}$$

Uma vez que, para cada $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2^{-i\theta}J(2^i;u_i) &= 2^{-i\theta}\max\{\|u_i\|_{X_0}, 2^i\|u_i\|_{X_1}\|\} \\ &= \max\{2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0}, 2^{i(1-\theta)}\|u_i\|_{X_1}\} \\ &\leq 2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0} + 2^{i(1-\theta)}\|u_i\|_{X_1}, \end{aligned}$$

logo

$$\|2^{-i\theta}J(2^i;u_i);l^q\| \leq \|2^{-i\theta}\|u_i\|_{X_0};l^q\| + \|2^{i(1-\theta)}\|u_i\|_{X_1};l^q\|.$$

Usando as equações (2.1.30) e (2.1.31),na desigualdade acima, obtemos

$$\|2^{-i\theta}J(2^i;u_i);l^q\| \leq \frac{2^{(i+\theta)}+4+2^\theta}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}, \tag{2.1.32}$$

ou seja $ii)$ do Teorema 2.1.7 é verificado.
Por outro lado

$$\begin{aligned}\sum_{i=-n}^{n} u_i &= \sum_{i=-n}^{0} u_i + \sum_{i=0}^{n} u_i \\ &= \sum_{i=-n}^{0}(v_{i+} - v_i) + \sum_{i=0}^{n}(w_i - w_{i+1}) \\ &= (v_1 - v_{-n}) + (w_1 - w_{n+1}),\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{i=-n}^{n} u_i = u_1 - v_{-n} - w_{n+1}. \tag{2.1.33}$$

Seja L a constante que limita a sequência $\{2^{-i\theta}\|v_i\|_{X_0}\} \in l^q \subset l^\infty$. Então

$$\begin{aligned}\|v_{-n}\|_{X_0+X_1} &\leq \|v_{-n}\|_{X_0} + \|0\|_{X_1} \\ &\leq 2^{-n\theta}L \to 0, \text{ quando } n \to \infty,\end{aligned}$$

de maneira análoga $\|w_{n+1}\|_{X_0+X_1} \to 0$, quando $n \to \infty$, assim da equação (2.1.33) $\sum_{i=-n}^{n} u_i = u$, onde a serie converge em (X_0+X_1). Então $u \in (X_0+X_1)_{\theta,q;J}$.
E por fim, O Teorema da versão discreta do J-Método 2.1.7, afirma que $\|u\|_{\theta,q;J} \leq d_2(\theta,q)|u|_{\theta,q;J}$, para $d_2(\theta,q) > 0$, onde

$$|u|_{\theta,qJ} \leq \inf\{\|2^{-\theta i}J(2^i;u_i)\|_{l^q}; \{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \text{ satisfaz as condições do Teorema 2.1.7}\}.$$

Assim tomando o ínfimo na equação (2.1.32), temos

$$\frac{\|u\|_{\theta,q;J}}{d_2(\theta,q)} \leq |u|_{\theta,q;J} \leq \frac{2^{\theta+1}+4+2^\theta}{C_1(\theta,q)}\|u\|_{\theta,q;K}. \tag{2.1.34}$$

Note que, da prova do Teorema 2.1.4 e do Teorema 2.1.7 temos

$$C_1(\theta,q) = (\ln(2))^{\frac{1}{q}}2^{-\theta} \text{ e } d_2(\theta,q) = 2^\theta(\ln(2))^{\frac{1}{q}-1}$$

assim $\frac{d_2(\theta,q)}{C_1(\theta,q)}$ não depende q.
Denotando

$$D(\theta) = (2^{(\theta+1)} + 4 + 2^{\theta}\frac{d_2(\theta,q)}{C_1(\theta,q)},$$

da equação (2.1.34), tem-se

$$\|u\|_{\theta,q;J} \leq D(\theta)\|u\|_{\theta,q;K}$$

□

Observação 2.1.3. *Pelo Teorema da Equivalência 2.1.8, os espaços intermediários resultantes do J-Método e do K-Método são iguais com normas equivalentes. Daqui em diante, podemos usar a notação $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ para significar qualquer um dos dois espaços.*

Corolário 2.1.1. *Se $\theta \in (0,1)$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $(X_0, X_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q}$.*

Demonstração. Da Proposição 2.1.5

$$(X_0, X_1)_{\theta,p;J} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q;K}.$$

Então, a imersão segue do Item $iii)$ do Teorema de Equivalência 2.1.8. □

2.1.6 A propriedade de reiteração para o método real.

Definição 2.1.4. *Sejam (X_0, X_1) um par de interpolação de espaços de Banach complexos e $\theta \in [0,1]$. Definimos três classes de espaços de Banach complexos intermediários X entre X_0 e X_1 da seguinte forma*

(i) X pertence à classe $\mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$, se existe uma constante C_1, tal que, para todo $u \in X$,

$$K(t;u) \leq C_1 t^{\theta}\|u\|_X, \ t > 0. \tag{2.1.35}$$

(ii) X pertence à classe $\mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$, se existe uma constante C_2, tal que, para todo $u \in X_0 \cap X_1$,

$$\|u\|_X \leq C_2 t^{-\theta} J(t;u), \ t > 0. \tag{2.1.36}$$

(iii) X pertence à classe $\mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$, se X pertence a $\mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$ e $\mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$.

Proposição 2.1.6. *Seja (X_0, X_1) um par de interpolação de espaços de Banach complexos. Então,*

$$X_0 \in \mathcal{H}(0; X_0, X_1) \textbf{ e } X_1 \in \mathcal{H}(1; X_0, X_1). \tag{2.1.37}$$

Demonstração. Seja $t > 0$. Se $u \in X_0$, então

$$\begin{aligned} K(t;u) &= \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\} \\ &\leq \|u\|_{X_0} + t\|0\|_{X_1} = \|u\|_{X_0} \end{aligned}$$

Então $X_0 \in \mathcal{K}(0; X_0, X_1)$. Por outro lado, se $u \in X_1$, então

$$\begin{aligned} K(t;u) &= \inf\{\|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1}; u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0 \text{ e } u_1 \in X_1\} \\ &\leq \|0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} = t\|u\|_{X_1} \end{aligned}$$

Então $X_1 \in \mathcal{K}(1; X_0, X_1)$. Além disso, se $w \in X_0 \cap X_1$, temos

$$\|w\|_{X_0} \leq \max\{\|w\|_{X_0}, t\|w\|_{X_1}\} = J(t;w)$$

e $X_0 \in \mathcal{J}(0; X_0, X_1)$ de maneira análoga

$$\|w\|_{X_1} \leq t^{-1} \max\{\|w\|_{X_0}, t\|w\|_{X_1}\} = t^{-1} J(t;w)$$

e $X_1 \in \mathcal{J}(1; X_0, X_1)$ □

Lema 2.1.3. *Seja $\theta \in [0,1]$ e seja X um espaço de Banach complexo intermediário entre X_0 e X_1.*

(i) $X \in \mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$ *se, e somente se,* $X \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,\infty;K}$.

(ii) $X \in \mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$ *se, e somente se,* $(X_0, X_1)_{\theta;1,J} \hookrightarrow X$.

(iii) $X \in \mathcal{H}(\theta; X_0, X_1)$ *se, e somente se,* $(X_0, X_1)_{\theta,1} \hookrightarrow X \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,\infty}$.

Demonstração. (i) Por definição, $X \in \mathcal{K}(\theta; X_0, X_1)$ se, para alguma constante C_1, temos

$$K(t;u) \leq C_1 t^\theta |u\|_X, \text{ para todo } u \in X \text{ e } t > 0.$$

Por sua vez, isso equivale a

$$C_1\|u\|_X \geq \sup\{t^{-\theta} K(t;u)\} = \|u\|_{\theta,\infty;K},$$

ou seja,

$$X \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,\infty;K}.$$

(ii) Por definição, se $X \in \mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$, então existe alguma constante C_2, tal que $\|v\|_X \leq C_2 t^{-\theta} J(t,v)$, para todo $v \in X_0 \cap X_1$, e $t > 0$. Então, dado $u \in (X_0, X_1)_{\theta,1;J}$ e para toda $f \in S(u;\theta,1)$, tem-se

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_X \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty C_2 t^{-\theta} J(t, f(t)) \frac{dt}{t} = C_2 \|t^{-\theta} J(t, f(t))\|_{L^1_*} < \infty.$$

Então $f \in L^1_*$ e $u = \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}$. Além disso,

$$\|u\|_X = \left\| \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t} \right\|_X \leq \int_0^\infty \|f(t)\|_X \frac{dt}{t} \leq C_2 \|t^{-\theta} J(t, f(t))\|_{L^1_*}$$

e tomando o $\inf_{f \in S(u;\theta,1)}$, tem-se

$$\|u\|_X \leq C_2 \|u\|_{\theta,1;J}. \tag{2.1.38}$$

Portanto

$$(X_0, X_1)_{\theta,1;J} \hookrightarrow X.$$

Por outro lado, suponha $(X_0, X_1)_{\theta,1;J} \hookrightarrow X$ e seja C_2 uma constante, tal que $\|u\|_X \leq C_2 \|u\|_{\theta,1;J}$, com $u \in X_0 \cap X_1$. Seja $u \in X_0 \cap X_1$ e $t > 0$ fixo, e para cada $\lambda > 0$ defina $f_\lambda : \mathbb{R}_+ \to X_0 \cap X_1$, por

$$f_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}u, \text{ se} & te^{-\lambda} \leq s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Afirmamos que $f_\lambda \in S(u;\theta,1)$. De fato, note que, $f_\lambda \in L^1_*(\mathbb{R}_+; X_0 + X_1)$ e

$$\int_0^\infty f_\lambda(s)\frac{ds}{s} = \left(\int_{te^{-\lambda}}^t \frac{ds}{s} \right) \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{\lambda}(\ln(t) - \ln(te^{-\lambda})) = u.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|s^{-\theta} J(s; f_\lambda(s))\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+)} &= \int_0^\infty s^{-\theta} J(s; f_\lambda(s))\frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int_{te^{-\lambda}}^t s^{-\theta} J(s;u)\frac{ds}{s} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int_{te^{-\lambda}}^t \frac{ds}{s} \right) \|s^{-\theta} J(s;u)\|_{L^\infty_*([te^{-\lambda},t])} \\ &= \|s^{-\theta} J(s;u)\|_{L^\infty_*([te^{-\lambda},t])} < \infty \end{aligned}$$

Então $f_\lambda \in S(u;\theta,1)$ e $u \in (X_0, X_1)_{\theta,1;J}$. Além disso,

$$\|u\|_{\theta,1;J} \leq \|s^{-\theta} J(s; f_\lambda)\|_{L^1_*(\mathbb{R}_+)} \leq \|s^{-\theta} J(s;u)\|_{L^1_*([te^{-\lambda},t]}.$$

Fazendo $\lambda \to 0$, temos

$$\|u\|_{\theta,1;J} \leq t^{-\theta} J(t;u).$$

Então pela equação (2.1.38), segue que

$$\|u\|_X \leq C_2 \|u\|_{\theta,1;J} \leq C_2 t^{-\theta} J(t;u).$$

Portanto $X \in \mathcal{J}(\theta; X_0, X_1)$.

(iii) A demonstração deste resultado segue dos itens (i) e (ii)

□

Corolário 2.1.2. *Se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, então*

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} \in \mathcal{H}(\theta, X_0, X_1).$$

Demonstração. De fato, pelo Corolário 2.1.1

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} \in \mathcal{H}(\theta, X_0, X_1).$$

□

Teorema 2.1.9. *(Teorema da Reiteração para o método real). Seja (X_0, X_1) um par de interpolação de espaços de Banach complexos, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$ e sejam X_{θ_0} e X_{θ_1} espaços de Banach intermediários entre X_0 e X_1. Além disso, seja $1 \leq q \leq \infty$ e $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ e seja $\lambda \in (0, 1)$ definido por*

$$\theta = (1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1.$$

(i) Se $X_{\theta_i} \in \mathcal{K}(\theta_i; X_0, X_1)$ para $i = 0, 1$, então $(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda,q;K} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q;K}$.

(ii) Se $X_{\theta_i} \in \mathcal{J}(\theta_i; X_0, X_1)$ para $i = 0, 1$, então $(X_0, X_1)_{\theta,q;J} \hookrightarrow (X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda,q;J}$.

(iii) Se $X_{\theta_i} \in \mathcal{H}(\theta_i; X_0, X_1)$ para $i = 0, 1$, então $(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$.

Demonstração. Para provar (i) e (ii), precisamos distinguir as normas de função $K(t; u)$ e $J(t; u)$ usadas na construção dos espaços intermediários entre X_0 e X_1 daquelas usadas para os espaços intermediários entre X_{θ_0} e X_{θ_1}. Usaremos K^* e J^* para o último. Além disso, usaremos $S^*(u)$ para denotar o conjunto definido na Notação 2.1.3, para os espaços X_{θ_0} e X_{θ_1}.

(i) Para $i = 0, 1$, seja $E_i > 0$, tal que

$$K(t; u) \leq E_i t^{\theta_i} \|u\|_{X_{\theta_i}},\ t > 0 \text{ e } u \in X_{\theta_i}.$$

Dado $u \in (X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda,q;K}$, para todo $u_0 \in X_{\theta_0}$ e $u_1 \in X_{\theta_1}$, com $u = u_0 + u_1$, tem-se

$$\begin{aligned} K(t; u) &\leq K(t; u_0) + K(t; u_1) \\ &\leq E_0 t^{\theta_0} \|u\|_{X\theta_0} + E_1 t^{\theta_1} \|u\|_{X\theta_1} \\ &= E_0 t^{\theta_0} \left(\|u\|_{X\theta_0} + \left(\frac{E_1}{E_0} \right) t^{\theta_1 - \theta_0} \right) \|u\|_{X\theta_1}). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo com respeito a todas as representações de u, segue

$$K(t;u) \leq E_0 t^{\theta_0} K^* \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) t^{\theta_1-\theta_0}; u \right),$$

assim

$$t^{-\theta} K(t;u) \leq E_0 t^{-(\theta-\theta_0)} K^* \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) t^{\theta_1-\theta_0}; u \right).$$

Tome

$$s = \left(\frac{E_1}{E_0} \right) t^{\theta_1-\theta_0}. \tag{2.1.39}$$

Então

$$\begin{aligned} t^{-\theta} K(t;u) &\leq E_0 \left(\left(\frac{E_0}{E_1} \right) s \right)^{-\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}} K^*(s;u) \\ &= E_0 \left(\left(\frac{E_0}{E_1} \right) s \right)^{-\lambda} K^*(s;u). \end{aligned}$$

Ou seja

$$t^{-\theta} K(t;u) \leq E_0^{(1-\lambda)} E_1^{\lambda} (s^{-\lambda} K^*(s;u)). \tag{2.1.40}$$

Em particular, se $q = \infty$

$$\|u\|_{\theta,\infty;K} \leq E_0^{(1-\lambda)} E_1^{\lambda} \|u\|_{\lambda,\infty;K}. \tag{2.1.41}$$

Observe

$$t = \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) s \right)^{\frac{1}{\theta_1-\theta_0}} \implies dt = \frac{1}{\theta_1-\theta_0} \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) s \right)^{\frac{1}{\theta_1-\theta_0}-1} \left(\frac{E_1}{E_0} \right) ds,$$

logo

$$\frac{dt}{t} = \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) s \right)^{\frac{-1}{\theta_1-\theta_0}} \left[\frac{1}{\theta_1-\theta_0} \left(\left(\frac{E_1}{E_0} \right) s \right)^{\frac{1}{\theta_1-\theta_0}-1} \left(\frac{E_1}{E_0} \right) ds \right],$$

sendo assim

$$\frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{\theta_1-\theta_0} \right) \frac{ds}{s}. \tag{2.1.42}$$

Se $1 \leq q < \infty$, da equação (2.1.40) temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\theta,q;K}^q &= \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t;u))^q \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty (E_0^{(1-\lambda)} E_1^\lambda (s^{-\lambda} K^*(s;u)))^q \frac{ds}{(\theta_1-\theta_0)s} \\
&= \frac{E_0^{(1-\lambda)q} E_1^{q\lambda}}{(\theta_1-\theta_0)} \int_0^\infty ((s^{-\lambda} K^*(s;u)))^q \frac{ds}{s} \\
&= \frac{E_0^{(1-\lambda)q} E_1^{q\lambda}}{(\theta_1-\theta_0)} \|u\|_{\lambda,q;K}^q.
\end{aligned}$$

O que implica

$$\|u\|_{\theta,q;K} \leq \frac{E_0^{(1-\lambda)} E_1^\lambda}{\theta_1-\theta_0} \|u\|_{\lambda,q;K}. \tag{2.1.43}$$

Das desigualdades (2.1.41) e (2.1.43), para qualquer $1 \leq q \leq \infty$, temos

$$(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\lambda,q;K} \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q;K}.$$

(ii) Para $i = 0, 1$, seja $D_i > 0$, tal que

$$\|u\|_{X_{\theta_i}} \leq D_i t^{-\theta_i} J(t;u). \tag{2.1.44}$$

Dado $u \in (X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\theta,q;J}$, seja

$$g \in S\left(\frac{u}{\theta_1-\theta_0}; \theta, q\right)$$

e defina $t(s) = \left(\frac{D_1}{D_0} s\right)^{\frac{1}{\theta_1-\theta_0}}$, para todo $s > 0$ e $f(s) = g(t)$. Como X_{θ_0} e X_{θ_1} são espaços intermediários, assim

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_{\theta_0} \text{ com } i = 0, 1$$

e $f(s) = g(t) \in X_{\theta_0} \cap X_{\theta_1}$ para todo $s > 0$. Além disso, da equação (2.1.44)

$$\begin{aligned}
J^*(s; f(s)) &= \max\{\|f(s)\|_{X_{\theta_0}}; t\|f(s)\|_{X_{\theta_1}}\} \\
&\leq \max\{D_0 t^{-\theta_0} J(t; f(s)); D_1 t^{-\theta_1} s J(t; f(s))\} \\
&= D_0 t^{-\theta_0} \max\left\{1; \left(\frac{D_1}{D_0}\right) t^{-(\theta_1-\theta_0)} s\right\} J(t; f(s)) \\
&= D_0 t^{-\theta_0} J(t; f(s)),
\end{aligned}$$

onde $\left(\frac{D_1}{D_0}\right) t^{-(\theta_1-\theta_0)} = 1$ da definição de $t(s)$. Então

$$s^{-\lambda} J^*(s; f(s)) = D_0 s^{-\lambda} t^{-\theta_0} J(s; f(s)), \; s > 0.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
D_0 s^{-\lambda} t^{-\theta_0} &= D_0 \left(\frac{D_0}{D_1} t^{(\theta_1-\theta_0)} \right)^{-\lambda} t^{-\theta_0} \\
&= D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} t^{-[(1-\lambda)\theta_0+\lambda\theta_1]} \\
&= D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} t^{-\theta},
\end{aligned}
$$

então

$$
s^{-\lambda} J^*(s; f(s)) \le D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} t^{-\theta} J(t; f(s)) = D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} t^{-\theta} J(t; g(t)) \tag{2.1.45}
$$

Observe que a definição de $t(s)$ é análoga a equação (2.1.39). Então a equação (2.1.42) é valida, ou seja

$$
\frac{dt}{t} = \frac{1}{\theta_1 - \theta_0} \frac{ds}{s}
$$

Portanto, se $1 \le q \le \infty$, da equação (2.1.45)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (s^{-\lambda} J^*(s; f(s)))^q \frac{ds}{s} &\le \int_0^\infty (D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} t^{-\theta} J(t; g(t)))^q \frac{ds}{s} \\
&= \left(D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} \right)^q \int_0^\infty (t^{-\theta} J(t; g(t)))^q \frac{ds}{s} \\
&= \left(D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} \right)^q \int_0^\infty (t^{-\theta} J(t; g(t)))^q \left(\frac{1}{\theta_1 - \theta_0} \right)^{-1} \frac{dt}{t} \\
&= \left(\theta_1 - \theta_0)(D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} \right)^q \int_0^\infty (t^{-\theta} J(t; g(t)))^q \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\|s^{-\lambda} J^*(s; f(s))\|_{L_*^q} \le D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} (\theta_1 - \theta_0)^{\frac{1}{q}} \|t^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L_*^q} < \infty.
$$

Se $q = \infty$ as desigualdades são validas. Pelo Lema 2.1.1 $f \in L_*^1(\mathbb{R}_+, X_0 + X_1)$. Além disso,

$$
\int_0^\infty f(s) \frac{ds}{s} = \int_0^\infty g(t) \frac{ds}{s} = (\theta_1 - \theta_0) \int_0^\infty g(t) \frac{dt}{t} = (\theta_1 - \theta_0) \frac{u}{(\theta_1 - \theta_0)} = u.
$$

Assim $f \in S^*(u; \lambda; q)$. Então

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\lambda;q,J^*} &\le \|s^{-\lambda} J^*(s; f(s))\|_{L_*^q} \\
&\le D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} (\theta_1 - \theta_0)^{\frac{1}{q}} \|t^{-\theta} J(t; g(t))\|_{L_*^q}.
\end{aligned}
$$

Tomando o ínfimo com $g \in S(\frac{u}{\theta_1 - \theta_0}; \theta; q)$ da desigualdade acima, temos

$$
\|u\|_{\lambda;qJ^*} \le D_0^{(1-\lambda)} D_1^{\lambda} (\theta_1 - \theta_0)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\theta;q,J}.
$$

(iii) Segue direto do itens $i)$ e $ii)$ e do Teorema da Equivalência 2.1.8

□

2.1.7 Os Espaços de Besov

O método de interpolação real também se aplica a escalas de espaços baseadas na suavidade. Para espaços de Sobolev em domínios suficientemente suaves, os espaços intermediários são chamados de espaços de Besov. Antes de defini-los, primeiro estabelecemos o teorema que mostra que se $0 < k < m$, então $W^{k,p}(\Omega)$ é intermediário entre $L^p(\Omega)$ $W^{m,p}(\Omega)$ desde que Ω seja suficientemente regular.

Definição 2.1.5. *(A Condição do Cone) Ω satisfaz a condição do cone, se existe um cone finito C tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito C_x contido em Ω e congruente a C.*

Definição 2.1.6. *(A Condição de Lipschitz Local Forte) Ω satisfaz a condição de Lipschitz local forte se existirem números positivos δ e M, e um aberto localmente finito cobre U_j cobrindo $\partial\Omega$, e, para cada j uma função de valor real f_j de $n-1$ variáveis, tal que as seguintes condições sejam válidas:*

(i) Para cada R finito, toda coleção $R+1$ de subconjuntos de U_j tem intersecção vazia.

(ii) Para cada par de pontos $x, y \in \Omega$, tais que $|x-y| < \delta$, existe um j, tal que

$$x, y \in V_j = \{u \in U_j;\ d(x, \partial\Omega) > \delta\}$$

(iii) Cada f_j satisfaz a condição de Lipschitz com a constante M, isto é, se

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \text{ e } \rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \text{ então}$$
$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M|\xi - \rho|$$

(iv) Para algum sistema de coordenadas $(\xi_{(j,1)}, \dots, \xi_{(j,n)}) \subset U_j$ $\Omega \cap U_j$ é representado pela desigualdade

$$\xi_{(j,n)}) \leq f_j \xi_{(j,1)}, \dots, \xi_{(j,n)})$$

Se Ω for limitado, das condições acima se reduz apenas que Ω deve ter uma limite local de Lipschitz, ou seja, que cada ponto $x \in \partial\Omega$ deve ter uma vizinhança U_x cuja interseção com $\partial\Omega$ deve ser o gráfico de uma função contínua de Lipschitz.

Os três próximos resultado são demonstrados no livro [Adams Sobolev Space]

Teorema 2.1.10. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição do cone C. Se $mp > n$ seja $p \leq q \leq \infty$. então existe uma constante K dependendo de m, n, p, q e as dimensões do cone C fornecendo as condições para o cone em Ω, tal que para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_q \leq K \|u\|_{m,p}^{\theta} \|u\|_p^{1-\theta}$$

onde $\theta = \frac{n}{mp} - \frac{n}{mq}$.

Teorema 2.1.11. *(Propriedade de Aproximação) Se $0 < k < m$ existe uma constante C tal que para cada $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e todo ϵ suficientemente pequeno existe $u \in W^{m,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\|u - u_\epsilon\|_p \leq C\epsilon^k \|u\|_{k,p}, \text{ e } \|u_\epsilon\|_{m,p} \leq C\epsilon^{k-m}\|u\|_{k,p}$$

Teorema 2.1.12. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ que satisfaça a condição de cone. Por cada $\epsilon_0 > 0$ existem constantes finitas K e K', cada uma dependendo de n, m, p, θ e as dimensões do cone C fornecendo a condição de cone para Ω tal que se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $0 < j < m$, e $u \in W^{m,p}(\Omega)$, então*

$$\begin{aligned}
&|u|_{j,p} < K(\epsilon|u|_{m,p} + \epsilon^{-j/(m-J)}\|u\|_p),\\
&\|u\|_{j,p} < K'(\epsilon\|u\|_{m,p} + \epsilon^{-j/(m-J)}\|u\|_p),\\
&\|u\|_{j,p} < 2K'\|u\|_{m,p}^{j/m}\|u\|_p^{(m-j)/m}
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.13. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de Lipschitz local forte, $0 < k < m$ e $1 \leq q \leq \infty$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \in \mathcal{H}\left(\frac{k}{m}, L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)\right)$$

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned}
J(t;u) &= \max\{\|u\|_p, t\|u\|_{m,p}\}\\
K(t;u) &= \inf\{\|u_0\|_p + t\|u_1\|_{m,p}; u = u_0 + u_1, u_0 \in L^p(\Omega) \text{ e } u_1 \in W^{m,p}\}.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\|u\|_{k,p} \leq Ct^{(-k/m)}J(t;u) \tag{2.1.46}$$

$$K(t;u) \leq Ct^{(k/m)}\|u\|_{k,p} \tag{2.1.47}$$

Do Teorema 2.1.12 afirma que para algum C e para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} \leq C(\|u\|_p^{(m-k)/m}\|u\|_{m,p}^{k/m}).$$

Note que, a expressão do lado direito é C vezes o valor mínimo de.

$$\begin{aligned}
t^{(-k/m)}J(t;u) &= t^{(-k/m)}\max\{\|u\|_p, t\|u\|_{m,p}\}\\
&= \max\{t^{-k/m}\|u\|_p,\ t^{(m-k)/m}\|u\|_{m,p}\},
\end{aligned}$$

que ocorre para $t = \|u\|_p/\|u\|_{m,p}$, tomando o valor de t em ambos os termos no máximos.

$$\begin{aligned}
t^{(-k/m)}J(t;u) &= \max\{(\|u\|_p/\|u\|_{m,p})^{(-k/m)}\|u\|_p,\ (\|u\|_p/\|u\|_{m,p})^{(m-k)/m}\|u\|_{m,p}\}\\
&= \max\{\|u\|_p^{1-(k/m)}\|u\|_{m,p}^{(k/m)},\ \|u\|_p^{1-(k/m)}\|u\|_{m,p}^{(k/m)}\}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\|u\|_{k,p} &\leq C(\|u\|_p^{1-k/m}\|u\|_{m,p}^{(k/m)})\\ &= Ct^{-(k/m)}J(t;u)\end{aligned}$$

O que prova a equação (2.1.46). Mostraremos que para provar a equação (2.1.47) é equivalente a provar a Propriedade de aproximação 2.1.11. Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$, então

$$K(t;u) \leq \|u\|_p + t\|0\|_{m,p} = \|u\|_p \leq \|u\|_{k,p}$$

Assim, se $t \geq 1$, então $t^{(k/m)} \geq 1$, assim

$$K(t;u) \leq t^{(k/m)}\|u\|_{k,p}$$

Se $0 < t \leq 1$, então

$$K(t;u) = \inf\{\|u_0\|_p + t\|u_1\|_{m,p}; u = u_0 + u_1, u_0 \in L^p(\Omega) \text{ e } u_1 \in W^{m,p}\}.$$

Logo

$$\|u_0\|_p + t|u_1\|_{m,p} \leq 2K(t;u)$$

Assim

$$\|u - u_1\|_p = |u_0\|_p \leq 2t^{k/m}K(t;u) \text{ e } |u_1\|_{m,p} \leq 2t^{k/m-1}K(t;u)$$

Tomando $u_\epsilon = u_1$ e $t^{1/m} = \epsilon$ no Propriedade de Aproximação 2.1.11, temos

$$\begin{aligned}t^{-(k/m)}K(t;u) &\leq t^{-(k/m)}(\|u-u_1\|_p + t\|u_1\|_{m,p})\\ &\leq \epsilon^{-k}(C_1\epsilon^k\|u\|_{k,p} + \epsilon^m C_1\epsilon^{k-m}\|u\|_{k,p})\\ &= C_1\|u\|_{k,p} + C_1\|u\|_{k,p}\\ &= C\|u\|_{k,p}\end{aligned}$$

O que prova a equação (2.1.47). □

Definição 2.1.7. *Sejam $0 < s < \infty, 1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Seja m também o menor inteiro maior que s. Definimos o espaço $B^{s,p,q}(\Omega)$ como o espaço intermediário entre $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ onde $\theta = s/m$, mais especificamente:*

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega))_{s/m,q;J}$$

É um espaço de Banach com norma $\|u; B^{s,p,q}(\Omega)\| = \|u; (L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega))\|_{s/m,q;J}$ e goza de muitas outras propriedades herdadas de $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$. Além disso, impõe a propriedade de Lipschitz local forte em Ω, que garante a existência de uma extensão do operador de $W^{m,p}(\Omega)$ para $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e assim de $B^{s,p,q}(\Omega)$ para $B^{s,p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Para domínios que satisfazem o Teorema 2.1.13 e o Teorema da Reiteração 2.1.9, mostram que, para a equivalência de normas, obtemos o mesmo espaço $B^{s,p,q}(\Omega)$ se usarmos qualquer inteiro $m > s$ na definição acima. De fato, se $s_1 > s$ e $1 \leq q_1 \leq \infty$, então

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (L^p(\Omega), B^{s_1,p,q_1}(\Omega))_{s_1/s,q}.$$

Mais precisamente, se $0 \leq k < s < m$ e $s = (1-\theta)k + \theta m$, então

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (W^{k,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))_{\theta,q},$$

e se $0 < s_1 < s_2$, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ e $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, então

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (B^{s_1,p,q_1}(\Omega), B^{s_2,p,q_2}(\Omega))_{\theta,q}.$$

Observação 2.1.4. *O Teorema 2.1.13, nos diz que para o inteiro m*

$$B^{m,p,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow B^{m,p,\infty}(\Omega).$$

Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$. $B^{m,p,q}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ se , e somente se $p = q = 2$ O seguinte Teorema requer apenas que Ω satisfaça a condição do cone.

Teorema 2.1.14. *(Teorema da imersão de espaços de Besov) Seja Ω um espaço com domínio em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição do cone, e sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$*

a) Se $sp < n$, então $B^{s,p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{rq}(\Omega)$, para $r = \frac{np}{n-sp}$.

b) Se $sp = n$, então $B^{s,p,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

c) Se $sp > n$, então $B^{s,p,q}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega)$.

Demonstração. a) Existe $s_1 > s$ tal que $s_1 p = n$, então

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (L^p(\Omega), B^{s_1,p,1}(\Omega))_{s_1/s,q}.$$

Pelo Teorema da interpolação exata para o método J ver teorema 2.1.6, temos

$$B^{s,p,q}(\Omega) = (L^p(\Omega), B^{s_1,p,1}(\Omega))_{s_1/s,q} \hookrightarrow (L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))_{s_1/s,q},$$

onde $r = (1 - s_1/s)1/p = np/(n - sp)$.

b) Seja m o menor inteiro maior do que $s = n/p$.
Seja $u \in B^{n/p,p,1}(\Omega) = (L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega))_{n/mp,1;J}$, assim pelo Teorema de versão discreta do Método J 2.1.7, existe $\{u_1\} \in W^{m,p}(\Omega)$, tal que $\sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i$ converge para u em $B^{n/p,p,1}(\Omega)$ e a sequência $\{2^{-in/mp}J(2^i; u_i)\}$ pertence a l^1. Como $mp > n$ e Ω satisfaz a condição do cone, então pelo Teorema 2.1.10 segue

$$\|u\|_\infty \leq K_1 \|u\|_p^{(mp-n)/mp} \|u\|_{m,p}^{n/mp},$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$, mas

$$\|u\|_\infty = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|u_i\|_\infty \leq K_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|u_i\|_p^{(mp-n)/mp} \|u_i\|_{m,p}^{n/mp}.$$

Por outro lado

$$\|2^{-in/mp} J(2^i; u_i); l^1\| \leq C_1 \|u; B^{n/p,p;1}(\Omega)\|.$$

Logo

$$B^{s,p,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

A continuidade de u segue do Teorema de imersão de Sobolev demonstrado em [Adams Sobolev Space]. Portanto

$$B^{s,p,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

c) Seja $s > s_1$, tal que $s_1 p = n$, então

$$B^{s,p,q}(\Omega) \hookrightarrow B^{s_1,p,1}(\Omega),$$

do item $b)$

$$B^{s_1,p,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega).$$

Portanto

$$B^{s,p,q}(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega).$$

□

2.2 Escalas de interpolação-extrapolação abstratas

Definição 2.2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é um operador setorial se existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ e $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que $\mathcal{S}_{\phi,a} := \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \ \forall \lambda \in \mathcal{S}_{\phi,a}.$$

Se $a = 0$, dizemos que A é um operador setorial positivo.

Sejam $(X_0, \|\cdot\|_0)$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ um operador linear tal que $-A$ seja um operador setorial positivo em X_0. Defina $X_1 = (D(A), \|A \cdot\|_0)$ e considere A_1 a X_1-realização do operador A, isto é, o operador definido em

$$D(A_1) = \{x \in X_1 \cap D(A) : Ax \in X_1\}$$

pela regra $A_1 x = Ax$. Em seguida, seja $X_2 = (D(A_1), \|A \cdot\|_1)$, onde $\|\cdot\|_1 = \|A \cdot\|_0$. Indutivamente definimos

$$X_{k+1} = (X_k, \|\cdot\|_{k+1}) = (D(A_k), \|A_k \cdot\|_k)$$

e

$$A_{k+1} = X_{k+1}\text{-realização de } A_k,$$

$k \in \mathbb{N}$. Obtemos assim uma família de espaços de Banach $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que é densamente injetada, no sentido de que a injeção $X_{k+1} \hookrightarrow X_k$ é densa, e A_k é também um operador setorial com $\sigma(A_k) = \sigma(A)$, para $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, não há perda de generalidade em assumir $0 \in \rho(A)$. Assim considere o espaço $(X_0, \|A^{-1} \cdot\|_0)$ e defina X_{-1} como o completamento de X_0 com a norma $\|A^{-1} \cdot\|_0$. Logo

$$X_0 \hookrightarrow X_{-1}.$$

Seja $\mathcal{F} = (\cdot,\cdot)_\theta \in \{[\cdot,\cdot]_\theta, (\cdot,\cdot)_{\theta,p}, 1 < p < \infty\}$, onde $[\cdot,\cdot]_\theta$ e $(\cdot,\cdot)_{\theta,p}$ denotam os funtores complexo e real, respectivamente. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, defina

$$X_{k+\theta} = (X_k, X_{k+1})_\theta \quad \text{e} \quad A_{k+\theta} = X_{k+\theta}\text{-realização de } A_k.$$

Chamamos $\{(X_\beta, A_\beta); -1 \le \beta < \infty\}$ de escala de interpolação-extrapolação sobre $[-1, \infty]$ associada a A e $\mathcal{F}$.

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [3], é conhecido como desigualdade do momento e possui grande utilidade no estudo de famílias de operadores lineares em escalas de interpolação-extrapolação.

Proposição 2.2.1. . *Seja $\{(X_\beta, A_\beta); -1 \le \beta < \infty\}$ a escala de interpolação-extrapolação associada a A e $\mathcal{F}$. Se $-1 \le \alpha < \beta < \theta < \infty$ então existe $c = c(\alpha, \beta, \theta)$, tal que*

$$\|x\|_{X_\beta} \le c \|x\|_{X_\alpha}^{\frac{\theta-\beta}{\theta-\alpha}} \|x\|_{X_\theta}^{\frac{\beta-\alpha}{\theta-\alpha}}$$

para todo $x \in X_\theta$.

Suponha que X_0 é reflexivo e defina $\mathbf{F}^\# = \left\{(\cdot,\cdot)_\theta^\#, 0 < \theta < 1\right\}$, onde

$$(\cdot,\cdot)_\theta^\# = \begin{cases} [\cdot,\cdot]_\theta, & \text{se } (\cdot,\cdot)_\theta = [\cdot,\cdot]_\theta, \\ (\cdot,\cdot)_{\theta,p'}, & \text{se } (\cdot,\cdot)_\theta = (\cdot,\cdot)_{\theta,p}, \end{cases}$$

é um funtor de interpolação admissível. Sendo $X_0^\#$ o espaço dual $(X_0)'$ de X_0 e $A^\#$ o operador dual de A, segue que $A^\#$ é setorial com domínio $X_1^\#$. Portanto, podemos construir uma escala de interpolação-extrapolação

$$\left\{(X_\beta^\#, A_\beta^\#); -1 \leq \beta < \infty\right\},$$

chamada de escala dual de interpolação-extrapolação gerada por $A^\#$ e $\mathcal{F}^\#$. Segue de [3, Teorema 6,2] que

$$(X_\beta)' = X_{-\beta}^\# \quad \text{e} \quad (A_\beta)' = A_{-\beta}^\#, -1 \leq \beta \leq 1,$$

onde a igualdade é dada no sentido de espaços vetoriais com normas equivalentes.

2.2.1 Potência fracionárias de operadores setoriais

Exemplos importantes de escalas de interpolação-extrapolação são os espaços de potência fracionária associados a um operador setorial de tipo positivo $A : D(A) \subset X^0 \longrightarrow X^0$. Neste trabalho usaremos tais escalas nas aplicações de equações de evolução fracionárias em problemas concretos e, por isso, veremos sua construção de forma um pouco mais detalhada.

Para $z \in \mathbb{C}$, com $Re(z) < 0$, definimos

$$A^z := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (-\lambda)^z(\lambda + A)^{-1}d\lambda,$$

onde γ é um contorno apropriado em $\rho(-A)$. É conhecido que então A^z é um operador linear limitado injetivo. Além disso, $A^zA^w = A^{z+w}$ para $Re(z) < 0$ e $Re(w) < 0$. Como consequência, podemos definir

$$A^z = (A^{-z})^{-1}, \quad Re(z) > 0.$$

Dessa forma, denotando por A^0 o operador identidade em X_0, temos que A^z está definido para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso, vale que $A^zA^w = A^{z+w}$ e $D(A^w) \hookrightarrow D(A^z) \hookrightarrow X_0$ para $0 < Re(z) < Re(w)$.

O espaço de potência fracionária $\beta > 0$ é definido por

$$X^\beta = (D(A^\beta); \|\cdot\|_{X^\beta}),$$

onde $\|\cdot\|_{X^\beta} = \|A^\beta \cdot\|_{X^0}$. Segue que a escala de espaços de potência fracionária

$$\{X^\beta; \beta \geq 0\}$$

é uma escala de interpolação com pares densamente injetados $(X_\beta, X_{\beta+1})$, $\beta \geq 0$.

Seja A é um operador setorial positivo que tem potências imaginárias limitada em um espaço de Banach X_0, isto é, existem $\varepsilon > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$A^{it} \in \mathcal{L}(X) \quad \text{e} \quad \|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon.$$

A escala de interpolação-extrapolação $\{(X_\beta, A_\beta) : -1 \leq \beta < \infty\}$ gerada por este operador utilizando-se o funtor de interpolação complexa $[\cdot,\cdot]_\theta$, $0 < \theta < 1$, é equivalente a escala de potência fracionária gerada por A. Além disso

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{1-\theta\alpha+\theta\beta}) \tag{2.2.1}$$

para $0 \leq Re(\alpha) \leq Re(\beta)$ e $0 < \theta < 1$.

Capítulo 3

Equações de evolução fracionárias.

Neste capítulo estudaremos a solução para o problema fracionário abstrato de Cauchy,

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

onde $\alpha \in (1,2), D_t^\alpha$ é a derivada de Caputo, $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ é um operador setorial linear, X_0 é um espaço de Banach e f é uma função continua.
Seja u uma solução de (3.0.1), então, aplicando formalmente a transformada de Laplace em (3.0.1), obtemos

$$\widehat{D_t^\alpha u}(\lambda) = \widehat{Au}(\lambda) + \widehat{f}(\lambda).$$

Usando a transformada da derivada e aplicando as condições iniciai, segue

$$\lambda^\alpha \widehat{u}(\lambda) - u_0 \lambda^{\alpha-1} - u_1 \lambda^{\alpha-2} = A\widehat{u}(\lambda) + \widehat{f}(\lambda),$$

consequentemente

$$(\lambda^\alpha - A)\widehat{u}(\lambda) = u_0 \lambda^{\alpha-1} + u_1 \lambda^{\alpha-2} + \widehat{f}(\lambda).$$

Suponha que $\lambda \in Ha$, logo $\lambda^\alpha \in \rho(A)$ e portanto

$$\widehat{u}(\lambda) = u_0 \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} + u_1 \lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha - A)^{-1} + \widehat{f}(\lambda)(\lambda^\alpha - A)^{-1}. \tag{3.0.2}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, podemos reescrever a equação acima por

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s)ds, t > 0,$$

onde

$$E_\alpha(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, \tag{3.0.3}$$

$$S_\alpha(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, \tag{3.0.4}$$

$$R_\alpha(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda(t-s)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda. \tag{3.0.5}$$

Lembrando o conceito de solução Branda em (3.2.1).

Definição 3.0.1. *Seja $\tau > 0$.*

(i) A função $u : [0,\tau] \to X_1$ é uma solução branda para (3.2.1) em $[0,\tau]$, se $u \in C([0,\tau]; X_1)$ e para todo $t \in [0,\tau]$ temos,

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds.$$

(ii) A função $u : [0,\tau] \to X_1$ é uma solução branda para (3.2.1) em $[0,\tau]$, se para qualquer $\tau' \in [0,\tau]$, u é solução branda para (3.2.1) em $[0,\tau']$.

3.1 O problema linear.

Nesta seção é dedicada ao problema linear,

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $\alpha \in (1,2), D_t^\alpha$ é a derivada de Caputo, $u_0, u_1 \in X_1$ e $f : [0,\infty) \to X_\beta, \beta \in (0,1]$ é uma função continua limitada. A priori estudaremos as famílias $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$. A partir de agora vamos considerar que existem constantes $M > 0$ e $\theta \in (\frac{\alpha\pi}{2}, \pi\}$, tal que o operador linear $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ satisfaz

$$\mathbb{S}_\theta := \{z \in \mathbb{C}^*; |\arg(z)| \leq \theta\} \subset \rho(A),$$

e para todo $\lambda \in \mathbb{S}_\theta$, temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

Logo, temos que $-A$ é um operador setorial. Note que, se $\eta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2})$ e $\lambda \in \mathbb{S}_{\eta_0}$, então $\lambda^\alpha \in \mathbb{S}_\theta \subset \rho(A)$ e $\|(\lambda^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq \frac{M}{|\lambda|^\alpha}$.

3.1.1 Estimativas lineares em escalas de interpolação-extrapolação abstratas.

Inicialmente, considere as famílias de operadores lineares $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ em escalas de interpolação-extrapolação associadas ao operador A. Começamos com o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1. *Considere $\alpha \in (1,2)$ para a seguinte função*

$$E_\alpha(tA) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, & se\ t > 0, \\ I, & se\ t = 0, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

onde Ha é um caminho de Hankel e I é o operador identidade, assim as seguintes propriedade são validas.

(i) Para todo $t > 0$, $E_\alpha(tA) : X_0 \to X_0$ esta bem definida e existe $M > 0$ tal que

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{X_0} \leq M\|x\|_{X_0}, \forall x \in X_0$$

(ii) A função $E_\alpha(\cdot A) : [0,\infty) \to \mathcal{L}\{X_0\}$ é fortemente continua.

(iii) Se $\beta \in [0,1]$, então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{X_\beta} \leq Mt^{-\alpha\beta}\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

(iv) A família $\{E_\alpha(tA)\}_{t\leq 0}$ admite uma extensão analítica do setor $\mathbb{S}_{\pi-\theta}$.

Demonstração. □

(i) Para $\alpha \in (1,2)$ e $r > 0$, seja $\eta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{\alpha}\right)$ e defina o caminho $Ha = Ha(r,\eta_0)$ por

$$\begin{aligned} Ha = Ha(r,\eta_0) &:= \{se^{i\eta_0}; r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is}; |s| \leq \eta_0\} \cup \{se^{-i\eta_0}; r \leq s < \infty\} \\ &= Ha_1 + Ha_2 - Ha_3. \end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ fixo, assuma $r = \frac{1}{t}$, então. Sobre Ha_1, com $x \in X_0$, temos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{Ha_1}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}|\lambda^\alpha|\|(\lambda^\alpha - A)^{-1})x\|_{X_0}d|\lambda| \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{Ha_1}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}d|\lambda|\|x\|_{X_0} \\ &= \frac{M}{2\pi}\int_r^\infty e^{ts\cos\eta_0}s^{-1}ds\|x\|_{X_0} \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^\infty te^{ts\cos\eta_0}ds\|x\|_{X_0} \\ &= \frac{M}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta_0}}{|\cos\eta_0|}\|x\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Tome $C_1 = \frac{M}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta_0}}{|\cos\eta_0|}$, consequentemente

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} \leq C_1\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

Sobre Ha_2, com $x \in X_0$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{Ha_2}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}|\lambda^\alpha|\|(\lambda^\alpha - A)^{-1})x\|_{X_0}d|\lambda| \\
&\leq \frac{M}{2\pi}\int_{Ha_2}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}d|\lambda|\|x\|_{X_0} \\
&= \frac{M}{2\pi}\int_{-\eta_0}^{\eta_0}\frac{|e^{tre^{is}}|}{r}rds\|x\|_{X_0} \\
&\leq \frac{M}{2\pi}\int_{-\eta_0}^{\eta_0} e^{tr\cos s}ds\|x\|_{X_0}.
\end{aligned}$$

Como $r = \frac{1}{t}$, segue

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} = \leq \frac{M}{2\pi}\int_{-\eta_0}^{\eta_0} e^{tr\cos s}ds\|x\|_{X_0}.$$

Tome $C_2 = \frac{M}{2\pi}\int_{-\eta_0}^{\eta_0} e^{tr\cos s}ds$, consequentemente

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} \leq C_2\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

Sobre Ha_3, com $x \in X_0$, temos

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_3} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{Ha_3}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}|\lambda^\alpha|\|(\lambda^\alpha - A)^{-1})x\|_{X_0}d|\lambda|,$$

de maneira análoga ao primeiro caso, segue que existe $C_3 > 0$, tal que

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_3} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} \leq C_3\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

Seja $K = \max\{C_1, C_2, C_3\}$, obtemos

$$\|E_\alpha(tA)\|_{X_0} \leq K\|x\|_{X_0}\forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

Note que, do teorema da integral de Cauchy, temos que a representação (3.1.2) não depende de $r > 0$ e $\eta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{\alpha}\right)$, o que finaliza a prova do item i)

(ii) vamos provar que $E(\cdot A) : X_0 \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente continua. Para isso considere $t' > 0$ e seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, t')$ uma sequência, tal que $t_n \to t'$ quando $n \to \infty$. Assim para $x \in X_0$, tem-se

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(t'A)x - E_\alpha(t_nA)x\|_{X_0} &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t'}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda - \int_{Ha} e^{\lambda t_n}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda(t'-t_n)}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0}.\end{aligned}$$

De maneira análoga do item i), iremos analisar a integra acima sobre os caminhos Ha_1, Ha_2 e Ha_3.

·Sobre Ha_1, temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda(t'-t_n)}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} &\le C\int_r^\infty |e^{t'se^{i\eta_0}} - e^{t_nse^{i\eta_0})}|s^{-1}ds\|x\|_{X_0}\\ &= C\int_r^\infty |e^{se^{i\eta_0}}(e^{t'} - e^{t_n})|s^{-1}ds\|x\|_{X_0}.\end{aligned}$$

Assim pelo teorema da convergência dominada, a integral acima tende a 0, quando $n \to \infty$.

·Sobre Ha_2, temos

$$\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda(t'-t_n)}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\|_{X_0} \le C\int_{-\eta_0}^{\eta_0} |e^{t'se^{is}} - e^{t_nre^{i\eta_0}}|s^{-1}ds\|x\|_{X_0}.$$

Novamente pelo teorema da convergência dominada, a integral acima tende a 0 quando $n \to \infty$.

·Sobre Ha_3, segue de maneira análoga a Ha_1. Portanto

$$\|E_\alpha(t'A)x - E_\alpha(t_nA)x\|_{X_0} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

para todo $x \in X_0$.

Por outro lado, seja $\{t_n\} \subset (t', \infty)$, tal que $t_n \to t'$, quando $n \to \infty$, então $\|E_\alpha(t'A)x - E_\alpha(t_nA)x\|_{X_0} \to 0$ quando $n \to \infty$ para cada $x \in X_0$. Ja para a continuidade em $t = 0$, note que do teorema da integral de Cauchy, temos

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{Ha} e^\lambda\lambda^{-1}d\lambda\right)I,$$

onde I é o operador identidade. Então para cada $t > 0$ e $x \in D(A)$

$$\|E_\alpha(tA)x - x\|_{X_0} = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0}.$$

Seja $r = \frac{1}{t}$. Sobre Ha_1, temos

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0} \leq \frac{M}{2\pi}\frac{e^{\cos\eta_0}}{|\cos\eta_0|}t^{\alpha+1}\|Ax\|_{X_0} \to 0 \text{ quando } t \to 0^+.$$

Sobre Ha_2, temos

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0} \leq \frac{M}{\pi}t^\alpha e^{\eta_0}\|Ax\|_{X_0} \to 0 \text{ quando } t \to 0^+.$$

Sobre Ha_3, segue de maneira análoga a Ha_1.

(iii) Considere $\beta = 1$ e seja $x \in X_0$, assim

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{X_1} = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0}.$$

Note que, $X_1(D(A), \|A\cdot\|_0)$ e $\|\cdot\|_1 = \|A\cdot\|_0$, logo para $t > 0$ fixo, se assumirmos $r = \frac{1}{t}$. Sobre Ha_1, existe $k > 0$ independente de α, tal que

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0} \leq \frac{k}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta_0}s^{\alpha-1}ds\|x\|_{X_0},$$

como $\alpha - 1 > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta_0}s^{\alpha-1}ds &= \frac{k}{2\pi}\left(\frac{e^{\cos\eta_0}}{|\cos\eta_0|}t^{-\alpha} - \frac{(\alpha-1)}{t\cos\eta_0}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta_0}s^{\alpha-2}ds\right)\\ &\leq \frac{k}{2\pi|\cos\eta_0|}\left(1 + \frac{1}{|\cos\eta_0|}\right)t^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Sobre Ha_2, temos

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}Axd\lambda\right\|_{X_0} \leq \frac{k}{2\pi}t^{-\alpha}\int_{-\eta_0}^{\eta_0} e^{\cos s}ds\|x\|_{X_0} \quad \leq Ct^{-\alpha}\|x\|_{X_0}.$$

Sobre Ha_3 é obtida de maneira análoga a Ha_1.
Tomando $M > 0$ como o máximo das constantes, concluímos que

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{X_1} \leq Mt^{-\alpha}\|x\|_{X_0},$$

do item i) e do Teorema V.1.5.2 [4] segue a demonstração.

(iv) Para $t \in \mathbb{S}_{\pi-\theta}$, defina $E_\alpha(tA)$ por (3.1.2) e seja $r = \frac{1}{|t|}$. Então para cada $x \in X_0$, temos

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{X_0} \leq \frac{M}{2\pi}\int_{Ha} e^{Re(\lambda t)}|\lambda|^{-1}d|\lambda|\|x\|_{X_0}.$$

Portanto, desta estimativa garantimos a convergência absoluta de (3.1.2) no setor $\mathbb{S}_{\pi-\theta}$, portanto, $E_\alpha(tA)$ é analítica nesta região.

Proposição 3.1.2. *Considere $\alpha \in (1,2)$ para a seguinte função*

$$S_\alpha(tA) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, & se\ t > 0, \\ 0, & se\ t = 0, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

onde Ha é um caminho de Hankel e 0 é o operador nulo, assim as seguintes propriedade são validas

(i) Para todo $t > 0$, $S_\alpha(tA) : X_0 \to X_0$ esta bem definida e existe $M > 0$ tal que

$$\|S_\alpha(tA)x\|_{X_0} \leq Mt\|x\|_{X_0}, \forall x \in X_0.$$

(ii) A função $S_\alpha(\cdot A) : [0,\infty) \to \mathcal{L}\{X_0\}$ é fortemente continua.

(iii) Se $\beta \in [0,1]$, então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|S_\alpha(tA)x\|_{X_\beta} \leq Mt^{1-\alpha\beta}\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

(iv) A família $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ admite uma extensão analítica no setor $\mathbb{S}_{\pi-\theta}$.

Demonstração. Note que,

$$S_\alpha(tA)x = \int_0^t E_\alpha(sA)xds.$$

De fato, para $t = 0$, temos

$$S_\alpha(0A)x = 0.$$

E para $t > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t E_\alpha(sA)xds &= \int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda s}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\int_0^t e^{\lambda s}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}dsd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda \\ &= S_\alpha(tA)x. \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in X_0$. Portanto, usando a unicidade da transformada de Laplace a prova segue da Proposição (3.1.1). □

Proposição 3.1.3. *Considere $\alpha \in (1,2)$, para a seguinte função*

$$R_\alpha(tA) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, & se\ t > 0 \\ 0, & se\ t = 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

onde Ha é um caminho de Hankel e 0 é o operador nulo, assim as seguintes propriedade são validas *(i) Para todo $t > 0$, $R_\alpha(tA) : X_0 \to X_0$ esta bem definida e existe $M > 0$ tal que*

$$\|R_\alpha(tA)x\|_{X_0} \leq Mt^{\alpha-1}\|x\|_{X_0}, \forall x \in X_0.$$

(ii) A função $R_\alpha(\cdot A) : [0, \infty) \to \mathcal{L}\{X_0\}$ é fortemente continua.

(iii) Se $\beta \in [0, 1]$, então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|R_\alpha(tA)x\|_{X_\beta} \leq Mt^{\alpha(1-\beta)-1}\|x\|_{X_0}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_0.$$

(iv) A família $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ admite uma extensão analítica no setor $\mathbb{S}_{\pi-\theta}$.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g_{\alpha-1} * E_\alpha(tA)\} &= \mathcal{L}\{g_{\alpha-1}\}\mathcal{L}\{E_\alpha(tA)\}\\ &= \lambda^{1-\alpha}(\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1})\\ &= (\lambda^\alpha - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\mathcal{L}\{R_\alpha(tA)\} = (\lambda^\alpha - A)^{-1}.$$

Ou seja

$$\mathcal{L}\{R_\alpha(tA)\} = \mathcal{L}\{g_{\alpha-1} * E_\alpha(tA)\},$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in X_0$. Usando a unicidade da transformada de Laplace e da proposição (3.1.1) o resultado segue. □

Proposição 3.1.4. *Considere $\beta, \theta \in [0, 1]$, tal que $\alpha(1 + \theta - \beta) < 1$. Então existe $M > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}&\|E_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} \leq Mt^{-\alpha(1+\theta-\beta)}\|x\|_{X_\beta},\\ &\|S_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} \leq Mt^{1-\alpha(1+\theta-\beta)}\|x\|_{X_\beta} \text{ e}\\ &\|R_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} \leq Mt^{-1-\alpha(\theta-\beta)}\|x\|_{X_\beta},\end{aligned}$$

para todo $x \in X_\beta$ e $t > 0$.

Demonstração. Note que

$$\|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} \leq M_0t^{-\alpha} \text{ e } \|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_1,X_1)} \leq M_1,$$

para $M_0, M_1 > 0$ e para todo $t > 0$. Consequentemente, usando a inequação I.2,11 [4], existe $c > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_\beta,X_1)} &\leq C\|E_\alpha(tA)\|^{1-\beta}_{\mathcal{L}(X_0,X_1)}\|E_\alpha(tA)\|^{\beta}_{\mathcal{L}(X_1,X_1)}\\ &\leq Mt^{-\alpha(1-\beta)},\end{aligned}$$

para $M > 0$ e para todo $t > 0$.

Por outro lado, usando os argumentos de iii) da proposição (3.1.1) garantem que

$$\|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \leq M_2 t^{-\alpha},$$

para $M_2 > 0$ e para todo $t > 0$, assim existe $C_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_\beta,X_{1+\beta})} &\leq C_1 \|E_\alpha(tA)\|^{1-\beta}_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} \|E_\alpha(tA)\|^{\beta}_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \\ &\leq K t^{-\alpha},\end{aligned}$$

para $K > 0$ e para todo $t > 0$.

Além disso, $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$ o que implica $\theta < \beta$, ou seja $1 < 1+\theta < 1+\beta$, assim e do Teorema V.1.5.2 [4], existe $C > 0$, tal que para todo $x \in X_\beta$, tem-se

$$\begin{aligned}\|E_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} &\leq C\|E_\alpha(tA)x\|^{\frac{\beta-\theta}{\beta}}_{X_1} \|E_\alpha(tA)x\|^{\frac{\theta}{\beta}}_{X_{1+\beta}}. \\ &\leq M t^{-\alpha(1+\theta-\beta)} \|x\|_{X_\beta}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\|S_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} &\leq \int_0^t \|E_\alpha(sA)x\|_{X_{1+\theta}} ds. \\ &\leq M t^{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \|x\|_{X_\beta}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|R_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} &= \left\| \int_0^t g_{\alpha-1}(t-s)E_\alpha(sA)x \right\|_{X_{1+\theta}} ds. \\ &\leq M t^{-1-\alpha(\theta-\beta)} \|x\|_{X_\beta}.\end{aligned}$$

□

Observação 3.1.1. *Particularmente, segue da estimativa acima que para todo $t > 0$ os operadores $t^{\alpha\theta}E_\alpha(tA) : X_1 \to X_{1+\theta}$ são operadores lineares limitados que satisfazem*

$$\|t^{\alpha\theta}E_\alpha(tA)\|_{\mathcal{L}(X_1,X_{1+\theta})} \leq M,$$

com $M > 0$ e independente de t, para todo $\theta \in [0,1]$. Além disso, dado um subconjunto compacto J de X_1, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{x\in J} \|t^{\alpha\theta}E_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Para provar a ultima afirmação basta observar que os operadores

$$t^{\alpha\theta}E_\alpha(tA) : X_1 \to X_{1+\theta},$$

são uniformemente limitadas em $t > 0$, $\lim_{t\to 0^+} \|t^{\alpha\theta}E_\alpha(tA)x\|_{X_{1+\theta}} = 0$, para $x \in X_{1+\theta}$ e $X_{1+\theta}$ é um subconjunto denso de X_1.

3.1.2 Teoria do boa colocação e regularidade.

Considere o problema linear (3.1.1), abaixo segue o nosso resultado principal sobre ele.

Teorema 3.1.1. *Considere $\alpha \in (1,2)$ e $f : [0,\infty) \to X_\beta$ uma função continua limitada, onde $\beta \in (0,1]$. Se $\alpha(1-\beta) < 1$, então para quaisquer $u_0, u_1 \in X_1$ existe uma única solução branda $u \in C([0,\infty); X_1)$ do problema (3.1.1). Além disso, para todo $\theta \in [0,\beta)$, tal que $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$, tem-se $u \in C([0,\infty); X_{1+\theta})$,*

$$\|u(t)\|_{1+\theta} \leq Mt^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{X_1} + Mt^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{X_1} + +Mt^{\alpha(\beta-\theta)}B(\alpha(\beta-\theta),1) \sup_{0\leq s<\infty} \|f(s)\|_{X_\beta}$$

e se $\theta > 0$, então

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se u_0, u_1, w_0 e $w_1 \in X_1$, então existe uma constante $c > 0$, tal que

$$t^{\alpha\theta}\|u(t,u_0,u_1) - u(t,w_0,w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq c(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + t\|u_1 - w_1\|_{X_1}),$$

para todo $t \in [0,\infty)$.

Demonstração. Para $u_0, u_1 \in X_1$, considere a função

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s)ds,\ 0 \leq t < \infty.$$

Usando os resultados da seção anterior, temos que

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{X_1} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1} + \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s)\|_{X_1}ds \\ &\leq M\left(\|u_0\|_{X_1} + t\|u_1\|_{X_1} + \int_0^t (t-s)^{\alpha\beta-1}\|f(s)\|_{X_\beta}ds\right) \\ &\leq M(\|u_0\|_{X_1} + t\|u_1\|_{X_1} + t^{\alpha\beta}B(\alpha\beta,1)\sup_{0\leq s<\infty}\{\|f(s)\|_{X_\beta}\}),\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < \infty$.
Por outro lado, se $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $0 \leq t < t_n < \infty$ e $t_n \to t$, temos

$$\begin{aligned}\|u(t_n) - u(t)\|_{X_1} \leq{}& \|E_\alpha(t_nA)u_0 - E_\alpha(tA)u_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(t_nA)u_1 S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1} \\ &+ \int_0^t \|(R_\alpha(t_n-s)A - R_\alpha(t-s)A)f(s)\|_{X_1}ds \\ &+ \int_t^{t_n} \|R_\alpha((t_n-s)A)f(s)\|_{X_1}ds.\end{aligned}$$

A continuidade forte dos operadores $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e do teorema da convergência dominada de Lesbergue garante que os três primeiros termos do lado direito da desigualdade acima tende a 0 quando $n \to \infty$ e para o ultimo termo, temos

$$\begin{aligned}\int_t^{t_n} \|R_\alpha((t_n - s)A)f(s)\|_{X_1} ds &\leq M \int_t^{t_n} (t_n - s)^{\alpha\beta - 1} \|f(s)\|_{X_\beta} ds \\ &\leq M t^{\alpha\beta} \int_{\frac{t}{t_n}}^1 (1-s)^{\alpha\beta} ds \sup_{0\leq s<\infty} \{\|f(s)\|_{X_\beta}\},\end{aligned}$$

que tende a 0 quando $n \to \infty$.
De maneira análoga, prova para o caso $0 \leq t_n < t \leq \tau$. Então $u \in C([0,\infty); X_1)$ e por definição é a única solução Branda de (3.1.1). Além disso, a solução $u \in C(0,\tau]; X_{1+\theta})$ para todo $0 \leq \theta \leq \beta$, tal que $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$. De fato, se $t > 0$, segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0\|_{X_{1+\theta}} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_{1+\theta}} + \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s)\|_{X_{1+\theta}} ds \\ &\leq M\left(t^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{X1} + t^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{X_1} + \int_0^t (t-s)^{\alpha(\beta-\theta)-1}\|f(s)\|_{X_\beta} ds\right) \\ &\leq M\left(t^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{X_1} + t^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{X_1} + t^{\alpha(\beta-\theta)} B(\alpha(\beta-\theta),1) \sup_{0\leq s<\infty}\{\|f(s)\|_{X_\beta}\}\right).\end{aligned}$$

Usando os argumentos anteriores garantimos a continuidade de u. Além disso, note que

$$\begin{aligned}t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} \leq t^{\alpha\theta}\|E_\alpha(tA)u_0\|_{X_{1+\theta}} &+ M(t\|u_1\|_{X_1} \\ &+ t^{\alpha\theta} B(\alpha(\beta-\theta),1) \sup_{0\leq s<\infty}\{\|f(s)\|_{X_\beta}\}),\end{aligned}$$

consequentemente, se $\theta > 0$, segue que da observação anterior que

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

E por fim, se $u_0, u_1 w_0$ e $w_1 \in X_1$, então

$$\begin{aligned}\|u(t,u_0,u_1) - u(t,w_0,w_1)\|_{X_{1+\theta}} &\leq \|E_\alpha(tA)(u_0 - w_0)\|_{X1+\theta} + \|S_\alpha(tA)(u_1 - w_1)\|_{X1+\theta} \\ &\leq M(t^{-\alpha\theta}\|u_0 - w_0\|_{X_1} + t^{1-\alpha\theta}\|u_1 - w_1\|_{X_1}),\end{aligned}$$

ou seja

$$t^{\alpha\theta}\|u(t,u_0,u_1) - u(t,w_0,w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq M(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + t\|u_1 - w_1\|_{X_1}),$$

para todo $t \in [0,\infty)$. □

3.2 O problema não-linear.

Agora estudaremos o problema de Cauchy Fracionário Abstrato não-linear,

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = Au + f(t,u(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

onde D_t^α é a derivada de fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (1,2)$, $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ é um operador linear fechado definido em um espaço de Banach X_0 com domínio $X_1 = (D(A))$ e u_0, u_1 são condições iniciais. As hipóteses sobre o operador A são as mesmas do caso linear. Com relação ao termo não-linear, consideramos $\{X_\gamma\}_{\gamma \geq 0}$ uma escala de interpolação-extrapolação associada a A. Dados as constantes $C > 0, \rho > 0$ e $\beta \in (0,1]$ definimos a família $\mathcal{F}(C,\rho,\beta)$ como o conjunto de todas as funções continuas $f : [0,\infty) \times X_1 \to X_\beta$ satisfazendo,

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_{X_\beta} \leq C(\|u\|_{X_1}^{\rho-1} + \|v\|_{X_1}^{\rho-1} + 1)\|u - v\|_{X_1}$$

e

$$\|f(t,u)\|_{X_\beta} \leq C(\|u\|_{X_1}^{\rho} + 1),$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $u, v \in X_1$.

3.2.1 Teoria do boa colocação e regularidade.

Teorema 3.2.1. *Considere $\alpha \in (1,2)$ e $f \in \mathcal{F}(C,\rho,\beta)$. Se $\alpha(1-\beta) < 1$, então dado $v_0 \in X_1$, podemos considerar $r > 0$ e $\tau > 0$, tais que para quaisquer $u_0, u_1 \in Br(v_0) \subset X_1$ existe uma única solução branda $u \in C([0,\tau]; X_1)$ para o problema (3.2.1). Além disso, para todo $0 \leq \theta < \beta$, tal que $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$, segue*

$$u \in C([0,\tau]; X_{1+\theta})$$

e se $\theta > 0$, então

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha\theta} \|u(t,u_0,u_1)\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se u_0, u_1, w_0 e $w_1 \in Br(v_0) \subset X_1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$t^{\alpha\theta}\|u(t,u_0,u_1) - u(t,w_0,w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq C(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + \|u_1 - w_1\|_{X_1})$$

para todo $t \in [0,\tau]$.

Demonstração. Considere $\nu \in (0,1)$ e $\tau \in (0,1)$, tais que

$$\|E_\alpha(tA)\nu_0 - \nu_0\|_{X_1} \leq \frac{\nu}{4}, \|S_\alpha(tA)\nu_0 - \nu_0\|_{X_1} \leq \frac{\nu}{4} \text{ e } CM(R+1)\tau^{\alpha\beta}B(\alpha\beta,1) \leq \frac{\nu}{4},$$

para todo $t \in [0,\tau]$, onde

$$R = \max\{(\|\nu_0\|_{X_1} + \nu)^\rho, 2(\|\nu_0\|_{X_1} + \nu)^{\rho-1}\}.$$

Para $r = \frac{\nu}{4M}$ defina

$$K = \{u \in C([0,\tau], X_1); \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - \nu_0\|_{X_1} \leq \nu\}$$

e defina o operador

$$(Tu)(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds.$$

Nosso proposito é mostrar que K é um conjunto T-invariante e T é uma contração. Inicialmente, provemos que $T : K \to K$ está bem definida. Considere $0 \leq t_1 < t < \tau$ e $u \in K$. Então

$$\|(Tu)(t) - (Tu)(t_1)\|_{X_1} \leq \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(t_1A)u_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1 - S_\alpha(t_1A)u_1\|_{X_1} + I,$$

onde

$$I := \left\| \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds - \int_0^{t_1} R_\alpha((t_1-s)A)f(s,u(s))ds \right\|_{X_1}.$$

Usando a continuidade forte dos operadores $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, temos que

$$\|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(t_1A)u_0\|_{X_1} \to 0 \text{ e } \|S_\alpha(tA)u_1 - S_\alpha(t_1A)u_1\|_{X_1} \to 0$$

quando $t \to t_1^+$. Por outro lado

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^{t_1} \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)) - R_\alpha((t_1-s)A)f(s,u(s))ds\|_{X_1} \\ &+ \int_{t_1}^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds\|_{X_1} &\leq M \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha\beta-1} \|f(s,u(s))\|_{X_\beta} ds \\ &\leq \frac{MC}{\alpha\beta}[(\|\nu_0\|_{X_1} + \nu)^\rho + 1](t-t_1)^{\alpha\beta} \to 0, \end{aligned}$$

quando $t \to t_1^+$. Defina

$$I_1 := \int_0^{t_1} \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)) - R_\alpha((t_1-s)A)f(s,u(s))ds\|_{X_1} ds.$$

Assim

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^{t_1} [(t-s)^{\alpha\beta-1} - (t_1-s)^{\alpha\beta-1}] \|R'_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds \\ &+ \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha\beta-1} \|R'_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)) - R'_\alpha((t_1-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds, \end{aligned}$$

onde $R'_\alpha := t^{1-\alpha\beta} R_\alpha(tA), t > 0$. A família $\{R'_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ é fortemente continua em X_0 e da proposição (3.1.4),temos

$$\|R'_\alpha(tA)x\|_{X_1} \leq M\|x\|_{X_\beta}, \forall t > 0 \text{ e } \forall x \in X_\beta.$$

Defina

$$I_2 := \int_0^{t_1} [(t-s)^{\alpha\beta-1} - (t_1-s)^{\alpha\beta-1}] \|R'_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds \text{ e}$$

$$I_3 = \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha\beta-1} \|R'_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)) - R'_\alpha((t_1-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds.$$

Então $I_2 \leq \frac{MC}{\alpha\beta}[(\|\nu_0\|_{X_1} + \nu)^\rho + 1][t^{\alpha\beta} - (t-t_1)^{\alpha\beta} - t_1^{\alpha\beta}] \to 0$ quando $t \to t_1^+$. Finalmente, usando a continuidade forte de $\{R'_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $I_3 \to 0$, quando $t \to t_1^+$. Este fato garante que

$$\|(Tu)(t) - (Tu)(t_1)\|_{X_1} \to 0,$$

quando $t \to t_1^+$. De maneira análoga, prova para o caso $t_1 \in (0,\tau]$ e $t \to t_1^-$.
Para concluir que K é um conjunto T-invariante, considere que $t \in [0,\tau]$ e $u \in K$. Então, temos

$$\begin{aligned} \|(Tu)(t) - \nu_0\|_{X_1} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0 - \nu_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1} \\ &+ \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds \\ &\leq \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(tA)\nu_0\|_{X_1} + \|E_\alpha(tA)\nu_0 - \nu_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1} \\ &+ CM\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha\beta}(\|u(s)\|_{X_1}^\rho + 1)ds \\ &\leq \frac{3\nu}{4} + CM(R+1)\tau^{\alpha\beta}B(1,\alpha\beta) \\ &\leq \nu. \end{aligned}$$

Ou seja, $T : K \to K$ está bem definida. Mostraremos agora que T é uma contração. Sejam $t \in [0,\tau]$ e $u, v \in K$. Então

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t) - (Tv)(t)\|_{X_1} &\leq \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]\|_{X_1} ds \\
&\leq M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha\beta} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|_{X_\beta} ds \\
&\leq MC \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha\beta} [\|u(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1] \|u(s) - v(s)\|_{X_1} ds \\
&\leq MC(\sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + \sup_{s\in[0,\tau]} \|v(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1) B(1,\alpha\beta) \tau^{\alpha\beta} \sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s) - v(s)\|_{X_1} \\
&\leq MC[2(\|\nu_0\|_{X_1} + \nu)^{\rho-1} + 1] \tau^{\alpha\beta} B(1,\alpha\beta) \sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s) - v(s)\|_{X_1} \\
&\leq \frac{\nu}{4} \sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s) - v(s)\|_{X_1} \\
&\leq \frac{1}{4} \sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s) - v(s)\|_{X_1}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $T : K \to K$ é uma contração e, pelo Teorema do Ponto Fixo, T tem um único ponto fixo e K que é uma solução branda em (3.2.1). Para provar a unicidade de soluções brandas, suponha que u, v são soluções brandas em (3.2.1). Então para todo $t \in [0,\tau]$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{X_1} &\leq \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]\|_{X_1} ds \\
&\leq M \int_0^t (t-s)^{-1\alpha\beta} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|_{X_\beta} ds \\
&\leq CM \int_0^t (t-s)^{-1\alpha\beta} (\|u(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1) \|u(s) - v(s)\|_{X_1} ds \\
&\leq b \int_0^t (t-s)^{-1\alpha\beta} \|u(s) - v(s)\|_{X_1} ds.
\end{aligned}$$

Onde $b := MC(\sup_{s\in[0,\tau]} \|u(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + \sup_{s\in[0,\tau]} \|v(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1)$. Podemos agora aplicar a desigualdade de Gronwall (1.1.1), assim concluímos que $u(t) = v(t)$ para todo $t \in [0,\tau]$. Para completar a prova considere $0 < \theta < \beta$ tais que $\alpha(1 + \theta - \beta) < 1$. Então para todo $t \in (0,\tau]$ temos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0\|_{X_{1+\theta}} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_{1+\theta}} + \int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)\|_{X_{1+\theta}} ds \\
&\leq M(t^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{X_1} + t^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{X_1}) + CM \int_0^t (t-s)^{-1-\alpha(\theta-\beta)} (\|u(s)\|_{X_1}^\rho + 1) ds \\
&\leq M(t^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{X_1} + t^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{X_1}) + CM \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_1}^\rho + 1) t^{\alpha(\beta-\theta)} B(\alpha(\beta-\theta), 1).
\end{aligned}$$

Portanto, $u : (0, \tau) \to X_{1+\theta}$ está bem definida. Para provarmos que $u \in C((0, \tau]; X_{1+\theta})$ usamos argumentos semelhantes ao usado anteriormente. Assim segue da estimativa acima que se $t > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} \leq t^{\alpha\beta}&\|E_\alpha(tA)u_0\|_{X_{1+\theta}} + Mt\|u_1\|_{X_1} \\
&+ CM \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_1}^{\rho} + 1)t^{\alpha\beta}B(\alpha(\beta - \theta), 1).
\end{aligned}
$$

Da observação (3.1.1), segue que o lado direito da desigualdade acima tende a 0 quando $t \to 0^+$. Por fim, se u_0, u_1, w_0 e $w_1 \in B_r(\nu_0)$ então

$$
\begin{aligned}
t^{\alpha\theta}\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_{1+\theta}} &\leq M(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + |u_1 - w_1\|_{X_1}) \\
&+ \Gamma_\theta(t) \sup_{0\leq t\leq\tau} \|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_1},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\theta(t) = CMt^{\alpha\beta}&B(\alpha(\beta - \theta), 1) \sup_{0\leq t\leq\tau} \{\|u(t, u_0, u_1)\|_{X_1}^{\rho-1}\} \\
&+ CM^{\alpha\beta}B(\alpha(\beta - \theta), 1)(\sup_{0\leq t\leq\tau} \{\|u(t, w_0, w_1)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1)\}.
\end{aligned}
$$

Para $\theta = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_1} &\leq M(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + |u_1 - w_1\|_{X_1}) \\
&+ \frac{1}{4} \sup_{0\leq t\leq\tau} \{\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_1}\}.
\end{aligned}
$$

O que implica

$$
\sup_{0\leq t\leq\tau} \{\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_1}\} \leq 2M(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + \|u_1 - w_1\|_{X_1}).
$$

Tomando $0 \leq \theta \leq \theta_0 < \beta$, e usando as desigualdades acima temos que

$$
\begin{aligned}
t^{\alpha\theta}\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_{1+\theta}} &\leq M(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + |u_1 - w_1\|_{X_1}) \\
&+ 2M\Gamma_\theta(t)(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + |u_1 - w_1\|_{X_1}).
\end{aligned}
$$

Isto é

$$
t^{\alpha\theta}\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_1} \leq c(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + |u_1 - w_1\|_{X_1}),
$$

onde $c = M(1 + 2\sup\{\Gamma_\theta(t); 0 \leq t \leq \tau, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$.
O que conclui a prova. □

Em muitas aplicações, os termos não lineares são independentes do tempo. Para cobrir esta situação, consideramos o caso particular de (3.2.1) dado por

$$
\begin{cases} D_t^\alpha u = Au + f(u(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.2.2}
$$

onde $f : X_1 \to X_\beta$, $0 < \beta \leq 1$, satisfazendo

$$\|f(u) - f(v)\|_{X_\beta} \leq c(\|u\|_{x_1}^{\rho-1} + \|v\|_{x_1}^{\rho-1})\|u - v\|_{X_1} \text{ e } \|f(u)\|_{X_\beta} \leq c\|u\|_{x_1}^{\rho},$$

para $c > 0$ e para todo $u, v \in X_1$, nós temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.1. *Considere $\alpha \in (1, 2)$. Se $\alpha(1 - \beta) < 1$, então dado $\nu_0 \in X_1$, podemos considerar $r > 0$ e $\tau > 0$ tais que para qualquer u_0 e $u_1 \in B_r(\nu_0) \subset X_1$ existe uma solução branda $u \in C([0, \tau]; X_1)$ do problema (3.2.2). Além disso, para todo $\theta \in [0, \beta)$, tal que $\alpha(1 + \theta - \beta) < 1$, segue que*

$$u \in C([0, \tau]; X_{1+\theta})$$

e, se $\theta > 0$, então

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha\theta} \|u(t, u_0, u_1)\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se u_0, u_1, w_0 e $w_1 \in B_r(\nu_0) \subset X_1$, então existe uma constante $c > 0$, tal que

$$t^{\alpha\theta}\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq c(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + \|u_1 - w_1\|_{X_1}),$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Agora, estudaremos a generalização de (3.2.1) com mais de um termo não linear, ou seja, consideramos o problema

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t, u(t)), t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Como uma extensão do teorema (3.2.1), obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2. *Seja $1 < \alpha < 2$ e $f_i \in \mathcal{F}(C_i, \rho_i, \beta_i)$, com $1 \leq i \leq n$. Se $\alpha(1 - \beta) < 1$, onde $\beta := \min_{1 \leq i \leq n}\{\beta_i\}$, então dado $\nu_0 \in X_1$ podemos considerar $r > 0$ e $\tau > 0$, tal que para qualquer u_0 e $u_1 \in B_r(\nu_0) \subset X_1$ existe uma única solução branda $u \in C([0, \tau], X_1)$ para o problema (3.2.3). Além disso, para todo $0 \leq \theta < \beta$ tal que $\alpha(1 + \theta - \beta) < 1$, segue que*

$$u \in C([0, \tau], X_{1+\theta})$$

e se $\theta > 0$, então

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha\theta} \|u(t, u_0, u_1)\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se u_0, u_1, w_0 e $w_1 \in Br(v_0) \subset X_1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$t^{\alpha\theta}\|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq C(\|u_0 - w_0\|_{X_1} + \|u_1 - w_1\|_{X_1})$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Demonstração. Esboçamos a prova ilustrando quais ajustes na prova do teorema (3.2.1) devem ser feitos aqui. Para isso, considere $\nu \in (0,1)$ e $\tau \in (0,1)$, tais que

$$\|E_\alpha(tA)\nu_0 - \nu_0\|_{X_1} < \frac{\nu}{4},\ \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1} < \frac{\nu}{4} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} MC_i(R_i+1)\tau^{\alpha\beta_i}B(\alpha\beta_i,1) < \frac{\nu}{4}$$

para todo $t \in [0,\tau]$, onde

$$R_i := \max_{i\in[1,n]}\{(\|\nu_0\|_{X_1}+\nu)^{\rho_i}, 2(\|\nu_0\|_{X_1}+\nu)^{\rho_i-1}\}.$$

Para $r = \frac{\nu}{4M}$ defina

$$K = \{u \in C([0,\tau],X_1);\ \sup_{t\in[0,\tau]}\|u(t)-\nu_0\|_{X_1} \leq \nu\},$$

e defina em K o operador

$$Tu(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t R_\alpha((t-s)A)f_i(s,u(s))ds.$$

Assim

$$\begin{aligned}\|Tu(t)-\nu_0\|_{X_1} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0-\nu_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1\|_{X_1}\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \|R_\alpha((t-s)A)f_i(s,u(s))\|_{X_1}ds\\ &< \frac{3\nu}{4} + \sum_{i=1}^{n} MC_i(R_i+1)\tau^{\alpha\beta_i}B(\alpha\beta_i,1) < \nu.\end{aligned}$$

Logo $Tu \in K$. Além disso, se u e $v \in K$, então a estimativa

$$\|Tu(t)-Tv(t)\|_{X_1} \leq \sum_{i=1}^{n} MC_i[2(\|\nu_0\|_{X_1}+\nu)^{\rho_i-1}+1]\tau^{\alpha\beta_i}B(\alpha\beta_i,1)\sup_{s\in[0,\tau]}\|u(s)-v(s)\|_{X_1},$$

garante que $T: K \to K$ é uma contração de $\frac{1}{4}$. Para concluir a demonstração segue de maneira análoga ao teorema (3.2.1). □

3.2.2 Continuação e alternativa de blow-up.

Agora, provaremos um resultado de continuidade e uma alternativa blow-up para a solução branda garantida pelo Teorema (3.2.1). Em particular, garantimos a existência de um tempo máximo para esta solução.

Definição 3.2.1. *Seja $u : [0,\tau] \to X_1$ uma solução branda do problema (3.2.1). Se $t_1 > \tau$ e $v : [0,t_1] \to X_1$ é uma solução branda do problema (3.2.1), então dizemos que v é uma continuação de u em $[0,t_1]$.*

Teorema 3.2.3. *Nas condições do Teorema (3.2.1), considere $\tau > 0$ e $u : [0,\tau] \to X_1$ a solução branda do problema (3.2.1). Então, existem $t_1 > \tau$ e uma única continuação u^* de u em $[0,t_1]$.*

Demonstração. Fixe $0 < \nu \leq 1$ e tome $t_1 > \tau$ de modo que para todo $t \in [\tau, t_1]$

$$\|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau A)u_0\|_{X_1} < \frac{\nu}{4},\ \|S_\alpha(tA)u_1 - S_\alpha(\tau A)u_1\|_{X_1} < \frac{\nu}{4},$$
$$\int_0^\tau \|[R_\alpha((t-s)A) - R_\alpha((\tau-s)A)]f(s,u(s))\|_{X_1} ds < \frac{\nu}{4}$$
$$\text{e } MCRt^{\alpha\beta}\int_{\frac{\tau}{t}}^1 (1-s)^{-1+\alpha\beta} ds < \frac{\nu}{4},$$

onde $R := \max\{(\|u(\tau)\|_{x_1} + \nu)^\rho + 1, 2(\|u(\tau)\|_{x_1} + \nu)^{\rho-1} + 1)\}$. Seja

$$K = \{v \in C([0,t_1]; X_1);\ \sup_{t\in[\tau,t_1]} \|v(t) - u(\tau)\|_{X_1} \leq \nu \text{ e } v(t) = u(t), t \in [0,\tau]\}$$

e defina em K o operador T, dado por:

$$(Tv)(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,v(s))ds.$$

Note que, se $v \in K$, então $(Tv)(t) = u(t)$ para todo $t \in [0,\tau]$, de maneira análoga mostra que $Tv \in C([0,t_1]; X_1)$ sempre que $v \in K$. Para todo $t \in [\tau, t_1]$, temos

$$\begin{aligned}
\|(Tv)(t) - u(\tau)\|_{X_1} &= \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau A)u_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(tA)u_1 - S_\alpha(\tau A)u_1\|_{X_1} \\
&+ \left\|\int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,v(s)) - \int_0^\tau R_\alpha((\tau-s)A)f(s,u(s))ds\right\|_{X_1} \\
&\leq \frac{\nu}{4} + \frac{\nu}{4} + \int_0^\tau \|R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s)) - R_\alpha((\tau-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds \\
&+ \int_\tau^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,v(s))\|_{X_1} ds \\
&\leq \frac{3\nu}{4} + \int_\tau^t \|R_\alpha((t-s)A)f(s,v(s))\|_{X_1} ds \\
&\leq \frac{3\nu}{4} + MCRt^{\alpha\beta}\int_{\frac{\tau}{t}}^1 (1-s)^{-1+\alpha\beta} ds \leq \nu.
\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\|(Tv)(t) - u(\tau)\|_{X_1} \leq \nu, \forall t \in [\tau, t_1].$$

Logo K é T-invariante. Mostraremos agora que $T : K \to K$ é uma contração. De fato, se $v, w \in K$ e $t \in [\tau, t_1]$, então

$$\begin{aligned}
\|(Tv)(t) - (Tw)(t)\|_{X_1} &\leq \left\| \int_\tau^t R_\alpha((t-s)A)[f(s,v(s)) - f(s,w(s))] \right\|_{X_1} ds \\
&\leq M \int_\tau^t (t-s)^{-1+\alpha\beta} \|f(s,v(s)) - f(s,w(s))\|_{X_\beta} ds \\
&\leq MC \int_\tau^t (t-s)^{-1+\alpha\beta} (\|v(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + \|w(s)\|_{X_1}^{\rho-1} + 1)\|v(s) - w(s)\|_{X_1} ds \\
&\leq MCRt^{\alpha\beta} \int_{\frac{\tau}{t}}^1 (1-s)^{-1+\alpha\beta} ds \sup_{s\in[0,t_1]} \{\|v(s) - w(s)\|_{X_1}\} \\
&\leq \frac{\nu}{4} \sup_{s\in[0,t_1]} \{\|v(s) - w(s)\|_{X_1}\} \\
&\leq \frac{1}{4} \sup_{s\in[0,t_1]} \{\|v(s) - w(s)\|_{X_1}\}.
\end{aligned}$$

Isto é

$$\sup_{s\in[0,t_1]} \|(Tv)(t) - (Tw)(t)\|_{X_1} \leq \frac{1}{4} \sup_{t\in[0,t_1]} \{\|v(s) - w(s)\|_{X_1}\}.$$

Portanto T é uma contração e pelo teorema do ponto fixo de Banach, podemos obter único $u* \in K$ que é continuação de u em $[0, t_1]$. Se demonstra a unicidade usando o Lema Gronwall (1.1.1). $\square$

Em seguida, temos o resultado da existência global ou não continuação por blow-up.

Teorema 3.2.4. *Sob as condições do Teorema (3.2.1), seja u a solução branda do problema (3.2.1) com tempo máximo de existência $t_{max} > 0$. Então $t_{max} = \infty$ ou*

$$\lim_{t\to t_{max}^-} \sup \|u(t)\|_{X_1} = \infty.$$

Demonstração. Suponha que $t_{max} < \infty$ e que existe $k > 0$, tal que $\|u(t)\|_{X_1} \leq k$ para todo $t \in [0, t_{max})$. Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, t_{max})$, tal que $t_n \to t_{max}$ quando $n \to \infty$. Analogamente a prova do teorema (3.2.1), temos que

$$\int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha\beta-1} \|R'_\alpha((t_n - s)A)f(s,u(s)) - R'_\alpha((t_{max} - s)A)f(s,u(s))\|_{x_1} ds \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $R'_\alpha(tA) := t^{1-\alpha\beta}R_\alpha(tA), t > 0$. Suponha que $t_n < t_m < t_{max}$. Então

$$\begin{aligned}
\|u(t_n) - u(t_m)\|_{X_1} &\leq \|E_\alpha(t_nA)u_0 - E_\alpha(t_mA)u_0\|_{X_1} + \|S_\alpha(t_nA)u_1 - S_\alpha(t_mA)u_1\|_{X_1} \\
&+ \int_0^{t_n} \|[R_\alpha((t_n - s)A) - R_\alpha((t_m - s)A)]f(s,u(s))\|_{x_1} ds \\
&+ \int_{t_n}^{t_m} \|R_\alpha((t_m - s)A)f(s,u(s))\|_{X_1} ds.
\end{aligned}$$

Da continuidade forte de $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, temos que os dois primeiros termos do lado direito da desigualdade acima tende a 0, quando $n,m\to\infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_m}\|R_\alpha((t_m-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1}ds &\leq M\int_{t_n}^{t_m}(t_m-s)^{\alpha\beta-1}\|f(s,u(s))\|_{X_\beta}ds\\ &\leq \frac{MC}{\alpha\beta}(k^\rho+1)(t_m-t_n)^{\alpha\beta}\to 0,\ \text{quando } m,n\to\infty.\end{aligned}$$

Além disso, defina

$$I:=\int_0^{t_n}\|[R_\alpha((t_n-s)A)-R_\alpha((t_m-s)A)]f(s,u(s))\|_{X_1}ds.$$

Então

$$\begin{aligned}I &\leq \int_0^{t_n}[(t_m-s)^{\alpha\beta-1}-(t_n-s)^{\alpha\beta-1}]\|R'_\alpha((t_n-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1}ds\\ &+\int_0^{t_n}[(t_n-s)^{\alpha\beta-1}\|R'_\alpha((t_n-s)A)f(s,u(s))-R'_\alpha((t_m-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1}ds\\ &\leq \frac{MC}{\alpha\beta}(k^\rho+1)[t_m^{\alpha\beta}-(t_m-t_n)^{\alpha\beta}-t_n^{\alpha\beta}]\\ &+\int_0^{t_n}(t_n-s)^{\alpha\beta-1}\|R'_\alpha((t_n-s)A)f(s,u(s))-R'_\alpha((t_{max}-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1}ds\\ &+\int_0^{t_m}[(t_m-s)^{\alpha\beta-1}\|R'_\alpha((t_m-s)A)f(s,u(s))-R'_\alpha((t_{max}-s)A)f(s,u(s))\|_{X_1}ds.\end{aligned}$$

Portanto, se $m,n\to\infty$, segue que $I\to 0$, assim temos que $\{u(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X_1 e, portanto, existe $u'\in X_1$, tal que $\lim_{n\to\infty}\|u(t_n)-u'\|_{X_1}=0$. Com isso, podemos estender u em $[0\ t_{max}]$ obtendo a igualdade

$$u(t)=E_\alpha(tA)u_0+S_\alpha(tA)u_1+\int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds,$$

para todo $t\in[0,t_{max}]$. Pelo teorema anterior, podemos estender a solução, o que é uma contradição com a maximalidade de t_{max}. $\square$

3.2.3 Dependência contínua dos dados iniciais.

Fechamos esta seção estudando o problema de dependência contínua em (3.2.1).

Teorema 3.2.5. *Seja $\beta\in(0,1]$, tal que $\alpha(1-\beta)<1$ e suponha que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $f\in\mathcal{F}(C,\rho,\beta)$, sejam tais que*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(t,x)-f(t,x)\|_{X_\beta}=0,$$

uniformemente para todo subconjunto limitado Y de X_1 e todo subintervalo compacto de $[0,\infty)$. Considere $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de X_1, tais que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^0 = u_0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} u_n^1 = u_1$$

Se $u_n : [0,\tau_n] \to X_1$ é uma solução maximalmente definida no problema

$$\begin{cases} D_t^\alpha u_n(t) = Au_n(t) + f(t,u_n(t)), t > 0, \\ u_n(0) = u_0, u_n'(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

e $u : [0,\tau_0] \to X_1$ é a solução branda maximalmente definida em (3.2.1), então

$$\tau_0 \leq \liminf_{n\to\infty} \tau_n \text{ e } \lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} = 0,$$

uniformemente em subintervalos compactos de $[0,\tau_0]$.

Demonstração. Suponha que $\tau_0 > \liminf_{n\to\infty} \tau_n$, assim existe uma subsequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, $\tau_n < \tau < \tau_0$ para n suficientemente grande. Pelo teorema anterior, temos

$$\lim_{t\to\tau_n^-} \|u_n(t)\|_{X_1} = \infty, \tag{3.2.5}$$

para n suficientemente grande. Defina

$$t_{n,N} := \sup\{t \in [0,\tau_n); \sup_{0\leq s\leq t} \|u(t)\|_{X_1} \leq N\}.$$

Então $\lim_{n\to\infty} t_{n,N} = \tau_n$ e $t_{n,N} < \tau$, para n, N suficientemente grande. Defina

$$\epsilon_n(t) := \sup_{\|x\|_{X_1}\leq R} \|f_n(t,x) - f(t,x)\|_{X_\beta},$$

onde $R = \max\{N, \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_1}\}$. Temos $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n(t) = 0$ uniformemente em cada subintervalo compacto $[0,\infty)$. Para $t \in [0, t_{n,N}]$, temos

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} &\leq M\|u_n^0 - u_0\|_{X_1} + Mt\|u_n^1 - u_1\|_{X_1} \\ &+ M\int_0^t (t-s)^{\alpha\beta-1}\|f_n(s,u_n(s)) - f(s,u_n(s))\|_{X_\beta} ds \\ &+ M\int_0^t (t-s)^{\alpha\beta-1}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|_{X_\beta} ds \\ &\leq a_n + MC(2R^{\rho-1}+1)\int_0^t (t-s)^{\alpha\beta-1}\|u_n(s) - u(s)\|_{X_1} ds, \end{aligned}$$

onde $a_n := M\|u_n^0 - u_0\|_{X_1} + M\tau\|u_n^1 - u_1\|_{X_1} + M\sup_{t\in[0,\tau]} \epsilon_n(t)\tau^{\alpha\beta}B(\alpha\beta,1)$. Então, da desigualdade singular de Gronwall (1.1.1), temos

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} \leq a_n\epsilon_{\alpha\beta}(\theta t), 0 \leq t < t_{n,N},$$

onde

$$\theta = [MC(2R^{\rho-1}+1)\Gamma(\alpha\beta)]^{\frac{1}{\alpha\beta}} \text{ e } \epsilon_{\alpha\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\alpha\beta}}{\Gamma(n\alpha\beta+1)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, podemos tomar n suficientemente grande, de modo que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} \leq 1, \forall t \in [0, t_{n,N}].$$

Por fim, para n suficientemente grande, tal que

$$\|u_n(t)\|_{X_1} \leq \|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} \|u(t)\|_{X_1} \leq 1 + \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_1},$$

para todo $t \in [0, t_{n,N}]$. Por outro lado, $t_{n,N} \to \tau_n$, quando $n \to \infty$, o que contradiz a equação (3.2.5), e portanto, $\tau_0 \leq \liminf_{n\to\infty} \tau_n$. Com um procedimento semelhante, provamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_{X_1} = 0$$

uniformemente para t em subintervalos compactos de $[0, \tau_0)$ o que conclui a prova. □

Capítulo 4

Aplicações.

Nesta seção, aplicamos a teoria abstrata desenvolvida neste trabalho a algumas importantes equações de evolução fracionária. Começamos com a equação de fracionária de difusão-onde em espaços de Lebesgue. Na sequência, as equações de difusão-onda fracionárias não-lineares são estudadas na configuração $L^p(\Omega)$ por meio de escalas de interpolação-extrapolação e dual de escalas interpolação-extrapolação de espaços de Sobolev. Em seguida, estudamos uma equação de placa não linear na estrutura $L^2(\Omega)$. Em cada caso, aproveitamos imersões do tipo Sobolev envolvendo espaços potenciais de Bessel. Mais precisamente, seja Ω um domínio limitado suficientemente suave em $\mathbb{R}^N$ para que o espaço de Bessel potencial $H_p^s(\Omega)$ esteja bem definido. Assim a imersão a seguir é válida

$$H_p^s \hookrightarrow H_q^t,\ \frac{s}{N} - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{N} - \frac{1}{q},\ 1 < p \leq q < \infty. \tag{4.0.1}$$

Os espaços potenciais de Bessel coincidem com os espaços de Sobolev-Slobodeckii $W^{s,p}$ sempre que $p = 2$ ou s é um número inteiro, ver [1]

4.1 Equações de difusão-onda fracionárias lineares em espaços de Lebesgue.

Vamos considerar a equação difusão-onda fracionária linear N-dimensional não homogênea

$$\partial_t^\alpha u = \Delta u + f \text{ em } [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \tag{4.1.1}$$

com dados iniciais

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ e } u_t(0, x) = u_1(x),$$

onde $u_0, u_1 \in L^q(\mathbb{R}^N), 1 < q < \infty$ e $N \geq 1$.

Suponha $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função continua e limitada. Sejam $Y_0 = L^q(\mathbb{R}^N)$, $Y_1 = W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{F} = (\cdot, \cdot)_\theta, 0 < \theta < 1$ o funtor de interpolação complexa. Como $L = \Delta$ é um operador setorial em Y_0 com domínio $D(L) = Y_1$, nós consideramos $\{Y_\beta; \beta \leq -1\}$ a escala de interpolação e extrapolação associada a L e $\mathcal{F}$. A realização de L em X_β denotada por L_β, é uma isometria de $X_{\beta+1}$ em X_β e

$$L_\beta = D(L_\beta) + X_{\beta+1} \subset X_\beta \to X_\beta$$

é um operador setorial,ver em [4].

Para fornecer nossa abordagem para o problema (4.1.1), seja $X_\beta := Y_{\beta-1}, \beta \geq 0$. Então $X_1 = Y_0 = L^q(\mathbb{R}^N)$ e $X_0 = Y_{-1} = (W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Denote $A_q : L_{-1} : X_1 \subset X_0 \to X_0$. Com isso, o problema acima pode ser reescrito em $L^q(\mathbb{R}^N)$ como

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = A_q u(t) + f(t), t \in [0, \infty), \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

onde D_t^α é a derivada fracionária de Caputo, $u_0, u_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $f : [0, \infty) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ é uma função continua e limitada, dada por $f(t)x = f(t, x)$ com $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, para cada $1 < q < \infty$ existe $\frac{\pi}{2} < \eta_q < \pi$, tal que o setor

$$\{z \in \mathbb{C}^*; |\arg(z)| \leq \eta_q\} \subset \rho(A_q).$$

Portanto, com base na teoria desenvolvida, nos permite considerar o problema (4.1.1) para todo $1 < \alpha < \frac{2\eta_q}{\pi} < 2$. Usando o teorema 3.1.1, seja $u \in C([0, \infty), L^q(\mathbb{R}^N)$ a solução branda do nosso problema. Então u é dada por

$$u(x,t) = E_\alpha(tA_q)u_0(x) + S_\alpha(tA_q)u_1(x) + \int_0^t R_\alpha((t-s)A_q)f(s,x)ds,$$

$t \in [0, \infty)$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, $u \in C((0, \infty); X_{1+\theta})$ para todo $0 < \theta < \frac{1}{\alpha}$, então existe $M > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_{1+\theta}} &\leq Mt^{-\alpha\theta}\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + Mt^{1-\alpha\theta}\|u_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &+ Mt^{\alpha(1-\theta}B(\alpha(1-\theta), 1) \sup_{0 \leq s < \infty} \{\|f(s)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\}, \end{aligned}$$

e $\lim_{t \to 0} t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_{1+\theta}} = 0$.

Observação 4.1.1. *Considere a equação da onda linear*

$$\partial_t^2 u = \Delta u \text{ em } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \tag{4.1.3}$$

com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x) \text{ e } u_t(0,x) = u_1(x),$$

onde $u_0, u_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$. *Lembrando que uma solução branda para* (4.1.3) *é uma solução continua* u*, tal que*

$$u(t,x) = C(t)u_0(x) + S(t)u_1(x), t \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Aqui $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *representam as famílias cossenos e senos associados ao operador de Laplace. Um importante resultado garante que* (4.1.3) *é, de maneira geral, mal posta em* $L^q(\mathbb{R}^N), 1 \leq q < \infty$. *Esta afirmação decorre de um fato bem conhecido, que que se o operador Laplace gera uma família de cossenos em* $L^q(\mathbb{R}^N), 1 \leq q < \infty$*, então* $N = 1$ *ou* $q = 2$*, veja por exemplo em [5]. Em certo sentido, esta é a maior diferença matemática entre equações de difusão-onda fracionárias lineares e equações de ondas lineares.*

4.2 Equações de difusão-onda fracionárias não-lineares em espaços de Lebesgue.

Nesta subseção, estudamos a seguinte equação de onda fracionária

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \Delta u + |u|^{\rho-1}u \text{ em } (0,\infty)\times\Omega, \\ u = 0 \text{ em } [0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

onde $\rho > 1$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com limite suficientemente suave $\partial\Omega$, $\alpha \in (1,2)$ e ∂_t^α é a derivada fracionária de Caputo. Nosso objetivo é aplicar a teoria abstrata desenvolvida na última seção ao problema (4.2.1) no espaço $L^q(\Omega), 1 < q < \infty$. Para isso, note que o operador $L = -\Delta$ com condições de contorno de Dirichlet pode ser visto como um operador setorial em $E_0^q = L^q(\Omega)$ com domínio $E_q^1 = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$. Então, existe uma constante $\phi_q \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \phi_q, z \neq 0\} \subset \rho(\Delta)$. Portanto, nossos resultados abstratos podem ser aplicados a (4.2.1) para todo $\alpha \in (1, \frac{2\phi_q}{\pi})$. É bem conhecido que a escala de espaços de potências fracionárias $\{E_q^\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ associada a L satisfaz

$$\begin{cases} E_q^\beta \hookrightarrow H_q^{2\beta}(\Omega),\ \beta \geq 0,\ 1 < q < \infty, \\ E_q^{-\beta} = (E_{q'}^\beta)', \beta \geq 0,\ 1 < q < \infty,\ q' = \frac{q}{q-1}. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Portanto, usando 4.0.1 e argumentos de dualidade, obtemos

$$\begin{cases} E_q^\beta \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r \leq \frac{Nq}{N-2\beta q},\ 0 \leq \beta < \frac{N}{2q}, \\ E_q^0 = L^q(\Omega), \\ E_q^\beta \hookleftarrow L^s(\Omega),\ s > \frac{Nq}{N-2\beta q},\ -\frac{N}{2q} < \beta \leq 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Além disso, a realização de L em E_q^β , denotado por L_β, é uma isometria de $E_q^{\beta+1}$ em E_q^β e

$$L_\beta : D(L_\beta) = E_q^{\beta+1} \subset E_q^\beta \to E_q^\beta$$

é um operador setorial. Além disso, $D(L_\beta^\alpha) = E_q^{\beta+1}$.
Defina $X_q^\beta := E_q^{\beta-1}, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $A_q : X_q^1 \subset X_q^0 \to X_q^0$ o operador L^{-1}. De 4.2.3, segue que a escala de potências fracionárias associada a A_q satisfaz

$$\begin{cases} X_q^\beta \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r \leq \frac{Nq}{N+2q-2\beta q},\ 0 \leq \beta < 1 + \frac{N}{2q}, \\ X_q^0 = L^q(\Omega), \\ X_q^\beta \hookleftarrow L^s(\Omega),\ s \geq \frac{Nq}{N+2q-2\beta q},\ 1 - \frac{N}{2q} < \beta \leq 0. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Portanto, a formulação abstrata do problema 4.2.1 na teoria $L^q(\Omega)$ torna-se

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = A_q u + f(u),\ t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

onde $f(\psi) = |\psi|^{\rho-1}\psi$, para $\psi \in X_q^1 = L^q(\Omega)$.

Lema 4.2.1. *Se* $\max\{1 - \frac{N}{2q}, 0\} < \beta < 1$ *e* $1 < \rho \leq 1 + \frac{2q}{N}(1-\beta)$*, então* $f : X_1 \to X_\beta$ *satisfaz*

$$\|f(u) - f(v)\|_{X_\beta} \leq C\left(\|u\|_{X_1}^{\rho-1} + \|v\|_{X_1}^{\rho-1}\right)\|u - v\|_{X_1},$$

para $C > 0$ *e para todo* $u, v \in X_1$.

Demonstração. Usando a hipótese de $\max\{1 - \frac{N}{2q}, 0\} < \beta < 1$ e usando 4.2.4, temos

$$L^{\frac{Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega) \hookrightarrow X_q^\beta. \tag{4.2.6}$$

Além disso, note que $1 < \rho \leq 1 + \frac{2q}{N}(1-\beta)$ implica $\frac{\rho N q}{N+2q-2\beta q} \leq q$, logo

$$L^{\frac{\rho Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega) \hookleftarrow L^q(\Omega). \tag{4.2.7}$$

Finalmente, tomando $u, v \in X_q^1 = L^q(\Omega)$, usando as duas inclusões acima e a desigualdade de Hölder, nós obtemos

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{X_q^\beta} &\leq C\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u - v\|_{L^{\frac{\rho Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)}\left(\|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{\rho Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{\rho Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)}\right) \\ &\leq C\|u - v\|_{X_q^1}(\|u\|_{X_q^1}^{\rho-1} - \|v\|_{X_q^1}^{\rho-1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{X_q^\beta} &\leq C\|f(u)\|_{L^{\frac{Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^p_{L^{\frac{\rho Nq}{N+2q-2\beta q}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^\rho_{X_q^1}. \end{aligned}$$

□

Usando a teoria abstrata e o lema anterior, concluímos esta subseção com o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Considere* $1 < \alpha < \frac{2\phi q}{\pi}, \max\{1 - \frac{N}{2q}, 0\} < \beta < 1$ *e* $1 < \rho \leq 1 + \frac{2q}{N}(1-\beta)$. *Se* $\alpha(1-\beta) < 1$, *então dado* $v_0 \in L^q(\Omega)$, *podemos considerar* $r > 0$ *e* $\tau > 0$ *tal que para qualquer* $u_0, u_1 \in B_r(v_0) \subset L^q(\Omega)$ *existe uma única solução suave* $u \in C([0,\tau], L^q(\Omega))$ *do problema 4.2.5 que pode ser continuado até um tempo máximo de existência* $t_{max} > 0$ *tal que* $t_{max} = \infty$ *ou*

$$\limsup_{t \to t_{\max}^-} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} = \infty.$$

Além disso, para todo $0 \leq \theta < \beta$ *tal que* $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$, *segue que* $u \in C((0,\tau], X_q^{1+\theta})$ *e, se* $\theta > 0$, *então*

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha\theta} \|u(t, u_0, u_1\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se $u_0, w_0, u_1, w_1 \in B_r(v_0) \subset L^q(\Omega)$, *então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$t^{\alpha\theta} \|u(t, u_0, u_1) - u(t, w_0, w_1)\|_{X_q^{1+\theta}} \leq C \left(\|u_0 - w_0\|_{L^q(\Omega)} + \|u_1 - w_1\|_{L^q(\Omega)} \right),$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

4.3 Equações de placas fracionárias com não linearidades do tipo gradiente.

Agora, consideramos a seguinte equação de placa fracionária

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = -\Delta^2 u + |\nabla u|^p \text{ em } (0,\infty) \times \Omega, \\ u = \Delta u = 0 \text{ em } [0,\infty) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

onde $\rho > 1$, Ω é um domínio aberto suficientemente suave em $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in (1,2)$ e ∂_t^α é a derivada fracionaria de Caputo. Aplicaremos a teoria abstrata desenvolvida na última seção ao problema 4.3.1 no $H_0^1(\Omega)$. Aqui, Δ^2 é o operador bi harmônico com condições de contorno articuladas e Δ é o operador de Laplace com condições de contorno de Dirichlet em $L^2(\Omega)$, ou seja, $D(\Delta) = H_D^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e

$$D(\Delta^2) = H_{\mathcal{H}}^4 = \{\psi \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta\psi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}^\gamma \hookrightarrow L^r(\Omega), \ r \leq \frac{2N}{N-8\gamma}, \ 0 \leq \gamma < \frac{N}{8}, \\ \mathcal{E}^0 = L^2(\Omega), \\ \mathcal{E}^\gamma \hookleftarrow L^s(\Omega), \ s \geq \frac{2N}{N-8\gamma}, \ -\frac{N}{8} < \beta \leq 0. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Defina $X_\beta := \mathcal{E}^{\beta-\frac{3}{4}}$, $\beta \in \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{A} : X_1 \subset X_0 \to X_0$ a X_0- realização de A. Portanto, a formulação abstrata do problema 4.3.1 em $X_1 = H_0^1(\Omega)$ torna-se

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = \mathcal{A}u + f(u), \ t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{4.3.3}$$

onde $f(u) = |\nabla u|^p, \ u \in H_0^1(\Omega)$.

Lema 4.3.1. *Se* $\max\{\frac{6-N}{8}, 0\} < \beta < \frac{3}{4}$ *e* $1 < \rho \leq 1 + \frac{3-4\beta}{N}$*, então* $f : X_1 \to X_1$ *satisfaz*

$$\|f(u) - f(v)\|_{X_\beta} \leq C(\|u\|_{X_1}^{\rho-1} + \|v\|_{X_1}^{\rho-1})\|u - v\|_{X_1}$$

e

$$\|f(u)\|_{X_\beta} \leq C\|u\|_{X_1}^\rho,$$

para $C > 0$ *e para todos* $u, v \in X_1$.

Demonstração. Usando a hipótese de $\max\{\frac{6-N}{8}, 0\} < \beta < \frac{3}{4}$ e usando 4.3.2, nós obtemos

$$L^{\frac{2N}{N+6-8\beta}}\Omega \hookrightarrow X_\beta. \tag{4.3.4}$$

Além disso, note que $1 < \rho \leq 1 + \frac{3-4\beta}{N}$ implica $\frac{4\rho N}{N+6-8\beta} \leq 2$, logo

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2\rho N}{N+8-8\beta}}(\Omega). \tag{4.3.5}$$

Finalmente, tomando $u, v \in X_1 = H_0^1(\Omega)$, usando as duas inclusões acima e a desigualdade de Hölder, nós obtemos

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{X_\beta} &\leq C\|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{2N}{N+6-8\beta}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u - v\|_{L^{\frac{2\rho N}{N+6-8\beta}}(\Omega)} \left(\|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{2\rho N}{N+6-8\beta}}(\Omega)} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{2\rho N}{N+6-8\beta}}(\Omega)}\right) \\ &\leq C\|u - v\|_{X_q^1}(\|u\|_{X_1}^{\rho-1} - \|v\|_{X_1}^{\rho-1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{X_\beta} &\leq C\|f(u)\|_{L^{\frac{2N}{N+6-8\beta}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|^p_{L^{\frac{2\rho N}{N+6-8\beta}}(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|_{X_1}^\rho. \end{aligned}$$

□

Usando a teoria abstrata e o lema anterior, concluímos esta subseção com o seguinte teorema.

Teorema 4.3.1. *Considere* $1 < \alpha < 2, \max\{\frac{6-N}{8}, 0\} < \beta < \frac{3}{4}$ *e* $1 < \rho \leq 1 + \frac{3-4\beta}{N}$. *Se* $\alpha(1-\beta) < 1$, *então dado* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, *podemos considerar* $r > 0$ *e* $\tau > 0$ *tal que para qualquer* $u_0, u_1 \in B_r(v_0) \subset H_0^1(\Omega)$ *existe um único solução suave* $u \in C([0,\tau], H_0^1(\Omega))$ *do problema 4.3.3 que pode ser continuado até um tempo máximo de existência* $t_{max} > 0$ *tal que* $t_{max} = \infty$ *ou*

$$\limsup_{t\to t_{\max}} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty.$$

Além disso, para todo $0 \leq \theta \leq \beta$ *tal que* $\alpha(1+\theta-\beta) < 1$, *segue que* $u \in C((0,\tau], X_{1+\theta})$ *e, se* $\theta > 0$, *então*

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha\theta} \|u(t, u_0, u_1\|_{X_{1+\theta}} = 0.$$

Além disso, se $u_0, w_0, u_1, w_1 \in B_r(v_0) \subset H_0^1(\Omega)$, *então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$t^{\alpha\theta}\|u(t,u_0,u_1) - u(t,w_0,w_1)\|_{X_{1+\theta}} \leq C\left(\|u_0 - w_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1 - w_1\|_{H_0^1(\Omega)}\right),$$

para todo $t \in [0,\tau]$.

Bibliografia

[1] Adams R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

[2] Agarwal, R. P.; de Andrade, B.; Cuevas, C., Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, v. 11, p. 3532-3554, 2010.

[3] Amann, H., Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, Schmeisser/Triebel: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner Texte zur Mathematik, v. 133, (1993), 9-126.

[4] Amann, H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Abstract Linear Theory I*, Birkhäuser Verlag, (1995).

[5] Arendt, W. et al., *Vector valued Laplace transform and Cauchy problems*, Birkhäuser, 2000.

[6] Caputo, M. and Mainardi, F., Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Nuovo Cimento*, Series II, 1, (1971) 161.

[7] Debnath, L., Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering, *Int. J. Math. Math. Sci.,* v. 54, p. 3413-3442, 2003.

[8] de Almeida, M. F. and Ferreira, L. C. F., Self-similarity, symmetries and asymptotic behavior in Morrey spaces for a fractional wave equation, *Differential Integral Equations*, 25 (2012), no. 9-10, 957–976.

[9] de Almeida, M. F. ; Viana, A. Self-similar solutions for a superdiffusive heat equation with gradient nonlinearity. *Electron. J. Differ. Equ.*, v. 2016, p. 1-20, 2016.

[10] de Andrade, B.; Carvalho, A. N. ; Carvalho-Neto, P. M. ; Marín-Rubio, P. . Semilinear fractional differential equations: global solutions, critical nonlinearities and comparison results. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, v. 45, p. 439, 2015.

[11] de Andrade, B. and Santos, N., Fractional evolution equations in abstract interpolation-extrapolation scales and applications. Artigo submetido, 2023.

[12] de Santana, M. G., *Well-posedness and regularity theory for abstract integrodifferential equations in interpolation scales and applications*, Dissertação de mestrado UFS, São Cristóvão, 2021, p. 107.

[13] Elshehawev E. F., Elbarbav E. M. E., Afinfi N. A. S. and El-Shahed M., On the Solution of the Endolymph Equation Using Fractional Calculus, *Appl. Math. Comput.*, v. 124, p. 337-341, 2001.

[14] Fujita, Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, *Osaka J. Math*. 27 (1990), no. 2, 309–321.

[15] Fujita, Y. Cauchy problems of fractional order and stable processes, *Japan J. Appl. Math*. 7 (1990), no. 3, 459–476.

[16] Henríquez, H., Mesquita, J. and Pozo, J., Existence of solutions of the abstract Cauchy problem of fractional order, *J. Funct. Anal.*, 281 (2021) 109028.

[17] Kim, I., Kim, K-H. and Lim, S., An $L_q(L_p)$-theory for the time fractional evolution equations with variable coefficients, *Adv. in Math.*, **306**, (2017) 123-176. in Math. Ser., Longman, Harlow, v. 301, 1994. .

[18] Mainardi, F. and Tomirotti, M., Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions, *Annali di Geofisica* 40, (1997) 1311.

[19] Henry, D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, v. 840, 1980.

[20] Kilbas, A., Srivastava, M. and Trujillo, J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Mathematics Studies, North-Holland, Elsevier, v. 204, 2006.

[21] Lunardi, A., *Analytic Semigroups and Optimal Control in Parabolic Problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, v. 16, 1995.

[22] Pruss, J., On Linear Volterra Equations of Parabolic Type in Banach Spaces, *Tran. Amer. Math. Soc.*, v. 301, p. 691-721, 1987.

[23] Santos, N., *Equações diferenciais fracionárias abstratas com aplicações*. Tese de doutorado UFPE, Recife, 2015, 73.

[24] Sprott, J. C., Dynamical Models of Love, *Nonlinear Dyn. Psyc. Life Sci.*, v. 8, p.303-313, 2004.

[25] Triebel, H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators,* Noth-Holland, 1978.

[26] Virchenko, N. and Fedotova, I., *Generalized Associated Legendre Functions an Their Applications*, World Scientific, Singapore, 2001.